

Primeras mediciones, Leyes de escala

Mathias Kneipp, Federico Pizarro, Federico Zanón

31 de Marzo, 2025

Resumen

En el siguiente informe describiremos nuestro trabajo acerca de mediciones experimentales. El mismo consistió en reunir hojas de distintos tamaños y gramajes de papel para comprimirlas en esferas aproximadas, las cuáles asumiremos esféricas. Posteriormente mediremos sus respectivos diámetros y pesos.

Detallaremos el procedimiento y el equipo utilizado para llevar a cabo las mediciones. Por último, expondremos nuestro análisis de los datos obtenidos e ilustraremos gráficos con las relaciones entre diámetro y masa de las esferas de papel.

Como objetivo de este informe, queremos confirmar la ley de escalas, para ello buscamos que ω se aproxime a $\frac{1}{3}$ en la siguiente ecuación:

$$D \propto M^\omega$$

1. Introducción

Como principal objetivo de este informe queremos corroborar la ley de escalas, mediante el uso de distintas mediciones de diámetros de esferas de papel comprimido. Con ellos calcularemos sus volúmenes para luego graficar el aumento proporcional de éste en función del diámetro. Buscamos mostrar que se cumple la ecuación:

$$D \propto M^\omega$$

Para llevar a cabo este informe realizamos tanto mediciones directas como indirectas. En primer lugar, como medición directa, registramos el largo de cada hoja de papel, para luego comprimirla en una esfera y medir su diámetro y peso. Por otro lado, con los datos del diámetro, obtuvimos el volumen de cada esfera, y su relación entre diámetro y masa.

Por último expresaremos los mismos resultados en escala logarítmica, donde esperamos observar esta proporción como si fuera una función lineal, donde se debería cumplir que ω se aproxime a $\frac{1}{3}$.

2. Experimento

Como primer paso, juntamos tres tipos de hojas diferentes: finas, tipo foto y gruesas. Luego las recortamos diez cuadrados de hoja fina (6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y 24 cm), cinco de tipo foto y cinco de hoja gruesa (8, 12, 16, 20 y 24 cm). Las mediciones se realizaron con una regla, las cuales tenían una incertidumbre de 10 mm.

Posteriormente, comprimimos las hojas en esferas. Utilizando un calibre mecánico (rango de medición de 0.1 mm a 150 mm) medimos el diámetro de las esferas de papel y sacamos el volumen de las mismas. Adicionalmente, usando una balanza de laboratorio (rango de medición de 0.01 g a 620 g), obtuvimos la masa de cada esfera.

A partir de todos los datos experimentales recopilados, desarrollamos un script en Python, generando gráficos donde expresamos la masa (en gramos) en el eje x y el diámetro (en milímetros) en el eje y . Primero generamos un gráfico con escalas lineales, luego hicimos un segundo gráfico en escala logarítmica. A partir de esos resultados, logramos verificar si se cumplía o no la ley de escalas.

3. Resultados y Análisis

Mostramos a continuación la tabla con las longitudes y áreas de las hojas, y sus medidas de volumen, diámetro y masa cuando se hacen esferas. También se detalla la incertidumbre de cada medición.

3.1. Mediciones

- Longitud (L) [cm] (Incertidumbre = 10 mm)
- Área (A) [cm²]
- Diámetro (D) [mm] (Incertidumbre = 0.05 mm)
- Volumen (V) [mm³]
- Masa (M) [g] (Incertidumbre = 0.01 g)

Liviano (Gramaje = 80 g/m²)

Medición	L [cm]	A [cm ²]	D [mm]	V [mm ³]	M [g]
L6	6	36	11,40	775	0,30
L8	8	64	14,60	1.629	0,52
L10	10	100	17,70	2.903	0,82
L12	12	144	21,70	5.350	1,23
L14	14	196	24,30	7.513	1,62
L16	16	256	26,50	9.743	2,12
L18	18	324	28,30	11.867	2,66
L20	20	400	34,30	21.129	3,30
L22	22	484	35,30	23.031	3,98
L24	24	576	40,70	35.300	4,81

Tabla 1: Recopilación de datos de las magnitudes de 10 mediciones para las hojas de gramaje L .

Medio (Gramaje = 150 g/m²)

Medición	L [cm]	A [cm ²]	D [mm]	V [mm ³]	M [g]
M8	8	64	20,25	4.347	0,97
M12	12	144	25,40	8.580	2,14
M16	16	256	29,80	13.856	3,76
M20	20	400	34,20	20.944	5,92
M24	24	576	41,15	36.484	8,55

Tabla 2: Recopilación de datos de las magnitudes de 5 mediciones para las hojas de gramaje M .

Pesado (Gramaje = 240 g/m²)

Medición	L [cm]	A [cm ²]	D [mm]	V [mm ³]	M [g]
P8	8	64	23,80	7.058	1,58
P12	12	144	34,00	20.579	3,52
P16	16	256	39,50	32.269	6,23
P20	20	400	47,55	56.292	9,70
P24	24	576	54,40	84.293	13,88

Tabla 3: Recopilación de datos de las magnitudes de 5 mediciones para las hojas de gramaje P .

3.2. Gráficos

A partir de los diámetros y las masas de cada esfera, obtenidos de las Tablas 1, 2 y 3, se construyeron los siguientes gráficos, donde se observa la relación entre las mediciones de diámetros en función de las masas de cada esfera, con sus respectivas desviaciones estándar.

Escala Lineal sin Ajuste Lineal

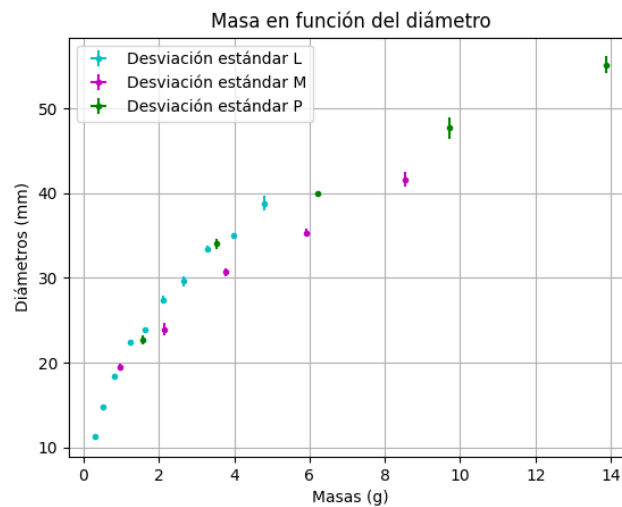


Figura 1: Gráfico de diámetros en función de las masas, representado en escala lineal sin ajustes lineales.

Escala Logarítmica con Ajuste Lineal

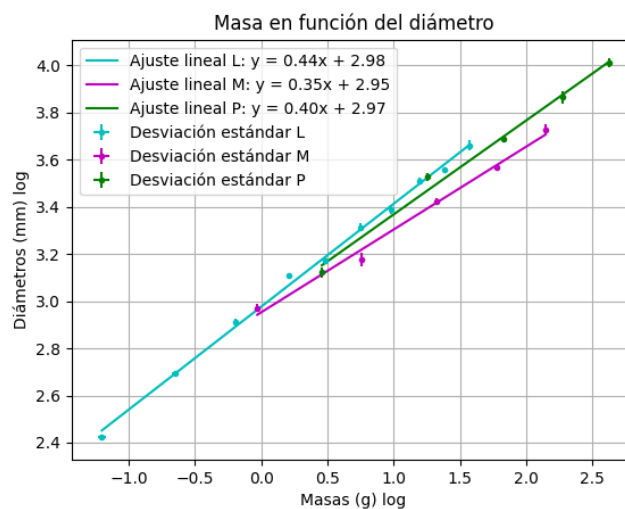


Figura 2: Gráfico de diámetros en función de las masas, representado en escala logarítmica con sus respectivos ajustes lineales.

3.3. Interpretación

En la Figura 1 se observa que al aumentar la masa de las esferas, los puntos toman forma de raíz cúbica ($\sqrt[3]{x}$), lo que debería acercarnos a $\omega = \frac{1}{3}$. Además, las desviaciones son mayores en las mediciones de masas más grandes.

Por otro lado, en la Figura 2, cada grupo de mediciones (según su gramaje), toman forma de función lineal. También se expresa el ajuste lineal de los puntos y se obtiene la siguiente fórmula para cada tipo de hoja.

Liviano (Gramaje = 80 g/m²)

$$y = 0,44x + 2,98$$

Medio (Gramaje = 150 g/m²)

$$y = 0,35x + 2,95$$

Pesado (Gramaje = 240 g/m²)

$$y = 0,40x + 2,97$$

Posteriormente, se saca el promedio de los datos recopilados para reconstruir una función lineal final.

$$y = 0,39x + 2,97$$

4. Conclusiones

Al momento en el que analizamos el primer gráfico obtenido (Figura 1), notamos la distribución de puntos con forma de raíz cúbica ($\sqrt[3]{x}$), lo que nos acercó al resultado esperado $\omega = \frac{1}{3}$. Lo mismo intuimos con las pendientes de las funciones obtenidas en el segundo gráfico (Figura 2), ya que se asemejan a $\frac{1}{3} \approx 0,33$.

La ecuación que queríamos probar era $D \propto M^\omega$, trabajando con ella podemos llegar a lo siguiente:

$$D = \alpha \times M^\omega \quad (1)$$

$$\log D = \log(\alpha \times M^\omega) \quad (2)$$

$$\log D = \log \alpha + \omega \log M \quad (3)$$

Esta última expresión tiene la forma de una recta $y = \omega x + b$, donde:

$$y = \log D \quad (4)$$

$$x = \log M \quad (5)$$

$$b = \log \alpha \quad (6)$$

Para corroborar nuestra hipótesis necesitamos que ω tienda a $\frac{1}{3}$. Mientras que la función lineal que obtuvimos de promediar los ajustes lineales de los tres gramajes de hojas, es $y = 0,39x + 2,97$, podemos observar que el valor resultante de ω es $0,39 \approx \frac{1}{3}$, lo cuál corrobora la hipótesis planteada.