Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Examen Final - 13/05/2021

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

1. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x}\cos(y) - 1 - 2x - x^2 + \frac{3}{2}y^2}{x^2+y^2}.$$

2. Calcular la integral

$$\iint_D e^{2x+y}\ (x-y)\, dxdy,$$

donde D es el paralelogramo limitado por las rectas $2x+y=0$, $2x+y=3$, $x-y=0$, $x-y=1$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(1,2)=0$, $f_y(1,2)=1$ y $f(1+t,2+t)=3t-t^2$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Probar que f no es diferenciable en $(1,2)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que el plano tangente al gráfico de f en $(1,0,f(1,0))$ es

$$2z - 8x + 3y = 2.$$

Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u,v) = (e^{3u+v}, \sin(2u+6v))$. Hallar $\nabla(f\circ g)(0,0)$.

1. El límite presenta una indeterminación, ya que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$. Para resolver esta indeterminación, calculamos el polinomio de Taylor de $f(x,y) = e^{2x}\cos(y)$ en $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Tenemos: $f(0,0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$$f_x(x,y) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \cos(y) \qquad f_y(x,y) = -e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(y)$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{2x} \cdot 4 \cdot \cos(y) \qquad f_{yy}(x,y) = -e^{2x} \cdot \cos(y)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = -2e^{2x}\operatorname{sen}(y)$$

Luego $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(0,0) = 4$, $f_{yy}(0,0) = -1$, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$

Entonces
$$P(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2$$

Luego $P(x,y) = 1 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2$.

Hoja 2/9

Ahora usamos la propiedad del polinomio y su resto: como f es de clase C^3, se tiene la igualdad

$$f(x,y) \overset{\otimes}{=} P(x,y) + R(x,y)$$ donde R es el resto de orden 2,

que tiene la PROPIEDAD $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0$

Ahora volvemos al límite que queremos calcular, que es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 1 - 2x - x^2 + \frac{3}{2}y^2}{\|(x,y)\|^2}$$ pues $x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$.

Ahora reemplazamos f con la identidad $\otimes$, así que el límite es igual a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{P(x,y) + R(x,y) - 1 - 2x - x^2 + \frac{3}{2}y^2}{\|(x,y)\|^2}.$$ Si usamos

la expresión para el polinomio P que obtuvimos, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + R(x,y) - 1 - 2x - x^2 + \frac{3}{2}y^2}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2 + R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\|(x,y)\|^2} + \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 1 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 1 + 0 = 0$$

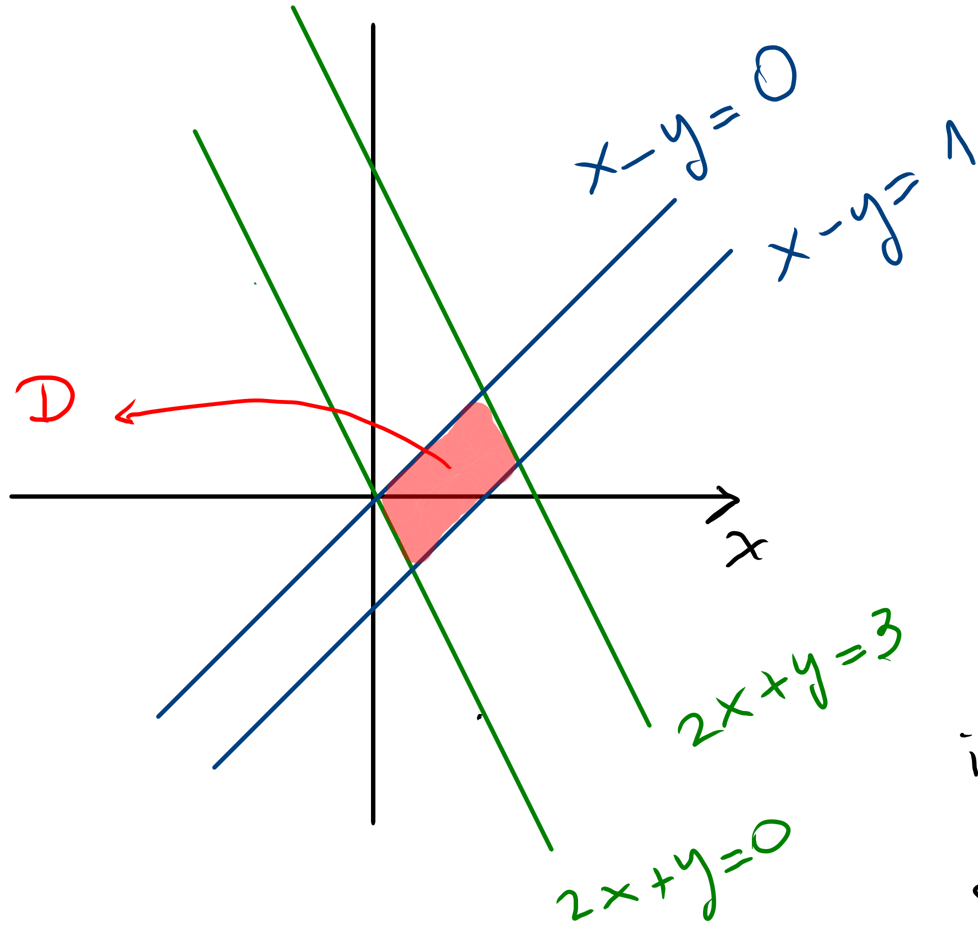
donde el último límite da 0 por la propiedad del resto.

Conclusión: el límite existe y es $l = 1$.

Fin problema 1.

Hoja 4/9

2.



$2x+y=0 \longleftrightarrow y=-2x$

$2x+y=0 \longleftrightarrow y=-2x+3$

$x-y=0 \longleftrightarrow y=x$

$x-y=1 \longleftrightarrow y=x-1$

Vamos a calcular la integral mediante el teorema de cambio de variables

Defino $\otimes \begin{cases} u = u(x,y) = 2x+y \\ v = v(x,y) = x-y \end{cases}$. Tengo $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq 1$

Luego $D^* = [0,3] \times [v,1]$, y tenemos $D = T(D^*)$. Pero las fórmulas de arriba $\otimes$ son (u,v) en función de (x,y), que es T^{-1} y no T.

Hoja 5/9

Despejo x, y del sistema. Por ejemplo, si sumo las ecuaciones, veo que $3x = u+v$ así que $x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v$. Ahora de la segunda ecuación veo que

$$y = x - v = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v - v = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v$$

Resumiendo $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$$= \left(\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v, \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v\right)$$

Ahora calculamos el Jacobiano de T: $DT(u,v) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$\det(DT) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, luego

$JT = |\det(DT)| = \frac{1}{3}$. Por el teo de cambio de variables, tenemos

$$\iint_{D^*} f(T(u,v))\, JT(u,v)\, dA(u,v) = \iint_{D} f(x,y)\, dA(x,y)$$

Por el teo de cambio de variables, tenemos

$$\iint_{D^*} f(T(u,v))\, JT(u,v)\, dA(u,v) = \iint_{D} f(x,y)\, dA(x,y)$$

Hoja 6/9

Entonces:

$$\iint_{D} e^{2x+y}(x-y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} e^{u} v \cdot \frac{1}{3}\, dA(u,v)$$

$$= \int_{u=0}^{3} \int_{v=0}^{1} \frac{e^{u} v}{3}\, dv\, du = \frac{1}{3} \int_{0}^{3} e^{u} \cdot \frac{1}{2} v^{2} \Big|_{v=0}^{v=1} du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{3} e^{u} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{6}\, e^{u} \Big|_{u=0}^{u=3} = \boxed{\frac{1}{6}(e^{3}-1)}.$$

Fin problema 2.

Hoja 7/9

3\. Si f fuese diferenciable en $(1,2)$ por la regla de la cadena tendríamos que $t \longmapsto f(1+t, 2+t)$ sería derivable en $t=0$, y por la regla de la cadena, derivando ambos lados de la igualdad

$$f(1+t, 2+t) = 3t - t^2 \quad \text{en } t=0$$

tendríamos

$$f_x(1,2) \cdot 1 + f_y(1,2) \cdot 1 = 3 - 2 \cdot 0, \text{ o sea}$$

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$1 = 3 \quad \text{ABSURDO.}$$

$\Rightarrow$ f NO es diferenciable en $P = (1,2)$.

Fin problema 3.

4. El plano tangente es

$2z - 8x + 3y = 2$. Despejamos

$z = 4x - \frac{3}{2}y + 1$. Como es el plano tangente a f en $(x_0, y_0) = (1,0)$, tiene que ser $z = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + f(1,0)$

o sea $z = f_x(1,0)\,x + f_y(1,0)\,y - f_x(1,0) + f(1,0)$

Comparando los coeficientes, el que acompaña a x debe ser $4 = f_x(1,0)$; el que acompaña y es $-3/2 = f_y(1,0)$; y el término independiente $1 = -f_x(1,0) + f(1,0)$.

Pasando en limpio: $f_x(1,0) = 4$ $f_y(1,0) = -3/2$

$f(1,0) = 1 + f_x(1,0) = 1 + 4 = 5$.

Hoja 9/9

Ahora queremos calcular

$\nabla(f\circ g)(0,0)$; primero calculamos

$$\frac{\partial}{\partial u} f(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) = f_x(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) \cdot e^{3u+v} \cdot 3$$
$$+ f_y(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) \cdot \cos(2u+6v) \cdot 2$$

Entonces evaluando en $(u_0, v_0) = (0,0)$ vemos que

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial u}(1,0) = f_x(1,0)\cdot 3 + f_y(1,0)\cdot 2$$
$$= 4\cdot 3 + -\tfrac{3}{2}\cdot 2 = 12 - 3 = 9$$

De manera similar,

$$\frac{\partial}{\partial v} f(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) = f_x(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) \cdot e^{3u+v} \cdot 1 +$$
$$+ f_y(e^{3u+v}, \text{sen}(2u+6v)) \cdot \cos(2u+6v) \cdot 6$$

Así que

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial v}(0,0) = f_x(1,0)\cdot 1 + f_y(1,0)\cdot 6$$
$$= 4\cdot 1 + -\tfrac{3}{2}\cdot 6 = 4 - 9 = -5$$

Conclusión: $\boxed{\nabla(f\circ g)(0,0) = (9,-5)}$. FIN