

## 75.04 Algoritmos y Programación II

### Práctica 0: Repaso de matemática

#### Notas preliminares

- Esta práctica se propone dar un marco formal básico que será indispensable para abordar los temas centrales de la materia.
- Los ejercicios marcados con el símbolo ♣ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. No obstante, recomendamos fuertemente realizar todos los ejercicios.

---

#### Ejercicio 1 ♣

Demostrar las siguientes identidades:

(a)  $S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b)  $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c)  $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d)  $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

#### Ejercicio 2 ♣

Calcular el término general de la serie

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^n k z^k$$

#### Ejercicio 3

Dada

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$$

- (a) Hallar  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ .
- (b) Calcular el radio de convergencia de la serie.
- (c) ¿Qué representa el valor de  $z$ ?

#### Ejercicio 4 ♣

Simplificar las siguientes expresiones (encontrar fórmulas cerradas):

(a)  $\sum_{i=x}^y 2i + 1$

(b)  $\sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^n \left( \frac{j}{j+2} \right)^i$

(c)  $\prod_{i=1}^n 2 \cdot 4^i$

### Ejercicio 5

Probar que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{1 - z^k} = \sum_{k \geq 1} \frac{1 + z^k}{1 - z^k} \cdot z^{k^2}$$

### Ejercicio 6

Los números de Fibonacci se definen recursivamente de la siguiente manera:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar las siguientes identidades para  $n \geq 1$ :

(a)  $f_{2n} = (f_n)^2 + 2 \cdot f_n \cdot f_{n-1}$

(b)  $f_{2n-1} = (f_n)^2 + (f_{n-1})^2$