Facultad de Ingeniería

UNLP

Matemática C

Curso 2023

Módulo I

Parte I

Series de potencias – Serie de Taylor

Temario por clase:

Clase 1: Series de potencias, radio e intervalo de convergencia. Repaso de series numéricas y criterios de convergencia.

Clase 2: Propiedades de las funciones representadas por series de potencias.

Clase 3: Serie de Taylor. Teorema de Taylor. Aplicaciones.

Clase 4: Polinomios de Taylor. Estimación del error. Aplicaciones.

Clase 5: Representaciones varias y aplicaciones. Serie binomial.

Bibliografía:

1. Larson R., Hostetler R., Edwards. B., Cálculo, Volumen 1.
2. Smith R., Minton R., Cálculo, Volumen 1.
3. Thomas G., Cálculo Infinitesimal y Geometría.
4. Lang S., Cálculo I.

1. Series de Potencias

1.1. Series de funciones

Las series cuyos términos son funciones $f_n(x)$, definidas para $x \in D$ con D un cierto dominio, se denominan *series de funciones*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Por ejemplo, si $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, se tiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \cos(x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \ldots$$

que converge $\forall\ x$ real (explicar porqué).

Otro ejemplo es la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

cuyos términos son las *potencias* de x: $f_n(x) = x^n$. Esta serie converge sólo para $|x| < 1$ (explicar nuevamente porqué), y en este intervalo converge a la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Nos concentraremos en lo que sigue en **series de potencias**.

1.2. Series de potencias

Si cada término $f_n(x)$ es del tipo $c_n x^n$, es decir, está compuesto por un coeficiente c_n independiente de x multiplicado por la potencia x^n de la variable x, la serie se denomina *serie de potencias.*

Definición 1 *La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{1}$$

donde los c_k son constantes respecto de x y sólo dependen de k, es una ***serie de potencias en*** *x.*
Cuando la serie tiene potencias del tipo $(x-a)^k$, siendo a un número real fijo (constante),

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

se la denomina ***serie de potencias en*** *$x - a$ (o también* ***centrada en*** *a).*

Ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x-1)^k = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}(x-1)^n + \cdots \tag{3}$$

Importante. *El problema que se plantea en esta sección es:*

Encontrar los valores de x para los cuales converge una Serie de Potencias, y conocer la función Suma $S(x)$ correspondiente.

Observar que las series de potencias (1) **siempre convergen para $x = 0$, al valor** c_0. Lo mismo ocurre para las series (2) cuando $x = a$, ya que todos los términos, **salvo el primero**, valen 0.

Observación: Es conveniente tener presente que la potencia $x^0 = 1$ y $(x-a)^0 = 1$, aun cuando $x = 0$ o $x = a$, respectivamente.

Ejemplo 1 *La serie de potencias con coeficientes $c_k = c \neq 0$ constantes para todo k,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} cx^k = c + cx + cx^2 + cx^3 + \cdots + cx^n + \cdots \tag{4}$$

es la ya conocida serie geométrica con razón $r = x$, y primer término igual a c. Por lo tanto, **la serie anterior converge únicamente para los valores de x que satisfacen $|x| < 1$, es decir, para los x en el intervalo $-1 < x < 1$.**

Conclusión 1 *Su suma es*

$$S(x) = \frac{c}{1-x}, \quad \text{para los } x \text{ tales que } -1 < x < 1$$

Es decir, $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c\,x^k = \frac{c}{1-x}$, para los $x \in (-1,1)$ (pero no para otros x).
Dicho de otra forma, la función $f(x) = \frac{c}{1-x}$ coincide con la serie de potencias (4) en el intervalo $(-1,1)$.

Ejemplo 2 *Una serie que no es geométrica es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

dado que $c_n = \frac{1}{n!}$ depende de n.

Entonces, ¿cómo determinamos para cuales x converge? y más dificil aún, ¿ cuál es la suma $S(x)$, cuando converge para un cierto x?

1.3. Intervalo de convergencia de una serie de potencias

Al conjunto de todos los números reales x para los cuales converge una serie de potencias, se le llama **su intervalo de convergencia**. Este conjunto es efectivamente un intervalo, como se demuestra en el siguiente problema.

Problema 3 *Dada una serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

1. *Demostrar que si converge en* $x = x_1 \Rightarrow$ *converge absolutamente para todos los* x *tales que* $|x| < |x_1|$.

   Considerar que como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k {x_1}^k$ *converge entonces los términos* $|c_k {x_1}^k|$ *están acotados por alguna constante* B *(es cierto ?). Además, para todo* x *tal que* $|x| < |x_1|$ *el cociente* $\frac{|x|}{|x_1|} < 1$.

   En consecuencia para tales x, *el término* $|c_n x^n| = |c_n x_1^n| \left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n$
   está acotado por los términos $B\left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^n$.

   Así se puede decir que para cada x *tal que* $|x| < |x_1|$, *la serie*
   $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ *tiene sus términos acotados por los de una serie geométrica convergente. Luego es convergente.*

2. *Si diverge en* $x = x_2 \Rightarrow$ *diverge para todos los* x *tales que* $|x| > |x_2|$.

   Para demostrar eso se hace por el absurdo. Suponga que bajo esas hipótesis, existe un x_1 *tal que* $|x_1| > |x_2|$ *donde converge. Qué pasaría de acuerdo a la primer parte en* x_2 *entonces ?.....ver que se llega a un absurdo.*

Entonces se puede afirmar...

Conclusión 2 *Considerando el caso general, la serie de potencias en* $x - a$ *se comporta de acuerdo a una de las siguientes posibilidades:*

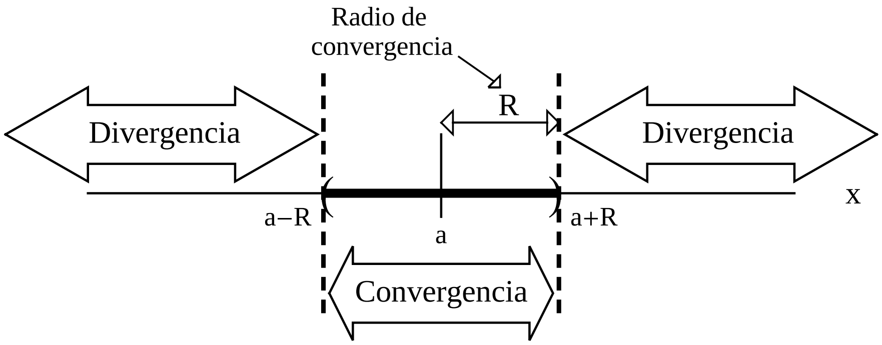
(i) Sólo converge en el punto $x = a$ *(radio* 0*);*

(ii) Converge absolutamente $\forall x$ *(radio* ∞*);*

o...

(iii) Existe un $R > 0$, *denominado radio de convergencia, tal que la serie converge absolutamente en el intervalo* $(a - R, a + R)$ *y diverge para todo* x *tal que* $|x - a| > R$. *En los extremos del intervalo de convergencia (*$x = a - R$ *y* $x = a + R$*) puede o no converger de acuerdo a cada caso.*

La figura siguiente ilustra el caso (iii).



1.4. Determinación del radio e intervalo de convergencia

El criterio de la razón (o también denominado del cociente) es especialmente útil para encontrar el radio de convergencia.

Recordar que este criterio se aplica a términos positivos, o sea a los términos $|a_n|$.

Se deben pues analizar los términos de la serie de potencias en valor absoluto mediante el criterio del cociente.

Ejemplo 4 *Hallar el intervalo de convergencia de*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k\,(k+1)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+2)^2}.\frac{2^n\,(n+1)^2}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \end{aligned}$$

En virtud del criterio de la razón, existe convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que 1.

Así, la serie es "absolutamente convergente" para aquellos valores de x *que satisfacen* $|x|/2 < 1$, *o sea,* $|x| < 2$:

Además para los x *tales que* $|x| > 2$, *se tiene* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ *para* n *grande; luego* $|a_{n+1}| > |a_n| > 0$, *y por lo tanto, para* $|x| > 2$ *la serie diverge porque el término general no tiende a cero (recordar el criterio del cociente).*

Por lo tanto, mediante el criterio del cociente vemos que el radio de convergencia de esta serie es $R = 2$.

.... Sin embargo, en los extremos del intervalo $(-2, 2)$, *es decir cuando* $|x| = 2$, *el criterio de la razón no da información.*

Como el criterio del cociente " no decide", entonces ...

...se debe analizar la convergencia de la serie en esos puntos de la frontera del intervalo, para cada uno de ellos por separado, por medio de un criterio distinto al del cociente:

1. *Sustituyendo x por el valor 2 se obtiene $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)^2$ que es convergente por comparación con la serie p convergente $\sum 1/k^2$;*

   también...

2. *se analiza el otro extremo del intervalo. Se sustituye x por el valor -2,...*

   ... resultando la serie alternada $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (k+1)^2$, la cual es evidentemente convergente (¿porqué?).

Así, concluimos que el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. El radio de convergencia es 2 y la serie diverge si $|x| > 2$.

Problema 5 *Determinar el intervalo de convergencia de*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Debe encontrar que la serie "converge absolutamente" para todo x, es decir...

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x), \text{ para todo } x \in \Re \tag{5}$$

... $f(x)$ es la función suma de esta serie. Veremos en una sección próxima que esta función es e^x.

Problema 6 *Usando la PC, graficar las sumas parciales $S_1(x) = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2/2!$,... S_6,... en un mismo gráfico en un intervalo grande. Agregar también la función $f(x) = e^x$. Observar como se aproximan a tal función.*

Problema 7 *Observar y justificar: Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ es absolutamente convergente para todos los $x \in \Re$, su término general debe tender a cero cuando $n \to \infty$, cualquiera sea el x considerado.*
Por tanto, cualquiera sea x, se tiene que $lim_{k\to\infty} x^k/k! = 0$

Problema 8 *Determinar el radio e intervalo de convergencia de*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}$$

(i) Verificar que converge absolutamente si $|x-5| < 3$, es decir que tiene radio 3.
(ii) Analizar los extremos del intervalo hallado. Aclarar si converge absolutamente o converge condicionalmente o no converge en los puntos de la frontera.
(iii) ¿Cuál es el radio, el intervalo de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta?

Problema 9 *Obtener el intervalo de convergencia de*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!\,(x+10)^k$$

Observar que al menos en $x=-10$ debe ser convergente..., pero debe hallar el radio de convergencia.

1.5. Ejercicios

1. Encuentre el intervalo de convergencia de las series de potencias indicadas.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^3}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{\sqrt{k}}$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} k!\,x^k$
$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \ln k}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{2k}} (x+7)^k$

1.6. Problemas diversos de aplicación

1. La series indicadas no son series de potencias en la variable x. No obstante, encuentre todos los valores de x para los cuales converge la serie.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{x^{2k}}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(kx)$	$\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$

2. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de x.

3. El tiempo que tarda un pelota en caer al suelo desde una altura h, partiendo del reposo, es $T_h = \sqrt{2h/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si luego rebota hasta una altura rh, con $0 \le r < 1$, muestre que la serie que determina el tiempo total transcurrido hasta su detención es una serie de potencias en $x = \sqrt{r}$. Determine su intervalo de convergencia y el tiempo total transcurrido.

2. Propiedades de las funciones definidas por series de potencias

Una serie de potencias representa, en su intervalo de convergencia, una función $f(x) = S(x)$, cuyo valor es el de la suma de la serie para tal x. Recordar el problema 5.

Por conveniencia, limitamos el estudio a las series de potencias de x. Desde luego, los resultados de esta sección se aplican también a las series de potencias de $x-a$, cuyos intervalos de convergencia están centrados en a.

Así, para cada x en el intervalo de convergencia, se define el valor funcional $f(x)$ mediante la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Importante. *Una vez definida $f(x)$, suma de la serie de potencias, es natural preguntarse si ...*
... (i)¿ Es $f(x)$ contínua $f(x)$ en ese intervalo ?
... (ii)¿ Es $f(x)$ derivable en ese intervalo ?
...(iii)¿ Es $f(x)$ integrable en ese intervalo ?, ya que
... los términos de la serie, y las sumas parciales $S_n(x)$ lo son (porqué ?) y $f(x) = lim_{n\to\infty} S_n(x)$.
Es decir, ¿ Hereda $f(x)$ las propiedades de las sumas parciales en los puntos x del intervalo donde la serie de potencias converge ?

2.1. Derivación e integración de series de potencias

Las tres propiedades siguientes, que se establecen sin demostración, contestan algunas preguntas fundamentales respecto de la función $f(x)$ definida como la "suma" de la serie de potencias en su intervalo de convergencia.

En cada propiedad se supone que la serie converge en un intervalo $(-r, r)$, donde el radio r es positivo, o bien ∞ (es decir, que no se aplican al caso con radio $r = 0$, caso de convergencia en un único punto).

Teorema. *Si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, converge en el intervalo de radio $r > 0$, entonces f es contínua, derivable e integrable en el intervalo $(-r, r)$, $r > 0$. Además, la derivada y primitiva de f son*

1. $$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}.$$

2. $$\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

El "radio de convergencia" de la serie obtenida al "derivar o integrar" una serie de potencias "es el mismo que el de la serie original". Aunque hay que notar que ...
... el "intervalo" puede diferir respecto del "intervalo" de la original, como consecuencia que los extremos de $(-r, r)$ pueden agregarse en algún caso o desestimarse en otro (estudiando la convergencia de la respectiva serie en cada uno de los extremos del intervalo).

Observación.

1. *Estas propiedades, simplemente expresan que una serie de potencias puede derivarse e integrarse término a término como en el caso de un polinomio.*

2. *El radio de convergencia de $f'(x)$ es el mismo que el de $f(x)$.*

   Aplicando la misma propiedad a la serie de $f'(x)$, también es diferenciable en cada x de $(-r, r)$ y

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k\,(k-1)\,x^{k-2}.$$

   Continuando de esta manera se concluye que ...

3. *Una función f representada por una serie de potencias en $(-r, r)$, $r > 0$, " posee derivadas de todos los órdenes en ese intervalo".*

4. *Además, para números arbitrarios x_1 y x_2 en el intervalo $(-r, r)$, la integral definida puede representarse como*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_{x_1}^{x_2} t^k dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{k+1}$$

EJERCICIOS para hacer en clase:

1. Recordar que la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

   converge para todo x, así, $f(x)$ está definida para x tal que $-\infty < x < \infty$.

   (a) Demostrar que la serie que converge a $f'(x)$, satisface que $f'(x) = f(x)$, usando la derivación de la serie respectiva, y considerando los intervalos de convergencia.

   (b) Comprobar que $f(0) = 1$.

   (c) A partir de (a) y (b), concluir que $f(x) = e^x$ (pensando que si $y = f(x)$, se cumple la ecuación diferencial : $y' = y$, $y(0) = 1$).

   Así se conoce que ...

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

   para todo $x \in \Re$.

2. Aplique el resultado del ejercicio anterior para hallar una representación en serie de potencias para las funciones indicadas:

   (i) $f_1(x) = e^{-x}$

(ii) $f_2(x) = e^{x/5}$

(ii) $f_3(x) = e^{-x^2}$

3. Encontrar una aproximación, mediante una suma parcial de los términos de la serie que corresponda, de las cantidades que se indican abajo, de tal manera que el error cometido en valor absoluto sea menor a 10^{-3}.

   (i) $\frac{1}{e}$

   (ii) $e^{-1/2}$

Problema 10 *Obtener una representación en serie de potencias de x de $f(x) = \frac{1}{1+x}$.*

Para obtener esa serie, recurrimos a conceptos ya estudiados.

Sabemos que una serie geométrica converge a $\frac{c}{1-r}$ si $|r| < 1$, siendo r la razón de esta serie y c el primer término.
Tomando en particular $c = 1$, $r = -x$, obtenemos

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k , \quad |x| < 1 .$$

La anterior igualdad únicamente vale en el intervalo $(-1, 1)$.
Así, ya tenemos la serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en el intervalo $(-1, 1)$.

Ejemplo 11 *A partir de la derivación de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en la serie que la representa, término a término, se logra la serie que representa a $1/(1+x)^2$ en $(-1, 1)$:*

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, k \, x^{k-1}$$

Es decir,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \, k x^{k-1}$$

en el mismo intervalo $(-1, 1)$.

El siguiente problema es realmente importante.

Problema 12 *(1) Obtener la representación en serie de potencias de* $\ln(1+x)$*, con* $x \in (-1,1)$*.*
Se conoce que $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$ *para los* x *del intervalo* $(-1,1)$*. En virtud de eso, ¿Cómo puede obtener para* $\ln(1+x)$*, la serie de potencias que la representa en* $(-1,1)$*?*
(2) Obtenida la serie que representa a $\ln(1+x)$*, en* $(-1,1)$ *del inciso previo.*
Analizar si esta serie converge o no en los extremos de ese intervalo (analizando por separado en $x=1$*, y en* $x=-1$*, si la serie converge, ya que el teorema de integración no dice nada acerca de los extremos del intervalo).*
- Luego, establecer claramente el intervalo de convergencia de la serie de potencias hallada para representar a $\ln(1+x)$*.*
Luego, continuar ...
(3) ... Por ser contínua la función $\ln(1+x)$ *en el intervalo* $(-1,1]$*, ¿ puede deducir cuál es realmente el intervalo donde vale la representación de la serie de potencias encontrada? (Un elegante teorema del matemático noruego Niels Abel nos asegura que si una serie* $\sum_n a_n$ *converge, entonces la serie de potencias asociada* $\sum_n a_n x^n$ *converge a una función continua* $f(x)$ *para* $x \in [0,1]$*; esto implica (reemplazando* $a_n \to a_n r^n$*,* $x \to x/r$*,* $r \neq 0$*) que toda serie de potencias con radio de convergencia no nulo converge a una función continua en su intervalo de convergencia).*
*(4) Finalmente, teniendo en cuenta el resultado de (3**), ¿es cierto o no que la suma de la serie armónica alternada tiene suma* $\ln 2$ *?*

Problema 13 *En una PC graficar la función* $f(x) = \ln(1+x)$ *en un intervalo* $[-3/4, 2]$*. En el mismo gráfico comparar con las curvas que dan las sumas parciales* $S_1(x)$*...* $S_5(x)$ *de la serie hallada para la función* $\ln(1+x)$*. Explicar lo que ocurre.*

Problema 14 *Aproximar* $\ln(1{,}2)$ *mediante una suma de un número finito de términos, de tal manera que se asegure que tal aproximación tiene 4 cifras decimales exactas (es decir, error menor que* 5×10^{-5}*).*

Solución 1 *Sustituyendo* $x = 0{,}2$ *en la serie hallada en el ejercicio previo, resulta*

$$
\begin{aligned}
\ln(1{,}2) &= \ln(1+0{,}2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(0{,}2)^{k+1} \\
&= 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 - 2{,}0004 + 0{,}000064 - 0{,}00001067 + \cdots \\
&\approx 0{,}1823
\end{aligned}
$$

Recordando el estudio del error en la aproximación de la suma de una serie alternada se tiene que $0{,}1823$ *es la aproximación buscada, ya que para* S_5 *se cumple que* $|S - S_5| < a_6 = 0{,}00001067 < 0{,}00005$*.*

Es interesante advertir que si el intervalo de convergencia de la representación en serie de potencias de una función f*, es el intervalo abierto* $(-r,r)$*, entonces la representación en serie de potencias para* $\int_0^x f(t)dt$ *puede converger en una o en ambas fronteras del intervalo.*
Ejemplo de lo dicho es el caso de la serie de $\ln(1+x)$*.*

2.2. Problemas diversos para hacer en clase

1. Si
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$
para $-\infty < x < \infty$, demuestre que $f''(x) + f(x) = 0$.

2. Hallar una serie que represente a $\ln(1-x)$ en potencias de x e indicar el intervalo donde vale la representación.

3. Idem para $\frac{1}{1+x^2}$.

4. ¿Conoce una serie que represente a e^{-x^2} en potencias de x?
Usela para evaluar $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ como la suma de una serie. ¿Cuántos términos de la serie debe tomar para aproximar la integral con error menor que 10^{-3}?

5. Hallar una serie que represente a $arctan(x)$, e indicar el intervalo donde vale la representación. Para eso, recordar que la derivada de $arctan(x)$ es $\frac{1}{1+x^2}$. Pensar como obtener $arctan(x)$ a partir de una serie de potencias sencilla.

6. Demuestre, como consecuencia del ejercicio previo, que
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

7. La serie del ejercicio anterior converge lentamente. Muéstrelo encontrando el menor entero positivo n, tal que S_n aproxime a $\pi/4$ con error menor que 10^{-4}.

2.3. Ejercicios

1. Obtenga una representación en serie de potencias de x de las siguientes funciones y establecer el intervalo de convergencia.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$	$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$
$f(x) = \frac{1}{2-x}$	$f(x) = \frac{3x}{2-x}$	$f(x) = \frac{1}{(2+x^2)}$
$f(x) = \ln(1+2x)$	$f(x) = \ln(2+x)$	$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. Encuentre el dominio de la función indicada
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{3} - \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{3^4} + \cdots \\ f(x) &= 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

3. Mediante un desarrollo en serie evalúe las siguientes cantidades con error $< 10^{-2}$:

$\ln(1{,}1)$	$\arctan(0{,}1)$	$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$

3. Relación entre los coeficientes de la serie de potencias y las derivadas de la función suma en $x = a$

Si una serie de potencias de $(x-a)$ converge a una función $f(x)$ en un intervalo $(a-r, a+r)$, $r > 0$ (la suma de la serie es $f(x)$ en ese intervalo) entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \end{aligned}$$

Demostraremos que existe una relación entre los coeficientes c_k y las derivadas de orden k de $f(x)$ evaluadas en $x = a$.

Derivando término a término, usando la propiedad sobre derivación de series de potencias, en el intervalo $(a-r, a+r)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3\,c_3(x-a)^2 + \cdots \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + \cdots \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + \cdots \end{aligned}$$

... y así con las derivadas siguientes.

Evaluando cada igualdad obtenida arriba en $x = a$, resulta

$$f(a) = c_0 \qquad f'(a) = 1!\,c_1 \qquad f''(a) = 2!\,c_2 \qquad f'''(a) = 3!\,c_3$$

respectivamente.

En general, $f^{(n)}(a) = n!c_n$. Por lo tanto,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n \geq 0$$

Para $n = 0$, se interpreta la derivada “de orden cero” como $f(a)$ y $0! = 1$.

Conclusión. *Importante!*
Si una serie de potencias en $(x-a)$ converge a una función $f(x)$ en un intervalo $(a-r, a+r)$, $r > 0$, entonces f tiene derivadas de todo orden en ese intervalo, y la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ coincide con la serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Tal igualdad es válida para todos los valores de x en $(a-r, a+r)$, $r > 0$.

Unicidad *de la serie que representa a $f(x)$ en potencias de $(x-a)$:*
El resultado previo muestra que la representación de una función $f(x)$ por una serie de potencias en $(x-a)$ **es única**, *ya que los coeficientes de tal serie necesariamente coinciden con los valores $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.*

Por tanto la serie que representa a $f(x)$, coincide con la **serie de Taylor de f en** a.

4. Serie de Taylor y de Maclaurin de una función

Definición. Importante!! *Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en $x=a$, se llama serie de Taylor de esa función, desarrollada en $x=a$, a la serie :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

A esta serie se la denota como ***serie de Taylor de f en*** *a.*[a]

En el caso especial $a=0$, la serie de Taylor de $f(x)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

se llama ***serie de Maclaurin de*** *f.*[b]

[a]En honor del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), quién publicó este resultado en 1715.
[b]En honor del matemático escocés (alumno de Newton) Colin Maclaurin (1698-1746).

Conclusión.
(1)El resultado obtenido en la sección previa, nos dice que si una función $f(x)$ está representada por una serie de potencias $\sum_0^\infty c_k(x-a)^k$ en un intervalo, entonces esa serie es la "serie de Taylor " (o Maclaurin si $a=0$) de esa función $f(x)$, ya que coincide con $\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
(2) Además, como los valores de las derivadas de f son únicos, la representación $f(x) = \sum_0^\infty c_k(x-a)^k$ en serie de potencias en $(x-a)$ es única (tener en cuenta!).
Es decir, "no hay distintas series de potencias en $(x-a)$ " que representen a $f(x)$, ya que los coeficientes coinciden con $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Previamente hemos logrado representar en serie de potencias varias funciones:
e^x; e^{-x^2}, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{(1+x)^2}$, etc.

Pero para otras funciones, como $\cos(x)$, $\mathrm{sen}(x)$, $\mathrm{sen}(x^3)$**, o** $\int \mathrm{sen}(x^3)\,dx$**, aún no hemos visto una serie que las represente....**

... Es de sumo interés tener una serie para ellas, pués eso nos permitiría, en primer lugar evaluarlas, y también calcular por ejemplo la integral de $sen(x^3)$, o de $\cos x^2$, etc, usando el teorema de integración de series de potencias.

4.1. Cálculo de la serie de Taylor de una función $f(x)$ y estudio del intervalo de convergencia a $f(x)$

Importante: Si se tiene una función $f(x)$, que tiene derivadas de todo orden, surge la pregunta natural:

¿Es posible encontrar para $f(x)$ una serie de Taylor en el entorno de un punto a (en potencias de $(x-a)$) que la represente ? O sea, ¿ es posible justificar que la serie de Taylor calculada converge a $f(x)$ en algun intervalo $(a-r, a+r)$?

Observaciónes:
(1) Dada la función $f(x)$ con derivadas de todo orden en $x = a$, se puede formar la serie de Taylor de $f(x)$, calculando simplemente los coeficientes mediante las sucesivas derivadas en a.
(2) Pero hay que verficar si esa serie de Taylor tiene "suma $S(x)$" y si esa " suma $S(x)$ coincide o no con $f(x)$" en algun intervalo $(a-r, a+r)$.
(3) Si la suma $S(x)$ fuese $f(x)$ en ese intervalo, existe la representación en serie de $f(x)$, y tal serie de Taylor es la única serie de potencias en $(x-a)$ que representa a $f(x)$.

Ejemplo:

Ejemplo 15 *Obtener la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ en $a = 1$.*

Solución. *Se obtiene*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & f'''(1) &= 2 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

De modo que

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

Con la ayuda del criterio de la razón, se encuentra que esta serie converge para todos los valores de x en el intervalo $(0,2]$.

Pero en principio no sabemos aun si la suma $S(x)$ de ella coincide con $\ln(x)$ en este intervalo. No obstante, previamente habíamos visto, por integración de la serie geométrica, que $\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k$ para $t \in (-1,1]$. Sustituyendo en esta $t = x-1$ obtenemos la igualdad $\ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ para $x \in (0,2]$, que es precisamente la serie de Taylor anterior.

En resumen, para poder formar la serie de Taylor de una función en el entorno de un punto a particular, es necesario que esta función posea derivadas de todo orden en a. Por ejemplo, $f(x) = \ln x$ no posee serie de Maclaurin ($a = 0$) (¿porqué?), pero si serie de Taylor alrededor de $a = 1$.

Por otra parte, debe notarse que aún si f posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente en algún intervalo, *no se sabe en principio si la serie converge a $f(x)$* para todos los valores de x en ese intervalo

Veamos cómo se estudia ese tema.

4.2. Teorema de Taylor. Fórmula de Taylor

La respuesta a este problema puede obtenerse considerando el **teorema de Taylor:**

Teorema de Taylor. *Sea f una función tal que existen todas sus derivadas hasta el orden $f^{(n+1)}(x)$ para todo x en el intervalo $(a-r, a+r)$. Entonces para todo x en este intervalo,*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*es el **Polinomio de Taylor de grado** n **de** f **en** a, es decir, la suma parcial de orden n de la serie de Taylor, y $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ es el residuo, que tiene la expresión*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde el número c está entre x y a. [a]

[a] Existen varias expresiones para el residuo. La presente se denomina forma de Lagrange, y se debe al matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Como los $P_n(x)$ son las sumas parciales $S_n(x)$ de la serie de Taylor, tenemos

$$S_n(x) = P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Vemos así que si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, solo entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. En otras palabras, la serie de Taylor converge a $f(x)$ en un cierto intervalo si y sólo si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ en el mismo. En resumen, tenemos el siguiente teorema:

Teorema. *Si f tiene derivadas de todos los órdenes en todo x del intervalo $(a-r, a+r)$, y si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x en el intervalo, entonces*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

En la práctica, la demostración que el residuo $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ depende a menudo del hecho que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$$

Este último resultado se deduce del conocimiento que la serie $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ es convergente para todos los $x \in \Re$, y por lo tanto su término general debe tender a cero cuando $n \to \infty$, cualquiera sea el x considerado.

Ejemplo 16 *Representar $f(x) = \cos x$ con una serie de Maclaurin.*

Solución. *Se tiene,*

$$\begin{array}{rclr} f(x) & = & \cos x, & f(0) = 1 \\ f'(x) & = & -\operatorname{sen}(x), & f'(0) = 0 \\ f''(x) & = & -\cos x, & f''(0) = -1 \\ f'''(x) & = & \operatorname{sen}(x), & f'''(0) = 0 \end{array}$$

y así sucesivamente. Entonces, obtenemos la serie ...

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

El criterio de la razón muestra que esta serie de potencias converge absolutamente para todos los valores reales de x (verficarlo !).

Luego, para probar que $\cos x$ está representada por esta serie de potencias, falta probar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x.

Para tal fin, observamos que las derivadas de f satisfacen

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \begin{cases} |\operatorname{sen} x| & \text{si } n \text{ es par} \\ |\cos x| & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En ambos casos $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$ para cualquier número real c, y de esta manera

$$R_n(x) = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

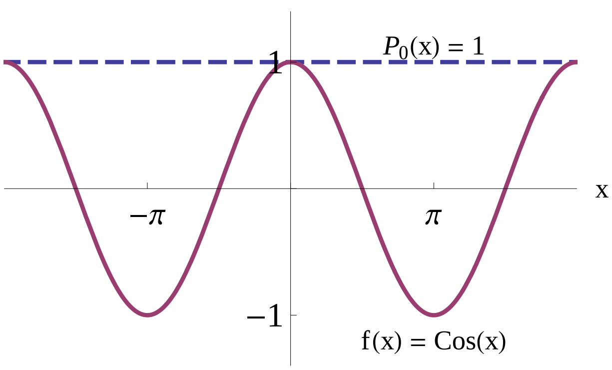
Para cualquier elección fija, pero arbitraria, de x, $\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} / (n+1)! = 0$.
Eso dice, que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo x.
Entonces, concluimos que

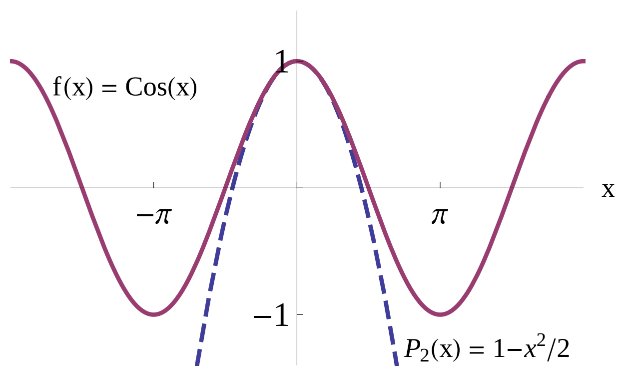
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

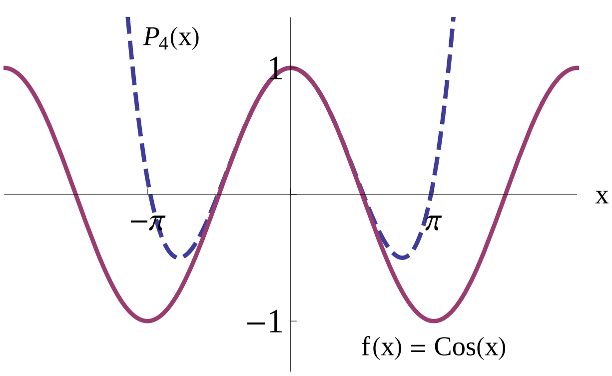
es una representación válida del $\cos x$ para todo número real x.

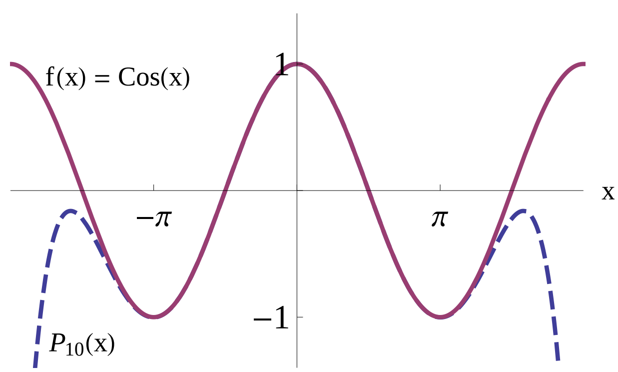
Problema 17 *Usando la PC, represente $f(x) = \cos(x)$. Luego, en el mismo gráfico superponer las curvas que representan a las sumas parciales $S_n(x)$, es decir, los polinomios de Taylor $P_n(x)$, para $n = 1, 2, 3, 4$ de la serie de Maclaurin.*
Hacer algún comentario sobre lo que advierte.
¿ Dónde estas sumas parciales aproximan mejor? Dar una explicación sobre ese comportamiento.

Se muestran a continuación los gráficos de $f(x) = \cos(x)$ y de los polinomios de Taylor asociados de grado 0, 2, 4 y 10 en $a = 0$.









Problema 18
(i) Representar $f(x) = sen(x)$ con una serie de Taylor desarrollada en $a = 0$, ...
... aplicando integración o derivación de series de potencias, y deducir el intervalo de convergencia.
(ii) Usando PC, representar $f(x) = sen(x)$ y en el mismo gráfico superponer las curvas que representan a las sumas parciales $S_n(x) = P_n(x)$ para $n = 1, 2, 3$ de la serie de Maclaurin correspondiente.
Hacer algún comentario sobre lo que advierte e indicar donde estas sumas parciales aproximan mejor.
(iii) Representar $f(x) = cos(x^2)$ por una serie de potencias de x, usando alguna serie conocida. Dar el intervalo de convergencia correspondiente.
(iv) (a) Calcular $\int_0^1 cos(x^2)dx$, mediante una serie. (recordar que no es posible expresar la primitiva de $cos(x^2)$ en términos de las funciones elementales que Ud. conoce).
(b) ¿Cuál suma parcial debe considerarse para que resulte una aproximación de (a) con error menor a 10^{-3}? Hallarla.

Problema 19 *Utilice un polinomio de Taylor adecuado para aproximar con error menor que 10^{-4} las integrales*

$$(a)\ \int_0^1 sen(x^2)dx \qquad\qquad (b)\ \int_0^1 \frac{sen(x)}{x}dx$$

El segundo item merece alguna justificación, para poder usar la serie del $sen(x)$ multiplicada por $\alpha = \frac{1}{x} \neq 0$ (recordar propiedades de series convergentes) para representar a la función dada.
Se define la función $f : \Re \to \Re$ como $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 1$. Tal función $f(x)$ es continua para todo x y en particular en $[0, 1]$.
Además la serie de potencias que representa a $\frac{sen(x)}{x}$, en $x \neq 0$, es $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$
Para $x = 0$, también converge esa serie y su suma es 1. Podemos ver entonces que la serie representa a $f(x)$ para todo x.

Problema 20 *(a) Hallar una serie de potencias que represente a: $f(x) = e^{-x^2}$, indicando el intervalo de validez. Utilizar en lo posible alguna serie de potencias conocida para ser aplicada con ese fin.*
(b) En base a las características de la serie hallada en (a), puede determinar cuál "suma parcial" debería usar para aproximar a $f(x)$, para todo $x \in [0, 1]$, con error menor a 10^{-2}? Hallar esa suma parcial.
(c) La integral $I = \int_0^1 e^{-t^2}dt$, ¿existe? Si existe, encontrar su expresión usando la representación en serie de potencias de e^{-t^2}, con $t \in [0, 1]$. Explicar, porqué eso es conveniente y porqué es posible hacerlo así.
(d) ¿Es posible encontrar una aproximación a I mediante una suma finita de términos S_m, cuyo error $|I - S_m|$ sea menor a 10^{-2}?

Problema 21 *(a) Dada la función $f(x) = e^x$, y la serie de potencias desarrollada alrededor de $a = 0$, que la representa para todo $x \in \Re$ (ya estudiada en clases previas), determinar cuántos términos (suma parcial $S_m(x)$) hay que considerar para hallar una aproximación de e^x, para $x \in [0, 1]$, tal que $|e^x - S_m(x)| < \frac{3}{100}$.*
(b) Hallar una serie de potencias que represente a: $g(t) = e^{t^2}$, para $t \in \Re$. Utilizar en lo posible alguna serie de potencias conocida para ser usada con ese fin.
(c) En base a las características de la serie usada en (b), puede determinar cuál "suma parcial" debería usar para aproximar a $g(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, con error menor a $3/100$?. Hallar esa "suma parcial aproximante".
(c) La integral $I = \int_0^1 e^{t^2} dt$, ¿existe? Si existe, encontrar su expresión usando la representación en serie de potencias de e^{t^2}, con $t \in [0, 1]$. Explicar, porqué ese procedimiento es conveniente y porqué es posible hacerlo así.
(d) ¿ Es posible encontrar una aproximación de I, mediante una suma finita de términos S_n, cuyo error $|S_n - I|$ sea menor a $3/100$?

Problema 22 *Representar $f(x) = sen(x)$ con una serie de Taylor en $a = \pi/3$*
Verificar que tal serie es

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

Usando los mismos argumentos que en el primer ejemplo, ver que representa a $sen(x)$ para todo x.
Usando la PC, representar $f(x) = sen(x)$. En el mismo gráfico superponer las curvas que representan a las sumas parciales $S_n(x) = P_n(x)$ para $n = 1, 2, 3$ de la serie de de Taylor hallada.
Hacer algún comentario sobre lo que advierte.
¿Donde estas sumas parciales aproximan mejor? Dar una explicación sobre ese comportamiento.

Problema 23 *(i) Demostrar que la serie*

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

representa a $f(x) = \ln x$ en el intervalo $(0, 2]$.
Justificar todos los pasos, viendo primero que es la serie de Taylor con $a = 1$ de la función dada. Luego estudiar el radio de convergencia y terminar mostrando que representa a $\ln(x)$.
(ii) Una forma más fácil de hallar (i) sería considerar que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ para $x \in (0, 2]$, y usar el desarrollo $\frac{1}{t} = \frac{1}{1+(t-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (t-1)^k$ (recordar la serie geométrica).

Problema 24 *(i) A partir de la serie de Maclaurin que representa a e^x, encuentre una serie de potencias en x $(a = 0)$ para la función senh$(x) = (e^x - e^{-x})/2$.*
Recordar que la suma de series convergentes converge a la suma de las funciones de cada una, en un dominio común a ambas.
(ii) Idem para cosh$(x) = (e^x + e^{-x})/2$. ¿Puede obtener esta serie por derivación de la previa?

Observación importante. Funciones pares e impares.
Si la función $f(x)$ es *par*, es decir que satisface $f(-x) = f(x)\ \forall x$, entonces su desarrollo de Maclaurin (asumimos que f es derivable a todo orden) contendrá sólo potencias *pares* de x, ya que en tal caso $f^{(k)}(0) = 0$ para k impar (justificar!). Ejemplos de funciones pares son $\cos(x)$, $\cosh(x)$ y e^{x^2}.
En forma similar, si la función $f(x)$ es *impar*, es decir que satisface $f(-x) = -f(x)\ \forall x$, entonces su desarrollo de Maclaurin contendrá sólo potencias *impares* de x, ya que en tal caso $f^{(k)}(0) = 0$ para k par (justificar!). Ejemplos de funciones impares son $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{senh}(x)$ y xe^{x^2}.
Observemos también que la derivada de una función par es impar, y la derivada de una función impar es par (justificar!).

Resumen de algunas series de Maclaurin importantes:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & -\infty < x < \infty \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & -\infty < x < \infty \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} & -\infty < x < \infty \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} & -\infty < x < \infty \\
\operatorname{senh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & -\infty < x < \infty \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k & -1 < x < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k & -1 < x \leq 1
\end{aligned}
$$

El lector puede demostrar la validez de estas representaciones como ejercicio.

Resumen 1 *(i) El método de la serie de Taylor para encontrar una serie de potencias de una función, y luego demostrar que la serie representa a la función, tiene una obvia y gran desventaja. Es casi imposible obtener una expresión general para la enésima derivada de la mayoría de las funciones. Así que, a menudo se está limitado a encontrar sólo los primeros coeficientes de las sumas parciales.*

(ii) El teorema de Taylor también se llama Teorema del Valor Medio Generalizado. El caso $n = 0$ se reduce al teorema del valor medio usual (ver próxima sección).

(iii) No siempre es necesario calcular las derivadas de una función para encontrar su serie de Maclaurin. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/(1-x)$ se puede representar como serie de potencias utilizando la series geométrica, y el desarrollo en serie de potencias de e^{x^2} puede obtenerse a partir del de e^x, reemplazando x por x^2.

Lo importante es: "Una serie de potencias, en su intervalo de convergencia, es la serie de Taylor o Maclaurin de la función Suma(x), sin que importe cómo se obtuvo".

Observación: *Tener presente la conclusión de arriba cuando necesite encontrar para una función particular la representación en serie de ella.*

Problema 25 *Aplique resultados previos para hallar la serie de Maclaurin de las funciones siguientes, indicando la región donde vale la representación encontrada:*

$f(x) = e^{-x^2/2}$, $\quad f(x) = x^2 e^{-3x}$, $\quad f(x) = x\cos x$, $\quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}dt$

$f(x) = x^2\cos(x^2)$, $\quad f(x) = \ln(1-x)$, $\quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $\quad f(x) = \int_0^x t^2\cos(t^2)dt$

Problema 26 *Encuentre la serie de Maclaurin de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución. Utilizando la definición $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(0+\triangle x)-f(0)}{\triangle x}$, puede mostrarse que esta función *es derivable a todo orden en $x = 0$, siendo $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall\ n$.* Por lo tanto, $P_n(x) = 0 \ \forall\ n$ y entonces la serie de Maclaurin converge a $0 \ \forall\ x$!!. Converge pues a $f(x)$ *sólo en $x = 0$*, a pesar de ser convergente $\forall\ x$. Para $x \neq 0$ *no converge a $f(x)$*.
En este caso $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) \ \forall\ x$, y por lo tanto $R_n(x) \neq 0 \ \forall\ n$ si $x \neq 0$.
La serie de Maclaurin no puede pues representar a esta función fuera del origen. Informalmente, su mínimo en $x = 0$ es "extremadamente chato", y origina pues derivadas nulas a todo orden en el origen, aun cuando sea no nula para $x \neq 0$ (graficar!).

Notemos entonces que para $g(x) = \cos(x) + f(x)$, con $f(x)$ la función anterior, la serie de Maclaurin correspondiente va a converger $\forall\ x$ a $\cos(x)$, ignorando a $f(x)$ (justificar!).
Las funciones que pueden desarrollarse en serie de potencias se denominan *funciones analíticas*. La función $f(x)$ anterior no es analítica en $x = 0$ (donde posee una singularidad denominada *esencial* cuando se la considera función de una variable compleja x). No puede pues desarrollarse en serie de potencias de x, aunque sí puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de cualquier $a \neq 0$, convergiendo en un cierto intervalo finito.

4.3. Aproximaciones con Polinomios de Taylor

Daremos aquí algunos detalles adicionales sobre los polinomios de Taylor. Como hemos visto, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = a$ de una función $f(x)$ es la suma parcial de orden n de la serie de Taylor alrededor de dicho punto:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El polinomio de Taylor de grado 0, $P_0(x) = f(a)$, es una constante, que coincide con $f(x)$ en $x = a$. El polinomio de Taylor de grado 1 en a,

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

es la *aproximación lineal* a $f(x)$ en $x = a$: Es la única función lineal (del tipo $A + Bx$) que satisface

$$P_1(a) = f(a), \;\; P_1'(a) = f'(a)$$

La gráfica de $P_1(x)$ es la *recta tangente* a f en $x = a$ (ver figura siguiente), que es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y que tiene la misma pendiente que $f(x)$ en $x = a$.

Del mismo modo, el polinomio de Taylor de grado 2 en a,

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

es la única función cuadrática (del tipo $A + Bx + Cx^2$) que satisface

$$P_2(a) = f(a), \;\; P_2'(a) = f'(a), \;\; P_2''(a) = f''(a)$$

Es decir, su valor, su derivada y su derivada segunda coinciden con los correspondientes valores de f en $x = a$. Su gráfica es la "parábola tangente" a f en $x = a$, que además de pasar por el punto $(a, f(a))$ y tener la misma pendiente que f en ese punto, tiene además la misma derivada segunda que f en ese punto, es decir, la misma concavidad (curvatura).

Generalizando, el polinomio de Taylor de grado n en $x = a$, $P_n(x)$, *es el único polinomio de grado n que satisface*

$$P_n(a) = f(a), \;\; P_n'(a) = f'(a), \;\; P_n''(a) = f''(a), \;\; \ldots, \;\; P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

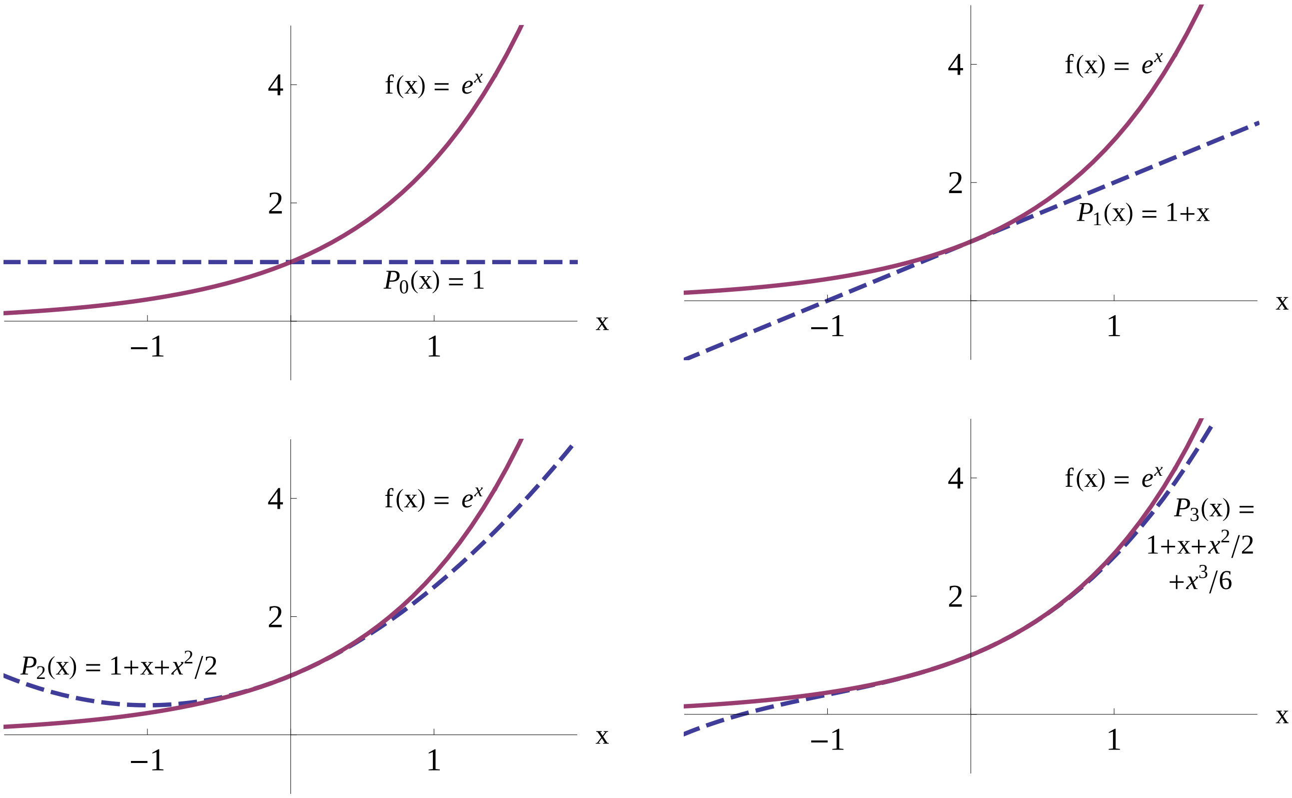
es decir

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \;\; k = 0, \ldots, n$$

Su valor y sus primeras n derivadas coinciden todas con las de $f(x)$ en $x = a$. Se dice entonces que tiene un *contacto de orden n* con f en $x = a$.

Hemos graficado antes los primeros polinomios de Taylor en $x = 0$ de $\cos(x)$, una función par (para las cuales $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$, ya que las derivadas impares se anulan en el origen). Se muestra en la figura siguiente la gráfica de los primeros 4 polinomios de Taylor de e^x en $a = 0$. Esta función no es par ni impar, por lo que su desarrollo de

Maclaurin contiene tanto potencias pares como impares. La gráfica de $P_1(x) = 1 + x$ es la recta tangente a la curva de e^x en $x = 0$.



Cuando el valor de x está cerca del número a ($x \approx a$), se puede emplear el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función f en a para aproximar el valor funcional de $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por el teorema de Taylor:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|$$

donde, si f es derivable hasta orden $n+1$ en un intervalo $(a-r, a+r)$ y x pertenece a ese intervalo,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con c un número entre a y x.

Observación. Para $n = 0$, el teorema de Taylor implica

$$f(x) = P_0(x) + R_0(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

es decir, si $x \neq a$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

con c entre a y x. Esta expresión es *el teorema del valor medio*. Por lo tanto, este teorema puede considerarse un caso particular ($n = 0$) del teorema de Taylor.

Problema 27 *Probar que si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces el polinomio de Taylor asociado de grado n en cualquier a coincide exactamente con $f(x)$.*

Este resultado muestra que un polinomio de grado n queda completamente determinado por su valor y sus primeras n derivadas en un punto arbitrario (¿por qué?). Además, $P_m(x) = P_n(x)\ \forall\ m \geq n$ (justificar).
Como ejemplo, para un polinomio de grado 1 tenemos

$$f(x) = A + Bx = (A + Ba) + B(x - a) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

En general, si la derivada $n+1$ de f está acotada por una constante positiva M en el intervalo $(a-r, a+r)$, tal que $|f^{(n+1)}(c)| \leq M\ \forall\ x \in (a-r, a+r)$, podemos escribir

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Por ejemplo, si podemos encontrar un M independiente de n en ese intervalo, entonces $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = M \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\ \forall\ x \in (a-r, a+r)$, lo cual garantiza que la cota del error irá disminuyendo al aumentar n.

Ejemplo 28 *Aproximar $e^{-0{,}2}$ con $P_3(x)$. Determinar la precisión de la aproximación.*

Solución. *Debido a que el valor $x = -0{,}2$ está cerca de cero, se emplea el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de $f(x) = e^x$ en $a = 0$. Sabemos que*

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

y

$$P_3(-0{,}2) = 1 + (-0{,}2) + \frac{1}{2}(-0{,}2)^2 + \frac{1}{6}(-0{,}2)^3 \approx 0{,}81867$$

Consecuentemente,

$$e^{-0{,}2} \approx 0{,}81867$$

Ahora bien, se puede escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0{,}2 < c < 0$ y entonces $0 < e^{-0{,}2} < e^c < e^0 = 1$, por ser e^x positiva y creciente. Así,

$$|R_3(-0{,}2)| < \frac{|-0{,}2|^4}{4!} < 0{,}0001$$

lo cual implica que la precisión es hasta tres cifras decimales ($|R_3(-0{,}2)| < 5 \times 10^{-4}$).

Observación: *Dado que la serie de Maclaurin de e^x para $x = -0,2$ es alternante y cumple con las condiciones del criterio de Leibniz, y dado que sabemos que la serie converge a $e^x\ \forall\ x$, podemos en este caso también utilizar la cota de error para series alternantes. En este problema esto conduce a la misma cota de error anterior (verificar!).*

Ejemplo 29 *Aproximar e con error menor que 10^{-10}.*

Solución. Tenemos $e = e^1 = f(1)$, con $f(x) = e^x$. Utilizando $a = 0$, y dado que $f^{(n)}(x) = e^x\ \forall\ n$, tenemos $P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ y

$$|R_n(1)| = |f(1) - P_n(1)| = |\frac{e^c(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

dado que c está entre 0 y 1 y e^x es una función creciente (por lo que $1 < e^c \leq e^1 = e$). Hemos luego utilizado la cota $e \leq 3$. De esta forma, para $n = 13$ obtenemos $|R_n(1)| \leq 3/14! \approx 3{,}44 \times 10^{-11} < 10^{-10}$. Por lo tanto, obtenemos el valor aproximado

$$e \approx \sum_{k=0}^{13} \frac{1}{k!} = 2,7182818284\ldots$$

con un error menor que 10^{-10}.

Ejemplo 30 *Estimar* $\cos(10^o)$ *con un polinomio de grado 2, y dar una cota para el error cometido.*

Solución. Pasando a radianes tenemos $\cos(10^o) = \cos(\frac{10}{180}\pi) = \cos(\frac{\pi}{18})$. Podemos entonces utilizar el polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 0$, $P_2(x) = 1 - x^2/2!$, obteniendo

$$\cos(\frac{\pi}{18}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{18})^2 + R_2(\frac{\pi}{18})$$

Como la serie de Maclaurin $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - x^2/2! + x^4/4! + \ldots$ es alternante $\forall\ x$, cumpliendo en $x = \pi/18$ con las condiciones del criterio de Leibniz, y sabemos que converge a $\cos x\ \forall\ x$, podemos directamente utilizar la cota de error para series alternantes, $|R_2(x)| = |\cos x - (1 - x^2/2)| \leq |x^4/4!| = x^4/4!$. Por lo tanto,

$$|R_2(\frac{\pi}{18})| \leq \frac{(\frac{\pi}{18})^4}{4!} \approx 3{,}87 \times 10^{-5}$$

por lo que

$$\cos(\frac{\pi}{18}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{18})^2 \approx 0,9848$$

con error menor que 10^{-4}.

Como $\cos x$ es *par*, $P_2(x) = P_3(x)$ y entonces $R_2(x) = R_3(x)$. Acotando $R_3(x)$ con el teorema de Taylor, se obtiene la misma cota de error anterior (verificar).

4.4. Ejercicios

1. Encuentre la serie de Maclaurin de las funciones siguientes, indicando el radio e intervalo de convergencia, y obtenga de ella los polinomios de Taylor en $a = 0$ de grado 1, 2 y 4. Grafíquelos junto con $f(x)$.

   $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $\quad f(x) = \frac{1}{1+5x}$, $\quad f(x) = \ln(1+2x)$
   $f(x) = \cos(2x)$, $\quad f(x) = x\cos(x)$, $\quad f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (usar una identidad trigonométrica)

2. Encuentre la serie de Taylor en el valor indicado de a, y determine el radio e intervalo de convergencia. Obtenga los correspondientes polinomios de Taylor de grado 2 y 4.

   $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 4$ $\quad$ $f(x) = \ln x$, a=1
   $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/4$ $\quad$ $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/2$
   $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$ $\quad$ $f(x) = \cos x$, $a = \pi/6$
   $f(x) = e^x$, $a = 1$ $\quad$ $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 1$

3. Encuentre los dos primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de

   $f(x) = \tan x$, $\quad$ $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

4. Aproxime la cantidad dada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores indicados de n y a. Determine la precisión de la aproximación.

   $\sin 10^o$, $n = 1$, $a = 0$ $\quad$ $\sin 10^o$, $n = 3$, $a = 0$
   $\sin 46°$, $n = 2$, $a = \pi/4$ $\quad$ $\cos 29°$, $n = 2$, $a = \pi/6$
   $e^{1/2}$, $n = 4$, $a = 0$ $\quad$ $\sqrt{82}$, $n = 2$, $a = 81$

5. Evalúe, con error menor que 10^{-3}, las siguientes integrales:

$$\int_0^{1/2} t^2 e^{-t^2} dt\,, \qquad \int_0^{1/2} \operatorname{sen}(t^2) dt$$

Orden de magnitud del error en la fórmula de Taylor.
Se dice que una función $f(x)$ es orden $(x-a)^n$ para $x \to a$, lo que se denota como $f(x) = O(x-a)^n$ para $x \to a$, si existen constantes positivas $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq M|x-a|^n$ para $|x-a| < \delta$, es decir, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Por lo tanto, $f(x) = O(x-a)^n$ para $x \to a$ implica que $|f(x)|$ es no mayor que una constante por $|x-a|^n$ si x está suficientemente cerca de a.
Por ejemplo, $f(x) = 2x^2$ es $O(x^2)$ para $x \to 0$, y también lo es $f(x) = -x^2/4$ (justificar). Asimismo, $f(x) = 2x^2 + 4x^3$ es también $O(x^2)$ para $x \to 0$, pues $|x^3| \ll x^2$ para x cercano a 0: $|2x^2 + 4x^3| = |2x^2(1+2x)| = 2x^2|1+2x| \leq 6x^2$ si $|x| < 1$.

Esta notación se extiende también a comparaciones con otras funciones: Se dice que $f(x) = O(g(x))$ para $x \to a$ si existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para $|x-a| < \delta$. El valor de a puede ser también ∞: $f(x) = O(g(x))$ para $x \to \infty$ si existen constantes $M > 0$ y $r > 0$ tales que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para todo $x > r$.

Volviendo al error en la fórmula de Taylor, si $\exists\ M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| < M$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, entonces $|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ en este intervalo, por lo que en este caso (justificar)

$$R_n(x) = O(x-a)^{n+1} \text{ para } x \to a$$

es decir,

$$f(x) = P_n(x) + O(x-a)^{n+1} \text{ para } x \to a$$

Esta notación es muy empleada en ingeniería y en todas las ciencias exactas. Es además la notación estándar utilizada en programas como mathematica, etc.

Problema. Mostrar que para $x \to 0$,

$$(a)\ \ e^x = 1 + x + O(x^2), \quad (b)\ \ \mathrm{sen}(x) = x + O(x^3), \quad (c)\ \ e^{-x^2} = 1 - x^2 + O(x^4)$$

Por ejemplo, esto muestra que para x cercano a 0, $\mathrm{sen}(x)$ se comporta como x, siendo la diferencia $|\mathrm{sen}(x) - x|$ no mayor que $M|x^3|$, es decir, muy pequeña ($|x|^3 \ll |x|$ si $|x| \ll 1$).

Aplicación. Límites y comportamiento cerca del límite.
Si $f(x) = O(x-a)^n$, entonces (demostrarlo!)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad k < n$$

Es decir, si $n > 0$, $f(x) = O(x-a)^n$ para $x \to a$ no sólo implica que $f(x)$ se anula para $x \to a$, sino que se anula más rápido que $(x-a)^k\ \forall\ k < n$.
Por lo tanto, si $R_n(x) = O(x-a)^{n+1}$ para $x \to a$ tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad k < n+1$$

Esto permite determinar ciertos límites del tipo $0/0$ en forma muy simple mediante el desarrollo de Taylor. Como ejemplo, consideremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

que es del tipo $0/0$. Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de e^x en $a = 0$, podemos escribir $e^x = 1 + x + x^2/2! + O(x^3)$ para $x \to 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2/2! + O(x^3) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + O(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

El desarrollo de Taylor permite en realidad no sólo calcular el límite anterior sino también ver como se comporta el cociente $(e^x - 1 - x)/x^2$ en la vecindad de $x = 0$: Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de e^x, obtenemos $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + O(x^4)$ y por lo tanto,

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + O(x^2)$$

para $x \to 0$. Esto muestra que $\frac{e^x-1-x}{x^2}$ se comporta como $1/2 + x/6$ para x cercano a 0.

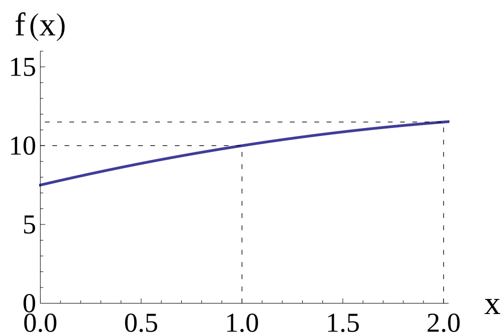
Problema: Evaluar los siguientes límites por medio de un polinomio de Taylor adecuado, e indicar el comportamiento de la función cerca del límite.

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} - 1}{x^2}, \quad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad (d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{1 + \cos x}{(x-\pi)^2}$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \ \ (\text{Sugerencia}: (1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}})$$

4.5. Aplicaciones

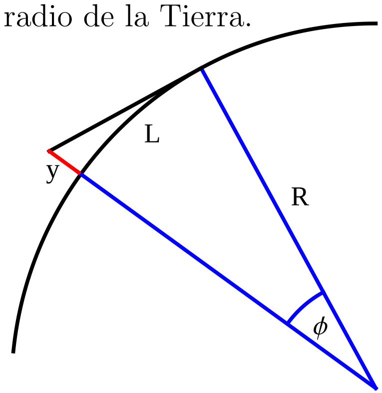
1. De una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 10$, $f'(1) = 2$ y $f''(1) = -1$, con $|f'''(x)| \leq 0,1 \ \forall\ x \in [0, 2]$. Estime con estos datos el valor de $f(0)$, $f(3/2)$ y $f(2)$. Dé también una cota superior para la diferencia $|f(x) - f_e(x)|$ en $x = 0$, $x = 3/2$ y $x = 2$ ($f_e(x)$ denota el valor estimado).



2. En el instante $t = 0\,seg$, un móvil se encuentra en la posición $x = 0\,m$ con velocidad $v = 10\,m/seg$ y aceleración $a = -5m/seg^2$. Se sabe además que la aceleración varía poco, cumpliendo $|da/dt| \leq 0,1m/seg^3$ entre $t = 0$ y $t = 2{,}5\ seg$.

a) Con estos datos, proporcione una estimación de la posición $x(t)$ del móvil y su velocidad $v(t)$ al tiempo t para $0 \leq t \leq 2{,}5\ seg$, y dé una cota superior $d_{\max}(t)$ para la diferencia $d(t) = |x_v(t) - x_e(t)|$ entre la posición verdadera $x_v(t)$ y la posición estimada $x_e(t)$. Dé también una cota superior $\delta_{\max}(t)$ para $|v(t) - v_e(t)|$.
b) Evalúe $x_e(t)$, $v_e(t)$, $d_{\max}(t)$ y $\delta_{\max}(t)$ para $t = 0{,}5\,seg$ y $t = 2\ seg$.
c) Estime el tiempo de frenado t_f (en el que $v(t_f) = 0$) y obtenga una cota superior e inferior para t_f.

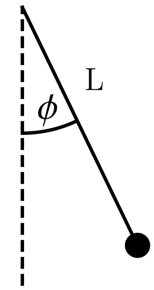
3. Para nivelar una carretera de gran longitud L, se debe establecer un margen debido a la curvatura de la Tierra.
(i) Demuestre que los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(\phi) = \sec\phi$ son $1 + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{5}{24}\phi^4$.
(ii) Para valores pequeños de ϕ, utilice la aproximación de 2^o orden $\sec\phi \approx 1 + \frac{1}{2}\phi^2$ y la siguiente figura para demostrar que la corrección por nivelación es $y = \frac{L^2}{2R}$, donde L es la longitud y R es el radio de la Tierra.



4. La energía potencial de una masa m que cuelga de un hilo de longitud L es

$$E_p(\phi) = mgL(1 - \cos\phi)$$

donde ϕ es el ángulo que forma el hilo con la vertical.



a) Muestre que si ϕ es pequeño, entonces

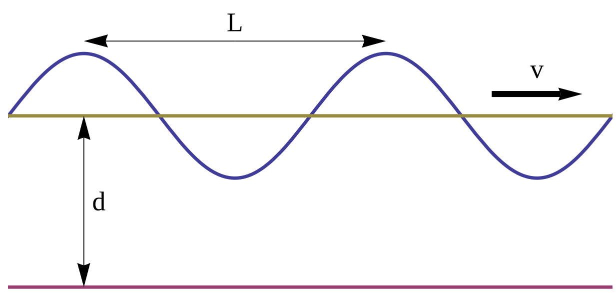
$$E_p(\phi) \approx \frac{1}{2}mgL\phi^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{L}(L\phi)^2$$

que es equivalente a la energía potencial de un resorte de constante $k = mg/L$. ¿Cual será el período del movimiento en esta aproximación?

b) Dé una cota superior para el error relativo $|E_p(\phi) - \frac{1}{2}mgL\phi^2|/(mgL)$ si $\phi \leq 25^o$ (recordar que se debe convertir 25^o a radianes !).

5. Una onda de longitud L viaja de izquierda a derecha en agua de profundidad d, como se ilustra en la figura. Puede demostrarse que la velocidad de propagación v de la onda está relacionada con L y d por la función

$$v = \sqrt{(gL/2\pi)\tanh(2\pi d/L)}$$



a) Demuestre que en agua profunda $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.

b) Encuentre los dos primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando d/L es pequeño, $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua poco profunda la velocidad de la onda es independiente de la longitud de onda.

6. La energía potencial gravitatoria de una masa m a una distancia $h \geq 0$ de la superficie terrestre está dada por

$$U(h) = -\frac{GMm}{R+h}$$

donde G es la constante de gravitación universal y M, R la masa y radio de la tierra respectivamente. Mostrar que si $h \ll R$, se obtiene la aproximación usual

$$U(h) - U(0) \approx mgh$$

con $g = GM/R^2$ la aceleración de la gravedad en la superficie.
Obtenga también una cota superior para el error relativo

$$\frac{|U(h) - U(0) - mgh|}{mgh}$$

si $0 < h < R$. ¿Cual el signo de $U(h) - U(0) - mgh$ para $h > 0$?

5. Serie binomial

5.1. Teorema del binomio

Empezamos con los siguientes desarrollos

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1+2x+x^2\\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

y, en general, si m es un entero no negativo,

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots+x^m$$

Este desarrollo de $(1+x)^m$ recibe el nombre de **teorema del binomio** o **binomio de Newton**.

Definición 2 *Para cualquier número real r, la serie*

$$\begin{aligned}& 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\ =& \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r.(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}x^k\end{aligned}$$

recibe el nombre de ***serie binomial****.*

Observar que la serie binomial solamente termina cuando r es un entero no negativo. En este caso se reduce al binomio de Newton.

El criterio de la razón muestra que la serie binomial converge si $|x|<1$, y diverge si $|x|>1$. La serie binomial define así una función f infinitamente diferenciable en el intervalo $(-1,1)$.

No debe causar gran sorpresa saber que la función representada por la serie binomial es $f(x)=(1+x)^r$.

Proposición 31 *Si $|x|<1$, entonces para todo número real r*

$$(1+x)^r = 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

Ejemplo 32 *Obtener una representación en serie de potencias para $\sqrt{1+x}$.*

Solución 2 *Con $r=\frac{1}{2}$ resulta que para $|x|<1$*

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots\\ &\quad+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2 3!}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)\,x^n}{2^n n!}+\cdots\end{aligned}$$

Graficar las sumas parciales primeras y la función representada en el dominio que corresponda.

Comentarios 33 *En ciencias se utiliza a menudo una serie binomial para obtener aproximaciones.*

Ejemplo 34 *En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve con una velocidad v en relación a un observador, es*

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz.

Muchos resultados de la física clásica no se cumplen en el caso de partículas como los electrones, los cuales se mueven casi a a la velocidad de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0v^2$, sino que se expresa como

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

Si se identifica $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$, se tiene que $|x| < 1$, puesto que ninguna partícula móvil puede rebasar la velocidad de la luz. Así se puede escribir

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-x}} - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left[(1-x)^{-1/2} - 1\right] \\ &= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right) - 1\right] \\ &= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{v^6}{c^6}\right) + \cdots\right] \end{aligned}$$

En el caso en que v es mucho menor que c, los términos posteriores al primero son despreciables. Esto conduce al resultado bien conocido

$$K \approx m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2}m_0v^2$$

Problema 35 *Aplicaciones de la serie binomial:*

1. *Obtenga los primeros cuatro términos de la representación en serie de potencias de la función indicada para $a = 0$, y calcule el radio de convergencia de la serie.*

$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$	$f(x) = \sqrt{1-x}$	$f(x) = \sqrt{9-x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+5x}}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
$f(x) = (4+x)^{3/2}$	$f(x) = \sqrt{\frac{1}{(1+x)^5}}$	$f(x) = \frac{x}{(2+x)^2}$
$f(x) = x^2\left(1-x^2\right)^{-3}$		

2. *Explique porqué el error de la aproximación dada es menor que la cantidad indicada.*

   $(1+x^2)^{1/3} \approx 1 + \frac{x^2}{3};$ $\quad\quad \frac{1}{9}x^4$

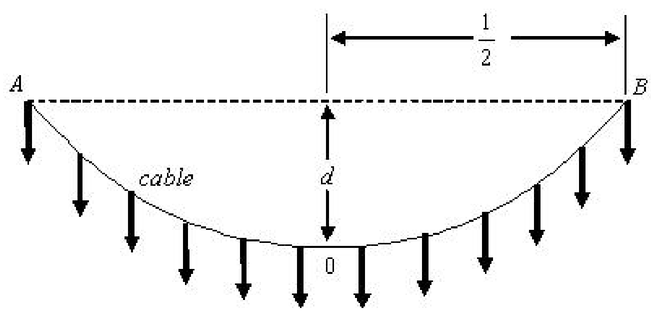
   $(1+x^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4;$ $\quad\quad \frac{5}{16}x^6$

3. *Encuentre una representación en serie de potencias para $arcsen(x)$ empleando*

$$arcsen(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

4. *En la figura un cable colgante está sostenido en los puntos A y B, y soporta una carga uniformemente distribuida (como el trayecto de ruta sobre un puente). Si $y = \left(4\frac{d}{L^2}\right)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por*

$$s = L + \frac{8d^2}{3L} - \frac{32d^4}{5L^3} + \cdots$$



5. *Aproxime las integrales siguientes hasta tres cifras decimales*

   $\int_0^{0,2} \sqrt{1+x^3}dx$ $\quad\quad \int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^4}dx$

6. Autoevaluación

1. Conteste verdadero o falso, y piense una explicación de su respuesta:

   a) ¿Toda sucesión acotada converge?. _____

   b) Si una sucesión es monótona decreciente, es convergente. _____

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ para todo valor de x. _____

   d) Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\sum_0^\infty a_n$ siempre converge. _____

   e) Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sum_n a_n$ es convergente. _____

   f) Si $\sum_k a_k^2$ converge, entonces $\sum a_k$ también converge. _____

   g) Si $\sum_{k=1}^\infty a_k$, $a_k > 0$, converge, entonces $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k$ converge. _____

   h) Si $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converge absolutamente, $\sum (-1)^{k+1} \frac{a_k}{k}$ converge. _____

   i) Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia no nulo. _____

   j) Una serie de potencias converge absolutamente para todo valor de x en su intervalo de convergencia?._ _ _ _

   k) Una serie de potencias $\sum c_k x^k$ con radio de convergencia $R > 0$ representa a una función infinitamente diferenciable en el intervalo $(-R, R)$. _____

   l) Si una serie de potencias $\sum c_k x^k$ converge para $-1 < x < 1$ y es convergente para $x = 1$, la serie debe converger también para $x = -1$. _____

   m) $f(x) = \ln x$ no puede ser representada por una serie de Maclaurin. _____

   n) El intervalo de convergencia de la serie $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ es $(-1, 1)$. _____

2. Llene los espacios en blanco.

   a) La serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ representa a la función $f(x) =$_____ $\forall\, x$.

   b) La representación en serie binomial de $f(x) = (4 + x)^{1/2}$ tiene radio de convergencia _____.

   c) La serie geométrica $\sum (\frac{5}{x})^k$ converge para los siguientes valores de x: _____.

   d) Si el radio de convergencia de la serie $\sum_k c_k x^k$ es $R > 0$, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_k c_k\, 2^k x^k$ es _____.

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^4} =$ _____. $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^2} =$ _____.

3. Encuentre la suma de la serie convergente indicada.

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}+3}{(1{,}01)^{k-1}} \qquad \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k\, k!}$

4. Halle la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/2$.

5. Demuestre que la serie del ejercicio anterior representa a la función probando que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

7. Apéndice: Aproximación de la suma de una serie convergente por una suma parcial

Importante. *Si se sabe que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, se puede tomar una suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ como aproximación a la suma S de la serie. Damos a continuación una estimación de la diferencia o error*

$$|S_n - S| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|$$

en algunos casos importantes.

7.1. Estimación del error para una serie alternante

La propiedad siguiente es muy útil para saber si una suma parcial S_n de una serie alternante convergente, es aceptable o no para aproximar a su suma S.

Proposición. *Si la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} c_k, \quad c_k > 0$, converge a un número S, y si $c_{k+1} \leq c_k$ para todo k, entonces $|S - S_n| < c_{n+1}$ para todo n, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} c_k$ es la enésima suma parcial.*

Esta propiedad expresa que el error $|S - S_n|$ entre la n-ésima suma parcial y la suma de la serie es menor que el valor absoluto del $(n+1)$-ésimo término de la serie (o del siguiente respecto de los términos que se han considerado en S_n).

Problema 1 *Demostración: Considerar $S - S_n = (-1)^{n+1}(c_{n+1} - (c_{n+2} - c_{n+3}) - \ldots)$ y hacer alguna fundamentación para ver que es cierto el resultado de la proposición.*

Ejercicio 2 *Evaluar cuál suma parcial se puede considerar para aproximar la suma de la serie convergente*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$$

con un error menor que 10^{-3}. Puede usar la calculadora o PC para evaluar.

Ejercicio 3 *El número de términos para un determinado error depende de la serie. Probar que para estimar las series*

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad (iii) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln k}$$

con un error menor a 10^{-3}, se requieren solo 6 términos en la primera, 1000 términos en la segunda ! y del orden de $e^{10^3} \approx 2 \times 10^{434}$ términos en la tercera !!
Notar que las tres series son convergentes por el criterio de series alternantes, aunque solo una de ellas (cual?) converge absolutamente.

Ejercicio 4 *Encuentre el menor entero positivo n de modo que S_n aproxime la suma de la serie convergente con un error menor que 10^{-3}.*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$, *(b)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$,

(c) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} + \cdots$, *(d)* $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \cdots$,

7.2. Estimación del error para una serie de términos positivos

El test del cociente puede resultar también útil para conocer el error cometido por una suma finita S_n para aproximar a la suma S de la serie.

Proposición. *Supongamos que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es absolutamente convergente (y por lo tanto convergente) por el criterio del cociente. Si*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = L < R < 1$$

entonces para M sufientemente grande

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k < \frac{|u_{M+1}|}{1-R}$$

Demostración. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = L < R$, entonces para M suficientemente grande y $k > M$ se cumple $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} < R$. Por lo tanto, $\frac{|u_{M+2}|}{|u_{M+1}|} < R$, o sea $|u_{M+2}| < R|u_{M+1}|$, con $R < 1$. También,
$|u_{M+3}| < R|u_{M+2}| < R^2|u_{M+1}|$ y así, $|u_{M+p}| < R|u_{M+p-1}| < \ldots\ldots < R^{p-1}|u_{M+1}|$. En consecuencia, $\sum_{k=M+1}^{\infty} |u_k| < |u_{M+1}| + R|u_{M+1}| + R^2|u_{M+1}| + R^3|u_{M+1}| + \ldots + R^p|u_{M+1}| + \ldots$

Luego, como la serie de la derecha es una serie geométrica con razón $0 < R < 1$ y 1^o término $|u_{M+1}|$, conocemos su suma: $S_M^g = \frac{|u_{M+1}|}{1-R}$. Por lo tanto, $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} |u_k| < \frac{|u_{M+1}|}{1-R}$.

Como $|\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} |u_k|$, se concluye que $|\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k| < \frac{|u_{M+1}|}{1-R}$. ∎

Ejercicio 5 *1) Hallar una cota superior del error cometido por la suma parcial de los 6 primeros términos ($|S_6 - S|$) de las series siguientes:*

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n4^n} \qquad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

2) Encontrar cuántos términos m hay que sumar de las siguientes series para que el error cometido $|S_m - S|$ sea menor a 0.0005:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ *c)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$

3) Calcule el error al emplear las sumas parciales indicadas.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; S_9 *y* S_{99} , $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln k}$; S_9 *y* S_{99} , $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}$; S_9 , $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$; S_9