

1. Búsqueda de raíces

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Buscamos x^* tal que $f(x^*) = 0$.

1.1. Bisección

Requiere un intervalo $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Iteración:

$$m_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad \begin{cases} [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m_k] & \text{si } f(a_k)f(m_k) < 0, \\ [a_{k+1}, b_{k+1}] = [m_k, b_k] & \text{si } f(m_k)f(b_k) < 0. \end{cases}$$

1.2. Punto fijo

Reescribir $f(x) = 0$ como $x = g(x)$. Iteración:

$$x_{k+1} = g(x_k).$$

1.3. Punto fijo + Aitken

Aceleración de Aitken aplicada a una sucesión $\{x_k\}$:

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

1.4. Newton–Raphson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

2. Reconstrucción de funciones continuas

2.1. Polinomio interpolante de Lagrange

Dados nodos distintos x_0, \dots, x_n y valores $y_i = f(x_i)$, el interpolante:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

$$\text{Error: } f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

3. Derivación numérica

3.1. Derivación numérica regresiva

Primera derivada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

3.2. Derivación numérica progresiva

Primera derivada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

3.3. Derivación numérica central

Primera derivada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

4. Integración numérica

Aproximación de $I = \int_a^b f(x) dx$ con partición uniforme $x_i = a + i h$, $h = \frac{b-a}{n}$.

4.1. Regla del rectángulo medio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \quad x_i = a + i h, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

4.2. Regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i h) + f(b) \right], \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

4.3. Simpson 1/3 compuesta

Requiere n par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{\text{impares}} f_{(a+ih)} + 2 \sum_{\text{pares}} f_{(a+ih)} + f(b) \right)$$

Error de truncamiento

$$E_{\text{comp}} = -\frac{(b-a)^5}{180 n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$$E_{\text{comp}} = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

$$\begin{cases} h = \frac{(b-a)}{n} \\ n \text{ es par} \end{cases}$$

4.4. Simpson 3/8 compuesta

Requiere n múltiplo de 3:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left(f(a) + 3 \sum_{\text{impares}} f(x_i) + 3 \sum_{\text{pares}} f(x_j) + 2 \sum_{\text{mult},3} f(x_i) + f(b) \right)$$

$$h = \frac{(b-a)}{3n}$$

$$\text{Error de truncamiento} \quad E = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

5. Aproximación numérica mediante muestreo aleatorio

5.1. Montecarlo

Estimación de π por Montecarlo

$$\pi \approx 4 \frac{N_{\text{dentro del círculo}}}{N_{\text{total}}}.$$

Integral 1D por muestreo uniforme en $[a, b]$

$$\hat{I} = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad x_i \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Forma de valor esperado en dominio general

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \text{Vol}(\mathcal{D}) \mathbb{E}[f(\mathbf{X})], \quad \mathbf{X} \sim \text{Uniforme}(\mathcal{D}),$$

$$\hat{I} = \text{Vol}(\mathcal{D}) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i).$$

Caso 2D en $[a, b] \times [c, d]$

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx, \quad \hat{I} = (b-a)(d-c) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i),$$

$$x_i \sim \mathcal{U}(a, b), \quad y_i \sim \mathcal{U}(c, d).$$

Convergencia (Ley de los Grandes Números)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \mathbb{E}[f(X)] \Rightarrow \hat{I} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I.$$

Media, desvío muestral y error estándar

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{f})^2}.$$

Para el estimador de la integral $\hat{I} = (b-a)\bar{f}$, el error estándar es

$$EE(\hat{I}) = (b-a) \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervalo de confianza bilateral (nivel $1 - \alpha$)

$$\hat{I} \pm z_{\alpha/2} (b-a) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IC: } \hat{I} - z_{\alpha/2} (b-a) \frac{s}{\sqrt{n}}, \hat{I} + z_{\alpha/2} (b-a) \frac{s}{\sqrt{n}}).$$

Valores típicos de $z_{\alpha/2}$

Nivel de confianza	$z_{\alpha/2}$
80 %	1,2816
90 %	1,6449
95 %	1,9600
98 %	2,3263
99 %	2,5758

6. Aproximación numérica de EDOs

Esquema general (un paso)

$$y_{n+1} = y_n + h \varphi, \quad \varphi = f(x_n, y_n).$$

Restricciones/definiciones: y_{n+1} es el valor en el siguiente paso, y_n el valor actual, h el tamaño del paso, y $f(x_n, y_n)$ la derivada en el paso actual.

Problema de valor inicial (Cauchy)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Restricciones/definiciones: Ecuación diferencial ordinaria con condición inicial dada en x_0 . También se muestra el caso de solución general polinómica:

$$y = F(x) + c.$$

Término de resto

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Restricciones/definiciones: ξ es un punto (interior) del intervalo de avance; $y^{(n+1)}$ es la derivada de orden $n+1$.

Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n).$$

Restricciones/definiciones: Se usa la pendiente en el punto inicial (x_n, y_n) para predecir (x_{n+1}, y_{n+1}) .

Método de Euler mejorado (Heun)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*) \right), \quad y^* = y_n + h f(x_n, y_n).$$

Restricciones/definiciones: y^* es el valor predicho por Euler (predicción–corrección).

Método de Runge–Kutta 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3).$$

Restricciones/definiciones: Las pendientes k_1, k_2, k_3, k_4 se calculan en el punto actual, dos puntos intermedios y el punto final del paso.