

Notazione: $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$									
Basi generalizzate		Esiti misure e probabilità (Principio 4)						Roba di Ehrenfest	
$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$	$\langle x_0 x'_0\rangle = \delta(x_0 - x'_0)$	$w(a_k) = \frac{ \langle a_k \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$	$\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{ \langle a \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$				$[X, f(X, P)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial P}$	
$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$	$\langle p_0 p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k  a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i  a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)  a\rangle$				$[P, f(X, P)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial X}$	
Principio 6	$ \psi\rangle \rightarrow  \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi P_{a_k} \psi\rangle}}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{  \psi  ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{  \psi  ^2}$				$P_{a_k} = \sum_{i=1}^{d_k} \left  a_k^{(i)} \right\rangle \left\langle a_k^{(i)} \right $	$d_k$ degenerazione

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

- Trovo autovalori e autovettori di  $A$  e  $B$ ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico  $B$  a un autovettore degenerare di  $A$ );
- Se è anche autovettore di  $B$ , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
  - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;
  - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di  $B$ ;
  - Risolvero il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
  - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di  $A$  che di  $B$ .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger	Visuale di Schrödinger	Equazione di Heisenberg	Visuale di Heisenberg	Sistema conservativo
$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}  \psi(t)\rangle = H(t)  \psi(t)\rangle$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)  \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(t_0) \end{cases}$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H_H]$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_H =  \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Matrice densità	Stato puro	Stato misto	Proprietà generali	
$\rho(t) =  \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\rho^2(t) = \rho(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$N \left  n \right\rangle = n \left  n \right\rangle$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p   \rho(t)   u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$		Oscillatore armonico	$\langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t) A)$	$a \left  n \right\rangle = \sqrt{n} \left  n-1 \right\rangle$
Condizioni al contorno buche di potenziale		$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right)$	$Tr(\rho(t)) = 1$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$
Continuità di $\psi$ nelle	Continuità di $\psi'$ nelle	$N = a^\dagger a$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$a^\dagger \left  n \right\rangle = \sqrt{n+1} \left  n+1 \right\rangle$
discontinuità di V	discontinuità <b>finite</b> di V	$\varphi_n(x) = \left[ \frac{1}{n!2^n} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$[a, a^\dagger] = 1$
Soluzioni buche di potenziale 1D ( $A, B \in \mathbb{C}, 0 < x < a$ )		Metodo perturbativo	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$[N, a^\dagger] = a^\dagger$
$E > V :$	$E = V$	$E < V$	$a^\dagger = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$	$[N, a] = -a$
$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$	$\psi(x) = A + Bx$	$\psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$	$E_n^{(1)} = \left\langle n^{(0)} \right  \hat{W} \left  n^{(0)} \right\rangle ; \left  n^{(1)} \right\rangle = -\sum_{k \neq n} \frac{\left\langle k^{(0)} \right  \hat{W} \left  n^{(0)} \right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} \left  k^{(0)} \right\rangle$	
$k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$	$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$	$\rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$	$E_n^{(2)} = \left\langle n^{(0)} \right  \hat{W} \left  n^{(1)} \right\rangle = -\sum_{k \neq n} \frac{\left  \left\langle k^{(0)} \right  \hat{W} \left  n^{(0)} \right\rangle \right ^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$	
Momento angolare	$J_\pm \left  k\,j\,m \right\rangle = N_\pm \left  k\,j\,m \pm 1 \right\rangle ; \, N_\pm(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$	Particelle identiche	Caso degenerare: diagonalizzare $W_{ij} = \left\langle n_i^{(0)} \right  W \left  n_j^{(0)} \right\rangle$ (dà le correzioni al primo ordine del'autovalore degenerare)	
$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar)$	$J_z J_\pm = J_\pm(J_z \pm \hbar)$		Antisimmetrico	
Simmetrico	$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2[1+\delta_{mn}(\sqrt{2}-1)]}} (\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) + \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2))$		$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) - \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2))$	Commutatore tra $\vec{L}$ e $\vec{X}, \vec{P}$
Bosoni si trovano in stati simmetrici di spin			Fermioni si trovano in stati antisimmetrici di spin	$[L_i, X_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} X_k$
Buca di potenziale infinita 1D $\left( -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \right)$		Scattering	$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \int \mathrm{d}^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \varphi(\vec{r}')$	$[L_i, P_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} P_k$
$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$	$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$	$\varphi_k^{diff} \sim e^{ikz} + f_k(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$ per $\vec{r} \rightarrow \infty$	$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} =  f_k(\vartheta, \varphi) ^2$	Derivata di $U$
		$f_k(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' e^{-i\vec{k}\vec{r}'\cdot\vec{r}'} U(\vec{r}') \varphi(\vec{r}')$	Potenziale centrale ( $k :=  k_{diff}  =  k_{inc} $ )	$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \propto HU$
		Approssimazione di Born	$f_k^B = -\frac{i\mu}{\hbar^2 k} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r V(r) \left( e^{-2ikr} - 1 \right)$	(funziona anche se diverso da quello del prof)
		$f_k^B(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}} U(\vec{r}); \, U = \frac{2\mu}{\hbar^2} V$		
Sistema di 2 particelle	$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$	$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$	$\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r}$	$u_{n,l} = e^{-\frac{\rho}{n}} y_{nl}$
$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2}$	$\vec{p} = \frac{m_2 \vec{P}_1 - m_1 \vec{P}_2}{m_1 + m_2}$	Atomo di idrogeno	$y_{k,l} = \sum_q^{k-1} c_q \rho^{q+l+1} \qquad n = k + l$	$\frac{c_q}{c_{q-1}} = -\frac{2(k-q)}{q(q+2l+1)(k+l)}$
			$\rho = \frac{r}{a_0} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$	$E_I = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \quad E_n = \frac{E_I}{n^2}$

## Meccanica classica

Equazioni di Lagrange	Equazioni di Hamilton
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$	$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

# Roba matematica

<div>Error function</div> <div><math>erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^xe^{-t^2}\mathrm{d}t</math></div> <div>Polinomi di Hermite</div> <div><math>H_n(z)=(-)^ne^{z^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}e^{-z^2}</math></div> <div><math>=\left(2z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)H_{n-1}(z)</math></div> <div>Autofunzioni oscillatore armonico</div> <div><math>\varphi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^nn!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}</math></div> <div>Formule Eulero</div> <div><math>\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}</math></div> <div><math>\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}</math></div>	<div>Integrale di Seno (<math>n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}</math>)</div> <div><math>I_n(a)=\int_0^\infty x^ne^{-ax^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(\frac{n-1}{2})!!}{2^{\frac{n}{2}+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} &amp; \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} &amp; \text{n dispari}\end{cases}</math></div> <div>Integrale di D'Eramo</div> <div><math>\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}xe^{-\alpha x^2+\beta x}=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}</math></div>	<div>Commutatori cancri</div> <div><math>[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]</math></div> <div><math>[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B</math></div> <div><math>[AB,CD]=A[B,C]D+AC[B,D]+[A,C]DB+C[A,D]B</math></div> <div>Integrale utile (<math>n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}</math>)</div> <div><math>\int_0^1\mathrm{d}z\sin^2(n\pi z)\sin^2(m\pi z)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\delta_{mn}\right)</math></div>	<div>Prodotto misto</div> <div><math>\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})</math></div> <div><math>\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})</math></div> <div><math>(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})</math></div> <div>Goniometria marastonica</div> <div><math>\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}</math></div> <div><math>\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}</math></div>
---	--	---	---