

Notazione:  $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate		Esiti misure e probabilità (Principio 4)		
$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$	$\langle x_0 x'_0\rangle = \delta(x_0 - x'_0)$	$w(a_k) = \frac{ \langle a_k \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$	$dw(a) = \rho(a)da = \frac{ \langle a \psi\rangle ^2}{  \psi  ^2}$
$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$	$\langle p_0 p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k  a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i  a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int da\, c(a)  a\rangle$
Principio 6	$ \psi\rangle \rightarrow  \psi'\rangle = \frac{Pa_k \psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi P_{a_k} \psi\rangle}}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{  \psi  ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{  \psi  ^2}$

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di  $A$  e  $B$ ;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico  $B$  a un autovettore degenerare di  $A$ );
4. Se è anche autovettore di  $B$ , sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
  - (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;
  - (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di  $B$ ;
  - (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
  - (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di  $A$  che di  $B$ .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger	Visuale di Schrödinger	Equazione di Heisenberg	Visuale di Heisenberg	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{d}{dt}  \psi(t)\rangle = H(t)  \psi(t)\rangle$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)  \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H, H]$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_H =  \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Matrice densità $\rho(t) =  \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $ $\rho_{pn}(t) = \langle u_p   \rho(t)   u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$	Stato puro $\rho^2(t) = \rho(t)$	Stato misto $\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	Proprietà generali $\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$ $Tr(\rho(t)) = 1$ $i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]$	$N  n\rangle = n  n\rangle$ $a  n\rangle = \sqrt{n}  n-1\rangle$ $a^\dagger  n\rangle = \sqrt{n+1}  n+1\rangle$
		Oscillatore armonico $H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right)$ $N = a^\dagger a$ $u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{d}{dx}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$ $a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$ $\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$ $a^\dagger = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$	$[a, a^\dagger] = 1$ $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ $[N, a] = -a$

Stati

Principio 1	Funzione d'onda e densità di probabilità	Trasformata di Fourier	Basi generalizzate
$S \mapsto \mathcal{H}$	$P(x) = \frac{ \psi(x) ^2}{  \psi(x)  ^2}$	$\widetilde{\psi}(p) = \sqrt{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$	$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x-x_0)$
$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \,   \, \psi\rangle \,   \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$	$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$	$P(p) = \frac{ \psi(p) ^2}{  \psi(p)  ^2}$	$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$
			$\langle x_0   x'_0 \rangle = \delta(x_0 - x'_0)$ $\langle p_0   p'_0 \rangle = \delta(p_0 - p'_0)$

Osservabili

Posizione e impulso	Principio 2	Principio 3	Principio 4
$X\psi(x) = x\psi(x)$	$\mathcal{A} \mapsto A$	$A \,  a\rangle = a \,  a\rangle$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i}   \psi \rangle ^2}{  \psi  ^2}$
$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$	$\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi   A   \psi \rangle}{\langle \psi   \psi \rangle}$	$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$	$w(a_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i \,  a_k\rangle$
$[X,P] = i\hbar$	$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{  \psi  ^2}$
			$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{  \psi  ^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore ( $P, \mathcal{D}(P)$ )	Principio 6	Osservabili compatibili
$P$ è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$	$ \psi\rangle \rightarrow  \psi'\rangle = \frac{P_{a_k}  \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi   P_{a_k}   \psi \rangle}}$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A,B] = 0$
$P_q = \sum_i  \varphi_i\rangle \langle \varphi_i , \{ \varphi_i\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni	
Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):		

1. Trovo autovalori e autovettori di  $A$  e  $B$ ;

2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;

3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico  $B$  a un autovettore degenerare di  $A$ );

4. Se è anche autovettore di  $B$ , sono a posto (è autovettore comune);

5. Se non lo è:

(a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;

(b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di  $B$ ;

(c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;

(d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di  $A$  che di  $B$ .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger	Trasformazioni unitarie	Operatore di evoluzione temporale	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \,  \psi(t)\rangle = H(t) \,  \psi(t)\rangle$	$\begin{cases}  \psi\rangle & \mapsto  \psi'\rangle = U \,  \psi\rangle \\ A & \mapsto A' = U A U^\dagger \end{cases}$	$U(t,t_0) \,  \psi(t_0)\rangle =  \psi(t)\rangle$	$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Visuale di Schrödinger	Visuale di Heisenberg	Equazione di heisenberg	
$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \,  \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_H =  \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$	

Matrice densità

Stato puro	Stato misto	Proprietà (stato generico)	SOLO PER STATI PURI
$\rho(t) =  \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\{ \psi_k(t)\rangle\}, \, p_k$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$\rho^2(t) = \rho(t)$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p   \rho(t)   u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$Tr(\rho(t)) = 1$	$Tr(\rho^2(t)) = 1$
		$i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$	

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori	Definizioni utili	Nuovo probl. autov.	Autostati
$H \,  \psi\rangle = E \,  \psi\rangle$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$a \,  n\rangle = \sqrt{n} \,  n-1\rangle$
$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$a^\dagger = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$	$a^\dagger \,  n\rangle = \sqrt{n+1} \,  n+1\rangle$
Autofunzione n-esima	$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$	$N = a^\dagger a$	$[N,a] = -a, \quad [N,a^\dagger] = +a^\dagger$
$u_n(x) = \left[ \frac{1}{n! 2^n} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$		$[a,a^\dagger] = 1$	