Notazione: $\bar{\sqrt{x}} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate

$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$ $\qquad \langle x_0 | x_0' \rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$|p\rangle = v_p(x) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\qquad \langle p_0 | p_0' \rangle = \delta(p_0 - p_0')$

Principio 6

$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_k}|\psi\rangle}}$

Esiti misure e probabilità (Principio 4)

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\qquad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$

$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k |a_k\rangle$ $\qquad |\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_k} c_k^i |a_k\rangle$ $\qquad |\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)\,|a\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$ $\qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2}$ $\qquad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

Roba di Ehrenfest

$[X, f(X,P)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial P}$

$[P, f(X,P)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial X}$

$P_{a_k} = \sum_{j=1}^{d_k} \left|a_k^{(i)}\right\rangle \left\langle a_k^{(i)}\right|$

d_k degenerazione

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Matrici di Pauli

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = $
$= -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_i j + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

Spin

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

Trasformazione unitaria

$A' = UAU^\dagger$

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger

$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$

Visuale di Schrödinger

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$

Equazione di Heisenberg

$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H]$

Visuale di Heisenberg

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$

Sistema conservativo

$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$

Matrice densità

$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

$\rho_{pn}(t) = \langle u_p|\rho(t)|u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$

Stato puro

$\rho^2(t) = \rho(t)$

Stato misto

$\rho(t) = \sum_k p_k\rho_k(t)$

Proprietà generali

$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\qquad \langle A\rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$

$Tr(\rho(t)) = 1$ $\qquad i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

$N|n\rangle = n|n\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

Condizioni al contorno buche di potenziale

Continuità di ψ nelle discontinuità di V

Continuità di ψ' nelle discontinuità **finite** di V

Oscillatore armonico

$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad \hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ $\qquad a = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ $\qquad [a, a^\dagger] = 1$

$N = a^\dagger a$ $\qquad \hat{P} := \bar{\sqrt{m\hbar\omega}}P$ $\qquad a^\dagger = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$ $\qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger$

$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$ $\qquad [N, a] = -a$

Soluzioni buche di potenziale ($A, B \in \mathbb{C}$)

$E > V$: $\quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\quad k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$

$E = V$ $\quad \psi(x) = A + Bx$

$E < V$ $\quad \psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$ $\quad \rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Metodo perturbativo

$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|\hat{W}|n^{(0)}\rangle$; $\quad |n^{(1)}\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}|k^{(0)}\rangle$

$E_n^{(2)} = \langle n^{(0)}|\hat{W}|n^{(1)}\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$

Momento angolare

$J_\pm|k\,j\,m\rangle = N_\pm|k\,j\,m\pm1\rangle$; $\quad N_\pm(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}$; $\quad J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar)$

$J_zJ_\pm$

Roba matematica

Error function

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$

Polinomi di Hermite

$H_n(z) = (-)^n e^{z^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}e^{-z^2}$
$= \left(2z - \frac{d}{dz}\right)H_{n-1}(z)$

Integrale di Seno

$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}2}\sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} & \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} & \text{n dispari} \end{cases}$

Commutatori cancri

$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$

$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$

$[AB, CD] = A[B,C]D + AC[B,D] +$
$+[A,C]DB + C[A,D]B$

Prodotto misto

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

Stati

Principio 1

$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$

$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \left|\psi\right\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$

Funzione d'onda e densità di probabilità

$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{||\psi(x)||^2}$

$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$

Trasformata di Fourier

$\widetilde{\psi}(p) = \sqrt[-]{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$

$P(p) = \frac{|\psi(p)|^2}{||\psi(p)||^2}$

Basi generalizzate

$\left|x\right\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$

$\left|p\right\rangle = v_p(x) = \sqrt[-]{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

$\left\langle x_0 | x_0' \right\rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$\left\langle p_0 | p_0' \right\rangle = \delta(p_0 - p_0')$

Osservabili

Posizione e impulso

$X\psi(x) = x\psi(x)$

$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$

$[X, P] = i\hbar$

Principio 2

$\mathcal{A} \mapsto A$

$\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$

$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$

Principio 3

$A \left|a\right\rangle = a \left|a\right\rangle$

$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$

Principio 4

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i} | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$

$\left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k \left|a_k\right\rangle$ $\quad$ $\left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i \left|a_k\right\rangle$ $\quad$ $\left|\psi\right\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) \left|a\right\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $\rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$

P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$

$P_q = \sum_i \left|\varphi_i\right\rangle \left\langle\varphi_i\right|$, $\{\left|\varphi_i\right\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$

Principio 6

$\left|\psi\right\rangle \to \left|\psi'\right\rangle = \frac{P_{a_k}\left|\psi\right\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_{a_k} | \psi \rangle}}$

Osservabili compatibili

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger

$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left|\psi(t)\right\rangle = H(t) \left|\psi(t)\right\rangle$

Trasformazioni unitarie

$\begin{cases} \left|\psi\right\rangle & \mapsto \left|\psi'\right\rangle = U\left|\psi\right\rangle \\ A & \mapsto A' = UAU^\dagger \end{cases}$

Operatore di evoluzione temporale

$U(t, t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi(t)\right\rangle$ $\quad$ $U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t)\mathrm{d}t$

Sistema conservativo

$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)}$

Visuale di Schrödinger

$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_S = U(\Delta t)\left|\psi(t_0)\right\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$

Visuale di Heisenberg

$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_H = \left|\psi(t_0)\right\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$

Equazione di heisenberg

$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$

Matrice densità

Stato puro

$\rho(t) = \left|\psi(t)\right\rangle \left\langle\psi(t)\right|$

$\rho_{pn}(t) = \left\langle u_p\right| \rho(t) \left|u_n\right\rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$

Stato misto

$\{\left|\psi_k(t)\right\rangle\}, \; p_k$

$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$

Proprietà (stato generico)

$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\quad$ $\langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$

$Tr(\rho(t)) = 1$ $\quad$ $i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

SOLO PER STATI PURI

$\rho^2(t) = \rho(t)$

$Tr(\rho^2(t)) = 1$

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori

$H\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle$

$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$

Definizioni utili

$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$ $\quad$ $a = \sqrt[-]{2}(\hat{X} + i\hat{P})$

$\hat{P} := \sqrt[-]{m\hbar\omega} P$ $\quad$ $a^\dagger = \sqrt[-]{2}(\hat{X} - i\hat{P})$

$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$ $\quad$ $N = a^\dagger a$

$[a, a^\dagger] = 1$

Nuovo probl. autov.

$N\left|\varphi_\nu^i\right\rangle = \nu\left|\varphi_\nu^i\right\rangle$

$E_\nu = \hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$

$\nu \in \mathbb{N}$

Autostati

$a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$

$a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$

$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = +a^\dagger$

Autofunzione n-esima

$$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$$