Notazione: $\bar{\sqrt{x}} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

**Basi generalizzate**

$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$ $\quad \langle x_0 | x_0' \rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$|p\rangle = v_p(x) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\quad \langle p_0 | p_0' \rangle = \delta(p_0 - p_0')$

**Principio 6** $\quad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_{a_k} |\psi\rangle}}$

**Esiti misure e probabilità (Principio 4)**

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$

$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k |a_k\rangle$ $\quad |\psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i |a_k\rangle$ $\quad |\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) |a\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$ $\quad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2}$ $\quad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

**Roba di Ehrenfest**

$[X, f(X,P)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial P}$

$[P, f(X,P)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial X}$

$P_{a_k} = \sum_{j=1}^{d_k} \left|a_k^{(i)}\right\rangle \left\langle a_k^{(i)}\right|$

$d_k$ degenerazione

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di $A$ e $B$;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico $B$ a un autovettore degenere di $A$);
4. Se è anche autovettore di $B$, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di $B$;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di $A$ che di $B$.

**Matrici di Pauli**

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = = -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

**Spin**

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

**Trasformazione unitaria**

$A' = UAU^\dagger$

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

**Equazione di Schrödinger**

$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$

**Visuale di Schrödinger**

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(t_0) \end{cases}$

**Equazione di Heisenberg**

$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H_H]$

**Visuale di Heisenberg**

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$

**Sistema conservativo**

$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$

**Matrice densità**

$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

$\rho_{pn}(t) = \langle u_p|\rho(t)|u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$

**Stato puro**

$\rho^2(t) = \rho(t)$

**Stato misto**

$\rho(t) = \sum_k p_k\rho_k(t)$

**Proprietà generali**

$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\quad \langle A\rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$

$Tr(\rho(t)) = 1$ $\quad i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

$N|n\rangle = n|n\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

**Oscillatore armonico**

$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ $\quad \hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ $\quad a = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ $\quad [a, a^\dagger] = 1$

$N = a^\dagger a$ $\quad \hat{P} := \bar{\sqrt{m\hbar\omega}}P$ $\quad a^\dagger = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$ $\quad [N, a^\dagger] = a^\dagger$

$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$ $\quad [N, a] = -a$

**Condizioni al contorno buche di potenziale**

Continuità di $\psi$ nelle discontinuità di V

Continuità di $\psi'$ nelle discontinuità **finite** di V

**Soluzioni buche di potenziale** ($A, B \in \mathbb{C}$, $0 < x < a$)

$E > V$: $\quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\quad k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$

$E = V$: $\quad \psi(x) = A + Bx$ $\quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$

$E < V$: $\quad \psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$ $\quad \rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

**Metodo perturbativo**

$E_n^{(1)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(0)}\right\rangle$; $\left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}\left|k^{(0)}\right\rangle$

$E_n^{(2)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$

Caso degenere: diagonalizzare $W_{ij} = \left\langle n_i^{(0)}\middle|W\middle|n_j^{(0)}\right\rangle$ (dà le correzioni al primo ordine dell'autovalore degenere)

**Momento angolare** $\quad J_\pm|k\,j\,m\rangle = N_\pm|k\,j\,m\pm1\rangle$; $N_\pm(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}$

$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar)$ $\quad J_zJ_\pm = J_\pm(J_z \pm \hbar)$

**Particelle identiche**

Simmetrico

$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2[1+\delta_{mn}(\sqrt{2}-1)]}}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) + \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$

Bosoni si trovano in stati simmetrici di spin

Antisimmetico

$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) - \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$

Fermioni si trovano in stati antisimmetrici di spin

**Commutatore tra $\vec{L}$ e $\vec{X}, \vec{P}$**

$[L_i, X_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k$

$[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$

**Derivata di $U$**

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \propto HU$

# Meccanica classica

**Equazioni di Lagrange**

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

**Equazioni di Hamilton**

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

# Roba matematica

**Error function**

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$

**Polinomi di Hermite**

$H_n(z) = (-)^n e^{z^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}e^{-z^2} = \left(2z - \frac{d}{dz}\right)H_{n-1}(z)$

**Integrale di Seno** ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)

$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} & \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} & \text{n dispari} \end{cases}$

**Commutatori cancri**

$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

$[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + +[A, C]DB + C[A, D]B$

**Prodotto misto**

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

**Goniometria marastoniana**

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos2\theta}{2}$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2}$

**Formule Eulero**

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

**Integrale di D'Eramo**

$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$

**Integrale utile** ($n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$)

$\int_0^1\mathrm{d}z\,\sin^2(n\pi z)\sin^2(m\pi z) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\delta_{mn}\right)$