Notazione: $\bar{\sqrt{x}} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Stati

Principio 1

$$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$$

$$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda |\psi\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$$

Funzione d'onda e densità di probabilità

$$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{||\psi(x)||^2}$$

$$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$$

Trasformata di Fourier

$$\widetilde{\psi}(p) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$P(p) = \frac{|\psi(p)|^2}{||\psi(p)||^2}$$

Basi generalizzate

$$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$$

$$|p\rangle = v_p(x) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$\langle x_0 | x_0'\rangle = \delta(x_0 - x_0')$$

$$\langle p_0 | p_0'\rangle = \delta(p_0 - p_0')$$

Osservabili

Posizione e impulso

$$X\psi(x) = x\psi(x)$$

$$P\psi(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$[X, P] = i\hbar$$

Principio 2

$$\mathcal{A} \mapsto A$$

$$\langle \mathcal{A}\rangle_\Sigma = \frac{\langle\psi| A |\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$$

Principio 3

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$$

Principio 4

$$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k |a_k\rangle \qquad |\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_k} c_k^i |a_k\rangle \qquad |\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) |a\rangle$$

$$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2} \qquad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$

P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$

$P_q = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, $\{|\varphi_i\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$

Principio 6

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_{a_k}|\psi\rangle}}$$

Osservabili compatibili

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Trasformazioni unitarie

$$\begin{cases} |\psi\rangle & \mapsto |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \\ A & \mapsto A' = UAU^\dagger \end{cases}$$

Operatore di evoluzione temporale

$$U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle \qquad U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}H(t)\mathrm{d}t$$

Sistema conservativo

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

Visuale di Schrödinger

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$$

Visuale di Heisenberg

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$$

Equazione di heisenberg

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H]$$