Notazione: ${}^{-}\!\!\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate

$$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0) \qquad \langle x_0|x_0'\rangle = \delta(x_0 - x_0')$$
$$|p\rangle = v_p(x) = {}^{-}\!\!\sqrt{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \qquad \langle p_0|p_0'\rangle = \delta(p_0 - p_0')$$

Principio 6 $\quad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_k}|\psi\rangle}}$

Esiti misure e probabilità (Principio 4)

$$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$$
$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k |a_k\rangle \qquad |\psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i |a_k\rangle \qquad |\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)\, |a\rangle$$
$$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2} \qquad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$$

Roba di Ehrenfest

$$[X, f(X,P)] = i\hbar\frac{\partial f}{\partial P}$$
$$[P, f(X,P)] = -i\hbar\frac{\partial f}{\partial X}$$
$$P_{a_k} = \sum_{j=1}^{d_k} \left|a_k^{(i)}\right\rangle\left\langle a_k^{(i)}\right|$$
d_k degenerazione

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = = -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$$
$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Spin

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

Trasformazione unitaria

$$A' = UAU^\dagger$$

Equazione di Schrödinger

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Visuale di Schrödinger

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(t_0) \end{cases}$$

Equazione di Heisenberg

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H_H]$$

Visuale di Heisenberg

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$$

Sistema conservativo

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

Matrice densità

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$
$$\rho_{pn}(t) = \langle u_p|\rho(t)|u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$$

Stato puro $\quad \rho^2(t) = \rho(t)$

Stato misto $\quad \rho(t) = \sum_k p_k\rho_k(t)$

Proprietà generali

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t) \qquad \langle A\rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$$
$$Tr(\rho(t)) = 1 \qquad i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t),\rho(t)]$$

Oscillatore armonico

$$H = \hbar\omega\left(N + \tfrac{1}{2}\right) \qquad \hat{X} := \sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}X \qquad a = {}^{-}\!\!\sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$$
$$N = a^\dagger a \qquad \hat{P} := {}^{-}\!\!\sqrt{m\hbar\omega}P \qquad a^\dagger = {}^{-}\!\!\sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$$
$$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$$
$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$
$$[a,a^\dagger] = 1 \qquad [N,a^\dagger] = a^\dagger \qquad [N,a] = -a$$

Condizioni al contorno buche di potenziale

Continuità di ψ nelle discontinuità di V

Continuità di ψ' nelle discontinuità **finite** di V

Soluzioni buche di potenziale 1D ($A, B \in \mathbb{C}$, $0 < x < a$)

$E > V$:
$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

$E = V$
$$\psi(x) = A + Bx \qquad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$$

$E < V$
$$\psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x} \qquad \rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

Metodo perturbativo

$$E_n^{(1)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(0)}\right\rangle; \; \left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}\left|k^{(0)}\right\rangle$$
$$E_n^{(2)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

Caso degenere: diagonalizzare $W_{ij} = \left\langle n_i^{(0)}\middle|W\middle|n_j^{(0)}\right\rangle$ (dà le correzioni al primo ordine dell'autovalore degenere)

Momento angolare $\quad J_\pm|k\,j\,m\rangle = N_\pm|k\,j\,m\pm1\rangle; \; N_\pm(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}$

$$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar) \qquad J_zJ_\pm = J_\pm(J_z \pm \hbar)$$

Particelle identiche

Simmetrico
$$\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}[1+\delta_{mn}(\sqrt{2}-1)]}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) + \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$$
Bosoni si trovano in stati simmetrici di spin

Antisimmetico
$$\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) - \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$$
Fermioni si trovano in stati antisimmetrici di spin

Commutatore tra $\vec{L}$ e $\vec{X}, \vec{P}$

$$[L_i, X_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k \qquad [L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$$

Buca di potenziale infinita 1D $\left(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\right)$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ pari} \end{cases} \qquad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$$

Derivata di U

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \propto HU$$

Meccanica classica

Equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Roba matematica

Error function

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Integrale di Seno ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^ne^{-ax^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} & \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} & \text{n dispari} \end{cases}$$

Commutatori cancri

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$
$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$$
$$[AB,CD] = A[B,C]D + AC[B,D] + +[A,C]DB + C[A,D]B$$

Prodotto misto

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

Polinomi di Hermite

$$H_n(z) = (-)^ne^{z^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}e^{-z^2} = \left(2z - \frac{d}{dz}\right)H_{n-1}(z)$$

Goniometria marastoniana

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2}$$

Formule Eulero

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Integrale di D'Eramo

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

Integrale utile ($n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$)

$$\int_0^1\mathrm{d}z\,\sin^2(n\pi z)\sin^2(m\pi z) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\delta_{mn}\right)$$