

Notazione:  $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

## Stati

Principio 1	Funzione d'onda e densità di probabilità	Trasformata di Fourier	Basi generalizzate
$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$	$P(x) = \frac{ \psi(x) ^2}{  \psi(x)  ^2}$	$\tilde{\psi}(p) = \sqrt{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$	$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x-x_0)$
$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \,   \, \psi \,   \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$	$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$	$P(p) = \frac{ \psi(p) ^2}{  \psi(p)  ^2}$	$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\langle x_0   x'_0 \rangle = \delta(x_0 - x'_0)$ $\langle p_0   p'_0 \rangle = \delta(p_0 - p'_0)$

## Osservabili

Posizione e impulso	Principio 2	Principio 3	Principio 4	
$X \psi(x) = x \psi(x)$	$\mathcal{A} \mapsto A$	$A \,  a\rangle = a \,  a\rangle$	$w(a_k) = \frac{ \langle a_k   \psi \rangle ^2}{  \psi  ^2}$	$\mathrm{d}w(a) = \rho(a) \mathrm{d}a = \frac{ \langle a   \psi \rangle ^2}{  \psi  ^2}$
$P \psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$	$\langle \mathcal{A} \rangle_{\Sigma} = \frac{\langle \psi   A   \psi \rangle}{\langle \psi   \psi \rangle}$	$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k \,  a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a \, c(a) \,  a\rangle$
$[X,P] = i\hbar$	$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{  \psi  ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{  \psi  ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{  \psi  ^2}$

## Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$	Principio 6	Osservabili compatibili
$P$ è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$	$ \psi\rangle \rightarrow  \psi'\rangle = \frac{P_{a_k}  \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi   P_{a_k}   \psi \rangle}}$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$
$P_q = \sum_i  \varphi_i\rangle \langle \varphi_i , \{ \varphi_i\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$		$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni
Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):		

- Trovo autovalori e autovettori di  $A$  e  $B$ ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico  $B$  a un autovettore degeneri di  $A$ );
- Se è anche autovettore di  $B$ , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
  - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degeneri in questione;
  - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di  $B$ ;
  - Risolvero il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
  - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di  $A$  che di  $B$ .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

## Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger	Trasformazioni unitarie	Operatore di evoluzione temporale	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \,  \psi(t)\rangle = H(t) \,  \psi(t)\rangle$	$\begin{cases}  \psi\rangle & \mapsto  \psi'\rangle = U \,  \psi\rangle \\ A & \mapsto A' = U A U^\dagger \end{cases}$	$U(t, t_0) \,  \psi(t_0)\rangle =  \psi(t)\rangle$	$U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t) \mathrm{d}t$
Visuale di Schrödinger	Visuale di Heisenberg	Equazione di heisenberg	
$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \,  \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$\begin{cases}  \psi(t)\rangle_H =  \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$		$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$

## Matrice densità

Stato puro	Stato misto	Proprietà (stato generico)	<b>SOLO PER STATI PURI</b>
$\rho(t) =  \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\{ \psi_k(t)\rangle\}, \, p_k$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$\rho^2(t) = \rho(t)$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p   \rho(t)   u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$Tr(\rho(t)) = 1$	$Tr(\rho^2(t)) = 1$

# Oscillatore armonico

Problema agli autovalori	Definizioni utili		Nuovo problema agli autovalori	Autostati
$H \left  \psi \right\rangle = E \left  \psi \right\rangle$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$N \left  \varphi_{\nu}^i \right\rangle = \nu \left  \varphi_{\nu}^i \right\rangle$	$a \left  n \right\rangle = \sqrt{n} \left  n - 1 \right\rangle$
$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$a^{\dagger} = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$	$E_{\nu} = \hbar\omega \left( \nu + \frac{1}{2} \right)$	$a^{\dagger} \left  n \right\rangle = \sqrt{n + 1} \left  n + 1 \right\rangle$
	$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$	$N = a^{\dagger} a$	$\nu \in \mathbb{N}$	