Notazione: $\sqrt[-]{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate

$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$ $\quad$ $\langle x_0|x_0'\rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$|p\rangle = v_p(x) = \sqrt[-]{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\quad$ $\langle p_0|p_0'\rangle = \delta(p_0 - p_0')$

Esiti misure e probabilità (Principio 4)

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{\left|\langle a_{k,i}|\psi\rangle\right|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$

$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k\, |a_k\rangle$ $\quad$ $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i\, |a_k\rangle$ $\quad$ $|\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)\, |a\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{\left|c_k^i\right|^2}{||\psi||^2}$ $\quad$ $\rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

Principio 6 $\quad$ $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_k}|\psi\rangle}}$ $\quad$ $P_{a_k} = |a_k\rangle\langle a_k|$

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Matrici di Pauli

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = = -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_i j + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

Spin

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

Trasformazione unitaria

$A' = UAU^\dagger$

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger

$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle$

Visuale di Schrödinger

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)\,|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$

Equazione di Heisenberg

$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H]$

Visuale di Heisenberg

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$

Sistema conservativo

$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$

Matrice densità

$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

$\rho_{pn}(t) = \langle u_p|\,\rho(t)\,|u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$

Stato puro

$\rho^2(t) = \rho(t)$

Stato misto

$\rho(t) = \sum_k p_k\rho_k(t)$

Proprietà generali

$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\quad$ $\langle A\rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$

$Tr(\rho(t)) = 1$ $\quad$ $i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

Oscillatore armonico

$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ $\quad$ $a = \sqrt[-]{2}(\hat{X} + i\hat{P})$

$N = a^\dagger a$ $\quad$ $\hat{P} := \sqrt[-]{m\hbar\omega}P$ $\quad$ $a^\dagger = \sqrt[-]{2}(\hat{X} - i\hat{P})$

$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$

$N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$

$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$[a, a^\dagger] = 1$

$[N, a^\dagger] = a^\dagger$

$[N, a] = -a$

Condizioni al contorno buche di potenziale

Continuità di ψ nelle discontinuità di V

Continuità di ψ' nelle discontinuità **finite** di V

Metodo perturbativo

$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|\,\hat{W}\,|n^{(0)}\rangle$ $\quad$ $|n^{(1)}\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\langle k^{(0)}|\hat{W}|n^{(0)}\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}\,|k^{(0)}\rangle$

$E_n^{(2)} = \langle n^{(0)}|\,\hat{W}\,|n^{(1)}\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle k^{(0)}|\hat{W}|n^{(0)}\rangle\right|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$

Soluzioni buche di potenziale ($A, B \in \mathbb{C}$)

$E > V$:
$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
$k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$

$E = V$
$\psi(x) = A + Bx$

$E < V$
$\psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$
$\rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Operatori diff in coord sferiche

Stati

Principio 1

$$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$$
$$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \left|\psi\right\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$$

Funzione d'onda e densità di probabilità

$$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{||\psi(x)||^2}$$
$$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$$

Trasformata di Fourier

$$\widetilde{\psi}(p) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$
$$P(p) = \frac{|\psi(p)|^2}{||\psi(p)||^2}$$

Basi generalizzate

$$\left|x\right\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$$
$$\left|p\right\rangle = v_p(x) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$
$$\left\langle x_0 | x_0' \right\rangle = \delta(x_0 - x_0')$$
$$\left\langle p_0 | p_0' \right\rangle = \delta(p_0 - p_0')$$

Osservabili

Posizione e impulso

$$X\psi(x) = x\psi(x)$$
$$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$[X, P] = i\hbar$$

Principio 2

$$\mathcal{A} \mapsto A$$
$$\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$
$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

Principio 3

$$A \left|a\right\rangle = a \left|a\right\rangle$$
$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$$

Principio 4

$$w(a_k) = \frac{|\langle a_k | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i} | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2} \qquad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$$
$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^N c_k \left|a_k\right\rangle \qquad \left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i \left|a_k\right\rangle \qquad \left|\psi\right\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) \left|a\right\rangle$$
$$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2} \qquad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2} \qquad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$

P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$

$P_q = \sum_i \left|\varphi_i\right\rangle \left\langle\varphi_i\right|$, $\{\left|\varphi_i\right\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$

Principio 6

$$\left|\psi\right\rangle \to \left|\psi'\right\rangle = \frac{P_{a_k}\left|\psi\right\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_{a_k} | \psi \rangle}}$$

Osservabili compatibili

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left|\psi(t)\right\rangle = H(t) \left|\psi(t)\right\rangle$$

Trasformazioni unitarie

$$\begin{cases} \left|\psi\right\rangle & \mapsto \left|\psi'\right\rangle = U \left|\psi\right\rangle \\ A & \mapsto A' = UAU^\dagger \end{cases}$$

Operatore di evoluzione temporale

$$U(t, t_0) \left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi(t)\right\rangle \qquad U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t) \mathrm{d}t$$

Sistema conservativo

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)}$$

Visuale di Schrödinger

$$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_S = U(\Delta t) \left|\psi(t_0)\right\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$$

Visuale di Heisenberg

$$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_H = \left|\psi(t_0)\right\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$$

Equazione di heisenberg

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$$

Matrice densità

Stato puro

$$\rho(t) = \left|\psi(t)\right\rangle \left\langle\psi(t)\right|$$
$$\rho_{pn}(t) = \left\langle u_p\right| \rho(t) \left|u_n\right\rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$$

Stato misto

$$\{\left|\psi_k(t)\right\rangle\}, \ p_k$$
$$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$$

Proprietà (stato generico)

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t) \qquad \langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t) A)$$
$$Tr(\rho(t)) = 1 \qquad i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$$

SOLO PER STATI PURI

$$\rho^2(t) = \rho(t)$$
$$Tr(\rho^2(t)) = 1$$

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori

$$H \left|\psi\right\rangle = E \left|\psi\right\rangle$$
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

Definizioni utili

$$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \qquad a = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$$
$$\hat{P} := \bar{\sqrt{m\hbar\omega}} P \qquad a^\dagger = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$
$$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \qquad N = a^\dagger a$$
$$[a, a^\dagger] = 1$$

Nuovo probl. autov.

$$N \left|\varphi_\nu^i\right\rangle = \nu \left|\varphi_\nu^i\right\rangle$$
$$E_\nu = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2}\right)$$
$$\nu \in \mathbb{N}$$

Autostati

$$a \left|n\right\rangle = \sqrt{n} \left|n - 1\right\rangle$$
$$a^\dagger \left|n\right\rangle = \sqrt{n + 1} \left|n + 1\right\rangle$$
$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = +a^\dagger$$

Autofunzione n-esima

$$u_n(x) = \left[\frac{1}{n! 2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$$