

Notazione: $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate

$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$
 $|p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

Principio 6

$\langle x_0|x'_0\rangle = \delta(x_0 - x'_0)$
 $\langle p_0|p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0)$

$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_k}|\psi\rangle}}$

Esiti misure e probabilità (Principio 4)

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$
 $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k |a_k\rangle$
 $w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$

$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$
 $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i |a_k\rangle$
 $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2}$

$dw(a) = \rho(a)da = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$
 $|\psi\rangle = \int da c(a) |a\rangle$
 $\rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

$P_{a_k} = |a_k\rangle \langle a_k|$

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

- Trovo autovalori e autovettori di A e B ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degeneri di A);
- Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
 - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degeneri in questione;
 - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;
 - Risolverò il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
 - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Matrici di Pauli

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
 $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spin

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger	Visuale di Schrödinger	Equazione di Heisenberg	Visuale di Heisenberg	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\text{d}}{\text{d}t} \psi(t)\rangle = H(t) \psi(t)\rangle$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$i\hbar \frac{\text{d}}{\text{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_H = \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Matrice densità	Stato puro	Stato misto	Proprietà generali	$N n\rangle = n n\rangle$
$\rho(t) = \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\rho^2(t) = \rho(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$\langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t) A)$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$		Oscillatore armonico	$Tr(\rho(t)) = 1$	$i\hbar \frac{\text{d}\rho(t)}{\text{d}t} = [H(t), \rho(t)]$
Condizioni al contorno buche di potenziale		$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right)$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$
Continuità di ψ nelle	Continuità di ψ' nelle	$N = a^\dagger a$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$a^\dagger = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$
discontinuità di V	discontinuità finit e di V	$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\text{d}}{\text{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$		
Soluzioni buche di potenziale ($A, B \in \mathbb{C}$)				
$E > V :$	$E = V$	$E < V$		
$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$	$\psi(x) = A + Bx$	$\psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$		
$k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$		$\rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$		

Stati

Principio 1	Funzione d'onda e densità di probabilità	Trasformata di Fourier	Basi generalizzate
$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$	$P(x) = \frac{ \psi(x) ^2}{ \psi(x) ^2}$	$\widetilde{\psi}(p) = \sqrt{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$	$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x-x_0)$
$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \psi\rangle \, \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$	$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$	$P(p) = \frac{ \psi(p) ^2}{ \psi(p) ^2}$	$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\langle x_0 x'_0\rangle = \delta(x_0-x'_0)$ $\langle p_0 p'_0\rangle = \delta(p_0-p'_0)$

Osservabili

Posizione e impulso	Principio 2	Principio 3	Principio 4
$X\psi(x) = x\psi(x)$ $P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$ $[X,P] = i\hbar$	$\mathcal{A} \mapsto A$ $\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi A \psi\rangle}{\langle \psi \psi\rangle}$ $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$	$A\, a\rangle = a\, a\rangle$ $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$ $w(a_k) = \frac{ \langle a_k \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$ $ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k\, a_k\rangle$ $w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$ $ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i\, a_k\rangle$ $w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{ \psi ^2}$ $\mathrm{d}w(a) = \rho(a) \mathrm{d}a = \frac{ \langle a \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$ $ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)\, a\rangle$ $\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{ \psi ^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore ($P, \mathcal{D}(P)$) P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$ $P_q = \sum_i \varphi_i\rangle \langle \varphi_i , \{ \varphi_i\rangle\}$ base ON di \mathcal{H}_q	Principio 6 $ \psi\rangle \rightarrow \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi P_{a_k} \psi\rangle}}$	Osservabili compatibili \mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili $\Leftrightarrow [A,B] = 0$ \mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili \Leftrightarrow hanno una base di autovettori comuni
---	---	--

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B ;

2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;

3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenerare di A);

4. Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);

5. Se non lo è:
- (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;

(b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;

(c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;

(d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger	Trasformazioni unitarie	Operatore di evoluzione temporale	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \psi(t)\rangle = H(t) \, \psi(t)\rangle$	$\begin{cases} \psi\rangle & \mapsto \psi'\rangle = U \, \psi\rangle \\ A & \mapsto A' = UAU^\dagger \end{cases}$	$U(t,t_0) \, \psi(t_0)\rangle = \psi(t)\rangle$	$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Visuale di Schrödinger	Visuale di Heisenberg	Equazione di heisenberg	
$\begin{cases} \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \, \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_H = \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$	

Matrice densità

Stato puro	Stato misto	Proprietà (stato generico)	SOLO PER STATI PURI
$\rho(t) = \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $ $\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n \rangle = \tilde{c}_n(t) c_p(t)$	$\{ \psi_k(t)\rangle\}, \, p_k$ $\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $Tr(\rho(t)) = 1$	$\rho^2(t) = \rho(t)$ $Tr(\rho^2(t)) = 1$
		$\langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$ $i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$	

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori	Definizioni utili	Nuovo probl. autov.	Autostati
$H \, \psi\rangle = E \, \psi\rangle$ $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$ Autofunzione n-esima $u_n(x) = \left[\frac{1}{n! 2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$ $\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$ $\hat{H} = \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$	$a = \sqrt{2} (\hat{X} + i\hat{P})$ $a^\dagger = \sqrt{2} (\hat{X} - i\hat{P})$ $N = a^\dagger a$ $[a, a^\dagger] = 1$	$N \, \varphi_\nu^i\rangle = \nu \, \varphi_\nu^i\rangle$ $E_\nu = \hbar\omega \, (\nu + \frac{1}{2})$ $\nu \in \mathbb{N}$ $a \, n\rangle = \sqrt{n} \, n-1\rangle$ $a^\dagger \, n\rangle = \sqrt{n+1} \, n+1\rangle$ $[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = +a^\dagger$