

Notazione: $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate		Esiti misure e probabilità (Principio 4)		
$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$	$\langle x_0 x'_0\rangle = \delta(x_0 - x'_0)$	$w(a_k) = \frac{ \langle a_k \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$	$\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{ \langle a \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$
$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$	$\langle p_0 p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a c(a) a\rangle$
Principio 6	$ \psi\rangle \rightarrow \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi P_{a_k} \psi\rangle}}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{ \psi ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{ \psi ^2}$

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

- Trovo autovalori e autovettori di A e B ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenerare di A);
- Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
 - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell’autospazio degenerare in questione;
 - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;
 - Risolvero il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
 - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l’insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger	Visuale di Schrödinger	Equazione di Heisenberg	Visuale di Heisenberg	Sistema conservativo
$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(t)\rangle = H(t) \psi(t)\rangle$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H]$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_H = \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$	$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$
Matrice densità	Stato puro	Stato misto	Proprietà generali	$N n\rangle = n n\rangle$
$\rho(t) = \psi(t)\rangle\langle\psi(t) $	$\rho^2(t) = \rho(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$a n\rangle = \sqrt{n} n-1\rangle$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$		Oscillatore armonico	$Tr(\rho(t)) = 1$	$a^\dagger n\rangle = \sqrt{n+1} n+1\rangle$
		$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$	$[a, a^\dagger] = 1$
		$N = a^\dagger a$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega}P$	$[N, a^\dagger] = a^\dagger$
		$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$[N, a] = -a$

Stati

Principio 1	Funzione d'onda e densità di probabilità	Trasformata di Fourier	Basi generalizzate
$S \mapsto \mathcal{H}$	$P(x) = \frac{ \psi(x) ^2}{ \psi(x) ^2}$	$\widetilde{\psi}(p) = \sqrt{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$	$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x-x_0)$
$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \, \, \psi\rangle \, \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$	$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$	$P(p) = \frac{ \psi(p) ^2}{ \psi(p) ^2}$	$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$
			$\langle x_0 x'_0 \rangle = \delta(x_0 - x'_0)$ $\langle p_0 p'_0 \rangle = \delta(p_0 - p'_0)$

Osservabili

Posizione e impulso	Principio 2	Principio 3	Principio 4
$X\psi(x) = x\psi(x)$	$\mathcal{A} \mapsto A$	$A \, a\rangle = a \, a\rangle$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi \rangle ^2}{ \psi ^2}$
$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$	$\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi A \psi \rangle}{\langle \psi \psi \rangle}$	$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$	$w(a_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i \, a_k\rangle$
$[X,P] = i\hbar$	$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{ \psi ^2}$
			$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{ \psi ^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$	Principio 6	Osservabili compatibili
P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$	$ \psi\rangle \rightarrow \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi P_{a_k} \psi \rangle}}$	\mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili $\Leftrightarrow [A,B] = 0$
$P_q = \sum_i \varphi_i\rangle \langle \varphi_i , \{ \varphi_i\rangle\}$ base ON di \mathcal{H}_q		\mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili \Leftrightarrow hanno una base di autovettori comuni
Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):		

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B ;

2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;

3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenerare di A);

4. Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);

5. Se non lo è:

(a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;

(b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;

(c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;

(d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger	Trasformazioni unitarie	Operatore di evoluzione temporale	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \psi(t)\rangle = H(t) \, \psi(t)\rangle$	$\begin{cases} \psi\rangle & \mapsto \psi'\rangle = U \, \psi\rangle \\ A & \mapsto A' = U A U^\dagger \end{cases}$	$U(t,t_0) \, \psi(t_0)\rangle = \psi(t)\rangle$	$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Visuale di Schrödinger	Visuale di Heisenberg	Equazione di heisenberg	
$\begin{cases} \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \, \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_H = \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$	

Matrice densità

Stato puro	Stato misto	Proprietà (stato generico)	SOLO PER STATI PURI
$\rho(t) = \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\{ \psi_k(t)\rangle\}, \, p_k$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$\rho^2(t) = \rho(t)$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$Tr(\rho(t)) = 1$	$Tr(\rho^2(t)) = 1$
		$i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$	

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori	Definizioni utili	Nuovo probl. autov.	Autostati
$H \, \psi\rangle = E \, \psi\rangle$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$a \, n\rangle = \sqrt{n} \, n-1\rangle$
$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$a^\dagger = \sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$	$a^\dagger \, n\rangle = \sqrt{n+1} \, n+1\rangle$
Autofunzione n-esima	$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$	$N = a^\dagger a$	$[N,a] = -a, \quad [N,a^\dagger] = +a^\dagger$
$u_n(x) = \left[\frac{1}{n! 2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$		$[a,a^\dagger] = 1$	