Notazione: $\sqrt[-]{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Stati

Principio 1

$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$

$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \left|\psi\right\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$

Funzione d'onda e densità di probabilità

$P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{||\psi(x)||^2}$

$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$

Trasformata di Fourier

$\widetilde{\psi}(p) = \sqrt[-]{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$

$P(p) = \frac{|\psi(p)|^2}{||\psi(p)||^2}$

Basi generalizzate

$\left|x\right\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$

$\left|p\right\rangle = v_p(x) = \sqrt[-]{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

$\langle x_0 | x_0' \rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$\langle p_0 | p_0' \rangle = \delta(p_0 - p_0')$

Osservabili

Posizione e impulso

$X\psi(x) = x\psi(x)$

$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$

$[X, P] = i\hbar$

Principio 2

$\mathcal{A} \mapsto A$

$\langle \mathcal{A} \rangle_\Sigma = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$

$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$

Principio 3

$A \left|a\right\rangle = a \left|a\right\rangle$

$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$

Principio 4

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$

$\left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k \left|a_k\right\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$

$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i} | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$

$\left|\psi\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i \left|a_k\right\rangle$

$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{\left|c_k^i\right|^2}{||\psi||^2}$

$\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a | \psi \rangle|^2}{||\psi||^2}$

$\left|\psi\right\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) \left|a\right\rangle$

$\rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$

P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$

$P_q = \sum_i \left|\varphi_i\right\rangle \left\langle\varphi_i\right|$, $\{\left|\varphi_i\right\rangle\}$ base ON di $\mathcal{H}_q$

Principio 6

$\left|\psi\right\rangle \to \left|\psi'\right\rangle = \frac{P_{a_k}\left|\psi\right\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_{a_k} | \psi \rangle}}$

Osservabili compatibili

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ compatibili $\Leftrightarrow$ hanno una base di autovettori comuni

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger

$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left|\psi(t)\right\rangle = H(t) \left|\psi(t)\right\rangle$

Trasformazioni unitarie

$$\begin{cases} \left|\psi\right\rangle & \mapsto \left|\psi'\right\rangle = U\left|\psi\right\rangle \\ A & \mapsto A' = UAU^\dagger \end{cases}$$

Operatore di evoluzione temporale

$U(t, t_0) \left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi(t)\right\rangle \qquad U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t) \mathrm{d}t$

Sistema conservativo

$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)}$

Visuale di Schrödinger

$$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_S = U(\Delta t) \left|\psi(t_0)\right\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$$

Visuale di Heisenberg

$$\begin{cases} \left|\psi(t)\right\rangle_H = \left|\psi(t_0)\right\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$$

Equazione di heisenberg

$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$

Matrice densità

Stato puro

$\rho(t) = \left|\psi(t)\right\rangle \left\langle\psi(t)\right|$

$\rho_{pn}(t) = \left\langle u_p\right| \rho(t) \left|u_n\right\rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$

Stato misto

$\{\left|\psi_k(t)\right\rangle\},\ p_k$

$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$

Proprietà (stato generico)

$\rho^\dagger(t) = \rho(t) \qquad \langle A \rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t) A)$

$Tr(\rho(t)) = 1 \qquad i\hbar \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

SOLO PER STATI PURI

$\rho^2(t) = \rho(t)$

$Tr(\rho^2(t)) = 1$

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori	Definizioni utili		Nuovo probl. agli autov.	Autostati
$H\left\|\psi\right\rangle = E\left\|\psi\right\rangle$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$	$a = \bar{}\sqrt{2}(\hat{X}+i\hat{P})$	$N\left\|\varphi_\nu^i\right\rangle = \nu\left\|\varphi_\nu^i\right\rangle$	$a\left\|n\right\rangle = \sqrt{n}\left\|n-1\right\rangle$
$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$	$\hat{P} := \bar{}\sqrt{m\hbar\omega}P$	$a^\dagger = \bar{}\sqrt{2}(\hat{X}-i\hat{P})$	$E_\nu = \hbar\omega\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$	$a^\dagger\left\|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left\|n+1\right\rangle$
Autofunzione n-esima	$\hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)$	$N = a^\dagger a$	$\nu \in \mathbb{N}$	$[N,a] = -a, \quad [N,a^\dagger] = +a^\dagger$

$$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}} \qquad [a,a^\dagger] = 1$$