Notazione: $\bar{\sqrt{x}} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Basi generalizzate

$|x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$ $\quad \langle x_0|x_0'\rangle = \delta(x_0 - x_0')$

$|p\rangle = v_p(x) = \bar{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\quad \langle p_0|p_0'\rangle = \delta(p_0 - p_0')$

Principio 6 $\quad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{P_{a_k}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_k}|\psi\rangle}}$

Esiti misure e probabilità (Principio 4)

$w(a_k) = \frac{|\langle a_k|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|\langle a_{k,i}|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$ $\quad \mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{||\psi||^2}$

$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k\,|a_k\rangle$ $\quad |\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_k} c_k^i\,|a_k\rangle$ $\quad |\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a)\,|a\rangle$

$w(a_k) = \frac{|c_k|^2}{||\psi||^2}$ $\quad w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{|c_k^i|^2}{||\psi||^2}$ $\quad \rho(a) = \frac{|c(a)|^2}{||\psi||^2}$

Roba di Ehrenfest

$[X, f(X,P)] = i\hbar\frac{\partial f}{\partial P}$

$[P, f(X,P)] = -i\hbar\frac{\partial f}{\partial X}$

$P_{a_k} = \sum_{i=1}^{d_k} \left|a_k^{(i)}\right\rangle\left\langle a_k^{(i)}\right|$

d_k degenerazione

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

1. Trovo autovalori e autovettori di A e B;
2. Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
3. Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenere di A);
4. Se è anche autovettore di B, sono a posto (è autovettore comune);
5. Se non lo è:
   (a) Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenere in questione;
   (b) Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B;
   (c) Risolvo il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
   (d) Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B.

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

1. Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
2. A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
3. Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Matrici di Pauli

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 =$
$= -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1}$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

Spin

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

Trasformazione unitaria

$A' = UAU^\dagger$

Equazione di Schrödinger

$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle$

Visuale di Schrödinger

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_S = U(\Delta t)\,|\psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(t_0) \end{cases}$

Equazione di Heisenberg

$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H, H_H]$

Visuale di Heisenberg

$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t)A_H(t_0)U(\Delta t) \end{cases}$

Sistema conservativo

$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$

Matrice densità

$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

$\rho_{pn}(t) = \langle u_p|\,\rho(t)\,|u_n\rangle = \bar{c}_n(t)c_p(t)$

Stato puro

$\rho^2(t) = \rho(t)$

Stato misto

$\rho(t) = \sum_k p_k\rho_k(t)$

Proprietà generali

$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$ $\quad \langle A\rangle_\psi(t) = Tr(\rho(t)A)$

$Tr(\rho(t)) = 1$ $\quad i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]$

Oscillatore armonico

$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ $\quad \hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ $\quad a = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$

$N = a^\dagger a$ $\quad \hat{P} := \bar{\sqrt{m\hbar\omega}}P$ $\quad a^\dagger = \bar{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$

$\varphi_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$

$N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$

$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$[a, a^\dagger] = 1$

$[N, a^\dagger] = a^\dagger$

$[N, a] = -a$

Condizioni al contorno buche di potenziale

Continuità di ψ nelle discontinuità di V $\quad$ Continuità di ψ' nelle discontinuità **finite** di V

Soluzioni buche di potenziale 1D ($A, B \in \mathbb{C}$, $0 < x < a$)

$E > V$: $\quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\quad k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$

$E = V$: $\quad \psi(x) = A + Bx$ $\quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$

$E < V$: $\quad \psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$ $\quad \rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Metodo perturbativo

$E_n^{(1)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(0)}\right\rangle;\ \left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}\left|k^{(0)}\right\rangle$

$E_n^{(2)} = \left\langle n^{(0)}\right|\hat{W}\left|n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle k^{(0)}\middle|\hat{W}\middle|n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$

Caso degenere: diagonalizzare $W_{ij} = \left\langle n_i^{(0)}\middle|W\middle|n_j^{(0)}\right\rangle$ (dà le correzioni al primo ordine dell'autovalore degenere)

Momento angolare $\quad J_\pm\,|k\,j\,m\rangle = N_\pm\,|k\,j\,m\pm 1\rangle;\ N_\pm(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}$

$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar)$ $\quad J_zJ_\pm = J_\pm(J_z \pm \hbar)$

Particelle identiche

Simmetrico: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}[1+\delta_{mn}(\sqrt{2}-1)]}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) + \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$

Bosoni si trovano in stati simmetrici di spin

Antisimmetico: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_m(\vec{x}_1)\psi_n(\vec{x}_2) - \psi_n(\vec{x}_1)\psi_m(\vec{x}_2)\right)$

Fermioni si trovano in stati antisimmetrici di spin

Commutatore tra $\vec{L}$ e $\vec{X}, \vec{P}$

$[L_i, X_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k$

$[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$

Buca di potenziale infinita 1D $\left(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\right)$

$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$ $\quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$

Scattering $\quad \varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \int \mathrm{d}^3r' G(\vec{r} - \vec{r}')U(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')$

$\varphi_k^{diff} \sim e^{ikz} + f_k(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$ per $\vec{r} \to \infty$ $\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f_k(\vartheta,\varphi)|^2$

$f_k(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'}U(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')$

Approssimazione di Born $\quad \vec{K} := \vec{k}_{diff} - \vec{k}_{inc}$

$f_k^B(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}U(\vec{r});\ U = \frac{2\mu}{\hbar^2}V$

Potenziale centrale ($k := \left|k_{diff}\right| = |k_{inc}|$)

$f_k^B = -\frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, rV(r)\left(e^{-2ikr} - 1\right)$

(funziona anche se diverso da quello del prof)

Derivata di U

$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \propto HU$

Sistema di 2 particelle $\quad \vec{r} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ $\quad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ $\quad H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$

$\vec{R} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2}$ $\quad \vec{p} = \frac{m_2\vec{P}_1 - m_1\vec{P}_2}{m_1 + m_2}$

Atomo di idrogeno

$\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ $\quad R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r}$ $\quad u_{n,l} = e^{-\frac{\rho}{n}}y_{nl}$

$y_{k,l} = \sum_q^{k-1} c_q\rho^{q+l+1}$ $\quad n = k + l$ $\quad \frac{c_q}{c_{q-1}} = -\frac{2(k-q)}{q(q+2l+1)(k+l)}$

$\rho = \frac{r}{a_0}$ $\quad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ $\quad E_I = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$ $\quad E_n = \frac{E_I}{n^2}$

Meccanica classica

Equazioni di Lagrange

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$

Equazioni di Hamilton

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i};\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Roba matematica

Error function

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Polinomi di Hermite

$$H_n(z) = (-)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2} = \left(2z - \frac{d}{dz}\right) H_{n-1}(z)$$

Integrale di Seno ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} & \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} & \text{n dispari} \end{cases}$$

Commutatori cancri

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$
$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$
$$[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + +[A, C]DB + C[A, D]B$$

Prodotto misto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Goniometria marastoniana

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Autofunzioni oscillatore armonico

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Integrale di D'Eramo

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

Integrale utile ($n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \, \sin^2(n\pi z) \sin^2(m\pi z) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\delta_{mn}\right)$$

Formule Eulero

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$