

Notazione: $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$		Basi generalizzate			Esiti misure e probabilità (Principio 4)			Roba di Ehrenfest	
$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x - x_0)$	$\langle x_0 x'_0\rangle = \delta(x_0 - x'_0)$	$w(a_k) = \frac{ \langle a_k \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$	$\mathrm{d}w(a) = \rho(a)\mathrm{d}a = \frac{ \langle a \psi\rangle ^2}{ \psi ^2}$	$[X, f(X, P)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial P}$				
$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$	$\langle p_0 p'_0\rangle = \delta(p_0 - p'_0)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{d_k} c_k^i a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a\, c(a) a\rangle$	$[P, f(X, P)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial X}$				
Principio 6	$ \psi\rangle \rightarrow \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi P_{a_k} \psi\rangle}}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{ \psi ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{ \psi ^2}$	$P_{a_k} = \sum_{j=1}^{d_k} \left a_k^{(i)} \right\rangle \left\langle a_k^{(i)} \right $ d_k degenerazione				

Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):

- Trovo autovalori e autovettori di A e B ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degenerare di A);
- Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
 - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degenerare in questione;
 - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;
 - Risolvero il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
 - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Equazione di Schrödinger	Visuale di Schrödinger	Equazione di Heisenberg	Visuale di Heisenberg	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left \psi(t) \right\rangle = H(t) \left \psi(t) \right\rangle$	$\left\{ \begin{array}{l} \left \psi(t) \right\rangle_S = U(\Delta t) \left \psi(t_0) \right\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(t_0) \end{array} \right.$	$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H_H]$	$\left\{ \begin{array}{l} \left \psi(t) \right\rangle_H = \left \psi(t_0) \right\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{array} \right.$	$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$
Matrice densità	Stato puro	Stato misto	Proprietà generali	$N \left n \right\rangle = n \left n \right\rangle$
$\rho(t) = \left \psi(t) \right\rangle \left\langle \psi(t) \right $	$\rho^2(t) = \rho(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$a \left n \right\rangle = \sqrt{n} \left n-1 \right\rangle$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$		Oscillatore armonico	$Tr(\rho(t)) = 1$	$a^\dagger \left n \right\rangle = \sqrt{n+1} \left n+1 \right\rangle$
Condizioni al contorno buche di potenziale		$H = \hbar \omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$	$\hat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$	$[a,a^\dagger] = 1$
Continuità di ψ nelle	Continuità di ψ' nelle	$N = a^\dagger a$	$\hat{P} := \sqrt{m\hbar\omega} P$	$[N,a^\dagger] = a^\dagger$
discontinuità di V	discontinuità finite di V	$u_n(x) = \left[\frac{1}{n!2^n} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$	$a = \sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$	$[N,a] = -a$
Soluzioni buche di potenziale	$(A,B \in \mathbb{C})$	Metodo perturbativo		
$E > V$:	$E = V$	$E < V$		
$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$	$\psi(x) = A + Bx$	$\psi(x) = Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x}$	$E_n^{(1)} = \left\langle n^{(0)} \right \hat{W} \left n^{(0)} \right\rangle ; \left n^{(1)} \right\rangle = -\sum_{k \neq n} \frac{\left\langle k^{(0)} \right \hat{W} \left n^{(0)} \right\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} \left k^{(0)} \right\rangle$	
$k := \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$	$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$	$\rho := \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$	$E_n^{(2)} = \left\langle n^{(0)} \right \hat{W} \left n^{(1)} \right\rangle = -\sum_{k \neq n} \frac{\left \left\langle k^{(0)} \right \hat{W} \left n^{(0)} \right\rangle \right ^2}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}$	
Momento angolare	$J_\pm \left k\,j\,m \right\rangle = N_\pm \left k\,j\,m \pm 1 \right\rangle ; \, N_\pm(j,m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$		Caso degenerare: diagonalizzare $W_{ij} = \left\langle n_i^{(0)} \right W \left n_j^{(0)} \right\rangle$ (dà le correzioni al primo ordine del'autovalore degenerare)	
$J_\pm J_\mp = J^2 - J_z(J_z \mp \hbar)$	$J_z J_\pm = J_\pm (J_z \pm \hbar)$			

Meccanica classica

Equazioni di Lagrange	Equazioni di Hamilton
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$	$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Roba matematica

Error function	Integrale di Seno ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)		Commutatori cancri	Prodotto misto
$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$	$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{n+1}}} & \text{n pari} \\ \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2a^{\frac{n+1}{2}}} & \text{n dispari} \end{cases}$		$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
Polinomi di Hermite			$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
$H_n(z) = (-)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2}$			$[AB,CD] = A[B,C]D + AC[B,D] + [A,C]DB + C[A,D]B$	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$
$= \left(2z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right) H_{n-1}(z)$				Goniometria marastoniiana
Formule Eulero	Integrale di D'Eramo	Integrale utile ($n,m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)		$\sin^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$
$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$	$\int_0^1 \mathrm{d}z\, \sin^2(n\pi z) \sin^2(m\pi z) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_{mn} \right)$		$\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$				