

Notazione: $\sqrt{x} := \frac{1}{\sqrt{x}}$

Stati

Principio 1	Funzione d'onda e densità di probabilità	Trasformata di Fourier	Basi generalizzate
$\mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$	$P(x) = \frac{ \psi(x) ^2}{ \psi(x) ^2}$	$\tilde{\psi}(p) = \sqrt{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}x \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$	$ x\rangle = \xi_x(x) = \delta(x-x_0)$
$\Sigma \mapsto \hat{\psi} := \{\lambda \, \, \psi \, \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}$	$P(x) \geq 0, \quad \int \mathrm{d}x P(x) = 1$	$P(p) = \frac{ \psi(p) ^2}{ \psi(p) ^2}$	$ p\rangle = v_p(x) = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ $\langle x_0 x'_0 \rangle = \delta(x_0 - x'_0)$ $\langle p_0 p'_0 \rangle = \delta(p_0 - p'_0)$

Osservabili

Posizione e impulso	Principio 2	Principio 3	Principio 4	
$X \psi(x) = x \psi(x)$	$\mathcal{A} \mapsto A$	$A \, a\rangle = a \, a\rangle$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ \langle a_{k,i} \psi \rangle ^2}{ \psi ^2}$	$\mathrm{d}w(a) = \rho(a) \mathrm{d}a = \frac{ \langle a \psi \rangle ^2}{ \psi ^2}$
$P \psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$	$\langle \mathcal{A} \rangle_{\Sigma} = \frac{\langle \psi A \psi \rangle}{\langle \psi \psi \rangle}$	$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$	$ \psi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k \, a_k\rangle$	$ \psi\rangle = \int \mathrm{d}a \, c(a) \, a\rangle$
$[X,P] = i\hbar$	$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$	$w(a_k) = \frac{ c_k ^2}{ \psi ^2}$	$w(a_k) = \sum_{i=1}^{d_k} \frac{ c_k^i ^2}{ \psi ^2}$	$\rho(a) = \frac{ c(a) ^2}{ \psi ^2}$

Proiettori e misure

Definizione di proiettore $(P, \mathcal{D}(P))$	Principio 6	Osservabili compatibili
P è proiettore $\Leftrightarrow P^\dagger = P \wedge P^2 = P$	$ \psi\rangle \rightarrow \psi'\rangle = \frac{P_{a_k} \psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi P_{a_k} \psi \rangle}}$	\mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili $\Leftrightarrow [A, B] = 0$
$P_q = \sum_i \varphi_i\rangle \langle \varphi_i , \{ \varphi_i\rangle\}$ base ON di \mathcal{H}_q		\mathcal{A}, \mathcal{B} compatibili \Leftrightarrow hanno una base di autovettori comuni
Per trovare una base di autovettori comuni (sapendo già che gli operatori commutano, e se entrambi hanno degenerazioni):		

- Trovo autovalori e autovettori di A e B ;
- Autovettori associati ad autovalori **non** degeneri sono automaticamente autovettori comuni;
- Per autovettori associati ad autovalori degeneri, faccio la prova (applico B a un autovettore degeneri di A);
- Se è anche autovettore di B , sono a posto (è autovettore comune);
- Se non lo è:
 - Definisco un nuovo vettore come combinazione lineare degli autovettori della base dell'autospazio degeneri in questione;
 - Impongo che questo nuovo vettore sia autovettore di B ;
 - Risolvero il sistema di equazioni trovando i coefficienti della combinazione lineare;
 - Per come è stato definito, questo vettore è autovettore sia di A che di B .

Per capire se un insieme di osservabili compatibili costituisce un ICOC:

- Se gli osservabili sono compatibili, esiste una base comune di autovettori;
- A ogni autovettore, associo una *label* costituita da una lista dei corrispondenti autovalori per ogni osservabile;
- Se **ogni** *label* è unica, l'insieme è un ICOC.

Evoluzione temporale e trasformazioni unitarie

Equazione di Schrödinger	Trasformazioni unitarie	Operatore di evoluzione temporale	Sistema conservativo
$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \psi(t)\rangle = H(t) \, \psi(t)\rangle$	$\begin{cases} \psi\rangle & \mapsto \psi'\rangle = U \, \psi\rangle \\ A & \mapsto A' = U A U^\dagger \end{cases}$	$U(t, t_0) \, \psi(t_0)\rangle = \psi(t)\rangle$	$U(t + \mathrm{d}t, t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t) \mathrm{d}t$
Visuale di Schrödinger	Visuale di Heisenberg	Equazione di heisenberg	
$\begin{cases} \psi(t)\rangle_S = U(\Delta t) \, \psi(t_0)\rangle_S \\ A_S(t) = A_S(0) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi(t)\rangle_H = \psi(t_0)\rangle_H \\ A_H(t) = U^\dagger(\Delta t) A_H(t_0) U(\Delta t) \end{cases}$		$-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H, H]$

Matrice densità

Stato puro	Stato misto	Proprietà (stato generico)	SOLO PER STATI PURI
$\rho(t) = \psi(t)\rangle \langle \psi(t) $	$\{ \psi_k(t)\rangle\}, \, p_k$	$\rho^\dagger(t) = \rho(t)$	$\rho^2(t) = \rho(t)$
$\rho_{pn}(t) = \langle u_p \rho(t) u_n \rangle = \bar{c}_n(t) c_p(t)$	$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t)$	$Tr(\rho(t)) = 1$	$Tr(\rho^2(t)) = 1$

Oscillatore armonico

Problema agli autovalori

$$H\left|\psi\right\rangle =E\left|\psi\right\rangle$$

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2$$

Autofunzione n-esima

$$u_n(x)=\left[\frac{1}{n!2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^ne^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$$

Definizioni utili

$$\hat{X}:=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$$

$$\hat{P}:=\sqrt{m\hbar\omega}P$$

$$\hat{H}=\frac{H}{\hbar\omega}=\frac{1}{2}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)$$

Nuovo probl. agli autov.

$$a=\sqrt{2}(\hat{X}+i\hat{P})$$

$$a^\dagger=\sqrt{2}(\hat{X}-i\hat{P})$$

$$N=a^\dagger a$$

$$[a,a^\dagger]=1$$

Autostati

$$a\left|n\right\rangle =\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$

$$a^\dagger\left|n\right\rangle =\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

$$[N,a]=-a,\quad[N,a^\dagger]=+a$$