



UNIVERSITÀ DI PISA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE
DATA SCIENCE AND BUSINESS INFORMATICS

Analisi del problema Car Production

Federica Currao - 494795

Insegnamento Logistics
Docente Maria Grazia Scutellà
Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	1
2	Analisi e soluzione del problema	1
3	Analisi e soluzione del problema modificato	4

1 Introduzione

L'obiettivo del progetto è di affrontare il problema **Car Production**, nel quale si presenta lo scenario di determinare il piano di produzione di due tipologie di automobili (coupé e minivan) per i prossimi due mesi. L'azienda assembla le automobili utilizzando tre diversi materiali, le cui quantità necessarie per la produzione sono presentate nella tabella seguente:

	Materiale 1	Materiale 2	Materiale 3
Coupé	85	3	20
Minivan	60	2	15

I materiali utilizzati sono disponibili in quantità limitate a seconda del mese, come visibile in tabella:

Mese	Materiale 1	Materiale 2	Materiale 3
1	24000	800	5700
2	19000	1000	7000

Il problema prevede che ogni mese debbano essere prodotte almeno 100 automobili coupé e almeno 150 minivan. Il profitto che si ricava dalla vendita di un'automobile coupé è 150, mentre per ogni minivan il profitto è 120. Viene, inoltre, presentata una versione modificata del problema nella quale si ha a disposizione uno stock supplementare dei tre materiali nel secondo mese, che rispettivamente comprende 1000 unità del Materiale 1, 700 del Materiale 2 e 500 del Materiale 3, al costo complessivo di 150. Il problema così modificato prevede di decidere la convenienza o meno dell'acquisto dello stock, al fine di aumentare la produzione di automobili e di conseguenza il profitto dell'azienda.

2 Analisi e soluzione del problema

L'obiettivo del problema preso in analisi è quello di massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle automobili prodotte, rispettando i vincoli del problema.

I **dati di input** sono:

- $\mathbf{I} = \{1, 2\}$ insieme delle macchine
- $\mathbf{J} = \{1, 2, 3\}$ insieme dei materiali
- $\mathbf{K} = \{1, 2\}$ insieme dei mesi
- p_i = profitto della vendita di un'automobile i
- q_{ji} = quantità del materiale j per produrre la macchina i
- d_{jk} = disponibilità del materiale j nel mese k
- z_i = produzione della macchina i .

La **variabile decisionale** è:

- x_{ik} = macchina i nel mese k .

La formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p_i x_{ik} \\ \sum_{i \in I} q_{ij} x_{ik} \leq d_{jk} \quad \forall k \in K, \forall j \in J \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{ik} \geq z_i \quad \forall i \in I, \forall k \in K \\ x_{ik} \text{ integer} \end{aligned} \quad (2)$$

Il vincolo (1) riguarda la disponibilità dei materiali nei due mesi, che può essere espresso in maniera esplicita (considerando le tabelle precedenti), per il primo mese, come:

$$\begin{aligned} 85x_{11} + 60x_{21} &\leq 24000 \\ 3x_{11} + 2x_{21} &\leq 800 \\ 20x_{11} + 15x_{21} &\leq 5700 \end{aligned}$$

mentre per il secondo mese:

$$\begin{aligned} 85x_{12} + 60x_{22} &\leq 19000 \\ 3x_{12} + 2x_{22} &\leq 1000 \\ 20x_{12} + 15x_{22} &\leq 7000 \end{aligned}$$

Il vincolo (2) riguarda la produzione mensile delle automobili, nel quale viene richiesto di produrre ogni mese almeno 100 automobili della prima tipologia ed almeno 150 della seconda. Il vincolo può essere riscritto in maniera esplicita come:

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq 100 \\ x_{12} &\geq 100 \\ x_{21} &\geq 150 \\ x_{22} &\geq 150 \end{aligned}$$

La **funzione obiettivo**, grazie ai vincoli imposti, permette la risoluzione ottimale del problema, massimizzando il profitto ricavato dalla vendita delle automobili prodotte. Questo è ottenuto sommando il profitto della vendita dell'automobile della prima tipologia nei due mesi e il profitto della vendita dell'automobile della seconda tipologia nei due mesi. Utilizzando i dati del progetto, la funzione obiettivo ottenuta è la seguente:

$$\max 150(x_{11} + x_{12}) + 120(x_{21} + x_{22})$$

Nella figura seguente vengono mostrati i dati utilizzati, forniti dal problema.

```
data;
set Macchine:= Coupe Minivan;
set Materiali:= Mat1 Mat2 Mat3;
set Mesi:= Mese1 Mese2;

param Disponibilita: Mat1 Mat2 Mat3:=
Mese1 24000 800 5700
Mese2 19000 1000 7000;

param Requisiti: Coupe Minivan :=
Mat1 85 60
Mat2 3 2
Mat3 20 15;

param Profitto:=
Coupe 150
Minivan 120;

param Produzione:Mese1 Mese2:=
Coupe 100 100
Minivan 150 150;
```

L'insieme **Macchine** rappresenta le due tipologie di automobili: Coupè e Minivan. I materiali sono di tre tipi, la cui disponibilità varia nei due mesi. In particolare, per il materiale 1 nel mese 1 si hanno 24000 unità a fronte delle 19000 nel mese 2; per il materiale 2 nel mese 1 si hanno 800 unità, mentre 1000 nel mese 2 ed infine per il materiale 3 si hanno 5700 unità nel mese 1 e 7000 nel mese 2. Inoltre, nel parametro **Requisiti** si può visualizzare la quantità di ognuno dei tre materiali necessaria a produrre un'automobile Coupè o Minivan. Il profitto varia per ogni macchina, in particolare si ha 150 per la macchina Coupè e 120 per Minivan. Ogni mese è possibile produrre almeno 100 automobili Coupè e almeno 150 Minivan.

La risoluzione del problema è avvenuta tramite il solver CPLEX e, come è possibile notare dalla figura sottostante, il profitto massimo ricavato dalla vendita delle automobili prodotte è pari a 80580. Nel mese 1 vengono prodotte 102 Coupè e 244 Minivan, mentre nel mese 2 si hanno 100 Coupè e 175 Minivan.

```
CPLEX 20.1.0.0: optimal integer solution; objective 80580
2 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
ampl: display Quantity;
Quantity :=
Coupe Mese1 102
Coupe Mese2 100
Minivan Mese1 244
Minivan Mese2 175
;
```

3 Analisi e soluzione del problema modificato

In questa sezione viene affrontato il problema modificato per valutare la possibilità di acquistare lo stock supplementare dei tre materiali per aumentare la produzione delle automobili al costo complessivo di 150.

I **dati di input** sono:

- $\mathbf{I} = \{1, 2\}$ insieme delle macchine
- $\mathbf{J} = \{1, 2, 3\}$ insieme dei materiali
- $\mathbf{K} = \{1, 2\}$ insieme dei mesi
- p_i = profitto della vendita di un'automobile i
- q_{ji} = quantità del materiale j per produrre la macchina i
- d_{jk} = disponibilità del materiale j nel mese k
- z_i = produzione della macchina i
- m_{jk} = disponibilità supplementare j per il mese k .

Le **variabile decisionali** sono:

- x_{ik} = macchina i nel mese k .
- $y = \begin{cases} 1 & \text{acquisto stock supplementare} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

La formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p_i x_{ik} - 150y \\ \sum_{i \in I} q_{ij} x_{ik} \leq d_{jk} + m_{jk} y \quad \forall k \in K, \forall j \in J \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_{ik} &\geq z_i \quad \forall i \in I, \forall k \in K \\ x_{ik} &\text{ integer} \\ y &\in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{2}$$

Il vincolo (1) riguarda la disponibilità dei materiali nei due mesi. La modifica rispetto al punto precedente consiste nella possibilità di aggiungere uno stock extra (dove la possibilità di aggiungere o meno lo stock viene modellizzata attraverso la *variabile binaria* y). Il vincolo (2) non subisce variazioni rispetto al punto precedente.

La **funzione obiettivo** viene modificata sottraendo il costo complessivo per l'utilizzo dello stock supplementare dei tre materiali, moltiplicato per la variabile binaria. Il prodotto tra il costo complessivo e la variabile binaria viene utilizzato per valutare se conviene acquistare lo stock supplementare oppure no.

La figura mostra i dati utilizzati, forniti dal problema.

```
data;
set Macchine:= Coupe Minivan;
set Materiali:= Mat1 Mat2 Mat3;
set Mesi:= Mese1 Mese2;

param Disponibilita: Mat1 Mat2 Mat3:=
Mese1 24000 800 5700
Mese2 19000 1000 7000;

param Disponibilita2: Mat1 Mat2 Mat3:=
Mese1 0 0 0
Mese2 1000 700 500;

param Requisiti: Coupe Minivan :=
Mat1 85 60
Mat2 3 2
Mat3 20 15;

param Profitto:=
Coupe 150
Minivan 120;

param Produzione:Mese1 Mese2:=
Coupe 100 100
Minivan 150 150;
```

Rispetto al punto precedente è stato aggiunto il parametro **Disponibilita2** per rappresentare lo stock supplementare dei tre materiali nel secondo mese.

La risoluzione del problema è avvenuta tramite il solver CPLEX e, come è possibile vedere dalla figura sottostante, si ha un aumento della produzione delle due tipologie di macchine nel secondo mese (pari a 101 di Coupé e 190 di Minivan) e un aumento del profitto (pari a 82380). Dall'analisi svolta è risultato quindi conveniente acquistare lo stock di materiale supplementare, nonostante il costo aggiuntivo.

```
CPLEX 20.1.0.0: optimal integer solution; objective 82380
3 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
AMPL: display Quantity;
Quantity :=
Coupe Mese1 102
Coupe Mese2 101
Minivan Mese1 244
Minivan Mese2 190
;
```