UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

ASIGNATURA: **ANÁLISIS NUMÉRICO I** CÓDIGO: **75.12, 95.04, 95.13**

AÑO: 2014 2º CUATRIMESTRE

PROFESORA: **LIC. MIRYAM SASSANO**

GRUPO Nº: . . . .

INTEGRANTES:

Amura, Federico	PADRÓN Nº	9	5	2	0	2
Mastronardi, Valeria.	PADRÓN Nº	8	9	6	6	1
	PADRÓN Nº					
	PADRÓN Nº					

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

TÍTULO: SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

FECHA DE PRESENTACIÓN: 10/12/2014

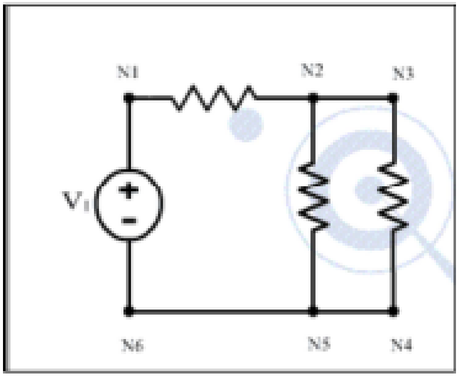
OBSERVACIONES	FECHA

NOTA:

FIRMA DEL DOCENTE

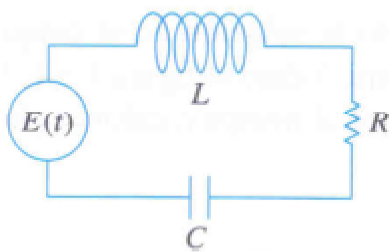
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

Con la ley de Ohm se pueden encontrar los valores de voltaje y corriente para una elemento de un circuito, pero en general los circuitos están conformados por varios de ellos, interconectados en una red o malla, la cual utiliza conexiones ideales, que permiten fluir la corriente de un elemento a otro, sin acumular carga ni energía, en este caso la red recibe el nombre de circuito.
Los puntos donde se unen los diferentes elementos, que conforman el circuito en general, se denominan Nodos. Como el que aparece en la siguiente figura:



Para resolver circuitos que contengan más de una resistencia y una fuente de voltaje o corriente, en 1847 el físico alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887), postulo dos leyes que llevan su nombre.
La primera ley de Kirchhoff se conoce como la ley de corrientes de Kirchhoff "La suma algebraica de las corrientes que entran o salen de un nodo es igual a cero en todo instante".

La segunda ley de Kirchhoff se conoce como la ley de voltajes de Kirchhoff "La suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier lazo (camino cerrado) en un circuito, es igual a cero en todo instante".
Consideramos un circuito en serie simple que tiene un inductor, un resistor y un capacitor como se muestra en la siguiente figura:

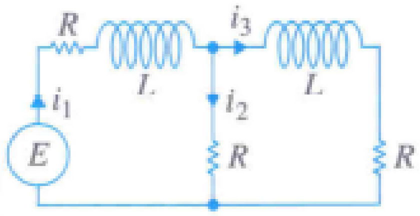


Denotamos:

- $i(t)$ a la corriente
- La carga en el capacitor al tiempo t se denota $q(t)$.
- R es la inductancia, R la resistencia y C la capacitancia, en general son constantes.

La segunda ley de Kirchhoff indica que el voltaje aplicado $E(t)$ a un circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$ en el capacitor mediante: $i = \frac{dq}{dt}$ entonces se obtiene la ecuación general: $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$.

Dado el circuito:



Cuando $E = 100V, R = 10\Omega$ y $L = 1h$ el sistema de ecuaciones diferenciales que lo caracteriza es:

$$\begin{pmatrix} {di_1}/{dt} \\ {di_3}/{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20i_1 + 10i_3 + 100 \\ 10i_1 - 20i_3 \end{pmatrix}$$

Donde las condiciones iniciales son: $i_1(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$

Se pide:

1) Hallar la solución analítica del sistema.

2) Diseñar un programa que implemente RK4 para obtener la solución numérica en el intervalo $[0, 3]$ con h=0.1.

3) Obtener la gráfica de la solución numérica.

4) Compare los gráficos de la solución analítica y la aproximada en el mismo intervalo temporal.

5) Predecir el comportamiento de $i_1(t)$ e $i_3(t)$ $conforme\ t \to \infty$

6) Realizar en el código del punto 2 la modificación necesaria para que el usuario ingrese el paso h dentro de un rango de factibilidad.

DESARROLLO

Planteado el objetivo del trabajo práctico y las distintas consignas a resolver, se comienza buscando la solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales evidenciado.

$$i_1' = -20\, i_1 + 10\, i_3 + 100$$

$$i_3' = 10\, i_1 - 20\, i_3$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$i_1(0)=0$$

$$i_3(0)=0$$

Planteado el sistema, trabajo con las ecuaciones sumando y restando ambas, para obtener así:

$$i_1' - i_3' = -20 i_1 + 10\, i_3 + 100 - 10\, i_1 + 20\, i_3 = -30(i_1 - i_3) + 100$$

$$i_1' + i_3' = -10(i_1 + i_3) + 100$$

Siguiendo con la resolución, realizo un cambio de variable "$x=i_1-i_3$" e "$y=i_1+i_3$", por lo tanto obtenemos dos ecuaciones diferenciales con una sola variable cada una:

$$x' = -30\, x + 100$$

$$y' = -10y + 100$$

Entonces, se calcula la solución homogénea y particular para cada una de ellas.

<u>Para la primera:</u>

Homogénea:

$x' + 30x = 0 \rightarrow x = C \cdot e^{-30t}$

Particular:

$0 = -30a + 100 \rightarrow a = 10/3$

Solución: $x = C \cdot e^{-30t} + 10/3$

Para la segunda:

Homogénea:

$y' + 10y = 0 \rightarrow y = D \cdot e^{-10t}$

Particular:

$0 = -10b + 100 \rightarrow b = 10$

Solución: $y = D \cdot e^{-10t} + 10$

Sabiendo que "$x+y=2i_1$" y "$x-y=-2i_3$", se trabaja con las ecuaciones anteriores:

$$i_1 = (C/2) \cdot e^{-30t} + 10/6 + (D/2) \cdot e^{-10t} + 5$$
$$i_3 = -(C/2) \cdot e^{-30t} - 10/6 + (D/2) \cdot e^{-10t} + 5$$

Se utilizan las condiciones iniciales dadas para calcular las constantes C y D:

$$i_1(0) = 0 = C/2 + 40/6 + D/2$$
$$i_3(0) = 0 = -C/2 + 20/6 + D/2$$

Por lo tanto, se obtiene que las constantes toman los siguientes valores:

$$C = -20/6$$
$$D = -10$$

Finalmente, las soluciones serán:

$$i_1 = -5/3 \cdot e^{-30t} - 5 \cdot e^{-10t} + 40/6$$
$$i_3 = 5/3 \cdot e^{-30t} - 5 \cdot e^{-10t} + 20/6$$

Sus respectivos valores en el intervalo citado, serán:

$$i_1(0) = 0$$
$$i_3(0) = 0$$
$$i_1(3) = 6.66667$$
$$i_3(3) = 3.33333$$

Si evaluamos las funciones con un t muy grande:

$i_1(t \to \infty) = 40/6 = 6.66667$

$i_3(t \to \infty) = 20/6 = 3.33333$

Este resultado viene además respaldado por realizar un pequeño análisis electrónico al circuito y también verificamos que el método RK4 mantiene esos valores constantes en el final del intervalo, lo que en un principio, puede sugerir estar aproximándose a una asíntota.

METODO UTILIZADO

En análisis numérico, los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta.

Un método de la familia de los métodos Runge-Kutta es usado tan comúnmente que a menudo es referenciado como «RK4» o como «el método Runge-Kutta».

Definiendo un problema de valor inicial como:

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b$$
$$y(a) = y_0$$

Método Runge-Kutta de orden 4

Método clásico:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3h) \end{cases}$$

Así, el siguiente valor (y_{i+1}) es determinado por el presente valor (y_i) más el producto del tamaño del intervalo (h) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes, donde k_1 es la pendiente al principio del intervalo, k_2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k_1 para determinar el valor de y en el punto ti + h/2. k_3 es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando k_2 para determinar el valor de y; k_4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k_3. Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Esta forma del método de Runge-Kutta, es un método de cuarto orden lo cual significa que el error total acumulado tiene el orden $O(h^4)$. Por lo tanto, la convergencia del método es del orden de $O(h^4)$.

IMPLEMENTACION

En el caso del programa, las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

F(t;x;y) = -20x+20y+100

G(t;x;y) = 10x-20y

Y para aplicar el método:

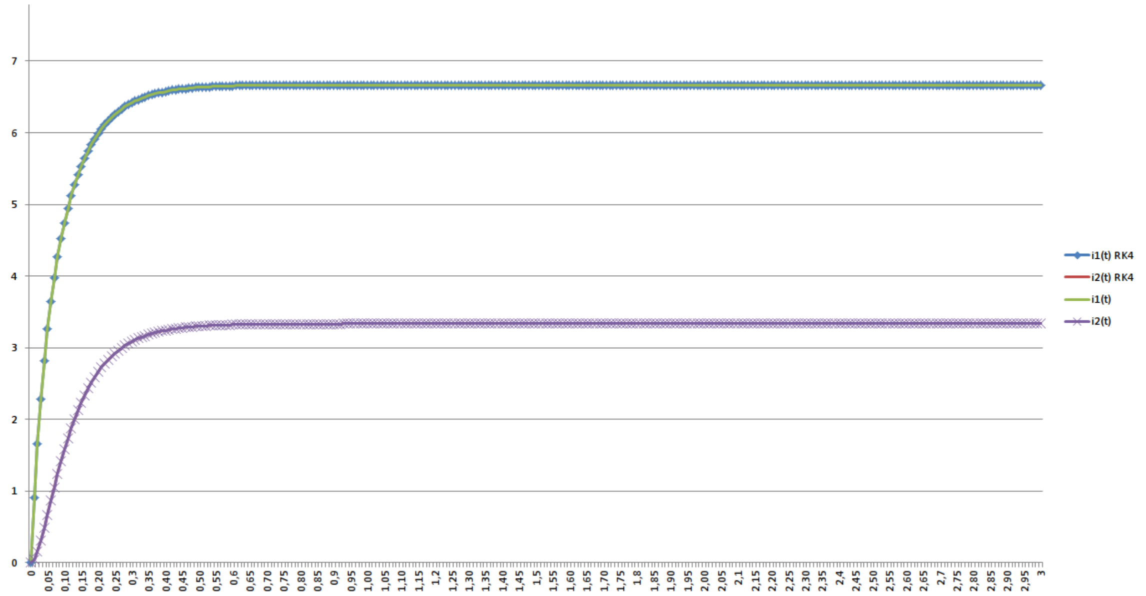
$X_{n+1} = X_n + h/6 * (m_1+2*m_2+2*m_3+m_4)$

$Y_{n+1} = Y_n + h/6 * (k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)$

Utilizando la ecuación F(t;x;y) para el cálculo de los coeficientes m y la ecuación G(t;x;y) para el de los coeficientes k. Una vez ingresamos esas funciones, junto con las condiciones iniciales (cero para ambos casos) podemos correr el método en un intervalo ingresado por el usuario.

El programa genera un archivo de salida donde están todos los valores, tanto de los coeficientes, como de las funciones X e Y en todo punto del intervalo.

Finalmente, podemos graficar los puntos que nos devuelve el programa junto con los que nos daría las ecuaciones que sacamos analíticamente.



Como vemos, las funciones están prácticamente superpuestas, esto viene dado por el bajo error del método, el cual es del orden $O(h^4)$.

Para más información de la implementación ver el código adjunto.

CONCLUSIÓN

Dada la complejidad de desarrollar un sistema que resuelva problemas de valores iniciales analíticamente, como lo haríamos nosotros, se ve la importancia y la gran utilidad que nos brinda el método RK4. No solo resolviendo el problema de una manera fácilmente programable y modificable para cada problema distinto, si no que con gran efectividad y precisión.
Este método puede incluso mejorarse, evaluando el error en ciertos intervalos y generando menores divisiones en el que posea un error más grande de lo esperado. Este es el caso de los métodos adaptativos. También otra mejora para hacer es la de combinar aproximaciones implícitas y explícitas, generando una aproximación mejor, pero a costa de más etapas por paso.
No está de más, hacer la aclaración que a medida que achiquemos el intervalo, menor seria el error, pero aumentaría el número de cuentas, por lo cual es necesario evaluar la relación costo-beneficio según la situación.
A pesar de estos beneficios, al ser este método una aproximación iterativa, no solo su calidad depende del intervalo que tomemos, además, el resultado puede no converger a la solución, por lo que sería totalmente erróneo. Eso nos obliga a tener cierta idea del resultado final. Esto puede verse fácilmente en el programa haciendo variar el intervalo.