UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

ASIGNATURA: **ANÁLISIS NUMÉRICO I** CÓDIGO: **75.12, 95.04, 95.13**

AÑO: 2014 2º CUATRIMESTRE

PROFESORA: **LIC. MIRYAM SASSANO**

GRUPO Nº: . . . .

INTEGRANTES:

Amura, Federico	PADRÓN Nº	9	5	2	0	2
Mastronardi, Valeria.	PADRÓN Nº	8	9	6	6	1
	PADRÓN Nº					
	PADRÓN Nº					

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

TÍTULO: MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

FECHA DE PRESENTACIÓN: 08/10/2014

OBSERVACIONES	FECHA

NOTA:

FIRMA DEL DOCENTE

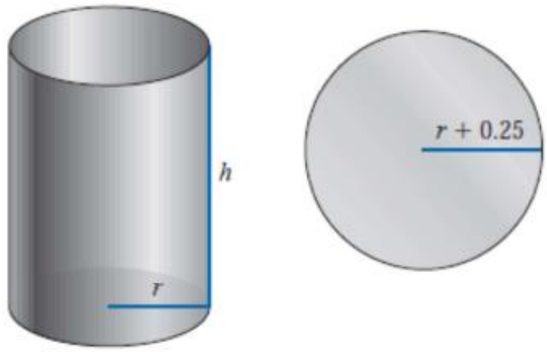
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

Una empresa fabrica envases de aluminio, que tienen la forma de un cilindro circula recto, como se muestra en la figura debajo.

El envase debe contener 1000 cm^3. Las tapas circulares deben tener un radio de 0,25 cm más que el radio del envase de modo que el exceso se pueda utilizar para formar un sello con la cara.

La lámina lateral también debe ser 0,25 cm más larga que la circunferencia del envase de modo que se pueda colocar el sello de la marca.

Encontrar la cantidad mínima de material necesario para construir el envase.



Para resolver este problema se pide:

1. Graficar (usando algún graficador) la función a minimizar.
2. Implementar el algoritmo de Newton Raphson usando cualquier lenguaje de programación para determinar el valor necesario de r que resuelva el problema.
3. Ejecute el programa hasta que el error relativo entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-3} cm
4. Modifique el programa anterior para que el usuario ingrese un valor de dentro de un rango de viabilidad, que deberá estar indicado en la ejecución del programa, como así también la corrección correspondiente al aumento del radio.

De esta manera, mediante este trabajo práctico, analizaremos una situación física real y desarrollaremos cálculos numéricos para su resolución, manipulando gráficos, representando datos y funciones, e implementando algoritmos.

DESARROLLO

El envase debe contener 1000 cm^3, por lo tanto su volumen es 1000 cm^3.

El volumen (V) de un cilindro se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathbf{V = \pi * r^2 * h}$$

... donde r representa el radio del cilindro y h, su altura, ambos en la unidad cm.

De esta manera, se debe cumplir que:

$$\mathbf{V = \pi * r^2 * h = 1000\ cm^3}$$

Por otro lado, el perímetro de la circunsferencia del cilindro se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{P = 2 * \pi * r}$$

... donde r representa nuevamente el radio del cilindro.

Por lo tanto, se tiene las siguientes incógnitas: el radio r y la altura h.

Para poder encontrar la cantidad mínima de material necesario para construir el envase, planteamos:

$$\mathbf{Stotal = Sch\text{-}cil + 2 * Sch\text{-}tap}$$

… donde Sch-cil = superficie de chapa del cilindro

… donde Sch-tap = superficie de chapa de la tapa del cilindro

Cada uno de estos términos se calcula como:

$$\mathbf{Sch\text{-}cil = 2 * \pi * r * h}$$

$$\mathbf{Sch\text{-}tap = \pi * r^2}$$

Reemplazando estos términos en la fórmula general:

$$\mathbf{Stotal = Sch\text{-}cil + 2 * Sch\text{-}tap}$$

$$\mathbf{Stotal = 2 * \pi * r * h + 2 * \pi * r^2}$$

Sabiendo que $h = V / \pi * r^2$, lo reemplazo en la fórmula anterior entonces la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{Stotal = 2 * \pi * r * V / \pi * r^2 + 2 * \pi * r^2}$$

... donde r está em cm y V em cm^3.

Cancelamos donde corresponde y nos queda:

$$\mathbf{Stotal = 2 * V / r + 2 * \pi * r^2}$$

Como el objetivo es encontrar la cantidad mínima, derivamos la última expresión hallada respecto de r:

$$\mathbf{\delta Stotal/\delta r = -2*V/r^2 + 4*\pi*r}$$

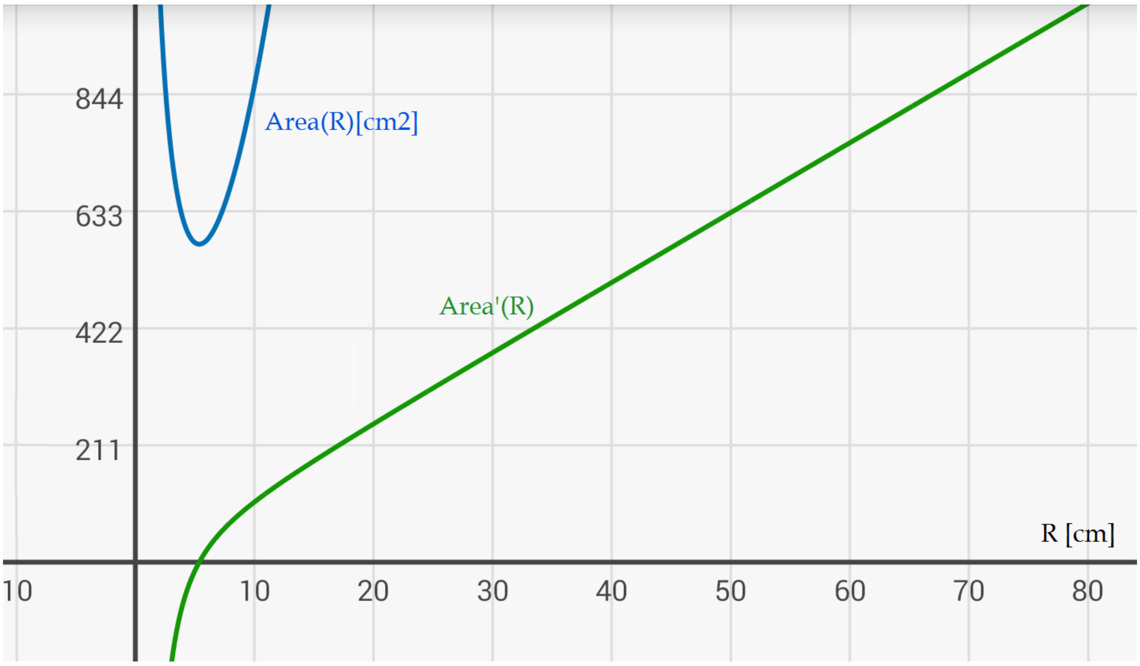
Esta función es la que graficaremos, como solicita el primer punto de este trabajo práctico.

Luego, igualando a cero:

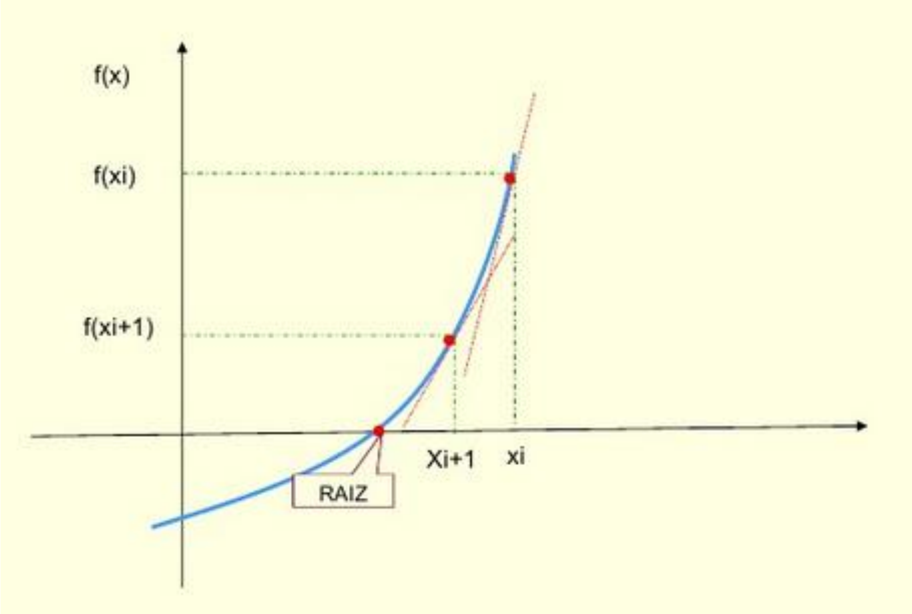
$$\delta Stotal/\delta r = -2*V/r^2 + 4*\pi*r = 0$$

A dicha expresión le aplicaremos el Método Newton-Raphson usando el lenguaje de programación C para encontrar el cero y así determinar el valor de r que resuelva el problema.

En el siguiente grafico se puede ver en azul el área en función del radio y en verde su derivada, ambos para un volumen de $1000cm^3$, se puede ver claramente como el cero de la derivada se encuentra en el minimo valor del área. Se ignora las unidades de la derivada ya que no tiene una representación física.



En análisis numérico, el **método de Newton-Raphson** es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. Este método iterativo, llega al resultado del problema en forma rápida, lo que lo convierte en una buena herramienta computacional. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada. El método de Newton Raphson puede interpretarse como la aproximación de la función cerca de x_k por la recta tangente $f(x_k)$. Geométricamente,



Sea f: [a, b] → R función derivable definida en el intervalo real [a, b]. Empezando con un valor inicial x_0, se define para cada número natural n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Donde f ' denota la derivada de f.

El error entre dos aproximaciones sucesivas está dado por: $E = | X_{k+1} - X_k |$

Se detiene el proceso iterativo cuando este error es aproximadamente menor que una cantidad fijada previamente.

Para el presente caso, tomo la función:

$$\mathbf{F(r) = -2*V/r^2 + 4*\pi*r}$$

Buscamos La derivada de La función f (r):

$$\mathbf{F'(r) = 4*V/r^3 + 4*\pi}$$

Y ahora estamos en condiciones de cargar todo en el programa que realizara las cuentas. Para ver como realiza el procedimiento se puede ver el código y sus comentarios.

El final, también necesitábamos cierto extra de chapa para lo cual se las agrego con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{Sch\text{-}cil = (2 * \pi * r + 0{,}25\ cm) * h}$$

$$\mathbf{Sch\text{-}tap = \pi * (r + 0{,}25\ cm)^2}$$

... donde r representa el radio del cilindro y h, su altura, ambos en la unidad cm.

Quedando como valores finales para el cálculo de volumen del primer punto:

r = 5,669257cm

h = 10,838512cm

Y dándonos el valor de área final incluyendo el extra de:

Stotal = 573.708951cm2

Error

En general, para cualquier tipo de error, la relación entre el número exacto y el obtenido por aproximación se define como:

Error = Valor real - valor estimado

En ocasiones, se sabrá exactamente el valor del error o deberemos estimar un error aproximado. Ahora, para definir la magnitud del error, o que incidencia tiene en el cálculo el error detectado, podemos normalizar su valor:

Error relativo = error estimado / valor verdadero

<u>Error de redondeo</u>

Muchas veces, las computadoras cortan los números introduciendo así un error de redondeo

Por ejemplo, el valor de "e" se conoce como 2.718281828...

Si cortamos el número en 2.71828182 (8 cifras significativas luego del punto decimal) estamos obteniendo u error de:

E = 2.718281828 -2.71828182 = 0.000000008

Sin embargo, como no consideramos que el número que seguía al corte era mayor que 5, entonces nos convenía dejar el número como 2.71828183, caso en el cual el error sería solo de

E = 2.118281828 -2.11828183 = -0.000000002

Que en términos absolutos es mucho menor que el anterior.

En general, el error de corte de las computadoras será muy inferior al error introducido por un usuario, que generalmente corta a un menor número de cifras significativas.

Error de truncamiento

Los errores de truncamiento tienen relación con el método de aproximación que se usará ya que generalmente frente a una serie infinita de términos, se tenderá a cortar el número de términos, introduciendo en ese momento un error, por no utilizar la serie completa (que se supone es exacta).

En una iteración, se entiende como el error por no seguir iterando y seguir aproximándose a la solución. En un intervalo que se subdivide para realizar una serie de cálculos sobre él, se asocia al número de paso, resultado de dividir el intervalo "n" veces.

Error de los cálculos

En este caso se pidió que el error sea menor a 10^{-3}cm por lo que se consideró que esa debía ser la diferencia entre dos iteraciones del método de Raphson.

Es decir:

$$|X_n - X_{n-1}| \leq 10^{-3} = 0.001$$

El error también es calculado en el programa, quedando para el cálculo de volumen 1000cm^3:

$$E_{1000cm3} = 0.000001 = 10^{-6} < 10^{-3}$$

RESULTADO FINAL

Considerando el resultado que nos dio antes, la cota de error la cual no debíamos superar y utilizando redondeo en el tercer digito significativo (en ese digito ya que la naturaleza del error es así) nos quedamos con un valor de área de chapa necesaria para construir el cilindro de:

$$S_{final} = (573.709 \pm 0.001)\ cm^2$$

CONCLUSIÓN

El **análisis numérico** o cálculo numérico es la rama de las matemáticas que se encarga de diseñar algoritmos para, a través de números y reglas matemáticas simples, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real. Cobra especial importancia con la llegada de las **computadoras**. Estas últimas son útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos, pero en última instancia operan con números binarios y operaciones matemáticas simples.

El análisis numérico consiste en procedimientos que resuelven problemas y realizan cálculos puramente aritméticos. Pero hay que tomar en cuenta las características especiales y limitaciones de los **instrumentos de cálculo** (computadoras) que nos ayudan en la ejecución de las instrucciones del algoritmo.

Si bien no nos interesa la construcción de tal dispositivo o la manera en que funciona, sí nos importarán los sistemas numéricos de máquinas en **contraposición con nuestro sistema de números reales, y los errores resultantes** de cambiar de uno a otro sistema.

El **Análisis Numérico** se puede entender como el estudio de los errores en los cálculos, así como también se puede relacionar con el diseño, uso y análisis de algoritmos, los cuales son conjuntos de instrucciones cuyo fin es calcular o aproximar alguna cantidad o función.

La mayoría de los métodos utilizados para el cálculo de raíces de una ecuación son **iterativos** y se basan en modelos de **aproximaciones sucesivas**.

Estos métodos trabajan del siguiente modo: a partir de una primera aproximación al valor de la raíz, determinamos una aproximación mejor aplicando una determinada regla de cálculo y así sucesivamente hasta que se determine el valor de la raíz con el grado de aproximación deseado y definido de antemano.

En análisis numérico, el **método de Newton-Raphson** es un método abierto, un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada. Es uno de los métodos iterativos más usados en ingeniería, por llegar al resultado del problema en forma rápida si se dan las condiciones.

De las fórmulas para localizar raíces, la fórmula de Newton-Raphson es una de las más ampliamente utilizadas. Si el valor inicial para la raíz es xi, entonces se puede trazar una tangente desde el punto [xi,f(xi)] de la curva. por lo común, el punto donde esta tangente cruza el eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

Las **ventajas** de este método, algunas de las cuales evidenciamos en el proceso del presente trabajo práctico, es que, al ser un método iterativo, éste entrega una sucesión de valores, resoluciones con buena precisión, convergiendo rápidamente al valor buscado y se usan menos operaciones aritméticas, finalizando cuando alcanzamos la exactitud minina necesaria. Newton-Raphson es el que presenta muy buenas características de eficiencia, convergiendo a la solución en un número reducido de iteraciones. Requiere, además, de un solo valor inicial (suficientemente cercano a la raíz buscada, el cual puede buscarse por otros métodos, como bisección).

El método se emplea en la solución de problemas académicos y en problemas propios del mundo real, como fue el caso del presente trabajo práctico.

Sin embargo, aunque en general el método es muy eficiente, posee algunas **desventajas**, a saber: el conocimiento y evaluación de la derivada, conocer el problema físico, problemas ante raíces múltiples.