Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Práctica 3: Interpolación.

Ej. 1: Dados los puntos de la siguiente tabla

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1	3	5	4.5	3

a) ¿Cuál es el orden del polinomio interpolante para el cual el polinomio es único?

b) Obtenga dicho polinomio por medio del método de Vandermonde.

- Plantee matricialmente el sistema de ecuaciones que interpola al conjunto de puntos y obtenga el valor de los coeficientes.
- Grafique el polinomio resultante y verifique que interpola al conjunto de puntos. La función `polyval` puede serle de utilidad.

c) Vuelva a interpolar el conjunto de puntos anterior por medio el método de Lagrange.

- Calcule y grafique los polinomios $L_{n,i}(x)$, verifique que satisfacen la propiedad: $L_{n,i}(x_k) = 0$; $i \neq k$ y $L_{n,i}(x_i) = 1$.
- Grafique el polinomio interpolante y observe que coincide con el del inciso **a)**.

d) Ahora, halle el polinomio interpolante por el método de Newton.

- Confeccione la tabla de diferencias divididas.
- Obtenga el polinomio, grafique y compare con lo obtenido con los métodos anteriores.

Ej. 2: Hemos visto tres métodos o algoritmos distintos para encontrar el polinomio que interpola un conjunto de $n+1$ puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ...(x_n, y_n)\}$.

a) Analice si las siguientes afirmaciones son o no verdaderas y en cada caso explique por qué:

- Los tres métodos conducen al mismo polinomio interpolante.
- Por los distintos métodos de interpolación debemos llegar a los mismos resultados numéricos.
- Desde un punto de vista operacional algunos algoritmos resultan menos ventajosos que otros.

b) Para cada uno de los métodos mencionados, analizar el costo computacional (número de operaciones de punto flotante necesarias) para: el cálculo del polinomio interpolante $P_n(x)$; para su evaluación en un valor arbitrario $P_n(x_k)$; para agregar un punto más a la interpolación.

c) El polinomio de interpolación de Newton es de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

donde $a_i = f[x_0, x_1, ..., x_i]$. Vea que esta expresión puede ser reordenada y escribirse de la forma

$$P_n(x) = (...((a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + a_{n-2})(x - x_{n-3}) + ... + a_1)(x - x_0) + a_0.$$

Compare la eficiencia computacional de una u otra expresión al evaluar el polinomio, $P_n(x_k)$ (ver programa `horner.m`).

Ej. 3: A cerca del error...

a) Si M es el valor absoluto máximo de $f''(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$, muestre que el error para la interpolación lineal de $f(x)$ usando $f(x_0)$ y $f(x_1)$ está acotado por $\frac{1}{8}M(x_1 - x_0)^2$ para $x_0 \leq x \leq x_1$.

b) Si se desea estimar el valor de $\sin(x)$ mediante una interpolación lineal de paso h, ¿qué valor debería tomar h si el error en la interpolación debe mantenerse por debajo de 10^{-6}?

c) El error calculado en b) es el que se conoce como *error de truncamiento* y lo que se obtuvo es una estimación *a priori* del mismo. Esta estimación, ¿depende del método elegido para interpolar? ¿De qúe depende? ¿Incluye *errores de redondeo*? ¿Cómo espera que sea el valor del error *a posteriori*? ¿Menor, igual o mayor?

Ej. 4: Programe en OCTAVE/MATLAB los métodos de interpolación a_1) Lagrange y a_2) Newton dado un conjunto de n puntos como entrada. La función `conv` puede serle de utilidad.

a) Dada la función $f(x) = |x| + x/2 - x^2$, hallar una aproximación polinómica para la misma en el intervalo $[-1, 1]$ con cada uno de los métodos anteriores. Considere 4, 10, 20 y 80 puntos equiespaciados para obtener la interpolación.

b) Grafique el polinomio de interpolación junto con la función $f(x)$ y observe qué pasa en cada caso. Vuelva a reflexionar a cerca de las preguntas del Ej. 3 c).

c) Utilice los comandos *tic* y *toc* para un número creciente de puntos a interpolar, y observe la eficiencia de los distintos algoritmos para una misma interpolación.

Ej. 5: Interpolación osculatoria y otra vez Newton

Supongamos que, al igual que en los ejercicios anteriores, contamos con $n+1$ puntos a interpolar, es decir, conocemos $(x_i, f(x_i))$ con $i = 0, \ldots, n$. A diferencia de esos casos, ahora vamos a buscar un polinomio de interpolación que no sólo pase por dichos puntos sino que en esos puntos tenga un determinado valor de derivada. O sea, dados $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$, con $i = 0, \ldots, n$, buscamos $P_k(x)$, de grado k, tal que se cumpla $P_k(x_i) = f(x_i)$ y $P'_k(x_i) = f'(x_i)$, para todo valor de i. A este polinomio se lo conoce como *polinomio interpolante osculatorio* o *polinomio de Hermite*.

a) Plantee el sistema de ecuaciones matriciales que permite calcular el polinomio de interpolación que satisface $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(2) = 1$ y $f'(2) = -1$.

b) ¿Cuál debe ser el grado k del polinomio para que la solución, si existe, sea única?

c) La matriz del sistema resultante lleva el nombre de *matriz de Vandermonde confluente* (VC). Resuelva el sistema para obtener el polinomio en cuestión y verifique que cumple con $f(x)$ y $f'(x)$ en $x_0, \cdots, x_n$.

Nuestro próximo objetivo será evitar resolver el sistema de ecuaciones anterior, ya que el número de operaciones escala como $(2n+1)^3$, y la matriz VC es en general, muy mal condicionada. Para ello:

d$_1$) Muestre que, siendo $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y $a < x_0 \neq x_1 < b$, existe un número $\xi \in (a, b)$ tal que se cumple $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$. *Pista*: Recurra al desarrollo de Taylor de $f(x)$ en torno a x_0. ¿A qué equivaldría $f[x_0, x_0]$? Justifique adecuadamente.

d$_2$) Considere ahora el problema de buscar el polinomio de interpolación que satisfaga $P_3(x_i) = f(x_i)$ y $P'_3(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, 1$. Definimos la sucesión de puntos $\{z_i\}_{i=0,\ldots,3}$ de modo que $z_0 = z_1 = x_0$ y $z_2 = z_3 = x_1$. Muestre, utilizando el inciso anterior, que el polinomio buscado se puede escribir como

$$P_3(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1) + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2),$$

en donde $f[\cdot]$ denota la correspondiente diferencia dividida de Newton.

d$_3$) Generalice (intuitivamente) la idea anterior. Suponga que se busca $P_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ y $P'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Defina la sucesión $\{z_i\}_{i=0,\ldots,2n+1}$ de modo tal que $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ y defina el polinomio de interpolación basado en los z_i y sus diferencias divididas.

d_4) Utilice la idea desarrollada para interpolar los puntos del inciso a) y verifique gráficamente que se obtiene el mismo polinomio.

Ej. 6: Trace un Spline

Dados $n+1$ puntos en la gráfica de una función $f(x)$, los métodos vistos permiten obtener polinomios interpolantes cuyo grado crece con n. Esto implica que, al aumentar la cantidad de puntos, el polinomio interpolante se vuelve más oscilante, dejando de ser una buena aproximación a f. Para solucionar este problema surge el método de trazadores o *spline*, el cual consiste en la determinación de un polinomio interpolante definido a trozos, cuyo grado podemos elegir independientemente del número de puntos a interpolar. Es decir, se busca

$$P(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ & \vdots \\ S_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

en donde el grado de cada $S_i(x)$ dependerá del tipo de trazador deseado.

a) Conocida la tabla de datos, obtenga el polinomio de Spline cuadrático que interpole dichos puntos. Grafique y verifique las condiciones impuestas. ¿Qué características tiene la matriz del sistema a resolver?

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1	3	5	4.5	3

b) En este inciso volveremos recursivo el cálculo de los polinomios buscados. Si se supone $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$, las incógnitas serán los coeficientes a_i, b_i y c_i.

b_1) Plantee las condiciones que debe cumplir cada polinomio $S_i(x)$. ¿Qué ventaja tiene esta forma de escribir S_i respecto a la utilizada en el inciso a)?

b_2) En base a lo anterior, muestre que se debe cumplir

$$b_{i+1} = -b_i + 2\frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

b_3) Concluya en que los polinomios buscados son de la forma

$$S_i(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i) + \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2, \tag{1}$$

en donde los coeficientes b_i cumplen la relación dada en b_2.

b_4) Realice una función en OCTAVE/MATLAB que, en base a la tabla de puntos a interpolar, devuelva los coeficientes de los polinomios buscados. Proponga una condición de arranque b_0. Implemente la evalución del polinomio y grafíquelo en todo su dominio.

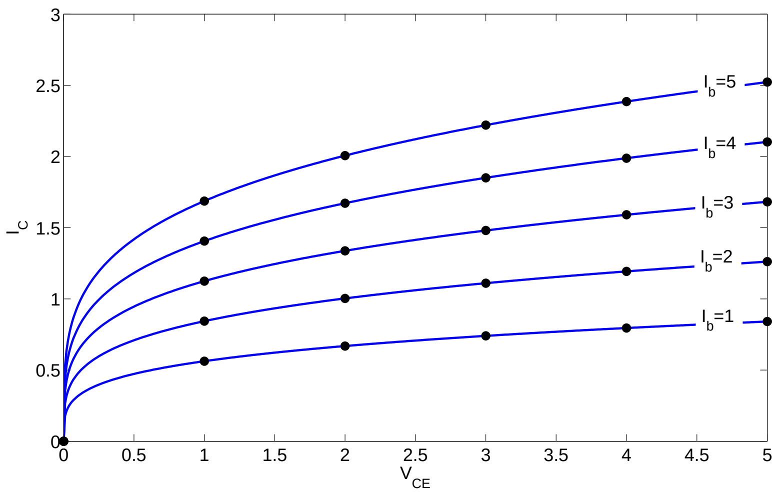
c) Un procedimiento similar se puede serguir para hallar, recursivamente, un trazador cúbico[1]. En OCTAVE/MATLAB la función `spline` permite encontrar un trazador cúbico con condiciones de frontera arbitrarias. Utilícela junto con la función `ppval` para hallar y graficar el trazador cúbico con condiciones de frontera libres de la tabla. Compare con lo hallado por usted en el inciso b_4.

[1]Puede encontrar la demostración en: Burden, R.L. y Faires, J.D. **Análisis Numérico**; Yang, W. Y., Cao W., Chung, T-S., Morris, J. **Applied Numerical Methods Using MATLAB**

Ej. 7: ¿Qué método elegir?

En cada uno de los siguientes incisos proponga el método de interpolación que crea más adecuado para la situación propuesta.

a) Un transistor posee las curvas de corriente de colector (I_c), en función de tensión Colector-Emisor (V_{ce}), para diferentes valores de corriente de base (I_b), como se muestra en la figura. Si se pretende interpolar las diferentes curvas, ¿qué método de interpolación cree más conveniente? ¿Por qué? Desarrolle el método propuesto si se quiere obtener una aproximación de I_c para $V_{ce} = 2.5$ considerando $I_b = 5$.



V_{ce}	1	2	3	4	5
$I_b = 1$	0.5623	0.6687	0.7401	0.7953	0.8409
$I_b = 2$	0.8435	1.0031	1.1101	1.1929	1.2613
$I_b = 3$	1.1247	1.3375	1.4802	1.5905	1.6818
$I_b = 4$	1.4059	1.6719	1.8502	1.9882	2.1022
$I_b = 5$	1.6870	2.0062	2.2202	2.3858	2.5227

b) Se pretende obtener un polinomio que interpole los puntos de la figura mostrada de modo tal que represente de la mejor manera el contorno superior de la misma. ¿Qué método propondría? Justifique adecuadamente. Resuelva eligiendo distintos grados para el polinomio de interpolación y grafíquelo junto con los puntos de la figura. Analice los resultados. *Nota*: Los puntos se encuentran en `puntos_pato.txt`. Utilice las funciones `load` o `importdata` para leer los datos.