Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Práctica 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Ej. 1: Factorización LU

a) Encuentre la factorización $PA = LU$ de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Realice un programa en MATLAB/OCTAVE que resuelva un sistema de ecuaciones lineal $Ax = b$ mediante factorización LU. Dicho programa deberá devolver, como variables de salida, las matrices L, U, P y el vector de solución x.

c) Utilizando el programa desarrollado en el inciso anterior, encuentre la factorización LU y la solución de los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ para las matrices de coeficientes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

y

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Sea la siguiente matriz tri-diagonal A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

i. Modifique el programa desarrollado en el inciso a) para explotar la naturaleza de dicha matriz, reduciendo así el número de operaciones.

ii. Resolver los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \\ 20 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 32 \\ 40 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 48 \\ 60 \\ 39 \\ 39 \end{bmatrix}$$

Ej. 2: Métodos iterativos: Gauss-Seidel y Jacobi.

a) Realice un programa en MATLAB/OCTAVE que permita resolver un sistema de ecuaciones del tipo $Ax = b$ mediante

i. El método iterativo de *Jacobi.*

ii. El método iterativo de *Gauss-Seidel.*

b) Utilice los programas desarrollados en el inciso anterior para resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

cuya solución única esta dada por $x = [1, -1]^T$

c) Considere una barra de metal de $10m$ de longitud que es sometida a una fuente de calor en un extremo por un tiempo determinado. Al cabo de ese tiempo, la fuente de calor cesa y se miden temperaturas de $10°C$ y $200°C$ en ambos extremos. Se desea encontrar la temperatura en los puntos intermedios x_1, x_2, x_3 y x_4 ubicados a $2m$ equidistantes unos de otros. Asumiendo que la temperatura en cada punto es el promedio de las temperaturas medidas en los puntos vecinos,

i. Escriba el sistema de ecuaciones $Ax = b$ que representa el problema en cuestión.

ii. Encuentre las temperaturas en cada punto utilizando los métodos de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* programados en el inciso *a.*

d) Considere el sistema de ecuaciones dado, con solución exacta $x = (1, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

i. Utilizando la aproximación inicial $(x_1, x_2) = (0, 0)$, resuelva el mismo sistema mediante los métodos de *Gauss-Seidel* y *Jacobi.*

ii. ¿Qué puede decir de la convergencia de estos métodos en este caso? ¿Por qué ocurre este fenómeno.

e) Sean los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3{,}8 & 1{,}6 & 0{,}9 \\ -0{,}7 & 5{,}4 & 1{,}6 \\ 1{,}5 & 1{,}1 & 3{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}5 \\ 10{,}3 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

i. Resuelva los sistemas de ecuaciones dados utilizando los métodos de *Gauss-Seidel* y *Jacobi.* ¿Qué puede decir de la convergencia de estos métodos para los sistemas dados?