Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Práctica 4: Ajuste Discreto (Mínimos Cuadrados)

Ej. 1: Entrando en calor

Dada la siguiente tabla de datos, obtenga las funciones de ajuste utilizando el método de mínimos cuadrados, considerando polinomios de grado 1, 2 y 3. Utilizando OCTAVE/MATLAB grafique los datos de la tabla y los polinomios de ajuste.

x	-1	-0.5	2	2.25	4	5
$f(x)$	9.1	6	-3.5	-3.3	-0.9	2.5

¿¿Qué ajuste le parece que representa mejor los datos? ¿Qué parámetro utilizaría como indicador de la calidad del ajuste? ¿Cuál elegiría para manipular algebraicamente? ¿Tendrá sentido seguir aumentando el orden del polinomio de ajuste?

Ej. 2: Simplificando

Se mide la transferencia entre tensión y corriente que ocurre en un circuito eléctrico. El conjunto de medidas se encuentra en el archivo adjunto `tp4ej2.txt`. ¿Cuáles son los datos obtenidos experimentalmente? ¿Cuál es el parámetro del circuito a estimar?

a) Proponga una función de ajuste acorde al comportamiento que observa de los datos.

b) Se pretende simplificar el comportamiento del dispositivo no lineal para lo cual se ajustan los datos mediante un polinomio lineal. ¿Cuál es el valor de resistencia equivalente? Recuerde que la resistencia es un dispositivo pasivo.

c) ¿Puede afirmar que el error al estimar el valor de corriente para una determinada tensión estará por debajo de un cierto valor umbral? ¿Por qué?

Ej. 3: Ajuste conflictivo

Un ingeniero pretende realizar un ajuste de ciertos datos medidos, para lo cual pide ayuda a tres grupos de alumnos de Ingenierá (los datos se encuentran en el archivo adjunto `tp4ej3.txt`). Las propuestas fueron:

i) Realizar un ajuste polinomial, porque es el más sencillo y se ajusta perfectamente a los datos. *Con un polinomio de 1er , 2do o a lo sumo 3er orden deberá bastar*, aseguran.

ii) Sin realizar un análisis muy profundo, proponen un ajuste potencial o exponencial, así representa mejor la suavidad de la curva.

iii) Tras un largo análisis, aseguran que la función que mejor ajusta es de la forma $f(x) = ae^{bx+cx^2}$. *Complicado, pero la mejor*, afirman.

¿Qué grupo está en lo cierto? Obtenga todas las funciones de ajuste, realizando las transformaciones para linealizar el problema en los casos que lo ameriten. Compare gráficamente. Repita el ejercicio variando la cantidad de datos considerados en el ajuste desde 10 hasta el total y calcule en cada caso el error cuadrático medio. Grafique dicho error en función del número de datos.

Ej. 4: La fase de la sinusoide

Un problema típico del procesamiento de señales es determinar los parámetros de una función sinusoidal del tipo $A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, a partir de mediciones contaminadas por ruido y_i tomadas para ciertos instantes t_i, con $i = 0, 1, ..., n$. En nuestro caso consideraremos que conocemos su frecuencia f_0 y que deseamos aproximar su amplitud A y su fase ϕ.

a) Describa de qué manera puede llevar la situación planteada a un problema lineal, de forma tal de realizar un ajuste por mínimos cuadrados que nos permita aproximar los valores de A y ϕ.

b) Escriba la expresión del error cuadrático medio y deduzca las ecuaciones normales.

c) Realice una rutina en MATLAB que reciba como datos de entrada las mediciones y_i, los instantes t_i y el valor de la frecuencia f_0 y devuelva los valores aproximados de los parámetros A y ϕ.

d) Utilizando la rutina del inciso anterior encuentre una aproximación para la amplitud y la fase de la sinusoide de frecuencia $f_0 = 500\ kHz$ ($f_0 = 500\text{x}10^3$) cuyas muestras contaminadas por ruido se encuentran en el archivo adjunto `tp4ej4.txt`.

Ej. 5: Cortitos y al pie

a) Suponga que se cuenta con un conjunto de $m + 1$ datos. Use la función `help` de OCTAVE/MATLAB para entender la forma en que opera la función `polyfit`.

b) Utilice la función `polyfit` con el conjunto de datos del **Ej. 1** para $n = 1, 2, 3$ y compare con lo obtenido previamente. ¿Qué pasa si el grado del polinomio es igual a m? Describa la salida de la función `polyfit` para esos casos.

c) Partiendo de la forma matricial para el problema de ajuste de cuadrados mínimos de $m+1$ datos mediante un polinomio de grado n, muestre analíticamente que este coincide con el polinomio de interpolación del mismo conjunto de datos.

d) Basado en el método de mínimos cuadrados, busque una transformación que linealice el problema y explique cómo realizar un ajuste de datos considerando la función $f(t) = \frac{at}{b+t}$. Para corroborar, genere datos considerando ciertos valores de a y b, y añádale ruido gaussiano con varianza $2{,}5 \times 10^{-3}$ utilizando la función `randn`.

e) Idem al anterior, considerando la función de ajuste $f(t) = 2^{\frac{at}{b+t}}$.

Ej.6: ¿Será verdad?

Indique si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique sus respuestas.

a) Es posible realizar un ajuste lineal a un conjunto de puntos de una función con forma de *Campana Gaussiana.*

b) Si se cuenta con un conjunto de puntos (x_i, y_i) $i = 1, \ldots, n$, la constante (*polinomio de grado cero*) que minimiza el error cuadrático medio viene dada por $c = \overline{y}/(n + 1)$, en donde $\overline{y}$ es el promedio de los valores de ordenada de los datos.

c) El método de mínimos cuadrados no permite contemplar errores en la adquisición de datos de abscisa, sólo de ordenada.