DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Guia 3 - Parte 2

2do cuatrimestre 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos I

Integrante	LU	Correo electrónico
Federico Barberón	112/24	jfedericobarberonj@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - Pabellón I
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://exactas.uba.ar

Índice

1. Guia 3 - Parte 2 **3**
1.1. Ejercicio 1 3
1.2. Ejercicio 2 5
1.3. Ejercicio 11 7

1. Guia 3 - Parte 2

1.1. Ejercicio 1

Consideremos el problema de sumar los elementos de un arreglo y la siguiente implementación en SmallLang, con el invariante del ciclo.

Especificación

`proc sumar` (`in` s: $array\langle\mathbb{Z}\rangle$) : $\mathbb{Z}$
    `requiere` $\{True\}$
    `asegura` $\{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < s.size()) do
    res := res + s[i];
    i := i + 1;
endwhile
```

Invariante del Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$$

a) Escribir la precondición y la postcondición del ciclo.

$P_c \equiv \{i = 0 \wedge res = 0\}$
$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

b) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el primer término del invariante se reemplaza por $0 \leq i < |s|$?

Falla el punto 3 $(I \wedge \neg B) \rightarrow Qc$ pues

$(0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|) \rightarrow Qc \equiv False \rightarrow Qc \equiv True$

Lo cual está mal pues nada asegura que luego de terminar el ciclo $i = |s|$.

c) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el límite superior de la sumatoria $(i - 1)$ se reemplaza por i?

Falla el punto 1 $P_c \rightarrow I$ pues cuando vale P_c, I pide que $res = s[0]$, lo cual se contradice con P_c.

d) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si se invierte el orden de las dos instrucciones del cuerpo del ciclo?

Falla el punto 2 $\{I \wedge B\}$ S $\{I\}$ pues luego de cada iteración $res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$ lo cual se contradice con el invariante. Además en la última iteración res se indefine pues trata de acceder a $s[|s|]$.

e) Mostrar la correción parcial del ciclo, usando los primeros puntos del teorema del invariante.

1) $P_c \rightarrow I \equiv (i = 0 \wedge res = 0) \rightarrow (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \equiv True$
2) $\{I \wedge B\}$ S $\{I\}$
   Para probar que se cumple hay que probar que $(I \wedge B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I)$.

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, I) &\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ s[i];\ i\ :=\ i\ +\ 1}, I) \\
&\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ s[i]}, wp(\mathbf{i\ :=\ i\ +\ 1}, I)) \\
&\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ s[i]}, 0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i} s[j]) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j] \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I \wedge B) \to wp(\mathbf{S}, I) &\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \to (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \\
&\equiv True
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
(I \wedge \neg B) \to Q_c &\equiv ((0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i \geq |s|) \to res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\
&\equiv (i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \to res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\
&\equiv res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \to res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\
&\equiv True
\end{aligned}$$

f) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante.

Propongo la función variante $f_v = |s| - i$. Para probarla tengo que probar lo siguiente:

- $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}\ S\ \{f_v < v_0\} \leftrightarrow (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \to wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, f_v < v_0) &\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ s[i]}, wp(\mathbf{i\ :=\ i\ +\ 1}, |s| - i < v_0)) \\
&\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ s[i]}, |s| - i - 1 < v_0) \\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0
\end{aligned}$$

$(I \wedge B \wedge f_v = v_0) \to wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$
$\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i < |s| \wedge |s| - i = v_0 \to (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0)$
$\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i = v_0 \to (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < |s| - i)$
$\equiv True$

- $$\begin{aligned}
I \wedge f_v \leq 0 \to \neg B &\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i \leq 0 \to i \geq |s| \\
&\equiv i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \to i \geq |s| \\
&\equiv True
\end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado que el ciclo termina en una cantidad finita de iteraciones y que es correcto.

1.2. Ejercicio 2

Dadas la especificación y la implementación del problema sumarParesHastaN

Especificación

`proc sumarParesHastaN` (in n: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$

`requiere` $\{n \geq 0\}$

`asegura` $\{res = \sum_{j=0}^{n-1}$ `IfThenElse`$(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)\}$

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < n) do
    res := res + i;
    i := i + 2;
endwhile
```

Invariante del Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$

a) Escribir la precondición y la poscondición del ciclo.

b) Mostrar la correción parcial del ciclo, usando los primeros puntos el teorema del invariante.

c) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante

a)

$$P_c \equiv \{res = 0 \land i = 0\}$$
$$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{n-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)\}$$

b) Para probar la correctitud parcial del programa tengo que probar los siguientes items:

$P_c \rightarrow I$:

Con $res = 0 \land i = 0$ se tiene que

$$I \equiv 0 \leq 0 \leq n+1 \land 0 \mod 2 = 0 \land 0 = \sum_{j=0}^{-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$
$$\equiv True$$

Por lo tanto $P_c \rightarrow I$ es verdadero.

$\{I \land B\}\ S\ \{I\}$

Para probar esto tengo que ver si $(I \land B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I)$

$$wp(\mathbf{S}, I) \equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ i}, wp(\mathbf{i\ :=\ i\ +\ 2}, I))$$
$$\equiv wp(\mathbf{res\ :=\ res\ +\ i}, 0 \leq i+2 \leq n+1 \land (i+2) \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i+1} \ldots)$$
$$\equiv -2 \leq i \leq n-1 \land i \mod 2 = 0 \land res + i = \sum_{j=0}^{i+1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$
$$\equiv -2 \leq i \leq n-1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-2} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$

Ahora quiero ver si $(I \land B) \to wp(\mathbf{S}, I)$:

$$
\begin{aligned}
I \land B &\equiv (0 \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \land i < n \\
&\equiv 0 \leq i < n \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)
\end{aligned}
$$

y como $(0 \leq i < n) \to (-2 \leq i \leq n-1)$ y
$\sum_{j=0}^{i-2} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$ pues i es par, entonces se cumple la implicación.

$(I \land \neg B) \to Q_c$:
Se tiene que

$$
\begin{aligned}
I \land \neg B &\equiv (0 \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \land i \geq n \\
&\equiv n \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) \\
&\equiv (n \mod 2 = 0 \to res = \sum_{j=0}^{n-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \land \\
&\quad (n \mod 2 \neq 0 \to res = \sum_{j=0}^{n} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \\
&\equiv res = \sum_{j=0}^{n} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)
\end{aligned}
$$

que es exactamente igual a Q_c

De esta manera queda probada la correctitud parcial del programa.

c) Propongo la función variante $f_v = n - i$ y la verifico con el teorema de terminación.
$\{I \land B \land f_v = v_0\}\ S\ \{f_v < v_0\}$
Para probar eso tengo que probar que $(I \land B \land f_v = v_0) \to wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$.

$$
\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, f_v < v_0) &\equiv wp(\mathbf{res := res + i}, wp(\mathbf{i := i + 2}, n - i < v_0)) \\
&\equiv wp(\mathbf{res := res + i}, n - i - 2 < v_0) \\
&\equiv n - i - 2 < v_0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
((0 \leq i < n \land i \mod 2 = 0 \land res = \ldots) \land n - i = v_0) \to n - i - 2 < v_0 &\equiv n - i - 2 < n - i \\
&\equiv -2 < 0 \equiv True
\end{aligned}
$$

Ahora solo queda probar $(I \land f_v \leq 0) \to \neg B$

$$
\begin{aligned}
(I \land f_v \leq 0) \to \neg B &\equiv ((0 \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \ldots) \land n - i \leq 0) \to i \geq n \\
&\equiv (\underline{n \leq i} \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \ldots) \to \underline{i \geq n} \equiv True
\end{aligned}
$$

De esta manera queda demostrado que el programa efectivamente termina y no se cuelga, por lo tanto, la implementación es correcta con respecto a la especificación.

1.3. Ejercicio 11

Dados los siguientes ciclos y sus respectivas precondición (P_c) y poscondición (Q_c).

1. Proponer un invariante (I) y una función variante (f_v) para el ciclo
2. Demostrar los siguientes pasos de la demostración de correctitud del ciclo

   I) $P_c \rightarrow I$

   II) $(I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c$

   III) $(I \wedge f_v \leq 0) \rightarrow \neg B$

a) HACER!

b) HACER!

c) $P_c \equiv \{i = |s| - 1 \wedge res = 0\}$

```
while i >= 0 do
    res := res + s[i] + 1;
    i := i - 1;
endwhile
```

$Q_c \equiv \{res = |s| + \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

Propongo el invariante $I \equiv \{-1 \leq i < |s| \wedge res = |s| - 1 - i + \sum_{j=i+1}^{|s|-1} s[j]\}$ y la función variante $f_v = i + 1$

I) $P_c \rightarrow I$
Cuando vale P_c, es decir, cuando $i = |s| - 1$ y $res = 0$ se tiene que

$$-1 \leq |s| - 1 < |s| \wedge 0 = |s| - 1 - i \sum_{j=|s|}^{|s|-1} s[j] \equiv True$$

Por lo tanto $P_c \rightarrow I$ es $True$.

II) $(I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c$
Se tiene que $\neg B \equiv i < 0$, por lo que el invariante queda de la siguiente manera:

$$i = -1 \wedge res = |s| - 1 - i \sum_{j=i+1}^{|s|-1} s[j] + 1 \equiv res = |s| + \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \equiv Q_c$$

Por lo tanto $(I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c$ es $True$.

III) $(I \wedge f_v \leq 0) \rightarrow \neg B$
Reemplazando se tiene que:

$$((-1 \leq i < \underbrace{|s| \wedge res = |s| - 1 - i + \sum_{j=i+1}^{|s|-1} s[j])}_{\text{No me aporta nada}} \wedge i + 1 \leq 0) \rightarrow i < 0$$
$$\equiv i = -1 \rightarrow i < 0 \equiv True$$

De esta manera quedan demostrado los 3 pasos pedidos de la correctitud del ciclo.