



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Guia 3

2do cuatrimestre 2024

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Integrante	LU	Correo electrónico
Federico Barberón	112/24	jfedericobarberonj@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - Pabellón I

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://exactas.uba.ar>

Índice

1. Guia 3	3
1.1. Ejercicio 1	3
1.2. Ejercicio 2	3
1.3. Ejercicio 3	3
1.4. Ejercicio 4	4
1.5. Ejercicio 5	5
1.6. Ejercicio 7	6

1. Guia 3

1.1. Ejercicio 1

Calcular las siguientes expresiones, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $\text{def}(a + 1) \equiv \text{True}$

d) $\text{def}(A[i] + 1) \equiv 0 \leq i < |A|$

b) $\text{def}(a/b) \equiv b \neq 0$

e) $\text{def}(A[i+2]) \equiv 0 \leq i+2 < |A| \equiv -2 \leq i < |A| - 2$

c) $\text{def}(\sqrt{a/b}) \equiv b \neq 0 \wedge_L a/b \geq 0$

f) $\text{def}(0 \leq i \leq |A| \wedge_L A[i] \geq 0) \equiv i \neq |A|$

1.2. Ejercicio 2

Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1; \mathbf{b} := \mathbf{a}/2, b \geq 0) &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1, wp(\mathbf{b} := \mathbf{a}/2, b \geq 0)) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1, \text{def}(a/2) \wedge_L a/2 \geq 0) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1, a \geq 0) \\ &\equiv \text{def}(a + 1) \wedge_L a + 1 \geq 0 \\ &\equiv \boxed{a \geq -1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1; \mathbf{b} := \mathbf{a} * \mathbf{a}, b \neq 2) &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, wp(\mathbf{b} := \mathbf{a} * \mathbf{a}, b \neq 2)) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, a * a \neq 2) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, |a| \neq \sqrt{2}) \\ &\equiv \text{def}(A[i] + 1) \wedge_L |A[i] + 1| \neq \sqrt{2} \\ &\equiv \boxed{0 \leq i < |A| \wedge_L A[i] \neq -1 \pm \sqrt{2}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1; \mathbf{a} := \mathbf{b} * \mathbf{b}, a \geq 0) &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, wp(\mathbf{a} := \mathbf{b} * \mathbf{b}, a \geq 0)) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, b * b \geq 0) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, |b| \geq 0) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[i] + 1, \text{True}) \\ &\equiv \boxed{0 \leq i < |A|} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} - \mathbf{b}; \mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0) &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, wp(\mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0)) \\ &\equiv wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, a \geq 0 \wedge a + b \geq 0) \\ &\equiv a - b \geq 0 \wedge (a - b) + b \geq 0 \\ &\equiv \boxed{a \geq b \wedge a \geq 0} \end{aligned}$$

1.3. Ejercicio 3

Sea $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq 0)$. Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde i es una variable entera y A es una secuencia de enteros.

a)

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{A}[\mathbf{i}] := \mathbf{0}, Q) &\equiv wp(\mathbf{A} := \text{setAt}(\mathbf{A}, \mathbf{i}, \mathbf{0}), Q) \\
&\equiv 0 \leq i < |A| \wedge_L Q_{\text{setAt}(A, i, 0)}^A \\
&\equiv 0 \leq i < |A| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L \text{setAt}(A, i, 0)[j] \geq 0) \\
&\equiv 0 \leq i < |A| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L (i = j \rightarrow 0 \geq 0) \wedge (i \neq j \rightarrow A[j] \geq 0)) \\
&\equiv \boxed{0 \leq i < |A| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |A| \wedge i \neq j) \rightarrow_L A[j] \geq 0)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{A}[\mathbf{i}+\mathbf{2}] := \mathbf{0}, Q) &\equiv 0 \leq i + 2 < |A| \wedge_L Q_{\text{setAt}(A, i+2, 0)}^Q \\
&\equiv \dots \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L (i + 2 = j \rightarrow 0 \geq 0) \wedge (i + 2 \neq j \rightarrow A[j] \geq 0)) \\
&\equiv \boxed{-2 \leq i < |A| - 2 \rightarrow_L (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |A| \wedge i + 2 \neq j) \rightarrow_L A[j] \geq 0)}
\end{aligned}$$

c) HACER!

d)

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{A}[\mathbf{i}] := \mathbf{2} * \mathbf{A}[\mathbf{i}], Q) &\equiv wp(\mathbf{A} := \text{setAt}(\mathbf{A}, \mathbf{i}, \mathbf{2} * \mathbf{A}[\mathbf{i}]), Q) \\
&\equiv 0 \leq i < |A| \wedge_L Q_{\text{setAt}(A, i, 2*A[i])}^A \\
&\equiv \dots \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L (i = j \rightarrow 2 * A[i] \geq 0) \wedge (i \neq j \rightarrow A[j] \geq 0)) \\
&\equiv \dots \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L (i = j \rightarrow A[j] \geq 0) \wedge (i \neq j \rightarrow A[j] \geq 0)) \\
&\equiv \boxed{0 \leq i < |A| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq 0)}
\end{aligned}$$

e) HACER!

1.4. Ejercicio 4

Para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q

- Escribir la precondición más débil $P = wp(\mathbf{S}, Q)$
- Mostrar formalmente que la P elegida es correcta

a) $S \equiv$

```

1 |      if (a < 0)
2 |          b := a
3 |      else
4 |          b := -a
5 |      endif

```

$$Q \equiv (b = -|a|)$$

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, Q) &\equiv (a < 0 \wedge wp(\mathbf{b} := \mathbf{a}, Q)) \vee (a \geq 0 \wedge wp(\mathbf{b} := -\mathbf{a}, Q)) \\
&\equiv (a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (a \geq 0 \wedge -a = -|a|) \\
&\equiv a < 0 \vee a \geq 0 \\
&\equiv \text{True}
\end{aligned}$$

b) HACER!

c) HACER!

d) $S \equiv$

```

1 |      if (i > 1)
2 |          s[i] := s[i-1]
3 |      else
4 |          s[i] := 0
5 |      endif

```

$$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = s[j-1])$$

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv (i > 1 \wedge wp(\mathbf{s}[i] := \mathbf{s}[i-1], Q)) \vee (i \leq 1 \wedge wp(\mathbf{s}[i] := \mathbf{0}, Q))$$

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{s}[i] := \mathbf{s}[i-1], Q) &\equiv (0 \leq i < |s| \wedge 0 \leq i-1 < |s|) \wedge_L Q_{setAt(s, i, s[i-1])}^s \\ &\equiv 1 \leq i < |s| \wedge_L \\ &(\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L setAt(s, i, s[i-1])[j] = setAt(s, i, s[i-1])[j-1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv 1 \leq i < |s| \wedge_L \\ &(\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L (i = j \rightarrow s[j-1] = s[j-1]) \wedge \\ &(i = j-1 \rightarrow s[j] = s[j-2]) \wedge ((i \neq j \wedge i \neq j-1) \rightarrow s[j] = s[j-1])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv 1 \leq i < |s| \wedge_L \\ &(\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \wedge_L (i = j-1 \rightarrow s[j] = s[j-2]) \wedge \\ &((i \neq j \wedge i \neq j-1) \rightarrow s[j] = s[j-1])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{s}[i] := \mathbf{0}, Q) &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L Q_{setAt(s, i, 0)}^s \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L setAt(s, i, 0)[j] = setAt(s, i, 0)[j-1]) \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L \\ &(i = j \rightarrow 0 = s[j-1]) \wedge (i = j-1 \rightarrow s[j] = 0) \wedge ((i \neq j \wedge i \neq j-1) \rightarrow s[j] = s[j-1])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, Q) &\equiv (1 < i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \wedge_L (i = j-1 \rightarrow s[j] = s[j-2]) \wedge \\ &((i \neq j \wedge i \neq j-1) \rightarrow s[j] = s[j-1])))) \vee \\ &(i \leq 1 \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (1 \leq j < |s| \rightarrow_L (i = j \rightarrow 0 = s[j-1]) \wedge \\ &(i = j-1 \rightarrow s[j] = 0) \wedge ((i \neq j \wedge i \neq j-1) \rightarrow s[j] = s[j-1]))) \end{aligned}$$

e) **HACER!**

f) **HACER!**

1.5. Ejercicio 5

Para las siguientes especificaciones:

- Poner nombre al problema que resuelven
- Escribir un programa S sencillo en SmallLang, sin ciclos, que lo resuelva
- Dar la precondition más débil del programa escrito con respecto a la postcondición de su especificación

a) `proc sumaIesimoElemento (in s: seq<Z>, in i: Z, inout a: Z)`

`requiere` $\{0 \leq i < |s| \wedge_L a = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$

`asegura` $\{a = \sum_{j=0}^i s[j]\}$

```

1 | func sumaIesimoElemento(s <int>, i int, a int) {
2 |     a := a + s[i];
3 |     return a
4 | }

```

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + \mathbf{s}[\mathbf{i}], a = \sum_{j=0}^i s[j]) &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L a + s[i] = \sum_{j=0}^i s[j] \\
&\equiv \boxed{0 \leq i < |s| \wedge_L a = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]}
\end{aligned}$$

b) **HACER!**

c) **HACER!**

1.6. Ejercicio 7

Dado el siguiente condicional determinar la precondition más débil que permite hacer valer la poscondición (Q) propuesta. Se pide:

- Describir en palabras la WP esperada
- Derivarla formalmente a partir de los axiomas de precondition mas débil. Para obtener el puntaje máximo deberá simplificarla lo más posible.

a) $Q \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] > 0)\}$

$S \equiv$

```

1 | if s[i] < 0 then
2 |     s[i] := -s[i]
3 | else
4 |     s[i] := 0
5 | endif

```

Se espera que i este en el rango de s , que $s[i] < 0$ y que todos los elementos en posiciones distintas de i sean mayores a 0.

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (s[i] < 0 \wedge wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] := -\mathbf{s}[\mathbf{i}], Q)) \vee (s[i] \geq 0 \wedge wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] := \mathbf{0}, Q))$$

- $wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] := -\mathbf{s}[\mathbf{i}], Q) \equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L setAt(s, i, -s[i])[j] > 0)$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |s| \wedge j \neq i) \rightarrow_L s[j] > 0) \wedge -s[i] > 0$
- $wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] := \mathbf{0}, Q) \equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L setAt(s, i, 0)[j] > 0)$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |s| \wedge j \neq i) \rightarrow_L s[j] > 0) \wedge 0 > 0$
 $\equiv False$

De esta manera, juntado todo queda:

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, Q) &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (s[i] < 0 \wedge (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |s| \wedge j \neq i) \rightarrow_L s[j] > 0) \wedge -s[i] > 0) \\
&\equiv \boxed{0 \leq i < |s| \wedge_L (s[i] < 0 \wedge (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |s| \wedge j \neq i) \rightarrow_L s[j] > 0))}
\end{aligned}$$

b) **HACER!**

c) **HACER!**

d) $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \text{ mód } 3 = 0)$

$S \equiv$

```

1 | if i mod 3 == 0 then
2 |   s[i] = s[i] + 6;
3 | else
4 |   s[i] = i;
5 | endif

```

Se espera que i este en el rango de s , que i sea divisible por 3 y que todos los elementos de s sean divisibles por 3.

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv (i \text{ mód } 3 = 0 \wedge wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] = \mathbf{s}[\mathbf{i}] + \mathbf{6}, Q)) \vee (i \text{ mód } 3 \neq 0 \wedge wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] = \mathbf{i}, Q))$$

- $wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] = \mathbf{s}[\mathbf{i}] + \mathbf{6}, Q)$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L (i = j \rightarrow (s[j] + 6) \text{ mód } 3 = 0) \wedge (i \neq j \rightarrow s[j] \text{ mód } 3 = 0))$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \text{ mód } 3 = 0)$
- $wp(\mathbf{s}[\mathbf{i}] = \mathbf{i}, Q)$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L (i = j \rightarrow j \text{ mód } 3 = 0) \wedge (i \neq j \rightarrow s[j] \text{ mód } 3 = 0))$
 $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) ((0 \leq j < |s| \wedge i \neq j) \rightarrow_L s[j] \text{ mód } 3 = 0) \wedge i \text{ mód } 3 = 0$

La segunda expresión de la disyunción de la WP es *False* pues queda $(i \text{ mód } 3 \neq 0 \wedge \dots \wedge i \text{ mód } 3 = 0)$ lo cual es una contradicción.

Por lo que la WP queda de la siguiente manera:

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv i \text{ mód } 3 = 0 \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \text{ mód } 3 = 0)$$

Tal y como se esperaba.

e) **HACER!**