DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Guia 1

2do cuatrimestre 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos I

Integrante	LU	Correo electrónico
Federico Barberón	112/24	`jfedericobarberonj@gmail.com`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - Pabellón I

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://exactas.uba.ar

Índice

1. Guia 1

1.1. Ejercicio 1

Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$ true

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$ true

c) $\neg(c \vee y)$ false

d) $\neg(y \vee c)$ false

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$ true

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$ true

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$ true

h) $(\neg c \wedge \neg y)$ false

1.2. Ejercicio 2

Considere la siguiente oración: "Si es mi cumpleaños o hay torta, entonces hay torta".

- Escribir usando lógica proposicional y realizar la tabla de verdad

  $(p \vee q) \to q$

p	q	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \to q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

- Asumiendo que la oración es verdadera y hay una torta, qué se puede concluir?

  Se concluye que puede o no ser su cumpleaños.

- Asumiendo que la oración es verdadera y no hay una torta, qué se puede concluir?

  Se concluye que NO es su cumpleaños.

- Suponiendo que la oración es mentira (es falsa), se puede concluir algo?

  Se concluye que es su cumpleaños pero no hay torta :(

1.3. Ejercicio 3

Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \to (q \wedge r)$

$$\begin{array}{rll|l} (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \leftrightarrow & p \vee (q \wedge r) & \text{Distributiva} \\ & \leftrightarrow & \neg(\neg p) \vee (q \wedge r) & \text{Doble negación} \\ & \leftrightarrow & \neg p \to (q \wedge r) & \text{Definición condicional} \end{array}$$

Las fórmulas son equivalentes.

b)
- $\neg(\neg p) \to (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

$$\begin{array}{rll|l} \neg(\neg p) \to (\neg(\neg p \wedge \neg q)) & \leftrightarrow & \neg(\neg p) \to (p \vee q) & \text{De Morgan} \\ & \leftrightarrow & p \to (p \vee q) & \text{Doble negación} \\ & \leftrightarrow & \neg p \vee (p \vee q) & \text{Definición condicional} \\ & \leftrightarrow & (\neg p \vee p) \vee q & \text{Asociatividad} \\ & \leftrightarrow & True \vee q & \\ & \leftrightarrow & True & \text{Conjunción } \textit{True} \end{array}$$

Las fórmulas no son equivalentes.

c)
- $((True \land p) \land (\neg p \lor False)) \rightarrow \neg(\neg p \land q)$
- $p \land \neg q$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & ((True \land p) \land (\neg p \lor False)) \rightarrow \neg(\neg p \land q) & \\
\leftrightarrow & (p \land \neg p) \rightarrow \neg(\neg p \lor q) & \text{Conjunción } \textit{True} \text{ y disyunción } \textit{False} \\
\leftrightarrow & False \rightarrow \neg(\neg p \lor q) & \text{Contradicción} \\
\leftrightarrow & True &
\end{array}
$$

Las fórmulas no son equivalentes.

d)
- $(p \lor (\neg p \land q))$
- $\neg p \rightarrow q$

$$
\begin{array}{rl|l}
(p \lor (\neg p \land q)) \leftrightarrow & (p \lor \neg p) \land (p \lor q) & \text{Distributiva} \\
\leftrightarrow & True \land (p \lor q) & \\
\leftrightarrow & p \lor q & \\
\leftrightarrow & \neg(\neg p) \lor q & \text{Doble negación} \\
\leftrightarrow & \neg p \rightarrow q & \text{Definición condicional}
\end{array}
$$

Las fórmulas son equivalentes.

e)
- $p \rightarrow (q \land \neg(q \rightarrow r))$
- $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor (q \land \neg r))$

$$
\begin{array}{rl|l}
p \rightarrow (q \land \neg(q \rightarrow r)) \leftrightarrow & \neg(\neg p) \rightarrow (q \land \neg(\neg(\neg q) \rightarrow r)) & \text{Doble negación} \\
\leftrightarrow & \neg p \lor (q \land \neg(\neg q \lor r)) & \text{Definición condicional} \\
\leftrightarrow & \neg p \lor (q \land (q \land \neg r)) & \text{De Morgan} \\
\leftrightarrow & (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor (q \land \neg r)) & \text{Distributiva}
\end{array}
$$

Las fórmulas son equivalentes.

1.4. Ejercicio 4

Determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \lor \neg p)$ Tautología

p	$(p \lor \neg p)$
T	**T**
F	**T**

b) $(p \land \neg p)$ Contradicción

p	$(p \land \neg p)$
T	**F**
F	**F**

c) $((\neg p \lor q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$ Tautología

p	q	$(\neg p \lor q)$	$(p \rightarrow q)$	$((\neg p \lor q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
T	T	T	T	**T**
T	F	F	F	**T**
F	T	T	T	**T**
F	F	T	T	**T**

d) $((p \wedge q) \rightarrow p)$ Tautología

p	q	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
T	T	T	**T**
T	F	F	**T**
F	T	F	**T**
F	F	F	**T**

e) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \wedge (q \vee r))$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Fórmula del enunciado
T	T	T	T	T	T	T	T	**T**
T	T	F	T	T	T	F	T	**T**
T	F	T	T	T	F	T	T	**T**
T	F	F	F	F	F	F	F	**T**
F	T	T	T	F	F	F	F	**T**
F	T	F	T	F	F	F	F	**T**
F	F	T	T	F	F	F	F	**T**
F	F	F	F	F	F	F	F	**T**

f) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ HACER!

1.5. Ejercicio 5

Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) $True, False$

$False$ es más fuerte que $True$.

b) $(p \wedge q), (p \vee q)$

$(p \wedge q)$ es más fuerte que $(p \vee q)$.

c) $p, (p \wedge q)$

$(p \wedge q)$ es más fuerte que p.

d) $p, (p \vee q)$

p es más fuerte que $(p \vee q)$.

e) p, q

No hay relación de fuerza.

f) $p, (p \rightarrow q)$

No hay relación de fuerza.

1.6. Ejercicio 6

Asumiendo que el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

Se indefine siempre.

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

$((c \vee_L (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

$\neg(c \vee_L y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

$(\neg(c \vee_L y) \leftrightarrow (\neg c \wedge_L \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

$((c \vee_L y) \wedge (a \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

$(((c \vee_L y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee_L (y \wedge a) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

$(\neg c \wedge_L \neg y)$

1.7. Ejercicio 7

Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca esán indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

$(p \vee q) \vee_L r$

b) Ninguna es verdadera.

$\neg(p \vee q) \wedge_L \neg r$

c) Exactamente una de las tres es verdadera. HACER!

d) Sólo p y q son verdaderas. HACER!

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas. HACER!

f) r es verdadera. HACER!

1.8. Ejercicio 8

Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En cada caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casso en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

a) $(\forall x : \mathbb{Z})\ (0 \leq x < n \rightarrow x + y = z)$

Ligadas: x al cuantificador $\forall$.

Libres: n, y, z. Posibles valores: $n = 1, y = z = 5$.

b) $(\forall x : \mathbb{Z})\ ((\forall y : \mathbb{Z})\ (0 \leq x < n \wedge 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z)$

Ligadas: x, y a los cuantificadores $\forall$.

Libres: n, m, z. Posibles valores: $n = 1, m = 1, z = 0$.

c) $(\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$

Ligadas: j al cuantificador $\forall$.

En este caso la expresión es siempre falsa.

d) $(\forall j : \mathbb{Z})\ (j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j)$

Ligadas: j al cuantificador $\forall$.

Libres: j.

El valor de verdad depende de $P(j)$.

1.9. Ejercicio 9

Sea $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórumlas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumplen P"*

$(\forall i:\mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

El error está en el operador $\wedge$ ya que el cuantificador universal $(\forall)$ generaliza la conjunción, por lo tanto cuando i está fuera del rango $[0, 10)$ toda la fórmula se convierte en $False$.

Solución: $(\forall i:\mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \rightarrow_L P(i))$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*

$(\exists i:\mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$

El error está en el operador $\rightarrow$ y es lo contrario al item anterior. Como el cuantificador existencial $(\exists)$ generaliza la disyunción, cuando i está fuera del rango $[0, 10)$ la implicación se vuelve $True$ toda la fórmula también.

Solución: $(\exists i:\mathbb{Z})\ ((0 \leq i < 10) \wedge_L P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q"*

$(\forall x:\mathbb{Z})\ ((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$

El error está en que si hay algun natural menor a 10 que no cumple P, entonces toda la fórmula se vuelve $False$.

Solución: $(\forall x:\mathbb{Z})\ ((0 \leq x < 10) \rightarrow_L (P(x) \rightarrow_L Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q"*

$\neg((\exists x:\mathbb{Z})\ (0 \leq x < 10 \wedge P(x)) \wedge \neg((\exists x:\mathbb{Z})\ (0 \leq x < 10 \wedge Q(x))))$

El error está en que el enunciado dice que no existe natural menor a 10 que cumpla P **y** Q, mientras que la fórmula dice que no existe natural menor a 10 que cumpla P **ó** Q.

Solución: $\neg((\exists x:\mathbb{Z})\ (0 \leq x < 10 \wedge_L (P(x) \wedge Q(x))))$

1.10. Ejercicio 10

Sean $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

Sea

pred esMenorQueDiez (x: $\mathbb{Z}$) {
  $0 \leq x < 10$
}
pred esPar (x: $\mathbb{Z}$) {
  $x \bmod 2 = 0$
}

- *"Existe un único número natural menor a 10 que cumple P"*

  $(\exists x:\mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(x) \wedge_L (P(x) \wedge \neg(\exists y:\mathbb{Z})\ ((esMenorQueDiez(y) \wedge (y \neq x)) \wedge_L P(y))))$

- *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*

  $(\exists x:\mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(x) \wedge_L (P(x) \wedge (\exists y:\mathbb{Z})\ ((esMenorQueDiez(y) \wedge y \neq x) \wedge_L P(y))))$

- *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumple P"*

  $(\exists x:\mathbb{Z})\ ($

  $esMenorQueDiez(x) \wedge_L (P(x) \wedge (\exists y:\mathbb{Z})\ ($

  $(esMenorQueDiez(y) \wedge y \neq x) \wedge_L (P(y) \wedge \neg(\exists z:\mathbb{Z})\ ($

  $esMenorQueDiez(y) \wedge (z \neq x \wedge z \neq y) \wedge_L P(z)$

))

))

)

- *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*

  $(\forall x : \mathbb{Z})\ (esPar(x) \to_L (P(x) \to_L \neg Q(x)))$

- *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*

  $(\forall x : \mathbb{Z})\ ((P(x) \wedge \neg esPar(x)) \to_L \neg Q(x))$

- *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*

  $(\forall x : \mathbb{Z})\ (esPar(x) \to_L P(x)) \wedge (\forall x : \mathbb{Z})\ ((\neg esPar(x) \wedge \neg P(x)) \to_L Q(x))$

- *Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q*

  $(\exists x : \mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(x) \wedge_L \neg P(x)) \to_L (\forall x : \mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(x) \to_L \neg Q(x)) \wedge$
  $(\forall x : \mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(x) \wedge_L (Q(x) \wedge (\exists y : \mathbb{Z})\ (esMenorQueDiez(y) \wedge_L (y \neq x \wedge Q(x)))))$