DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Guia 3 - Parte 2

2do cuatrimestre 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos I

Integrante	LU	Correo electrónico
Federico Barberón	112/24	jfedericobarberonj@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - Pabellón I
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://exactas.uba.ar

Índice

1. Guia 3 - Parte 2

1.1. Ejercicio 1

Consideremos el problema de sumar los elementos de un arreglo y la siguiente implementación en SmallLang, con el invariante del ciclo.

Especificación

`proc` `sumar` (`in` s: $array\langle\mathbb{Z}\rangle$) : $\mathbb{Z}$
`requiere` $\{True\}$
`asegura` $\{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < s.size()) do
    res := res + s[i];
    i := i + 1;
endwhile
```

Invariante del Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$$

a) Escribir la precondición y la postcondición del ciclo.

$P_c \equiv \{i = 0 \wedge res = 0\}$
$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

b) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el primer término del invariante se reemplaza por $0 \leq i < |s|$?

Falla el punto 3 $(I \wedge \neg B) \rightarrow Qc$ pues

$(0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|) \rightarrow Qc \equiv False \rightarrow Qc \equiv True$

Lo cual está mal pues nada asegura que luego de terminar el ciclo $i = |s|$.

c) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el límite superior de la sumatoria $(i - 1)$ se reemplaza por i?

Falla el punto 1 $P_c \rightarrow I$ pues cuando vale P_c, I pide que $res = s[0]$, lo cual se contradice con P_c.

d) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si se invierte el orden de las dos instrucciones del cuerpo del ciclo?

Falla el punto 2 $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ pues luego de cada iteración $res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$ lo cual se contradice con el invariante. Además en la última iteración res se indefine pues trata de acceder a $s[|s|]$.

e) Mostrar la correción parcial del ciclo, usando los primeros puntos del teorema del invariante.

1) $P_c \rightarrow I \equiv (i = 0 \wedge res = 0) \rightarrow (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \equiv True$

2) $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$

Para probar que se cumple hay que probar que $(I \wedge B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I)$.

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, I) &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i];\ i := i + 1}, I)\\
&\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, wp(\mathbf{i := i + 1}, I))\\
&\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, 0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i} s[j])\\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j]\\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I \wedge B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I) &\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j])\\
&\equiv True
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
(I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c &\equiv ((0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i \geq |s|) \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\\
&\equiv (i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\\
&\equiv res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\\
&\equiv True
\end{aligned}$$

f) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante.
Propongo la función variante $f_v = |s| - i$. Para probarla tengo que probar lo siguiente:

- $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}\ S\ \{f_v < v_0\} \leftrightarrow (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \rightarrow wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$

$$\begin{aligned}
wp(\mathbf{S}, f_v < v_0) &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, wp(\mathbf{i := i + 1}, |s| - i < v_0))\\
&\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, |s| - i - 1 < v_0)\\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0
\end{aligned}$$

$(I \wedge B \wedge f_v = v_0) \rightarrow wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$
$\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i < |s| \wedge |s| - i = v_0 \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0)$
$\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i = v_0 \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < |s| - i)$
$\equiv True$

-

$$\begin{aligned}
I \wedge f_v \leq 0 \rightarrow \neg B &\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i \leq 0 \rightarrow i \geq |s|\\
&\equiv i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \rightarrow i \geq |s|\\
&\equiv True
\end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado que el ciclo termina en una cantidad finita de iteraciones y que es correcto.