Guia 3 - Parte 2

2do cuatrimestre 2024 | Algoritmos y Estructuras de Datos I

Integrante	LU	Correo electrónico
Federico Barberón	112/24	jfedericobarberonj@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - Pabellón I
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://exactas.uba.ar

Índice

1. Guia 3 - Parte 2

1.1. Ejercicio 1

Consideremos el problema de sumar los elementos de un arreglo y la siguiente implementación en SmallLang, con el invariante del ciclo.

Especificación

`proc` `sumar` (`in` s: $array\langle\mathbb{Z}\rangle$) : $\mathbb{Z}$
`requiere` $\{True\}$
`asegura` $\{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < s.size()) do
    res := res + s[i];
    i := i + 1;
endwhile
```

Invariante del Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$$

a) Escribir la precondición y la postcondición del ciclo.

$P_c \equiv \{i = 0 \wedge res = 0\}$
$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

b) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el primer término del invariante se reemplaza por $0 \leq i < |s|$?

Falla el punto 3 $(I \wedge \neg B) \rightarrow Qc$ pues

$(0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|) \rightarrow Qc \equiv False \rightarrow Qc \equiv True$

Lo cual está mal pues nada asegura que luego de terminar el ciclo $i = |s|$.

c) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el límite superior de la sumatoria $(i-1)$ se reemplaza por i?

Falla el punto 1 $P_c \rightarrow I$ pues cuando vale P_c, I pide que $res = s[0]$, lo cual se contradice con P_c.

d) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si se invierte el orden de las dos instrucciones del cuerpo del ciclo?

Falla el punto 2 $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ pues luego de cada iteración $res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$ lo cual se contradice con el invariante. Además en la última iteración res se indefine pues trata de acceder a $s[|s|]$.

e) Mostrar la correción parcial del ciclo, usando los primeros puntos del teorema del invariante.

1) $P_c \rightarrow I \equiv (i = 0 \wedge res = 0) \rightarrow (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \equiv True$
2) $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$
   Para probar que se cumple hay que probar que $(I \wedge B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I)$.

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, I) &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i];\ i := i + 1}, I) \\ &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, wp(\mathbf{i := i + 1}, I)) \\ &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, 0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i} s[j]) \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j] \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I \wedge B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I) &\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \\ &\equiv True \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} (I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c &\equiv ((0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i \geq |s|) \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\ &\equiv (i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\ &\equiv res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \rightarrow res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \\ &\equiv True \end{aligned}$$

f) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante.
Propongo la función variante $f_v = |s| - i$. Para probarla tengo que probar lo siguiente:

- $\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}\ S\ \{f_v < v_0\} \leftrightarrow (I \wedge B \wedge f_v = v_0) \rightarrow wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, f_v < v_0) &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, wp(\mathbf{i := i + 1}, |s| - i < v_0)) \\ &\equiv wp(\mathbf{res := res + s[i]}, |s| - i - 1 < v_0) \\ &\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0 \end{aligned}$$

$(I \wedge B \wedge f_v = v_0) \rightarrow wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$
$\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge i < |s| \wedge |s| - i = v_0 \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < v_0)$
$\equiv (0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i = v_0 \rightarrow (0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < |s| - i)$
$\equiv True$

-

$$\begin{aligned} I \wedge f_v \leq 0 \rightarrow \neg B &\equiv (0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \wedge |s| - i \leq 0 \rightarrow i \geq |s| \\ &\equiv i = |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \rightarrow i \geq |s| \\ &\equiv True \end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado que el ciclo termina en una cantidad finita de iteraciones y que es correcto.

1.2. Ejercicio 2

Dadas la especificación y la implementación del problema sumarParesHastaN

Especificación

`proc` `sumarParesHastaN` (in n: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$
    `requiere` $\{n \geq 0\}$
    `asegura` $\{res = \sum_{j=0}^{n-1}$
    `IfThenElse`$(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)\}$

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < n) do
    res := res + i;
    i := i + 2;
endwhile
```

Invariante del Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq n+1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$

a) Escribir la precondición y la poscondición del ciclo.

b) Mostrar la correción parcial del ciclo, usando los primeros puntos el teorema del invariante.

c) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante

a)

$$P_c \equiv \{res = 0 \land i = 0\}$$
$$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{n-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)\}$$

b) Para probar la correctitud parcial del programa tengo que probar los siguientes items:

$P_c \rightarrow I$:

Con $res = 0 \land i = 0$ se tiene que

$$I \equiv 0 \leq 0 \leq n+1 \land 0 \mod 2 = 0 \land 0 = \sum_{j=0}^{-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$
$$\equiv True$$

Por lo tanto $P_c \rightarrow I$ es verdadero.

$\{I \land B\}\ S\ \{I\}$

Para probar esto tengo que ver si $(I \land B) \rightarrow wp(\mathbf{S}, I)$

$$wp(\mathbf{S}, I) \equiv wp(\textbf{res := res + i}, wp(\textbf{i := i + 2}, I))$$
$$\equiv wp(\textbf{res := res + i}, 0 \leq i+2 \leq n+1 \land (i+2) \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i+1} \ldots)$$
$$\equiv -2 \leq i \leq n-1 \land i \mod 2 = 0 \land res + i = \sum_{j=0}^{i+1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$
$$\equiv -2 \leq i \leq n-1 \land i \mod 2 = 0 \land res = \sum_{j=0}^{i-2} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$$

Ahora quiero ver si $(I \wedge B) \to wp(\mathbf{S}, I)$:

$$\begin{aligned} I \wedge B &\equiv (0 \le i \le n+1 \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge i < n \\ &\equiv 0 \le i < n \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) \end{aligned}$$

y como $(0 \le i < n) \to (-2 \le i \le n-1)$ y $\sum_{j=0}^{i-2} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)$ pues i es par, entonces se cumple la implicación.

$(I \wedge \neg B) \to Q_c$:
Se tiene que

$$\begin{aligned} I \wedge \neg B &\equiv (0 \le i \le n+1 \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge i \ge n \\ &\equiv n \le i \le n+1 \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) \\ &\equiv (n \mod 2 = 0 \to res = \sum_{j=0}^{n-1} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge \\ &\quad (n \mod 2 \ne 0 \to res = \sum_{j=0}^{n} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0)) \\ &\equiv res = \sum_{j=0}^{n} \texttt{IfThenElse}(j \mod 2 = 0,\ j,\ 0) \end{aligned}$$

que es exactamente igual a Q_c

De esta manera queda probada la correctitud parcial del programa.

c) Propongo la función variante $f_v = n - i$ y la verifico con el teorema de terminación.
$\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\}\ S\ \{f_v < v_0\}$
Para probar eso tengo que probar que $(I \wedge B \wedge f_v = v_0) \to wp(\mathbf{S}, f_v < v_0)$.

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, f_v < v_0) &\equiv wp(\mathbf{res := res + i}, wp(\mathbf{i := i + 2}, n - i < v_0)) \\ &\equiv wp(\mathbf{res := res + i}, n - i - 2 < v_0) \\ &\equiv n - i - 2 < v_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ((0 \le i < n \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \ldots) \wedge n - i = v_0) \to n - i - 2 < v_0 &\equiv n - i - 2 < n - i \\ &\equiv -2 < 0 \equiv True \end{aligned}$$

Ahora solo queda probar $(I \wedge f_v \le 0) \to \neg B$

$$\begin{aligned} (I \wedge f_v \le 0) \to \neg B &\equiv ((0 \le i \le n+1 \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \ldots) \wedge n - i \le 0) \to i \ge n \\ &\equiv (\underline{n \le i} \le n+1 \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \ldots) \to \underline{i \ge n} \equiv True \end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado que el programa efectivamente termina y no se cuelga, por lo tanto, la implementación es correcta con respecto a la especificación.