Fundamentos de la Computación
Ejercicios de árboles

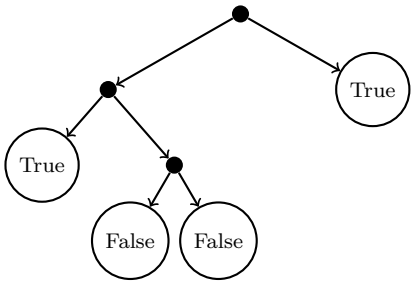
Cátedra de Teoría de la Computación

Noviembre 2017

Ejercicio 1. Considere la siguiente definición del tipo (polimórfico) `AB a` de árboles binarios con información de tipo `a` en las hojas:

```
data AB a where { Hoja ::  a -> AB a ;
                  Nodo ::  AB a -> AB a -> AB a}
```

(a) Codifique el siguiente árbol como una expresión `to` de Haskell y dé su tipo:



Defina las siguientes funciones utilizando recursión sobre el tipo `AB`:

(b) `cantHojas::AB a -> N`, que calcula la cantidad de hojas que tiene un árbol binario.

(c) `cantNodos::AB a -> N`, que calcula la cantidad de nodos internos que tiene un árbol binario.

(d) `hojas::AB a -> [a]`, que devuelve una lista con las hojas de un árbol binario.

(e) `altura::AB a -> N`, que calcula la altura de un árbol binario, es decir la longitud de alguna de sus ramas más largas (puede haber más de una).

(f) `espejo::AB a -> AB a`, que devuelve el árbol espejo de un árbol binario (o sea, otro con los mismos elementos, pero con todos los subárboles transpuestos).

(g) `mapAB::(a->b) -> AB a -> AB b`, que le aplica una función a todas las hojas de un árbol binario.

Ejercicio 2. Demuestre las siguientes propiedades por inducción en `t⇓::AB a`:

(a) `(∀t⇓::AB a) cantHojas t = S(cantNodos t)`.

(b) `(∀t⇓::AB a)(∀f⇓::a ->b) cantNodos (mapAB f t) = cantNodos t`.

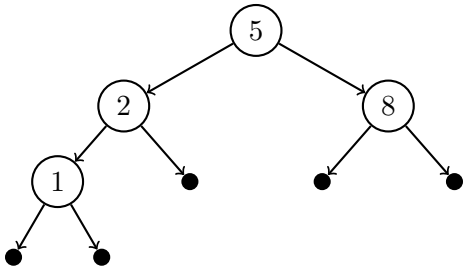
(c) `(∀t⇓::AB a) espejo (espejo t) = t`

(d) `(∀t⇓::AB a) hojas (espejo t) = reverse (hojas t)`

Ejercicio 3. Considere el tipo (polimórfico) `ABB a` de árboles binarios con información de tipo `a` en los nodos:

```
data ABB a where { Vacio ::  ABB a ;
                   Unir ::  ABB a -> a -> ABB a -> ABB a}
```

Codifique el siguiente árbol como una expresión `to` de Haskell y dé su tipo:



Defina las siguientes funciones utilizando recursión sobre ABB:

(a) `inOrder::ABB a -> [a]`, la cual, dado un árbol binario lista sus elementos de izquierda a derecha: para cada nodo, aparecen primero en la lista todos los elementos que están a su izquierda, luego el nodo y después los que están a su derecha (siguiendo el mismo criterio).

(b) `preOrder::ABB a -> [a]`, que lista los nodos internos de un árbol binario del siguiente modo: para cada nodo, primero aparece él mismo, luego la lista de todos los elementos que están a su izquierda y después la de los que están a su derecha (siguiendo el mismo criterio).

(c) `postOrder::ABB a -> [a]`, que lista los nodos internos de un árbol binario siguiente modo: para cada nodo, primero la lista de los elementos que están a su izquiera, luego los elementos que están a su derecha (siguiendo el mismo criterio) y finalmente el mismo nodo.

(d) `cantNodosABB::ABB a -> N`, que calcula la cantidad de nodos internos que tiene un árbol binario.

(e) `pertenece::Eq a => a -> ABB a -> Bool` que verifica si un elemento pertence a un árbol binario.

(f) `espejoABB::ABB a -> ABB a`, que devuelve el árbol espejo de un árbol binario.

Ejercicio 4. Demuestre por inducción las siguientes propiedades sobre árboles de tipo ABB:

(a) (∀ `t⇓::ABB a) postOrder (espejoABB t) = reverse (preOrder t)`

(b) (∀ `t⇓::ABB a) reverse (preOrder (espejoABB t)) = postOrder t`.

(c) Enuncie y demuestre la siguiente propiedad de ABBs: la longitud de la lista obtenida recorriendo un ABB en sentido preorden es igual al número de nodos del mismo.

Ejercicio 5. Los árboles binarios de búsqueda se utilizan para ordenar listas, definiendo un método de ordenamientos llamado *Tree Sort*.
Para ello se define cuando un `ABB` está ordenado: esto es, cuando para cada uno de sus nodos se cumple la siguiente propiedad: *todos los nodos a su izquierda son menores o iguales a él, y todos los que están a su derecha son mayores que él.*
El método de ordenamiento con `ABB` consiste en ir insertando recursivamente uno por uno los elementos de una lista en un `ABB`, de modo tal de mantenerlo ordenado. Luego, se recorre y se listan los elementos del `ABB` en orden interno (`inOrder`), como se vio en el ejercicio 3. La propiedad que se cumple es que si el `ABB` está ordenado, entonces el resultado de este recorrido es una lista ordenada.
Defina las siguientes funciones sobre árboles binarios de búsqueda:

(a) `ordenado::Ord a=> ABB a -> Bool`, que verifica si un árbol binario éste está ordenado, o sea, si cada nodo cumple la siguiente propiedad: todos los elementos que están a su izquierda son menores o iguales que él, y todos los que están a su derecha son mayores o iguales que él.

(b) `insertABB::Ord a=> a -> ABB a -> ABB a` que inserta un elemento en un árbol ordenado, de modo tal que el árbol resultante también queda ordenado.

(c) `list2ABB::Ord a=> [a] -> ABB` a que genere una árbol binario de búsqueda a partir de una lista, insertando los elementos uno por uno.

(d) `treeSort::Ord a=> [a] -> [a]`, que ordena una lista insertando sus elementos en un árbol ordenado y listando sus nodos en `inOrder`.

Ejercicio 6. Para representar expresiones aritméticas simples se utiliza el siguiente tipo de árboles, donde las hojas son números enteros y los nodos internos se corresponden con las operaciones de suma y multiplicación:

```
data Exp where { Num  ::  Int ->Exp;
                 Sum  ::  Exp -> Exp -> Exp;
                 Mul  ::  Exp -> Exp -> Exp }
```

(a) Codifique la expresión $(2 + 3) * (4 * (5 + 1))$ como un elemento de tipo Exp.

(b) Programe una función `eval::Exp -> Int`, que calcula el valor de una expresión. Se podrán usar las operaciones correspondientes sobre enteros.

(c) Programe una función `set::Exp -> Int -> Exp`, que reemplaza todas las hojas de una expresión por un número entero dado, dejando el resto de la expresión sin cambiar.

(d) Demuestre que para toda (∀e⇓::Exp) `eval(set e 0) = 0`

Ejercicio 7. Definimos el siguiente tipo de árboles para representar expresiones booleanas construidas a partir de las constantes lógicas `True` y `False` y la conjunción (∧), disyunción (∨) y negación (¬):

```
data BExp where { T   ::  BExp ;
                  F   ::  BExp ;
                  Y   ::  BExp -> BExp -> BExp;
                  O   ::  BExp -> BExp -> BExp;
                  NO  ::  BExp -> BExp }
```

(a) Codifique la expresión Haskell correspondiente a la expresión `True` ∧ (¬(`True`∨`False`)).

(b) Programe una función `valBool::BExp -> Bool`, que calcula el valor de una expresión booleana. Puede utilizar las correspondientes funciones booleanas de Haskell.

(c) Programe una función `inv::BExp -> BExp`, que recibe una expresión e invierte los valores de las hojas (`T` por `F` y `F` por `T`) y los conectivos binarios (`Y` por `O` y `O` por `Y`).
Ejemplo: `inv (O (Y T F) (NO T)) = Y (O F T) (NO F)`

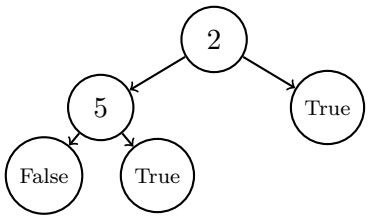
(d) Demuestre que `(∀b⇓::BExp) valBool(inv b) = not (valBool b)`, donde `not::Bool->Bool` es la negación booleana definida como:
`not = \b -> case b of {False- True ; True->False}`.
Puede utilizar los siguientes lemas (igualdades de De Morgan y doble negación):

- `(∀x,y⇓::Bool) not x || not y = not (x&&y)`
- `(∀x,y⇓::Bool) not x && not y = not (x||y)`
- `(∀x⇓::Bool) not(not x) = x`

Ejercicio 8. Considere el siguiente tipo `Tab` de árboles con nodos internos de tipo `a` y hojas de tipo `b`:

```
data Tab where { H  ::  b -> Tab;
                 N  ::  Tab -> a -> Tab -> Tab}
```

(a) Codificar el siguiente árbol como una expresión `e`, y dar su tipo:

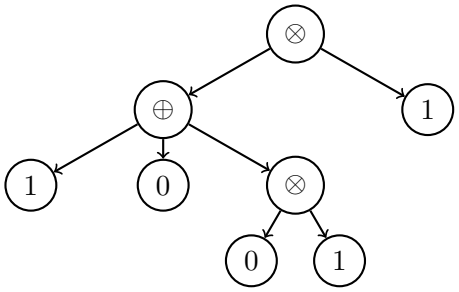


(b) Definir la función `splitT::T a b -> ([a],[b])` que recibe un árbol `t` y devuelve un par de listas conteniendo los nodos internos y las hojas de t respectivamente.

Ejercicio 9. Considere el siguiente tipo de árboles, donde las hojas son bits (`0` y `1`), y los nodos internos son de dos tipos: $\otimes$ y $\oplus$, y pueden tener una cantidad arbitraria de hijos (que se agrupan en una lista):

```
data BT where { 0   ::  BT;
                1   ::  BT;
                ⊗   ::  [BT] -> BT
                ⊕   ::  [BT] -> BT }
```

(a) Codifique el siguiente árbol como una expresión de tipo `BT`:



(b) Programe una función `unos::BT -> Int` que calcule cuantos `1`s tiene un árbol de bits. En el ejemplo el resultado sería 3. Puede utilizar la suma de enteros `(+)`.

(c) Programe una función `valor::BT -> Bool` que calcule el valor de un árbol de bits, teniendo en cuenta que:

- Los nodos `0` tienen valor `False`
- Los nodos `1` tienen valor `True`
- Los nodos $\otimes$ tienen valor `True` sólo si *todos* sus hijos tienen valor `True`
- Los nodos $\oplus$ tienen valor `True` si *alguno* de sus hijos tiene valor `True`

Para el árbol del ejemplo, el resultado de la función `valor` debe dar `True`.
Puede utilizar las funciones `(&&),(||)::Bool->Bool->Bool` y definir las funciones auxiliares que considere necesarias.

Ejercicio 10. Considere la siguiente definición del tipo `LArbol`, de árboles n-arios, esto es, cada nodo interno puede tener una cantidad arbitraria de hijos, que se agrupan en una lista:

```
data LArbol a where { Nodo ::  a -> [LArbol a] -> LArbol a}
```

Defina las siguientes funciones para elementos del tipo `LArbol`.
Recomendamos fuertemente utilizar las funciones ya definidas para listas.

(a) `cantNodosLA::LArbol a -> Int`, que calcula la cantidad de nodos de un LArbol.

(b) `alturaLA::LArbol a -> Int`, que calcula la altura de un LArbol.

(c) `mapLA::(a->b) -> LArbol a -> LArbol b`, que le aplica una función a todos los nodos de un LArbol.

(d) `aridad::LArbol a -> Int`, que calcula la aridad de un LArbol, esto es, el número máximo de hijos que tienen sus nodos.

(e) `larbol2list::LArbol a -> [a]` que devuelve una lista con todos los elementos de un LArbol.

Ejercicio 11. Se define el siguiente tipo de listas con elementos de tipo `a` y `b` indistintamente:

```
data L a b where { V  ::  L a b;
                   NA ::  a -> L a b -> L a b }
                   NB ::  b -> L a b -> L a b }
```

(a) Escriba una expresión `e` de tipo `L` que contenga a los siguientes elementos: `2,True,3,6` (en ese orden), y dé su tipo.

(b) Programe la función `cantNA :: L a b -> N`, que recibe una lista `l` de tipo `L a b` y devuelve la cantidad de elementos de tipo `a` que contiene.
Por ejemplo, para la lista del punto anterior, se cumple: `cantNA e = 3`.

(c) Programe la función `filtrar :: L a b -> (a->Bool) -> (b->Bool) -> L a b` , que recibe una lista `l` y dos predicados `p` y `q` sobre elementos de tipo `a` y `b` respectivamente, y devuelve la lista con los elementos de `l` que cumplen el predicado correspondiente a su tipo.
Por ejemplo, `filtrar e par id` contendrá los elementos 2, `True` y 6 solamente.

(d) Demuestre que `(∀l⇓::L a b,∀p⇓::a->Bool,∀q⇓::b->Bool) cantNA (filtrar l p q) ≤ cantNA l`

Puede utilizar los siguientes resultados sin necesidad de demostrarlos:

L1. `(∀x⇓::N) x ≤ x`

L2. `(∀x⇓::N) x ≤ S x`

L3. `(∀x,y⇓::N) x ≤ y ⇔ S x ≤ S y`

L4. Transitividad de $\leq$.

Ejercicio 12. Considere el siguiente tipo `P a`, de listas con cantidad par de elementos de tipo `a`:

```
data P a where { Nada   ::  P a ;
                 DosMas ::  a -> a -> P a -> P a }
```

(a) Escriba una expresión `l` de tipo `P Int` que represente a una lista que contiene a los números del `0` al `3` (en ese orden).

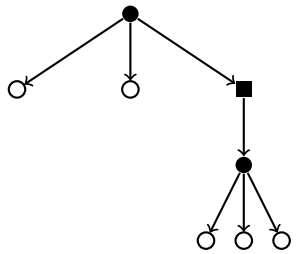
(b) Programar la función `swap::P a -> P a` que recibe una lista de tipo `P a` y devuelve otra donde cada pareja de elementos adyacentes está intercambiado. Por ejemplo, si la lista contiene los elementos `0,1,2` y `3`, la función `swap` deberá devolver otra con los números `1,0,3` y `2`.

(c) Demostrar que `(∀l⇓::P a) (swap (swap l) = l)`

Ejercicio 13. Considere el siguiente tipo `A` de árboles con uno o tres hijos en cada nodo interno:

```
data A where { H  ::  A;
               U  ::  A -> A }
               T  ::  A -> A -> A -> A }
```

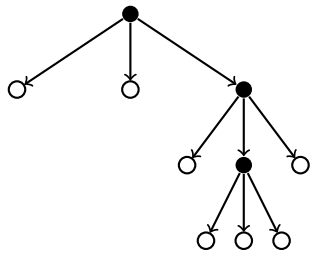
(a) Escriba la expresión Haskell correspondiente al siguiente árbol:



(b) Defina la función `nodos :: A -> N`, que calcula la cantidad total de nodos (internos y hojas) de un árbol de tipo `A`.
Para el árbol del ejemplo, la cantidad de nodos es 8.

(c) Defina la función `unos :: A -> N`, que calcula la cantidad de nodos de un árbol de tipo `A` que tienen un solo hijo.
En el árbol del ejemplo, hay solamente un nodo que cumple esa propiedad (el nodo dibujado con un cuadrado).

(d) Defina la función `trans :: A -> A`, que reemplaza los nodos que tiene un hijo por un nodo con tres hijos, agregando una hoja en cada extremo nuevo.
Para el árbol del ejemplo, el resultado será:



(e) Demuestre que `(∀a⇓::A) nodos (trans a) = nodos a + doble (unos a)`,
donde `doble::N -> N` se define como:
`doble = \x -> case x of { O -> O; S x -> S (S (doble x))}`

Puede utilizar la suma de naturales y los siguientes lemas sin necesidad de demostrarlos:

L1. `(∀x⇓::N) O + x = x`

L2. `(∀x,y⇓::N) S x + y = S(x + y)`

L3. Asociatividad y conmutatividad de `(+)`

L4. `(∀x,y⇓::N) doble (x+y) = doble x + doble y`