Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Modelli Relativistici

La teoria di Yang-Mills

Prof. Lorenzo Fatibene

Federico Chiaffredo

Indice

1 Introduzione **3**

2 Risultati preliminari **3**

2.1 Il Gruppo di Struttura 3

2.2 Connessioni 4

2.3 Curvatura di una Connessione Principale 5

3 Teorie di Yang Mills **6**

4 Quantità Conservate **8**

4.1 Il Teorema di Noether 8

4.2 Simmetrie di una Lagrangiana 9

4.3 Il Teorema di Noether 9

4.4 Leggi di Conservazione 9

5 Il Teorema di Noether per la Lagrangiana di Yang-Mills **10**

1 Introduzione

Con questo seminario vogliamo introdurre una teoria della fisica moderna che deve il nome Chen Ning Yang e Robert Mills, ideata nel 1954. Si tratta di una teoria di Gauge basata su un gruppo di struttura che ha un algebra di Lie semisemplice (ovvero in cui non ci sono ideali abeliani a meno di quelli banali).
L'obiettivo sarà quindi quello di scrivere una Lagrangiana per questa teoria ed accoppiarla con la relatività, in modo da descrivere l'interazione fra il campo di Yang-Mills ed il campo gravitazionale.
Infine cercheremo di ricavare le quantità conservate associate alla Lagrangiana che abbiamo costruito utilizzando il teorema di Noether.

2 Risultati preliminari

Diamo adesso alcune definizioni e richiami che torneranno utili in seguito per l'enunciazione della teoria.

2.1 Il Gruppo di Struttura

Definizione 1 ***Gruppo di Lie*** *Sia G un gruppo munito di una struttura di varietà differenziabile in cui le operazioni di prodotto e di inverso sono C^∞. Chiameremo un gruppo siffatto Gruppo di Lie.*

Su un gruppo di Lie possiamo definire due omomorfismi, che sono la traslazione a sinistra e a destra, rispettivamente:

$$\begin{aligned} L_g : G \to G \qquad & R_g : G \to G \\ k \mapsto g \cdot k \qquad & k \mapsto k \cdot g \end{aligned} \tag{1}$$

Tramite queste mappe è possibile definire delle coordinate nell'intorno di ogni punto $g \in G$ data una carta (U, ϕ) nell'intorno dell'identità; infatti dato $g \in G$ e U intorno dell'identità abbiamo $V = L_g(U)$ intorno di g e $\psi = \phi \circ L_{g^{-1}} : V \to \mathbb{R}^n$ carta locale.
Vogliamo anche ricavare le mappe tangenti delle traslazioni che saranno utili in seguito.
Definiamo un prodotto (C^∞) nel gruppo come:

$$\begin{aligned} \pi : G \times G \to G \\ (g, k) \mapsto \pi(g, k) \end{aligned} \tag{2}$$

Denotiamo le derivate del prodotto come: $\frac{\partial \pi(g,k)}{\partial g^a} =^1 \partial_a \pi(g, k)$ e $\frac{\partial \pi(g,k)}{\partial k^a} =^2 \partial_a \pi(g, k)$.
Ricaviamo quindi le mappe tangenti:

$$\begin{aligned} T_k L_g : T_k G \to T_{g \cdot k} G \qquad & T_k R_g : T_k G \to T_{k \cdot g} G \\ v^a \partial_a \mapsto v^{b^2} \partial_b \pi^a(g, k) \partial_a \qquad & v^a \partial_a \mapsto v^{b^1} \partial_b \pi^a(k, g) \partial_a \end{aligned} \tag{3}$$

Se adesso consideriamo un campo vettoriale su G , possiamo chiederci quando $(L_g)_* X = X \quad ; \forall g \in G$. Quando vale questa condizione diremo che il campo è invariante a sinistra (un discorso analogo vale per i campi invarianti a destra). Indicheremo l'insieme di tutti i campi invarianti a sinistra con Υ_L. Dal momento che il commutatore è un operatore naturale commuta con il push-foreward, quindi:

$$(L_g)_* [X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y] \tag{4}$$

Ovvero il commutatore di campi invarianti a sinistra è a sua volta invariante a sinistra.
Sappiamo anche che se consideriamo un'azione a sinistra (destra) sul gruppo possiamo definire i campi vettoriali invarianti a sinistra (destra) sull'algebra di Lie in questo modo: $l_g(v) = T_e L_g(v)$ con $v \in T_e G$ e con T_e rappresentiamo la mappa tangente all'identità del gruppo.
Se adesso consideriamo una base $T_A \in T_e G$, i corrispondenti campi invarianti saranno $l_A = l(T_A)$; essendo l un isomorfismo manda basi in basi, quindi qualsiasi campo invariante a sinistra può essere scritto come combinazione a coefficienti reali (costanti) di l_A; in particolare il commutatore di due campi invarianti a sinistra è ancora invariante a sinistra, e quindi possiamo scriverlo su questa base:

$$[l_A, l_B] = c^K_{AB} l_K \tag{5}$$

Le C^K_{AB} sono le costanti di struttura dell'algebra e dipendono dalle base T_A scelta.
Possiamo infine considerare sull'algebra una forma bilineare particolare: la forma di Cartan-Killing, ovvero:

$$\begin{aligned} &K : g \times g \to \mathbb{R} \\ &(\alpha, \beta) \mapsto K(\alpha, \beta) = \alpha^E c^B_{EA} \beta^F c^A_{FB} = K_{EF} \alpha^E \beta^F \end{aligned} \tag{6}$$

Nelle algebre di Lie semisemplici questa forma è non degenere e rappresenta quindi un prodotto scalare sul gruppo. In questa situazione possiamo anche restringerci ad avere basi ortonormali, ovvero $K_{EF} = \delta_{EF}$. Queste considerazioni sono uno dei motivi per cui si sceglie un gruppo con un algebra di Lie semisemplice quando si vuole trattare la Teoria di Yang-Mills, infatti, nella densità lagrangiana la forma di Cartan-Killing contrarrà la curvatura.

2.2 Connessioni

Sappiamo già definire le connessioni su varietà, ma in questo contesto vogliamo generalizzare la nozione di connessione ai fibrati principali.

Definizione 2 ***Connessione*** *Una connnessione su un fibrato (B, M, π, F) è una distribuzione $H_P \subset T_p B$ di dimensione $m = dim(M)$, tale che $H_p \oplus V_p(\pi) = T_p B$.*

Definizione 3 ***Connessione Principale*** *Dato $P = (P, M, \pi, G)$ un fibrato principale, una connessione su P che preserva l'azione a destra, i.e.*

$$T_p R_g(H_p) = H_{p \cdot g} \tag{7}$$

è detta connessione principale.

Tramite le connessioni possiamo spezzare un vettore in $s \in T_p P$ in modo unico (come conseguenza della somma diretta) come somma di una parte verticale ed una orizzontale, entrambe dipendenti dalla connessione i.e. $s = h(w) + v(w)$.
Inoltre, dato $\xi \in T_x M$ e $a \in \pi^{-1}(x) \subset P$ esiste un unico vettore $\Xi \in T_a P$ tale che $T_a \pi(\Xi) = \xi$ e $\Xi \in H_a$; chiameremo Ξ il sollevamento orizzontale di ξ.Notiamo che conoscere il sollevamento orizzontale $\omega_a : T_x M \to T_a P$ in ogni punto per ogni vettore equivale a conoscere la connessione H (infatti possiamo definire $H_a = \omega_a(T_x M)$).
Una connessione può essere scritta localmente in questo modo (con la convenzione che gli indici greci sono per le coordinate sulla base e quelli latini per le coordinate in fibra):

$$\omega = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^i_\mu(a) \partial_i) \tag{8}$$

Vogliamo ora ricavare la forma più generale di una connessione principale, per farlo dobbiamo definire i campi invarianti per l'azione a destra del gruppo su P come $\rho_A = T^b_A R^c_b \partial_c$, successivamente ricaviamo che la forma della connessione sarà:

$$\omega = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^b_\mu T^A_b \rho_A) = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^A_\mu(x)\rho_A) \tag{9}$$

Tramite le connessioni possiamo definire le derivate covarianti in questo modo: Data una connessione in un fibrato abbiamo due modi per sollevare un vettore: o con la connessione ($\omega_b(\xi) \in T_bP$) oppure con il sollevamento di una sezione ($T_x\sigma : T_xM \to T_{\sigma(x)}P$ scegliendo $b = \sigma(x)$). Abbiamo quindi:

Definizione 4 ***Derivata Covariante*** *Definiamo derivata covariante della sezione σ come:* $\nabla_\xi \sigma = T\sigma(\xi) - \omega(\xi)$

Si verifica che il vettore $T\sigma(\xi) - \omega(\xi) \in T_{\sigma(x)}P$ è verticale; quindi $\nabla_\xi\sigma$ definisce un campo di vettori verticali sull'immagine di σ, che può essere visto come una sezione del fibrato $\pi : V(P) \to M$.
In questo modo abbiamo definito un oggetto molto generale che può essere calcolato su qualunque oggetto che possa essere visto come una sezione su un fibrato dove è definita una connessione.
Nel caso particolare dei campi di vettori ritroviamo la definizione usuale di derivata covariante:

$$\nabla_\xi X = \xi^\mu(\partial_\mu X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta)\dot{\partial}_\alpha \tag{10}$$

2.3 Curvatura di una Connessione Principale

Sapendo che le usuali derivate commutano fra loro ci si potrebbe chiedere se anche le derivate covarianti commutino, la risposta è: in generale no.
Sappiamo che nel caso di varietà differenziabili, la non commutatività delle derivate covarianti è misurata essenzialmente dal tensore di curvatura, cosa possiamo dire per i fibrati principali?
Fissiamo innanzitutto una connessione principale $dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^A_\mu(x)\rho_A)$ su un fibrato principale P. Costruiamo un fibrato associato della forma $P \times_{ad} g$ usando la rappresentazione aggiunta $G \times g \to g$; le sezioni di questo fibrato sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni del fibrato (VP, M, α, g) (ovvero con i campi verticali $\Xi = \xi^\alpha\rho_\alpha$ su P).
Si può ricavare che la connessione indotta è:

$$\omega = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^D_\mu c^A_{DB}\xi^B\partial_A) \tag{11}$$

Da cui ricaviamo la derivata covariante:

$$\nabla_\mu \xi^A = d_\mu\xi^A + c^A_{BD}\omega^B_\mu\xi^D \tag{12}$$

Calcolando il commutatore ricaviamo:

$$\begin{aligned}
&[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\xi^A = \left(d_{\nu\mu}\xi^A + c^A_{BC}d_\mu\omega^B_\nu\xi^C + c^A_{BC}\omega^B_\nu d_\mu\xi^C + c^A_{BC}\omega^B_\mu\left(d_\nu\xi^C + c^C_{ED}\omega^E_\nu\xi^D\right)\right) - [\mu\nu] = \\
&= c^A_{BC}\left(d_\mu\omega^B_\nu - d_\nu\omega^B_\mu + 2c^B_{DE}\omega^D_\mu\omega^E_\nu\right)\xi^C + \left(c^A_{DE}c^D_{CB} + c^A_{DB}c^D_{EC}\right)\omega^B_\mu\omega^E_\nu\xi^C = \\
&= c^A_{BC}\left(d_\mu\omega^B_\nu - d_\nu\omega^B_\mu + 2c^B_{DE}\omega^D_\mu\omega^E_\nu\right)\xi^C - c^A_{BC}\left(c^B_{DE}\omega^D_\mu\omega^E_\nu\right)\xi^C = \\
&= c^A_{BC}\left(d_\mu\omega^B_\nu - d_\nu\omega^B_\mu + c^B_{DE}\omega^D_\mu\omega^E_\nu\right)\xi^C =: c^A_{BC}F^B_{\mu\nu}\xi^C
\end{aligned} \tag{13}$$

Dove abbiamo definito $F^B_{\mu\nu} = d_\mu\omega^B_\nu - d_\nu\omega^B_\mu + c^B_{DE}\omega^D_\mu\omega^E_\nu$.
L'oggetto che abbiamo definito trasforma bene, ovvero: $F'^B_{\mu\nu} = Ad^A_B(\phi)F^B_{\rho\sigma}\bar{J}^\rho_\mu\bar{J}^\sigma_\nu$. Possiamo

quindi definire la curvatura della connessione cone la 2-forma gauge invariante a valori nell'algebra di Lie come:

$$F = \frac{1}{2} F^A_{\mu\nu} \rho_A \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{14}$$

Notiamo che in generale le componenti della curvatura non sono invarianti di Gauge, e quindi non rappresentano osservabili fisiche (questo accade nelle teorie di Yang Mills).Tuttavia in casi particolari possono diventarlo: se prendiamo un gruppo di Gauge commutativo (ad esempio $U(1)$) allora l'azione aggiunta diventa banale e le componenti della curvatura diventano osservabili (che è quello che accade nel caso dell'elettromagnetismo)

3 Teorie di Yang Mills

Per scrivere una teoria di Yang-Mills fissiamo un gruppo di Lie semisemplice, G e cerchiamo di scrivere una teoria Gauge-naturale per connessioni su un fibrato di struttura $P = (P, M, \pi, G)$; consideriamo un'azione:

$$\begin{aligned} \lambda : W^{(1,1)}G \times (g \otimes \mathbb{R}^n) \to g \otimes \mathbb{R}^n \\ (g^i, g^i_a, \omega^B_a, J^b_a) \mapsto \omega'^A_a = Ad^A_B(g)(\omega^B_b + \bar{R}^B_i(g) g^i_b) \bar{J}^b_a \end{aligned} \tag{15}$$

Si verifica che λ è un'azione a sinistra e che quindi possiamo definire un fibrato associato:

$$Con(P) = (P \times L(M)) \times_\lambda (g \otimes \mathbb{R}^n) \tag{16}$$

Su cui abbiamo coordinate (x^μ, ω^A_μ) e per costruzione le ω^A_μ trasformano come una connessione principale su P, quindi abbiamo una corrispondenza $1:1$ fra le sezioni globali di $Con(P)$ e le connessioni sul fibrato di struttura; quindi:

$$\omega = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \omega^A_\mu(x) \rho_A) \tag{17}$$

Con ρ_A una base (punto per punto) invariante a destra per i vettori verticali su P.
Calcoliamo la curvatura di questa connessione:

$$F = \frac{1}{2} F^A_{\mu\nu} T_A \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{18}$$

Dove abbiamo posto $F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^A_\nu - \partial_\nu \omega^A_\mu + c^A_{BD} \omega^B_\mu \omega^D_\nu$.
Le componenti trasformano come:

$$F'^B_{\mu\nu} = Ad^A_B(\phi) F^B_{\rho\sigma} \bar{J}^\rho_\mu \bar{J}^\sigma_\nu \tag{19}$$

E da questo segue che le componenti della curvatura (che chiameremo anche forze di campo) non sono direttamente osservabili: infatti dipendono dalla trasformazione di Gauge.
Questo non esclude che alcune loro combinazioni possano non dipendere dalla trasformazione di Gauge: è il caso degli invarianti polinomiali, come ad esempio la traccia di potenze delle forze di campo (Di particolare interesse è l'invariante $I = \delta_{AB} F^A_{\mu\nu} F^B_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$).
In genere vogliamo scrivere una Lagrangiana che dipenda dal campo ω^A_μ e dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$; quindi ci serve un fibrato delle configurazioni con queste due coordinate, definiamo:

$$C = Lor(M) \times_M Con(P) \tag{20}$$

Su cui abbiamo coordinate fibrate $(x^\mu, g_{\mu\nu}, \omega^A_\mu)$.
Per scrivere una Lagrangiana possiamo ricordare il caso dell'elettromagnetismo (di cui questa

teoria vuole essere una generalizzazione) e notando che la quantità I che abbiamo menzionato poco fa è un invariante, possiamo scrivere:

$$L_{YM} = -\frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A d\sigma \tag{21}$$

Dove abbiamo scritto $F^{\mu\nu}_A = F^B_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta_{AB}$ e introdotto una costane di accoppiamento $a = \frac{c}{\epsilon_0}$. Per poter fare una teoria più generale accoppiamo questa Lagrangiana con quella gravitazionale (ad esempio quella di Hilbert senza costante cosmologica) per descrivere l'interazione fra il campo di Yang-Mills e quello gravitazionale.

$$L = \left(\frac{\sqrt{g}}{2k} R - \frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A \right) d\sigma \tag{22}$$

Vogliamo ora verificare l'identità di covarianza per questa Lagrangiana e vedere che effettivamente è invariante per trasformazioni di Gauge: dobbiamo innanzitutto calcolare le derivate di Lie:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\Xi g^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} = -(\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) \\ &\mathcal{L}_\Xi \omega^A_\mu = \xi^\lambda F^A_{\lambda\mu} - \nabla_\mu \xi^A_{(V)} \end{aligned} \tag{23}$$

Dove le derivate covarianti sono indotte da ω^A_μ su P e da $\{g\}^\alpha_{\mu\nu}$ su M; ed inoltre $\xi^A_{(V)} = \xi^A + \omega^A_\lambda \xi^\lambda$ (parte verticale rispetto alla connessione di Gauge).
Usando l'identità di Bianchi ricaviamo:

$$\begin{aligned} &0 = F^{\mu\nu}_A \nabla_{[\mu} F^A_{\lambda\nu]} = F^{\mu\nu}_A (\nabla_\mu F^A_{\lambda\nu} + \nabla_\lambda F^A_{\nu\mu} + \nabla_\nu F^A_{\mu\lambda}) = F^{\mu\nu}_A (2\nabla_\mu F^A_{\lambda\nu} + \nabla_\lambda F^A_{\nu\mu}) \\ &\Rightarrow 2F^{\mu\nu}_A \nabla_\mu F^A_{\lambda\nu} = F^{\mu\nu}_A \nabla_\lambda F^A_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{24}$$

Adesso possiamo scrivere l'identità di covarianza:

$$\begin{aligned} &-\frac{\sqrt{g}}{a}(F^A_{\mu\alpha} F_{A\nu *}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} F^A_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}_A g_{\mu\nu}) \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} - \frac{\sqrt{g}}{a} F^{\mu\nu}_A \nabla_\mu \mathcal{L}_\Xi \omega^A_\nu = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{a}(F^A_{\mu\alpha} F_{A\nu *}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} F^A_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}_A g_{\mu\nu}) \nabla^\mu \xi^\nu - \frac{\sqrt{g}}{a} F^{\mu\nu}_A \nabla_\mu (\xi^\lambda F^A_{\lambda_\nu} - \nabla_\nu \xi^A_{(V)}) = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{a} F^A_{\mu\alpha} F_{A\nu *}{}^{\alpha} \nabla^\mu \xi^\nu - \frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}_A g_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu - \frac{\sqrt{g}}{a} F^{\mu\nu}_A (\nabla_\mu \xi^\lambda F^A_{\lambda_\nu} + \xi^\lambda \nabla_\mu F^A_{\lambda\nu}) + \frac{\sqrt{g}}{2a} F^{\mu\nu}_A [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \xi^A_{(V)} = \\ &= \frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}_A \nabla_\nu \xi^\nu - \frac{\sqrt{g}}{a} F^{\mu\nu}_A \nabla_\mu F^A_{\lambda\nu} \xi^\lambda + \frac{\sqrt{g}}{4a} F^{\mu\nu}_A c^A_{BD} F^B_{\mu\nu} \xi^C_{(V)} = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}_A \nabla_\nu \xi^\nu - \frac{\sqrt{g}}{2a} F^{\alpha\beta}_A \nabla_\mu F^A_{\alpha\beta} \xi^\mu = d_\mu(\xi^\mu L_{YM}) \end{aligned} \tag{25}$$

Questo implica che la Lagrangiana che abbiamo scritto è Gauge-naturale, e che quindi la teoria che vogliamo fare è una teoria Gauge-naturale, supponendo tutti i campi dinamici.
Scriviamo adesso la variazione della Lagrangiana di Yang Mills accoppiata a quella di Hilbert:

$$\begin{aligned} \delta L = \Bigg[&\frac{\sqrt{g}}{2k} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(\frac{\sqrt{g}}{2k} g^{\mu\nu} \delta l^\lambda_{\mu\nu} \right) - \frac{\sqrt{g}}{2} T^{(YM)}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \\ &- \nabla_\mu \left(\frac{\sqrt{g}}{2a} F^{\mu\nu}_A \delta \omega^A_\nu \right) + \nabla_\mu \left(\frac{\sqrt{g}}{2a} F^{\mu\nu}_A \right) \delta \omega^A_\nu \Bigg] d\sigma \end{aligned} \tag{26}$$

Dove abbiamo posto $l^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{(\mu}\Gamma^{\eta}_{\ \nu)\eta}$.
Le equazioni di campo risultano quindi essere:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT^{(YM)}_{\mu\nu} \\ \nabla_{\mu}F^{\mu\nu}_{A} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

4 Quantità Conservate

Per parlare di quantità conservate della di una Lagrangiana è necessario introdurre il teorema di Noether per le teorie di campo.

4.1 Il Teorema di Noether

Sia L una Lagrangiana per una teoria di campo e sia Ξ un flusso ad un parametro di simmetrie per la Lagrangiana.
Quando si calcolano le variazioni dell'azione ci si trova di fronte a due forme importanti di cui qui daremo solamente la forma per non appesantire la trattazione(i conti completi risultano parecchio lunghi) e che torneranno utili per il teorema che vogliamo enunciare:
Data una Lagrangiana possiamo associarci un'azione $A[\eta] = \int_D (j^k\eta)^* L d\sigma$, introducendo le deformazioni come campi vettoriali sul fibrato delle configurazioni possiamo ricavare la variazione dell'azione, ed imponendo la condizione di sezione critica ricaviamo le equazioni di Eulero Lagrange.
In particolare possiamo introdurre i momenti $p_i = \frac{\partial L}{\partial y^i}$, $p^{\mu}_i = \frac{\partial L}{\partial y^i_{\mu}}$ e $p^{\mu\nu}_i = \frac{\partial L}{\partial y^i_{\mu\nu}}$
Dove le y^i rappresentano le coordinate sul fibrato e le y^i_{μ} le derivate delle y^i rispetto alle coordinate x^{μ} sulla base. Inoltre abbiamo anche i momenti formali $f^{\mu}_i = p^{\mu}_i - d_{\nu}p^{\mu\nu}_i$ e $f^{\mu\nu}_i = p^{\mu\nu}_i$.
Quando scriviamo la variazione della Lagrangiana ricaviamo questo oggetto,che chiediamo essere nullo:

$$\mathbb{E}_i(L) = p_i - d_{\mu}p^{\mu}_i + d_{\mu\nu}p^{\mu\nu}_i \tag{28}$$

La condizione $\mathbb{E}_i(L) = 0$ sono proprio le equazioni di campo.
Successivamente si può definire la forma:

$$\mathbb{E}(L) = \mathbb{E}_i(L)\omega^i \wedge d\sigma \tag{29}$$

Dove $\omega^i = dy^i - y^i_{\mu}dx^{\mu}$ è la forma di contatto sul getto di ordine 1.
Possiamo anche definire:

$$\mathbb{F}(L) = f^{\mu}_i \omega^i \wedge d\sigma_{\mu} + f^{\mu\nu}_i \omega^i_{\nu} \wedge d\sigma_{\mu} \tag{30}$$

E qui abbiamo indicato $\omega^i_{\mu} = dy^i_{\mu} - y^i_{\mu\nu}dx^{\nu}$ la forma di contatto all'ordine 2.
Da queste due espressioni possiamo ricavare la formula della variazione prima:

$$(j^kX) \rfloor dL = X \rfloor \mathbb{E}(L) + d((j^{k-1}X) \rfloor \mathbb{F}(L)) \tag{31}$$

La forma $\mathbb{E}$ è chiamata parte di Eulero-Lagrange di L, mentre una forma $\mathbb{F}$ per cui valga l'uguaglianda di sopra è detta parte di Poincaré-Cartan di L.

4.2 Simmetrie di una Lagrangiana

Un altro ingrediente fondamentale per introdurre il teorema di Noether sono le simmetrie di una Lagrangiana:
Sia L una lagrangiana di ordine k; (i.e. $L = L(j^k\eta)d\sigma$) su un fibrato delle configurazione C. Un isomorfismo $\Phi : C \to C$ è una simmetria per la Lagrangiana se il suo sollevamento $j^k\Phi$ lascia la Lagrangiana invariata: $(j^k\Phi)^*L = L$.
Le simmetrie infinitesime per una Lagrangiana possono essere rappresentate con un campo vettoriale Ξ che genera un flusso Φ_s di trasformazioni ad un parametro sul fibrato delle configurazioni.Dal punto di vista dei campi vettoriali abbiamo:

$$(j^k\Phi)^*L = L \Leftrightarrow \mathcal{L}_{j^k\Xi}L = 0 \tag{32}$$

Dal momento che le simmetrie di L sono trasformazioni fibrate il campo Ξ associato è proiettabile; poniamo $\xi = \pi_*\Xi$ il campo sulla base. In questo modo abbiamo l'identità di covarianza:

$$(j^k\mathcal{L}_\Xi) \rfloor dL = d(\xi \rfloor L) \tag{33}$$

4.3 Il Teorema di Noether

Consideriamo una Lagrangiana per una teoria di campo ed un flusso ad un parametro di simmetrie con generatore Ξ. Abbiamo che vale l'identità di covarianza, e dal momento che $\mathcal{L}_\Xi$ è verticale anche la formula di variazione prima è verificata. Possiamo riscriverla come:

$$\begin{aligned}(j^k\mathcal{L}_\Xi) \rfloor dL = \mathcal{L}_\Xi \rfloor \mathbb{E}(L) + d((j^{k-1}\mathcal{L}_\Xi) \rfloor \mathbb{F}(L)) = d(\xi \rfloor L) \Rightarrow \\ \Rightarrow d((j^{k-1}\mathcal{L}_\Xi) \rfloor \mathbb{F}(L) - \xi \rfloor L) = -\mathcal{L}_\Xi \rfloor \mathbb{E}(L)\end{aligned} \tag{34}$$

Adesso poniamo $W = (L, \Xi) = -\mathcal{L}_\Xi \rfloor \mathbb{E}(L)$ e la denotiamo come corrente di lavoro.
Inoltre abbiamo $\varepsilon(L, \Xi) = (j^{k-1}\mathcal{L}_\Xi) \rfloor \mathbb{F}(L) - \xi \rfloor L$ che è la corrente di Noether.
Notiamo che $\varepsilon(L, \Xi)$ è una $m - 1$ forma orizzontale globale su $j^{2k-1}C$; mentre $W(L, \Xi)$ è una m forma orizzontale globale su $j^{2k}C$.
Per qualsiasi configurazione σ possiamo considerare il pull-back e otteniamo:

$$d((j^{2k-1}\sigma)^*\varepsilon(L, \Xi)) = (j^{2k}\sigma)^*W(L, \Xi) \tag{35}$$

Quando σ è una soluzione delle equazioni di campo abbiamo che $(j^{2k}\sigma)^*W(L, \Xi) = 0$ e la corrente di Noether è chiusa.
Inoltre se la corrente di Noether può essere scritta come:

$$\varepsilon(L, \Xi) = \tilde{\varepsilon}(L, \Xi) + dU(L, \Xi) \tag{36}$$

e la forma $\tilde{\varepsilon}$ si annulla sulle soluzioni delle equazioni di campo,$\tilde{\varepsilon}$ è detta corrente di Noether ridotta e U è detto superpotenziale.

4.4 Leggi di Conservazione

In una teoria Gauge Naturale dobbiamo fissare un fibrato di struttura $P = (P, M, p, G)$ ed il generatore infinitesimo della trasformazione di gauge sarà:

$$\Xi = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \xi^A(x)\rho_A \tag{37}$$

Dove ρ_A è una base per i campi invarianti a destra su P. Scegliendo una connessione ω^A_μ senza torsione possiamo definire le derivate covarianti.

Chiamiamo $\xi^A_{(V)} = \xi^a + \omega^A_\mu \xi^\mu$ la parte verticale del generatore infinitesimo della simmetria; dal momento che le derivate di Lie sono lineari in $(\xi^\mu, \xi^A_{(V)})$, la corrente può essere scritta in termini di $(\xi^\mu, \xi^A_{(V)})$ e delle loro derivate covarianti.

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \left(\mathcal{E}^\mu_\epsilon \xi^\epsilon + \mathcal{E}^{\mu\alpha}_\epsilon \nabla_\alpha \xi^\epsilon + \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon \nabla_{\alpha\beta}\xi^\epsilon + \ldots + \mathcal{E}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_s}_\epsilon \nabla_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\xi^\epsilon + \mathcal{E}^\mu_A \xi^A_{(V)} + \ldots\right) d\sigma_\mu \\ \mathcal{W} = \left(\mathcal{W}_\epsilon \xi^\epsilon + \mathcal{W}^\alpha_\epsilon \nabla_\alpha \xi^\epsilon + \mathcal{W}^{\alpha\beta}_\epsilon \nabla_{\alpha\beta}\xi^\epsilon + \ldots + \mathcal{W}^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_s}_\epsilon \nabla_{\alpha_0\ldots a^s}\xi^\epsilon \mathcal{W}_A \xi^A_{(V)} + \ldots\right) d\sigma \end{cases} \tag{38}$$

Dove i coefficienti $\mathcal{E}^\mu_\epsilon, \mathcal{E}^{\mu\alpha}_\epsilon, \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon, \ldots, \mathcal{E}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_s}_\epsilon$ sono dette densità tensoriali canoniche di stress e le $\mathcal{W}_\epsilon, \mathcal{W}^\alpha_\epsilon, \mathcal{W}^{\alpha\beta}_\epsilon, \ldots, \mathcal{W}^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_s}_\epsilon$ densità tensoriali canoniche di lavoro.
Tutte queste densità hanno peso 1 e sono simmetriche in tutti gli indici superiori. (Quando abbiamo a che fare con una teoria metrica possiamo passare ai tensori moltiplicando per la radice della metrica)
A noi interesserà il caso di teorie del secondo ordine, in cui abbiamo:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \left(\mathcal{E}^\mu_\epsilon \xi^\epsilon + \mathcal{E}^{\mu\alpha}_\epsilon \nabla_\alpha \xi^\epsilon + \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon \nabla_{\alpha\beta}\xi^\epsilon + \mathcal{E}^\mu_A \xi^A_{(V)} + \mathcal{E}^{\mu\alpha}_A \nabla_\alpha \xi^A_{(V)} + \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_A \nabla_{\alpha\beta}\xi^A_{(V)}\right) d\sigma_\mu \\ \mathcal{W} = \left(\mathcal{W}_\epsilon \xi^\epsilon + \mathcal{W}^\alpha_\epsilon \nabla_\alpha \xi^\epsilon + \mathcal{W}^{\alpha\beta}_\epsilon \nabla_{\alpha\beta}\xi^\epsilon + \mathcal{W}^{\alpha\beta\gamma}_\epsilon \nabla_{\alpha\beta\gamma}\xi^\epsilon + \mathcal{W}_A \xi^A_{(V)} + \mathcal{W}^\alpha_A \nabla_\alpha \xi^A_{(V)} + \mathcal{W}^{\alpha\beta}_A \nabla_{\alpha\beta}\xi^A_{(V)} + \mathcal{W}^{\alpha\beta\gamma}_A \nabla_{\alpha\beta\gamma}\xi^A_{(V)}\right) \end{cases} \tag{39}$$

Nel caso del secondo ordine possiamo calcolare la legge di conservazione $d\mathcal{E} = \mathcal{W}$ e ricaviamo:

$$\begin{cases} \nabla_\mu \mathcal{E}^\mu_\epsilon + \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\beta\alpha}_\sigma R^\sigma_{\epsilon\beta\alpha} + \frac{1}{3}\mathcal{E}^{\gamma\alpha\beta}_\sigma \nabla_\alpha R^\sigma_{\epsilon\gamma\beta} = \mathcal{W}_\epsilon \\ \mathcal{E}^\alpha_\epsilon + \nabla_\mu \mathcal{E}^{\mu\alpha}_\epsilon + \mathcal{E}^{\rho\mu\alpha}_\sigma R^\sigma \epsilon\rho\mu + \frac{2}{3}\mathcal{E}^{\rho\mu\nu}_\epsilon R^\alpha_{\mu\nu\rho} = \mathcal{W}^\alpha_\epsilon \\ \mathcal{E}^{(\beta\alpha)}_\epsilon + \nabla_\mu \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon = \mathcal{W}^{\alpha\beta}_\epsilon \\ \mathcal{E}^{(\gamma\alpha\beta)}_\epsilon = \mathcal{W}^{\alpha\beta\gamma}_\epsilon \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} \nabla_\mu \mathcal{E}^\mu_A + \frac{1}{2}c^B CA \mathcal{E}^{\beta\alpha}_B F^C_{\beta\alpha} + \frac{1}{3}c^B CA \mathcal{E}^{\gamma\alpha\beta}_B \nabla_\alpha F^C_{\gamma\beta} = \mathcal{W}_A \\ \mathcal{E}^\alpha_A + \nabla_\mu \mathcal{E}^{\mu\alpha}_A + c^B CA \mathcal{E}^{\rho\mu\alpha}_B F^C_{\rho\mu} + \frac{2}{3}\mathcal{E}^{\rho\mu\nu}_A R^\alpha_{\mu\nu\rho} = \mathcal{W}^\alpha_A \\ \mathcal{E}^{(\beta\alpha)}_A + \nabla_\mu \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_A = \mathcal{W}^{\alpha\beta}_A \\ \mathcal{E}^{(\gamma\alpha\beta)}_A = \mathcal{W}^{\alpha\beta\gamma}_A \end{cases} \tag{41}$$

Ed il superpotenziale sarà:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon \nabla_\beta \xi^\epsilon + \left(\mathcal{E}^{\mu\alpha}_\epsilon - \frac{2}{3}\nabla_\beta \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_\epsilon\right)\xi^\epsilon + \frac{4}{3}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_A \nabla_\beta \xi^A_{(V)} + \left(\mathcal{E}^{\mu\alpha}_A - \frac{2}{3}\nabla_\beta \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}_A\right)\xi^A_{(V)}\right) d\sigma_{\mu\alpha} \tag{42}$$

A partire da questa possiamo ricavare la forma esplicita del superpotenziale ad ogni ordine; e successivamente le quantità conservate come:

$$Q = \int_D \left(j^{2k-2}\sigma\right)^* U \tag{43}$$

5 Il Teorema di Noether per la Lagrangiana di Yang-Mills

Nella sezione precedente abbiamo ricavato la Lagrangiana di Yang-Mills e le equazioni di campo associate, ora vogliamo scrivere il teorema di Noether ed i superpotenziali.
Ricordiamo che: $L_{YM} = -\frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A d\sigma$.

Scriviamo innanzitutto le parti di Eulero Lagrange e Poincaré Cartan associate ad L:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L) =&\sqrt{g}\left[\frac{1}{2k}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - kT^{(YM)}_{\mu\nu})\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2a}\nabla_\mu F^{\mu\nu}_A\omega^A_\nu\right] \wedge d\sigma \\ \mathbb{F}(L) =&\sqrt{g}\left[\frac{1}{2k}g^{\mu\nu}\omega^\lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2a}F^{\lambda\nu}_A\omega^A_\nu\right] \wedge d\sigma_\lambda\end{aligned} \tag{44}$$

Dove abbiamo definito:

$$\begin{aligned}\omega^A_\mu &= d\omega^A_\mu - d_\lambda\omega^A_\mu dx^\lambda \\ \omega^{\mu\nu} &= dg^{\mu\nu} - d_\lambda g^{\mu\nu}dx^\lambda \\ \omega^\lambda_{\mu\nu} &= du^\lambda_{\mu\nu} - d_\alpha u^\lambda_{\mu\nu}dx^\alpha\end{aligned} \tag{45}$$

Adesso possiamo calcolare la corrente di Noether associata ad L_{YM}:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{\sqrt{g}}{a}\left[-F^{\lambda\nu}_A\mathcal{L}_\Xi\omega^A_\nu + \frac{1}{4}\xi^\lambda F^A_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_A\right]d\sigma_\lambda = \\ &= \frac{\sqrt{g}}{a}\left[-\left(F^{\lambda\nu}_A F^A_{\epsilon\nu} - \frac{1}{4}F^A_{\alpha\beta}F^{a\beta}_A\delta^\lambda_\epsilon\right)\xi^\epsilon + F^{\lambda\nu}_A\nabla_\nu\xi^A_{(V)}\right]d\sigma_\lambda\end{aligned} \tag{46}$$

E la corrente di lavoro sarà:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \frac{\sqrt{g}}{a}\left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} - \nabla_\mu F^{\mu\nu}_A\mathcal{L}_\Xi\omega^A_\nu\right]d\sigma = \\ &= \frac{\sqrt{g}}{a}\left[-T^\alpha_\epsilon\nabla_\alpha\xi^\epsilon - \nabla_\mu F^{\mu\nu}_A\left(\xi^\epsilon F^A_{\epsilon\nu} - \nabla_\nu\xi^A_{(V)}\right)\right]d\sigma\end{aligned} \tag{47}$$

Possiamo scrivere i tensori di lavoro e di stress come:

$$\begin{cases} E^\lambda_\epsilon = -\frac{1}{a}\left(F^{\lambda\nu}_A F^A_{\epsilon\nu} - \frac{1}{4}F^A_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_A\delta^\lambda_\epsilon\right) =: -T^\lambda\epsilon \\ E^{\lambda\nu}_A = \frac{1}{a}F^{\lambda\nu}_A \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} W_\epsilon = -\frac{1}{a}\nabla_\mu F^{\mu\nu}_A F^A_{\epsilon\nu} \\ W^\alpha_\epsilon = -T^\alpha_\epsilon \\ W^\nu_A = \frac{1}{a}\nabla_\mu F^{\mu\nu}_A \end{cases} \tag{49}$$

Specializzando la legge di conservazione $d\mathcal{E} = \mathcal{W}$ al nostro caso otteniamo:

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\nabla_\mu E^\mu_\epsilon = W_\epsilon \\ E^\alpha_\epsilon = W^\alpha_\epsilon\end{cases} \\ &\begin{cases}\frac{1}{2}c^B_{CA}E^{\beta\alpha}_B F^C_{\beta\alpha} = 0 \\ \nabla_\mu E^{\mu\alpha}_A = W^\alpha_A \\ E^{(\beta\alpha)}_A = 0\end{cases}\end{aligned} \tag{50}$$

Che, in effetti sono identicamente soddisfatte (L'unica non banale da verificare è la prima, per cui bisogna fare qualche conto:

$$\begin{aligned}&\nabla_\lambda E^\lambda_\epsilon = -\nabla_\lambda F^{\lambda\nu}_A F^A_{\epsilon\nu} - F^{\lambda\nu}_A\nabla_\lambda F^A_{\epsilon\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\lambda F^A_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_A\delta^\lambda_\epsilon = \\ &- \nabla_\alpha F^{\alpha\beta}_A F^A_{\epsilon\beta} + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}_A\left(-\nabla_\alpha F^A_{\epsilon\beta} + \nabla_\alpha F^A_{\beta\epsilon} + \nabla_\epsilon F^A_{\alpha\beta}\right) = \\ &= W_\epsilon - \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}_A\left(\nabla_\alpha F^A_{\epsilon\beta} + \nabla_\beta F^A_{\epsilon\alpha}\right) = W_\epsilon + F^{\alpha\beta}_A\nabla_{(\alpha}F^A_{\beta)\epsilon} = W_\epsilon\end{aligned} \tag{51}$$

Consideriamo adesso la Lagrangiana accoppiata con quella di Hilbert:

$$L = \left(\frac{\sqrt{g}}{2k} R - \frac{\sqrt{g}}{4a} F^A_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}_A \right) d\sigma \tag{52}$$

E le equazioni di campo:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \\ \nabla_\mu F^{\mu\nu}_A = 0 \end{cases} \tag{53}$$

In questo caso il tensore energia-momento del campo di Yang-Mills non deve annullarsi, seguendo questo fatto la corrente lavoro associata alla sola Lagrangiana di Yang-Mills non si annulla sulle soluzioni delle equazioni di campo; si annulla invece la corrente totale (segue dalle equazioni di campo):

$$\mathcal{W}(L) = \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2k} G_{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} - \frac{1}{a} \nabla_\mu F^{\mu\nu}_A \mathcal{L}_\Xi \omega^A_\nu \right] d\sigma \tag{54}$$

Il superpotenziale della parte di Yang Mills avrà solo il contributo di $E^{\lambda\mu}_\beta$ e sarà:

$$U\left(L_{YM}\right) = \frac{\sqrt{g}}{2a} F^{\mu\alpha}_A \xi^A_{(V)} d\sigma_{\mu\alpha} \tag{55}$$

Da cui possiamo ricavare la quantità conservate:

$$Q_A = \frac{1}{2a} \int_D \sqrt{g} F^{\mu\alpha}_A d\sigma_{\mu\alpha} \tag{56}$$

Dove D è una regione dello spaziotempo senza bordo.
Infine, se fissiamo una base T^A di g^* (duale dell'algebra di Lie del gruppo) abbiamo che questo elemento è ben definito:

$$Q = Q_A T^A \in g^* \tag{57}$$