Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi Geometrici della Fisica Matematica

Seminario di Metodi Geometrici della Fisica Matematica

Prof. Marcella Palese

Federico Chiaffredo

Indice

1 Introduzione

In questo seminario cercheremo di introdurre il morfismo di Jacobi e l'Hessiano del funzionale azione, associati ad una data Lagrangiana e ne dedurremmo alcune proprietà interessanti.
Per fare ciò sarà necessario sviluppare innanzitutto una teoria geometrica per le variazioni di ordine superiore (in particolare sulla variazione seconda) , per prima cosa definiremo quindi la sequenza variazionale ed in particolare l'operatore di Euler interno, che sarà utile per mostrare che il morfismo di Jacobi è autoaggiunto.
Successivamente introdurremmo l'Hessiamo associato ad un funzionale d'azione e cercheremo una realazione che leghi questo funzionale con il morfismo di Jacobi .
Infine, daremo una formulazione intrinseca dei risultati ottenuti precedentemente.

2 Operatore di Euler interno e richiami preliminari.

Siano X una varietà differenziabile di dimensione n ed Y una varietà differenziabile di dimensione $n+m$. D'ora in avanti supporremo che esista una struttura di varietà fibrata (Y, X, π) in cui X è la varietà di base. Su questa varietà possiamo fissare coordinate fibrate (x^μ, yi) (lavoreremo sempre e solo con questo tipo di coordinate).
Sappiamo inoltre che è possibile costruire l'$n-$esimo prolungamento ai getti del fibrato Y come classe di equivalenza di sezioni locali. Su questo fibrato possiamo indurre delle "coordinate" (sono vere coordinate se le prendiamo simmetrizzate rispetto agli indici in basso o ordinate opportunamente) $y^\sigma_{i_1..i_h}$ tali che: per $0 \leq h \leq n$ $y^\sigma_{i_1..i_h}(j^k_x\phi) = \frac{\partial\phi^\sigma}{\partial x^{i_1}..\partial x^{i_h}}$.
Sapendo che il fibrato $\pi^n_{n-1} : j^nY \to J^{n-1}Y$ ha una struttura affine, siamo in grado di definire le forme di contatto in questo modo: una $q-$forma α è detta di contatto se soddisfa:

$$\left(j^k\gamma\right)^*(\alpha) = 0 \tag{1}$$

Per ogni γ sezione di π.
Si può mostrare in maniera non complicata che le forme ω che si scrivono in coordinate come:

$$\omega^\sigma_{j_1\ldots j_k} = dy^\sigma_{j_1\ldots j_k} - y^\sigma_{j_1\ldots j_n i}dx^i \tag{2}$$

sono 1-forme di contatto; in particolare, si può anche mostrare che possiamo prendere come base alternativa per le 1-forme su $J^k\pi$, $\left(dx^i, \omega^\sigma, \omega^\sigma_{i1}, \ldots, \omega^\sigma_{j1\cdots jk-1}, dy^\sigma_{j1-jk}\right)$.

Grazie alla struttura di contatto, siamo quindi in grado di scomporre le forme $\rho \in \Omega_q(J^k\pi)$ come:

$$\pi^{k+1*}_k(\rho) = h\rho + p_1\rho + \cdots + p_q\rho \tag{3}$$

Con $h\rho$ forma orizzontale e $p_i\rho$ forma di contatto di grado i.
Sempre tramite la struttura di contatto siamo in grado di formulare la teoria del calcolo delle variazioni in maniera geometrica tramite l'introduzione della sequenza variazionale.
Possiamo infatti considerare Ω^k_q il fascio delle $q-$ forme su $J^k\pi$ e $\Theta^k_q = \Omega^k_{q,c} + d\Omega^k_{q-1,c}$; dove il secondo termine rappresenta il fascio associato a prefascio immagine attraverso il differenziale di $\Omega^k_{q-1,c}$.
Abbiamo quindi una sequenza esatta di fasci soffici

$$\{0\} \to \Theta^k_1 \to \Theta^k_2 \to \cdots \to \Theta^k_M \to \{0\} \tag{4}$$

Da cui passando al quoziente ricaviamo la sequenza variazionale:

$$\{0\} \to \mathbb{R}_Y \to \Omega^k_0 \to \Omega^k_1/\Theta^k_1 \to \cdots \to \Omega^k_M/\Theta^k_M \to \Omega^k_{M+1} \to \cdots \to \Omega^k_N \to \{0\} \tag{5}$$

Dove $N = dim(J^kY)$. Nel seguito chiameremo i quozienti come $\nu^k_q := \Omega^k_q/\Theta^k_q$.
Osserviamo che qui i morfismi sono quozienti di derivate esterne (ovvero $[\rho] \to [d\rho]$) e li indichiamo come $\mathcal{E}_q : \nu^k_q \to \nu^k_{q+1}$. Notiamo che per definizione $\mathcal{E}_q([\rho]) = [d\rho]$. Il teorema importante in questo caso è che la sequenza variazionale è una risoluzione del fascio costante $\mathcal{R}_Y$.
Uno dei problemi in cui nasce la necessità di costruire l'operatore di Euler interno (l'oggetto che vogliamo definire in questa introduzione) è il cosiddetto problema della rappresentazione; in poche parole potremmo chiederci questo: siamo in grado di associare ad ogni classe di forme (elemento nel quoziente) una forma globale?
Ovvero, esiste una mappa di rappresentazione $I^r_q : \Omega^r_q \to \Phi^s_q$ (con $s \geq r$ e Φ^r_q gruppo di forme di ordine s abeliano) tale che $KerI^r_q = \Theta^r_q$?
Avremmo in questo caso avremo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta^r_q \arrow[d] & \\
 & \Omega^r_q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{V}^r_q \arrow[rr, "\cong"] & & \mathcal{I}^r_q(\Omega^r_q)
\end{tikzcd}$$

Un modo per dimostrare che queste affermazioni sono vere è quello di introdurre l'operatore di Euler interno in questo modo:
Sia P un operatore differenziale formale, possiamo definire l'operatore di Eulero di P, Q in questa maniera: $Q : VW \to p_k\Omega^{2r}_{n+k}W$ tale che $P(\Xi) = Q(\Xi) + p_k dp_k R(\Xi)$ con R operatore definito solo localmente.
Una particolare classe di operatori di Euler sono gli operatori di contrazione; che agiscono in questo modo; ricordando:

$$p_k\rho = \sum_{0\leq|J_1|,\dots|J_k|\leq r} \rho^{J_1\dots J_k}_{o_1\dots\sigma_k}\omega^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{\sigma_k}_{J_k} \wedge ds \tag{6}$$

E quindi

$$J^{r+1}\Xi \lrcorner\, p_k\rho = \sum_{|J|=0}^{r} d_J\Xi^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial y^o_J} \lrcorner\, p_k\rho\right) \tag{7}$$

L'operatore di contrazione corrispondente sarà $I(\Xi) = \Xi^\sigma I_\sigma$, dove

$$I_\sigma = \sum_{|J|=0}^{r} (-1)^{|J|} d_J \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma_J} \right\rfloor p_k\rho\Bigg) \tag{8}$$

Questo definisce una mappa $\mathcal{I} : \Omega^r_{n+k}W \to \Omega^{2r+1}_{n+k}W$

$$\mathcal{I}(\rho) = \frac{1}{k}\omega^\sigma \wedge I_\sigma = \frac{1}{k}\omega^\sigma \wedge \sum_{|I|=0}^{r} (-1)^{|I|} d_I \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma_I} \right\rfloor p_k\rho\Bigg) \tag{9}$$

E questa mappa è detta operatore di Euler interno. Quello che si può dimostrare è che se ρ è globale, $\mathcal{I}(\rho)$ è definita globalmente. (per costruzione $\mathcal{I}(\rho)$ è una fora sorgente di grado $n+k$ ed è una k forma di contatto).
Infine, attraverso la dualità fra forme di contatto e vettori verticali possiamo definire un operatore di residuo in questa maniera:

$$(\pi_{2r+1,r+1})^* (p_k\rho) = \mathcal{I}(\rho) + p_k dp_k \mathcal{R}(\rho) \tag{10}$$

3 Formula di variazione seconda

Vogliamo ottenere una formula esplicita per calcolare la variazione seconda.
Il risultato fondamentale è osservare che $L_{j^{r+1}\Xi} h\rho = h L_{j^r\Xi}\rho$ e successivamente applicare un ragionamento induttivo. Ovviamente, tutte le derivate di Lie dovranno essere "tirate indietro" tramite un pull-back su un getto di ordine opportuno per avere uno splitting.

Teorema 1. *Sia ρ una n forma su J^rY, $[\rho]$ la sua classe e $\lambda = h\rho$ la lagrangiana associata. Allora, per ogni coppia di campi vettoriali verticali Ξ_1, Ξ_2 si ha:*

$$\begin{aligned}(\pi_{4r+3,r+1})^* \left(L_{J^{r+1}\Xi_2} \;\; L_{J^{r+1}\Xi_2} h\rho\right) = \Xi_{2,V} \rfloor E_n \left(\Xi_{1,V} \rfloor E_n(h\rho)\right) + \\ + d_H \epsilon_{\Xi_2} \left(\Xi_{1,V} \rfloor E_n(h\rho)\right) + d_H \epsilon_{\Xi_2} \left(d_H \epsilon_{\Xi_1}(h\rho)\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Dove

$$\begin{aligned}\epsilon_{\Xi_2} \left(\Xi_{1,V} \rfloor E_n(h\rho)\right) = {} & \Xi_{2,H} \rfloor \Xi_{1,V} \rfloor E_n(h\rho) + \\ & + J^{r+1}\Xi_{2,V} \rfloor p_{d_V} \Xi_{1,V} | E_n(h\rho) \\ \epsilon_{\Xi_2} \left(d_H \epsilon_{\Xi_1}(h\rho)\right) = {} & \Xi_{2,H} \rfloor d_H \left(J^{r+1}\Xi_{1,V} \rfloor p_{d_V h\rho} + \Xi_{1,H} \rfloor h\rho\right) + \\ & + J^{r+1}\Xi_{2,V} \rfloor p_{\,d_V d_M \left(J^{r+1}\Xi_{1,V} | p_{d_V h_p} + \Xi_{1,H}\right\} h\rho)}\end{aligned} \tag{12}$$

e $\mathcal{I}(d\rho) = \mathcal{I}(dh\rho) \doteq E_n(h\rho)$ la forma di Eulero Lagrange ottenuta come rappresentazione tramite l'operatore di Euler interno della classe definita da $d\rho$

Dimostrazione. Sappiamo che presi una $q-forma$,θ, su J^kY, un campo proiettabile Ξ ed $s, k \in \mathbb{N}$ tali che $s \geq r$ si ha

$$(\pi_{s,r})^* \left(L_{J^r\Xi}\theta\right) = L_{J^s\Xi} \left(\pi_{s,k}\right)^* (\theta) \tag{13}$$

Allora usando questo possiamo riscrivere la derivata iterata come

$$\begin{aligned}(\pi_{4r+3,r+1})^* \left(L_{J^{r+1}\Xi_2} \;\; L_{J^{r+1}\Xi_1} h\rho\right) = \\ = (\pi_{4r+3,2r+1})^* \left(L_{J2r+1\Xi_2} \left(\pi_{2r+1,r+1}\right)^* \left(L_{Jr+1\Xi_1} h\rho\right)\right)\end{aligned} \tag{14}$$

La derivata interna la sappiamo calcolare:

$$(\pi_{2k+1,k+1})^* \left(L_{Jr+1\Xi_1} h\rho\right) = \Xi_{1,V} \rfloor E_n(h\rho) + d_H \left(J^{r+1}\Xi_{1,V} \rfloor p_{d_V h\rho} + \Xi_{1,H} \rfloor h\rho\right) \tag{15}$$

Grazie alla linearità ed utilizzando dinuovo la formula precedente siamo in grado di osservare che $(\pi_{4r+3,r+1})^* \left(L_{J^{r+1}\Xi_2} L_{J^{r+1}} \Xi_1 h\rho\right)$ dipende dalle componenti dei campi prolungati fino all'ordine $r+1$; a questo punto otteniamo la tesi con un facile calcolo. □

Siamo ora in grado di introdurre il morfismo di Jacobi, ma prima è utile ricordar la definizione di operatore associato ad una $(n+2)$ forma su $J^{r+1}Y$.
Sia ω una $n+2$ forma; allora

$$\omega = \sum_{|J|=0}^{r} A^J_{r\sigma} \omega^\tau_J \wedge \omega^\sigma \wedge ds \tag{16}$$

In coordinate locali, l'operatore di Euer interno sarà:

$$\mathcal{I}(\omega) = \sum_{|J|=0}^{k} \frac{1}{2} \omega^\tau \wedge (-1)^{|J|} d_J \left(A^J_{\tau\sigma}\omega^\sigma\right) \wedge ds - \sum_{|J|=0}^{k} \frac{1}{2} \omega^\sigma \wedge A^J_{\tau\sigma} \omega^\tau_J \wedge ds \tag{17}$$

Possiamo anche introdurre:

$$\tilde{\mathcal{I}}(\omega) = -\sum_{|J|=0}^{r} (-1)^{|J|} d_J \left(A^J_{\rho\sigma} \omega^\sigma \right) \otimes \omega^\rho \otimes ds + \sum_{|J|=0}^{r} A^J_{\tau\sigma} \omega^\tau_J \otimes \omega^\sigma \otimes ds \tag{18}$$

E definire

$$\tilde{\omega} = \sum_{|J|=0}^{r} A^J_{r\sigma} \omega^\tau_J \otimes \omega^\sigma \otimes ds \tag{19}$$

Possiamo quindi considerare l'operatore differenziale formale associato ad ω:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega : X_V(Y) &\to C^1_0 \otimes \Omega^r_{n,X} \left(J^r Y \right) \\ \Xi &\to \tilde{\omega} \left(J^{r+1} \Xi, \bullet \right) \end{aligned} \tag{20}$$

In coordinate avremo:

$$\nabla_\omega \left(\Xi^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \right) = \sum_{|J|=0}^{r} A^J_{\tau\sigma} d_J \left(\Xi^\tau \right) \omega^\sigma \otimes ds \tag{21}$$

Possiamo anche definire

$$\begin{aligned} \nabla^*_\omega : X_V(Y) &\to C^1_0 \otimes \Omega^r_{n,X} \left(J^r Y \right) \\ \Xi &\to \left(\tilde{\omega} - \tilde{I}(\omega) \right) \left(J^{r+1} \Xi, \bullet \right) \end{aligned} \tag{22}$$

che in coordinate sarà:

$$\nabla^*_{\boldsymbol{\omega}} \left(\Xi^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \right) = \sum_{|J|=0}^{r} (-1)^{|J|} d_J \left(A^J_{\tau\sigma} \Xi^\sigma \right) \omega^\tau \otimes ds \tag{23}$$

In cui la scelta della notazione non è casuale, dal momento che ∇^*_ω può essere visto come l'operatore aggiunto di ∇_ω.

4 Il morfismo di Jacobi

Possiamo definire il morfismo di Jacobi associato ad una data Lagrangiana λ su $J^r Y$

Definizione 1. *La mappa*

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \Omega^r_{n,X} \left(J^r Y \right) &\to X^*_V \left(J^{2r+1} Y \right) \otimes X^*_V(Y) \otimes \Omega^r_{n,X} \left(J^r Y \right) \\ \lambda &\to \bullet \rfloor E_n (\bullet \rfloor E_n(\lambda)) \end{aligned} \tag{24}$$

viene detta morfismo di Jacobi associato a λ

Osserviamo che essenzialmente (a meno di differenziali orizzontali) il morfismo di Jacobi è la variazione seconda (generata da campi verticali) della lagrangiana.
Cerchiamo ora di ricavare un espressione in coordinate per questo morfismo; abbiamo il seguente teorema:

Teorema 2. *Lungo sezioni critiche, vale che:*
1. Per campi verticali su Y, indicati con Ξ,

$$E_n(\Xi\rfloor E_n(\lambda)) = \sum_{|J|=0}^{2r+1}(-1)^{|J|}d_J\left(\Xi^\rho\frac{\partial E_\rho(\lambda)}{\partial y_J^\sigma}\right)\omega^\sigma\wedge ds \tag{25}$$

2.Di nuovo preso un campo verticale su Y, Ξ si ha

$$E_n(\Xi\rfloor E_n(\lambda)) = \sum_{|J|=0}^{2r+1}d_J\Xi^\sigma\frac{\partial E_\rho(\lambda)}{\partial y_J^\sigma}\omega^\rho\wedge ds \tag{26}$$

3. Il morfismo di Jacobi è autoaggiunto.

Dimostrazione. 1. Scriviamo in coordinate gli oggetti su cui stiamo lavorando:

$$\begin{aligned} E_n(\Xi\rfloor E_n(\lambda)) &= \textstyle\sum_{|J|=0}^{2r+1}(-1)^{|J|}d_J\left(\frac{\partial(E_\rho(\lambda)\Xi^\rho)}{\partial y_J^\sigma}\right)\omega^\sigma\wedge ds = \\ &= \textstyle\sum_{|J|=0}^{2r+1}(-1)^{|J|}d_J\left(\Xi^\rho\frac{\partial E_\rho(\lambda)}{\partial y_J^\sigma}\right)\omega^\sigma\wedge ds + \left(\frac{\partial\Xi^\rho}{\partial y^\sigma}E_\rho(\lambda)\right)\omega^\sigma\wedge ds \end{aligned} \tag{27}$$

Per concludere basta osservare che lungo sezioni critiche (i.e valgono le equazioni di Eulero-Lagrange) i termini della forma $\frac{\partial\Xi^\rho}{y^\sigma}E_\rho(\lambda)$ si annullano.
2. Sappiamo che a meno di Pullback:

$$p_1 d\lambda = \mathcal{I}(d\lambda) + p_1 dp_1\mathcal{R}(d\lambda) \tag{28}$$

inoltre, $p_1 d\lambda = d\lambda$. Quindi:

$$d\mathcal{I}(d\lambda) = -dp_1 dp_1\mathcal{R}(d\lambda) \tag{29}$$

Tuttavia, $p_1 dp_1\mathcal{R}(d\lambda)\in\Theta_{n+1}^{2k+1}$, ma allora $dp_1dp_1\mathcal{R}(d\lambda)\in\Theta_{n+2}^{2k+1}$ e quindi $J^{2r+1}\Xi\rfloor\, dp_1dp_1\mathcal{R}(d\lambda)\in\Theta_{n+1}^{2k+1}$. Come conseguenza:

$$\mathcal{I}\left(J^{2r+1}\Xi\rfloor\, d\mathcal{I}(d\lambda)\right) = 0 \tag{30}$$

Per ogni campo verticale Ξ. Adesso, usando l'espressione in coordinate dell'operatore di Euler interno, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\left(J^{2r+1}\Xi\rfloor\, d\mathcal{I}(d\lambda)\right) = &\sum_{|J|=0}^{2k+1}\frac{\partial E_\sigma(\lambda)}{\partial y_J^\rho}d_J\Xi^\rho\omega^\sigma\wedge ds+ \\ &-\sum_{|J|=0}^{2k+1}(-1)^{|J|}d_J\left(\frac{\partial E_\sigma(\lambda)}{\partial y_J^\rho}\Xi^\sigma\right)\omega^\rho\wedge ds \end{aligned} \tag{31}$$

Da cui segue la tesi.
3. Per ottenere la tesi basta osservare che le due espressioni che abbiamo ricavato nei passaggi precedenti sono una l'aggiunta dell'altra. □

Definiamo ora i campi di Jacobi associati ad una data Lagrangiana.

Definizione 2. *Sia λ una lagrangiana di ordine r, un campo di Jacobi associato a λ è un campo verticale che appartiene al Ker del morfismo di Jacobi. Ovvero:*

$$\mathcal{J}_\Xi(\lambda) = 0 \tag{32}$$

Questa equazione viene detta equazione di Jacobi.

Abbiamo anche una proposizione importante riguardo l'equazione di Jacobi.

Proposizione 1. *L'equazione di Jacobi*

$$\mathcal{J}_{\Xi}(\lambda) = 0 \tag{33}$$

Valutata lungo un estremale γ, dipende solo dai valori del campo vettoriale Ξ lungo γ.

Dimostrazione. La dimostrazione è quasi immediata e segue dalla scrittura in coordinate (23) e ricordando che $d_J\Xi^{\sigma}$ dipende solo dai valori di Ξ lungo γ. $\square$

5 L' Hessiano

Ricordiamo che per una data azione $A_D[\gamma] = \int_D (j^r\gamma)^* (\lambda)$ possiamo definire il suo differenziale lungo una sezione $\gamma \in \Gamma_D^{\tau}$ come la mappa:

$$\begin{aligned} dA_D[\gamma] : T_{\gamma}\Gamma_D^{\tau} &\to \mathbb{R} \\ \nu &\to \frac{d}{dt} A_D\left[\Gamma_{\Xi}(t)\right]\Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{34}$$

Dove: Γ_D^{τ} è l'insieme delle sezioni definite su D e tali che siano uguali ad una data sezione τ su ∂D; mentre Ξ rappresenta una qualsiasi estensione si ν a $X_V(Y)$ che si annulla su ∂D. Γ_{Ξ} rappresenterà la variazione di γ generata da Ξ.

Definizione 3. *Definiamo l'Hessiano di un dato funzionale d'azione come l'applicazione:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(A_D\right)[\gamma] : T_{\gamma}\Gamma_D^{\tau} \times T_{\gamma}\Gamma_D^{\tau} &\to \mathbb{R} \\ (\nu, \kappa) &\to \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} A_D\left[\Gamma_{\Xi_1,\Xi_2}(t_1, t_2)\right]\Big|_{t_1=t_2=0} \end{aligned} \tag{35}$$

Con Ξ_1, Ξ_2 estensioni a $X_V(Y)$ di ν, κ che si annullano su $\partial D \cup \cap DX$

Derivando sotto il segno di Integrale otteniamo:

$$\mathcal{H}\left(A_D\right)[\gamma](\nu, \kappa) = \int_D (j^r\gamma)^* \left(L_{J^r\Xi_1} L_{J^r\Xi_2} \lambda\right) \tag{36}$$

Si può mostrare che questa definizione è ben data (non dipende dalle estensioni) ed inoltre che è simmetrica: ovvero:

$$\int_D (j^r\gamma)^* \left(L_{J^r\Xi_1} L_{J^r\Xi_2} \lambda\right) = \int_D (j^r\gamma)^* \left(L_{J^r\Xi_2} L_{J^r\Xi_1} \lambda\right) \tag{37}$$

Proposizione 2. *Consideriamo γ un minimo locale, allora l'Hessiano lungo γ è semidefinito positivo.*

Dimostrazione. Consideriamo una variazione ad un parametro di γ, Γ_{Ξ}, generata da Ξ.
Per ipotesi:

$$\int_D \left(j^r\Gamma_{\Xi}(t)\right)^* (\lambda) \geq \int_D (j^r\gamma)^* (\lambda) \tag{38}$$

Per ogni t in un intorno di zero; ma allora

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_D \left(j^r\Gamma_\Xi(t)\right)^*(\lambda) \geq 0 \tag{39}$$

E per definizione il secondo membro è l'Hessiano calcolato sulla coppia $(\Xi\circ\gamma, \Xi\circ\gamma)$.
Grazie all'arbitrarietà di Ξ possiamo concludere che la forma quadratica definita dall'Hessiano assume solo valori ≥ 0 e segue la tesi. □

Osserviamo infine che la costruzione che abbiamo fatto ci fornisce la relazione fra Hessiano e morfismo di Jacobi; infatti:

$$\mathcal{H}\left(A_D\right)[\gamma](\nu,\kappa) = \int_D \left(j^{2r+1}\gamma\right)^*\left(\Xi_1 \rfloor \mathcal{J}_{\Xi_2}(\lambda)\right) \tag{40}$$

Arriviamo ora ad una proposizione molto significativa:

Proposizione 3. *Un campo vettoriale $\nu \in T_\gamma\Gamma^\tau_D$, con γ estremale, appartiene al nullspace dell'Hessiano lungo γ se e solo se è un campo di Jacobi lungo γ.*

Dimostrazione. Da una parte se abbiamo un campo di Jacobi, è immediato osservare che appartiene al nullspace dell'Hessiano per le definizioni che abbiamo dato.
Viceversa; se $\nu \in T_\gamma\Gamma^\tau_D$ appartiene al nullspace, abbiamo che:

$$\int_D \left(j^{2r+1}\gamma\right)^*\left(\Xi_1 | J_{\Xi_2}(\lambda)\right) = 0 \tag{41}$$

Per ogni Ξ_1, Ξ_2 che estendono ν. Grazie all'arbitrarietà di Ξ_1, siamo in grado di arrivare alla tesi. □

6 Una formulazione alternativa

Vogliamo dare ora una formulazione intrinseca degli oggetti che abbiamo introdotto nei capitoli precedenti; per farlo saranno necessari alcuni strumenti preliminari.

6.1 Variazione di Forme

Definiamo la variazione (a più parametri) di una forma differenziale in termini di derivate di Lie iterate rispetto a campi verticali (Non è restrittivo supporre la verticalità; infatti se prendessimo un campo proiettabile, il termine aggiuntivo si tradurrebbe in un differenziale orizzontale, e dal momento che lavoriamo a meno di divergenze sarebbe ininfluente).

Sia s una sezione $X \to Y$ e $\Xi_1..\Xi_i$ campi verticali su Y. Denoteremo com $\psi^i_{t_k}$ il flusso generato da Ξ_i.
Definiamo:

$$\Gamma(t_1..t_i) = \psi^i_{T_i} \circ .. \circ \psi^1_{t_1} \circ s \tag{42}$$

Come la variazione $i-$esima generata da $(\Xi_1..\Xi_i)$.

Definizione 4. *Sia $\alpha \in \Lambda^k_r$ e Γ l'i-esima variazione della sezione s. Definiamo l'i-esima variazione della forma α lungo s come la mappa:*

$$\Delta^i[\Gamma; s](\alpha) := \left.\frac{\partial^i}{\partial t_1 \dots \partial t_i}\right|_{t_1,\dots,t_i=0} \left(j_r\Gamma\left(t_1,\dots,t_i\right)^*\alpha\right) \tag{43}$$

Abbiamo un primo lemma che lega variazioni a derivate di Lie.

Lemma 1. *Sia* $\alpha : J^rY \to \wedge^k T^* J^rY$*, e sia* Γ *l'i-esima variazione della sezione s generata da* $(\Xi_1..\Xi_i)$*. Allora:*

$$\Delta^i[\Gamma; s](\alpha) = (j^r s)^* L_{j^r\Xi_1} \dots L_{j^r\Xi_i}\alpha \tag{44}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalle definizioni che abbiamo dato ricordando che $\psi^k_{t_k}$ rappresentano i flussi dei campi vettoriali Ξ_k e la definizione di prolungamento di campo vettoriale:

$$\begin{aligned}\Delta^i[\Gamma; s](\alpha) &= \left.\frac{\partial^i}{\partial t_1 \dots \partial t_i}\right|_{t_1,t_i=0} \left[\left(j_r\left(\psi^i_{t_1} \circ \dots \circ \psi^1_{t_1} \circ s\right)\right)^* \alpha\right] \\ &= (j_r s)^* \left.\frac{\partial^i}{\partial t_1 \dots \partial t_i}\right|_{t_1 \dots i_i=0} \left[\left(j_r \psi^1_{t_1}\right)^* \circ \dots \circ \left(j_r y^i_{t_i}\right)^*\right] \alpha \\ &= (j_r s)^* L_{j_i \equiv_1} \dots L_{j_r \Xi_i} \alpha\end{aligned} \tag{45}$$

□

Da questo lemma segue che possiamo definire la variazione di una forma solo in termini di derivate di Lie lungo il prolungamento di campi, senza dover introdurre una sezione; e possiamo farlo in questo modo:

$$\Delta^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right](\alpha) := L_{j_r\Xi_1}\left(L_{j_r\Xi_2}\left(\dots\left(L_{j_r\Xi_i}\alpha\right)\dots\right)\right) \tag{46}$$

6.2 Variazione di Lagrangiane

L'altro oggetto che ci servirà variare sono le Lagrangiane, per farlo dobbiamo introdurre la definizione di variazione sul quoziente.
Sia $\alpha \in \Gamma^k_r$, $k < n+1$ e $\Xi_1..\Xi_i$ campi verticali su Y. Allora abbiamo:

$$\Delta^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right](\alpha) := L_{j_r\Xi_1}\left(L_{j_r\Xi_2}\left(\dots\left(L_{j_r\Xi_i}\alpha\right)\dots\right)\right) \tag{47}$$

Dove $\mathcal{L}$ rappresenta la derivata di Lie variazionale.

Definizione 5. *L'operatore*

$$\delta^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right] I_k([\alpha]) := \mathcal{L}_{j\Xi_1}\left(\dots\left(\mathcal{L}_{j\Xi_i} I_k([\alpha])\right)\dots\right) \tag{48}$$

Viene detto variazione quoziente della forma variazionele $I_k(\alpha) \in \mathcal{V}^k_r$*. Se fissiamo s una sezione* $X \to Y$ *definiamo la variazione della forma lungo s come*

$$(js)^*\left(\delta^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right] I_k([\alpha])\right) \tag{49}$$

In maniera simile possiamo variare le lagrangiane lavorando su $\mathcal{V}^n_r := \mathcal{V}^n_r / \mathcal{E}_{n-1}\left(\mathcal{V}^{n-1}_r\right)$

Dove avremo delle derivate di Lie $\overline{\mathcal{L}}_{j\Xi}$ che sono uguali alle $\mathcal{L}_{j\Xi}$ a meno di divergenze totali (ovvero $\mathcal{E}_{n-1}$ lagrangiane esatte)

Definizione 6. *Definiamo la variazione di una lagrangiana come*

$$\begin{aligned}\overline{\delta}^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right][\lambda] &:= \overline{\mathcal{L}}_{j\Xi_1}\left(\dots\left(\overline{\mathcal{L}}_{j\Xi_i}\lambda\right)\dots\right) \\ &= \Xi_1 \rfloor \mathcal{E}\left(\Xi_2 \lrcorner \mathcal{E}\left(\dots \Xi_{i-1} \lrcorner \mathcal{E}\left(\Xi_i \lrcorner \mathcal{E}(\lambda)\right)\dots\right)\right)\end{aligned} \tag{50}$$

Se fissiamo una sezione avremo la variazione lungo una sezione definita da:

$$(js)^*\left(\overline{\delta}^i\left[\Xi_1, \dots, \Xi_i\right][\lambda]\right) \tag{51}$$

Enunciamo un teorema molto importante

Teorema 3. *La variazione quoziente seconda di una Lagrangiana, lungo una sezione critica è equivalente ai seguenti morfimi, che sono autoaggiunti:*
I)Il differenziale $V(\mathcal{E}(\lambda))$ di $\mathcal{E}(\lambda)$ lungo le fibre di π^{2r+1}

$$V\mathcal{E}(\lambda) : J_{2r+1}Y \to V^*J_{2r+1}Y \otimes V^*Y \otimes \wedge^n T^*X \tag{52}$$

II)L'aggiunto del differenziale verticale, $V^*\mathcal{E}(\lambda)$

$$V\mathcal{E}(\lambda)^* : J_{2r+1}\boldsymbol{Y} \to V^*J_{4r+2}\boldsymbol{Y} \otimes V^*\boldsymbol{Y} \otimes \wedge^n T^*\boldsymbol{X} \tag{53}$$

Dimostrazione. In coordinate abbiamo $\Xi_1 = \Xi_1^i \partial_i$, $\Xi_2 = \Xi_2^j \partial_j$ e $\lambda = L\omega$.
Di conseguenza

$$\begin{aligned}\bar{\delta}^2 \left[\Xi_1, \Xi_2\right][\lambda] &= (-1)^{|\sigma|}\Xi_1^j D_\sigma \left(\partial_j^\sigma \left(\Xi_2^i \mathcal{E}(L\omega)_i\right)\right)\omega \\ &= (-1)^{|\sigma|}\Xi_1^j D_\sigma \left(\partial_j^\sigma \Xi_2^i \mathcal{E}(L\omega)_i\right)\omega + (-1)^{|\sigma|}\Xi_1^j D_\sigma \left(\Xi_2^i \partial_j^\sigma \mathcal{E}(L\omega)_i\right)\omega\end{aligned} \tag{54}$$

Ora, se s è una sezione critica, il primo termine della somma si annulla; inoltre possiamo dare una rappresentazione intrinseca del secondo grazie al fatto che $\mathcal{E}^2(\lambda) = 0 = \tilde{H}_{\mathcal{E}(\lambda)}$ (morfismo di Helmholtz associato a $\mathcal{E}(\lambda)$).
Ricordando che $\mathcal{E}\left(i_{j\Xi}d\eta\right) = j\Xi\rfloor \widetilde{H}_{d\eta}$ abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= j\Xi_1 \rfloor j\Xi_2 \lrcorner \widetilde{H}_{\mathcal{E}(\lambda)} \\ &= \Xi_1^i D_\sigma \Xi_2^j \partial_j^\sigma \mathcal{E}(\lambda)_i \omega - (-1)^{|\sigma|}\Xi_1^j D_\sigma \left(\Xi_2^i \partial_j^\sigma \mathcal{E}(L\omega)_i\right)\omega\end{aligned} \tag{55}$$

Ed in particolare si ha

$$\Xi_1 \downarrow j\Xi_2 \rfloor V\mathcal{E}(\lambda) = \Xi_1^i D_\sigma \Xi_2^j \partial_j^\sigma \mathcal{E}(\lambda)_i \omega \tag{56}$$

Inoltre dall'espressione in coordinate si osserva che il secondo termine della somma è uguale all'aggiunto di $V\mathcal{E}(\lambda)$, ovvero

$$\Xi_1 \lrcorner j\Xi_2 \rfloor V\mathcal{E}(\lambda) = \Xi_1 \lrcorner j\Xi_2 \lrcorner (V\mathcal{E}(\lambda))^* \tag{57}$$

□

In particolare possiamo osservare che il morfismo $V\mathcal{E}(\lambda)$ è simmetrico lungo sezioni critiche.

Definizione 7. *Possiamo dare le seguenti definizioni:*

1. *Definiamo il morfismo Hessiano associato a λ come $V\mathcal{E}(\lambda)$.*
2. *Definiamo il morfismo di Jacobi associato a λ come $V^*\mathcal{E}(\lambda)$*

Si può verificare che queste definizioni coincidono con le definizioni in coordinate che abbiamo dato precedentemente; tuttavia ci sono due particolari vantaggi con questa formulazione, innanzitutto è una rappresentazione intrinseca (o covariante), inoltre vale per lagrangiane di ordine qualunque e si può generalizzare a variazioni iterate di ordine più alto.