Lagrangiane di Helmholtz per Lagrangiane non quadratiche

Candidato: Federico Chiaffredo
Relatore: Prof. Guido Magnano

Universitá degli studi di Torino
Tesi di Laurea Triennale in Fisica

17 luglio 2018

Lagrangiane di Helmholtz

Consideriamo un sistema meccanico olonomo; sappiamo che le equazioni del moto possono essere ricavate a partire da due diversi principi di azione stazionaria:

Lagrangiane di Helmholtz

Consideriamo un sistema meccanico olonomo; sappiamo che le equazioni del moto possono essere ricavate a partire da due diversi principi di azione stazionaria:

Su TQ	Su T^*Q
$\int L dt$	$\int (p_\mu \dot{q}^\mu - H) dt$

Lagrangiane di Helmholtz

Consideriamo un sistema meccanico olonomo; sappiamo che le equazioni del moto possono essere ricavate a partire da due diversi principi di azione stazionaria:

Su TQ	Su T^*Q
$\int L dt$	$\int (p_\mu \dot{q}^\mu - H) dt$
	$\int [p_\mu (\dot{q}^\mu - U(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}] dt$

Lagrangiane di Helmholtz

Consideriamo un sistema meccanico olonomo; sappiamo che le equazioni del moto possono essere ricavate a partire da due diversi principi di azione stazionaria:

Su TQ	Su T^*Q
$\int L dt$	$\int (p_\mu \dot{q}^\mu - H) dt$
	$\int [p_\mu(\dot{q}^\mu - U(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}] dt$

Ricordiamo anche la definizione di *mappa di Legendre*:

$$\Phi_L : TQ \to T^*Q$$

$$(q^\mu, u^\mu) \mapsto (q^\mu, p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu})$$

Lagrangiane di Helmholtz

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}$$

Ci chiediamo ora qual è l'immagine di L_H attraverso la mappa di Legendre; facendo il conto troviamo:

Lagrangiane di Helmholtz

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}$$

Ci chiediamo ora qual è l'immagine di L_H attraverso la mappa di Legendre; facendo il conto troviamo:

$$L_{HL} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

Lagrangiane di Helmholtz

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}$$

Ci chiediamo ora qual è l'immagine di L_H attraverso la mappa di Legendre; facendo il conto troviamo:

$$L_{HL} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

$$L_u = p_\mu(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

Lagrangiane di Helmholtz

$$L_{HL} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \end{cases}$$

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L} = (p_\mu \dot{q}^\mu - H)$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \end{cases}$$

$$L_u = p_\mu(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \\ \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato tre Lagrangiane di Helmholtz:

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + \widetilde{L}$$

$$L_{HL} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

$$L_u = p_\mu(\dot{q}^\mu - u^\mu) + L$$

La domanda che ci poniamo è: **A cosa serve una Lagrangiana di Helmholtz "universale"?**

Perchè una Lagrangiana di Helmholtz "universale"?

- É utile in teorie relativistiche della gravitazione - modelli $f(R)$ e *higher-derivative gravity*.

Perchè una Lagrangiana di Helmholtz "universale"?

- É utile in teorie relativistiche della gravitazione - modelli $f(R)$ e *higher-derivative gravity*.
- Ci può aiutare a rispondere alle domande:
  - Qual è la più generale Lagrangiana scrivibile per la dinamica della particella relativistica?
  - Quali proprietà ha questa Lagrangiana?

Un caso più generale

Quando studiamo teorie più generali della meccanica classica siamo di fronte a funzioni *non quadratiche* nelle velocità. (Ad esempio nella dinamica della particella relativistica).

Un caso più generale

Quando studiamo teorie più generali della meccanica classica siamo di fronte a funzioni *non quadratiche* nelle velocità. (Ad esempio nella dinamica della particella relativistica).

Dobbiamo quindi *generalizzare* i concetti precedentemente introdotti:

Un caso più generale

Siano $L = f(\sigma)$ e $\sigma = g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$
Possiamo pensare di introdurre:

$$\pi = \frac{df}{d\sigma}$$

Un caso più generale

Siano $L = f(\sigma)$ e $\sigma = g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$
Possiamo pensare di introdurre:

$$\pi = \frac{df}{d\sigma}$$

E supponendo che la relazione sia invertibile, definiamo un'inversa $S = S(\pi)$ tale che:

$$\left(\frac{dL}{d\sigma}\right)|_{\sigma=S(\pi)} = \pi$$

Un caso più generale

Possiamo introdurre una Lagrangiana di Helmholtz di questa forma:

$$L_H = \pi(\sigma - S(\pi)) + L(q^\lambda, S(\pi)) = \pi\sigma + V(\pi)$$

In questo modo L_H genera equazioni equivalenti a quelle di $L = f(\sigma)$, ma è *quadratica* nelle velocità a meno della nuova variabile π

Che rapporto c'è con la Lagrangiana di Helmholtz che abbiamo introdotto prima?

Un caso più generale

$$L = f(\sigma) \qquad\qquad L_H = \pi[\sigma(u^\lambda) - S(\pi)] + L(q^\lambda, S(\pi))$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \sigma = S(\pi) \\ \pi = \frac{\partial L}{\partial \sigma} \\ \frac{d}{dt}\left(\pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \end{cases}$$

Nel caso della particella relativistica (libera) abbiamo :

$$L = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

Esempio: Dinamica della particella relativistica

Nel caso della particella relativistica (libera) abbiamo :

$$L = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

A cui possiamo associare una lagrangiana di Helmholtz (ricordando $L_H = \pi(\sigma - S(\pi)) + L(q^\lambda, S(\pi))$) nella forma:

$$L_H = \pi \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{4\pi}$$

Esempio: Dinamica della particella relativistica

$$L_H = \pi \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{4\pi}$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \sigma = S(\pi) \\ p_\mu = \pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu} \\ \frac{d}{d\tau}(\pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu}) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \frac{1}{4\pi^2} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ p_\mu = 2\pi g_{\mu\nu} u^\nu \\ \frac{d}{d\tau}(2\pi g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \end{cases}$$

Esempio: Dinamica della particella relativistica

$$L_H = \pi \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{4\pi}$$

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \sigma = S(\pi) \\ p_\mu = \pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu} \\ \frac{d}{d\tau}(\pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu}) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \frac{1}{4\pi^2} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ p_\mu = 2\pi g_{\mu\nu} u^\nu \\ \frac{d}{d\tau}(2\pi g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione (l'unica che contiene un termine $\dot{\pi}$) risulta identicamente verificata a causa delle equazioni precedenti.

Equivalenza fra Lagrangiane "di Helmholtz"

Torniamo ora alle Lagrangiane di Helmholtz.
All'inizio della trattazione avevamo definito:

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Equivalenza fra Lagrangiane "di Helmholtz"

Torniamo ora alle Lagrangiane di Helmholtz.
All'inizio della trattazione avevamo definito:

$$L_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Mentre successivamente abbiamo introdotto:

$$L_H = \pi_A(\sigma^A - S^A(\pi)) + L(q^\lambda, S^A(\pi_B))$$

Equivalenza fra Lagrangiane "di Helmholtz"

É evidente che ci sono delle similitudini fra le due definizioni, che però non sono esattamente identiche.

Perchè?

Equivalenza fra Lagrangiane "di Helmholtz"

G. Magnano, M. Ferraris, M. Francaviglia (1990) risolvono il caso particolare in cui si ha una combinazione affine delle velocità, ovvero:

$$\sigma^A = \Lambda^A_\mu u^\mu + T^A \quad ; Rank(\Lambda^A_\mu) = const$$

Equivalenza fra Lagrangiane "di Helmholtz"

G. Magnano, M. Ferraris, M. Francaviglia (1990) risolvono il caso particolare in cui si ha una combinazione affine delle velocità, ovvero:

$$\sigma^A = \Lambda^A_\mu u^\mu + T^A \quad ; Rank(\Lambda^A_\mu) = const$$

In questo caso abbiamo:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^A}\frac{\partial \sigma^A}{\partial u^\mu} = \pi_A \Lambda^A_\mu$$

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

Sostituendo la relazione $p_\mu = \pi_A \Lambda^A_\mu$ nella Lagrangiana di Helmholtz nella forma:

$$L'_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Troviamo:

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

Sostituendo la relazione $p_\mu = \pi_A \Lambda^A_\mu$ nella Lagrangiana di Helmholtz nella forma:

$$L'_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Troviamo:

$$L'_H = \pi_A(\Lambda^A_\mu \dot{q}^\mu - \Lambda^A_\mu U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Con la quale possiamo giungere a :

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

Sostituendo la relazione $p_\mu = \pi_A \Lambda^A_\mu$ nella Lagrangiana di Helmholtz nella forma:

$$L'_H = p_\mu(\dot{q}^\mu - U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Troviamo:

$$L'_H = \pi_A(\Lambda^A_\mu \dot{q}^\mu - \Lambda^A_\mu U^\mu(q^\lambda, p_\lambda)) + L(q^\lambda, U^\lambda(q^\nu, p_\nu))$$

Con la quale possiamo giungere a :

$$L_H = \pi_A(\sigma^A - S^A(\pi_B)) + L(q^\lambda, S^A(\pi_B))$$

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

Nel caso più generale riusciamo a spiegare il legame fra le due Lagrangiane in termini di un *elemento unificante*, ovvero la *forma di Poincaré - Cartan*.

Forme di Poincaré - Cartan

Con le forme di Poincaré - Cartan è possibile ricavare le equazioni del moto chiedendo:

$$\gamma^*(i_X d\Theta_L) = 0$$

Senza bisogno di svolgere integrali, come avviene con il metodo dell'azione stazionaria.

Forme di Poincaré - Cartan:Esempio

Calcoliamo le equazioni del moto associale alla forma di Poincaré - Cartan

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}(dq^\mu - u^\mu dt) + Ldt$$

$$d\Theta_L = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} du^\nu \wedge dq^\mu + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} dq^\nu \wedge dq^\mu -$$
$$- u^\mu \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} du^\nu \wedge dt - u^\mu \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} dq^\nu \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial q^\nu} dq^\nu \wedge dt$$

$X = A^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + B^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$

Forme di Poincaré - Cartan:Esempio

$$i_X d\Theta_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} A^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} B^\nu\right)(dq^\mu - u^\mu dt) + \frac{\partial L}{\partial q^\nu} B^\nu dt -$$

$$- \left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} du^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} dq^\nu\right)(B^\mu - u^\mu) + \frac{\partial L}{\partial q^\nu} dq^\nu\right]$$

$$\gamma^*(i_X d\Theta_L) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu}(\dot{q}^\mu - u^\mu) = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu}\dot{u}^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} u^\nu - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0 \end{cases}$$

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

In particolare possiamo scrivere una forma di Poincaré - Cartan associata alla Lagrangiana di Helmholtz L_H nella forma:

$$\Theta_{LH} = p_\mu(dq^\mu - u^\mu dt) + [\pi_A(\sigma^A - S^A(\pi)) + L(q^\lambda, S^A(\pi))]dt$$

Equivalenza fra Lagrangiane di Helmholtz

$$
\begin{tikzcd}
 & & TQ \times_Q \times T^*Q \times \mathbb{R} \arrow[d] & \\
 & \mathbb{R} & Q \times K \times K^* \arrow[l, "L_H"'] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{R} & Q \times K \arrow[l, "\widetilde{L}"'] \arrow[rr, "\alpha : \pi_A = \frac{\partial L}{\partial \sigma^A}"] \arrow[d, "s_k : \sigma^A = f^A(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)"] & & Q \times K^* \arrow[d, "s^*_k : p_\mu = \pi_A \frac{\partial f^A}{\partial u^\mu}"] \\
 & TQ \arrow[ul, "L"] \arrow[rr, "\Phi_L"] & & T^*Q
\end{tikzcd}
$$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

Per finire torniamo alla dinamica della particella relativistica, e chiediamoci quale sia la Lagrangiana più generica che possiamo scrivere.

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

Per finire torniamo alla dinamica della particella relativistica, e chiediamoci quale sia la Lagrangiana più generica che possiamo scrivere.

Chiediamo che la Lagrangiana per la particella libera (in assenza di interazioni) sia invariante sotto l'azione del gruppo di Poincaré .

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

Per finire torniamo alla dinamica della particella relativistica, e chiediamoci quale sia la Lagrangiana più generica che possiamo scrivere.

Chiediamo che la Lagrangiana per la particella libera (in assenza di interazioni) sia invariante sotto l'azione del gruppo di Poincaré .

Si può facilmente dimostrare che le funzioni scalari Poincaré -invarianti hanno necessariamente la forma: $f(\sigma)$, dove $\sigma = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

Prendiamo quindi come Lagrangiana:

$$L = f(\sigma) \quad ; \sigma = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

Associamo la Lagrangiana di Helmholtz:

$$L_H = \pi(\sigma - S(\pi)) + L(x^\lambda, S(\pi))$$

E calcoliamo le equazioni del moto.

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

$$\begin{cases} \dot{x}^\mu = u^\mu \\ \sigma = S(\pi) \\ \pi = \frac{\partial L}{\partial \sigma} \\ \frac{d}{d\tau}(\pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu}) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \end{cases}$$

In particolare abbiamo $p_\mu = \pi \frac{\partial \sigma}{\partial u^\mu}$
Lavorando sulle ultime tre equazioni troviamo:

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = 0$$

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = 0$$

Notiamo una cosa molto interessante:
L'equazione differenziale

$$\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1} = 0$$

Ha come soluzione:

$$f(\sigma) = \sqrt{\sigma}$$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = 0$$

Abbiamo due casi:

- $L \neq \sqrt{\sigma}$ in questo caso è possibile fissare una parametrizzazione uniforme.
- $L = \sqrt{\sigma}$, in questo caso la quadra è identicamente nulla e l'uguaglianza è verificata $\forall \dot{\pi}$

Per finire mostriamo che se avessimo preso

$$L = f(\sigma) + U(x^\lambda)$$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

Per finire mostriamo che se avessimo preso

$$L = f(\sigma) + U(x^\lambda)$$

Avremmo trovato un equazione del tipo:

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = \frac{dU}{dx^\mu}u^\mu$$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = \frac{dU}{dx^\mu}u^\mu$$

- Nel caso $L \neq \sqrt{\sigma}$ le π vengono determinate dal potenziale U
- Nel caso $L = \sqrt{\sigma}$ abbiamo:

$$0 = \frac{dU}{dx^\mu}u^\mu \quad (1)$$

Un'applicazione: le Lagrangiane per la particella relativistica

$$\dot{\pi}\left[\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\sigma^2}\right)^{-1}\right] = \frac{dU}{dx^\mu}u^\mu$$

- Nel caso $L \neq \sqrt{\sigma}$ le π vengono determinate dal potenziale U
- Nel caso $L = \sqrt{\sigma}$ abbiamo:

$$0 = \frac{dU}{dx^\mu}u^\mu \tag{1}$$

La lagrangiana $L = \sqrt{\sigma}$ *non ammette* un potenziale della forma $U(x^\lambda)$ infatti in questo caso le equazioni lo fissano *necessariamente* costante!

Grazie per l'Attenzione.

Bibliografia

- G. Magnano, M. Ferraris, M. Francaviglia; *On the Legendre Transformation for a class of nonregular higher-order Lagrangian field theories; Journal of Mathematical Physics*,1990
- Andrea Moro;*Action Principle with or without parametrization fixing for a relativistic particle: a Lagrangian puzzle*; Tesi di Laurea triennale in Fisica
- Robert Hermann; *Some differential-geometric aspects of the Lagrange variational problem*
- Lorenzo Fatibene; *Symplectic Geometry*