Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea in Fisica

Esame di modelli matematici della fisica classica

Il Teorema di Frobenius

Prof. Marco Ferraris

Federico Chiaffredo

Indice

1 Introduzione

In questo seminario vogliamo introdurre un teorema che permette di determinare quando un insieme di campi di vettori dà luogo ad una distribuzione integrabile.
Possiamo sintetizzare il problema nel seguente modo: Sia M una varietà differenziabile e $\Delta = \{X_1, ..., X_k\}$ un insieme di campi di vettori su M, sappiamo che ogni campo di vettori, se preso singolarmente ammette delle curve integrai (almeno localmente).
La domanda che ci poniamo è: l'insieme Δ ammette delle varietà integrali? (ovvero delle varietà M_α tali che lo spazio tangente a queste varietà sia ovunque dato dalla restrizione a M_α della distribuzione Δ).

2 Risultati preliminari

Diamo adesso alcune definizioni che torneranno utili in seguito per l'enunciazione del teorema:

Definizione 1 *(**Distribuzione**) Sia M una varietà differenziabile. Una distribuzione (di spazi vettoriali) Δ è una famiglia di sottospazi tangenti $\Delta_x \subset T_xM$ scelti in ciascun punto x della varietà.*
Il rango della distribuzione nel punto x è detto dimensione della distribuzione.

Si noti che non abbiamo chiesto che la dimensione di una distribuzione sia la stessa su ogni punto: quando il rango varia diremo che la distribuzione è *singolare*, e chiameremo punto singolare il punto in cui la distribuzione non ha rango massimo.
Tuttavia spesso conviene avere a che fare con distribuzioni a rango costante (o regolari).
La condizione che imponiamo su queste ultime è che $\Delta = \cup_{x \in M} \Delta_x$ sia un sottofibrato di TM (in un certo senso così si chiede di scegliere le distribuzioni Δ_x in maniera "liscia" al variare di x).

Definizione 2 *(**Base di una distribuzione**) Una base locale di una distribuzione Δ di rango k è un insieme di k campi vettoriali definiti su un sottoinsieme $U \subset M$ tali che per ogni punto $x \in U$ questi sono una base di Δ_x.*
In questo modo uno ha che $\forall x \in U, \Delta_x = span(X_\alpha); \alpha = 1, ..., k$

Definizione 3 *(**Involutività di una distribuzione**) Una distribuzione è detta involutiva se per ogni coppia di campi $X, Y \in \Delta$ il loro commutatore appartiene ancora a Δ:*

$$[X_\alpha, X_\beta] = f^\lambda_{\alpha\beta}(x) X_\lambda \tag{1}$$

le funzioni $f^\lambda_{\alpha\beta}(x)$ sono dette funzioni di struttura della distribuzione.

3 Il teorema di Frobenius

Supponiamo che i campi di vettori $X_k = \phi^i_k \partial_i$ siano linearmente indipendenti $\forall p \in U \subset M$ (questo implica che i campi vettoriali non abbiamo punti singolari in U).In questo caso questo insieme di campi vettoriali definisce una distribuzione, che chiameremo D.
Osservazione La distribuzione D rimane la stessa se anziché scegliere l'insieme X come generatore prendiamo un insieme di loro combinazioni lineari Y, purchè la trasformazione lineare che stiamo considerando non sia degenere.In altre parole: i campi di vettori $Y = \{Y_1, ..., Y_k\}$ dove

$$Y_j = \gamma^i_j X_i = \gamma^i_j(x) \phi^l_i(x) \partial_l \tag{2}$$

definiscono la stessa distribuzione se e solo se la matrice con elementi $\Xi_{ji}(x) = \gamma_j^i(x)$ ha determinante diverso da zero $\forall x \in U$.
Ci chiediamo ora se esistono delle coordinate$(y^1, ..., y^m)$ ed un insieme di generatori nell'intorno di $U \subset M$ tali che:

$$Y_k = \frac{\partial}{\partial y^k}, k = 1, ..., r \tag{3}$$

Ci stiamo quindi chiedendo se è possibile scegliere delle coordinate adattate non ad un singolo campo di vettori, ma ad un insieme (finito) di campi di vettori.
La risposta ci viene data dal teorema di Frobenius.

Teorema 1 ***(Frobenius)****Sia $D = D$ la distribuzione regolare generata dai campi di vettori $X = \{X_1, ..., X_r\}$, linearmente indipendenti in ogni punto $p \in U \subset M$. Condizione necessaria e sufficiente perchè D ammetta generatori $Y_1, ..., Y_r$ nella forma (3) è che i campi X siano in involuzione.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se D ammette generatori nella forma (3), allora ogni insieme di generatori per D è in involuzione.
I campi X_k appartengono per definizione alla distribuzione che generano.
Se D ammette generatori nella forma (3) devono esistere delle funzioni differenziabili tali che:

$$X_k = A_k^i(x) Y_i \tag{4}$$

inoltre la matrice $A(x)$ per ipotesi non è singolare per ogni punto $x \in U$.
Calcoliamo esplicitamente i commutatori:

$$[X_k, X_l] = (A_k^j(\partial_j A_l^i) - A_l^j(\partial_j A_k^i))\partial_i \tag{5}$$

Possiamo quindi dedurre che $[X_i, X_j] = \Gamma_{ij}^k X_k$. Dove abbiamo posto (ricordando che A essendo regolare è invertibile):

$$\Gamma_{ij}^k = (A_i^r(\partial_r A_j^h) - A_j^r(\partial_r A_i^h))(A^{-1})_h^k \tag{6}$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema in un senso(se esistono i generatori in una data forma i campi sono in involuzione).
La parte più complicata della dimostrazione riguarda il viceversa: Basta supporre che i campi siano in involuzione per avere l'esistenza di varietà integrali(massimali)?
Daremo una dimostrazione di questo fatto per induzione.
Poniamo che la dimensione della distribuzione sia h.
Consideriamo una distribuzione D^{h+1} generata dai campi di vettori $\{X_1, ..., X_h, Q\}$

Possiamo scegliere delle coordinate x per rettificare il flusso adattate ad uno di questi campi vettoriali, prendiamo:

$$Q = \frac{\partial}{\partial x^{h+1}} \tag{7}$$

Indichiamo ora $x^{h+1} = w$, avremo quindi coordinate $(x^i, w), i = 1, ..., h$.
Scegliamo un nuovo sistema di generatori: $\{Y_1, ..., Y_h, Q\}$, dove abbiamo definito:

$$Y_k := X_k - X_h(w) Q \tag{8}$$

La trasformazione che abbiamo considerato non è singolare, quindi i due insiemi generano la stessa distribuzione.
Si ha anche subito che per costruzione:

$$\begin{aligned} &Y_k(w) = 0; \quad k \leq h \\ &Q(w) = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Da questo segue che :

$$[Y_k, Y_l]w = (Y_k Y_l)w - (Y_l Y_k)w = 0 \tag{10}$$

Il campo di vettori definito dal commutatore non ha quindi componenti lungo Q.
Avendo per ipotesi che i campi $\{X_1, ..., X_h, Q\}$ e $\{Y_1, ..., Y_h, Q\}$ sono in involuzione segue che per forza anche $\{Y_1, ..., Y_h\}$ sono in involuzione.
Possiamo quindi considerare la distribuzione generata da questi campi, che chiameremo D^h e che naturalmente soddisfa la proprietà $D^h \subset D^{h+1}$.Ripetiamo la costruzione precedente rettificando il campo Y_h introducendo nuove coordinate del tipo $(x^1, ..., x^{h-1}, w)$ ecc...
Otteniamo quindi una sequenza di distribuzioni tali che:

$$D^1 \subset D^2 \subset ... \subset D^h \subset D^{h+1} \tag{11}$$

I campi di vettori in queste distribuzioni soddisfano la proprietà:

$$[D^k, D^k] \subset D^{k-1} \tag{12}$$

Possiamo quindi scegliere coordinte $(z^1, ..., z^{h+1})$ tali che i campi di vettori $\frac{\partial}{\partial z^i}$ generino D^{h+1}
Osservazione La costruzione dei nuovi campi di vettori proposta nella dimostraizione può essere meglio interpretata utilizzando la scrittura in coordinate dei campi:

$$X_k = \xi_k^i(x^r, w)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_k(x^r, w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{13}$$

dove $X_k(w) = \eta_k$.
La costruzione che considera dei campi Y nella forma:

$$Y_k := X_k - X_k(w)Q = \xi_k^i(x^r, w)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14}$$

serve ad eliminare la componente in w, ed ora il fatto che i campi Y_k siano in involuzione è immediato dall loro forma.Iterando questo metodo costruiremo delle coordinate z^i e campi Z_i con le proprietà richieste. (l'ultimo passo, arrivati a D^1, consiste nel rettificare l'unico campo rimanente)

4 Una seconda formulazione del teorema

Possiamo esprimere il teorema di Frobenius in termini di proprietà delle distribuzioni e di varietà integrali, di cui daremo ora la definizione. Questa seconda versione del teorema è formalmente differente dalla precedente e fornirà una serie di condizioni che sono equivalenti quando abbiamo a che fare con distribuzioni.

Definizione 4 *Una sottovarietà $S \subset M$ é una varietá integrale per una distribuzione D se $\forall p \in S$ si ha che $T_pS \subset D_p$ ovvero se in ogni punto il vettore tangente appartiene alla distribuzione.*

Osservazione. é immediato che per una sottovarietá di dimensione k sará possibile avere varietá integrali di dimensione $l \leq k$.
Nel caso in cui la dimensione della sottovarietá sia $l = k$ parleremo di varietá integrali massimali.

Definizione 5 *Diciamo che la distribuzione D(di dimensione r) definita su $U \subset M$ é completamente integrabile se $\forall p \in U$ esiste una varietá integrale massimale.*

La giustificazione di una riformulazione del teorema é immediata se adesso consideriamo una funzione $\Phi : U \to \mathbb{R}$ tale che :

$$X(\Phi) = 0; \quad \forall X \in D \tag{15}$$

Osservazione. Potremmo dire che la condizione equivale a chiedere che Φ sia una costante del moto per il flusso di qualsiasi campo di vettori appartenente a D.
Infatti se abbiamo generatori della distribuzione D nella forma (3), con relative coordinate y^i, (con i=1,...,r) é immediato che le funzioni $\{y^{r+1}, ..., y^m\}$ soddisfano la (15) e che annullandosi definiscono una sottovarietá integrale(di dimensione massimale).
Tuttavia, più in generale, qualsiasi varietá (di dimensione m)che localmente passa per un punto p puó essere resa nella forma precedente con un opportuna scelta di coordinate.
La vera domanda che dobbiamo porci é quindi: esiste una varietá integrale che passa per il punto p? o più in generale, visto che non abbiamo fissato il punto: D é completamente integrabile?
La risposta ci viene fornita dal teorema di Frobenius:

Teorema 2 ***(Frobenius)***
Sia D la distribuzione generata dai campi $\{X_1, ..., X_r\}$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:
(I) D ammette $m - r$ soluzioni indipendenti in un intorno di $p \in U, \forall p$
(II) é possibile scegliere coordinate locali $(z^1, ..., z^m)$ su ogni punto $p \in U$ tali che la varietá definita da $x^{r+1} = x^{r+2} = ... = x^m = 0$ é una varietá integrale per la distribuzione D
(III) D é completamente integrabile
(IV) D é involutiva.

Dimostrazione Prendiamo $\{\alpha^{r+1}, ..., \alpha^m\}$ come $m - r$ soluzioni indipendenti come viene chiesto al punto(I). Possiamo definire delle nuove coordinate $(x^1, ..., x^m)$ identificando $x^l = \alpha^l$ per $l \geq r$, le restanti coordinate sono "libere" a patto che siano vere coordinate.
Per costruzione abbiamo che $X(x^l) = 0 \forall X \in D$ (quando $l \geq r$)inoltre questo insieme di campi di vettori ha dimensione r e coincide con $D_p \forall p \in U$. Allora possiamo dire che D é generato da $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$ con j=1,...,r.
Abbiamo quindi che (I) implica (II), e dalla definizione di completa integrabilitá (II) implica (III). Facciamo vedere che (III) implica (IV). Sia S una varietá integrale di dimensione r che passa per $p \in U$ (sappiamo che esiste per la (III)).Se due campiX, Y sono tangenti ad S allora dev'esserlo anche $Z = [X, Y]$ e pertanto abbiamo la (IV).
Per chiudere il cerchio ricordiamo che nella prima formulazione del teorema di Frobenius che abbiamo dato, si é proprio dimostrato che (IV) implica (I).

5 Le forme differenziali

Vogliamo dare adesso una formulazione "duale" di questo teorema sfruttando il linguaggio delle forme differenziali.
Per fare questo ricordiamo alcuni concetti preliminari:
Osservazione Dati dei campi di vettori $X = \{X_1, ..., X_k\}$ scritti in coordinate come $X_k = w_k^i \partial_i$, che generano una distribuzione $D \subset TM$, possiamo associare a questi le 1-forme duali (usando la metrica riemanniana della varietá) $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, che in componenti saranno: $\alpha_k = a_{ki} dx^i$, dove abbiamo definito:

$$a_{ik} = g_{ij} w_k^j \tag{16}$$

Il prodotto interno fra un generico campo Y di vettori e una di queste uno forme é equivalente al prodotto scalare(utilizzando la metrica g) fra il campo Y ed il campo di vettori associato alla forma differenziale(la dimostrazione é immediata scrivendo in componenti il prodotto).

5.1 Da campi di vettori a forme differenziali

Chiariamo meglio il passaggio fra distribuzione di campi vettoriali e distribuzione di forme differenziali: Sappiamo che se prendiamo un insieme di campi di vettori su una varietá M(di dimensione m) questi definiscono una distribuzione D, supponendo che la distribuzione D sia regolare(con rango k), in un generico punto $p \in M$ possiamo introdurre tramite lo spazio $D_p \subset T_pM$ uno spazio ortogonale $Q_p \subset T_PM$(dimensione $h = m-k$): se prendiamo l'unione di tutti questi spazi avremo una distribuzione regolare $Q = \cup_{p\in M} Q_p \subset TM$ che é il complemento ortogonale di D.
Una volta definita D siamo in grado di ricavare Q e viceversa, pertanto é indifferente definire l'una o l'altra.
A questo punto la distribuzione Q definisce una co-distribuzione data dalle forme $\{\alpha_1, ..., \alpha_h\}$.
L'osservazione importante in questa costruzione è che non è direttamente la distribuzione D a definire la codistribuzione associata, ma il suo complemento ortogonale. Il tutto é meglio visualizzabile in un diagramma:

$$\begin{array}{ccc} D & \stackrel{\perp}{\rightarrow} & Q \\ \downarrow_* & & \downarrow_* \\ D' & \stackrel{\perp}{\leftarrow} & \Omega \end{array} \tag{17}$$

Con la costruzione effettuata abbiamo che

$$X \lrcorner\, \omega = 0; \quad \forall X \in D, \omega \in \Omega \tag{18}$$

dove con $\lrcorner$ denotiamo il prodotto interno (contrazione di forme e vettori).
Adesso ribaltiamo la situazione: fin'ora abbiamo definito la distribuzione D e successivamente la co-distribuzione associata; non c'e motivo per cui non possa essere fatto il viceversa.
Definiamo quindi una distribuzione $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$ di uno-forme, a questo punto abbiamo due modi per definire D:

- Utilizzando il diagramma (17) da Ω risaliamo a Q (con la dualità) e da Q giungiamo a definire D come il complemento ortogonale.

- Usando la (18) definiamo D come l'insieme dei campi di vettori che annullano tutte le $\omega_i \in \Omega$

Osservazione Dobbiamo ricordare che tutti i ragionamenti che facciamo in un senso possono essere rovesciati: in questo caso avremmo anche potuto definire Ω come l'insieme delle forme che annullano tutti i campi in D.In queste sezioni,tuttavia, preferiremo concentrarci sulle forme differenziali: considereremo sempre quindi la distribuzione Ω come data, e D come la "co-"distribuzione definita di conseguenza con uno dei due metodi sopra elencati.
Le definizioni date per i campi di vettori si estendono naturalmente ai campi di forme

Definizione 6 *Diremo che la sottovarietà $S \subset M$è una varietà integrale per Ω , se lo è per la distribuzione di campi di vettori associata ad Ω (che chiameremo D).*

Definizione 7 *Diremo che Ω è completamente integrabile (rispettivamente regolare) se la distribuzione D è completamente integrabile (risp. regolare)*

Definizione 8 ***Annullatore*** *Sia Ω un insieme di forme, chiamiamo annullatore di Ω, e lo indichiamo come $Ann(\Omega)$ l'insieme di campi di vettori X tali che $X \lrcorner\, \omega = 0; \forall \omega \in \Omega$.*

Osservazione L'annullatore di un insieme di forme è anche l'annullatore del modulo che queste forme generano: segue immediatamente dalle proprietà di linearità del prodotto interno.

Con queste definizioni possiamo quindi dire che per costruzione abbiamo Ω=Ann(D) (o viceversa).

Definizione 9 ***Ideale completo*** *Chiamiamo ideale completo di Ω l'insieme delle forme la cui restrizione ad Ann(Ω) è zero.*

Dobbiamo chiarire tuttavia cosa intendiamo quando parliamo di restrizione di una forma ad Ann(Ω).
Impostiamo un discorso generale: sappiamo che una k-forma α è un operatore dall'insieme $\Upsilon(M)$ dei campi vettoriali(differenziabili) su M(k-volte cartesiano se stesso) all'insieme $F(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ (funzioni differenziabili da M a valori in $\mathbb{R}$).Quindi:

$$\alpha : \Upsilon(M) \times \Upsilon(M) \times ... \times \Upsilon(M) \to F(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) \tag{19}$$

Quando parliamo di restrizione di una k-forma ad una distribuzione $D \subset M$ si intende che il dominio su cui α agisce non è più tutto $\Upsilon(M)$ ma un suo sottoinsieme: avremo quinidi che la restrizione agirà in questo modo:

$$\alpha : D \times D \times ... \times D \to F(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) \tag{20}$$

Quindi (riprendendo un caso che tornerà utile in seguito) la richiesta che una 2-forma si annulli su D equivale a chiedere che :

$$< \alpha; X, Y >= 0; \quad \forall X, Y \in D \tag{21}$$

6 Il teorema di Frobenius (forme differenziali)

Sia Ω una distribuzione di 1-forme, che come abbiamo visto precedentemente definisce una distribuzione D di campi di vettori.

Teorema 3 *L'invarianza di una distribuzione D sotto il flusso dei campi di vettori appartenenti alla distribuzione stessa è equivalente alla involutività della distribuzione.*

In questo caso per invarianza della distribuzione sotto il flusso dei suoi campi di vettori intendiamo: $\mathcal{L}_X(D) \subset D$. Dove $\mathcal{L}$ rappresenta la derivata di Lie.
Dimostrazione Sappiamo dalla formula di derivata di Lie di un campo di vettori che $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$ allora la richiesta del teorema diventa: $\mathcal{L}_X(D) = [X, D] \subset D$, ma essendo X arbitrario ed appartenente a D segue l'involutività $[D, D] \subset D$.
Avendo dimostrato che per i campi di vettori l'involutività implica completa integrabilità vale il seguente lemma:

Lemma 1 *L'invarianza di una distribuzione D sotto il flusso dei campi di vettori appartenenti alla distribuzione stessa è equivalente alla completa integrabilità di D*

Cerchiamo adesso di spostare il discorso sulle codistribuzioni: cercheremo di esprimere il teorema 3. in termini di Ω anzichè di D.
Sappiamo che $D=$ Ann(Ω), quindi chiedere l'invarianza di D significa chiedere l'invarianza di Ann(Ω), che sua volta significa chiedere

$$\mathcal{L}_X(\omega) \in \Omega; \quad \forall X \in D = Ann(\Omega), \omega \in \Omega \tag{22}$$

Possiamo riformulare il teorema 3. come segue:

Lemma 2 *Ω è completamente integrabile se e solo se la condizione (22) è soddisfatta $\forall X \in$Ann(Ω)*

La dimostrazione è immediata: per definizione Ω è integrabile se lo è D, e l'integrabilità di D come abbiamo visto precedentemente (subito dopo il lemma 1) può essere espressa in termini della co-distribuzione associata.
Dobbiamo quindi capire quando la (22) è verificata, sappiamo dala formula della derivata di Lie che:

$$\mathcal{L}_X(\omega) = d(X \lrcorner\, \omega) + X \lrcorner\, d\omega \tag{23}$$

Avendo preso $X \in Ann(\Omega)$ per definizione, il primo pezzo fa zero.
La parte rimanente è: $i_X(d\omega)$ che è una 1-forma, per imporre la condizione di appartenenza ad Ω abbiamo due modi:

- Chiedere direttamente l'appartenenza al modulo come segue:

$$X \lrcorner\, d\omega = f(x)^i \omega_i \tag{24}$$

- Oppure possiamo chiedere che $d\omega$ appartenga all'ideale completo di Ω,ovvero che ($\forall \omega \in \Omega, X, Y \in D = Ann(\Omega)$):

$$< d\omega; X, Y >= 0 \tag{25}$$

  In questo caso, visto che ω è arbitrario possiamo scrivere che $d\Omega$ deve appartenere all'ideale completo di Ω

Arriviamo quindi ad enunciare il teorema di Frobenius come conseguenza della discussione precedente:

Teorema 4 ***Frobenius*** *La codistribuzione Ω è completamente integrabile se e solo se $d\Omega$ appartiene all'ideale completo di Ω.*

6.1 Un'ultima formulazione del Teorema

Vogliamo infine dare un'ultima formulazione del teorema di Frobenius che non utilizzi il linguaggio degli ideali.
Il teorema può essere riformulato come segue:

Teorema 5 *(**Frobenius**) La codistribuzione Ω (di dimensione k)è completamente integrabile se e solo se è invariante sotto il flusso dei campi di vettori in $D = Ann(\Omega)$.*
Quando questo è vero è possibile introdurre delle corrdinate (locali) x^i nell'intorno di un punto $p \in M$ tali che Ω sia generata da $\omega_i = dx^i$; i=1,...,k.

Dimostrazione La dimostrazione ricalca quella svolta per la prima versione che abbiamo dato del teorema (Teorema 1).
Mostriamo l'implicazione in un verso (co-distribuzione integrabile implica invarianza sotto il flusso...):

Se Ω è integrabile, dev'esserlo $D = Ann(\Omega)$ per definizione; ma essendo D integrabile esiste una sottovarietà integrale massimale (di dimensione d) che chiameremo S_p. Questa varietà, scelte coordinate opportune (abbiamo dimostrato precedentemente che è sempre possibile farlo) può essere scritta come:

$$x^1 = ... = x^{m-d} = 0 \tag{26}$$

Dove abbiamo posto m come dimensione della varietà differenziabile su cui facciamo i nostri ragionamenti.
La distribuzione D ammetterà quindi generatori scrivibili come:

$$X_i = f_i^k \partial_k; \quad i = 1, ..., d; f_i^k = 0, k \leq k - d \tag{27}$$

Segue immediatamente che se portiamo queste coordinate sulla co-distribuzione, questa sarà generata da:

$$\omega_i = A_{ij} dx^j; \quad i = 1, ..., m - d; A_{ij} = 0 se : j > m - d \tag{28}$$

Se calcoliamo il differenziale troviamo:

$$d\omega_j = \frac{1}{2}(\partial_l A_{jk} - \partial_k A_{jl}) dx^l \wedge dx^k \tag{29}$$

Consideriamo adesso due campi di vettori:$X = \phi^i(x)\partial_i$, $Y = \psi^i \partial_i$ che appartengono a D se e solo se $\phi^k = \psi^k = 0, \forall k \leq m - d$. Supponiamo per ipotesi che X, Y soddisfino questa condizione, allora calcoliamo:

$$X \lrcorner Y \lrcorner d\omega = X \lrcorner (\psi^j(\partial_j A_i - \partial_i A_j) dx^i) = \phi^i \psi^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) \tag{30}$$

Notiamo che stiamo sommando solo termini nulli: quando $i, j < m - k$ le funzioni ϕ^i, ψ^j sono nulle per costruzione; quando $i, j > m - k$ ad annullarsi è la tonda.
Concludiamo quindi notando che se la codistribuzione Ω è integrabile allora è invariante per i campi appartenenti alla distribuzione associata: segue da quello che abbiamo detto quando siamo giunti alla (25).
Dobbiamo mostrare l'inverso: utilizziamo la ricorsione similmente a come fatto per i campi vettoriali (supponendo $dimD > 1$):
Scegliamo un campo $X_1 \in D$(i.e $X_1 \lrcorner \omega = 0, \forall \omega \in \Omega$), X_1 può essere rettificato in un intorno di un punto p e possiamo scrivere la sua varietà integrale attraverso p (una curva integrale γ_1 passante per p). Chiamiamo x^1 la coordinata lungo la curva integrale.
Prendiamo adesso un secondo campo vettoriale $X_2 \in D$ che sia linearmente indipendente da $X_1 \forall p \in M$(in questo modo su ogni punto p il campo X_2 è trasverso alla varietà γ_1).Consideriamo l'unione delle curve integrali di X_2 attraverso γ_1 e la indichiamo con γ_2; questa varietà è ancora una varietà integrale per D (infatti è generata dai campi X_1 e X_2 , che appartengono a D).Scegliamo x^2 come coordinata lungo le curve integrali di X_2.
Iteriamo questo metodo considerando i campi $X_3, ..., X_k$. Ogni volta che aggiungiamo un campo stiamo in realtà aggiungendo anche una dimensione alle varietà integrali che stiamo costruendo: questo concluderebbe la dimostrazione. Il problema di questo ragionamento, che non è stato menzionato precedentemente è il seguente: per poterlo applicare dobbiamo essere sicuri che il flusso dei campi $X_i \in D$ preservi la distribuzione.
Questo risultato, già ottenuto precedentemente può essere dedotto dal calcolo esplicito della valutazione di una 2-forma su campi vettoriali: enunceremo un lemma a riguardo:

Lemma 3 *Siano dati β una 1-forma e X, Y campi vettoriali su M; allora:*

$$X \lrcorner (Y \lrcorner d\beta) = Y(X \lrcorner \beta) - X(Y \lrcorner \beta) - [X, Y] \lrcorner \beta \tag{31}$$

Dimostrazione Questo fatto può essere provato con il calcolo esplicito del membro di sinistra: consideriamo $\beta = B_i dx^i$ e di conseguenza il differenziale $d\beta = \frac{1}{2}(\partial_i B_j - \partial_j B_i)dx^i \wedge dx^j$.
Analogamente prendiamo $X = \phi^i(x)\partial_i$ e $Y = \psi^i(x)\partial_i$. Dalla (30) sappiamo calcolare in coordinate il prodotto a primo membro, infatti:

$$X \lrcorner Y \lrcorner d\beta = \phi^i \psi^j (\partial_j B_i - \partial_i B_j) \tag{32}$$

Vogliamo ora esprimere la relazione sopra in modo intrinseco. Calcoliamo separatamente i pezzi a secondo membro della (31):

$$\begin{aligned} Y(X \lrcorner \beta) &= Y(\phi^i B_i) = \psi^j \partial_j(\phi^i B_i) = \psi^j(\partial_j \phi^i)B_i + \psi^j \phi^i(\partial_j B_i) \\ X(Y \lrcorner \beta) &= X(\psi^i B_i) = \phi^j \partial_j(\psi^i B_i) = \phi^j(\partial_j \psi^i)B_i + \phi^j \psi^i(\partial_j B_i) \\ [X, Y] \lrcorner \beta &= [\phi^j(\partial_j \psi^i) - \psi^j(\partial_j \phi^i)]\partial_i \lrcorner (B_k dx^k) = \phi^i(\partial_i \psi^j)B_j - \psi^j(\partial_j \phi^i)B_i \end{aligned} \tag{33}$$

Notiamo ora che con un opportuna combinazione di questi pezzi(quella della tesi), siamo in grado di ricondurci alla (32).
Osservazione. In un caso particolare di questo lemma possiamo scegliere $\beta = \omega \in \Omega$ e $X, Y \in D = Ann(\Omega)$ IN questo caso la formula generale diventa:

$$X \lrcorner (Y \lrcorner d\omega) = [X, Y] \lrcorner \omega \tag{34}$$

In questo modo abbiamo (ri)dimostrato che l'invarianza di una distribuzione $D = Ann(\Omega)$ corrisponde alla sua involutività.

7 Ideali di Cartan

Vogliamo ora riformulare la condizione di integralità per le co-distribuzioni in una richiesta agilmente verificabile quando si ha a che fare con PDE.

Definizione 10 ***(Ideale di Cartan)****Sia J un insieme di forme differenziali.Diciamo che J è un ideale di Cartan se:*
(I)J è un ideale in $\Lambda(M)$ secondo il prodotto esterno.
(II)Ogni $J_k = J \cap \Lambda^k(M)$ è un sottomodulo di $\Lambda^k(M)$.
In altre parole deve valere:
(I)$\forall \omega \in J, \forall \eta \in \Lambda(M)$ abbiamo che $\eta \wedge \omega \in J$
(II)$\forall \omega_1, \omega_2 \in J_k; f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ si ha $f_1\omega_1 + f_2\omega_2 \in J_k$

Osservazione Dato un sistema di forme differenziali $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ queste definiscono un ideale di Cartan $J(A)$ come l'insieme delle forme $\gamma \in \Lambda(M)$ scrivibili come $\gamma = \beta \wedge \alpha; \quad \beta \in \Lambda(M), \alpha \in A$.
Nel nostro caso le forme $\{\omega_i\}$ generano un ideale di Cartan $J(\Omega)$. La richiesta che $d\Omega$ appartenga all'ideale completo di Ω che avevamo fatto precedentemente equivale a chiedere la chiusura di $J(\Omega)$ sotto la derivata esterna. Riformuliamo quindi il teorema:

Teorema 6 *Data la co-distribuzione regolare Ω ed un suo insieme di generatori $\{\omega_i\}$,Ω è completamente integrabile se e solo se $J(\Omega)$ è chiuso.*

DimostrazioneLa condizione (25) equivale a chiedere che:

$$d\omega = \beta_i \wedge \omega_i \tag{35}$$

Dove le β_i sono 1-forme qualsiasi, anche non appartenenti ad Ω.Infatti quando possiamo scrivere $d\omega$ in questo modo, dato un campo $X \in D$ abbiamo che $X \lrcorner d\omega = (Y \lrcorner \beta_i)\omega_i$ (dove abbiamo usato che $Y \lrcorner \omega_i = 0$), quindi se prendiamo anche $Y \in D$ la (25) è verificata.
Viceversa quando vale la (25), per ogni $X \in D$ deve valere che $Y \lrcorner d\omega \in \Omega; \forall Y \in D$, che è possibile solo se vale la (35)(che rappresenta proprio il fatto che l'ideale è chiuso).
Osservazione Grazie alle proprietà della derivata esterna, per verificare la chiusura di $J(\Omega)$ è sufficiente verificare la chiusura dei suoi generatori.

8 Esempi

Mostriamo ora alcuni esempi di applicazione del teorema di Frobenius nelle sue varie formulazioni:Considereremo un sistema di PDE lineari ed omogenee,con una variabile dipendente (u) ed m variabili indipendenti (x^i) su M. Pertanto un sistema della forma:

$$\Sigma_{i=1}^{m} A_k^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \tag{36}$$

A partire da questo sistema possiamo ricavare degli operatori differenziali (al primo ordine) del tipo $L_k = A_k^i(x)\partial_i$ che possiamo a loro volta associare a dei campi vettoriali X_k su M (in questo modo le soluzioni saranno funzioni costanti sulle curve integrali di ogni campi vettoriale $X : k$)
Dal teorema di Frobenius sappiamo come procedere:

- Controlliamo la distribuzione D generata dai campi vettoriali X_k e cerchiamo eventuali singolarità: questo ci darà informazioni sull'integrabilità.
- Successivamente studiamo le relazioni d commutazione fra i campi X_k(i.e. studiamo l'involutività).Possiamo avere 3 casi:
- La distribuzione è involutiva
- La distribuzione non è involutiva ma può diventarlo se completiamo l'insieme dei campi di vettori che generano D con altri campi di vettori opportuni.In questo modo riusciamo a costruire un nuova distribuzione $\widetilde{D}$ che è involutiva e tale che $D \subset \widetilde{D}$
- D non è involutiva e non è possibile fare la costruzione precedente.

Ad ognuno dei 3 casi sopra elencati a cui possiamo giungere corrispondono soluzioni per il sistema PDE:
(I)Quando la distribuzione è involutiva sarà possibile trovare delle varietà integrali massimali, che per il teorema di Frobenius possono essere definite dall'annullarsi di opportune coordinate. Quindi scegliendo coordinate adattate alla distribuzione $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_{r+1}, ..., \beta_m$ le varietà integrali saranno gli insiemi di livello delle β_i; le soluzioni del sistema saranno quindi:

$$u(x) = F(\beta_i); \quad i : r+1, ..., m \tag{37}$$

(II) Quando possiamo completare la distribuzione ad una $\widetilde{D}$ che è involutiva, ricadiamo nel caso (I) per la distribuzione $\widetilde{D}$, l'unica cosa da controllare è che $\widetilde{D}$ sia regolare sulla sottovarietà su cui è definita D. (III)Quando D non è involutiva e non può essere completata il sistema è incompatibile(i.e non esistono soluzioni non banali).

8.1 Sistema di tipo (I)

Consideriamo su $\mathbb{R}^4$ i due campi vettoriali:

$$\begin{aligned} X &= \partial_1 + x_4 \partial_4 \\ Y &= \partial_2 + x_3 \partial_3 \end{aligned} \tag{38}$$

Da notare che qui non utilizziamo più la convenzione di Einstein per non confondere il linguaggio.
Si verifica facilmente che $[X, Y] = 0$, la distribuzione generata dai campi $\{X, Y\}$ è quindi involutiva ed ha dimensione $r = 2$.Ci aspettiamo quindi di trovare $m - r = 4 - 2 = 2$ soluzioni indipendenti.
Cerchiamo delle funzioni invarianti per i campi separatamente: ad esempio possiamo prendere $\beta_1 = x_4 e^{-x_1}$ e $\beta_2 = x_3 e^{-x_2}$ rispettivamente per X, Y è immediato però verificare che si ha anche $X(\beta_2) = Y(\beta_1) = 0$. Abbiamo quindi ricavato due funzioni invarianti sotto i campi della distribuzione e linearmente indipendenti: la soluzione sarà:

$$u(x) = F(\beta_1, \beta_2) \tag{39}$$

8.2 Sistema di tipo (II)

Sempre in $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due campi di vettori:

$$\begin{aligned} X &= x_1 \partial_1 + x_3 \partial_3 - x_1 x_3 \partial_4 \\ Y &= x_1 \partial_2 - x_1^2 \partial_3 - x_3 \partial_4 \end{aligned} \tag{40}$$

Si verifica subito che $[X, Y] = Y + x_1^3 \partial_4$ e che quindi i campi non sono in involuzione; tuttavia possiamo rendere la distribuzione involutiva aggiungendo proprio il campo $Z = x_1^3 \partial_4$. In questo modo abbiamo:

$$\begin{aligned} &[X, Y] = Y + Z \\ &[Y, Z] = 0 \\ &[X, Z] = 3Z \end{aligned} \tag{41}$$

Il sistema completo $\widetilde{A}$(di rango 3) ammette quindi $m - r = 1$ soluzioni indipendenti.
Notiamo ora che le serie derivate soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &A_0 = \widetilde{A} \\ &[A_0, A_0] = \{Y, Z\} = A_1 \subset A_0 \\ &[A_1, A_1] = \{Z\} = A_2 \subset A_1 \\ &[A_2, A_2] = 0 = A_3 \subset A_2 \end{aligned} \tag{42}$$

Notiamo subito che Z ammette tre soluzioni indipendenti(per come è definito) che sono x_1, x_2, x_3.
A questo punto cerchiamo delle soluzioni per il campo Y ristretto al sottospazio generato da (x_1, x_2, x_3);troviamo:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 - x_1 x_2 \end{aligned} \tag{43}$$

Potremmo (anche se non è necessario) completare l'insieme di generatori scegliendo altre due coordinate y_3, y_4 e riscrivere i campi con le nuove coordinate.In questo caso per giungere alla soluzione basta notare che al passo successivo cercheremo una funzione di y_1, y_2 che sia invariante sotto la restrizione di X al piano generato da (y_1, y_2); una soluzione immediata (si verifica subito) è $\zeta = \frac{y_2}{y_1}$. Tornando alle variabili x abbiamo trovato la soluzione dell'equazione differenziale, che è:

$$\zeta = \frac{x_3 - x_1 x_2}{x_1} \tag{44}$$

8.3 Forme Differenziali

Consideriamo l'equazione:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{d\Phi}{du} = f(u) \tag{45}$$

Che quando x è il tempo fisico ed u la posizione della particella, rappresenta il moto in una dimensione sotto l'azione di un potenziale Φ.
Questa equazione è descritta dall'annullarsi di due 1-forme:

$$\begin{aligned} \alpha &= du - vdx \\ \omega &= dv - fdx \end{aligned} \tag{46}$$

Scriveremo un generico campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ come:

$$X = \xi\partial_x + \phi\partial_u + \psi\partial_v \tag{47}$$

Chiediamo ora che $D = Ann(\Omega)$ dove $\Omega = \{\alpha, \omega\}$ e ricaviamo come soluzioni:

$$\begin{aligned} \phi &= v\xi \\ \psi &= f\xi \end{aligned} \tag{48}$$

Il che porta a dire che la distribuzione D è generata dal campo:

$$X = \partial_x + v\partial_u + f\partial_v \tag{49}$$

Notiamo che l'integrabilità segue dal fatto che:

$$\begin{aligned} d\alpha &= dx \wedge dv = dx \wedge \omega \\ d\omega &= f'(u)dx \wedge du = f'(u)dx \wedge \alpha \end{aligned} \tag{50}$$

Inoltre vale anche che $\mathcal{L}_X(\omega) \subset \Omega$; ifatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha) &= X \lrcorner\, d\alpha = \xi(dv - fdx) = \xi\omega \\ \mathcal{L}_X(\omega) &= X \lrcorner\, d\omega = f'(u)\xi(du - vdx) = f'(u)\xi\alpha \end{aligned} \tag{51}$$

8.4 Compatibilità di un sistema

Consideriamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A(x, y, u) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= A(x, y, u) \end{aligned} \tag{52}$$

Sappiamo che il sistema ammette soluzioni quando vale la condizione $u_{xy} = u_{yx}$, ovvero:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} A \tag{53}$$

Trattiamo il sistema con il formalismo delle forme: questo può essere rappresentato dall'annullarsi di $\omega = du - Adx - Bdy$.L'annullatore sarà generato dai campi:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x + A\partial_u \\ X_2 &= \partial_y + B\partial_u \end{aligned} \tag{54}$$

Quindi se le varietà integrali esistono(il sistema è risolvibile) devono essere tangenti ai due campi: la condizione perchè sia vera l'affermazione è che i campi siano in involuzione:

$$[X_1, X_2] = [(B_x + AB_u) - (A_y + BA_u)]\partial_u \tag{55}$$

Il campo ottenuto non è parallelo ne a X_1 o X_2, l'unico modo per avere l'involutività è chiedere $[X_1, X_2] = 0$; che corrisponde alla richiesta (53).