Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

*Esame di Geometria Differenziale*

# *Le Varietá di Einstein*

*Prof. Anna Fino*

*Federico Chiaffredo*

# Indice

# 1 Introduzione

Lo scopo di questo seminario è quello di introdurre il concetto di varietà di Einstein , in particolare introdurremo alcuni teoremi generali e poi ci concentreremo sul caso delle varietà omogenee ricavando un teorema di classificazione. Infine mostreremo che è possibile vedere le metriche di Einstein come punti critici di un dato funzionale, in questo senso si può intuire il motivo per cui queste metriche possano essere considerate migliori di altre (come nel caso di dimensione 2 quelle a curvatura costante) tramite un ponte con la fisica matematica, infatti possiamo pensare alle metriche di Einstein come soluzioni dell'equazione di Einstein nel vuoto, e con questa interpretazione, la curvatura scalare rappresenta la densità lagrangiana nell'azione di Einstein-Hilbert.

# 2 Risultati preliminari

Ricordiamo velocemente alcuni risultati necessari per introdurre le varietà di Einstein.

**Definizione 1.** *Sia (M,g) una varietà Riemanniana, una connessione lineare su M è un'applicazione* $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ *tale che:*
*I)* $\nabla$ *é* $C^\infty(M)$ *lineare nel primo argomento (i.e.* $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$ $\forall f, g \in C^\infty(M), X, Y \in \chi(M)$*)*
*II)*$\nabla$ *è una* $C^\infty(M)$ *derivazione rispetto al secondo argomento (i.e.* $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ $\forall f \in C^\infty(M), X.Y \in \chi(M)$*)*
*III)*$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ *,* $Y_1 Y_2, X \in \chi(M)$

**Definizione 2.** *Data una connessione* $\nabla$ *su una varietà differenziabile* $(M, g)$ *e preso un campo vettoriale* $X \in \chi(M)$ *chiamiamo l'operatore* $\nabla_X : \chi(M) \to \chi(M)$ *derivata covariante*

Una volta che abbiamo fissato una connessione su $M$ possiamo cercare di esprimerla in coordinate locali. Fissiamo $(U, \phi)$ carta locale con coordinate locali $(x^1, .., x^n)$ ;abbiamo che $X = X^i\partial_i$ e $Y = Y^i\partial_i$ con $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$ . Quindi:

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^i\partial_i) = X(Y^i)\partial_i + Y^i\nabla_X\partial_i = X(Y^i)\partial_i + Y^i X^j \nabla_{\partial_j}\partial_i \tag{1}$$

A questo punto possiamo definire i simboli di Christoffel come:

**Definizione 3.** *Definiamo i simboli di Chritoffel di una connessione in coordinate locali, come:*

$$\Gamma^k_{ij}\partial_k = \nabla_{\partial_i}\partial_j \tag{2}$$

Osserviamo che possiamo generalizzare le connessioni lineari al caso di fibrati vettoriali più generali (otteniamo il caso lineare quando prendiamo come fibrato vettoriale $TM$)

**Definizione 4.** *Sia* $\pi : E \to M$ *un fibrato vettoriale su* $M$*, una connessione su* $E$ *è un'applicazione* $\nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ *dove* $\Gamma(E)$ *sono le sezioni differenziabili del fibrato; tale che:*
*I)*$\nabla_X s$ *è* $C^\infty(M)$ *lineare in* $X$
*II)*$\nabla_X s$ *è* $\mathbb{R}$*-lineare in* $s$
*III) è una derivazione.*

**Esempio** Come abbiamo già anticipato diremo che una connessione lineare su $M$ è una connessione su $TM$.
Un'altro esempio importante riguarda le connessioni piatte:
**Esempio (Connessione piatta)** Sia $E = M \times \mathbb{R}^n$ il fibrato banale su $M$ di rango $n$. Allora

esiste una frame globale $\{E_1, .., E_n\}$ e $\forall s \in \Gamma(E)$;$s = s^i E_i$ , con $s^i \in C^\infty(M) \forall i$.
Allora possiamo definire una connessione come:

$$\nabla_X s = X(s^i) E_i \tag{3}$$

**Proposizione 1.** *Ogni fibrato vettoriale $C^\infty$ su $M$ ammette una connessione*

La dimostrazione di questa proposizione segue da un classico argomento di partizione dell'unità applicato alle connessioni piatte che abbiamo definito in precedenza, l'osservazione da fare è che almeno localmente possiamo sempre definire una connessione piatta.

Fissata una connessione possiamo introdurre due operatori importanti, la Curvatura e la Torsione. Useremo la Torsione per definire particolari tipi di connessioni, mentre a partire dalla curvatura verranno definite delle quantità che ci permetteranno di introdurre le varietà di Einstein.

**Definizione 5.** *Data una connessione lineare $\nabla$ su $M$ definiamo l'operatore $T$, o torsione della connessione, come:*

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned} \tag{4}$$

*Osserviamo che $T$ è un campo tensoriale ($C^\infty(M)$ lineare di tipo $(1, 2)$)*

Definiamo a questo punto le connessioni simmetriche.

**Definizione 6.** *Una connessione lineare $\nabla$ su $M$ è detta simmetrica se non ha torsione, ovvero $T(X, Y) = 0 \ \forall X, Y \in \chi(M)$*

Un lemma importante che collega la caratterizzazione intrinseca con quella locale di queste particolari connessioni è questo:

**Lemma 1.** ***Caratterizzazione di una Connessione Simmetrica*** *Sia $\nabla$ una connessione lineare su $M$ , allora sono equivalenti:*
*I)$\nabla$ è simmetrica (a torsione $T(X, Y)$ nulla)*
*II)I simboli di Christoffel di $\nabla$ rispetto a qualsiasi sistema di coordinate locali soo simmetrici ($\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$)*

**Definizione 7.** *Una connessione $\nabla$ su $M$ è detta metrica, se $\nabla g = 0$ ; ovvero*

$$X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{5}$$

Osserviamo che non esiste un'unica connessione metrica; tuttavia se chiediamo che la connessione che consideriamo sia anche senza torsione, allora abbiamo l'unicità. In questo senso vale il teorema fondamentale della geometria riemanniana:

**Teorema 1.** *Sia $(M, g)$ una varietà Riemanniana, allora esiste un'unica connessione $\nabla$ metrica e senza torsione. Chiameremo questa connessione, connessione di Levi Civita, e la indicheremo con $\nabla^{LC}$*

La dimostrazone di questo teorema segue da una formula importante in geometria riemanniana:

**Teorema 2.** ***Formula di Koszul*** *Vale che:*

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ & + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \end{aligned} \tag{6}$$

La formula si dimostra scrivendo delle permutazioni circolari della condizione metrica e successivamente sommando e sottraendo le varie permutazioni.
A questo punto si osserva che la formula definisce una connessione lineare e si può verificare che non ha torsione.
Definiamo a questo punto la curvatura Riemanniana. D'ora in poi la coppia $(M,g)$ sarà sempre una varietà riemanniana, e salvo diverse indicazioni $\nabla = \nabla^{LC}$.

**Definizione 8.** *Data $(M,g)$ varietà riemanniana con connessione $\nabla^{LC}$ , possiamo definire il tensore di curvatura di $\nabla^{LC}$ come:*

$$R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad \forall X,Y,Z \in \chi(M) \tag{7}$$

In particolare, possiamo definire il tensore di curvatura riemanniano come un tensore di tipo$(0,4)$ tale che $R(X,Y,Z,W) = g(R_{XY}Z,W)$.

Osserviamo anche che si può dimostrare che il tensore di curvatura è invariante per isometrie.
A partire dal tensore di curvatura possiamo definire il tensore di Ricci come:

**Definizione 9.** *Tramite l'operatore di contrazione $C_i(A)$ con $A$ campo tensoriale di tipo $(1,s)$ che agisce come: $C_iA(X_1,..,X_{i-1},X_{i+1},..,X_S) = \Sigma_{j=1}^n g(A(X_1,..,X_{i-1},E_j,X_{i+1},..,X_S),E_j)$ con $\{E_i\}$ base ortonormale (le contrazioni non dipendono dalla base); possiamo definire il tensore di Ricci come:*

$$Ric = C_1R \tag{8}$$

*O meglio, $(C_1R)(Y,Z) = tr(X \longmapsto R(X,Y)Z) = \Sigma_i g(R(E_i,Y)Z,E_i)$*

**Osservazione** Il tensore di Ricci è di tipo $(0,2)$ ed è simmetrico.

Definiamo inoltre:

**Definizione 10.** *La traccia del tensore di Ricci è detta curvatura scalare, $Scal(g)$. Per definizione, $Scal(g) = \Sigma_{i,j} g(R_{E_iE_j}E_j,E_i)$*

# 3 Varietà di Einstein

A questo punto siamo pronti a definire le varietà di Einstein.
Data una varietà riemanniana $(M,g)$ possiamo costruire il tensore di Ricci, e osserviamo che sia $g$ che $Ric$ sono tensori di tipo $(0,2)$.

**Definizione 11.** *Diremo che $M$ è una varietà di Einstein se vale che*

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y) \qquad \forall X,Y \in \chi(M), \lambda \in C^\infty(M) \tag{9}$$

**Osservazione** Se calcoliamo la traccia rispetto a $g$ di ambo i membri otteniamo

$$Scal(g) = \lambda n \Rightarrow \lambda = \frac{Scal(g)}{n} \tag{10}$$

Da cui ricaviamo che la condizione per essere Einstein diventa $Ric(X,Y) = \frac{Scal(g)}{n} g(X,Y)$

La domanda che ci poniamo è la seguente, al variare della dimensione, esistono delle varietà di Einstein? se sì, esistono delle restrizioni affinchè data una qualunque varietà esista una metrica che la rende di Einstein?
La domanda è più profonda di quanto ci si aspetti; infatti per dimensioni maggiori o uguali a 5 tutt'ora non si è in grado di dire, ad esempio, se qualunque varietà compatta ammetta almeno una metrica di Eintein o no.
Per questo motivo ci concentreremo sulle dimensioni strettamente minori di 5.

# 4 Il caso dim(M)=2

Consideriamo una superficie Riemanniana. Dimostreremo che questo caso è poco interessante; infatti ogni metrica è di Einstein.
Abbiamo $R = kR_1$, con $k = k(p)$ curvatura di Gauss.
Allora:

$$Ric(X,X) = k\Sigma_{j=1}^{2} g(R_1(E_i,X)X,E_i) = kg(X,X) \tag{11}$$

Da cui segue che $Ric(X,Y) = kg(X,Y)$ con $k$ curvatura di Gauss. Prendendo la traccia ricaviamo che $Scal(g) = 2k$. Osserviamo che quindi in dimensione 2 non è detto in generale che $\lambda$ sia costante.

# 5 Il caso dim(M)$\geq 3$

Mostreremo che nel caso $dim(M) = 3$ una metrica è di Einstein se e solo se ha curvatura sezionale costante.
Osserviamo che già in dimensione 3 non tutte le varietà possono essere di Einstein; infatti se una varietà ammette una metrica con curvatura sezionale costante, allora il suo ricoprimento universale è isomorfo o alla 3−sfera o ad $\mathbb{R}^3$ (Teorema di Killing-Hopf). In particolare $\pi_2(M) = 0$. O meglio, ogni 2−sfera embedded in $M$ limita una 3−palla embedded in $M$. In questo senso diremo che $M$ è prima.
Da questo segue ad esempio che $S^2 \times S^1$ non ammette metriche con curvatura sezionale costante. E allo stesso modo nessuna varietà che ammette una decomposizione in somma connessa non banale $M = N\sharp P$ con $N, P$ non diffeomorfe a $S^3$.
Enunciamo e dimostriamo un teorema generale.

**Teorema 3.** *Sia $(M,g)$ una varietà di Einstein connessa,$dim(M) \geq 3$ ; allora $\lambda$ è costante.*

**Dimostrazione**

*Dimostrazione.* Usiamo le seguenti relazioni ricavabili dalla definizione di $\nabla_X R$:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X R)(Y,Z)V = -(\nabla_X R)(Z,Y)V \\ &g((\nabla_X R)(Y,Z)V,U) = -g((\nabla_X R)(Y,Z)U,V) \\ &g((\nabla_X R)(Y,Z)V,U) = g((\nabla_X R)(V,U)Y,Z) \end{aligned} \tag{12}$$

Inoltre abbiamo che

$$Tr(\nabla_X Ric) = 2div(Ric)(X) \tag{13}$$

Infatti abbiamo che $C_1\nabla_X R = \nabla_X C_1 R$ (in generale vale per ogni tensore di tipo $(1,s)$).
Da questo segue che $Tr(\nabla_X Ric) = Tr(\nabla_X C_1 R) = Tr(C_1(\nabla_X R))$ e scegliendo un frame ortonormale:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{i,j} g((\nabla_X R)(E_i, E_j)E_j, E_i)) = \text{Seconda identità di Bianchi} = \\
&= \Sigma_{i,j} g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_j, E_i)) + \Sigma_{i,j} g((\nabla_{E_j} R)(X, E_i)E_j, E_i)) = \\
&= \Sigma_{i,j}[g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_i, E_j)) + g((\nabla_{E_j} R)(E_i, X)E_i, E_j))] = \\
&2\Sigma_{i,j} g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_i, E_j)) = 2\Sigma_i C_1 \nabla_{E_i} R(X_i, E_i) = \\
&2\Sigma_i \nabla_{E_i}(C_1 R)(X_i, E_i) = 2\Sigma_i \nabla_{E_i} Ric(X_i, E_i) = 2(divRic)(X)
\end{aligned} \tag{14}$$

Introduciamo ora il Tensore di Einstein $G = Ric - \frac{1}{2}Scal(g)g$ e mostriamo che ha divergenza nulla; infatti si ha:

$$\begin{aligned}
&div(Ric)(X) = \frac{1}{2}Tr(\nabla_X Ric) \quad \text{Dalla relazione precedente } Tr(\nabla_X Ric) = 2div(Ric)(X) = \\
&= \frac{1}{2}\nabla_X Scal(g) \text{perchè } C_1\nabla_X A = \nabla(C_1 A) = \\
&\frac{1}{2}\Sigma_i(\nabla_{E_i} Scal(g))g(X, E_i) = \frac{1}{2}\Sigma_i \nabla_X(Scal(g)g)(X, E_i) - Scal(g)\nabla_{E_i} g(X, E_i) \\
&\text{Il secondo pezzo è uguale a zero perchè la connessione è metrica} = \\
&\frac{1}{2}div(Scal(g)g)(X)
\end{aligned} \tag{15}$$

Usiamo ora la definizione di tensore di Einstein per mostrare il teorema.
Sappiamo che $div(Ric) = div(\frac{Scal(g)}{2}g)$ (calcolando esplicitamete $div(G) = 0$ ); inoltre $g$ è di Einstein, quindi $Ric = \lambda g$. Sostituendo otteniamo:

$$div(Ric)(X) = div(\frac{Scal(g)}{2}g)(X) = div(\frac{Scal(g)}{2}g)(X) = \frac{n}{2}div(\lambda g)(X) \tag{16}$$

Ma ricordando che $g$ è metrica, ricaviamo che il pezzo di destra vale $\Sigma_i E_i(\lambda)g(X, E_i) = X(\lambda)$ per linearità.
Abbiamo quindi ricavato che:

$$div(\frac{Scal(g)}{n}g) = div(\frac{Scal(g)}{2}g) \tag{17}$$

Avendo per ipotesi che $n \geq 3$ ricaviamo che $\lambda$ dev'essere locamente costante, ma $M$ connessa implica finalmente che $\lambda$ è costante.
Per finire mostriamo che nel caso $dim(M) = 3$ la curvatura sezionale è costante.
Consideriamo $\{E_1, E_2, E_3\}$ base ortonormale. Ricordiamo che $K_{i,j} = K(E_i, E_j) = -R(E_i, E_j, E_i, E_j)$. per quanto riguarda il tensore di Ricci avremo:

$$\begin{cases} Ric(E_1, E_1) = K_{1,2} + K_{1,3} \\ Ric(E_2, E_2) = K_{1,2} + K_{2,3} \\ Ric(E_3, E_3) = K_{1,3} + K_{2,3} \end{cases} \tag{18}$$

In particolare se il Ricci è dato, questo determina in maniera unica la curvatura sezionale (si tratta di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite).
Per finire, se la varietà è di Einstein, abbiamo $K_{12} = K_{23} = K_{13} = \frac{\lambda}{2}$ e $\lambda$ è costante per quanto detto prima; osservando che la base è arbitraria abbiamo che la curvatura sezionale è costante. □

Inoltre abbiamo due importanti risultati riguardo le varietà di Einstein.

**Teorema 4.** *Siano* $(M, g_M)$ *e* $(N, g_N)$ *varietà di Einstein con la stessa costante* $\lambda$*; allora* $M \times (N, g_M + g_N)$ *è ancora ua varieteà di Einstein con costante* $\lambda$

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue osservando come si comporta il tensore di Ricci per una varietà prodotto.
Osserviamo innanzitutto che per $M = M_1 \times M_2$ con la metrica prodotto,e $X_i, Y_i \in TM_i$ valgono:

$$\begin{aligned} &I) g_M(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_{M_1}(X_1, Y_1) + g_{M_2}(X_2, Y_2) \\ &II)\, [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2]_M = [X_1, Y_1]_{M_1} + [X_2, Y_2]_{M_2}\,; \\ &III) \nabla^M_{X_1+X_2}(Y_1 + Y_2) = \nabla^{M_1}_{X_1}(Y_1) + \nabla^{M_2}_{Y_1}(Y_2) \end{aligned} \tag{19}$$

Infatti, la $I)$ è la definizione di metrica prodotto, la $II)$ è ottenibile calcolando l'espressione in coordinate:

$$\begin{aligned} &[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = \\ &X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2 - Y_1X_1 - Y_1X_2 - Y_2X_1 - Y_2X_2 = \\ &= X_1^i\partial_i(Y_1^k\partial_k) + X_1^i\partial_i(Y_2^k\partial_k) + X_2^i\partial_i(Y_1^k\partial_k) + X_2^i\partial_i(Y_2^k\partial_k) - \\ &- Y_1^i\partial_i(X_1^k\partial_k) - Y_1^i\partial_i(X_2^k\partial_k) - Y_2^i\partial_i(X_1^k\partial_k) - Y_2^i\partial_i(X_2^k\partial_k) = \\ &\left[X_1^i\partial_iY_1^k + X_1^i\partial_iY_2^k + X_2^i\partial_iY_1^k + X_2^i\partial_iY_2^k - Y_1^i\partial_iX_1^k - Y_1^i\partial_iX_2^k - Y_2^i\partial_iX_1^k - Y_2^i\partial_iX_2^k\right]\partial_k + \\ &+ X_1^iY_1^k\delta_{ik} + X_1^iY_2^k\delta_{ik} + X_2^iY_1^k\delta_{ik} + X_2^iY_2^k\delta_{ik} - Y_1^iX_1^k\delta_{ik} - Y_1^iX_2^k\delta_{ik} - Y_2^iX_1^k\delta_{ik} - Y_2^iX_2^k\delta_{ik} = \\ &= \left[X_1^i\partial_iY_1^k + X_1^i\partial_iY_2^k + X_2^i\partial_iY_1^k + X_2^i\partial_iY_2^k - Y_1^i\partial_iX_1^k - Y_1^i\partial_iX_2^k - Y_2^i\partial_iX_1^k - Y_2^i\partial_iX_2^k\right]\partial_k = \\ &= [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2] \end{aligned} \tag{20}$$

Mentre la $III)$ segue dalla formula di Koszul usando i risultati precedenti:

$$\begin{aligned} &2g\left(\nabla_{X_1+X_2}Y_1 + Y_2, (Z_1 + Z_2)\right) = \\ &(X_1 + X_2)(g(Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2)) + (Y_1 + Y_2)(g(X_1 + X_2, Z_1 + Z_2)) - \\ &- (Z_1 + Z_2)(g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)) + g([X_1 + X_2, Y_1 + Y_2], Z_1 + Z_2) \\ &- g([X_1 + X_2, Z_1 + Z_2], Y_1 + Y_2) - g([Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2], X_1 + X_2) \end{aligned} \tag{21}$$

Dalle identità sul commutatore e dalla definizione di metrica prodotto abbiamo:

$$\begin{aligned} &2g\left(\nabla_{X_1+X_2}Y_1 + Y_2, (Z_1 + Z_2)\right) = \\ &X_1g(Y_1, Z_1) + X_1g(Y_2, Z_2) + X_2g(Y_1, Z_1) + X_2g(Y_2, Z_2) + \\ &+ Y_1g(X_1, Z_1) + Y_1g(X_2, Z_2) + Y_2g(X_1, Z_1) + Y_2g(X_2, Z_2) - \\ &- Z_1g(X_1, Y_1) - Z_1g(X_2, Y_2) - Z_2g(X_1, Y_1) - Z_2g(X_2, Y_2) + \\ &g([X_1, Y_1], Z_1) + g([X_2, Y_2], Z_2) - g([X_1, Z_1], Y_1) - \\ &- g([X_2, Z_2], Y_2) - g([Y_1, Z_1], X_1) - g([Y_2, Z_2], X_2) \end{aligned} \tag{22}$$

Osserviamo ora che su $M = M_1 \times M_2$ la metrica prodotto è tale che

$$g(X_1, Y_1) = (g_{M_1} + g_{M_2})((X_1, \bar{0}), (Y_1, \bar{0})) = g_{M_1}(X_1, Y_1) \tag{23}$$

e che termini cone $X_2(g(Y_1, Z_1))$ vanno a zero perché la quantità $g(Y_1, Z_1) = g_{M_1}(Y_1, Z_1)$ è costante sul secondo fattore $M_2$ e che $X_2$ è una derivazione su $M_2$, quindi derivando una costante ottengo 0. A partire da questa identità per il tensore di Riemann ricaviamo che per il tensore di Ricci si ha:

$$Ric(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = Ric(X_1, Y_1) + Ric(X_2, Y_2) \tag{24}$$

Di conseguenza se sia $M_1$ che $M_2$ sono Einstein con la stessa costante anche il prodotto dev'essere Einstein. □

Osserviamo che il prodotto di varietà di Einstein con diversa costante in genere non è di Einstein.
Possiamo tuttavia descrivere i prodotti di questo tipo con un corollario del teorema di decomposizione di DeRham.

**Teorema 5.** *Se il tensore di Ricci di una varietà Riemanniana $(M, g)$ è parallelo ( ovvero$\nabla Ric = 0$) allora, almeno localmente, $M$ è il prodotto di un numero finito di varietà id Einstein.*

Possiamo chiederci se esistono restrizioni topologiche all'esistenza di metriche di Einstein, in dimensione qualunque non sono ancora state scoperte, tuttavia in dimensione 4 abbiamo un risultato importante: Sappiamo che un invariante topologico interessante per queste varietà è la caratteristica di Eulero, definita in questo modo: sia $b_i = dim(H^i(M, \mathbb{R}))$ l'i-esimo numero di Betti di $M$, allora:

$$\chi(M) = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i b_i \tag{25}$$

Ricordiamo alcuni esempi notevoli: $\chi(S^{2n}) = 2$ , $\chi(S^{2n+1}) = 0$ e $\chi(\mathbb{C}P^n) = n$ Sappiamo inoltre che quando $M$ è una varietà compatta orientata di dimensione $2n$ abbiamo il teorema di Gauss Bonnet generalizzato, che permette di ricavare la caratteristica di $M$ come integrale di un polinomio di grado $n$ nella curvatura.
Nel caso di dimensione 4 siamo in grado di svolgere i conti e ricavare delle formule esplicite e delle condizioni da imporre affinchè una data varietà sia di Einstein.
In particolare:

**Teorema 6.** *Sia $M$ una varietà compatta orientata e di Einstein di dimensione 4; allora*

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)| \tag{26}$$

*Dove abbiamo introdotto $\tau(M)$, ovvero il segno di $M$ come la traccia di una forma bilineare simmetrica su $H^2(M, \mathbb{Z})$, che in dimensione 4 può essere ricavata a partire da un'integrale che coinvolge le componenti irriducibili del tensore di Weil.*

In particolare nel caso di uguaglianza è stato dimostrato da Hitchin che il ricoprimento universale di $M$ è una superficie $K3$ ovvero una superficie complessa con prima classe di Chern nulla e nessuna 1-forma olomorfa globale.
Fin'ora abbiamo osservato quindi che una condizione necessaria affinchè una varietà sia di Einstein è quella di avere curvatura scalare costante (la condizione, tuttavia, non è sufficiente come si vede nell'esempio di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ con metrica prodotto) Cosa possiamo dire se consideriamo una varietà omogenea?

# 6 Varietà Omogenee

**Definizione 12.** *Una varietà riemanniana è detta omogenea se il gruppo delle isometrie $Iso(M, g)$ agisce transitivamente su $M$ (ovvero $\forall x, y \in M \exists f \in Iso(M, g) : f(x) = y$)*

**Definizione 13.** *Una varietà è detta $G-$omogenea (con $G$ gruppo di Lie)se $G$ è un sottogruppo chiuso di $Iso(M, g)$ che agisce transitivamente su $M$.*

**Osservazione** Non è detto che $G$ sia tutto$Iso(M, g)$ come controesempio possiamo considerare il gruppo delle isometrie dello spazio Euclideo, il cui sottogruppo delle traslazioni agisce transitivamente sullo spazio.
Inoltre l'ipotesi di chiusura non è strettamente necessaria, serve solo a semplificare alcuni risultati che otterremo.

**Definizione 14.** *Il sottogruppo di isotropia in un punto $x \in M$di $(M, g)$ è definito come il sottogruppo $K_x \subset Iso(M, g)$ tale che $K_x = \{f \in G \subset Iso(M, g) : f(x) = x\}$*

**Osservazione** Se $G$ è un sottogruppo chiuso di $Iso(M, g)$ ; $K_x$ è un sottogruppo compatto di $Iso_x(M, g)$
**Osservazione** Con le definizioni che abbiamo dato, $G$ agisce effettivamente su $G/K$ ; ovvero $K$ non contiene sottogruppi normali non banali di $G$.
**Finezza** In genere, dato un gruppo di Lie $G$ e un sottogruppo compatto $K$, non è detto a priori che $G$ agisca effettivamente su $G/K$. In questi casi si deve considerare $C$ il sottogruppo normale massimale di $G$ contenuto in $K$; allora si può dimostrare che $G' = G/C$ agisce effettivamente su $G/K(= G'/K'$ con $K' = K/C))$
**Esempi**

- $\mathbb{RP}^n$ è uno spazio omogeneo, infatti $\mathbb{RP}^n = SO(n + 1)/O(n)$.

- Lo spazio iperbolico è uno spazio omogeneo $H^n = SO_0(n, 1)/SO(n)$. dove $SO_0(n, 1)$ è la componente connessa all'identità del gruppo ortogonale $O(n, 1)$ delle forme quadratiche su $\mathbb{R}^{n+1}$ con segnatura $(1, n)$.

D'ora in poi quindi avremo $K_x = G \cap Iso_x(M, g)$ sottogruppo compatto di $G$ e $M$ varietà riemanniana sarà diffeomorfa a $G/K$. In particolare, $M$ è compatta se e solo se $G$ è compatto. Si può dimostrare un teorema importante:

**Teorema 7.** *Una varietà riemanniana omogenea è geodeticamente completa.*

Tralasciamo la dimostrazione di questo fatto in quanto lunga e laboriosa.
Il fatto interessante è che possiamo definire su una varietà omogenea le nozioni di curvatura a partire da prodotto scalari sull'algebra di Lie e vettori di Killing.
Osservando che le varietà riemanniane con curvatura sezionale costante sono di Einstein abbiamo che le seguenti varietà omogenee sono di Einstein:

- $(\mathbb{S}^n, g_{can})$

- $(\mathbb{R}^n, g_{eucl})$

- $(H^n, g_{can})$

Con un ragionamento più complicato si può mostrare che anche $\mathbb{CP}^n$ con la metrica standard è di Einstein.
Se ambientiamo questi esempi in dimensione 4, a meno di prodotti si può dimostrare che questi sono (quasi) tutti i casi possibili, (per farlo si utilizza la classificazione di Ishihara per le varietà omogenee di dimensione 4) e quindi abbiamo questo teorema.

**Teorema 8.** *Una* $4-$ *varietà di Einstein omogenea è simmetrica.*

Per quanto riguarda teoremi generali su varietà omogenee possiamo enunciare il seguente:

**Teorema 9.** *Sia* $(M, g)$ *una varietà di Einstein con curvatura scalare positiva, allora* $M$ *è compatta con gruppo fondamentale finito.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione della prima affermazione segue dal teorema di Meyers, l'ultima segue dal fatto che se $G$ è connesso, semplicemente connesso e compatto, e $\Gamma$ è un sottogruppo finito di $G$, allora lo spazio omogeneo $M = G/\Gamma$ ha gruppo fondamentale $\Gamma$ che agisce con moltiplicazione a destra sul suo ricoprimento universale, $G$ □

Il problema di classificare le varietà compatte, semplicemente connesse e omogenee che ammettono una metrica id Einstein $G-$invariante in dimensione maggiore è un problema tutt'oggi aperto.
Un'altro problema aperto è il seguente: dato uno spazio compatto semplicememte connesso e omogeneo, l'insieme delle metriche di Einstein G-invarianti è finito (a meno di omotetie)?

**Teorema 10.** *Sia* $(M, g)$ *una varietà di Einstein omogenea con curvatura scalare negativa, allora* $M$ *e* $G$ *sono non compatti.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dal teorema di Bochner, che afferma che in caso di tensore di Ricci negativo (ovvero $Ric(X, X) < 0$ $\forall X$ vettore tangente), allora non esistono campi vettoriali di Killing non nulli ed il gruppo delle isometrie $Iso(M, g)$ è finito. □

**Teorema 11.** *Una varietà omogenea Ricci-piatta, è piatta.*

*Dimostrazione.* Usando il teorema di Cheegeer-Gromoll (le varietà Riemanniane complete $(M, g)$ e connesse con $Ric \leq 0$ sono prodotti Riemanniani del tipo $(\bar{M} \times \mathbb{R}^q, \bar{g} \times g_{can})$ con $(\bar{M}, \bar{g})$ varietà riemanniana completa senza linee.) vediamo che il ricoprimento universale di $M$ è il prodotto fra uno spazio Euclideo ed una varietà omogenea semplicemente connessa e compatta $N$, tuttavia per le ipotesi che abbiamo $N$ è Ricci-piatta; allora per il teorema di Bochner si riduce ad un punto. □

Abbiamo quindi provato questo teorema di classificazione:

**Teorema 12.** *Sia* $(M, g)$ *una varietà omogenea di Einstein con curvatura scalare* $s$*; allora:*

- *Se* $s > 0$ *allora* $M$ *è compatta con gruppo fondamentale finito.*

- *Se* $s = 0$ *allora* $M$ *è piatta.*

- *Se* $S < 0$ *allora* $M$ *è non compatta.*

# 7 Il punto di vista funzionale

Data una varietà compatta, denotiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme delle metriche riemanniane su $M$.
Se denotiamo con $D$ il gruppo dei diffeomorfismo di $M$ abbiamo un'azione a destra di $\mathbb{R}/\{0\} \times D$ su $M$ data da:

$$(t, \phi) \cdot g = t^2 \phi^* g \tag{27}$$

Si osserva che due metriche sulla stessa orbita hanno le stesse proprietà geometriche (i volumi e le lunghezze variano in base al parametri $t$). Descriviamo le classi di isometria delle metriche come $\mathcal{M}/D$ (che chiameremo anche spazio delle strutture riemanniane).

**Definizione 15.** *Una funzione a valore reali $F$ tale che $F(\phi^* g) = F(g)$ per ogni $\phi$ e $g \in \mathcal{M}$ è detta funzionale Riemanniano.*

**Osservazioni**

- Dal momento che $\phi$ è per definizione un'isometria fra $(M, g)$ e $(M, \phi^* g)$; il funzionale $F$ può essere visto come un funzionale sullo spazio quoziente $\mathcal{M}/D$.
- Come controesempio il funzionale che ad ogni punto associa la curvatura scalare ($g \mapsto s_g(p)$) non è riemanniano.
- I funzionali che studieremo noi saranno del tipo $g \mapsto \int_M L(g)\mu_g$

**Definizione 16.** *Diremo che un funzionale $F$ è $k$ volte differenziabile se esiste un'intero $b$ tale per cui $F$ è differenziabile su $\mathcal{M}$ rispetto ad una qualche norma $L^2_b$ (spazi di Sobolev su varietà)*

Osserviamo che nel caso di semplici funzionali siamo in grado di studiare la differenziabilità; ad esempio se prendiamo $g \mapsto g \int_M P(R_g)\mu_g$ con $P$ polinomio, questo è un funzionale differenziabile; inoltre:

$$\frac{d}{dt} F(g + th)\_t = 0 = F'_g \cdot h = g(a, h) \tag{28}$$

Con $a$ $2-$tensore simmetrico che è polinomiale rispetto a $R_g$ e le sue derivate covarianti.

**Definizione 17.** *Un funzionale Riemanniano ha gradiente in $g$ se esiste un $a \in \mathcal{S}^2 M$ tale che, per ogni $h \in \mathcal{S}^2 M$ si ha:*

$$F'_g \cdot h =< a, h >_g \tag{29}$$

Denotiamo questa mappa come $gradF$ e osserviamo che se $F$ ha gradiente ovunque, allora la mappa $g \mapsto gradF_g$ definisce un campo vettoriale su $\mathcal{M}$.

**Teorema 13.** *Se $(M, g)$ è uno spazio omogeneo e con gruppo di isotropia irriducibile, con metrica canonica, allora per ogni funzionale riemanniano che ammette un gradiente esiste una costante $\lambda$ tale che $gradF_g = \lambda g$*

*Dimostrazione.* Abbiamo che $\phi^*(gradF_g) = gradF_g$ per ogni isometria. Se prendiamo un'isometria che sta nel gruppo delle isotropie in un puunto $p$ e usando l'irriducibilità abbiamo $gradF_g(p) = \lambda(p)g(p)$ e l'omogeneità implica $\lambda$ costante. □

**Definizione 18.** *Definiamo il funzionale curvatura scalare totale come $g \mapsto \int_M s_g \mu_g = S(g)$; questo funzionale è omogeneo di grado $n/2$, quindi spesso considereremo la sua restrizione ad $\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | \int_M \mu_g = 1\}$ che è omogeneo.*

**Osservazione** Il funzionale curvatura scalare totale è differenziabile e:

$$S'_g \cdot h =< \frac{s_g}{2} g - Ric_g, h >_g \tag{30}$$

Quindi $gradS_g = \frac{s_g}{2} g - Ric_g$

*Dimostrazione.* Ricordando che $s'_g \cdot h = \Delta(trh) + \delta(\delta h) - g(Ric, h)$ (usando il laplaciano $\Delta = dd^* - d^*d$ con dualità di Hodge...)ricaviamo che:

$$S'(g) \cdot h = \int_M (s'_g \cdot h + \frac{s_g}{2} trh)\mu_g =< \frac{s_g}{2} g - Ric_g, h >_g \tag{31}$$

Dove abbiamo usato la formula di Stokes per l'integrale. □

**Corollario** Per ogni varietà riemanniana; $\delta_g Ric_g + \frac{1}{2} ds_g = 0$; inoltre, se $dim(M) > 2$ e se esiste una funzione $f$ tale che $Ric_g = fg$ allora $f$ è costante e $(M, g)$ è di Einstin

*Dimostrazione.* Ricordiamo che $\delta(fg) = -df$; nel caso compatto la prima affermazione segue dall'osservare che $\delta_g(gradF_g) = 0$ e dal teorema precedente su$S'_g$.Per il caso generale su può osservare che la formula è locale dal momento che possiamo scegliere di variare $g$ in un insieme compatto.
Adesso, se $Ric = fg$ prendendo la divergenza e la traccia di ambo i membri otteniamo $\frac{1}{2} ds = df$ e $s = nf$ allora $ds = df = 0$ □

Abbiamo introdotto questi concetti per arrivare a questo teorema importante:

**Teorema 14.** *Per una varietà riemanniana compatta, con volume* 1 *sono equivalenti:*
*I)$(M, g)$ è Einstein*
*II)$g$ è un punto critico del funzionale $S$ ristretto a $\mathcal{M}_1$*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che :

$$T_g\mathcal{M}_1 = \{h \in \mathcal{S}^2 M | < h, g >= 0\} \tag{32}$$

Allora, $g$ è un punto critico di $S|_{\mathcal{M}_1}$ se e solo se la proiezione ortogonale del gradiente $S_g = \frac{s}{2} g - Ric$ su $T_g\mathcal{M}_1$ è zero.
Allora questo implica che esiste una $f$ tale che $Ric = fg$ allora per un teorema precedente $f$ è costante e abbiamo la tesi. □

# 8 Esempi

## 8.1 La sfera $S^2$

Consideriamo $(S^2, g_{can})$ con la metrica canonica e mostriamo che è di Einstein.
La metrica canonica sarà nella forma $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ la metrica e la metrica inversa saranno:

$$\begin{gathered} g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \\ g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{33}$$

Usando $\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{ml} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ji})$ ricaviamo:

$$\begin{gathered} \Gamma^\theta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ \Gamma^\phi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{34}$$

Da questi ricaviamo il tensore di Riemann usando $R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu} = \left(\partial_\sigma \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma}\right)$. Osserviamo che fra tutte le $16 = 2^4$ componenti del tensore, solo una è indipendente dalle altre e non nulla; scegliamo $R_{\theta,\phi\theta\phi}$ come componente indipendente; le altre saranno:

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = R_{\phi\theta\phi\theta} = -R_{\theta\phi\phi\theta} = -R_{\phi\theta\theta\phi} \tag{35}$$

Allora:

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta) - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\sin\theta\cos\theta) \\ &= -\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta \end{aligned} \tag{36}$$

E $R_{\theta\phi\theta\phi} = r^2 R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = r^2\sin^2\theta$.
Calcoliamo il Ricci $R_{hk} = g^{ab}R_{ahbk}$

$$\begin{aligned} &R_{\theta\theta} = g^{ab}R_{a\theta b\theta} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\theta\phi\theta} = \left(\tfrac{1}{r^2}\times 0\right) + \left(\tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\times r^2\sin^2\theta\right) \\ &R_{\theta\theta} = 1 \\ &R_{\phi\phi} = g^{ab}R_{a\phi b\phi} = g^{\theta\theta}R_{\theta\phi\theta\phi} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi\phi\phi} = \left(\tfrac{1}{r^2}\times r^2\sin^2\theta\right) + \left(\tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\times 0\right) \\ &R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \end{aligned} \tag{37}$$

E le componenti miste

$$\begin{aligned} &R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = g^{ab}R_{a\theta b\phi} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta\theta\phi} + g^{\phi\phi}R_{\phi\theta\phi\phi} = \left(\tfrac{1}{r^2}\times 0\right) + \left(\tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\times 0\right) \\ &R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

La curvatura scalare infine sarà:

$$\begin{aligned} R &= g^{ab}R_{ab} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= \left(\frac{1}{r^2}\times 1\right) + \left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\times\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{2}{r^2} \end{aligned} \tag{39}$$

Mettendo tutto assieme osserviamo che $R_{ij} - \frac{s}{2}g_{ij} = 0$ per ogni $i, j = 1, 2$.

## 8.2 Il semispazio di Poincaré

Consideriamo $(H^2, g_{can})$. Ovvero $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con la metrica data da $ds^2 = \frac{1}{y^2}dx^2 + dy^2$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix} \\ g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{40}$$

Ricordando i simboli di Christoffel di primo e secondo tipo abbiamo:

$$[\alpha\beta,\gamma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right) \qquad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}[\alpha\beta,\delta] \tag{41}$$

Segue dal conto esplicito che:

$$\begin{gathered} [12,1] = [21,1] = -[11,2] = [22,2] = -1/y^3 \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = -1/y \end{gathered} \tag{42}$$

Da cui ricaviamo con la solita formula il tensore di Riemann in componenti:

$$R^1_{212} = -R^1_{221} = R^2_{121} = -R^2_{112} = -1/y^2 \tag{43}$$

Le altre componenti non riportate sono tutte nulle.
Segue che:

$$R_{1122} = R_{2121} = -1/y^4 \qquad R_{1221} = R_{2112} = +1/y^4 \tag{44}$$

Da cui ricaviamo il tensore di Ricci:

$$R_{11} = R_{22} = -1/y^2 \qquad R_{12} = R_{21} = 0 \tag{45}$$

E la curvatura scalare:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = y^2\left(-1/y^2\right) + y^2\left(-1/y^2\right) = -2 \tag{46}$$

Anche in questo caso; $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$ e quindi la varietà è di Einstein.