Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Analisi su Varietà

Seminario di Analisi su Varietà

Prof. Lorenzo Fatibene
Prof. Sandro Coriasco

Federico Chiaffredo

Indice

1 Introduzione

Nella prima parte del seminario introdurremmo il concetto di simbolo principale di un operatore differenziale e studieremo il problema di Cauchy per operatori globali su varietà; utilizzeremo queste nozioni per studiare dei problemi ai dai iniziali presenti in fisica matematica, in particolare in teorie di Gauge come l'elettromagnetismo e la relatività generale.
Nella seconda parte invece dimostreremo invece che dato un operatore pseudodifferenziale su $L^p(\mathbb{R}^n)$ di Fredholm; allora è ellittico.

2 Prima Parte

2.1 Richiami generali

Ricordiamo che una teoria di campo si basa su un fibrato $\mathcal{C} = (C, M, \pi, F)$, detto fibrato delle configurazioni, le cui sezioni sono dette campi; in genere non assumeremo nessuna struttura particolare per questo fibrato (nè affine, nè vettoriale) dal momento che in molte situazioni di interesse (ad esempio in relatività generale, $Lor(M) \subset S_2(M)$ non è vettoriale sebbene sia un sottofibrato di un fibrato vettoriale.) la fibrazione non presenta qualche particolare struttura.
Assumiamo che la varietà di base, M sia connessa, orientata e paracompatta, con $dim(M) = m$.
Inoltre, $dim(C) = m + k$.
Lavoreremo su C, sempre in coordinate fibrate, con funzioni di transizione:

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu}(x) \\ y'^{i} = Y^{i}(x, y) \end{cases} . \tag{1}$$

Inoltre per trattare di PDE, dobbiamo introdurre il fibrato dei getti di ordine k: $J^kC = \Gamma(C)/\sim$ come quoziente sullo spazio delle sezioni del fibrato secondo la relazione di equivalenza tale che $\sigma_1 \sim \sigma_2 \leftrightarrow T^k() = T^k$.
Sul fibrato dei getti possiamo considerare "coordinate" fibrate $j^k y = \left(x^{\mu}, y^i, y^i_{\mu}, \ldots, y^i_{\mu_1 \ldots \mu_k}\right)$.
Dove le coordinate con gli indici in basso moralmente rappresentereanno le derivate dei campi rispetto alle coordinate x^{μ}, pertanto sono assunte simmetriche negli indici in basso.
Possiamo quindi sollevare le funzioni di transizione del fibrato al getto di ordine k, derivando k volte otteniamo:

$$y'^{i}_{\mu_1 \ldots \mu_k} = J^i_j(x, y) y^j_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} \overline{J}^{\sigma_1}_{\mu_1}(x) \ldots \overline{J}^{\sigma_{2k}}_{\mu_k}(x) + q^i_{\mu_1 \ldots \mu_k}\left(j^{k-1}y\right). \tag{2}$$

Ricordiamo che anche se C è un fibrato generico, il fibrato $\pi^k_{k-1} : J^kC \to J^{k-1}C$ è sempre affine; per questo motivo sappiamo definire la nozione di quasi-linearità per un'equazione senza assumere una struttura lineare del fibrato.
Studieremo un operatore differenziale come mappa $J^kC \to E$ con E fibrato vettoriale su M; con questa definizione, un equazione differenziale sarà il Kernel della mappa, che identifica una sottovarietà $S \subset J^kC$.
Scegliamo di rappresentare un operatore differenziale in questo modo perché è utile a stabilire una corrispondenza fra proprietà analitiche dell'operatore e proprietà geometriche della superficie, in particolare risulterà più utile studiare le proprietà dell'operatore che non dipendano dalle coordinate o dalle rappresentazioni locali.
Nell'ambiente del calcolo delle variazioni, gli operatori differenziali che studieremo sono quelli ottenuti con il morfismo di Eulero-Lagrange: se C è il fibrato delle configurazioni per una teoria di campo, data una lagrangiana di ordine k l'operatore di Eulero-Lagrange sarà:

$$\tilde{\mathbb{E}} : J^{2k}C \to V^*(C) \otimes A_m(M) \tag{3}$$

Con $\left(V(C), C, p, \mathbb{R}^k\right)$, fibrato dei vettori verticali e $V^*(C)$ il suo duale; $A_m(M)$ sarà il fibrato pullback del fibrato delle $m-$ forme lungo la proiezione $\pi : C \to M$.
Quando la lagrangiana è degenere, l'operatore di Eulero Lagrange può essere di ordine inferiore:

$$\mathbb{E} : J^d\mathcal{C} \to V^*(C) \otimes A_m(M) \tag{4}$$

In modo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} J^{2k}C \arrow[r, "\tilde{\mathbb{E}}"] \arrow[d, "\pi^{2k}_d"] & V^*(C) \otimes A_m(M) \\ J^dC \arrow[ur, "\mathbb{E}"] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Ovvero $\tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \circ \pi^{2k}_d$.

2.2 Esempio: Il caso non-quasilineare

In generale, se la lagrangiana è non degenere, le equazioni sono quasi lineari per costruzione, inoltre la quasilinearità è ancora presente nelle teorie di interesse fisico.
Tuttavia è possibile costruire lagrangiane che diano equazioni non quasi lineari, come nel caso del fibrato $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \pi, \mathbb{R}\right)$ su cui prendiamo coordinate $\left(x^1, x^2, y\right)$, dove possiamo definire una lagrangiana:

$$L = \frac{y}{\left(y_1\right)^2 + \left(y_2\right)^2}\left(y_{11}y_{22} - \left(y_{12}\right)^2\right) \tag{6}$$

Le equazioni di campo saranno

$$\frac{y_{11}y_{22} - \left(y_{12}\right)^2}{\left(y_1\right)^2 + \left(y_2\right)^2} = 0 \tag{7}$$

Che sono del secondo ordine (e non del quarto) e non quasi lineari.

2.3 Richiami generali

D'ora in poi assumeremo di lavorare sempre con equazioni quasi-lineari; possiamo rappresentare il morfismo $\mathbb{E}$ in coordinate:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_I\left(j^d y\right)\overline{d}y^I \otimes d\sigma \quad \mathbb{E}_I\left(j^d y\right) = e^{\alpha_1\ldots\alpha_d}_{IJ} y^J_{\alpha_1\ldots\alpha_d} + b_I\left(j^{d-1}y\right) \tag{8}$$

Dove il coefficiente del termine principale di $\mathbb{E}_I$ trasforma come:

$$e'^{\alpha_1\ldots\alpha_d}_{IJ} = \overline{J}(x)\overline{J}^K_I(x,y)\overline{J}^H_J(x,y)e^{\beta_1\ldots\beta_d}_{KH} J^{\alpha_1}_{\beta_1}(x)\ldots J^{\alpha_d}_{\beta_d}(x) \tag{9}$$

Osserviamo dalla legge di trasformazione, che se $e^{\beta_1\ldots\beta_d}_{KH}$ è non simmetrico (o non degenere) in una carta, non può diventarlo in un'altra.
Inoltre, in base alla teoria che si considera, le $e^{\beta_1\ldots\beta_d}_{KH}$ possono dipendere da (x, y) o da $(j^k y)$; in questo caso, le dipendenze vengono preservate nei cambi di trivializzazione, quando invece si ha dipendenza solo dalle (x), cambiando trivializzazione possiamo avere dipendenza da (x, y).
Consideriamo ora un morfismo

$$\sigma : S^d\left(T^*M\right) \to V^*(\mathcal{C}) \otimes V^*(\mathcal{C}) \otimes A_m(M) \tag{10}$$

Dove $S^d(T^*M)$ è la potenza $d-$esima simmetrizzata del fibrato cotangente, di cui viene preso il pullback con la proiezione $\pi : C \to M$(in generale prenderemo il pullback lungo $\pi^n : J^nC \to M$, se la teoria prevede la dipendenza delle derivate dei campi nei coefficienti).
In generale su $S^d(T^*M)$ abbiamo coordinate fibrate $\left(x^\mu, y^I, \dots, y^I_{\alpha_1\dots\alpha_n}, \xi_{\alpha_1\dots\alpha_d}\right)$ (simmetriche negli indici in basso); in coordinate fibrate:

$$\sigma\left(j^n y, \xi_{\alpha_1\dots\alpha_d}\right) = \sigma^{\alpha_1\dots\alpha_d}_{IJ}\left(j^n y\right)\xi_{\alpha_1\dots\alpha_d}\bar{d}y^I \otimes \bar{d}y^J \otimes d\sigma \tag{11}$$

Dove i coefficienti $\sigma^{\alpha_1\dots\alpha_d}_{IJ}$ trasformano come le $e^{\beta_1\dots\beta_d}_{KH}$ e $0 \le n \le d-1$.
Allora esiste una corrispondenza $1:1$ fra termini principali dell'operatore $\mathbb{E}$ e i morfismi σ.
Chiameremo σ simbolo principale.
Quando l'immagine di σ è contenuta in $S^2\left(V^*(\mathcal{C})\right) \subset V^*(\mathcal{C}) \otimes V^*(\mathcal{C})$ (proprietà che non dipende dalla trivializzazione) diremo che l'operatore è simmetrico.
Diremo infine che l'operatore è ellittico, se la sua immagine (esclusa la sezione nulla) è contenuta nelle forme bilineari simmetriche non degeneri.

2.4 Splitting ADM

RIcordiamo brevemente in consa consiste uno splitting ADM: data una varietà M, uno splittin ADM su M è un fibrato $(M, \mathbb{R}, t, \Sigma)$ che foglietta M (in genere lo spaziotempo) in una famiglia di varietà isomorfe a Σ. Chiameremo le fibre $\Sigma_s = t^{-1}(s)$ ipersuperficie sincrona, mentre la proiezione $t : M \to \mathbb{R}$ può essere pensata come la mappa che associa ad ogni evento un istante di tempo.
Con questa costruzione stiamo quindi selezionando una particolare coordinata (che in fisica rappresenterà il tempo) lungo cui assumiamo di modellizzare l'evoluzione dei fenomeni che osserviamo.
La varietà M può quindi essere coperta con coordinate (t, x^a) fibrate rispetto allo splittin ADM; ovvero i campi di coordinate saranno:

$$\begin{cases} t' = t'(t) \\ x'^a = x'^a(t, x) \end{cases} \tag{12}$$

Se adesso consideriamo un'operatore $\mathbb{E}$ del prim'ordine, possiamo rappresentarlo tramite lo splitting ADM in questo modo:

$$e_{IJ} y^J_0 + e^a_{IJ} y^J_a + b_I(t, x, y) = 0 \tag{13}$$

Dove stiamo assumendo $e_{IJ}(t, x, y)$ e $e^a_{IJ}(t, x, y)$ indipendenti dalle derivate prime dei campi.
Un operatore sarà detto simmetrico iperbolico se $e_{IJ}(t, x, y)$ è definito positivo e $e^a_{IJ}(t, x, y)$ è simmetrico negli indici (IJ).
Abbiamo un teorema importante:

Teorema 1. *Preso un operatore tale che $e_{IJ}(t, x, y)$ è definito positivo e $e^a_{IJ}(t, x, y)$ è simmetrico negli indici (IJ), e preso un dato iniziale in $H^k(M)$ con $k > \frac{m}{2} + 1$ allora abbiamo esistenza ed unicità della soluzione garantita in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ ed in un dato spazio di Sobolev (che dipende dalla regolarità del dato iniziale)*

In sintesi stiamo dicendo che per operatori simmetrico iperbolici del primo ordine vale il teorema di Cauchy.

2.5 Operatori del Secondo Ordine

Cerchiamo un teorema analogo al precedente per operatori quasi lineari del secondo ordine, ovvero operatori nella forma

$$e_{IJ}y^J_{00} + e^a_{IJ}y^J_{0a} + e^{ab}_{IJ}y^J_{ab} + b_I\left(j^1 y\right) = 0 \tag{14}$$

L'operatore è simmetrico iperbolico se e^{ab}_{IJ} e e_{IJ} sono simmetrici negli indici in basso, invertibili, non degeneri e definiti positivi.
Si può dimostrare che per questo tipo di operatori vale un analogo del teorema precedente e si può ottenere questo risultato studiando il generico problema al second'ordine e associandigli un sistema dinamicamente equivalente del primo per cui vale il teorema che abbiamo già enunciato.

Osservando i cambi di coordinate (che riportiamo) possiamo osservare che le proprietà come simmetrico e definito positivo si conservano con i cambi di trivializzazione.

$$\begin{cases} e_{LK} = J\left(\overline{J}^0_0\overline{J}^0_0 e'_{IJ}\right) J^I_L J^J_K \\ e^c_{LK} = J\left(2\overline{J}^0_0\overline{J}^c_0 e'_{IJ} + \overline{J}^c_a\overline{J}^0_0 e'^a_{IJ}\right) J^I_L J^J_K \\ e^{cd}_{LK} = J\left(\overline{J}^c_0\overline{J}^d_0 e'_{IJ} + \overline{J}^c_a\overline{J}^d_0 e'^a_{IJ} + \overline{J}^c_a\overline{J}^d_b e'^{ab}_{IJ}\right) J^I_L J^J_K \end{cases} \tag{15}$$

2.6 Simmetrizzazione

Nella parte precedente abbiamo mostrato che non è possibile rendere simmetrico un operatore che non lo è cambiando trivializzazione, come possiamo agire in questo caso?
Consideriamo un problema del primo ordine nella forma:

$$e_{IJ}y^J_0 + e^a_{IJ}y^J_a + b_I(x,y) = 0 \tag{16}$$

Possiamo scriverlo come

$$e_{IJ}y^J_0 + e^a_{[IJ]}y^J_a + e^a_{(IJ)}y^J_a + b_I(x,y) = 0 \tag{17}$$

Adesso, anziché cercare una soluzione al problema di partenza cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e_{IJ}y^J_0 + e^a_{(IJ)}y^J_a + b_I(x,y) = 0 \\ e^a_{[IJ]}y^J_a = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Adesso abbiamo due modi per procedere:

2.6.1 Primo metodo

In base ai campi che abbiamo sul fibrato C possiamo cercare un termine (che chiameremo "coda") che rende covariante il sistema precedente; in questo caso avremo:

$$\begin{cases} e_{IJ}y^J_0 + e^a_{(IJ)}y^J_a + b_I(x,y) - q_I = 0 \\ e^a_{[IJ]}y^J_a + q_I = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Adesso, la seconda equazione è un vincolo sulla superficie di Cauchy, e dal momento che non contiene derivate delle y è un vincolo sulla scelta dei dati iniziali.
A questo punto si può studiare l'ellitticità della seconda equazione, e se esiste sempre un'unica soluzione, per ogni soluzione possiamo definire un problema di Cauchy per la prima equazione che ora è simmetrico iperbolica, e quindi determina un'unica evoluzione dei campi.
La soluzione che abbiamo trovato è soluzione del problema di partenza (prima del sistema) con un assegnato dato iniziale.

2.6.2 Secondo Metodo

Se non riusciamo a trovare una coda che renda covariante il sistema, possiamo cercare un sistema di coordinate in cui la seconda equazione sia verificata (è il caso delle coordinate armoniche in relatività generale); se questo è sempre possibile, allora la prima equazione determina un'unica evoluzione dei campi.
Osserviamo che l'operatore associato alla prima equazione non è l'operatore di partenza (è il suo simmetrizzato, in effetti); tuttavia, una soluzione dell'operatore simmetrizzato in un sistema di coordinate in cui è verificata anche la seconda equazione è una soluzione del problema di partenza.
Infine, osservando che l'operatore da cui partivamo è covariante, conoscendo la soluzione in un particolare sistema di coordinate la conosciamo per ogni sistema di coordinate.
Osserviamo che in entrambi i casi non stiamo in realtà risolvendo l'equazione iniziale, infatti nel primo metodo abbiamo aggiunto un vincolo covariante, mentre nel secondo la soluzione trovat coincide con la soluzione del problema iniziale solo in un particolare sistema di coordinate.

2.7 Esempi

Applichiamo ora i risultati ricavati al caso dell'elettromagnetismo:
Lavoriamo sullo spazio di Minkowsky $(\mathbb{R}^4, \eta)$ e prendiamo coordinate cartesiane in modo che $\eta = \mathrm{diag}(-+++)$.
Il fogliettamento ADM sarà $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : x^\mu \mapsto x^0$ e quindi le ipersuperfici isocrone saranno: $S_t = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 = t\}$.
Sul fibrato che stiamo studiando (C) abbiamo coordinate (x^μ, A_μ) ed i campi possono essere scritti nel formalismo ADM come:

$$A = A_0 \quad \vec{A} = A_i \tag{20}$$

Che rappresentano un campo scalare ed uno vettoriale su $S = \mathbb{R}^3$.
Possiamo definire successivamente le forze di campo come:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} := d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu \\ F^{\mu\nu} := \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{21}$$

Anche questa quantità può essere scritta in ADM ponendo:

$$begincases F_{0i} = d_0A_i - d_iA_0 F_{ij} = d_iA_j - d_jA_i \quad \Rightarrow \begin{cases} B^k := \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij} = (\mathrm{curl}(\vec{A}))^k \\ E^i := F^{0i} \end{cases} \tag{22}$$

La lagrangiana di Maxwell ci dà la dinamica, e può essere scritta nella forma:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(|E|^2 - |B|^2\right) \tag{23}$$

Le equazioni di campo saranno di conseguenza:

$$d_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{24}$$

Che scritte in ADM diventano:

$$\begin{cases} d_iF^{i0} = 0 \\ d_0F^{0i} + d_jF^{ji} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot E = 0 \\ d_0E - (\nabla \times B) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

La prima equazione è chiaramente un vincolo, mentre la seconda rappresenterà l'evoluzione; possiamo riscriverla come:

$$d_0 E^i - \epsilon^{ijk} d_j B_k = 0 \tag{26}$$

Dalla simmetria di Gauge ($A'_\mu = A_\mu + d_\mu \alpha$) possiamo imporre il cosiddetto Gauge temporale, ovvero poniamo $A_0 = 0$. Allora con questo Gauge i campi fisici saranno A_i.
In questi termini l'equazione di evoluzione sarà:

$$\begin{cases} B^k := \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{ij} = \epsilon^{kij} d_i A_j \\ E^i := F^{0i} = -d_0 A_i \end{cases} \tag{27}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\delta^{im} \partial_{00} A_m + \left(\delta^{i(l}\delta^{j)m} - \delta^{im}\delta^{jl}\right) \partial_{jl} A_m = 0 \tag{28}$$

Ci siamo quindi ricondotti alla forma "standard" per i problemi al primo ordine, dove abbiamo:

$$e^{ij} = \delta^{ij} \quad e^{imjl} = \left(\delta^{i(l}\delta^{j)m} - \delta^{im}\delta^{jl}\right) \tag{29}$$

Osserviamo che e^{ij} è simmetrico, definito positivo e non degenere (è una metrica riemanniana sullo spazio dei campi fisici) e che e^{imjl} è simmetrico in (im).
L'equazione risulta quindi essere simmetrico iperbolica e, fissato un dato iniziale, determina univocamente il potenziale vettore, che a sua volta determina campo elettrico e magnetico secondo la relazione precedente.
La stessa relazione ci garantisce che alche le altre equazioni di Maxwell siano verificate; infatti si ha:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot B = \epsilon^{kij} d_{ik} A_j = 0 \\ \partial_0 B + \nabla \times E = \epsilon^{kij} d_{i0} A_j - \epsilon^{kij} d_{0i} A_j = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

Infine, se consideriamo le equazioni di Maxwell come equazioni per il campo elettrico e magnetico, abbiamo le solite equazioni:

$$\begin{cases} \partial_i E^i = 0 \\ \partial_i B^i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_{ik} d_0 E^k + \epsilon^j_{ik} \partial_j B^k = 0 \\ \delta_{ik} d_0 B^k - \epsilon^j_{ik} \partial_j E^k = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Le prime due equazioni sono di vincolo, mentre le ultime due rappresentano l'evoluzione per il campo $E^A = \left(E^k, B^k\right)$.
In questo caso i termini principali saranno:

$$e_{AB} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{pmatrix} \quad e^j_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^j_{ik} \\ -\epsilon^j_{ik} & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Anche in questo caso, e_{AB} è simmetrico definito positivo e non degenere, mentre e^j_{AB} è simmetrico, quindi l'evoluzione dei campi è determinata univocamente assegnato un dato iniziale.
La seconda equazione di vincolo ($\nabla \cdot B = 0$) ci dice che deve esistere un $\vec{A}$ tale che $B = \nabla \times \vec{A}$; a questo punto la seconda equazione di evoluzione ci dice che $\vec{E} = -\partial_0 \vec{A}$ ed abbiamo ritrovato la precedente impostazione variazionale.

3 Seconda Parte

3.1 Introduzione

In questa parte cercheremo di dimostrare che se un operatore con simbolo in S^m, $-\infty < m < \infty$ è di Fredholm su $L^p(\mathbb{R}^n)$ allora è ellittico.
Dimostreremo inizialmente la proposizione per operatori con simbolo in S^0 e poi generalizzeremo a classi di simboli arbitrarie.
Facciamo alcuni richiami di concetti che saranno utili.
Per $m \in (-\infty, \infty)$ sia S^m l'insieme di tutte le funzioni in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tali che per ogni multi-indice α e β esiste una costante positiva $C_{\alpha\beta}$ tale che:

$$|(D_x^\alpha D_\xi^\beta)\sigma)(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n \tag{33}$$

Se prendiamo $\sigma \in S^m$, possiamo definire il corrispondente operatore pseudodifferenziale, T_σ sullo spazio delle funzioni di Schwartz $\mathcal{S}$ come:

$$(T_\sigma \phi)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{34}$$

Si può provare facilmente che $T_\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è una mappa lineare e continua, in particolare si può estendere ad un operatore lineare limitato da $H^{s,p}$ a $H^{s-m,p}$ per $-\infty < s < \infty$ e $1 < p < \infty$. lo scopo di questo seminario sarà quindi quindi quello di provare che se $T_\sigma : H^{s,p} \to H^{s-m,p}$ è di Fredholm per qualche s, p, allora è ellittico.
Intendiamo ellittico nel senso in cui esistono costanti positive C, R tali che:

$$|\sigma(x,\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \geq R \tag{35}$$

Sappiamo già che il viceversa di quello che dimostreremo non è vero: infatti un operatore ellittico non è necessariamente di Fredholm; si veda ad esempio il caso del Laplaciano Δ.
Prendiamo ora $m_1, m_2 \in (-\infty, \infty)$ e consideriamo lo spazio S^{m_1,m_2} delle funzioni in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tali che per ogni multi-indice α, β esistono costanti positive tali che:

$$|(D_x^\alpha D_\xi^\beta)\sigma)(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} < x >^{m_2-|\alpha|} < \xi >^{m_1-|\beta|} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n \tag{36}$$

Per ogni $\sigma \in S^{m_1,m_2}$ e per ogni multi-indice α, β definiamo anche:

$$p_{\alpha\beta}^{m_1,m_2}(\sigma) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} \{|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi) < x >^{-m_2+|\alpha|} < \xi >^{-m_1+|\beta|}\} \tag{37}$$

Una funzione in S^{m_1,m_2} è detta simbolo principale globale (o SG simbolo) di ordine m_1, m_2.
Risulta ovvio che se σ appartiene a S^{m_1,m_2} allora $\sigma \in S^{m_1}$, con S^{m_1} classe dei simboli degli operatori pseudo-differenziali classici.
Con un'analoga costruzione possiamo definire gli operatori pseudo-differenziali con simbolo in S^{m_1,m_2}; ricordando che la trasformata di una funzione in $\mathcal{S}$ è definita come:

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{38}$$

Anche in questo caso l'operatore definito sarà lineare e continuo del tipo $T_\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

3.2 Spazi di Sobolev

Introduciamo innanzitutto una particolare classe di operatori definiti come:

$$J_{s_1,s_2} = T_{\sigma_{s_1,s_2}} \tag{39}$$

Dove $\sigma_{s_1,s_2}(x,\xi) =< x >^{-s_2}< \xi >^{-s_1}$ con $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n$.
Da questo segue che $\sigma_{s_1,s_2} \in S^{-s_1,-s_2}$.
Definiamo ora gli spazi di L^p- spazi di Sobolev per $1 < p < \infty$ e per $-\infty < s_1, s_2 < \infty$ come:

$$H^{s_1,s_2,p} = \{u \in \mathcal{S}' : J_{-s_1,-s_2}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \tag{40}$$

Con questa definizione,$H^{s_1,s_2,p}$ è uno spazio di Banach con norma $||.||_{s_1,s_2,p}$ definita come:

$$||u||_{s_1,s_2,p} = ||J_{s_1,s_2}u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad u \in H^{-s_1,-s_2,p} \tag{41}$$

Per costruzione quindi $H^{0,0,p} = L^p(\mathbb{R}^n)$.
Enunciamo un teorema importante;

Teorema 2. *Sia $\sigma \in S^{m_1,m_2}$, $-\infty < m_1, m_2 < \infty$, allora per ogni p tale che $1 < p < \infty$ e $-\infty < s_1, s_2 < \infty$, $T_\sigma : H^{s_1,s_2,p} \to H^{s_1-m_1,s_2-m_2,p}$ è un operatore lineare limitato.*

3.3 Operatori Ellittici

Consideriamo $\sigma \in S^{m_1,m_2}$, $-\infty < m_1, m_2 < \infty$; diremo che un simbolo è ellittico se esistono costanti positive C, R tali che:

$$|\sigma(x,\xi)| \geq C < x >^{m_2}< \xi >^{m_1} \quad |x| + |\xi| \geq R \tag{42}$$

Infine, un operatore con simbolo ellittico sarà detto ellittico. Enunciamo alcuni risultati fondamentali:

Teorema 3. *Sia $\sigma \in S^{m_1,m_2}$, $-\infty < m_1, m_2 < \infty$ ellittico; allora esiste un simbolo $\tau \in S^{-m_1,-m_2}$ tale che:*

$$T_\sigma T_\tau = I + S \qquad T_\tau T_\sigma = I + R \tag{43}$$

Con S, R operatori regolarizzanti(ovvero hanno simbolo in $\cap_{k_1,k_2 \in \mathbb{R}} S^{k_1,k_2}$). L'operatore T_τ sarà detto parametrix di T_σ.
Ricordiamo che gli operatori di Fredholm sono tali per cui hanno $N(A)$ e $N(A^*)$ di dimensione finita (dove N rappresenta il nullspace).
Per questi operatori possiamo definire un indice come:

$$i(A) = dim(N(A)) - dim(N(A^*)) \tag{44}$$

Una condizione analoga a quella appena citata è la seguente, che tornerà utile in seguito:un operatore è di Fredholm se è invertibile modulo compatti; più rigorosamente:

Teorema 4. *Sia A un operatore lineare chiuso fra $X \to Y$ spazi di Banach; allora A è di Fredholm se e solo se esistono $K_1 : X \to X$, $K_2 : Y \to Y$ e $B : Y \to X$ (K_1, K_2compatti e B limitato)tali che $BA = I + K_1$ su $Dom(A)$ e $AB = I + K_2$ su Y*

3.4 Ellitticità di operatori di Fredholm

Per dimostrare che gli operatori pseudo-differenziali di Fredholm sono ellittici ci serve un po di preparazione.
Introduciamo un nuovo operatore

Definizione 1. *Per $\lambda > 0$, $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{0\}$ e $\tau \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e per ogni $1 < p < \infty$ definiamo un operatore $R_\lambda : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, in questo modo:*

$$(R_\lambda (x_0, \xi_0) u)(x) = \lambda^{\tau n/p} e^{i\lambda x \xi_0} u(\lambda^\tau (x - x_0)) \tag{45}$$

Non è difficile dimostrare che:

Teorema 5. *L'operatore $R_\lambda(x_0, \xi_0) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria invertibile, con inverso*

$$\left(R_\lambda^{-1}(x_0, \xi_0) u\right)(x) = \lambda^{-\tau n/p} e^{-i\lambda\left(x_0 + \lambda^{-\tau} x\right)\xi_0} u\left(x_0 + \lambda^{-\tau} x\right) \tag{46}$$

Dimostrazione. Fissiamo $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R_\lambda := R_\lambda(x_0, \xi_0)$, prendiamo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$; allora si ha:

$$\|R_\lambda u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |R_\lambda u(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{\tau n} |u(\lambda^\tau (x - x_0))|^p \, dx \tag{47}$$

Con il cambio di variabile $y = \lambda^\tau (x - x_0)$ troviamo:

$$\|R_\lambda u\|_p = \|u\|_p \tag{48}$$

Quindi R_λ è un'isometria.
Poniamo ora $R_\lambda u(x) = v(x)$ e dalla definizione troviamo che:

$$v(x) = \lambda^{\tau n/p} e^{i\lambda x \xi_0} u(\lambda^\tau (x - x_0)) \tag{49}$$

Cambiando variabile $y = \lambda^\tau (x - x_0)$ otteniamo:

$$u(y) = \lambda^{-\tau n/p} e^{-i\lambda\left(x_0 + \lambda^{-\tau} y\right)\xi_0} v\left(x_0 + \lambda^{-\tau} y\right) \tag{50}$$

E quindi:

$$R_\lambda^{-1} v(y) = \lambda^{-\tau n/p} e^{-i\lambda\left(x_0 + \lambda^{-\tau} y\right)\xi_0} v\left(x_0 + \lambda^{-\tau} y\right) \tag{51}$$

□

Abbiamo un primo teorema importante:

Teorema 6. *Per ogni $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e per $v \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con p, p' esponenti coniugati e $1 < p < \infty$ e $\tau > 0$ si ha $< R_\lambda(x_0, \xi_0)u, v > \to 0$ quando $\lambda \to 0$*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e chiamiamo $R_\lambda := R_\lambda(x_0, \xi_0)$. Prendiamo anche $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; allora abbiamo:

$$\begin{aligned} |(R_\lambda u, v)| &\leq \lambda^{\tau n/p} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u(\lambda^\tau (x - x_0)) \| \overline{v(x)} \right| dx \\ &= \lambda^{\tau n/p} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-\tau n} \left| u(y) \| \overline{v(x_0 + \lambda^{-\tau} y)} \right| dy \\ &= \lambda^{-\tau n/p'} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{v(x_0 + \lambda^{-\tau} y)} \| u(y) \right| dy \\ &\leq \lambda^{-\tau n/p'} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| dy \end{aligned} \tag{52}$$

Allora, in questo caso, $< R_\lambda(x_0,\xi_0)u, v > \to 0$ quando $\lambda \to 0$.
Usiamo adesso la densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Abbiamo quindi che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $j \in \mathbb{N}$ tale che $|(R_\lambda u, v) - (R_\lambda u_k, v_k)| \leq \epsilon/2$ per ogni $k > j$; con $u_k, v_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni k, mentre $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.
A questo punto il risultato segue osservando che $< R_\lambda u_k, v_k > \to 0$ per quanto mostrato all'inizio. $\square$

Abbiamo un lemma importante:

Lemma 1. *Per ogni T_σ con $\sigma \in S^{m_1,m_2}$ abbiamo che*

$$R_\lambda^{-1}(x_0,\xi_0)\, T_\sigma R_\lambda(x_0,\xi_0) = T_{\sigma_\lambda} \tag{53}$$

con:

$$\sigma_\lambda(x,\eta) = \sigma\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \lambda\xi_0 + \lambda^\tau \eta\right) \tag{54}$$

Inoltre, se $\sigma \in S^{0,0}$, $\lambda > 1$ e $0 < \tau < 1/2$ vale la stima:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_\lambda(x,\eta)\right| \leq C p_{\alpha,\beta}(\sigma) \frac{\langle\eta\rangle^{|\beta|}}{|\xi_0|^{|\beta|}} \lambda^{-\tau|\alpha|} \lambda^{-(1-2\tau)|\beta|} \tag{55}$$

per ogni $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ con una certa costante $C > 0$ e con $p_{\alpha\beta}$ seminorma su $S^{0,0}$.

Dimostrazione. Fissiamo $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e chiamiamo $R_\lambda := R_\lambda(x_0,\xi_0)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &R_\lambda^{-1} T_\sigma R_\lambda u(x) = \\ &= e^{-i\lambda\left(x_0+\lambda^{-\tau}x\right)\xi_0} (2\pi)^{-n} \iint e^{i\lambda\left(x_0+\lambda^{-\tau}x - y\right)\xi} \sigma\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \xi\right) e^{i\lambda y \xi_0} u\left(\lambda^\tau (y - x_0)\right) dy d\xi \end{aligned} \tag{56}$$

Con il cambio di variabile $z := \lambda^\tau(y - x_0)$ abbiamo:

$$\lambda^{-\tau n}(2\pi)^{-n} \iint e^{i\lambda^{-\tau}(\xi - \lambda\xi_0)(x-z)} \sigma\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \xi\right) u(z) dz d\xi \tag{57}$$

E chiamando $\eta := \lambda^{-\tau}(\xi - \lambda\xi_0)$:

$$(2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-z)\eta} \sigma\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \lambda\xi_0 + \lambda^\tau\eta\right) u(z) dz d\xi \tag{58}$$

Adesso, per definizione di σ_λ l'espressione è uguale a $T_{\sigma_\lambda} u(x)$.
La seconda parte segue in questo modo:

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_\lambda(x,\eta)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \lambda\xi_0 + \lambda^\tau\eta\right)\right| \\ &= \left|\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma\right)\left(x_0 + \lambda^{-\tau}x, \lambda\xi_0 + \lambda^\tau\eta\right) \lambda^{-\tau|\alpha|}\lambda^{\tau|\beta|}\right| \\ &\leq c p_{\alpha,\beta}(\sigma) \left\langle \lambda\xi_0 + \lambda^\tau\eta\right\rangle^{-|\beta|} \left\langle x_0 + \lambda^{-\tau}x\right\rangle^{-|\alpha|} \lambda^{-\tau|\alpha|}\lambda^{\tau|\beta|} \\ &\leq c p_{\alpha\beta}(\sigma) < \lambda\xi_0 >^{-|\beta|} < \lambda^\tau\eta >^{|\beta|} \lambda^{-\tau|\alpha|}\lambda^{\tau|\beta|} \end{aligned} \tag{59}$$

Usiamo che $\lambda \geq 1$; allora

$$\begin{aligned} &< \lambda^\tau \eta >^{|\beta|} = (1 + \lambda^{2\tau}|\eta|^2)^{|\beta|/2} \leq \\ &\leq (\lambda^{2\tau} + \lambda^{2\tau}|\eta|^2)^{|\beta|/2} = \\ &= \lambda^{\tau|\beta|} < \eta >^{|\beta|/2} \end{aligned} \tag{60}$$

Inoltre

$$< \lambda\xi_0 >= (1+\lambda^2|\xi_0|^2)^{1/2} \geq \lambda|\xi_0| \Rightarrow < \lambda\xi_0 >^{-|\beta|} \leq \lambda^{-|\beta|}|\xi_0|^{-|\beta|} \tag{61}$$

Mettendo tutto assieme:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_\lambda(x,\eta)\right| \leq c p_{\alpha\beta}(\sigma)|\xi_0|^{-|\beta|} < \eta >^{-|\beta|} \lambda^{\tau|\beta|}\lambda^{-|\beta|}\lambda^{\tau|\beta|}\lambda^{-\tau|\alpha|} \tag{62}$$

Da cui segue la tesi. □

Enunciamo ora alcuni lemmi che saranno utili in seguito dando cenni delle relative dimostrazioni (che non sono complicate).

Lemma 2. *Per $\sigma \in S^{0,0}$, $\lambda > 1$, $0 < \tau < 1/2$ abbiamo:*

- *per $|\alpha| + |\beta| > 0$;*

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_\lambda(x,\eta) \to 0 \tag{63}$$

  uniformemente quando $\lambda \to 0$ su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^{2n}$

- *Quando $\lambda \to \infty$;*

$$\sigma_\lambda(x,\eta) - \sigma_\lambda(0,0) \to 0 \tag{64}$$

  uniformemente su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^{2n}$

L'osservazione importante è che questi lemmi valgono anche nel caso in cui $\sigma \in S^m$.
Un esempio di applicazione di questi lemmi potrebbe essere:
Osservazione Consideriamo $\sigma \in S^0$ e $0 < \tau < 1/2$; allora

$$A_\lambda = \{\sigma_\lambda : \lambda > 1\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \tag{65}$$

è limitato in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}$; ora, dal momento che in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}$ ogni sequenza limitata ha una sottosequenza convergente, prendiamo $\{\sigma_{k_n}\}$ sottosequenza convergente di $\{\sigma_{\lambda_n}\}$ e $\{\sigma_{k_n}\} \to \sigma_\infty$ quando $n \to \infty$, secondo la topologia delle seminorme data da:

$$p_N(\sigma_\lambda) = \sup_{0\leq|\alpha|\leq N} \sup_{x \in K_N} \{|D^\alpha \sigma_\lambda(x)| : \lambda \geq 1\} \tag{66}$$

Con $K_i \subset K_{i+1}$ compatti in $\mathbb{R}^{2n}$ e tali che $\mathbb{R}^{2n} = \cup_{i=1}^\infty K_i$.
Allora per il lemma 2 abbiamo che

$$\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_\infty = 0 \tag{67}$$

su ogni compatto K; di conseguenza σ_∞ è costante su $\mathbb{R}^2 n$

Lemma 3. *Sia $\sigma \in S^0$ e $0 < \tau < 1/2$, inoltre prendiamo $\sigma_\infty \in \mathbb{C}$ e $\lambda_k \to \infty$ tale che $\sigma_{\lambda_k} \to \sigma_\infty$ in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$; allora:*

$$R_{\lambda_k}^{-1} T_\sigma R_{\lambda_k} u \to \sigma_\infty u \tag{68}$$

In $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

La dimostrazione di questo fatto è un po complicata, e per ottenerla bisogna inizialmente trovare una stima sommabile per la funzione $|(Op(\sigma_{\lambda_k}) - \sigma_\infty)u(x)|$ e successivamente applicare il teorema di convergenza dominata per mostrare che la quantità tende a zero. inoltre bisogna osservare che è sufficiente provare l'affermazione su un sottoinsieme denso di $L^p(\mathbb{R}^n)$, come ad esempio, $\mathcal{S}$.

Arriviamo ora ad enunciare il teorema chiave:

Teorema 7. *Sia $\sigma \in S^0$ tale che:*

$$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \tag{69}$$

$1 < p < \infty$ *sia di Fredholm; allora esistono costanti* $C, R > 0$ *tali che* $|\sigma(x,\xi)| \geq C \forall x \in \mathbb{R}^n$ *e* $|\xi| \geq R$

Dimostrazione. Dal momento che T_σ è di Fredholm, esiste un operatore $S \in B(L^p(\mathbb{R}^n))$ e $S \in K(L^p(\mathbb{R}^n))$ tali per cui $ST_\sigma = I + K$. Consideriamo ora l'insieme:

$$M = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \left(\exists x \in \mathbb{R}^n : |\sigma(x,\xi)| \leq \frac{1}{2\|S\|} \right) \right\} \tag{70}$$

Se riusciamo a mostrare che M è limitato abbiamo provato il teorema.
Supponiamo che M non lo sia; allora esiste una sequenza (x_k, ξ_k) in $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $|\xi_k| \to \infty$ e $|\sigma(x_k, \xi_k)| \leq \frac{1}{2||S||}$. Senza perdere di generalità avremo un $\sigma_\infty \in \mathbb{C}$ tale che: $\sigma(x_k, \xi_k) \to \sigma_\infty$ e $|\sigma_\infty| \leq \frac{1}{2||S||}$ quando $\xi_k \to \infty$.
Chiamiamo ora:

$$\lambda_k := |\xi_k| \quad R_k := R_{\lambda_k}\left(x_k, \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \right) \tag{71}$$

Allora, per il lemma 1, abbiamo che:

$$\begin{gathered} R_k^{-1} T_\sigma R_k = T_{\sigma_k} \\ \sigma_k(x,\eta) = \sigma\left(x_k + \lambda_k^\tau x, \xi_k + \lambda_k^\tau \eta\right) \end{gathered} \tag{72}$$

Adesso, ricordando che vale la stima (56) uniformemente per ogni $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \{\xi : |\xi| = 1\}$ abbiamo:

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_k(x,\eta) \right| \leq c p_{\alpha,\beta}(\sigma) \langle \eta \rangle^{|\beta|} \lambda_k^{-\tau|\alpha|} \lambda_k^{-(1-2\tau)|\beta|} \tag{73}$$

Chiamando $\sigma_k(0,0) = \sigma\left(x_k, \xi_k\right) = \sigma_k^\infty$ usiamo la formula di Taylor possiamo mostrare che:

$$\sigma_k(x,\eta) - \sigma_k^\infty \to 0 \tag{74}$$

uniformemente per ogni (x, η) in un compatto $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ quando $k \to \infty$.
Se ora prendiamo $u \in \mathcal{S}$ usando il teorema di convergenza dominata ricaviamo:

$$\left| \left(R_k^{-1} T_\sigma R_k u(x) - \sigma_k^\infty u(x) \right) \right|^p \leq C \langle x \rangle^{-2lp} \tag{75}$$

Con $l \in \mathbb{N}$; allora $\langle x \rangle^{-2lp} \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ quando $2lp > n$. Di nuovo, con convergenza dominata, otteniamo

$$R_k^{-1} T_\sigma R_k u(x) \to \sigma_k^\infty u(x) \tag{76}$$

E ricordando la definizione di σ_k^∞ e la considerazione precedente troviamo

$$R_k^{-1} T_\sigma R_k u(x) \to \sigma_\infty u(x) \tag{77}$$

Il tutto in $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to \infty$.
Se adesso prendiamo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 < \|u\|_p = \|\left(ST_\sigma + K\right) R_k u\|_p &\leq \|ST_\sigma R_k u\|_p + \|K R_k u\|_p \\ &\leq \left\| R_k^{-1} T_\sigma R_k u \right\|_p \|S\| + \|K R_k u\|_p \end{aligned} \tag{78}$$

Ricordando il lemma 3, che K è un operatore compatto e il teorema 9 otteniamo:

$$||KR_k u|| \to \infty \quad k \to \infty \tag{79}$$

Quindi, $\|u\|_p \leq \|S\||\sigma_\infty\|u\|_p$; ma a questo punto ricaviamo una contraddizione:

$$\frac{1}{\|S\|} \leq |\sigma_\infty| \leq \frac{1}{2\|S\|} \tag{80}$$

□

Possiamo generalizzare il risultato ad una classe di simboli più ampia:

Teorema 8. *Sia $\sigma \in S^m$ con $m \in (-\infty, \infty)$ e sia $T_\sigma : H^{s,p} \to H^{s-m,p}$ un operatore di Fredholm; allora T_σ è un operatore ellittico.*

Dimostrazione. Consideriamo i seguenti operatori lineari limitati; $T_\sigma : H^{s,p} \to H^{s-m,p}$; $J_{-s} : H^{s,p} \to L^p(\mathbb{R}^n)$.
Il simbolo di J_s sarà $\sigma_s S^{-s}$; con $\sigma_s(\xi) =< \xi >^- s$. Introduciamo:

$$T_\tau := J_{m-s} T_\sigma J_s \tag{81}$$

Allora; $T_\tau : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ con simbolo $\tau \in S^0$. Per i risultati precedenti, T_τ è ellittico, e dal fatto che J_s è una biiezione per ogni $s \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che anche T_σ è ellittico. □

Più in generale possiamo mostrare un teorema analogo per gli operatori pseudodifferenziali di tipo globale, la cui dimostrazione segue immediatamente dai risultati precedenti:

Teorema 9. *Sia $\sigma \in S^{m_1,m_2}$ con $m_1, m_2 \in (-\infty, infty)$, e sia*

$$T_\sigma : H^{s_1,s_2,p} \to H^{s_1-m_1,s_2-m_2,p} \tag{82}$$

Un operatore di Fredholm; allora T_σ è ellittico. Inoltre, se $\sigma \in S^{0,0}$; allora

$$T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \tag{83}$$

è di Fredholm se e solo se è ellittico.

4 Bibliografia

[1] L.Fatibene,S.Garruto; Principal symbol of Euler-Lagrange operators
[2] A. Dasgupta; Ellipticity of Fredholm Pseudo-Differential Operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$
[3] A. Dasgputa, M.W. Wong; Spectral theory of SG pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$
[4] M. Palasciano; Sobolev Space Through the Bessel Potential