Universitá degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Istituzioni di Fisica Matematica

Il Teorema di Noether

Prof. Marco Ferraris
Prof. Marcella Palese

Federico Chiaffredo

Indice

1 Introduzione

Lo scopo di questo seminario è quello di formulare il teorema di Noether in un contesto più generale rispetto alla meccanica razionale, in particolare per fare questo studieremo alcune strutture Lagrangiane ed Hamiltoniane in teorie di campo; sarà quindi utile per prima cosa richiamare alcuni risultati geometrici, successivamente scriveremo le equazioni di Eulero-Lagrange per le teorie che consideriamo ed infine formuleremo il teorema di Noether estendendo il concetto di mappa momento che viene di solito introdotto per il fibrato cotangente.

2 Risultati Preliminari

2.1 Il fibrato dei getti

Sia X una varietà orientata, (ad esempio lo spaziotempo) e consideriamo un fibrato finto dimensionale (Y, π_{XY}) con $\pi_{XY} : Y \to X$ chiamato fibrato delle configurazioni covariante.
Chiamiamo, per $x \in X$, la fibra $\pi_{XY}^{-1}(x) =: Y_x$; e lo spazio tangente ad X come T_xX. I campi fisici saranno sezioni di questo fibrato, che in effetti gioca un ruolo analogo al fibrato delle configurazioni in meccanica razionale.
Il ruolo analogo del fibrato tangente, in questo caso sarà giocato da J^1Y, il fibrato dei getti al primo ordine.
Ricordiamo che: due sezioni locali ϕ_1, ϕ_2 coincidono al prim'ordine in $x \in X$ se sono definite in un intorno di x e le loro espansioni di Taylor coincidono al primo ordine (per ogni sistema di coordinate).
Questa condizione può essere riscritta come:

$$\phi_1 \sim_1 \phi_2 \leftrightarrow \begin{cases} y = \phi_1(x) = \phi_2(x) \\ T_x\phi_1 = T_x\phi_2 \end{cases} \tag{1}$$

Dove con $T_x\phi_1 = T_x\phi_2$ intendiamo che queste coincidono come mappe lineari $T_xX \to T_yY$.
Si verifica che $\sim_1$ definisce una relazione di equivalenza sull'insieme delle sezioni locali, chiamiamo lo spazio quoziente J^1Y.
A volte risulta utile identificare J^1Y come il fibrato affine su Y tale per cui le fibre sopra $y \in Y_x$ sono le mappe lineari $\gamma : T_xX \to T_yY$ tali per cui:

$$T\pi_{XY} \circ \gamma = e \in T_xX \tag{2}$$

Dove con $e \in T_xX$ intendiamo l'identità su questo spazio.
La mappa γ corrisponderà ad una qualche $T_x\phi$ per una certa sezione locale ϕ.
La scelta di lavorare su J^1Y per costruire le nostre Lagrangiane rispecchia il fatto che le teorie che consideriamo dipendono al più dai campi e dalle loro derivate prime, se si volesse estendere questo punto di vista andrebbero considerati i fibrati dei getti ad ordini superiori.
Supponiamo $dim(X) = n + 1$; indicheremo le coordinate su X come x^μ, $\mu = 0, 1, ..., n$ e se $dim(Y) = N$ le coordinate fibrate su Y come y^A , $A = 1, ..., N$.
Queste inducono delle coordinate v^A_μ sulle fibre di J^1Y.
Se $\phi : X \to Y$ è una sezione di π_{XY} avremo che, per $x \in X$, $T_x\phi \in J^1_{\phi(x)}Y$; e la mappa $x \mapsto T_x\phi$ è un sezione di J^1Y visto come fibrato su X. Indichiamo questa sezione con $j^1\phi$ e la denoteremo come prolungamento al prim'ordine di ϕ; in coordinate sarà data da:

$$x^\mu \mapsto \left(x^\mu, \phi^A\left(x^\mu\right), \partial_\nu\phi^A\left(x^\mu\right)\right) \tag{3}$$

Con $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$.
Una sezione di $J^1Y \to X$ che è il prolungamento al primo ordine di una sezione di $Y \to X$ è detta olonoma.

2.1.1 Esempio

Per chiarezza riformuliamo quello che abbiamo scritto nel caso della meccanica classica; avremo uno spazio delle configurazioni Q e consideriamo $X = \mathbb{R}$, $Y = X \times Q$ con π_{XY} la proiezione sul primo fattore. J^1Y sarà il fibrato le cui sezioni olonome sono sollevamenti di $\phi : X \to Y$ (ad esempio curve in$Q$) segue che possiamo dire $J^1Y = \mathbb{R} \times TQ$ (facendo attenzione al fatto che J^1Y è un fibrato affine, mentre $\mathbb{R} \times TQ$ è un fibrato vettoriale). Usando coordinate (t, q^μ) su X, le coordinate indotte su J^1Y saranno le usuali (t, q^μ, v^μ)

2.2 Il fibrato dei getti duale

Se nel paragrafo precedente avevamo generalizzato il concetto di fibrato tangente della meccanica razionale, adesso vogliamo introdurre un analogo del fibrato cotangente.
Definiamo J^1Y^* come il fibrato vettoriale su Y le cui fibre su $y \in Y_x$ sono l'insieme delle mappe affini da $J^1_yY \to \Lambda^{n+1}_x X$.
Dove con $\Lambda^{n+1}_x X$ indichiamo il fibrato delle $n+1$ forme su X.
Prendiamo come coordinate fibrate su J^1Y^* (p, p^μ_A) che corrispondono alle mappe affini date in coordinate da:

$$v^A_\mu \mapsto \left(p + p^\mu_A v^A_\mu\right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{4}$$

Utilizzeremo tuttavia una visione diversa di J^1Y^* per definire l'analogo delle forme canoniche. D'ora in poi indichiamo con $\Lambda = \Lambda^{n+1}Y$ il fibrato delle $n+1$ forme su Y, le fibre, per $y \in Y$, verranno indicate con Λ_y e la proiezione $\pi_{Y\Lambda} : \Lambda \to Y$; infine denotiamo $dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n =: d^{n+1}x$
Consideriamo adesso il sottofibrato Z definito in questo modo:

$$Z_y = \{z \in \Lambda_y | v \lrcorner (w \lrcorner z) = 0 \quad \forall v, w \in V_yY\} \tag{5}$$

Dove abbiamo definito V_yY come:

$$V_yY = \{v \in T_yY | T\pi_{XY} \cdot v = 0\} \tag{6}$$

Un elemento di Z può essere scritto come:

$$z = pd^{n+1}x + p^\mu_A dy^A \wedge d^n x_\mu \tag{7}$$

Dove abbiamo indicato $d^n x_\mu = \partial_\mu \lrcorner d^{n+1}x$; quindi le coordinate fibrate su Z saranno ancora (p, p^μ_A).
Uguagliando le coordinate$\left(x^\mu, y^A, p, p^\mu_A\right)$ su Z e su J^1Y^* otteniamo un isomorfismo di fibrati vettoriali.

$$\Phi : Z \to J^1Y^* \tag{8}$$

Intrinsecamente, Φ è definito da:

$$< \Phi(z), \gamma >= \gamma^* z \in \Lambda^{n+1}_x X \tag{9}$$

Dove $z \in Z_y$, $\gamma \in J^1_y Y$,$x = \pi_{XY}(y)$ e $<,>$ rappresentano l'accoppiamento duale.
Per vederlo osserviamo che se γ ha coordinate fibrate v^A_μ:

$$\gamma^* dx^\mu = dx^\mu \quad \text{e} \quad \gamma^* dy^A = v^A_\mu dx^\mu \tag{10}$$

e di conseguenza:

$$\gamma^* \left(pd^{n+1}x + p^\mu_A dy^A \wedge d^n x_\mu \right) = \left(p + p^\mu_A v^A_\mu \right) d^{n+1}x \tag{11}$$

Dove abbiamo usato che $dx^\nu \wedge d^n x_\mu = \delta^\nu_\mu d^{n+1}x$.
Riassumiamo questo con una proposizione:

Proposizione 1 *Z e J^1Y^* sono canonicamente isomorfi come fibrati vettoriali su Y*

Possiamo quindi costruire le forme canoniche su Z e poi portarle su J^1Y^* con l'isomorfismo; definiamo la $n+1$ forma canonica Θ_Λ su Λ come:

$$\begin{aligned} \Theta_\Lambda(z)\left(u_1, \ldots, u_{n+1}\right) &= z\left(T\pi_{Y\Lambda} \cdot u_1, \ldots, T\pi_{Y\Lambda} \cdot u_{n+1}\right) \\ &= \left(\pi^*_{Y\Lambda} z\right)\left(u_1, \ldots, u_{n+1}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Con $z \in \Lambda$ e $u_1, \ldots, u_{n+1} \in T_z\Lambda$. Abbiamo di conseguenza la $n+2$ forma canonica definita come:

$$\Omega_\Lambda = -d\Theta_\Lambda \tag{13}$$

Osserviamo che se $n = 0$ (ovvero X e unidimensionale) allora $\Lambda = T^*Y$ e Θ_Λ è l' 1-forma canonica della meccanica razionale.
Se adesso ricordiamo l'inclusione di Z in Λ, ovvero $i_{\Lambda Z} : Z \to \Lambda$ scriviamo le forme su Z come:

$$\begin{aligned} \Theta &= i^*_{\Lambda Z}\Theta_\Lambda \\ \Omega &= -d\Theta = i^*_{\Lambda Z}\Omega_\Lambda \end{aligned} \tag{14}$$

Chiamiamo la coppia (Z, Ω) spazio delle fasi covariante.
In coordinate le forme che abbiamo introdotto si scriveranno come:

$$\begin{aligned} \Theta &= p^\mu_A dy^A \wedge d^n x_\mu + pd^{n+1}x \\ \Omega &= dy^A \wedge dp^\mu_A \wedge d^n x_\mu - dp \wedge d^{n+1}x \end{aligned} \tag{15}$$

2.2.1 Esempio

In meccanica razionale abbiamo: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R} \times Q$ e $Z = T^*Y = T^*\mathbb{R} \times T^*Q$ su cui abbiamo coordinate $(t, p, q^1, ..., q^N, p_1, ..., p_N)$ le forme canoniche saranno:

$$\begin{aligned} \Theta &= p_A dq^A + pdt \\ \Omega &= dq^A \wedge dp_A + dt \wedge dp \end{aligned} \tag{16}$$

In questo caso l'approccio covariante che abbiamo utilizzato si riduce al formalismo dello spazio delle fasi esteso della meccanica.

3 Dinamica Lagrangiana

Riassumiamo alcuni fatti riguardanti la dinamica lagrangiana, la mappa di Legendre e la forma di Poincaré-Cartan che saranno utili in seguito.

3.1 Trasformata di Legendre Covariante

Sia $\mathcal{L} : J^1Y \to \Lambda^{n+1}X$ una densità Lagrangiana, in coordinate la possiamo scrivere come:

$$\mathcal{L} = L(x^\mu, y^A, v^A_\mu)d^{n+1}x \tag{17}$$

Costruiamo adesso la mappa di Legendre covariante per questa Lagrangiana; sarà una funzione che preserva le fibre su Y:

$$\mathbb{F}\mathcal{L} : J^1Y \to J^1Y^* \cong Z \tag{18}$$

E in coordinate avremo:

$$p^\mu_A = \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu} \quad ; \qquad p = L - \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu} v^A_\mu \tag{19}$$

3.2 La forma di Poincaré-Cartan

Definiamo la forma di Poincaré-Cartan come la $n+1$ forma $\Theta_\mathcal{L}$ su J^1Y definita da:

$$\Theta_\mathcal{L} = \mathbb{F}\mathcal{L}^*\Theta \tag{20}$$

Dove Θ è la $n+1$ forma canonica su Z. Definiamo anche:

$$\Omega_\mathcal{L} = d\Theta_\mathcal{L} = \mathbb{F}\mathcal{L}^*\Omega \tag{21}$$

In coordinate, ricordando la (15) e la (19) abbiamo:

$$\begin{aligned} \Theta_\mathcal{L} &= \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu} dy^A \wedge d^n x_\mu + \left(L - \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu} v^A_\mu \right) d^{n+1}x \\ \Omega_\mathcal{L} &= dy^A \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\right) \wedge d^n x_\mu - d\left(L - \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu} v^A_\mu \right) \wedge d^{n+1}x \end{aligned} \tag{22}$$

Uno dei vantaggi della forma di Poincaré-Cartan è quello di poter esprimere la Lagrangiana per i campi olonomi come:

$$\mathcal{L}(j^1\phi) = (j^1\phi)^*\Theta_\mathcal{L} \tag{23}$$

Per osservarlo basta usare la forma di $\Theta_\mathcal{L}$ scritta nella (22) e calcolare:

$$(j^1\phi)^*\Theta_\mathcal{L} = \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right) d\phi^A \wedge d^n x_\mu + \left(L\left(j^1\phi\right) - \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\phi^A_{,\mu} \right) d^{n+1}x \tag{24}$$

Il primo e l'ultimo termine si cancellano e ricaviamo la (23).
Per concludere ricordiamo che $\Theta_\mathcal{L}$ può essere ricavata a partire dall'integrale d'azione, infatti compare nel termine di bordo che otteniamo quando calcoliamo la variazione.

3.3 Equazioni di Eulero Lagrange

Cerchiamo ora di scrivere con questo formalismo le equazioni di Eulero-Lagrange in maniera intrinseca; sappiamo che in coordinate possiamo scriverle nella forma:

$$\frac{\partial L}{\partial y^A}\left(j^1\phi\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial v^A\mu}\left(j^1\phi\right)\right) = 0 \tag{25}$$

per una sezione locale ϕ di Y.
Vale un teorema importante:

Teorema 1 *Le seguenti affermazioni riguardo una sezione ϕ del fibrato $\pi_{XY} : Y \to X$ sono equivalenti:*
(1) ϕ è un punto stazionario di $\int_X \mathcal{L}(j^1\phi)$
(2) Le equazioni di Eulero-Lagrange valgono in coordinate come scritte in (25)
(3) Per ogni campo vettoriale W su J^1Y vale:

$$\left(j^1\phi\right)^* (W \lrcorner \Omega_{\mathcal{L}}) = 0 \tag{26}$$

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato per brevità.

3.3.1 Esempio

In meccanica razionale abbiamo una densità Lagrangiana nella forma $\mathcal{L} = L(t, q, v)dt$ a partire dalla quale definiamo:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial v^A} \qquad - H = L - v^A \frac{\partial L}{\partial v^A} \tag{27}$$

E la forma di Poincaré-Cartan è l'usuale 1-forma:

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial L}{\partial v^A} dq^A - Hdt \tag{28}$$

E le equazioni di Eulero-Lagrange di conseguenza sono le solite:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0 \tag{29}$$

4 Il teorema di Noether

Cerchiamo ora di formulare il teorema di Noether in termini di mappe momento, per fare questo ricordiamo innanzitutto come sollevare gli automorfismi di Y ad automorfismi su J^1Y.

4.1 Prolungamento ai getti

Sia $\eta_Y : Y \to Y$ un automorfismo di fibrati per π_{XY} che ricopre un diffeomorfismo $\eta_X : X \to X$. Se adesso consideriamo $\gamma : T_xX \to T_yY$ un elemento di J^1Y possiamo definire $\eta_{J^1Y}(\gamma) : T_{\eta_X(x)}X \to T_{\eta_Y(y)}Y$ in questo modo:

$$\eta_{J^1Y}(\gamma) = T\eta_Y \circ \gamma \circ T\eta_X^{-1} \tag{30}$$

Abbiamo costruito un automorfismo per il fibrato π_{Y,J^1Y} che indichiamo $j^1\eta := \eta_{J^1Y}$ che chiamiamo prolungamento al primo ordine di η.
Se in coordinate prendiamo $\gamma = (x^\mu, y^A, v^A_\mu)$ abbiamo che :

$$\eta_{J^1Y}(\gamma) = \left(\eta^\mu_X(x), \eta^A_Y(x,y), \left[\partial_\nu \eta^A_Y + \left(\partial_B \eta^A_Y\right) v^B_\nu\right] \partial_\mu \left(\eta^{-1}_X\right)^\nu\right) \tag{31}$$

4.2 Trasformazioni canoniche covarianti

Una trasformazione canonica covariante è una mappa del fibrato π_{XZ}, $\eta_Z : Z \to Z$ che ricopre un diffeomorfismo $\eta_X : X \to X$ tale che:

$$\eta_Z^* \Omega = \Omega \tag{32}$$

Quando invece vale che:

$$\eta_Z^* \Theta = \Theta \tag{33}$$

Chiameremo η_Z trasformazione canonica covariante speciale.
Inoltre, quando $\eta_Y : Y \to Y$ è un automorfismo del fibrato π_{XY} (che come al solito ricopre un diffeomorfismo sulla base), il suo sollevamento canonico $\eta_Z : Z \to Z$ è definito come:

$$\begin{aligned} &\eta_Z(z) = \left(\eta_Y^{-1}\right)^* z \\ &\text{Ovvero:} \\ &\eta_Z(z)\left(v_1, \ldots, v_{n+1}\right) = z\left(T\eta_Y^{-1} \cdot v_1, \ldots, T\eta_Y^{-1} \cdot v_{n+1}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

Con $z \in Z_y$ e $v_1, \ldots, v_{n+1} \in T_{\eta_Y(y)}Y$ In questo senso vale una proposizione analoga al caso del fibrato cotangente per i sollevamenti.

Proposizione 2 *I sollevamenti sono trasformazioni canoniche covarianti speciali.*

La dimostrazione ricalca quella svolta in Abraham and Marsden [1978], teorema 3.2.12.
Diamo infine un altro modo di vedere i sollevamenti che sfrutta J^1Y^* piuttosto che Z direttamente.
Consideriamo l'automorfismo $\eta_Y : Y \to Y$, il suo sollevamento a J^1Y^* sarà il duale affine del sollevamento η_{J^1Y}; ovvero, se prendiamo $z \in J^1_yY^*$ che quindi sarà una mappa $z : J^1_yY \to \Lambda^{n+1}_x X$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} &\eta_{J^1Y^*}(z) : J^1_{\eta_Y(y)}Y \to \Lambda^{n+1}_{\eta_X(x)}X \\ &\text{è la mappa definita da:} \\ &\langle \eta_{J^1Y*}(z), \gamma \rangle = \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left\langle z, \eta_{J^1Y}^{-1}(\gamma)\right\rangle \end{aligned} \tag{35}$$

Se scriviamo in coordinate abbiamo $z = (p, p^\mu_A)$ e $\gamma = (x^\mu, y^A, v^A_\mu)$; ricordando la (31) troviamo:

$$\begin{aligned} \langle \eta_{J^1Y^*}(z), \gamma \rangle &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left[\left(p + p^\mu_A \partial_\mu \eta^\nu_X \left[\partial_\nu \left(\eta_Y^{-1}\right)^A + v^B_\nu \partial_B \left(\eta_Y^{-1}\right)^A\right]\right) d^{n+1}x\right] \\ &= \left[\left(p + \partial_\nu \left(\eta_Y^{-1}\right)^A p^\mu_A \partial_\mu \eta^\nu_X\right) + \left(\partial_A \left(\eta_Y^{-1}\right)^B p^\nu_B \partial_\nu \eta^\mu_X\right) v^A_\mu\right] J^{-1} d^{n+1}x \end{aligned} \tag{36}$$

Dove abbiamo indicato con J il determinante dello Jacobiano di η_X.
Vale una proposizione importante.

Proposizione 3 *L'isomorfismo canonico $\Phi : Z \to J^1Y^*$ è equivariante rispetto ai sollevamenti η_Z e $\eta_{J^1Y^*}$ ovvero:*

$$\Phi \circ \eta_z = \eta_{J^1Y^*} \circ \Phi \tag{37}$$

Possiamo dimostrare la proposizione in questo modo; presi $z \in Z$ e $\gamma \in J^1Y$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} \langle \eta_{J^1Y^*}(\Phi(z)), \gamma \rangle &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left\langle \Phi(z), \eta_{J^1Y}^{-1}(\gamma)\right\rangle \\ &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left\langle \Phi(z), T\eta_Y^{-1} \circ \gamma \circ T\eta_X \right\rangle \\ &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left[\left(T\eta_Y^{-1} \circ \gamma \circ T\eta_X\right)^* z\right] \\ &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \eta_X^* \gamma^* \left(\eta_Y^{-1}\right)^* z = \gamma^* \left(\eta_Z(z)\right) = \left\langle \Phi\left(\eta_Z(z)\right), \gamma \right\rangle \end{aligned} \tag{38}$$

Infine, se consideriamo un campo di vettori V su Y il cui flusso η_λ manda fibre di π_{XY} in fibre, il sollevamento canonico di V, che chiameremo V_Z sarà il campo vettoriale associato al sollevamento

del flusso.
Si può dimostrare che in componenti si ha:

$$V_Z = \left(V^\mu, V^A, -pV^\nu_{,\nu} - p^\nu_B V^B_{,\nu}, p^\nu_A V^\mu_{,\nu} - p^\mu_B V^B_{,A} - p^\mu_A V^\nu_{,\nu}\right) \tag{39}$$

Dalla proposizione 2 segue che:

$$\pounds_{V_Z}\Theta = 0 \tag{40}$$

4.3 Mappa momento covariante

A questo punto siamo pronti ad introdurre la generalizzazione del concetto di mappa momento che può essere definita nell'ambito della geometria simplettica.
Sia G un gruppo di Lie, con algebra di Lie g, che agisce su X con diffeomorfismi e su Y o Z come automorfismo di fibrati. Per $\eta \in G$ denotiamo con η_X, η_Y, η_Z le corrispondenti trasformazioni e per $\xi \in g$ chiamiamo ξ_X, ξ_Y, ξ_Z i corrispondenti generatori infinitesimi.
Per quello che abbiamo detto prima, se G agisce su Z con trasformazioni canoniche covarianti abbiamo:

$$\pounds_{\xi_Z}\Omega = 0 \tag{41}$$

Se invece agisce con trasformazioni canoniche covarianti speciali si ha:

$$\pounds_{\xi_Z}\Theta = 0 \tag{42}$$

Nel caso in cui G agisca su Z con trasformazioni canoniche covarianti possiamo definire una mappa momento covariante per questa azione come una mappa:

$$J : Z \to g^* \otimes \Lambda^n Z = L\left(g, \Lambda^n Z\right) \tag{43}$$

Tale per cui:

$$\mathrm{d}J(\xi) = \mathrm{i}_{\xi_Z}\Omega \tag{44}$$

Dove $J(\xi)$ è la n- forma su Z che in un punto $z \in Z$ ha valore $\langle J(z), \xi\rangle$.
Diremo che una mappa momento è Ad^*-equivariante se:

$$J\left(\mathrm{Ad}^{-1}_\eta \xi\right) = \eta^*_Z[J(\xi)] \tag{45}$$

Quando G agisce con trasformazioni canoniche speciali abbiamo che possiamo definire una orma esplicita per una mappa momento, infatti:

$$J(\xi) = \xi_Z \lrcorner \Theta \tag{46}$$

è una mappa momento, abbiamo infatti:

$$d(J(\xi)) = d(\xi_Z \lrcorner \Theta) = \mathcal{L}_{\xi_Z}\Theta - \xi_Z \lrcorner d\Theta = \xi_Z \lrcorner \Omega \tag{47}$$

Abbiamo che:

Proposizione 4 *Le mappe momento speciali covarianti sono Ad^*-equivarianti.*

La dimostrazione è analoga a quella riportata in Abraham and Marsden [1978], Theorem 4.2.10 per il caso del fibrato cotangente.

Proposizione 5 *Se l'azione di G su Z è il sollevamento di un'azione di G su Y, allora la mappa momento speciale è data da:*

$$J(\xi)(z) = \pi^*_{YZ}\xi_Y \lrcorner z \tag{48}$$

E questa mappa è Ad^*-equivariante.

Questo segue dal ricordare che $\xi_Y = T\pi_{YZ}\xi_Z$, la definizione di $J(\xi)$ e di Θ.

Proposizione 6 *Per azioni sollevate abbiamo:*

$$\{J(\xi), J(\zeta)\} = d\left(i_{\xi_Z} i_{\zeta_Z}\Theta\right) + J([\xi,\zeta]) \tag{49}$$

Dimostrazione Consideriamo $\eta_\lambda = epx(\lambda\zeta)$ differenziando la relazione di equivarianza rispetto a λ e ponendo poi $\lambda = 0$ troviamo:

$$J([\xi,\zeta]) = \pounds_{\zeta_Z} J(\xi) = di_{\zeta_Z} J(\xi) + i_{\zeta_Z} dJ(\xi) = di_{\zeta_Z} J(\xi) + i_{\zeta_Z} i_{\xi_Z}\Omega \tag{50}$$

Ricordando la (44),(46) e che $\{g, f\} = X_f \lrcorner (X_g \lrcorner \Omega)$ abbiamo la tesi.

4.3.1 Esempio

in meccanica razionale abbiamo $G = Diff(\mathbb{R}$, allora G agisce su $Y = \mathbb{R} \times Q$ riparametrizzando il tempo, e questa azione può essere sollevata a $Z = T^*\mathbb{R} \times T^*Q$, identifichiamo l'algebra di Lie come le funzioni lisce su $\mathbb{R}$, e la indichiamo come $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Con le solite coordinate degli esempi precedenti abbiamo che:

$$\chi_Y = \chi(t)\frac{\partial}{\partial t} \tag{51}$$

per $\chi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$; la mappa momento sarà:

$$J : Z = T^*\mathbb{R} \times T^*Q \to \mathcal{F}(\mathbb{R})^* \approx \mathcal{F}(\mathbb{R}) \tag{52}$$

Definita da:

$$\left\langle J\left(t, p, q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N\right), \chi\right\rangle = p\chi(t) \tag{53}$$

Se consideriamo un sistema meccanico con una fissata parametrizzazione del tempo e con un gruppo G che agisce su Q, la mappa momento covariante indotta su Z è l'usuale mappa momento di T^*Q vista su Z. Notiamo infine che in questo esempio le mappe canoniche covarianti includono le trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo.

4.4 Il teorema di Noether

Siamo finalmente pronti ad enunciare il teorema di Noether, consideriamo a tal proposito un gruppo G che agisce su Y con automorfismi di fibrati, prolunghiamoli a J^1Y come fatto nella sezione "Prolungamento ai getti" e poniamo $\eta\gamma = \eta_{J^1Y}(\gamma)$.
Diciamo che la Lagrangiana è equivariante rispetto a G se $\forall \eta \in G, \gamma \in J^1_xY$ si ha:

$$\mathcal{L}(\eta_{J^1Y}(\gamma)) = (\eta_X^{-1})^*\mathcal{L}(\gamma) \tag{54}$$

Dove con $(\eta_X^{-1})^*\mathcal{L}(\gamma)$ vogliamo indicare il push foreward della $n+1$ forma $\mathcal{L}(\gamma)$ in $x \in X$ ad una $n+1$ forma su $\eta_X(x)$.
La versione infinitesima di questa relazione può essere scritta in questo modo:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\xi^\mu + \frac{\partial L}{\partial y^A}\xi^A + \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(\xi^A_{,\mu} - v^A_\nu\xi^\nu_{,\mu} + v^B_\mu\frac{\partial \xi^A}{\partial y^B}\right) + L\xi^\mu_{,\mu} = 0 \tag{55}$$

Chiameremo il secondo membro, $\delta_\xi L$, variazione di L nella direzione ξ.
Facciamo ora un'assunzione abbastanza forte che però è soddisfatta dalle principali teorie di campo.
Assunzione (covarianza) *Assumiamo che il gruppo G agisca sul fibrato π_{XY} tramite automorfismi e che la densità Lagrangiana sia equivariante rispetto a G.*
Per un eccezione a questo comportamento si vedano le teorie di campo topologiche, che noi tralasciamo.
Diamo una proposizione molto importante in direzione del teorema di Noether:

Proposizione 7 *Sia $\mathcal{L}$ equivariante rispetto al sollevamento dell'azione di G su J^1Y; allora:*
(1) $\mathbb{F}\mathcal{L}$ è anche equivariante; ovvero $\mathbb{F}\mathcal{L} \circ \eta_{J^1Y} = \eta_Z \circ \mathbb{F}\mathcal{L}$. Quindi il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} J^1Y & \xrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}} & Z \\ {\scriptstyle \eta_{J^1Y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Z} \\ J^1Y & \xrightarrow{\mathbb{F}\mathcal{L}} & Z \end{array} \tag{56}$$

commuta $\forall \eta \in G$
(2) La forma di Cartan $\Theta_\mathcal{L}$ è invariante, ovvero $\eta^*_{J^1Y}\Theta_\mathcal{L} = \Theta_\mathcal{L}\ \forall \eta \in G$
(3) La mappa $J^\mathcal{L}(\xi) := \mathbb{F}\mathcal{L}^* J(\xi) : J^1Y \to \Lambda^n(J^1Y)$ è una mappa momento per il sollevamento dell'azione su J^1Y relativa a $\Omega_\mathcal{L}$; ovvero, $\forall \xi \in g$:

$$\xi_{J^1Y} \lrcorner\, \Omega_\mathcal{L} = dJ^\mathcal{L}(\xi) \tag{57}$$

Dove indichiamo $\xi_{J^1Y} = j^1\xi_Y$ il generatore infinitesimo corrispondente a ξ.
Inoltre:

$$J^\mathcal{L}(\xi) = \xi_{J^1Y} \lrcorner\, \Theta_\mathcal{L} \tag{58}$$

Dimostrazione.

(1) Conviene identificare Z con J^1Y^* e usare la proposizione (37) (isomorfismo canonico è equivariante...) inoltre ricordando la definizione di $\eta_{J^1Y^*}$ (equazione (35)) e di $\mathbb{F}\mathcal{L}$ ricaviamo:

$$\begin{aligned} \langle \eta_{J^1Y^*}(\mathbb{F}\mathcal{L}(\gamma)), \gamma' \rangle &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left\langle \mathbb{F}\mathcal{L}(\gamma), \eta_{J^1Y}^{-1}(\gamma') \right\rangle \\ &= \left(\eta_X^{-1}\right)^* \left[\mathcal{L}(\gamma) + \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}\left(\gamma + \varepsilon\left[\eta_{J^1Y}^{-1}(\gamma') - \gamma\right]\right)\Big|_{\varepsilon=0} \right] \end{aligned} \tag{59}$$

D'altraparte usando la definizione di $\mathbb{F}\mathcal{L}$ abbiamo che:

$$\langle \mathbb{F}\mathcal{L}\left(\eta_{J^1Y}(\gamma)\right), \gamma' \rangle = \mathcal{L}\left(\eta_{J^1Y}(\gamma)\right) + \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}\left(\eta_{J^1Y}(\gamma)\right) + \varepsilon\left[\gamma' - \eta_{J^1Y}(\gamma)\right]\big|_{\varepsilon=0} \tag{60}$$

E le due quantità devono essere uguali per l'assunzione di covarianza.
(2) Si tratta di una dimostrazione analoga a quella svolta in Abraham and Marsden [1978] per il Corollario 4.2.14.
(3) La versione infinitesima della (1) ci dice che:

$$\xi_Z \circ \mathbb{F}\mathcal{L} = T\mathbb{F}\mathcal{L} \circ \xi_{J^1Y} \tag{61}$$

Facendo il pullback della di $dJ(\xi) = \xi_Z \lrcorner\, \Omega$ da Z a J^1Y e usando il risultato enunciato all'inizio ricaviamo la (57), e ragionando in maniera analoga si ricava la (58).

Come conseguenza della proposizione chiamiamo $J^{\mathcal{L}}$ mappa momento in rappresentazione lagrangiana. Possiamo ricavare una formula esplicita a partire dalle (58) e (21).

$$J^{\mathcal{L}}(\xi) = \left(\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\xi^A + \left[L - \frac{\partial L}{\partial v^A_\nu}v^A_\nu\right]\xi^\mu\right) d^n x_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\xi^\nu dy^A \wedge d^{n-1}x_{\mu\nu} \tag{62}$$

Se ϕ è una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, dal teorema 1 (equazioni (26)) abbiamo che:

$$(j^1\phi)^*(W \lrcorner\, \Omega_{\mathcal{L}}) = 0 \tag{63}$$

Per ogni campo vettoriale W su J^1Y; in particolare, se prendiamo $W = \xi_{J^1Y}$ e applichiamo $(j^1\phi)^*$ alla (57) ricaviamo :

Teorema 2 ***Teorema di Noether in forma di divergenza.*** *Se l'assunzione di covarianza è verificata, allora $\forall \xi \in g$ e $\forall \phi$ sezioni di π_{XY} che soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange si ha:*

$$d\left[\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi)\right] = 0 \tag{64}$$

La quantità $\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi)$ viene in genere chiamata corrente di Noether.

Calcoliamo adesso in coordinate la corrente di Noether e la sua divergenza senza assumere che le equazioni di campo siano soddisfatte: ricaveremo un criterio che ci permette di dire quando una teoria ammette "un'inversa" del teorema di Noether, ovvero quando il verificarsi del teorema implica che le equazioni di Eulero-Lagrange siano soddisfatte.
Dalla (62) ricaviamo:

$$\begin{aligned}\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi) =& \left(\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\left(\xi^A \circ \phi\right) + L\left(j^1\phi\right)\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial v^A_\nu}\left(j^1\phi\right)\phi^A_{,\nu}\xi^\mu\right) d^n x_\mu \\ &- \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\phi^A_{,\lambda}\xi^\nu dx^\lambda \wedge d^{n-1}x_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{65}$$

Ma ricordando che:

$$dx^\lambda \wedge d^{n-1}x_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu d^n x_\mu - \delta^\lambda_\mu d^n x_\nu \tag{66}$$

Otteniamo:

$$\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi) = \left[\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\left(\xi^A \circ \phi - \phi^A_{,\nu}\xi^\nu\right) + L\left(j^1\phi\right)\xi^\mu\right] d^n x_\mu \tag{67}$$

Usando le derivate di Lie possiamo ulteriormente semplificare l'espressione ottenendo:

$$\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi) = \left[-\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\left(\pounds_\xi\phi\right)^A + L\left(j^1\phi\right)\xi^\mu\right] d^n x_\mu \tag{68}$$

Dove ϕ è una sezione di π_{XY} che non necessariamente soddisfa le condizioni di Eulero-Lagrange. Adesso prendiamone la divergenza ricordando che :

$$\mathbf{d}\left(V^\mu d^n x_\mu\right) = \partial_\rho V^\mu dx^\rho \wedge d^n x_\mu = \partial_\mu V^\mu d^{n+1}x \tag{69}$$

Otteniamo:

$$
\begin{aligned}
& d\left[\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\xi)\right] \\
& = \{\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\left(\xi^A\circ\phi - \phi^A_{,\nu}\xi^\nu\right) + L\left(j^1\phi\right)\xi^\mu\right] d^{n+1}x \\
& = \left[\frac{\partial L}{\partial y^A}\left(j^1\phi\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\right)\right]\left(-\xi^A\circ\phi + \phi^A_{,\nu}\xi^\nu\right) \\
& + \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\left(j^1\phi\right)\xi^\mu + \frac{\partial L}{\partial y^A}\left(j^1\phi\right)\left(\xi^A\circ\phi\right) \\
& + \frac{\partial L}{\partial v^A_\mu}\left(j^1\phi\right)\left[\frac{\partial \xi^A}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi^A}{\partial y^B}v^B_\mu - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}v^A_\nu\right]\left(j^1\phi\right) \\
& + L\left(j^1\phi\right)\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu}\} d^{n+1}x \\
& = \left\{\frac{\delta L}{\delta \phi^A}\left(\pounds_\xi\phi\right)^A + \delta_\xi L\right\}\left(j^1\phi\right) d^{n+1}x
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Qui $\delta L/\delta\phi^A$ rappresenta la derivatata di Eulero-Larange di L definita nella (25) e δL la variazione di L definita in (55) che si annulla quando la Lagrangiana è equivariante.
Le cose tornano; infatti l'equazione ottenuta ci dice che quando la Lagrangiana è equivariante e le equazioni di Eulero-Lagrange sono soddisfatte il teorema di Noether è valido.
Per ricavare un inverso diamo una definizione.

Definizione 1 *Un'azione di G è detta verticalmente transitiva se, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y_x$ e $\forall \phi$ sezione locale da y abbiamo:*

$$\{\left(\pounds_\xi\phi\right)(x) | \xi \in g\} = V_y Y \tag{71}$$

Adesso, l'equazione (70) ci dice che :

Teorema 3 *Se l'azione di G su Y è verticalmente transitiva e la densità lagrangiana è G-equivariante, allora una sezione ϕ di Y è una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange se e solo se la legge di conservazione di Noether vale $\forall \xi \in g$*

4.4.1 Esempio

In meccanica razionale, dalla condizione (55) vediamo che la lagrangiana è Diff($\mathbb{R}$)-equivariante se e solo se non dipende dal tempo; supponiamo anche che esista un gruppo A che agisce su Q il cui sollevamento su TQ lascia la Lagrangiana invariata; prendiamo $G = A \times Diff(\mathbb{R})$ e scriviamo gli elementi su g come coppia (χ, ξ) allora la (67) diventa:

$$
\begin{aligned}
\left(j^1\phi\right)^* J^{\mathcal{L}}(\chi,\xi) &= \left[\frac{\partial L}{\partial v^A}\left(\xi^A - v^A\chi\right) + L\chi\right] \\
&= \left(J^L(\xi) - E\chi\right) \\
&= J^L(\xi)
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Dove $J^L(\xi) = \left(\partial L/\partial v^A\right)\xi^A$ è la solita mappa momento per G che agisce su Q in meccanica.
Il teorema di Noether in forma di divergenza ci dice che:

$$\frac{d}{dt}J^L(\xi) = 0 \tag{73}$$

Infine, il gruppo G è verticalmente transitivo se e solo se A agisce transitivamente su Q

5 Bibliografia

M. Gotay J. Isenberg J. Marsden R. Montgomery [1997], Momentum Maps and Classical Fields, part I: Covariant Field Theory.

R. Abraham and J. Marsden [1978], Foundations of Mechanics , Second Edition.

O.Rossi D.Saunders [2013], Dual jet bundles, Hamiltonian systems and connections.

A.Enriquez M. Munoz-Lecanda N. Roman-Roy [2018], Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories.