Taller de Álgebra I

Clase 11 - Complejos

Primer cuatrimestre 2020

Sabemos que no existe ningun real r que satisface $r^2 = -1$.
Introducimos un número i que cumple $i^2 = -1$. Se lo llama el número imaginario.

Definición

Llamamos al conjunto de los números complejos a

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, a es la parte real y b es la parte imaginaria de z.
- La suma y el producto de números complejos se dan de manera natural
  - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  - $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Complejos

Nuevo tipo

Definamos un renombre de tipos para Complejos

```
type Complejo = (Float, Float)
```

donde el primer elemento es la parte real y el segundo es la parte imaginaria.

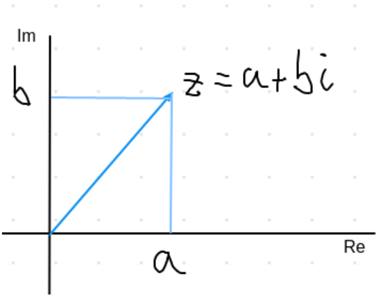
Funciones

Ejercicio

Implementar las funciones

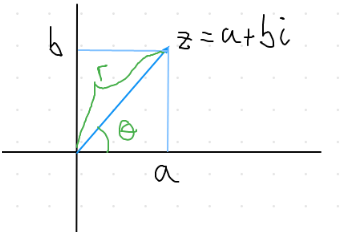
1. `re :: Complejo -> Float`
2. `im :: Complejo -> Float`
3. `conjugado :: Complejo -> Complejo`
4. `suma :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
5. `producto :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
6. `inverso :: Complejo -> Complejo`
7. `cociente :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
8. `potencia :: Complejo -> Int -> Complejo`
9. Dada una función cuadrática $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definir la función que tome los coeficientes a, b y c y devuelve las dos raíces. En caso de haber una sola, devolverla dos veces.
   `solucionesCuadratica :: Float -> Float -> Float -> (Complejo, Complejo)`

Podemos representar todos los números complejos en un plano. El plano complejo.



Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, lo representamos en el punto (a, b) del plano.

Podemos representar un numero complejo usando coordenadas polares



Si $z \in \mathbb{C}$, $z = (r, \theta)$ donde r es el módulo de z y θ su argumento.
Despejamos

- $a = r\cos\theta$
- $b = r\sin\theta$

Luego, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Más funciones

Más ejercicios

Implementar las funciones

1. `modulo :: Complejo -> Float`
2. `argumento :: Complejo -> Float`
3. implementar la función `pasarACartesianas` que toma $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y devuelve el complejo z que tiene módulo r y argumento θ
   `pasarACartesianas :: Float -> Float -> Complejo`
4. `raizCuadrada :: Complejo -> (Complejo,Complejo)`
   Dado $z \in \mathbb{C}$, devuelve los dos complejos w que satisfacen $w^2 = z$
5. `SolucionesCuadraticaCoefComplejos :: Complejo -> Complejo -> Complejo -> (Complejo,Complejo)`
   Dado un polinomio $az^2 + bz + c$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, implementar la función que devuelve sus dos raices.

Raíces n-ésimas

Dado un número natural n, las raíces n-ésimas de la unidad están dadas por

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad 0 \leq k < n. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicios

Implementar las funciones

1. `raicesNEsimas:: Int -> [Complejo]` que, dado n natural, devuelve la lista con las raíces n-ésimas de la unidad.
2. `potenciasRaizNEsima :: Int -> Int -> [Complejo]` que, dados k y n enteros con $0 \leq k < n$, devuelve la lista con las potencias $0, 1, \ldots, n-1$ de la raíz n-ésima asociada a k siguiendo la fórmula de arriba.