

24/03/2020

E7 Dato il SD NL TI \Rightarrow TC

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 - 2u^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \\ y = x_1^4 + x_2 + u^2 \end{cases}$$

Basta che una equazione non sia lineare e il sistema diventa non lineare.

1) \bar{x} e \bar{y} per $u(t) = \bar{u} = 1$?

Determinare i vari stati e le uscite di equilibrio per un determinato $u(t) = \bar{u} = 1$

2) Stabilità equilibri ?

Discutere la stabilità degli equilibri eventualmente trovati

3) Sist. linearizzati ?

Determinare i sistemi linearizzati nell'intorno degli equilibri eventualmente trovati

1) calcolo stati equilibrio

$$\begin{cases} 0 = \bar{n}_1^2 + \bar{n}_2 - 2\bar{U}^3 \\ 0 = \bar{n}_1 - \bar{n}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{n}_2 = \bar{n}_1 & \text{(ricavato dalla seconda equazione)} \\ \bar{n}_1^2 + \bar{n}_1 - 2 = 0 & \text{sostituisco nella prima equazione} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{n}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \end{cases} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

$\bar{U} = 1$

Quindi vi sono 2 stati di equilibrio:

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{1a} \\ x_{2a} \end{matrix}$$

$$\bar{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{1b} \\ x_{2b} \end{matrix}$$

(come convenzione i vari stati di equilibrio li distinguiamo con delle lettere ai pedici (_a e _b), così non facciamo confusione fra i pedici che denotano la variabile di stato (numeri) e i pedici che denotano gli stati di equilibrio (lettere))

e in corrispondenza l'uscita agli stati di equilibrio valgono:

$$\bar{y}_2 = (-2)^4 - 2 + 1^2 = 15$$

$$\bar{y}_3 = (1)^4 + 1 + 1^2 = 3$$

2) calcolo matrice A del generico sist. linearizzato

$$f_x = \begin{bmatrix} \overset{\text{(derivata di } x_1^2)}{2x_1} & \overset{\text{derivata di } x_2}{1} \\ \underset{\text{derivata di } x_1}{1} & \underset{\text{derivata di } -x_2}{-1} \end{bmatrix}$$

Piccolo ricordo sulla teoria (meglio comunque controllare nella parte di teoria): Il sistema linearizzato è fatto sviluppando l'equazione di stato in serie fermandosi al primo ordine, e al primo ordine il termine noto è 0 (per definizione di equilibrio) e poi abbiamo la matrice delle derivate parziali delle funzioni f rispetto alle variabili x

Equilibrio 2:

Mettiamo ora dentro la matrice appena trovata i valori di equilibrio che sono:

$$\bar{n}_1 = -2 \quad \bar{n}_2 = -2 \quad \bar{v} = 1$$

$$f_n \Big|_{\text{equilibrio 2}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A_2$$

matrice A nello stato di equilibrio a

non riesco a trarre conclusioni a priori su questa matrice, quindi guardiamo il polinomio caratteristico

$$\det(sI - A_2) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + 5s + 3 = 0$$

coeff. concordi
e 2° grado \Rightarrow 2 radici
con $\text{Re} < 0 \Rightarrow$ sist. lin. \Rightarrow Ep, AS

Equilibrio b: (stessa cosa che abbiamo fatto per l'equilibrio a)

$$\bar{n}_1 = 1, \bar{n}_2 = 1, \bar{v} = 1$$

$$f(x)|_{\text{equilibrio b}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A_b$$

In questo caso senza fare conti aggiuntivi notiamo che la traccia è negativa, quindi:

$$\text{traccia} > 0 \Rightarrow \text{almeno un autovalore con } \text{Re} > 0 \Rightarrow \text{E.p.}$$

□

Ricordiamo il meccanismo di studio della stabilità degli equilibri:

Se il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio è asintoticamente stabile, l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Se il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio ha almeno un autovalore con parte reale positiva (che non significa dire che il sistema linearizzato è instabile), allora l'equilibrio è instabile.

In tutti gli altri casi non si può dire nulla (dipendono da termini di sviluppo in serie maggiori del primo, quindi non si può dire nulla guardando il sistema linearizzato), non ci sarà mai richiesto.

3) sistemi linearizzati

Sistema linearizzato generico:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = f_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + f_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \\ \delta y = g_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + g_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \end{cases}$$

ricordando che:

$$\begin{aligned} \delta u &= u - \bar{u} \\ \delta x &= x - \bar{x} \\ \delta y &= y - \bar{y} \end{aligned}$$

Esprimiamo f_u , g_x e g_u

e anche f_x (ma lo abbiamo già calcolato al punto precedente)

derivata rispetto a u di
 $x_1^2 + x_2 - 2u^3$

$$f_u = \begin{bmatrix} -6u^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

derivata

delle
funzioni di
stato

rispetto a u

derivata rispetto a u di
 $x_1 - x_2$

$$g_x = \begin{bmatrix} 4x_1^3 & 1 \end{bmatrix}$$

derivata dell'uscita
rispetto a x

derivata rispetto a x_1
dell'uscita y

derivata rispetto a x_2
dell'uscita y

$$g_u = 2u$$

derivata rispetto a u
dell'uscita y

$f_x = [\dots]$
derivate delle
funzioni di stato
rispetto a x,
l'abbiamo calcolata
qualche slide indietro

- Sist. lin. attorno a x_q, u

Compilo inserendo i valori all'equilibrio a

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = \begin{bmatrix} -32 & 1 \end{bmatrix} \delta x + 2 \delta u \end{cases}$$

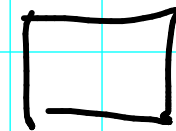
$$\delta u = u - 1$$

$$\delta x = x - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\delta y = y - 15$$

fare la stessa cosa per l'equilibrio b ...

ef. b ...



ES

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

SD LTI a TC,

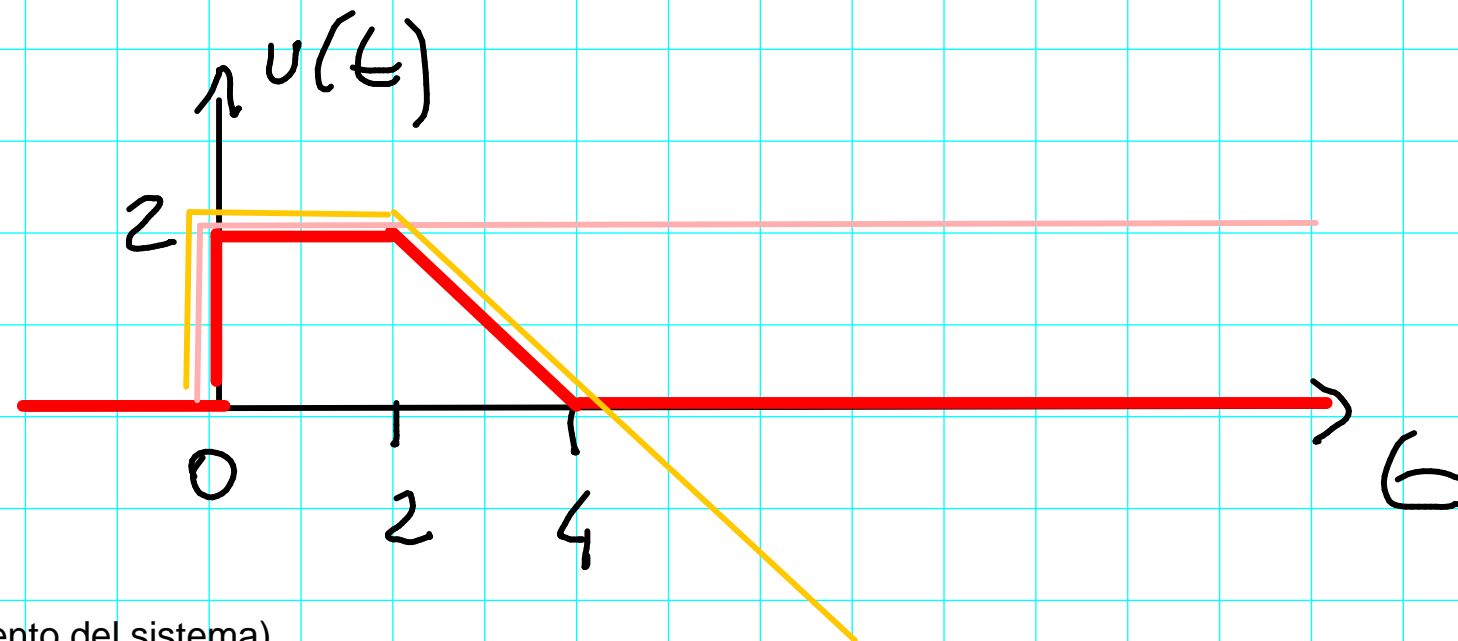
Notiamo subito che è asintoticamente stabile, la matrice A è triangolare inferiore e i suoi autovalori sono nella diagonale principale (-1 e -2) hanno parte reale negativa.

E' strettamente proprio, cioè non compare u nell'equazione d'uscita.

dati $x(0)$ ----->

$$x(0) = 0$$

e $u(t)$ ----->



domanda:

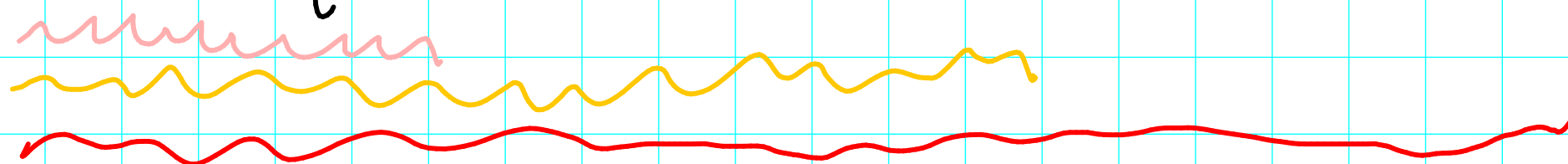
$$y(t) \quad t \geq 0?$$

(calcolare il movimento del sistema)

Sappiamo già che il movimento del sistema tende a 0 per t che tende all'infinito (lo si vede dal grafico di $u(t)$)

• Esprimiamo $u(t)$ come somma di segnali canonici

$$u(t) = 2 \operatorname{sca}(t) - \operatorname{ran}(t-2) + \operatorname{ran}(t-4)$$



Quindi

Trasformata di Laplace

$$U(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-4s}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{un}(t)}$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{un}(t-2)}$

• Calcolo la FdT del sistema

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = [0 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

gli zeri nelle righe e nelle colonne
tolgono interi pezzi dalle matrici.

• Esprimo $Y(s)$ (c'è sotto TF)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-4s} \right)$$

Dobbiamo in generale raggiungere una forma come questa:

In generale (non più)

$$\sum_i \frac{N_i(s)}{D(s)} \sum_j e^{-\tilde{T}_j s}$$

somma di termini razionali \downarrow Heaviside $\rightarrow g_i(t)$

somma di termini esponenziali \downarrow ritardi con cui appaiono le $g_i(t)$

$$= \underbrace{\frac{4}{s(s+1)(s+2)}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}}_{Y_2(s)} (e^{-4s} - e^{-2s})$$

Questo primo termine non ha la forma esponenziale, semplicemente vale 0

Questo secondo termine, invece si vede chiaramente che è moltiplicato per una sommatoria di esponenziali

Il meccanismo con cui si procede ora è che si utilizza l'antitrasformazione di Heaviside per i termini razionali trasformandoli quindi da $Y(s)$ a $y(t)$, mentre le varie sommatorie di termini esponenziali ci mostrano (tramite il coefficiente con cui è moltiplicata la s nell'esponente) i ritardi con cui appaiono le $y(t)$

Heaviside

STRETTAMENTE LEGATA ALLA PROSSIMA SLIDE !

$$y_1(t) = (2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}) \cos(t)$$

Antitrasformiamo quindi i termini razionali
Y_1(s) e Y_2(s) (saltiamo i conti, fatti con maxima)

$$y_2(t) = \left(-\frac{3}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-t}\right) \cos(t)$$

Componiamo

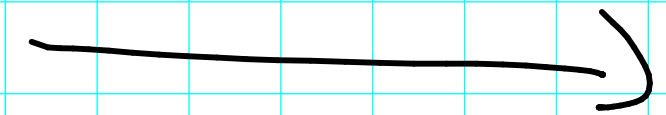
aggiungiamo ora i ritardi degli esponenziali: i ritardi sono i coefficienti con cui sono moltiplicate le s negli esponenti.

(a y_1 non mettiamo ritardo,
non ci sono esponenziali)

(y_2 ha due ritardi: -2 e -4)

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t-2) + y_2(t-4)$$

(da notare anche i segni - e + di questi due termini,
che corrispondono ai segni - e + degli esponenziali)



$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N(s)}{D(s)} e^{-s\tau} \right] = y(t-\tau)$$

HEAVISIDE $\rightarrow y(t)$

N, D polinomi

Riassumendo: Heaviside si usa per antitrasformare per trasformate di Laplace razionali fratte, se poi la trasformata di Laplace razionale fratta è moltiplicata per un termine esponenziale devo aggiungere un ritardo. L'importante è non unire l'esponenziale al numeratore della razionale fratta, ma tenerlo separato e aggiungerlo successivamente come ritardo!

Continuiamo coi calcoli componendo tutto quanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) - y_2(t-2) + y_2(t-4) \\ &= (2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}) \sin(t) \\ &\quad - \left(-\frac{3}{2} + (t-2) - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} + 2e^{-(t-2)} \right) \sin(t-2) \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2} + (t-4) - \frac{1}{2}e^{-2(t-4)} + 2e^{-(t-4)} \right) \sin(t-4) \end{aligned}$$

□

E9

Consideriamo un FOT $G(s)$ già scomposto
in somma di fratti semplici

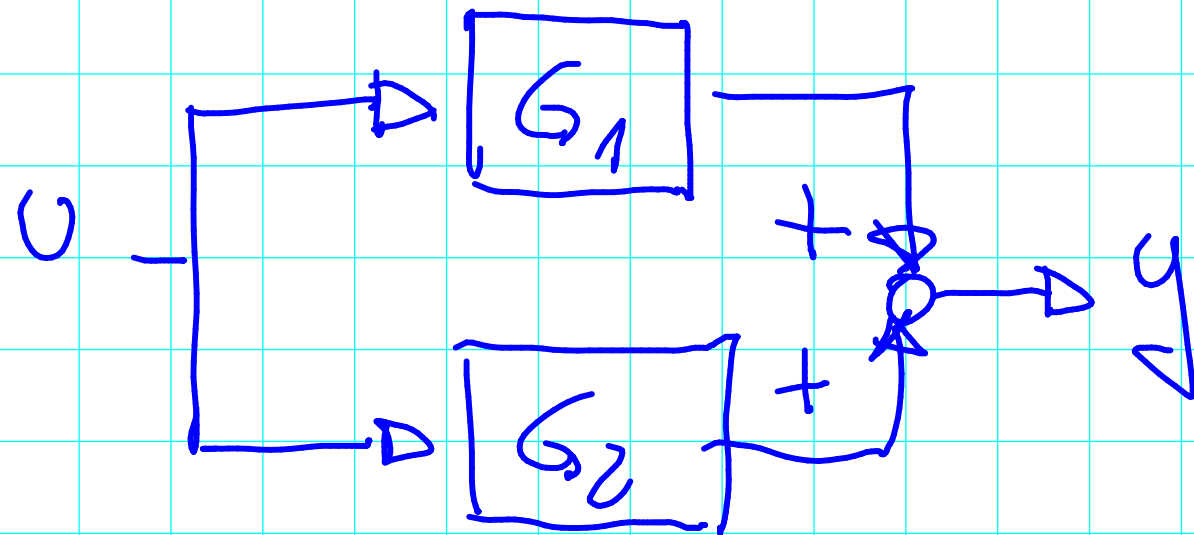
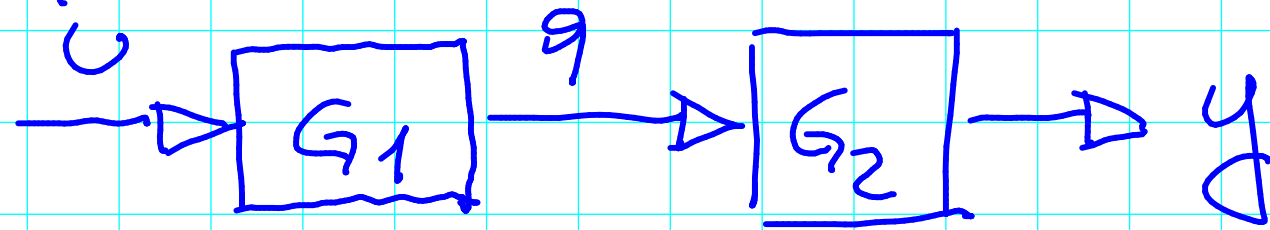
$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

Possiamo riscriverla come
una somma di profatti
di fratti semplici con denominatori
di primo grado:

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

Senza di ~~profatti~~ ^{potenze} di
F. semplici con den. di
1° grado

Anticipazione



$$Q = G_1 \cdot U$$

$$Y = G_2 Q = G_2 G_1 U$$

(per mostrarci che blocchi in serie equivalgono alla moltiplicazione delle funzioni di trasferimento)

$$Y = G_1 U + G_2 U$$

$$= (G_1 + G_2) U$$

Blocchi in parallelo invece si uniscono con nodi sommatori e quindi si esprimono così

$$y(t) = G(s) u(t)$$

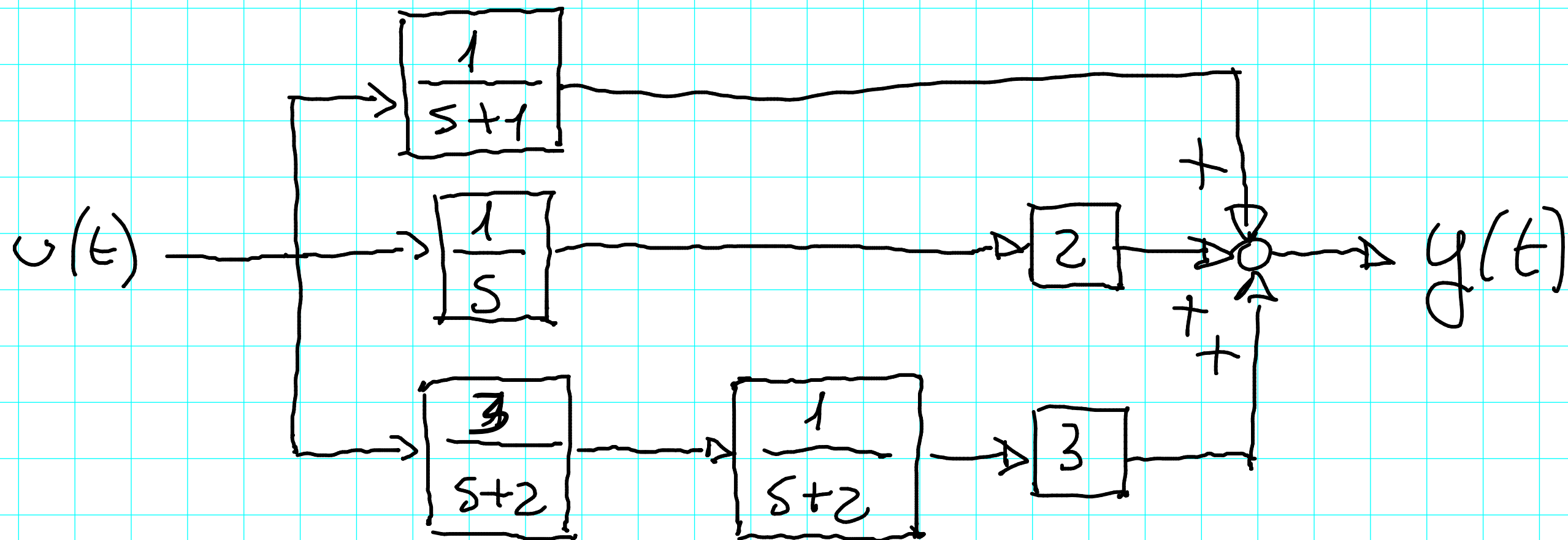
Leggasi $\mathcal{L}[y(t)] = G(s) \mathcal{L}[u(t)]$
 leggasi (che si legge)

scrittura "operatoriale"
 scrittura operatoriale

Queste ultime due righe le ha scritte per dirci che Y grande o y piccolo si possono scrivere in una stessa espressione intendendo che in realtà c'è una relazione di trasformata fra le due.

Scriviamo ora lo schema a blocchi della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$



Qualunque funzione di trasferimento razionale fratta può condurmi in uno schema a blocchi !

Per ora noi siamo capaci di passare dalle matrici A b c d alla funzione di trasferimento G, non sappiamo ancora fare il viceversa, vediamo come fare:

Intervista:

Supponiamo il seguente

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

Siccome siamo in un caso scalare, la funzione di trasferimento G(s) è facilmente calcolabile come segue:

$$G(s) = c(s-a)^{-1}b = \frac{bc}{s-a}$$

Quindi

Data una funzione di trasferimento in questa forma:

$$G(s) = \frac{r}{s-p} \rightarrow$$

Possiamo ricavare facilmente un sistema fatto così:

$$\begin{cases} \dot{x} = px + ru \\ y = x \end{cases}$$

Finchè il sistema è scalare questa operazione è semplice.
Se il sistema non è scalare questo metodo non funziona, vediamo nelle prossime slide come affrontare il caso matriciale.

Applico presto concetto di sistemi in questione

Primo passo: decidiamo di chiamare x_1, x_2, x_3, x_4 le varie uscite dai singoli blocchi, e facciamo le considerazioni che seguono le frecce in rosso.

Passaggi:

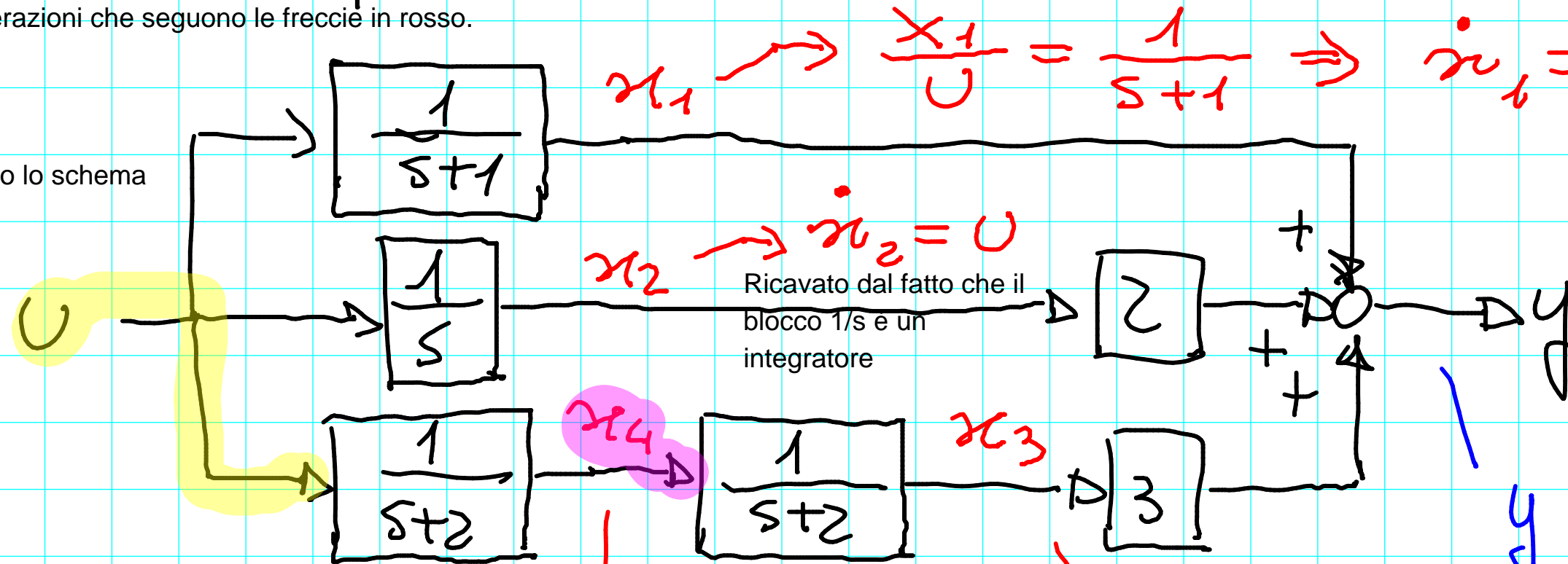
$$(s+1) X_1 = U$$

$$sX_1 + X_1 = U$$

$$\dot{x}_1 + x_1 = U$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + U$$

Ricopiamo lo schema di prima:



semplice nodo sommatore

$$y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\dot{x}_4 = -2x_4 + U$$

stessi passaggi fatti per x_1

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + x_4$$

stessi passaggi di x_1 solo che invece di U abbiamo x_4

cerchiamo ora di rendere il tutto in forma matriciale

Quindi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{matrice A} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{matrix} \text{matrice b} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} u$$

compiliamo le tre matrici con le osservazioni fatte sullo schema a blocchi nella slide precedente

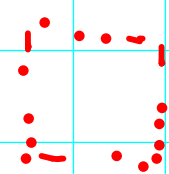
$$y = \begin{matrix} \text{matrice c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} x$$

il termine noto u moltiplicato per u non lo mettiamo perché nello schema a blocchi non c'è.

autovalori

(perché la matrice è triangolare alta)

inoltre notiamo che gli autovalori sono i poli dei vari blocchi nella slide precedente

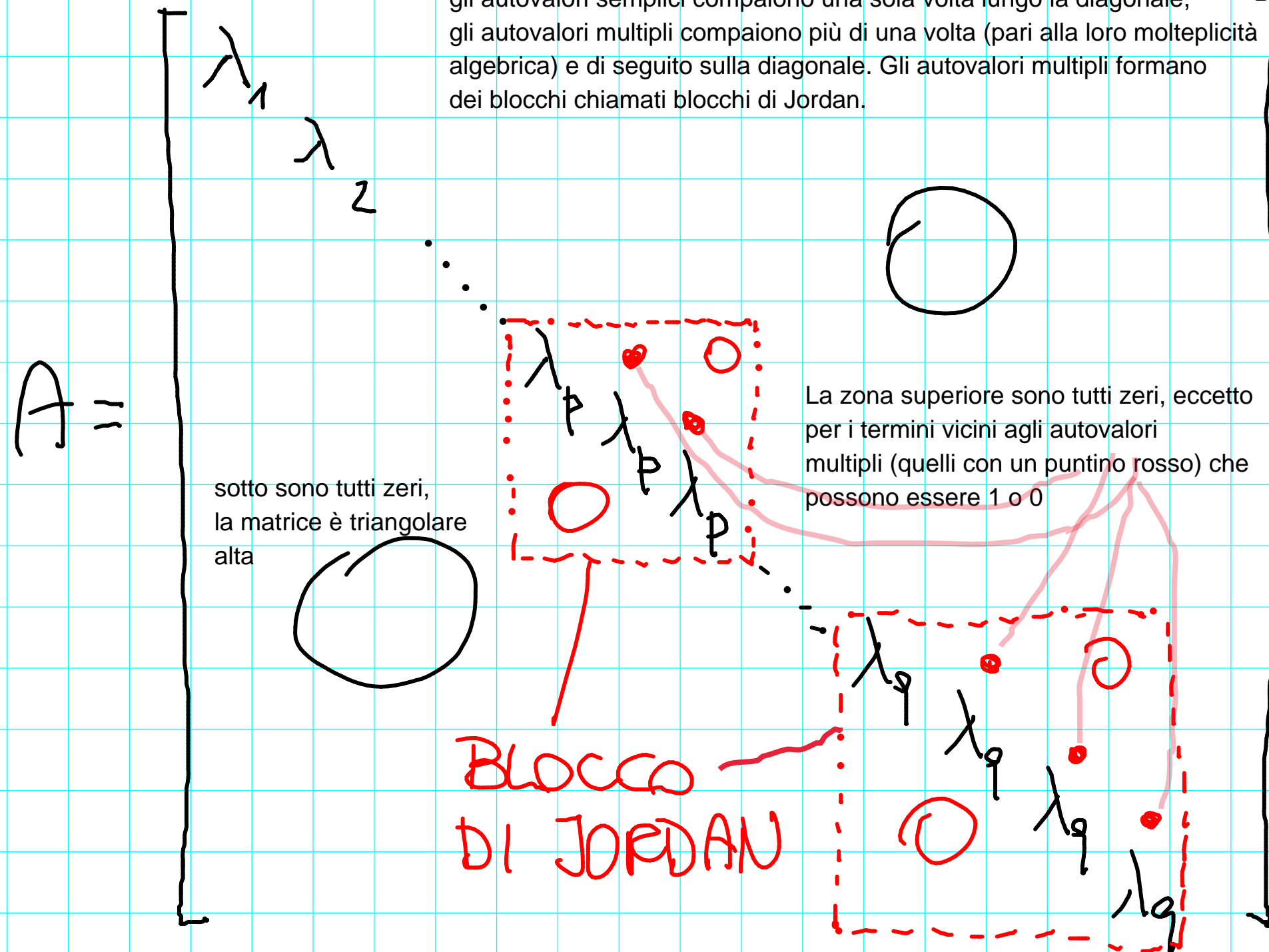


autovalori multipli \Rightarrow blocco sulla diagonale

Vediamo nella prossima slide il caso generale !

Forma di Jordan

gli autovalori semplici compaiono una sola volta lungo la diagonale, gli autovalori multipli compaiono più di una volta (pari alla loro molteplicità algebrica) e di seguito sulla diagonale. Gli autovalori multipli formano dei blocchi chiamati blocchi di Jordan.



1 oppure 0

MINI BLOCCO DI JORDAN

generico blocco

(zoom su un blocco di jordan generico)



Vogliamo ora vedere la relazione fra la matrice di Jordan e la stabilità:

Il + piccolo miniblocco di Jordan (di dim. > 1) possibile è

il miniblocco più piccolo che esiste è ovviamente un autovalore preso da solo.

Analizziamo il più piccolo miniblocco di Jordan possibile di dimensione maggiore di 1, che è fatto così:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

stabilizzandolo

studiamolo

Studiamo cioè $e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t}$

Questa matrice sembra
apparentemente non diagonalizzabile.
però possiamo riscriverla in maniera
diversa

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_M + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{(M+N)t} = e^{Mt} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} e^{Nt}$$

Possiamo scrivere questa uguaglianza
solo e soltanto perchè

M ed N
commutano

commutare significa che: $(MN = NM)$

Spiegazione scritta in rosso:
Il miniblocco (che è di dimensionone 2)
da cui siamo partiti, presenta
un valore "1" sopra gli autovalori
lambda, per questo siamo giunti
ad avere la matrice N. Se non avessimo
avuto l'"1", ci sarebbe stato uno "0" (gli zeri
"tagliano" i miniblocchi) e quindi quello
non sarebbe stato più un miniblocco di dimensione
2, ma sarebbero stati due miniblocchi di
dimensione 1 (i singoli autovalori lambda).

1 miniblocco
di dim. 2
2 di dim. 1
pure

che sono solo 1 0 0
in pos. (1,2) nel Blocco
di Jordan

L'unica cosa che rimane
da "svolgere" è e^{Nt} ,
vediamo come risolvere
nella prossima slide

osservo che N è nilpotente : $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

nilpotente, cioè che $N^2 = 0$:

Siccome è nilpotente possiamo semplicemente scrivere:

$$\Rightarrow e^{Nt} = I + Nt \quad \underline{\text{E BASTA}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} = Q$$

In questo caso

miniblocco di dim 2

Supponiamo che la parte reale dell'autovalore λ sia negativa, allora la parte evidenziata tende a 0 per $t \rightarrow \infty$.

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Leftrightarrow Q \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty$$

Stesso ragionamento della riga precedente

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow Q \text{ diverge}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \Rightarrow Q \text{ diverge}$$

in modo esponenziale

in modo lineare

Se è presente il termine evidenziato in giallo, e la parte reale dell'autovalore è nulla, allora diverge per $t \rightarrow \infty$. Perché non diverga c'è bisogno che non ci sia il termine evidenziato in giallo e che quindi la dimensione massima del miniblocco di Jordan associato all'autovalore con parte reale nulla sia 1 (non 2 come in questo caso in cui diverge).

Quindi detti λ_i gli autovalori di A

• $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \iff$ sistema AS

• $\exists i \mid \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \implies$ sistema I

• $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$
 $\exists i \mid \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$
ma in tal caso il
^{più grande} \neq blocco
di Jordan ha dim. 1 \implies sistema S

• Altrimenti \implies sistema I

□