17/03/2020

Esempi

1) $\pi(s) = 5s^2 + s \Rightarrow$ non AS (radice nulla)

2) $\pi(s) = s^3 - s^2 + s + 4 \Rightarrow$ " " (coeff. discordi)

3) $\pi(s) = s^5 + 4s^3 + 3s^2 + s + 5 \Rightarrow$ " " (manca s^4)

4) $\pi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 5 \Rightarrow$? cond. necessaria OK

CRITERIO DI ROUTH

Cond. nec. e suff. (CNS)
per la stab. asintotica
di un SD LTI a TC (analogo a TD: crit. di JURY)

Si basa sulla tabella di Routh
che si costruisce da $\Pi(s)$

TABELLA DI ROUTH

$$\pi(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \text{oppure} & a_n \\
a_1 & a_3 & & a_n & & 0 \\
h_1 & h_2 & \cdots & & & \\
q_1 & q_2 & \cdots & & & \\
w_1 & w_2 & \cdots & & &
\end{array}\right\} n+1 \text{ righe}$$

Ogni riga dalla 3^a in poi dipende dalle due precedenti

Regola :

$$\begin{array}{cccc} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots \end{array}$$

$$w_i = -\frac{1}{g_1}\det\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ g_1 & g_{i+1} \end{bmatrix}$$

gli elementi mancanti al termine delle righe sopra si assumono nulli

CRITERIO DI ROUTH

SD con polinomio caratteristico $\pi(s)$ asint. stabile $\iff$ TUTTI gli elementi della prima colonna della tabella di Routh concordi (e non nulli)

Corollario:

Se non vi sono el. nulli in 1ª colonna, allora il n° di inversioni di segno sulla 1ª colonna è uguale al n° di radici di $\pi(s)$ con $Re > 0$.

ES

$$\pi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 5$$

Tabella: $\quad n = 4 \Rightarrow 5$ righe

$$\begin{array}{cccc}
1 & 4 & 5 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
\alpha & \beta & 0 & \\
\gamma & 0 & & \\
\delta & & &
\end{array}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

$$\gamma = -\frac{1}{\alpha}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = -\frac{13}{7} \Rightarrow \text{NON AS}$$

$$\delta = -\frac{1}{\gamma}\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} = \beta = 5$$

2 INVERSIONI
$\Rightarrow$ 2 radici con $Re > 0$

$\square$

ES) Dato il SD LTI a TC con pol. caratt.

$$\Pi(s) = s^3 + 2s^2 + hs + k$$

dire per quali valori di (h, k) esso è AS

Uso Routh

NB però so che dev'essere $h > 0$ e $k > 0$

Tabella

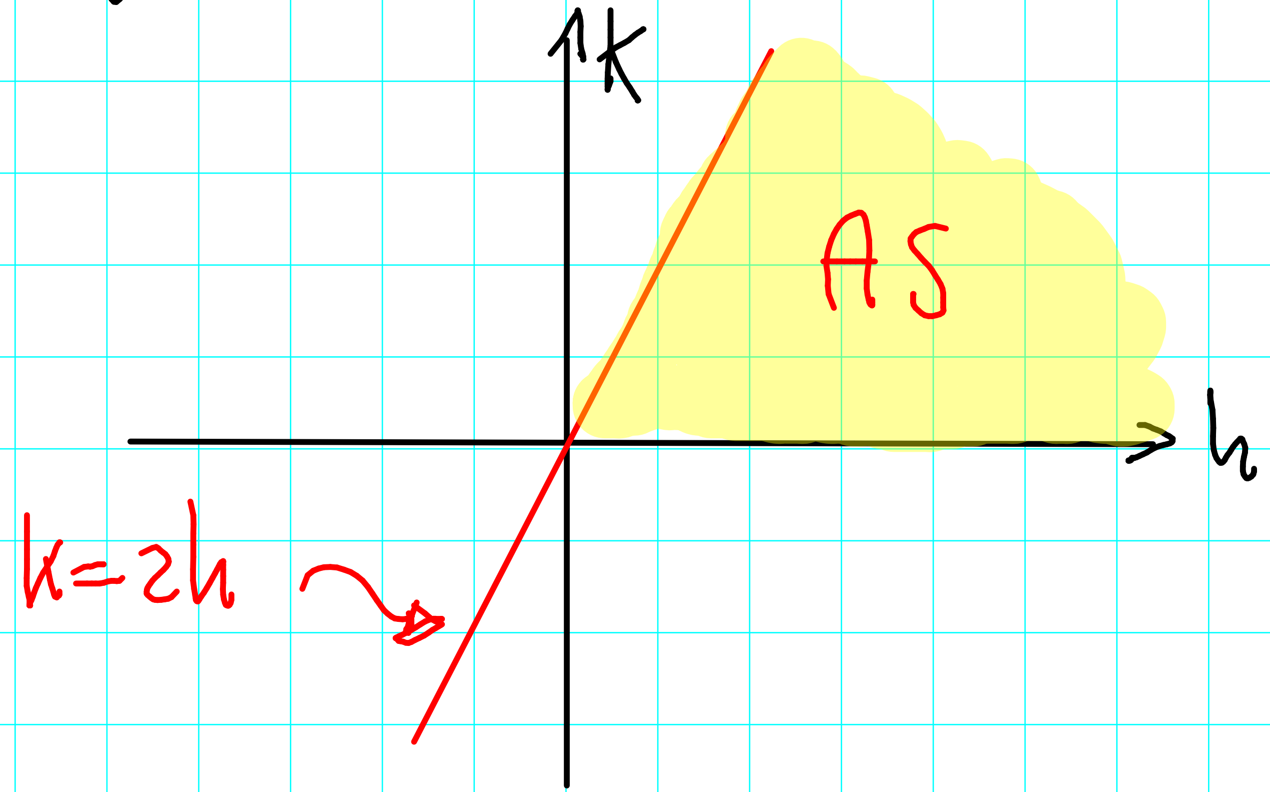
$$\begin{array}{cc} 1 & h \\ 2 & k \\ \alpha & \\ \beta & \end{array}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & h \\ 2 & k \end{bmatrix} = \frac{2h-k}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\det\begin{bmatrix} 2 & k \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = k$$

Disequazioni per imporre termini 1ª colonna concordi:

$$\begin{cases} h - \frac{k}{2} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < 2h \end{cases}$$



$\square$

SEGNALI E TRASFORMATE (TC)

SD LTI a TC (SISO) $u \to \boxed{\mathcal{S}} \to y$

DOMINIO DELLE TRASFORMATE

$s, U, Y \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
U(s) \arrow[r, "\text{legame ALGEBRICO}"] & Y(s) \arrow[d, squiggly, "\text{ANTITRASFORMAZIONE}"] \\
u(t) \arrow[u, squiggly, "\text{TRASFORMAZIONE}"] \arrow[r, "\text{legame DIFFERENZIALE}"'] & y(t)
\end{tikzcd}$$

DOMINIO DEL TEMPO (segnali)

$t \in \mathbb{R}$

$u, y \in \mathbb{R}$

- SERIE DI FOURIER

Dato un segnale $v(t)$ periodico di periodo T

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \sin\left(k\omega_0 t + \varphi_k\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

→ Somma di ∞ sinusoidi di freq. multiple di una fondamentale (di periodo T)

infinità numerabile

- TRASFORMATA DI FOURIER (TDF)

$v(t)$ definito su $\mathbb{R}$

Definizione della sua TDF

nucleo

$$V(j\omega) = \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (\text{se } \exists \text{ l'int.})$$

Antitrasformata:

$\omega = 0$

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(j\omega)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$v(t)$ è somma di ∞ sinusoidi
↑ continuo

- TRASFORMATA DI LAPLACE (TDL)

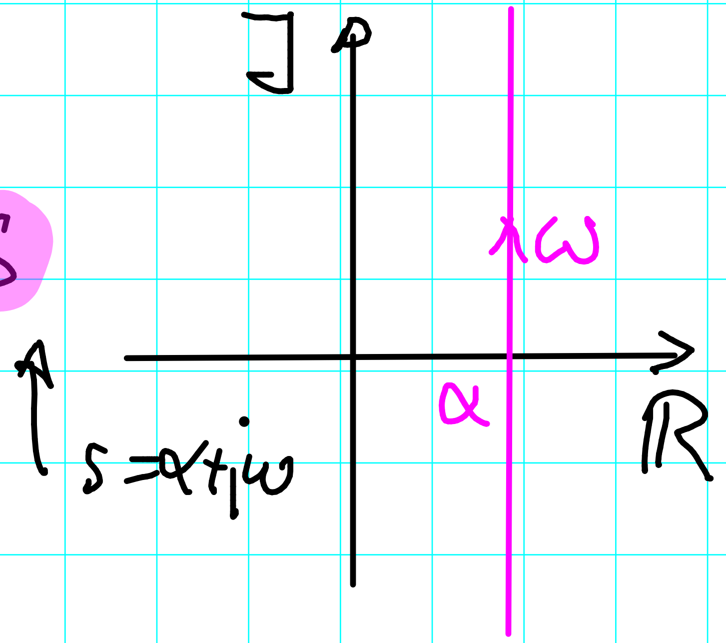
Dato un segnale $v(t)$ definito per $t \geq 0$ (o equivalentemente nullo per $t < 0$)

Def. di TDL

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \int_0^\infty v(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s, V \in \mathbb{C}$$

Antitrasformata:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} V(s)\, e^{st}\, ds$$

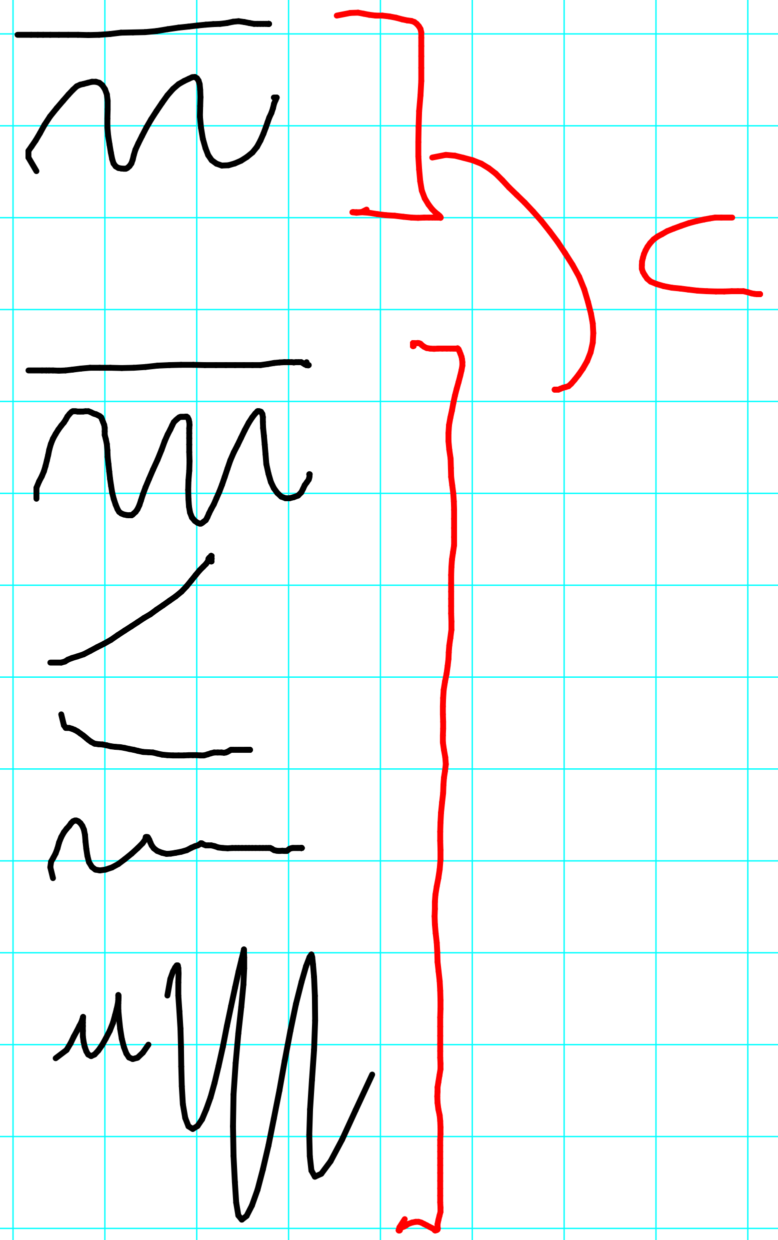


$$e^{st} = e^{(\alpha + j\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

"ingredienti" di un segnale

secondo F : $e^{j\omega t}$

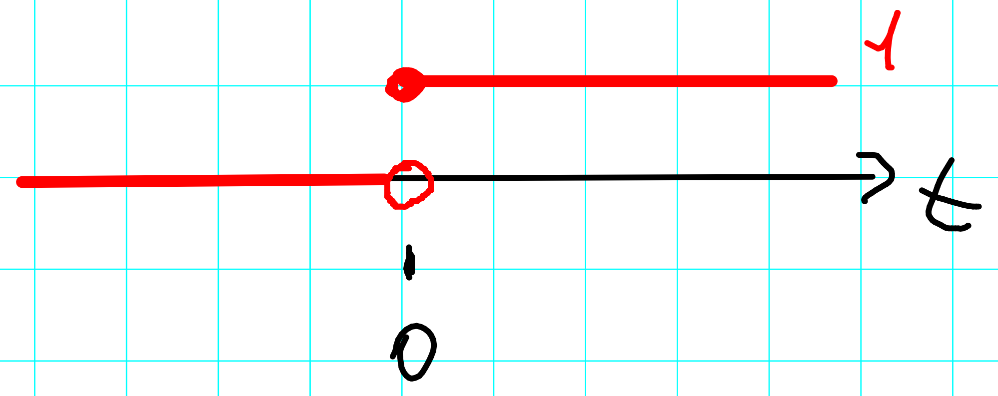
" L : $e^{(a+j\omega)t}$



Esempi di calcolo di TDL notevoli

E1)

$$v(t) = sca(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[sca(t)] = \int_0^\infty sca(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

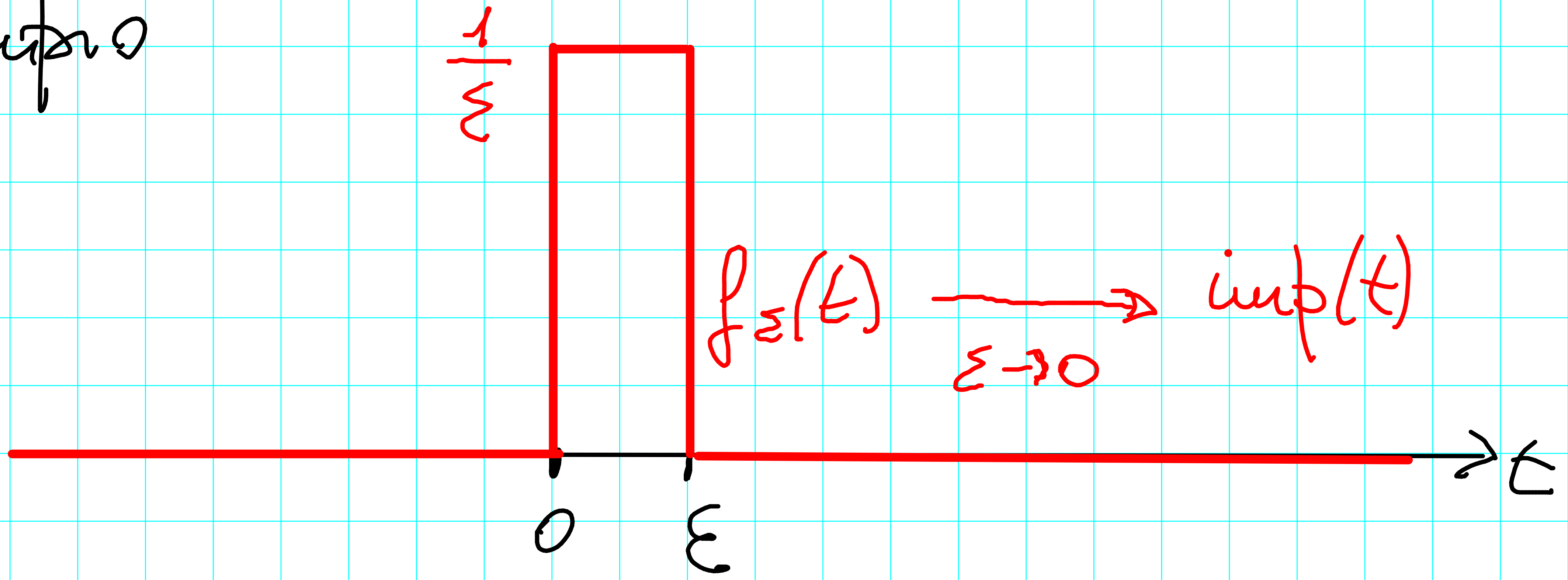
$\square$

E2

$$v(t) = \mathrm{imp}(t)$$

- $\mathrm{imp}(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t)\, dt = 1$

Per esempio



$$\mathcal{L}[\mathrm{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) e^{-st} \, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} \, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{e^{-st}}{-s\varepsilon} \right]_0^\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{e^{-s\varepsilon}}{-s\varepsilon} - \frac{1}{-s\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} \overset{H}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{s} e^{-s\varepsilon}}{\cancel{s}} = 1$$

$\square$

E3

$v(t) = e^{at} \quad t \ge 0$ o equiv. $v(t) = e^{at}\,\mathrm{sca}(t) \quad a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[e^{at}\,\cancel{\mathrm{sca}(t)}] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\,dt$$

a volte si omette sottintendendolo

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

deve essere $\mathrm{Re}(a-s) < 0$

$\iff \mathrm{Re}(s) > a$

$\mathrm{Re}(a-s) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Re}(s)$

$= a - \mathrm{Re}(s)$

ASCISSA DI CONVERGENZA

PROPRIETÀ DELLA TDL

1) È un operatore lineare

$$\mathcal{L}[\alpha v_1(t)+\beta v_2(t)] = \alpha\mathcal{L}[v_1(t)]+\beta\mathcal{L}[v_2(t)]$$

2) TDL della derivata

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[v(t)] - v(0)$$

se occorre, 0^-

ES: $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}sca(t)\right] = s\mathcal{L}[sca(t)] - sca(0^-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1 = \mathcal{L}[imp(t)]$

II

3) Di conseguenza

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[v(t)]$$

4) TDL del segnale ritardato

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[v(t)]$$

$\tau > 0$

RITARDO

Dim

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)] = \int_0^\infty \boxed{v(t-\tau)}\, e^{-st}\, dt = (*)$$

$$x = t-\tau \Rightarrow \begin{array}{l} t = x+\tau \\ dt = dx \end{array} \qquad \begin{array}{l} t=0 \to x=-\tau \\ t=\infty \to x=\infty \end{array}$$

$$(*) = \int_{-\tau}^\infty \underbrace{v(x)}\, e^{-s(x+\tau)}\, dx = \int_0^\infty v(x)\, e^{-sx}\, e^{-s\tau}\, dx$$

$v(\cdot) = 0$ per $\cdot < 0$

$$= e^{-s\tau}\underbrace{\int_0^\infty v(x)\, e^{-sx}\, dx} = e^{-s\tau}\,\mathcal{L}[v(t)]$$

$\square$