TUTORATO 5

Trasmissione del calore: conduzione

(link registrazione)

Corso di Fisica Tecnica 2019-2020

Francesco Lombardi
Dipartimento di Energia, Politecnico di Milano

Errata Corrige

Le slides relative all'**esercizio 8.7** (il secondo di questa sessione di tutorato) contengono un commento che rettifica un'inesattezza detta durante la sessione live, in merito all'utilizzo dei Kelvin o dei °C nel calcolo delle distribuzioni di temperatura.

Il commento è evidenziato in un riquadro rosso per le slides 14 e 16, ma vale anche per altre slides. Si invita a leggerlo attentamente.

Conduzione
8.5 – Intermedio

8.5. *[intermedio]* Un fluido in transizione di fase alla temperatura di 400 °C, percorre una tubazione. Il coefficiente convettivo sulla superficie interna del condotto è pari a 800 W/m^{2}K. Per limitare la potenza termica dispersa, la tubazione è rivestita con due strati isolanti: uno per elevata temperatura (k_{is1} = 0.9 W/mK) dello spessore di 40 mm, l'altro per bassa temperatura (k_{is2} = 0.07 W/mK) dello spessore di 50 mm. Il condotto presenta un diametro interno di 20 cm e uno spessore di 10 mm ed è realizzato con un acciaio con conduttività termica k_t = 15 W/mK. La temperatura della superficie più esterna dell'isolante è T_e = 20 °C. Si valuti la potenza termica dispersa per unità di lunghezza e si rappresenti la distribuzione di temperatura nello spessore della tubazione.

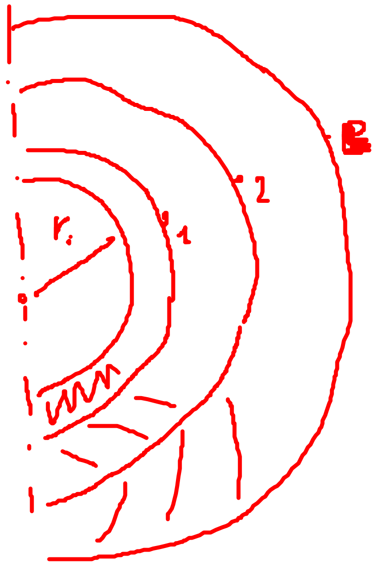
Conduzione
8.5 – Intermedio

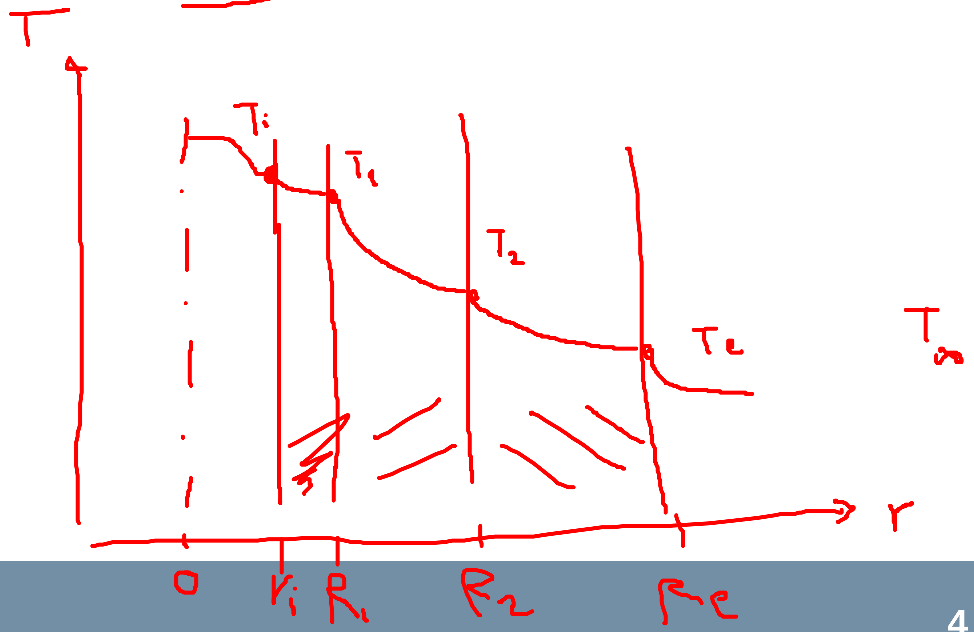
DATI: $T_i = 400\,°C$ (COSTANTE!)
$h_i = 800\ W/m^2K$

$K_{IS1} = 0{,}9\ W/mK$ $\quad S_{IS1} = 0{,}04\ m$
$K_{IS2} = 0{,}07\ W/mK$ $\quad S_{IS2} = 0{,}05\ m$
$K_T = 15\ W/mK$ $\quad S_T = 0{,}01\ m$

$D_i = 0{,}2\ m \rightarrow r_i = 0{,}1\ m$
$T_e = 20\,°C$

INCOGNITE: – $\dot{Q}/L$
– DISTRIBUZIONE DI T NELLO SPESSORE





Conduzione

8.5 – Intermedio

$$T = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + C \ln r + D$$

$$\begin{cases} r = R_i \\ T = T_i \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R_e \\ T = T_e \end{cases} \qquad \begin{cases} T_i = C \ln R_i + D \\ T_e = C \ln R_e + D \end{cases} \longrightarrow D = T_i - C \ln R_i$$

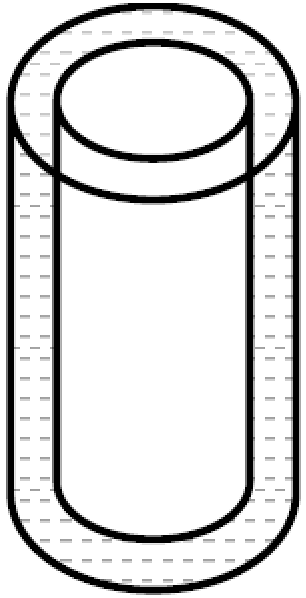
$$T_e - T_i = C(\ln R_e - \ln R_i) \longrightarrow C = \left(\frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}}\right)$$

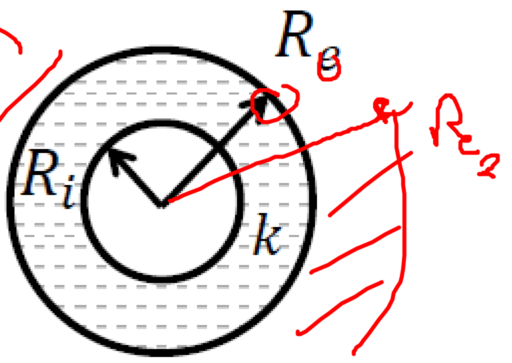
$$T = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln r + T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln R_i = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

$$J = -k \frac{dT}{dr} = k \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \frac{1}{r}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{JA}{L} = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{1}{2\pi k} \ln \frac{R_e}{R_i}} \longrightarrow R_{cond}$$

$2\pi r \cdot L$





Conduzione

8.5 – Intermedio

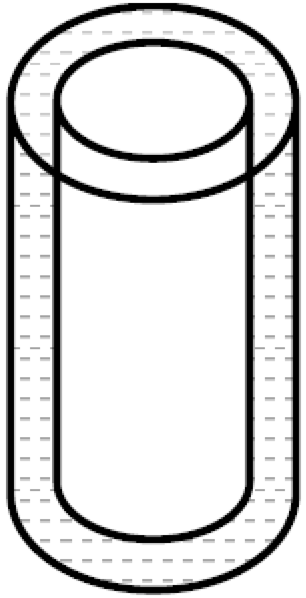
$$T = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + C \ln r + D$$

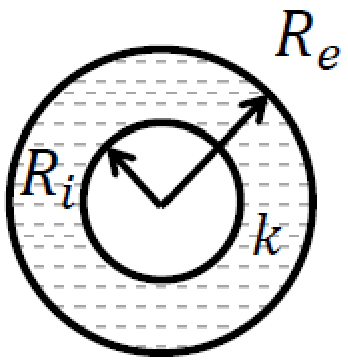
$$\begin{cases} r = R_i \\ T = T_i \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R_e \\ T = T_e \end{cases} \qquad \begin{cases} T_i = C \ln R_i + D \\ T_2 = C \ln R_e + D \end{cases}$$

$$T_e - T_i = C(\ln R_e - \ln R_i)$$

$$T = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln r + T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln R_i = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

$$J = -k\frac{dT}{dr} = k\frac{T_i - T_e}{\ln\frac{R_e}{R_i}}\frac{1}{r} \qquad \frac{\dot{Q}}{L} = \frac{JA}{L} = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{1}{2\pi k}\ln\frac{R_e}{R_i}}$$





Conduzione

8.5 – Intermedio

LA SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO E' IMMEDIATA GRAZIE ALL'ANALOGIA ELETTRICA:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2\pi \cancel{L}}\left(\underbrace{\frac{1}{h_i R_1}}_{R_{c1}} + \underbrace{\frac{1}{K_T}\ln\frac{R_1}{R_i}}_{R_{KT}} + \underbrace{\frac{1}{K_{is1}}\ln\frac{R_2}{R_1}}_{R_{Kis1}} + \underbrace{\frac{1}{K_{is2}}\ln\frac{R_e}{R_2}}_{R_{Kis2}}\right)}$$

$\frac{1}{hA}$ — $2\pi R_i L$

Conduzione

8.5 – Intermedio

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{(400-20)\,°C}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{800 \cdot \underbrace{0{,}1}_{\uparrow\ 0{,}2/2}} + \frac{1}{15}\ln\frac{0{,}11}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}9}\ln\frac{0{,}15}{0{,}11} + \frac{1}{0{,}07}\ln\frac{0{,}2}{0{,}15}\right)\frac{K\,m}{W}}$$

$0{,}11 = 0{,}1 + 0{,}01$ $\quad$ $0{,}15 = 0{,}11 + \underbrace{0{,}04}$ $\quad$ $0{,}2 = 0{,}15 + \underbrace{0{,}05}$

$$\boxed{\dot{Q}/L = 534\ W/m}$$

Conduzione

8.5 – Intermedio

	Geometria		
	Piana	Cilindrica	Sferica
R_{cond}	$\frac{s}{kA}$	$\frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi kL}$	$\frac{\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_e}}{4\pi k}$
R_{conv}	$\frac{1}{hA}$	$\frac{1}{hA_{(r)}}$	$\frac{1}{hA_{(r)}}$

Conduzione

8.7 – Avanzato

8.7. *[avanzato]* Una parete piana è composta da due strati di due materiali diversi, A e B. Nello strato A vi è generazione di potenza termica uniforme $\sigma = 1.5 \cdot 10^6$ W/m^3, $k_A = 75$ W/mK e lo spessore è $L_A = 50$ mm. Nello strato B non vi è generazione di potenza, $k_B = 150$ W/mK e lo spessore è $L_B = 20$ mm. La superficie interna di A è isolata, mentre la superficie esterna di B è raffreddata da una corrente di acqua con $T_{inf} = 30$ °C e $h = 1000$ W/m^{2}K.

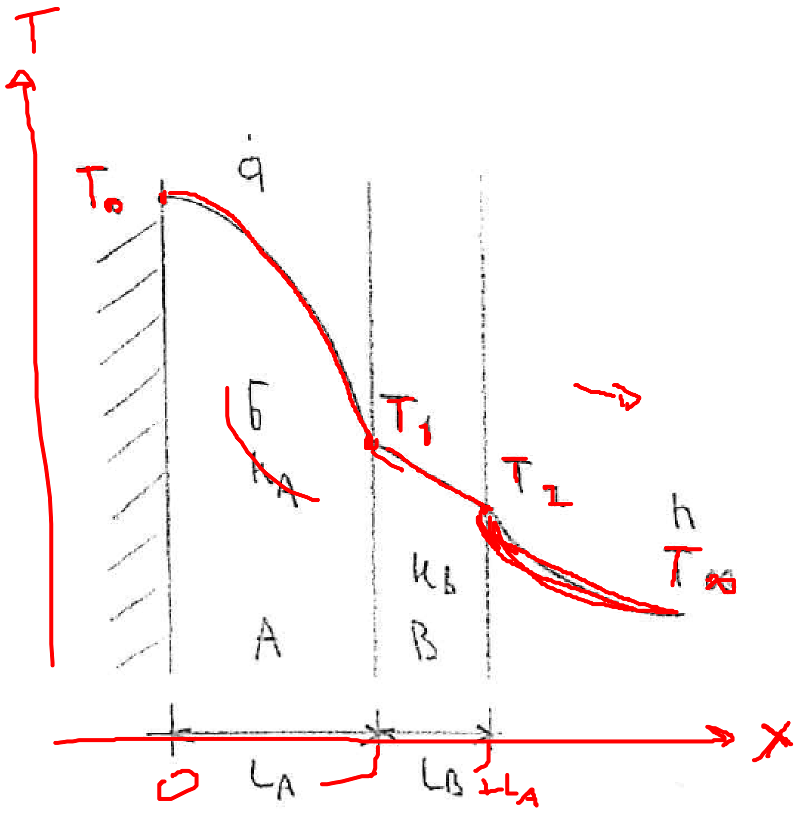
- Disegnare la distribuzione di temperatura che esiste in condizioni stazionarie.
- Determinare la temperatura T_0 della superficie isolata e la temperatura T_2 della superficie raffreddata.

SISTEMA: PARETE PIANA A DUE STRATI CON GENERAZIONE DI POTENZA INTERNA UNIFORME IN A;
REGIME STAZIONARIO;
→ NON POSSO UTILIZZARE L'ANALOGIA ELETTRICA PER RICAVARE IL FLUSSO TERMICO!

DATI:

$\sigma = 1{,}5 \cdot 10^6 \ W/m^3$
$k_A = 75 \ W/mK$
$L_A = 50 \ mm \ (0{,}05 \ m)$
$k_B = 150 \ W/mK$
$L_B = 20 \ mm \ (0{,}02 \ m)$
$T_\infty = 30 \ °C$
$h = 1000 \ W/m^2K$

INCOGNITE:
- DISTRIBUZIONE T;
- T_0
- T_2



Conduzione

8.7 – Avanzato

Per determinare le temperature delle diverse superfici occorre ricavare le distribuzioni di temperatura $T_A(x)$ e $T_B(x)$.

Nello strato A, essendoci dissipazione di potenza, si ha una distribuzione di tipo parabolico. Nello strato B la distribuzione è di tipo lineare:

$$T_A(x) = -\frac{\sigma_A}{2k_A}x^2 + Ax + B$$

$$T_B(x) = Cx + D$$

Conduzione

8.7 – Avanzato

$$T_A(x) = -\frac{\sigma_A}{2k_A}x^2 + Ax + B$$

$$T_B(x) = Cx + D$$

Le costanti di integrazione A, B, C e D si determinano con le condizioni al contorno:

$x = 0 \qquad \frac{dT_A}{dx} = 0 \qquad A = 0$

$\frac{dT_A}{dx} = -\frac{\sigma_A}{k_A}x + A + 0 = 0$

$x = L_A \qquad T_A = T_B \qquad -\frac{\sigma_A}{2k_A}L_A^2 + AL_A + B = CL_A + D$

$(x=L_A) \quad (x=L_B)$

$x = L_A \qquad -k_A\frac{dT_A}{dx} = -k_B\frac{dT_B}{dx} \qquad \sigma_A L_A - k_A A = -k_B C$

$x = L_A + L_B \qquad -k_B\frac{dT_B}{dx} = h_F(T_B - T_F) \qquad -k_B C = h_F[C(L_A + L_B) + D - T_F]$

T_B

Conduzione

8.7 – Avanzato

$$T_A(x) = -\frac{\sigma_A}{2k_A}x^2 + Ax + B$$

$$T_B(x) = Cx + D$$

Da cui si ricava:

$$A = 0$$

$$C = -\frac{\sigma_A L_A}{k_B}$$

$$D = -C(L_A + L_B) + T_F + \frac{\sigma_A L_A}{h_F}$$

$$B = CL_A + D + \frac{\sigma_A}{2k_A}L_A^2$$

A= 0

$C = -\frac{1.5 \cdot 10^6 0{,}05}{150}$ = -500 K/m

$D = 500 \cdot (0{,}05 + 0{,}02) + 30 + \frac{1.5 \cdot 10^6 0{,}05}{1000}$ = 140 °C

$B = -500 \cdot 0{,}05 + 140 + \frac{1.5 \cdot 10^6}{2 \cdot 75} 0{,}05^2$ = 140 °C

ATTENZIONE! Fattori come $\frac{\sigma_A L_A}{h_F}$ (e simili) corrispondono a potenze termiche divise per coefficienti di scambio termico, ovvero a dei ΔT. Questo significa che l'uso dei Kelvin e dei °C è equivalente: **NON bisogna fare nessuna conversione.**

Conduzione

8.7 – Avanzato

$$T_A(x) = -\frac{\sigma_A}{2k_A}x^2 + Ax + B$$

$$T_B(x) = Cx + D$$

Da cui si ricava:

$x = 0$		$T_o = T_A(x)$	$T_o = B$	$T_o = 140\ °C$
$x = L_A$	$x = 0{,}05\ m$	$T_1 = T_B(x)$	$T_1 = C \cdot L_A + D$	$T_1 = 115\ °C$
$x = L_A + L_B$	$x = 0{,}07\ m$	$T_2 = T_B(x)$	$T_1 = C(L_A + L_B) + D$	$T_2 = 105\ °C$

Conduzione
8.7 – Avanzato

Una alternativa per la soluzione del problema è di sfruttare il bilancio energetico. Essendo il sistema adiabatico (per x= 0) si ha che il flusso termico che attraversa la parete B è pari alla potenza termica per unità di superficie generata nella parete di spessore A.

$$\frac{\dot{Q}}{S} = \sigma_A L_A \qquad \frac{\dot{Q}}{S} = 75\ \mathrm{kW/m^2}$$

$$\dot{Q} = hA\,\Delta T$$

$$S = A$$

Tale potenza per unità di superficie è scambiata per convezione in x= L_A+L_B :

$$\frac{\dot{Q}}{S} = h_F(T_2 - \underset{T_\infty}{T_F}), \quad \text{da cui si ricava:} \quad T_2 = T_F + \frac{\dot{Q}}{S h_F} \qquad T_2 = 30 + \frac{75000}{1000} = 105\ °\mathrm{C}$$

ATTENZIONE! Come prima, $\frac{\dot{Q}}{S h_F} = \frac{\sigma_A L_A}{h_F}$ corrisponde ad una potenze termica per unità di superficie divisa per un coefficiente di scambio termico, ovvero ad un ΔT. Questo significa che l'uso dei Kelvin e dei °C è equivalente: **NON bisogna fare nessuna conversione.**

Conduzione

8.7 – Avanzato

La temperatura T_1 in x= L_A si ottiene sfruttando l'analogia elettrica valida per la parete B:

$\frac{\dot{Q}}{S} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{k_B}{L_B}}$, da cui si ricava: $T_1 = T_2 + \frac{\dot{Q}}{S}\frac{L_B}{k_B}$ $\quad T_1 = 105 + \frac{75000 \cdot 0{,}02}{150}$ = 115 °C

La temperatura in x= 0 si risolve sfruttando la espressione che fornisce la distribuzione di temperatura nella parete A con generazione interna:

$$T_A(x) = -\frac{\sigma_A}{2k_A}x^2 + Ax + B$$

Con le condizioni al contorno:

$x = 0 \qquad \frac{dT_A}{dx} = 0 \qquad A = 0$

$x = L_A \qquad T_A = T_1 \qquad -\frac{\sigma_A}{2k_A}L_A^2 + AL_A + B = T_1$

Da cui si ricava A= 0 B= $T_1 + \frac{\sigma_A}{2k_A}L_A^2$ B= $115 + \frac{1.5 \cdot 10^6}{2 \cdot 75} 0{,}05^2$ = 140 °C

La temperatura T_o= T_A(x=0) e quindi T_o= 140 °C

$T_A(x) = -\frac{\sigma}{2k_A}x^2 + \cancel{Ax} + B$

$T_0 = T_A(x=0)$

$= B = 140\,°C$