FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

19 aprile 2020

Indice

Parte I
Lezioni

LEZIONE 12 30/03/2020
link clicca qui

1 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)

1.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ sottoposto all'ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$ con $t \geq 0$ (o equivalentemente $e^{\lambda t} sca(t)$), esiste uno stato iniziale $x(0)$ tale che $x(0)$ e $u(t)$ producono un'uscita $y(t) = Ye^{\lambda t}$, con Y un numero qualunque (non la trasformata) e $t \geq 0$?

In altri termini:
Sottoponiamo un sistema dinamico (di cui non sono note le proprietà sulla sua stabilità) a un ingresso esponenziale ($u(t) = e^{\lambda t}$, che può anche essere amplificato come $u(t) = Ue^{\lambda t}$, ovviamente il ragionamento non cambia). Detto questo sappiamo che un ingresso $x(0)$ produce un movimento libero di y fatto da modi, invece un uscita del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ produce un movimento forzato fatto da modi + un termine $Ye^{\lambda t}$ (con $t \geq 0$ e con Y un numero, non la trasformata). La domanda è se esiste uno $x(0)$ tale che questi modi si elidano e resti solo il termine $Ye^{\lambda t}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow \ u(t) = e^{\lambda t} \ \longrightarrow \ \exists \ x(0) \ \text{ tale che } \ \longrightarrow \ y(t) = Ye^{\lambda t} \ \ (t \geq 0) \ ?$$

1.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Rispondiamo a questa domanda:
Primo passaggio:
Se voglio che $y(t) = Ye^{\lambda t}$, allora anche $x(t)$ dovrà avere la forma $Xe^{\lambda t}$ (con X un numero, non la trasformata), perchè $y(t) = cx(t) + de^{\lambda t}$ e qualunque forma di $x(t)$ che non sia del tipo $e^{\lambda t}$ si "vedrebbe" su y.

Secondo passaggio:
Quindi $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ (di cui noi stiamo proprio cercando $x(0)$) e di conseguenza $\dot{x}(t) = \lambda x(0)e^{\lambda t}$.

Terzo passaggio:
Sostituisco $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ appena espressi nell'equazione di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\lambda x(0)e^{\lambda t} = Ax(0)e^{\lambda t} + be^{\lambda t}$$

considerando che $e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0)\cancel{e^{\lambda t}} = Ax(0)\cancel{e^{\lambda t}} + b\cancel{e^{\lambda t}}$$
$$\lambda x(0) = Ax(0) + b$$

per cui otteniamo che

$$(\lambda I - A)x(0) = b$$

1.3 Generalizzazione della risposta

Quindi **in generale** con $u(t) = Ue^{\lambda t}$ (con U un numero qualunque che semplicemente amplifica l'esponenziale), se λ non è autovalore di A, allora esiste uno e uno solo

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$$

tale che

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda I - A)^{-1}bUe^{\lambda t} \\ y(t) = cx(t) + du(t) = [c(\lambda I - A)^{-1}b + d]Ue^{\lambda t} = G(\lambda)u(t) \end{cases}$$

1.4 Riassunto e proprietà

- Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ in cui $u(t) = Ue^{\lambda t}$, dove $t \geq 0$ e λ non è autovalore di A $\Longrightarrow$ con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$ si ottiene $y(t) = G(\lambda)u(t)$, con $t \geq 0$.
- Proprietà bloccante degli zeri: se $G(\lambda) = 0 \implies$ con lo stesso stato iniziale $x(0)$, l'uscita diventa $y(t) = 0$, con $t \geq 0$.
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$, l'uscita tenderà a $y(t) \to G(\lambda)u(t)$ per $t \to \infty$.

2 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)

2.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ e l'ingresso $u(t) = Usin(\omega t)$ per $t \geq 0$ (o equivalentemente $u(t) = Usin(\omega t)sca(t)$), esiste un qualche stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = Ysin(\omega t + \phi)$ per $t \geq 0$?

In altri termini:
[La domanda è molto simile a quella data per la risposta esponenziale] Applicato un ingresso sinusoidale, esiste uno stato di iniziale che faccia elidere fra loro i modi del moto libero e i modi del moto forzato in modo che io veda in uscita solo una sinusoide?

2.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Per rispondere ci basta ricordare che

$$sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il principi odi sovrapposizione degli effetti. Quindi applichiamo due volte il risultato ottenuto per la risposta esponenziale e combiniamo i risultati.

Poniamo $u_1(t) = e^{j\omega t}$ e $u_2(t) = e^{-j\omega t}$, per cui $u(t) = U\frac{u_1(t) - u_2(t)}{2j}$

Iniziamo analizzando $u_1(t)$: se $j\omega$ non è autovalore di A, allora esiste uno e un solo $x_1(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_1(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$

Per $u_2(t)$: se $-j\omega$ non è autovalore di A, allora esiste uno e un solo $x_2(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_2(t) = G(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

Combiniamo ora y_1 e y_2:

$$\begin{matrix} u(t) = \frac{U}{2j}(u_1(t) - u_2(t)) \\ x(0) = \frac{U}{2j}(x_1(0) - x_2(0)) \end{matrix} \implies \text{Principio di sovrapposizione degli effetti} \implies y(t) = \frac{U}{2j}(y_1(t) - y_2(t))$$

Analiziamo $y(t)$:

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

Osserviamo che $G(s)$ è razionale fratta, quindi $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$ (complesso coniugato). Quindi se pongo $G(j\omega) = Me^{j\phi}$ (con M modulo e ϕ argomento di $G(j\omega)$) otteniamo $G(-j\omega) = Me^{-j\phi}$.

Allora

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(Me^{j\phi}e^{j\omega t} - Me^{-j\phi}e^{-j\omega t}\right) = MU\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$

$$y(t) = MUsin(\omega t + \phi)$$

con $M = |G(j\omega|$ e $\phi = arg(G(j\omega))$

2.3 Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza)

Dato il sistema dinamico LTI a TC, SISO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$, detta $G(s)$ la sua funzione di trasferimento e considerato l'ingresso $u(t) = Usin(\omega t)$ per $t \geq 0$:

- Se $\mp j\omega$ non sono autovalori di A, allora esiste uno e uno solo stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = |G(j\omega)|Usin(\omega t + arg(G(j\omega)))$ per $t \geq 0$. (Se $\mp j\omega$ sono autovalori di A, allora si verifica un fenomeno di risonanza, che però non è argomento di questo corso).
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale, l'uscita tenderà a $y(t) \to |G(j\omega)Usin(\omega t + arg(G(j\omega)))$ per $t \to \infty$

2.4 Definizione di risposta in frequenza

definizione: Data una funzione di trasferimento $G(s)$, la sua restrizione all'asse immaginario positivo J^+, cioè $G(j\omega)$ con $\omega \geq 0$, si dice **rispsota in frequenza** (RF) di $G(s)$.

2.5 Esempio

es. Dato $G(s) = \frac{1}{1+0,15}$, che è asintoticamente stabile, e $u(t) = 5sin(20t)$, a cosa tende $y(t) \to ?$ per $t \to \infty$?

Siccome il sistema è asintoticamente stabile, allora per il teorema della rispsota in frequenza $y(t) \to 5|G(j20)|sin(20t + arg(G(j20)))$.

$$G(j20) = \frac{1}{1+2j} \Rightarrow \begin{array}{c} |G(j20)| = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \sim 0,45 \\ arg(G(j20)) = -arctan(2) \sim -63,5 \end{array}$$

[il prof ha terminato i conti e ha tracciato un grafico di $u(t)$ e $y(t)$ usando maxima: ci sta mostrando che il modulo $|G(j20)|$ rappresenta la percentuale dell'ampiezza dell'uscita rispetto all'ampiezza dell'ingresso, in questo esempio l'uscita è ampia il 45% dell'ingresso; invece l'argomento $arg(G(j20))$ rappresenta lo sfasamento del segnale di uscita rispetto al segnale di ingresso, in questo esempio l'uscita è sfasata di 63 gradi (in ritardo) e per capire quanto effettivamente sia uno sfasamento di 63 gradi basta considerare che un periodo del segnale di ingresso sono 360 gradi]

3 Rappresentazioni della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento

3.1 Diagramma polare

[immagine dagli appunti del prof]
In un piano immaginario il termine $s = j\omega$ "cammina" lungo l'asse immaginario. Se ora calcoliamo $G(s)$ e lo mostriamo in un secondo piano immaginario, otteniamo una curva $G(j\omega)$ con parametro ω.

Possiamo ora dire che la risposta in frequenza è l'immagine attraverso G dell semiasse immaginario positivo J^+.

3.2 Diagrammi cartesiani o di Bode

3.2.1 Diagramma di Bode del modulo

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode del modulo è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è l'asse delle ω e quello delle ordinate è l'asse di $|G(j\omega)|$.

L'asse delle ω è logaritmico, cioè a pari distanza non corrisponde pari differenza, ma pari rapporto logaritmico (in base 10). Inoltre lo zero non viene rappresentato, perchè si trova a $-\infty$, e per questo l'intersezione con l'asse di $|G(j\omega)|$ non viene rappresentato.

L'asse di $|G(j\omega)|$ è, invece, espresso in dB.
Definizione: Rappresentare una quantità in dB significa $x_{dB} = 20log_10|x|$.
Per esempio $100_{dB} = 40$, $0,1_{dB} = -20$, $-0,1_{dB} = -20$, $1_{dB} = 0$. Notare che la scrittura in dB non distingue il segno, e inoltre che se $|x| > 1$, allora $x_{dB} > 0$ e se $|x| < 1$, allora $x_{dB} < 0$.

3.2.2 Diagramma di Bode della fase

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode della fase è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è sempre logaritmico ed è l'asse delle ω, invece l'asse delle ordinate è l'asse di $arg(G(j\omega))$ misurato in gradi.

3.3 Tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici)

Scriviamo la funzione di trasferimento $G(s)$ della cui risposta in frequenza vogliamo i diagrammi di Bode nella forma

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots}{(1 + st_1)(1 + st_2) \dots} \cdot \frac{(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2) \dots}{(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2) \dots}$$

In cui:

- prima frazione: g è il **tipo** della funzione di trasferimneto ed è il numero di poli in $s = 0$ meno il numero di zeri in $s = 0$, o, per dirlo in altri termini, il numero di poli (se positivo) o zeri (se negativo) in $s = 0$.
  Per esempio una funzione di trasferimento di tipo 1 ha un polo nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo -1 ha uno zero nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 2 ha due poli nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 0 non ha nè poli nè zeri nell'origine.

- seconda frazione: i vari termini a numeratore del tipo $(1 + s\tau_i)$ rendono conto degli zeri reali non nell'origine; invece i vari termini a denominatore del tipo $(1 + st_k)$ rendono conto dei poli reali non nell'origine.

- terza frazione: infine ci possono essere coppie di zeri complessi coniugati e coppie di poli complessi coniugati, rappresentate dai termini $(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2)$ (per gli zeri) e $(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2)$ (per i poli).

Inoltre il numero μ è detto **guadagno** della funzione di trasferimento, i termini t, τ sono **costanti di tempo** di zeri e poli, ω, σ si dicono **frequenze naturali** (o pulsazioni naturali) e ζ, ξ sono i **fattori di smorzamento**.

Una delle proprietà più particolari è che tutto il termine $\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)...}{(1+st_1)(1+st_2)...} \cdot \frac{(1+2\frac{\zeta}{\sigma_n}s+\frac{1}{\sigma_n^2}s^2)...}{(1+2\frac{\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2)...}$ tende a $\to 1$ per $s \to 0$, quindi $G(s) \sim \frac{\mu}{s^g}$ per $s \to 0$.

es. $G(s) = \frac{(s+2)(s^2-3s+2)}{s^3+4s^2+s}$.
Trasformiamola nella forma che vogliamo avere per il diagramma di Bode:

$$G(s) = \frac{2(1+\frac{s}{2})(s-1)(s-2)}{s(s^2+4s+1)} = \frac{2(1+\frac{2}{2})(-1)(1-s)(-2)(1-\frac{s}{2})}{s(s-(-2-\sqrt{3}))(s-(-2+\sqrt{3}))} =$$

$$= \frac{2(-1)(-2)(1+\frac{s}{2})(1-s)(1-\frac{s}{2})}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})s(1-\frac{s}{-2-\sqrt{3}})(1-\frac{s}{-2+\sqrt{3}})}$$

in cui $\mu = \frac{2(-1)(-2)}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}$ e $g = 1$.

Quindi ogni funzione di trasferimento razionale fratta si può esprimere come prodotto di termini del tipo

$$G_a(s) = \mu \qquad G_c(s) = 1 + st$$
$$G_b(s) = \frac{1}{s^g} \qquad G_d(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2$$

Allora detti G_i i fattori componenti G, Siccome

$$G = \prod G_i \implies \begin{cases} |G| = \prod |G_i| \implies |G|_{dB} = \sum |G_i|_{dB} \\ arg(G) = \sum arg(G_i) \end{cases}$$

Vediamo perciò come tracciare i diagrammi di bode del modulo e della fase (asintotici) di $G_{a,b,c,d}$. Una volta fatto questo sarà semplice combinarli per arrivare al tracciamento definitivo di G.

- $G_a(s) = \mu \to G_a(j\omega) = \mu \to \begin{cases} |G_a(j\omega)|_{dB} = 20log_10|\mu| \\ arg(G_a(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \mu > 0 \\ -180^o & \mu < 0 \end{cases} \end{cases}$.

  [immagine dagli appunti del prof]

  diagramma di bode del modulo: Il diagramma di bode del modulo è una retta orizzontale (se $|\mu| > 1$ è sopra l'asse delle ascisse, se $\mu < 1$ è sotto l'asse delle ascisse).

  diagramma di bode della fase: Anche il diagramma di bode della fase è una retta orizzontale che coincide con l'asse delle ascisse se $\mu > 0$, altrimenti se $\mu < 0$ è posta all'altezza di -180^o.

LEZIONE 12 30/03/2020
link clicca qui

- $G_b(s) = \frac{1}{s^g} \to G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} \to \begin{cases} |G_b(j\omega)| = \frac{1}{\omega^g} \to |G_b(j\omega)|_{dB} = -20glog(\omega) \\ arg(G_b(j\omega)) = -g \cdot 90^o \end{cases}$

  [immagine dagli appunti del prof]

  diagramma di bode del modulo: Il diagramma di bode del modulo corrispondente interseca sempre l'asse delle ascisse nel punto $\omega = 1$ e la pendenza è $-20g\frac{dB}{decade}$ (spesso abbreviato come "pendenza $-g$"), dove la **decade** è la distanza corrispondente a un rapporto che vale 10.

  diagramma di bode della fase: Il diagramma di bode delle fasi è orizzontale al valore $-g \cdot 90^o$.

  Da notare è che fino ad ora non abbiamo fatto nessuna approssimazione.

- $G_c(s) = 1 + st \rightarrow G_c(j\omega) = 1 + j\omega t \rightarrow \begin{cases} |G_c(j\omega)| = \sqrt{1+(\omega t)^2} \\ arg(G_c(j\omega)) = arctan(\omega t) \end{cases}$
  Per facilitare i conti applichiamo un approssimazione, che è il motivo del perchè stiamo facendo diagrammi di bode asintotici:
  - se $|\omega t| >> 1$ (molto maggiore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim j\omega t$, per cui otteniamo
    che $\begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim |\omega t| \\ arg(G_c(j\omega)) \sim \begin{cases} 90^o & t > 0 \\ -90^o & t < 0 \end{cases} \end{cases}$
  - se $|\omega t| << 1$ (molto minore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim 1$, per cui otteniamo
    ce $\begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim 1 \\ arg(G_c(j\omega)) \sim 0^o \end{cases}$

  [immagine dagli appunti del prof]

  diagramma di bode del modulo: Definiamo la **frequenza d'angolo** $\frac{1}{|t|}$ nel diagramma di Bode del modulo. Grazie alle approssimazioni che abbiamo fatto, andando a sinistra nell'asse delle ω, cioè verso il valore di 0_{dB}, il modulo vale circa 1. Facciamo valere questa approssiamazione fino al valore di frequenza d'angolo. Superata la frequenza d'angolo il modulo cresce con pendenza $+1$, cioè di $20\frac{dB}{decade}$. Questa rappresentazione prende il nome di diagramma di bode del modulo asintotico (il diagramma di bode del modulo esatto è mostrato in figura, e la differenza è che non ha una curva "netta").

  diagramma di bode della fase: approssimiamo tutto ciò che precede la frequenza d'angolo con 0^o, alla frequenza d'angolo c'è un salto in cui se t è positivo prota a 90^o (rossa nel disegno), se è negativo a -90^o (blu nel disegno). La rappresentazione non approssimata dovrebbe seguire la linea tratteggiata in rosso nel disegno.

  Notiamo che l'approssimazione del modulo è molto buona, mentre quella della fase non molto.

- $G_d(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \rightarrow G_d(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$ con $1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ parte reale e $j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$ parte immaginaria
  - per $\omega \rightarrow 0$: $\begin{cases} \text{parte reale } \rightarrow 1 \\ \text{parte immaginaria } \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \rightarrow 1 \rightarrow |G_d(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \\ arg(G_d(j\omega)) \rightarrow 0^o \end{cases}$
  - per $\omega \rightarrow +\infty$:
    [immagine dagli appunti del prof]
    Chiamiamo le generiche radici coniugate complesse la coppia s_1 e s_2 di $G_d(s) = \frac{1}{\omega_n^2}(s - s_1)(s - s_2)$ e rappresentiamole nel grafico.

    Facciamo un attimo un excursus dal caso $\omega \rightarrow \infty$ e dimostriamo i risultati ottenuti precedentemente per $\omega \rightarrow 0$: [colore blu nel disegno] prendiamo il punto $j\omega$ con $\omega = 0$, cioè $j0$, i vettori che connettono le radici s_1 e s_2 al punto $j0$ hanno modulo ω_n, quindi il modulo di $|G_d(j0)|$ vale $\frac{\omega_n \cdot \omega_n}{\omega_n^2} = 1$. Possiamo anche dimostrare che la fase di G_d per $\omega \rightarrow 0$, cioè in $j0$, che vale 0^o, infatti gli angoli di s_1 e s_2 rispetto a un asse orizzontale sono opposti e si annullano a vicenda.

    Vediamo ora il caso in cui, invece di considerare il punto $j0$, consideriamo il generico punto $j\omega$. Analiziamo i vettori che connettono il generico punto $j\omega$ e s_1 e s_2 [in rosso nel disegno], questi vettori $j\omega - s_i$ per $\omega \rightarrow \infty$ (cioè per facendo salire lungo l'asse immaginario il generico punto $j\omega$) hanno entrami modulo che tende a ∞ e fase che tende a 90^o (quindi in totale 180^o).

    Quindi per $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ allo stesso modo in cui tende } \omega^2 \\ arg(G_d(j\omega)) \rightarrow 180^o \end{cases}$ **oss.** Il modulo del vettore $|j\omega - s_2|$ è monotono crescente, mentre il modulo del vettore $|j\omega - s_1|$ no, infatti ha un minimo per $\omega = Im(s_1)$, il perchè si vede graficamente:
    [immagine dagli appunti del prof]
    oss. più s_1 e s_2 sono vicini all'asse immaginario, più il minimo di s_1 è pronunciato.

Parte II
Esercitazioni