



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

## Lezione 04 - Sistemi bifase

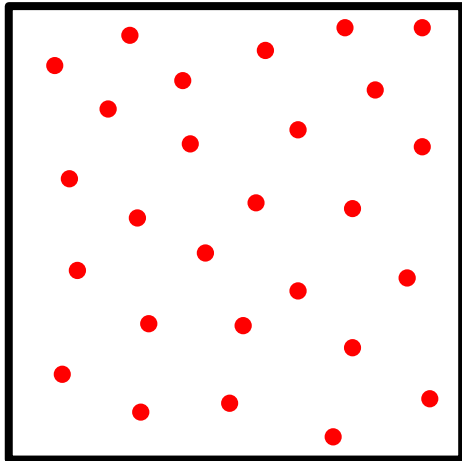
**Corso di Fisica Tecnica**  
**a.a. 2019-2020**

***Prof. Gaël R. Guédon***  
Dipartimento di Energia, Politecnico di Milano

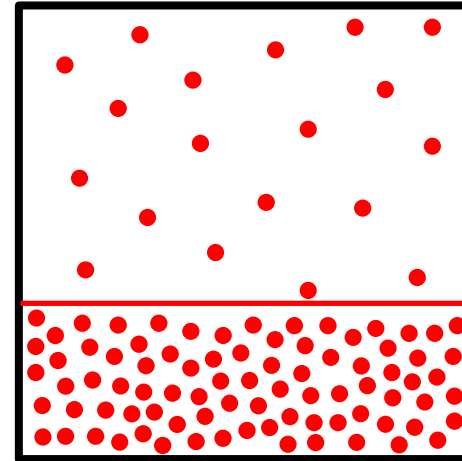
## Obiettivi della lezione

- Definire un **sistema eterogeneo** (bifase)
- Calcolare le **funzioni di stato estensive specifiche** di un sistema eterogeneo
- Illustrare le **proiezioni dell'equazione di stato** nei diagrammi di stato e le relative trasformazioni
- Definire i **titoli di vapore**, liquido e solido
- **Interpolare** le funzioni di stato dalle **tabelle termodinamiche**

## Sistema eterogeneo



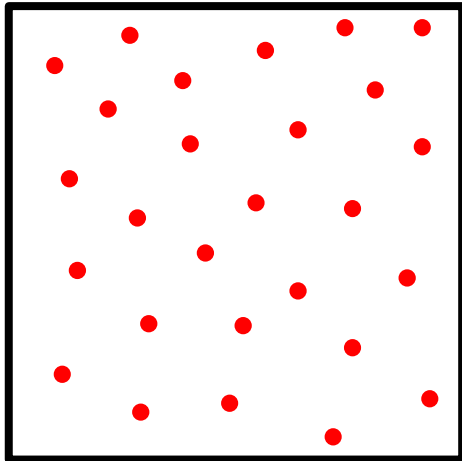
**Omogeneo**  
(un solo stato di aggregazione)



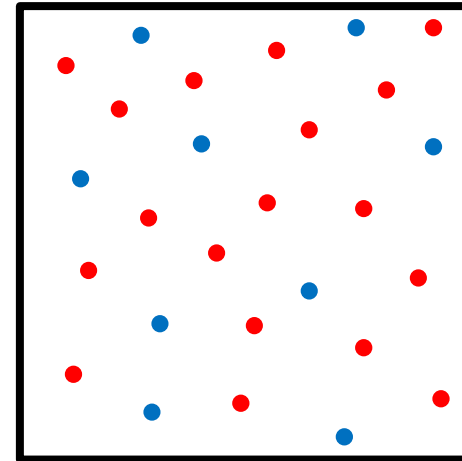
**Eterogeneo**  
(più stati di aggregazione)

- **Esempio:** acqua alla temperatura 25 °C e pressione 0.03166 bar si trova sia sotto forma liquida che gassosa

## Sistema multicomponente



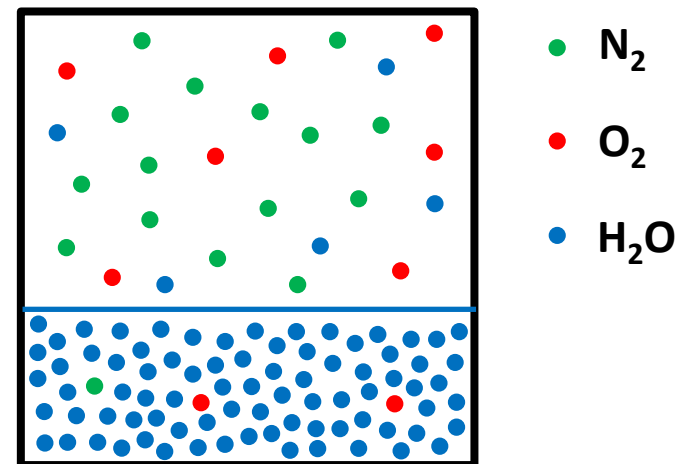
**Monocomponente**  
(una sola sostanza)



**Multicomponente**  
(più sostanze)

## Sistema eterogeneo multicomponente

- Se l'acqua alla temperatura di 25 °C ha una pressione di saturazione pari a 0.03166 bar, perché troviamo nella natura acqua sotto forma gassosa a tale temperatura e pressione 1 atm?
- In natura, l'acqua bolle a 100 °C. Possiamo trovare acqua liquida oltre questa temperatura?



**Eterogeneo**  
(più stati di aggregazione)

## Grandezze estensive del sistema eterogeneo costituito da due stati (o fasi) $\alpha$ e $\beta$

$$M = M_{\alpha} + M_{\beta}$$

$$E = E_{\alpha} + E_{\beta}$$

Le grandezze estensive specifiche risultano dalla **media pesata sulle masse** dei valori delle grandezze estensive specifiche delle singole fasi

$$e = \frac{M_{\alpha}}{M} e_{\alpha} + \frac{M_{\beta}}{M} e_{\beta}$$

**Grandezze estensive del sistema eterogeneo costituito da due stati (o fasi)  $\alpha$  e  $\beta$**

$$e = \frac{M_\alpha}{M} e_\alpha + \frac{M_\beta}{M} e_\beta$$

$$x_\alpha = \frac{M_\alpha}{M} \quad x_\beta = \frac{M_\beta}{M} \quad \text{Frazione massica}$$

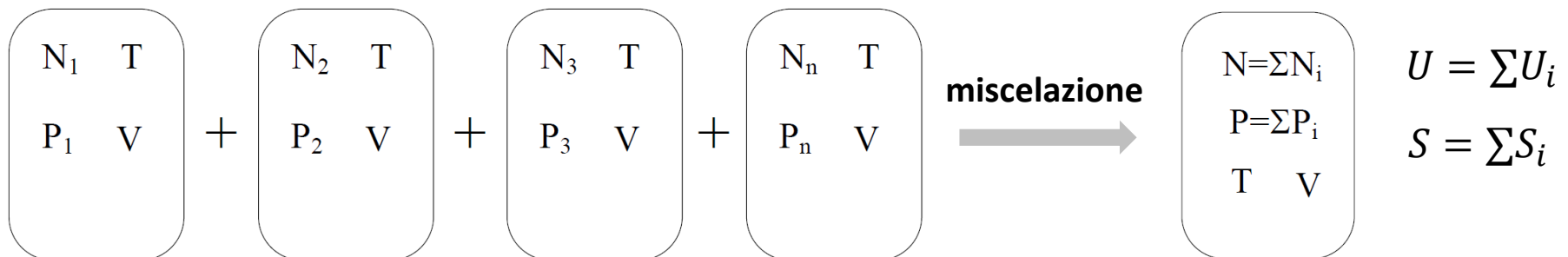
$$e = x_\alpha e_\alpha + x_\beta e_\beta \quad x_\alpha + x_\beta = 1$$

$$e = (1 - x_\beta) e_\alpha + x_\beta e_\beta$$

## Grandezze estensive del sistema multicomponente costituito da una miscela di gas ideali

Equazione di stato della miscela:  $PV = NRT$  con  $N = \sum_{i=1}^n N_i$

Legge di Dalton:  $P = \sum_{i=1}^n P_i$  con la pressione parziale  $P_i = \frac{N_i}{N} P$





## Regola di Gibbs

$$V = C + 2 - F$$

$V$ : numero di **variabili intensive indipendenti** utilizzabili ( $P$  e  $T$ )

$C$ : numero di componenti

$F$ : numero di fasi

**Per il sistema monocomponente bifase  $V = 1$**

$P$  e  $T$  non sono indipendenti. Lo stato termodinamico è descritto compiutamente da una coppia intensiva-estensiva oppure da una coppia estensiva-estensiva

$$\begin{array}{cccccc} (P, v) & (T, v) & (P, u) & (T, u) & (P, h) & (T, h) & (P, s) & (T, s) \\ & (v, u) & (v, h) & (v, s) & (u, h) & (u, s) & (h, s) \end{array}$$

## Regola di Gibbs

$$V = C + 2 - F$$

$V$ : numero di **variabili intensive indipendenti** utilizzabili ( $P$  e  $T$ )

$C$ : numero di componenti

$F$ : numero di fasi

**Per il sistema monocomponente trifase  $V = 0$**

$P$  e  $T$  sono fissi e funzioni della sostanza (punto triplo). Lo stato termodinamico è descritto compiutamente da una coppia estensiva-estensiva

$$(v, u) \quad (v, h) \quad (v, s) \quad (u, h) \quad (u, s) \quad (h, s)$$

## Transizione di fase

- Passaggio da uno stato di aggregazione ad un altro
- Avviene a pressione (e temperatura) costante

Primo principio in forma differenziale

$$dh = \delta q^{\leftarrow} + v dP$$

Durante la transizione di fase, abbiamo

$$dh = \delta q^{\leftarrow}$$

**Calore necessario  
= Entalpia di transizione**

## Sistema eterogeneo monocomponente

Stati monofase:

Solido

Liquido

Aeriforme (Gas)

Stati bifase:

Coesistenza di solido e liquido

Coesistenza di solido e aeriforme (vapore)

Coesistenza di liquido e aeriforme (vapore)

Stati tripli:

Coesistenza di solido, liquido e aeriforme (vapore)

### **LIQUIDO SOTTORAFFREDDATO**

Liquido NON in procinto di evaporare

### **LIQUIDO SATURO**

Liquido in procinto di evaporare

### **VAPORE SATURO**

Vapore in condizioni di incipiente condensazione

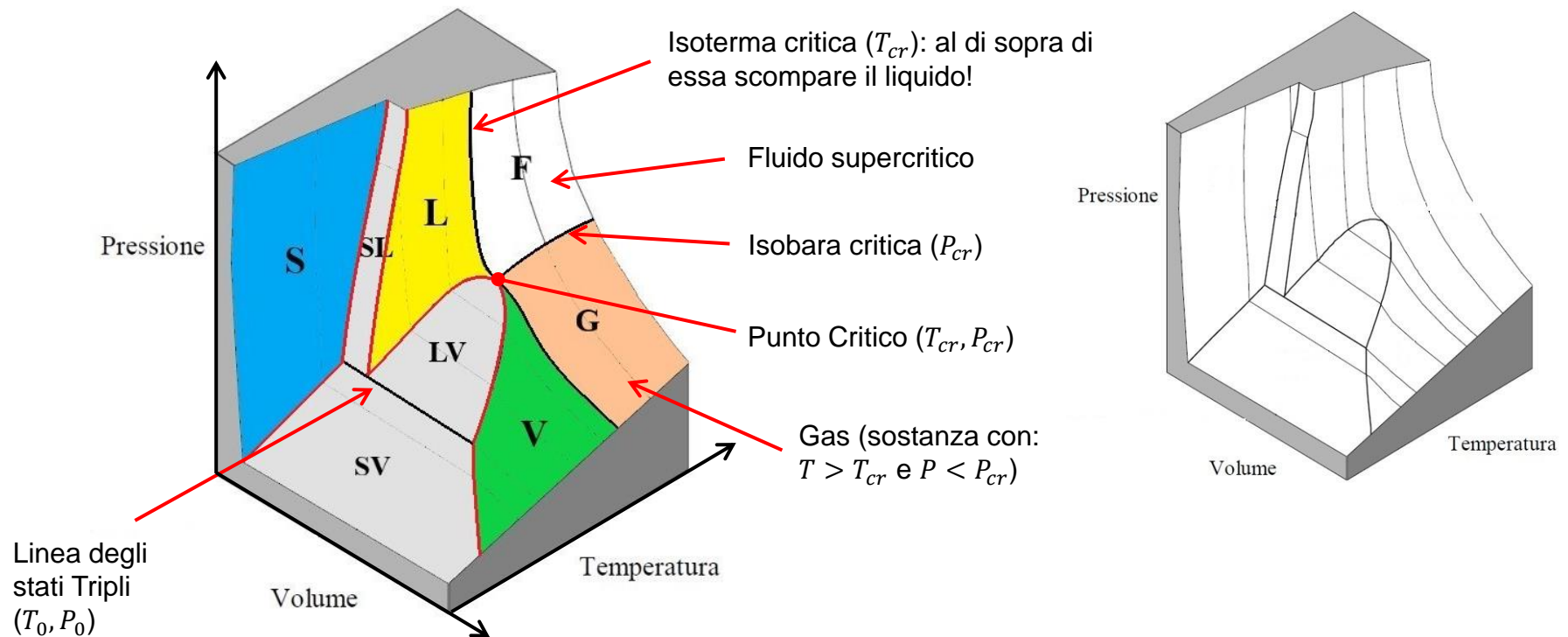
### **VAPORE SURRISCALDATO**

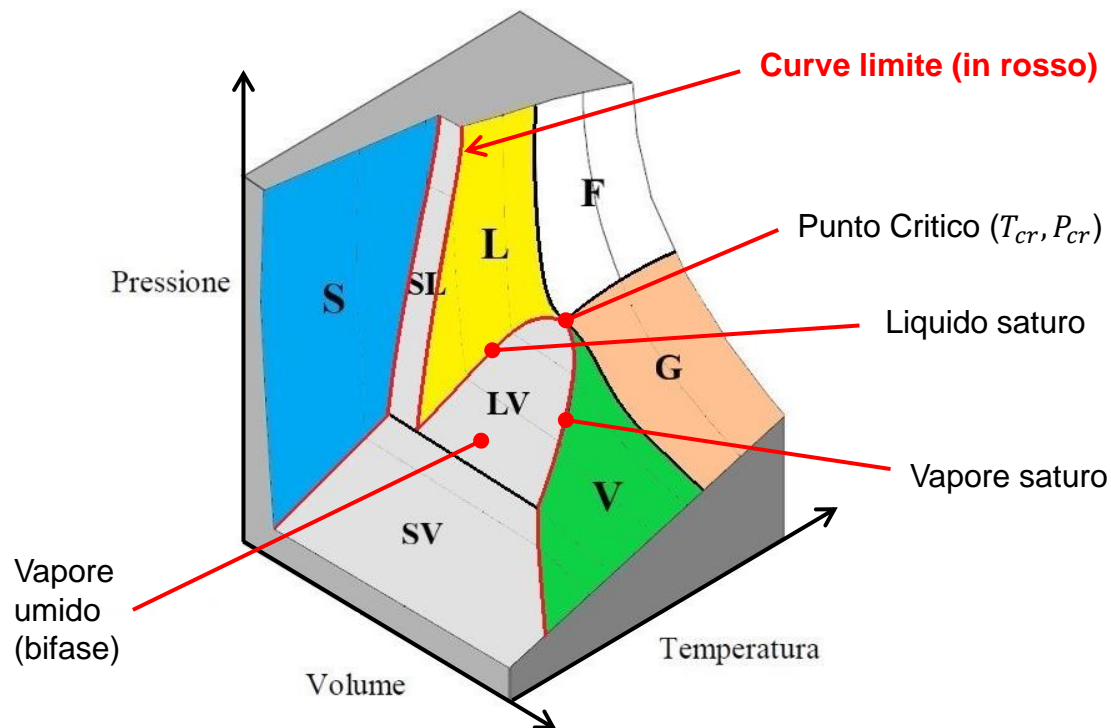
Vapore NON in procinto di condensare

### **TEMPERATURA DI SATURAZIONE**

Temperatura alla quale una sostanza pura comincia ad evaporare/condensare, fissata la pressione

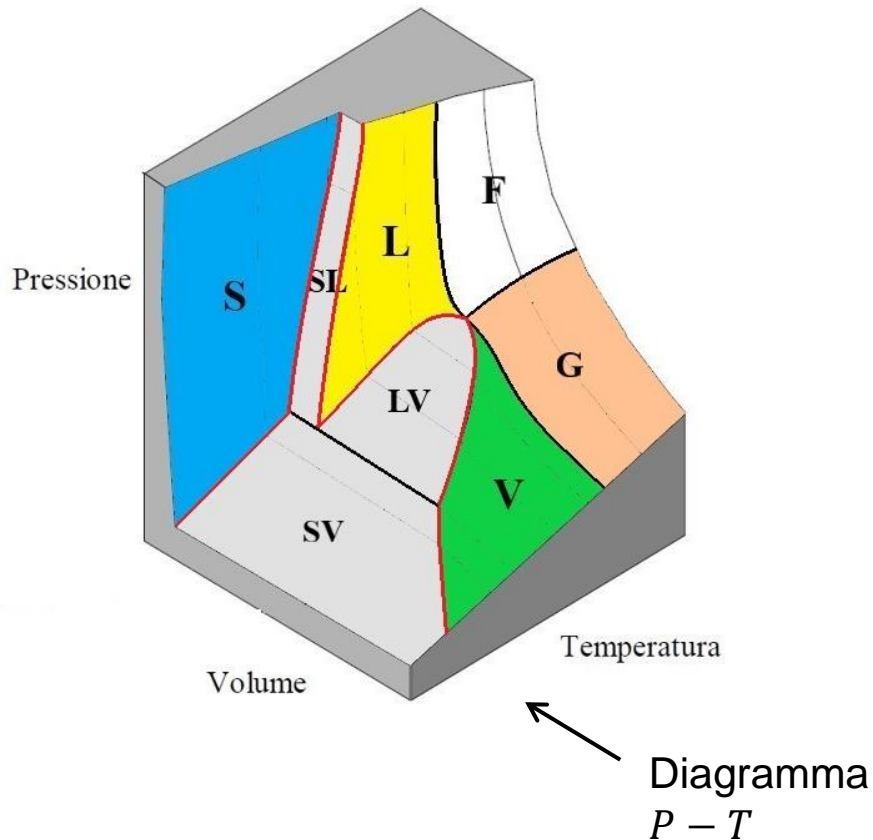
Per un sistema monocomponente all'equilibrio: il **diagramma di stato** rappresenta la **superficie di stato** (in bianco) in uno spazio tridimensionale di coordinate  $P - v - T$ , luogo dei possibili stati del sistema. La superficie di stato dipende dalla sostanza considerata



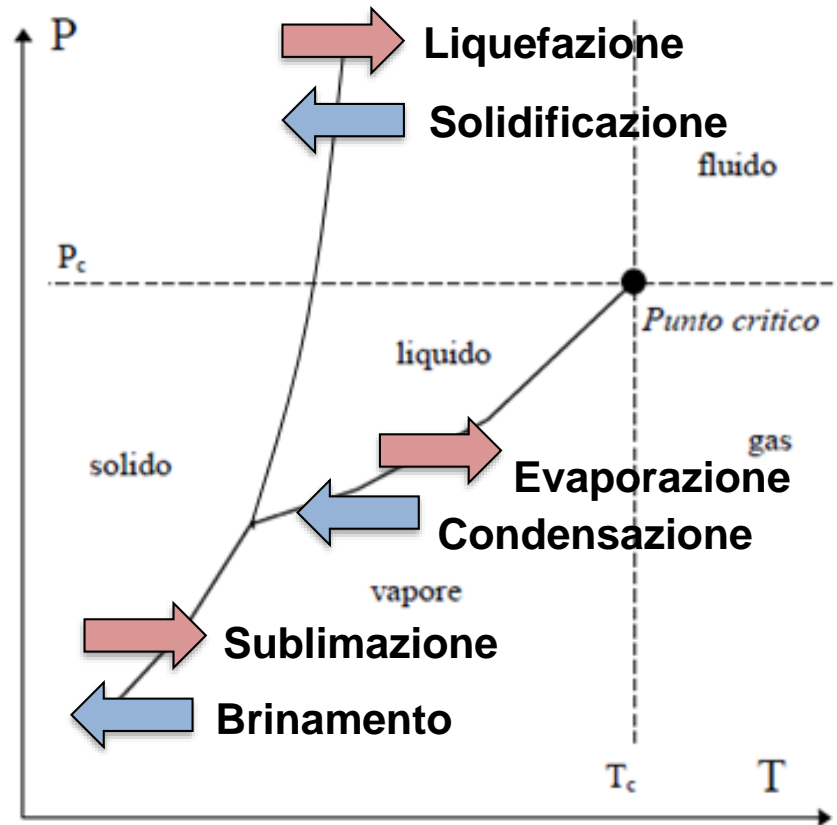


## Definizioni:

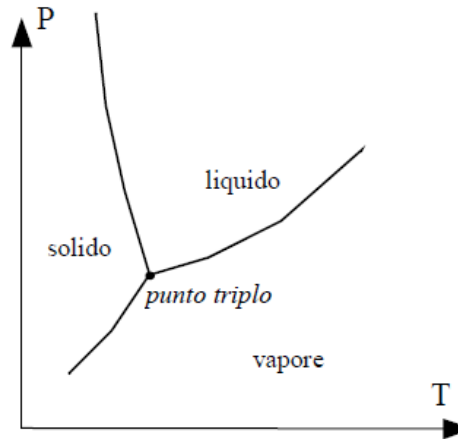
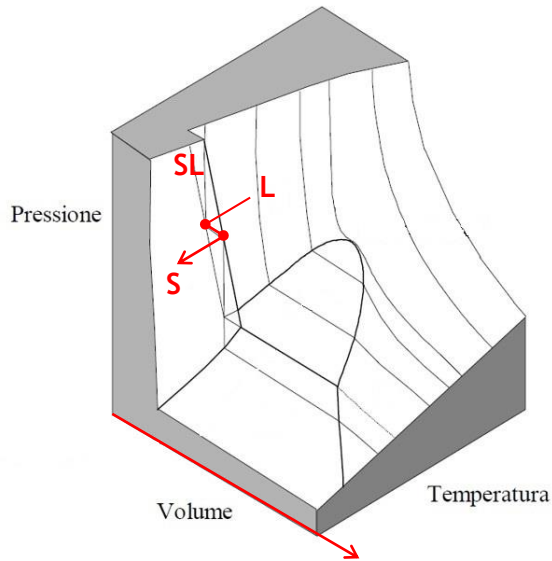
- Solido (S)
- Liquido sottoraffreddato (L)
- Liquido saturo (sulla curva limite inferiore, tra L e LV)
- Vapore umido (miscela liquido vapore LV)
- Vapore saturo secco (sulla curva limite superiore, tra LV e V)
- Vapore surriscaldato (V)
- Temperatura di saturazione: fissata una  $P$  è la  $T$  alla quale
  - il liquido inizia a evaporare
  - il vapore inizia a condensare



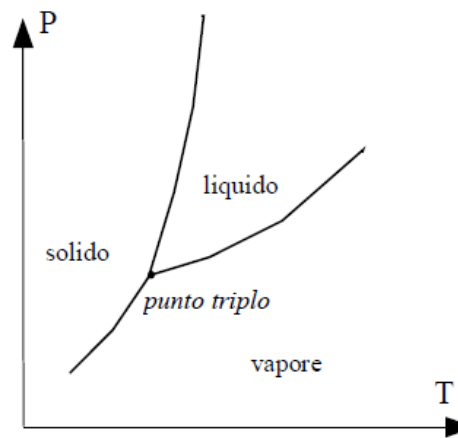
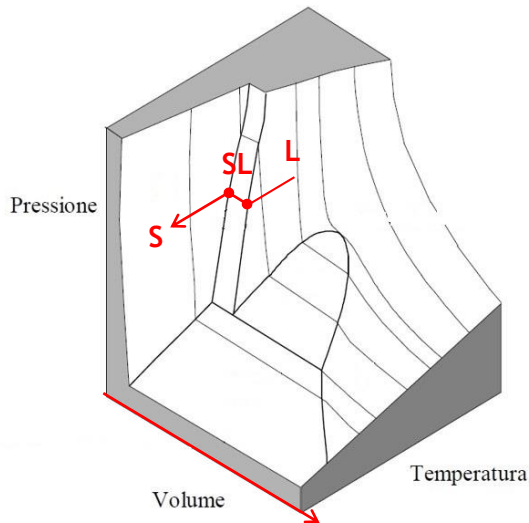
## Transizioni di fase:







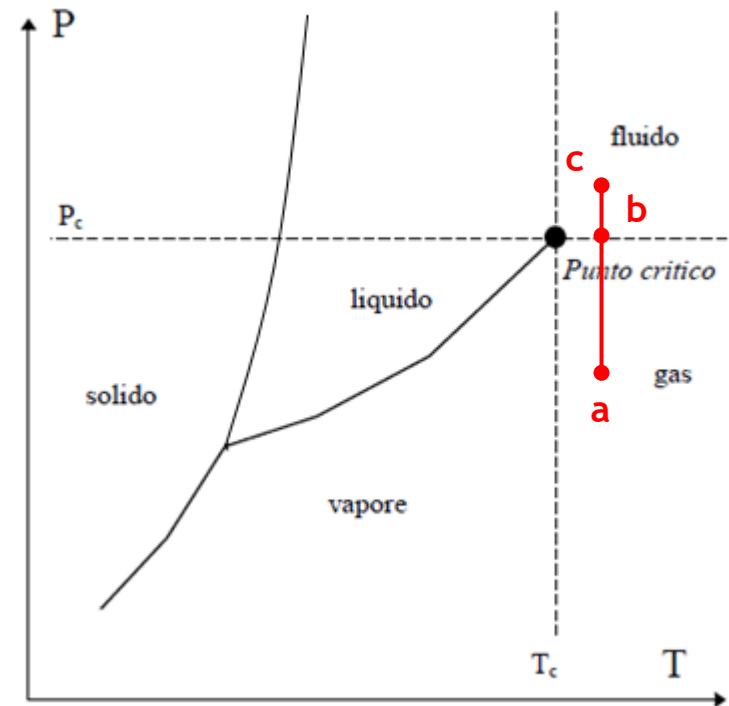
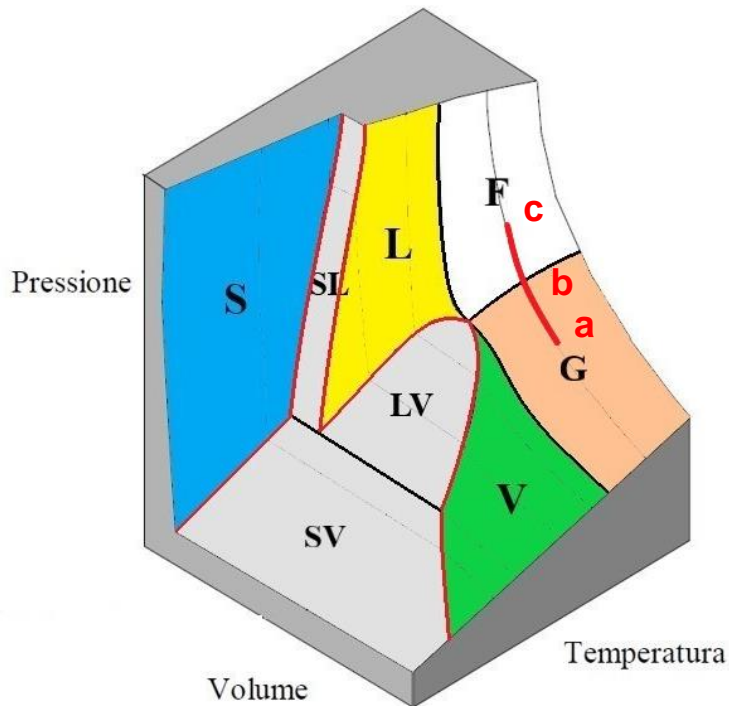
Sostanze che solidificando a  $P$  costante **aumentano** il proprio volume  
(es. H<sub>2</sub>O)

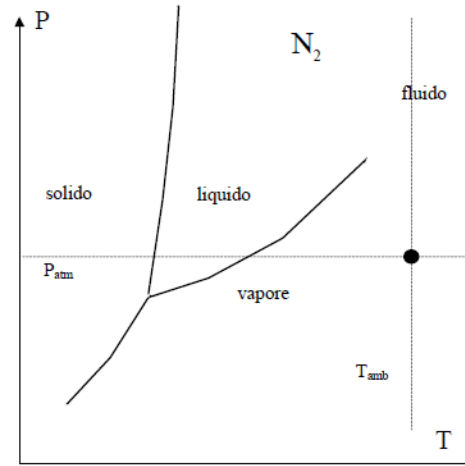
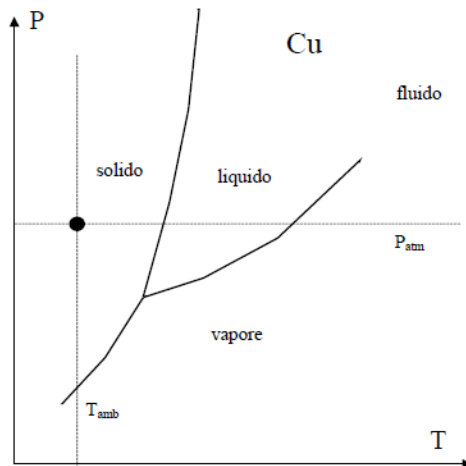
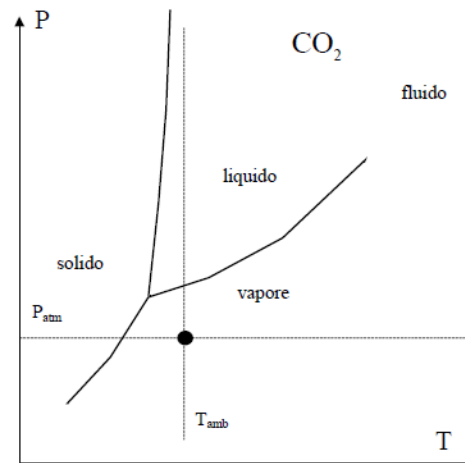
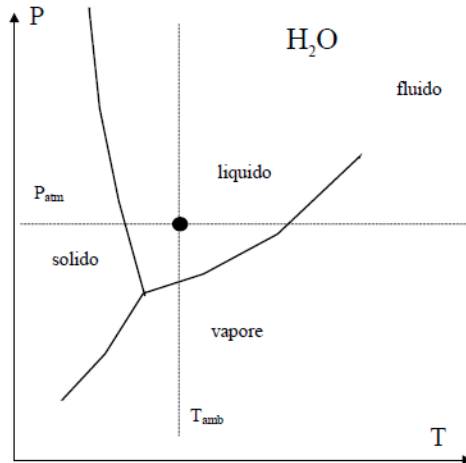


Sostanze che solidificando a  $P$  costante **diminuiscono** il proprio volume  
(es. CO<sub>2</sub>)

## Definizione di GAS:

Fluido a  $P < P_{cr}$  e  $T > T_{cr}$  che non può essere liquefatto attraverso una trasformazione di compressione isoterma.





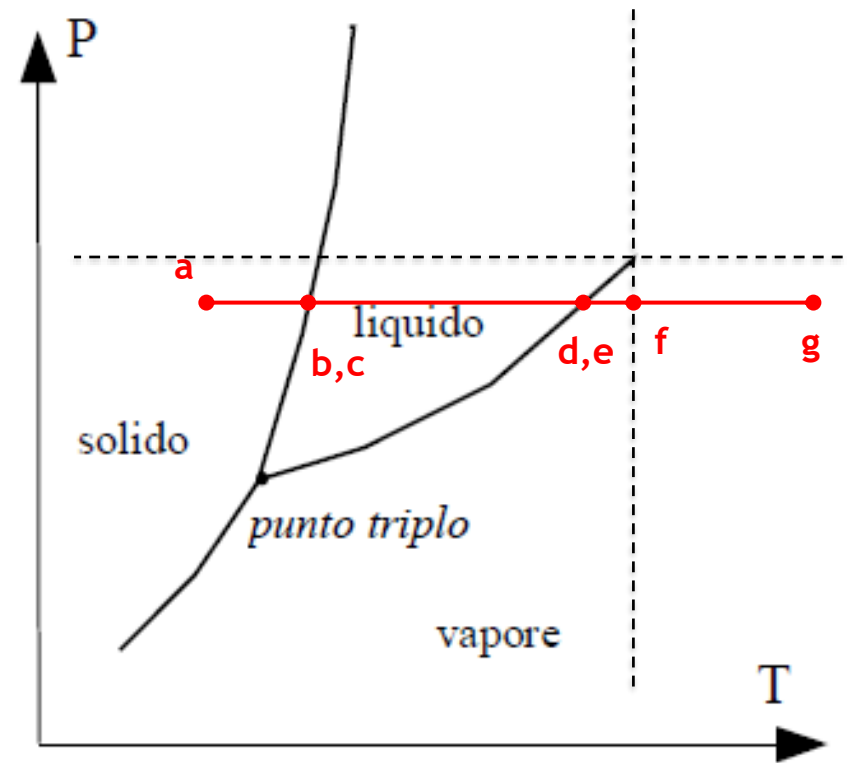
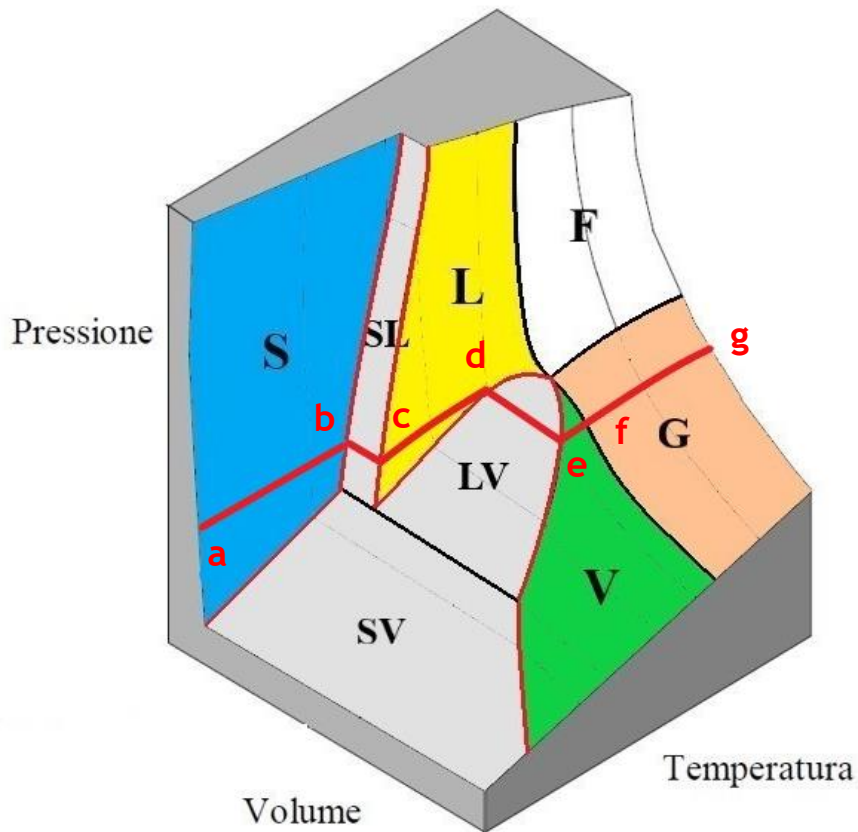
**Stato di alcune sostanze a condizioni ambiente:**

$$P_{amb} = 101325 \text{ Pa}$$

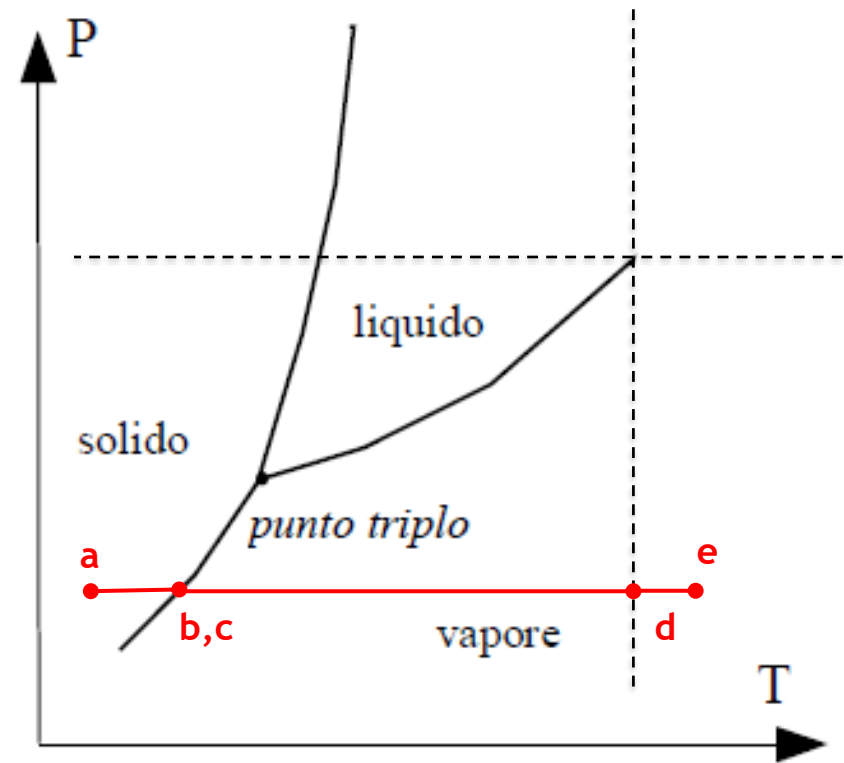
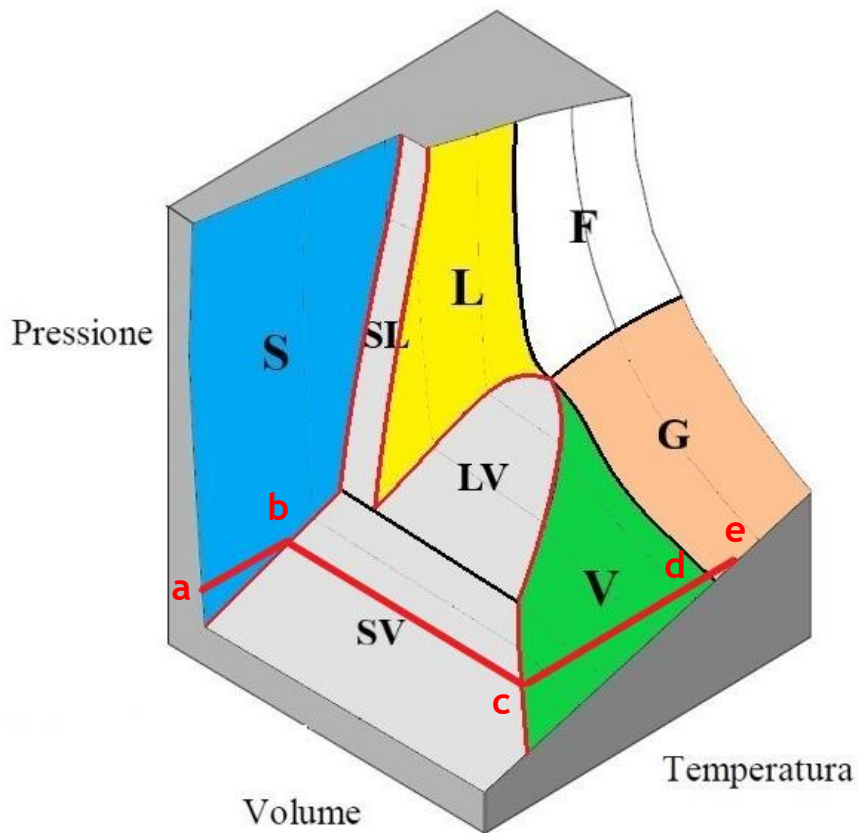
$$T_{amb} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C} (293.15 \text{ K})$$

I fluidi che a condizioni ambiente sono in fase gas sono detti «incondensabili»

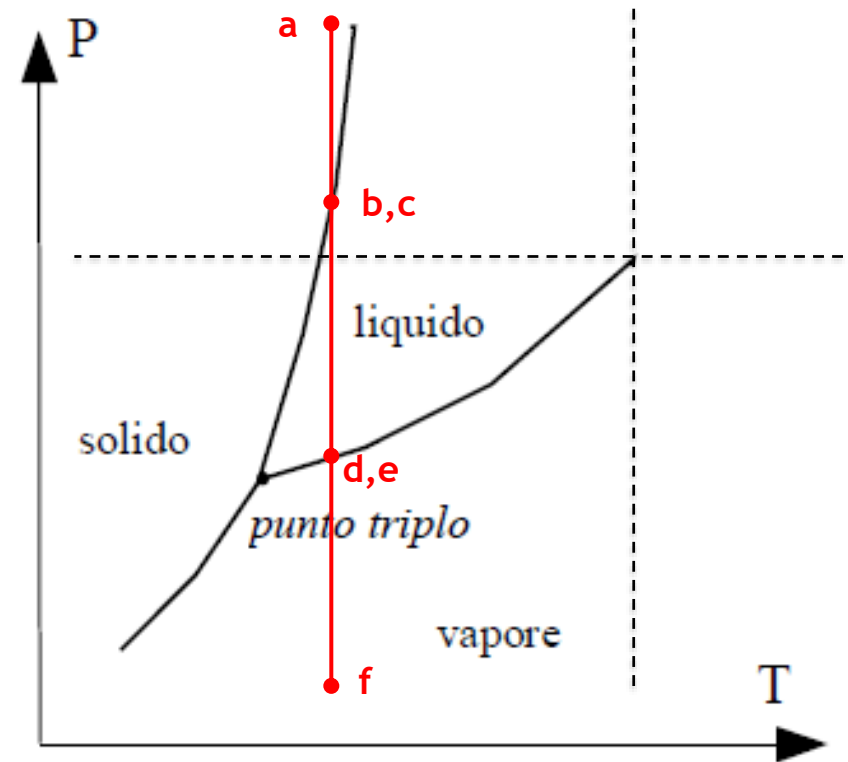
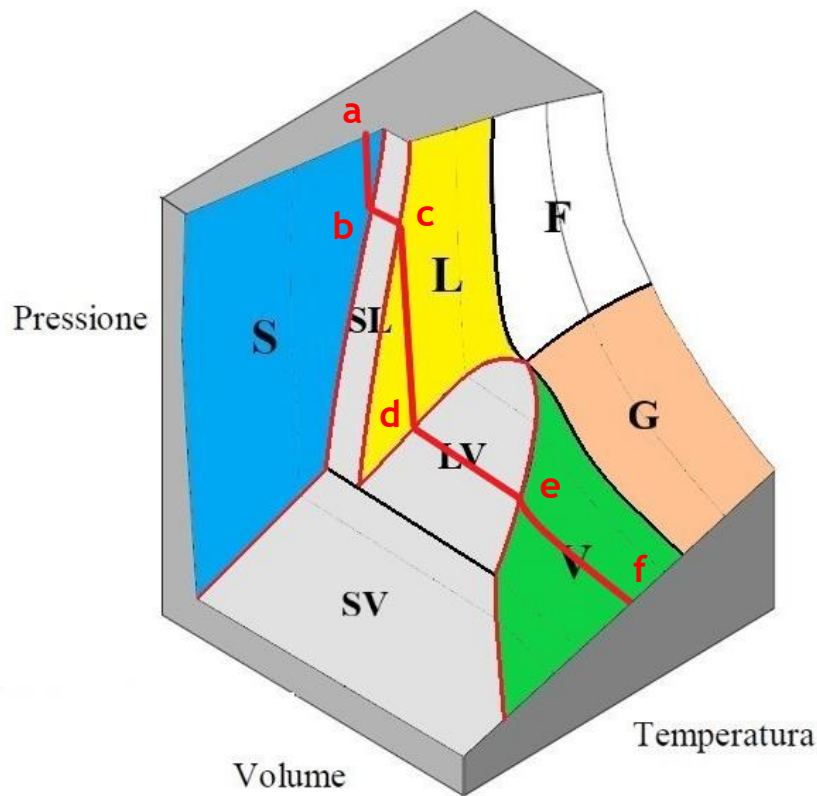
Trasformazione **ISOBARA**: fornisco (o sottraggo) calore al sistema a pressione costante



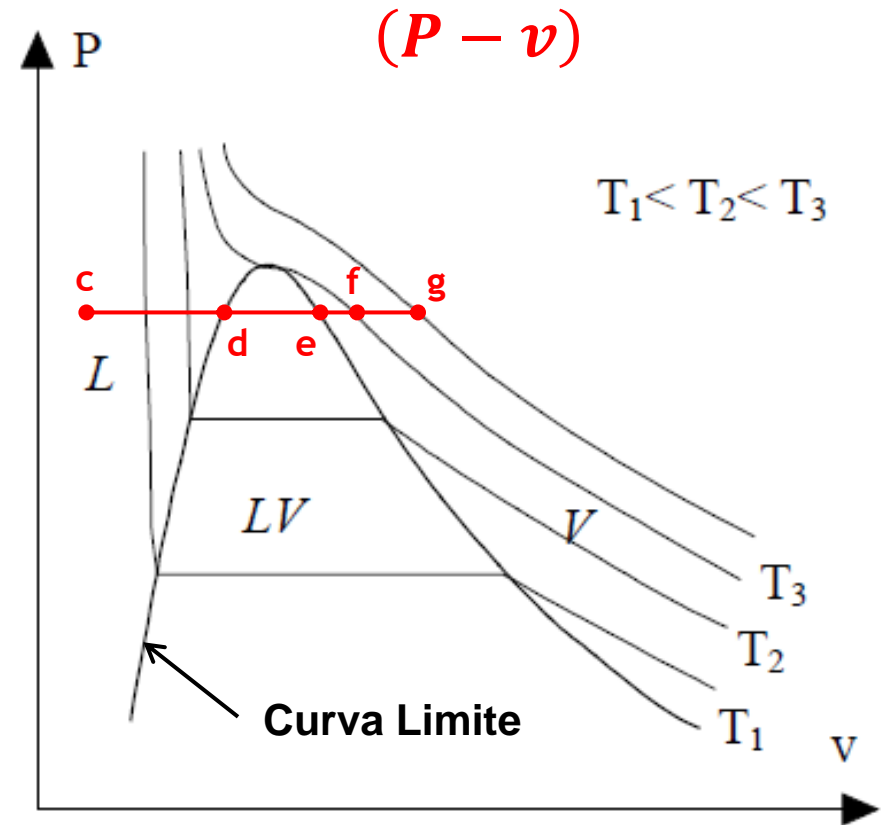
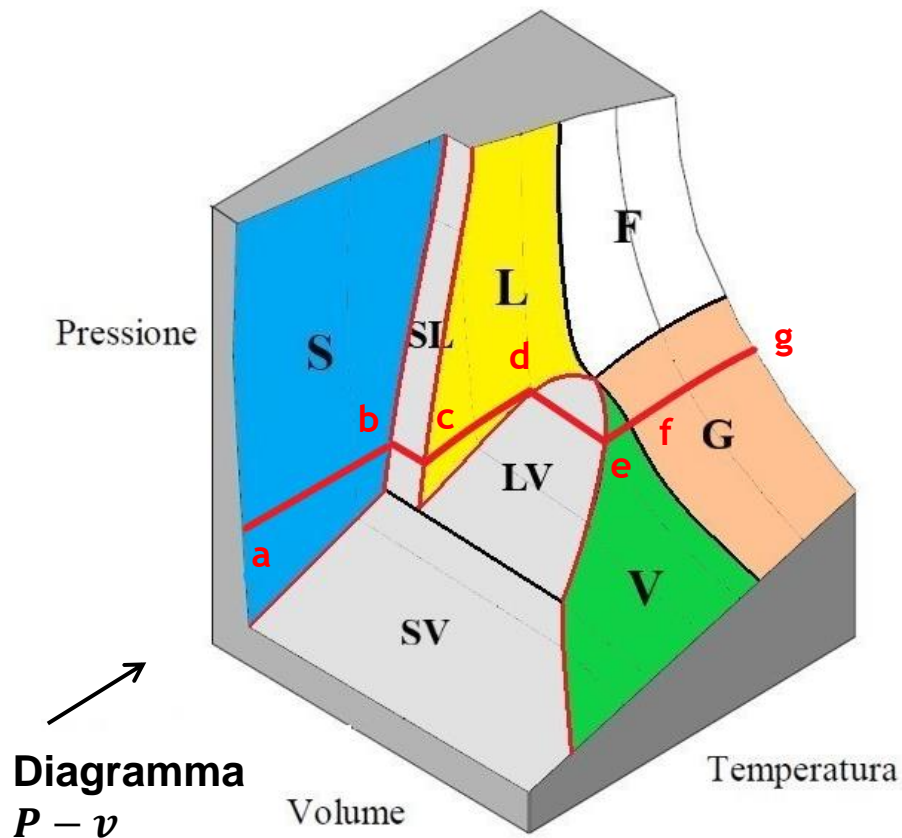
Trasformazione **ISOBARA**: fornisco (o sottraggo) calore al sistema a pressione costante



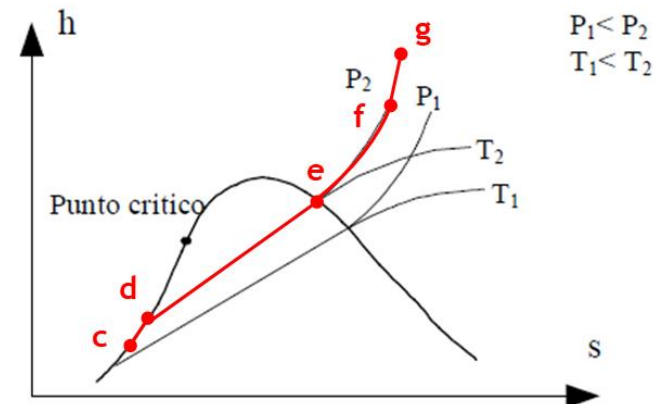
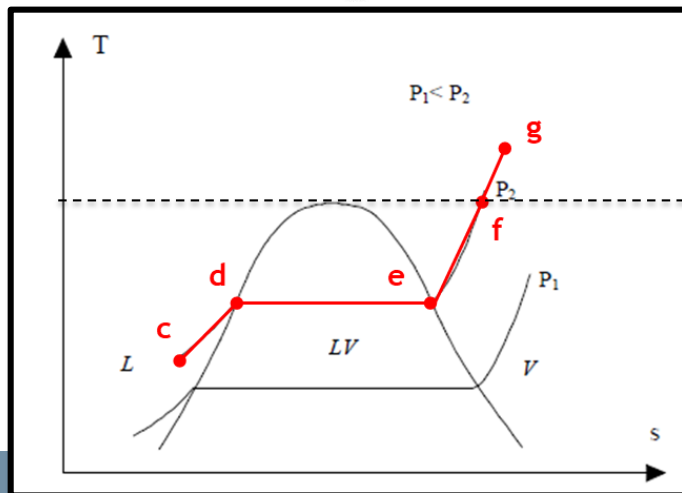
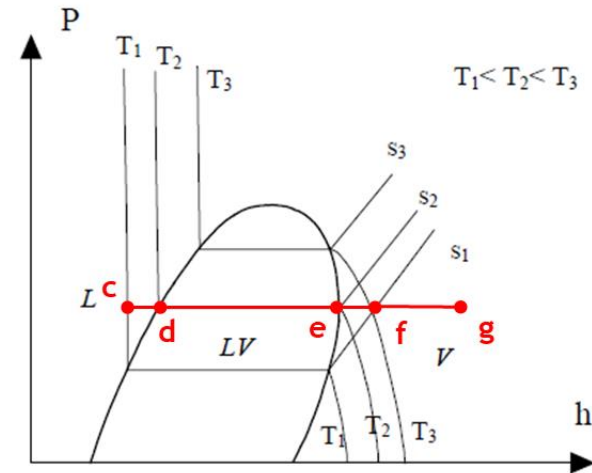
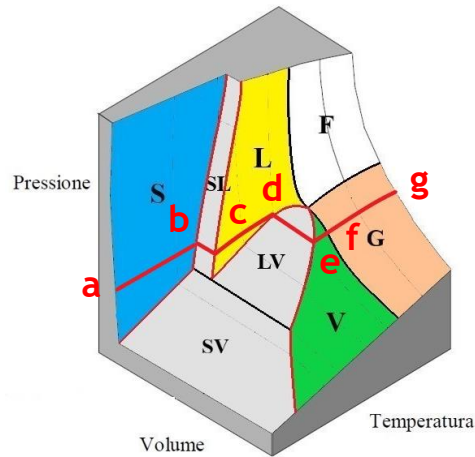
Trasformazione **ISOTERMA**: espando (o comprimo) il sistema fornendo/estraendo calore per mantenere la temperatura



Trasformazione **ISOBARA**: fornisco (o sottraggo) calore al sistema a pressione costante



Trasformazione **ISOBARA**: fornisco (o sottraggo) calore al sistema a pressione costante





## Entalpia (calore) di transizione di fase

$$h_{solido} < h_{liquido} < h_{vapore}$$

entalpia di liquefazione

$$h_{liquido} - h_{solido} > 0$$

entalpia di solidificazione

$$h_{lst} = h_{solido} - h_{liquido} < 0$$

$$h_{lst,H_2O} = -333 \text{ kJ/kg}$$

entalpia di evaporazione

$$h_{lvt} = h_{vapore} - h_{liquido} > 0$$

$$h_{lvt,H_2O} = 2501.6 \text{ kJ/kg}$$

entalpia di condensazione

$$h_{liquido} - h_{vapore} < 0$$

entalpia di sublimazione

$$h_{svt} = h_{vapore} - h_{solido} > 0$$

$$h_{svt,H_2O} = 2834.6 \text{ kJ/kg}$$

entalpia di brinamento

$$h_{solido} - h_{vapore} < 0$$

**Titolo di vapore**

$$x_v = \frac{M_v}{M}$$

**Titolo di liquido**

$$x_l = \frac{M_l}{M}$$

**Titolo di solido**

$$x_s = \frac{M_s}{M}$$

$$x_v + x_l + x_s = 1$$

## Caso generale

$$v = (1 - x_l - x_v)v_s + x_lv_l + x_vv_v$$

$$u = (1 - x_l - x_v)u_s + x_lu_l + x_vu_v$$

$$h = (1 - x_l - x_v)h_s + x_lh_l + x_vh_v$$

$$s = (1 - x_l - x_v)s_s + x_ls_l + x_v s_v$$

## Sistema Liquido – Vapore

**Titolo di vapore**  $x = x_v = \frac{M_v}{M}$

$$v = (1 - x)v_l + xv_v$$

$$u = (1 - x)u_l + xu_v$$

$$h = (1 - x)h_l + xh_v$$

$$s = (1 - x)s_l + xs_v$$

## Vapore come gas ideale?

### Diagramma acqua:

*Errore in % tra  $v$  e  $v_{id}$*

*Zona con errore < 1 %*

*Equazione di stato del gas ideale  
sempre valida fino a 100 kPa (1 bar)*

*Sopra 1 MPa (10 bar) e tra 200 e  
400 °C, mai!*

*Errore fino e oltre il 100%*

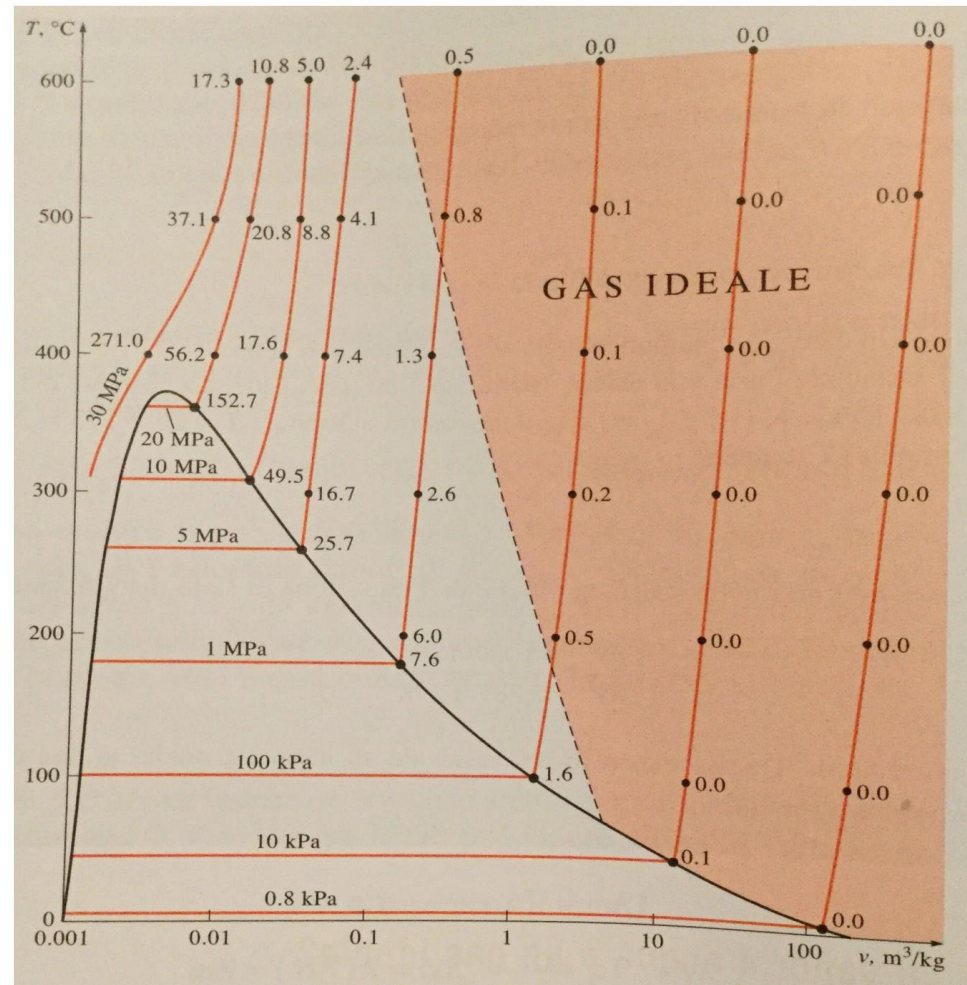


Fig 4.49 – Y. Cengel

## Tabella di saturazione (in pressione)

Tabelle di saturazione dell'acqua

Tratto da VDI Atlas/ed. Verein Deutscher Ingenieure. - Düsseldorf: VDI-Verl., 1993

P (bar)	T (°C)	liquido saturo		vapore saturo		liquido saturo		vapore saturo		liquido saturo		vapore saturo	
		$v_L$ (m <sup>3</sup> /kg)	$v_v - v_L$ (m <sup>3</sup> /kg)	$v_v$ (m <sup>3</sup> /kg)	$h_L$ (kJ/kg)	$h_v - h_L$ (kJ/kg)	$h_v$ (kJ/kg)	$s_L$ (kJ/kgK)	$s_v - s_L$ (kJ/kgK)	$s_v$ (kJ/kgK)	$s_L$ (kJ/kgK)	$s_v - s_L$ (kJ/kgK)	$s_v$ (kJ/kgK)
0.00611	0.01	0.0010002	206.1619	206.1629	0.0	2501.6	2501.6	0.0000	9.1575	9.1575			
	0.01	0.0010001	129.2097	129.2107	29.3	2485.0	2514.4	0.1060	8.8706	8.9767			
	0.02	0.0010012	67.0106	67.0116	73.5	2460.2	2533.6	0.2606	8.4640	8.7246			
	0.03	0.0010027	45.6690	45.6700	101.0	2444.6	2545.6	0.3543	8.2242	8.5785			
	0.04	0.0010040	34.8023	34.8033	121.4	2433.1	2554.5	0.4225	8.0530	8.4755			
	0.05	0.0010052	28.1935	28.1945	137.8	2423.8	2561.6	0.4763	7.9197	8.3960			
	0.06	0.0010064	23.7396	23.7406	151.5	2416.0	2567.5	0.5209	7.8103	8.3312			
	0.07	0.0010074	20.5294	20.5304	163.4	2409.2	2572.6	0.5591	7.7176	8.2767			
	0.08	0.0010084	18.1028	18.1038	173.9	2403.2	2577.1	0.5926	7.6370	8.2295			
	0.09	0.0010094	16.2024	16.2034	183.3	2397.9	2581.1	0.6224	7.5657	8.1881			
	0.10	0.0010102	14.6727	14.6737	191.8	2392.9	2584.8	0.6493	7.5018	8.1511			
	0.15	0.0010140	10.0211	10.0221	226.0	2373.2	2599.2	0.7549	7.2544	8.0093			
	0.20	0.0010172	7.6482	7.6492	251.5	2358.4	2609.9	0.8321	7.0773	7.9094			
	0.25	0.0010199	6.2030	6.2040	272.0	2346.4	2618.3	0.8933	6.9390	7.8323			
	0.30	0.0010223	5.2280	5.2290	289.3	2336.1	2625.4	0.9441	6.8254	7.7695			
	0.35	0.0010245	4.5245	4.5255	304.3	2327.2	2631.5	0.9878	6.7288	7.7166			
	0.40	0.0010265	3.9922	3.9932	317.7	2319.2	2636.9	1.0261	6.6448	7.6709			
	0.45	0.0010284	3.5751	3.5761	329.6	2312.0	2641.7	1.0603	6.5703	7.6306			
	0.50	0.0010301	3.2391	3.2401	340.6	2305.4	2646.0	1.0912	6.5035	7.5947			
	0.60	0.0010333	2.7307	2.7317	359.9	2293.6	2653.6	1.1455	6.3872	7.5327			
	0.70	0.0010361	2.3637	2.3647	376.8	2283.3	2660.1	1.1921	6.2883	7.4804			
	0.80	0.0010387	2.0859	2.0869	391.7	2274.0	2665.8	1.2330	6.2022	7.4352			
	0.90	0.0010412	1.8681	1.8691	405.2	2265.6	2670.9	1.2696	6.1258	7.3954			
	1.00	0.0010434	1.6927	1.6937	417.5	2257.9	2675.4	1.3027	6.0571	7.3598			
1.01325	100.00	0.0010437	1.6720	1.6730	419.1	2256.9	2676.0	1.3069	6.0485	7.3554			
	1.20	0.0010476	1.4271	1.4281	439.4	2244.1	2683.4	1.3609	5.9375	7.2984			
	1.40	0.0010513	1.2352	1.2363	458.4	2231.9	2690.3	1.4109	5.8356	7.2465			
	1.60	0.0010547	1.0900	1.0911	475.4	2220.9	2696.2	1.4550	5.7467	7.2017			
	1.80	0.0010579	0.97612	0.9772	490.7	2210.8	2701.5	1.4944	5.6677	7.1622			
	2.00	0.0010608	0.88434	0.8854	504.7	2201.6	2706.3	1.5301	5.5967	7.1268			
	2.50	0.0010676	0.71733	0.7184	535.4	2181.0	2716.4	1.6072	5.4448	7.0520			
	3.00	0.0010735	0.60446	0.6055	561.4	2163.2	2724.7	1.6717	5.3192	6.9909			

## Tabella di saturazione (in temperatura)

### Tabelle di saturazione dell'acqua

Tratto da VDI Atlas/ed. Verein Deutscher Ingenieure. - Düsseldorf: VDI-Verl., 1993

		liquido saturo		vapore saturo		liquido saturo		vapore saturo		liquido saturo		vapore saturo	
T (°C)	P (bar)	v <sub>L</sub> (m <sup>3</sup> /kg)	v <sub>V</sub> -v <sub>L</sub> (m <sup>3</sup> /kg)	v <sub>V</sub> (m <sup>3</sup> /kg)	h <sub>L</sub> (kJ/kg)	h <sub>V</sub> -h <sub>L</sub> (kJ/kg)	h <sub>V</sub> (kJ/kg)	s <sub>L</sub> (kJ/kgK)	s <sub>V</sub> -s <sub>L</sub> (kJ/kgK)	s <sub>V</sub> (kJ/kgK)			
0.01	0.006112	0.001000	206.162	206.163	0.0	2501.6	2501.6	0.0000	9.1575	9.1575			
2	0.007055	0.001000	179.922	179.923	8.4	2496.8	2505.2	0.0306	9.0741	9.1047			
4	0.008129	0.001000	157.271	157.272	16.8	2492.1	2508.9	0.0611	8.9915	9.0526			
6	0.009345	0.001000	137.779	137.78	25.2	2487.4	2512.6	0.0913	8.9102	9.0015			
8	0.01072	0.001000	120.965	120.966	33.6	2482.6	2516.2	0.1213	8.8300	8.9513			
10	0.01227	0.001000	106.429	106.43	42.0	2477.9	2519.9	0.1510	8.7510	8.9020			
15	0.017139	0.001001	77.977	77.978	62.9	2466.1	2529.1	0.2243	8.5582	8.7826			
20	0.023366	0.001002	57.837	57.838	83.9	2454.3	2538.2	0.2963	8.3721	8.6684			
25	0.03166	0.001003	43.401	43.402	104.8	2442.5	2547.3	0.3670	8.1922	8.5592			
30	0.042415	0.001004	32.928	32.929	125.7	2430.7	2556.4	0.4365	8.0181	8.4546			
35	0.056216	0.001006	25.244	25.245	146.6	2418.8	2565.4	0.5049	7.8495	8.3543			
40	0.07375	0.001008	19.545	19.546	167.5	2406.9	2574.4	0.5721	7.6861	8.2583			
45	0.09582	0.001010	15.275	15.276	188.4	2394.9	2583.3	0.6383	7.5277	8.1661			
50	0.12335	0.001012	12.045	12.046	209.3	2382.9	2592.2	0.7035	7.3741	8.0776			
55	0.15741	0.001015	9.5779	9.5789	230.2	2370.8	2601.0	0.7677	7.2248	7.9925			
60	0.1992	0.001017	7.6775	7.6785	251.1	2358.6	2609.7	0.8310	7.0798	7.9108			
65	0.25009	0.001020	6.2013	6.2023	272.0	2346.3	2618.4	0.8933	6.9388	7.8321			
70	0.31162	0.001023	5.0453	5.0463	293.0	2334.0	2626.9	0.9548	6.8017	7.7565			
75	0.38549	0.001026	4.1331	4.1341	313.9	2321.5	2635.4	1.0154	6.6681	7.6835			
80	0.4736	0.001029	3.4081	3.4091	334.9	2308.8	2643.8	1.0753	6.5380	7.6133			
85	0.57803	0.001033	2.8278	2.8288	355.9	2296.1	2652.0	1.1343	6.4111	7.5454			
90	0.70109	0.001036	2.3603	2.3613	376.9	2283.2	2660.1	1.1925	6.2873	7.4798			
95	0.84526	0.001040	1.9812	1.9822	398.0	2270.2	2668.1	1.2501	6.1665	7.4166			
100	1.01325	0.001044	1.672	1.673	419.1	2256.9	2676.0	1.3069	6.0485	7.3554			
105	1.208	0.001048	1.4183	1.4193	440.2	2243.6	2683.7	1.3630	5.9331	7.2962			
110	1.4327	0.001052	1.2089	1.2099	461.3	2230.0	2691.3	1.4185	5.8203	7.2388			
115	1.6906	0.001056	1.0353	1.0363	482.5	2216.2	2698.7	1.4733	5.7099	7.1832			
120	1.9854	0.001061	0.89046	0.89152	503.7	2202.2	2706.0	1.5276	5.6017	7.1293			
125	2.321	0.001065	0.76917	0.77023	525.0	2188.0	2713.0	1.5813	5.4957	7.0769			
130	2.7013	0.001070	0.66707	0.66814	546.3	2173.6	2719.9	1.6344	5.3917	7.0261			



## Tabella del vapore surriscaldato

Tabelle vapore surriscaldato dell'acqua

Tratto da VDI Atlas/ed. Verein Deutscher Ingenieure - Düsseldorf: VDI-Verl., 1993

P (bar)			Temperatura											
Ts (°C)			50	100	150	200	250	300	350	400	500	600	700	800
0.02	v	m3/kg	74.524	86.08	97.628	109.171	120.711	132.251	143.79	155.329	178.405	201.482	224.558	247.634
	h	kJ/kg	2594.4	2688.5	2783.7	2880	2977.7	3076.8	3177.7	3279.7	3489.2	3705.6	3928.8	4158.7
	s	kJ/kgK	8.9226	9.1934	9.4327	9.6479	9.8441	10.0251	10.1934	10.3512	10.6413	10.9044	11.1464	11.3712
0.04	v	m3/kg	37.24	43.027	48.806	54.58	60.351	66.122	71.892	77.662	89.201	100.74	112.278	123.816
	h	kJ/kg	2593.9	2688.3	2783.5	2879.9	2977.6	3076.8	3177.4	3279.7	3489.2	3705.6	3928.8	4158.7
	s	kJ/kgK	8.6016	8.873	9.1125	9.3279	9.5241	9.7051	9.8735	10.0313	10.3214	10.5845	10.8265	11.0513
0.06	v	m3/kg	24.812	28.676	32.532	37.383	40.232	44.079	47.927	51.773	59.467	67.159	74.852	82.544
	h	kJ/kg	2593.5	2688	2783.4	2879.8	2977.6	3076.7	3177.4	3279.6	3489.2	3705.6	3928.8	4158.7
	s	kJ/kgK	8.4135	8.6854	8.9251	9.1406	9.3369	9.5179	9.6863	9.8441	10.1342	10.3973	10.6394	10.8642
0.08	v	m3/kg	18.598	21.501	24.395	27.284	30.172	33.058	35.944	38.829	44.599	50.369	56.138	61.908
	h	kJ/kg	2593.1	2687.8	2783.2	2879.7	2977.5	3076.7	3177.3	3279.6	3489.1	3705.5	3928.8	4158.7
	s	kJ/kgK	8.2797	8.5521	8.7921	9.0077	9.2041	9.3851	9.5535	9.7113	10.0014	10.2646	10.5066	10.7314
0.1	v	m3/kg	14.869	17.195	19.512	21.825	24.136	26.445	28.754	31.062	35.679	40.295	44.91	49.526
	h	kJ/kg	2592.7	2687.5	2783.1	2879.6	2977.4	3076.6	3177.3	3279.6	3489.1	3705.5	3928.8	4158.7
	s	kJ/kgK	8.1757	8.4486	8.6888	8.9045	9.101	9.282	9.4504	9.6083	9.8984	10.1616	10.4036	10.6284
0.5	v	m3/kg		3.4181	3.8893	4.356	4.8205	5.2839	5.7467	6.2091	7.1335	8.0574	8.981	9.9044
	h	kJ/kg		2682.6	2780.1	2877.7	2976.1	3075.7	3176.6	3279	3488.7	3705.2	3928.6	4158.5
	s	kJ/kgK		7.6953	7.9406	8.1587	8.3564	8.538	8.7068	8.8649	9.1552	9.4185	9.6606	9.8855
1	v	m3/kg		1.6955	1.9363	2.1723	2.4061	2.6387	2.8708	3.1025	3.5653	4.0277	4.4898	4.9517
	h	kJ/kg		2676.2	2776.1	2875.4	2974.5	3074.5	3175.6	3278.2	3488.1	3704.8	3928.2	4158.3
	s	kJ/kgK		7.3618	7.6137	7.8349	8.0342	8.2166	8.3858	8.5442	8.8348	9.0982	9.3405	9.5654
2	v	m3/kg			0.95954	1.0804	1.1989	1.3162	1.4328	1.5492	1.7812	2.0129	2.2442	2.4754
	h	kJ/kg			2768.5	2870.5	2971.2	3072.1	3173.8	3276.7	3487	3704	3927.6	4157.8
	s	kJ/kgK			7.2794	7.5072	7.7096	7.8937	8.0638	8.2226	8.5139	8.7776	9.0201	9.2452
3	v	m3/kg			0.63374	0.71635	0.79644	0.87529	0.95352	1.0314	1.1865	1.3412	1.4957	1.6499
	h	kJ/kg			2760.4	2865.5	2967.9	3069.7	3171.9	3275.2	3486	3703.2	3927	4157.3
	s	kJ/kgK			7.0771	7.3119	7.5176	7.7034	7.8744	8.0338	8.3257	8.5898	8.8325	9.0577
4	v	m3/kg			0.47066	0.53426	0.59519	0.65485	0.71385	0.7725	0.88919	1.0054	1.1214	1.2372
	h	kJ/kg			2752	2860.4	2964.5	3067.2	3170	3273.6	3484.9	3702.3	3926.4	4156.9
	s	kJ/kgK			6.9285	7.1708	7.38	7.5675	7.7395	7.8994	8.1919	8.4563	8.6992	8.9246
5	v	m3/kg				0.42496	0.47443	0.52258	0.57005	0.61716	0.71078	0.80395	0.89685	0.98956
	h	kJ/kg				2855.1	2961.1	3064.8	3168.1	3272.1	3483.8	3701.5	3925.8	4156.4
	s	kJ/kgK				7.0592	7.2721	7.4614	7.6343	7.7948	8.0879	8.3626	8.5957	8.8213



## Interpolazione lineare

$$Y = Y_A + \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} (X - X_A)$$

$Y$ : grandezza che si vuole calcolare

$X$ : grandezza conosciuta

$A, B$ : stati di riferimento (presenti in tabella) con  $X_A < X < X_B$

## Interpolazione lineare: esempio

Entalpia liquido saturo a  $T = 12\text{ °C}$

$$X_A = T_A = 10\text{ °C}$$

$$X_B = T_B = 15\text{ °C}$$

$$Y_A = h_{LS,A} = 42.0\text{ kJ/kg}$$

$$Y_B = h_{LS,B} = 62.9\text{ kJ/kg}$$

Tabelle di saturazione dell'acqua

Tratto da VDI Atlas/ed. Verein Deutscher Ingeni

T (°C)	P (bar)	liquido saturo		vapore saturo		liquido saturo		vapore saturo	
		$v_L$ (m³/kg)	$v_v - v_L$ (m³/kg)	$v_v$ (m³/kg)	$h_L$ (kJ/kg)	$h_v - h_L$ (kJ/kg)	$h_v$ (kJ/kg)		
0.01	0.006112	0.001000	206.162	206.163	0.0	2501.6	2501.6		
2	0.007055	0.001000	179.922	179.923	8.4	2496.8	2505.2		
4	0.008129	0.001000	157.271	157.272	16.8	2492.1	2508.9		
6	0.009345	0.001000	137.779	137.78	25.2	2487.4	2512.6		
8	0.01072	0.001000	120.965	120.966	33.6	2482.6	2516.2		
10	0.01227	0.001000	106.429	106.43	42.0	2477.9	2519.9		
15	0.017139	0.001001	77.977	77.978	62.9	2466.1	2529.1		
20	0.023366	0.001002	57.837	57.838	83.9	2454.3	2538.2		
25	0.03166	0.001003	43.401	43.402	104.8	2442.5	2547.3		

$$Y = h_{LS} = h_{LS,A} + \frac{h_{LS,B} - h_{LS,A}}{T_B - T_A} (T - T_A) = 42.0 + \frac{62.9 - 42.0}{15 - 10} (12 - 10)$$

$$h_{LS}(12\text{ °C}) = 50.4\text{ kJ/kg}$$

## Interpolazione bilineare

Quando gli stati di riferimento non sono direttamente identificabili in tabella

$$Y = Y_A + \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} (X - X_A)$$

$$Y_A = Y_{A1} + \frac{Y_{A2} - Y_{A1}}{X_{A2} - X_{A1}} (X_A - X_{A1})$$

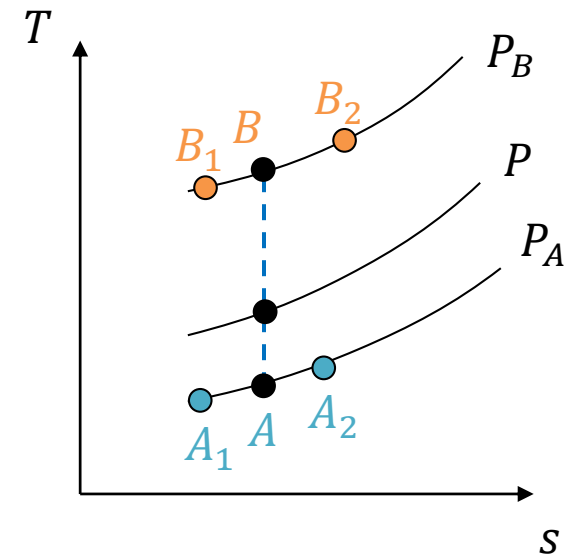
$$Y_B = Y_{B1} + \frac{Y_{B2} - Y_{B1}}{X_{B2} - X_{B1}} (X_B - X_{B1})$$

## Interpolazione bilineare: esempio

Entalpia vapore surriscaldato a  $P = 1.5 \text{ bar}$  e  $s = 7.5 \text{ kJ/kgK}$

Tabelle vapore surriscaldato dell'acqua

P (bar)		Temperatur				
Ts (°C)		50	100	150	200	250
0.02	v m3/kg	74.524	86.08	97.628	109.171	120.711
	h kJ/kg	2594.4	2688.5	2783.7	2880	2977.7
17.5	s kJ/kgK	8.9226	9.1934	9.4327	9.6479	9.8441
0.04	v m3/kg	37.24	43.027	48.806	54.58	60.351
	h kJ/kg	2593.9	2688.3	2783.5	2879.9	2977.6
29	s kJ/kgK	8.6016	8.873	9.1125	9.3279	9.5241
0.06	v m3/kg	24.812	28.676	32.532	37.383	40.232
	h kJ/kg	2593.5	2688	2783.4	2879.8	2977.6
36.2	s kJ/kgK	8.4135	8.6854	8.9251	9.1406	9.3369
0.08	v m3/kg	18.598	21.501	24.395	27.284	30.172
	h kJ/kg	2593.1	2687.8	2783.2	2879.7	2977.5
41.5	s kJ/kgK	8.2797	8.5521	8.7921	9.0077	9.2041
0.1	v m3/kg	14.869	17.195	19.512	21.825	24.136
	h kJ/kg	2592.7	2687.5	2783.1	2879.6	2977.4
45.8	s kJ/kgK	8.1757	8.4486	8.6888	8.9045	9.101
0.5	v m3/kg		3.4181	3.8893	4.356	4.8205
	h kJ/kg		2682.6	2780.1	2877.7	2976.1
81.3	s kJ/kgK		7.6953	7.9406	8.1587	8.3564
1	v m3/kg		1.6955	1.9363	2.1723	2.4061
	h kJ/kg		2676.2	2776.1	2875.4	2974.5
99.6	s kJ/kgK		7.3618	7.6137	7.8349	8.0342
2	v m3/kg			0.95954	1.0804	1.1989
	h kJ/kg			2768.5	2870.5	2971.2
120.2	s kJ/kgK			7.2794	7.5072	7.7096



$$\begin{aligned}
 P_A &= 1 \text{ bar} \\
 T_{A1} &= 100 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T_{A2} &= 150 \text{ }^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_B &= 2 \text{ bar} \\
 T_{B1} &= 150 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T_{B2} &= 200 \text{ }^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

## Interpolazione bilineare: esempio

Entalpia vapore surriscaldato a  $P = 1.5 \text{ bar}$  e  $s = 7.5 \text{ kJ/kgK}$

$$h_A(1 \text{ bar}, 7.5 \text{ kJ/kgK}) = \dots$$

$$h_B(2 \text{ bar}, 7.5 \text{ kJ/kgK}) = \dots$$

$$h(1.5 \text{ bar}, 7.5 \text{ kJ/kgK}) = \dots$$

## Formule per l'acqua sottoraffreddata

Modello di **liquido incompressibile ideale** ( $c_p = c(T)$ ,  $\beta = 0$  e  $K_T = 0$ )

$$dh = c(T)dT + v dP$$
$$ds = c(T) \frac{dT}{T}$$

Modello di liquido incompressibile **perfetto** ( $c = \text{cost}$ )

$$\Delta h = c \Delta T + v \Delta P$$

$$\Delta s = c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

## Formule per l'acqua sottoraffreddata

Modello di liquido incompressibile **perfetto** ( $c = \text{cost}$ )

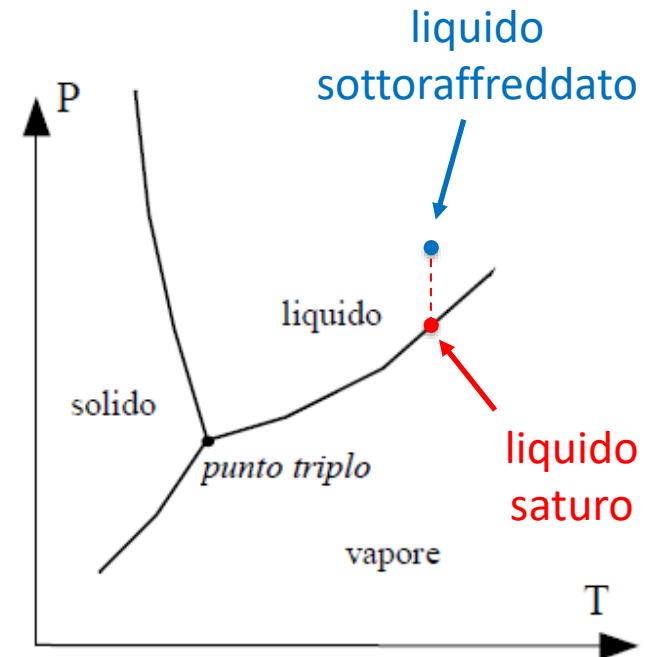
$$h(P, T) - h_{ls}(P_{sat}(T)) = c(T - T_{sat}) + v(P - P_{sat}(T))$$

$$h(P, T) = h_{ls}(P_{sat}(T)) + v(P - P_{sat}(T))$$

Per  $v$  si può usare il valore del liquido saturo fornito dalla tabella

$$v = v_{ls}(P_{sat}(T))$$

*Valido anche in caso di modello di liquido incompressibile ideale*



## Formule per l'acqua sottoraffreddata

Modello di liquido incompressibile **perfetto** ( $c = \text{cost}$ )

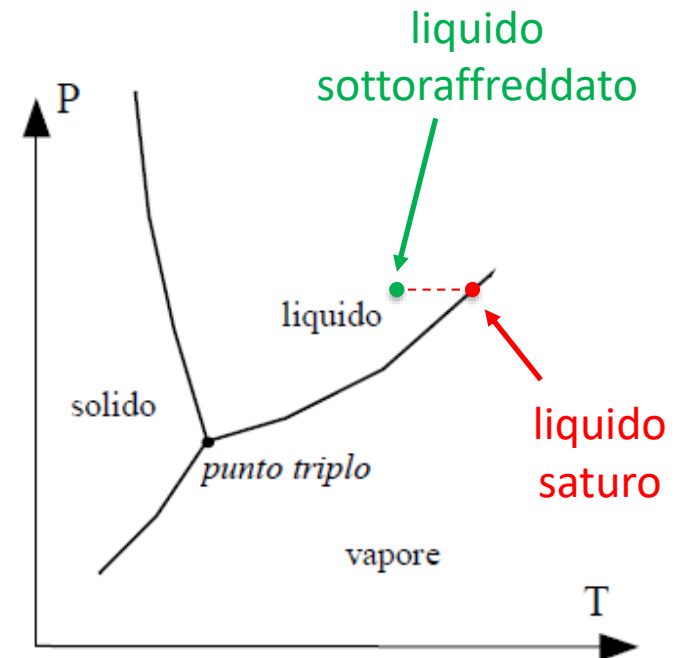
### Secondo approccio

~~$$h(P, T) - h_{ls}(T_{sat}(P)) = c(T - T_{sat}(P)) + v(P - P)$$~~

~~$$h(P, T) = h_{ls}(P_{sat}(T)) + c(T - T_{sat}(P))$$~~

**NON VALIDO PERCHE' IN GENERALE  $c \neq \text{cost}$**

Problema: cosa fare se si conosce  $P$  e non  $T$  (ES 3.1.6)?





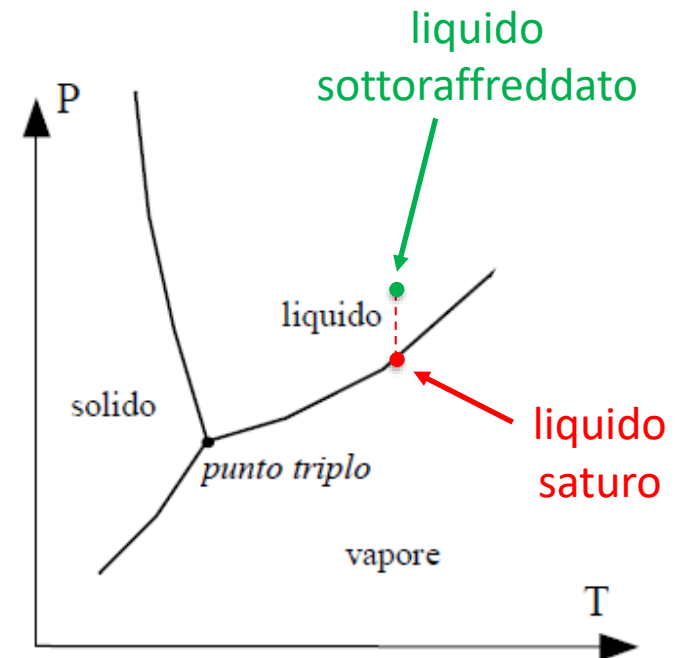
## Formule per l'acqua sottoraffreddata

Caso nel quale si conosce  $(P, h)$  e si vuole conoscere  $T$

$$h(P, T) = h_{ls}(P_{sat}(T)) + \underbrace{v(P - P_{sat}(T))}_{\text{di solito trascurabile}}$$

Si interpola in tabella di saturazione la temperatura per la quale  $h_{ls}(T) = h$

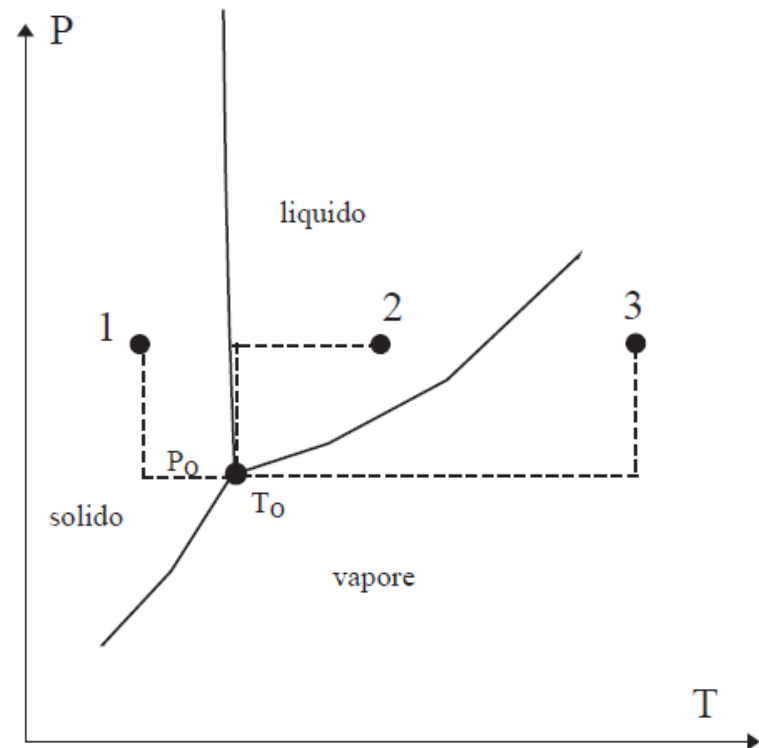
Approccio simile se si conosce  $(P, s)$  e si vuole conoscere  $T$



## Relazioni semplificate vicino al punto triplo **per l'acqua**

In assenza di tabelle, si possono usare le seguenti relazioni semplificate che rimangono valide in prossimità del punto triplo per:

1. stato solido
2. stato liquido
3. stato vapore



## Relazioni semplificate vicino al punto triplo **per l'acqua**

### 1. stato solido

$$h(P, T) = h_0 + h_{lst} + c_s(T - T_0) + v_s(P - P_0)$$
$$s(P, T) = s_0 + s_{lst} + c_s \ln \frac{T}{T_0} = s_0 + \frac{h_{lst}}{T_0} + c_s \ln \frac{T}{T_0}$$

con

$P_0, T_0$ : pressione e temperatura del punto triplo ( $P_0 = 0.00611$  bar;  $T_0 = 0.01$  °C)

$h_0$ : entalpia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $h_0 = 0$  kJ/kg)

$s_0$ : entropia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $s_0 = 0$  kJ/kgK)

$h_{lst}$ : entalpia di solidificazione al punto triplo ( $h_{lst} = -333$  kJ/kg)

$c_s$ : calore specifico del ghiaccio ( $c_s = 2093$  J/kgK)

$v_s$ : volume specifico del ghiaccio ( $v_s = 0.00109$  m<sup>3</sup>/kg)

**POSSIAMO APPROSSIMARE**  $T_{sat,L-S}(P) = T_0$

## Relazioni semplificate vicino al punto triplo **per l'acqua**

### 2. stato liquido (**USARE TABELLE**)

$$h(P, T) = h_0 + c_l(T - T_0) + v_l(P - P_0)$$
$$s(P, T) = s_0 + c_l \ln \frac{T}{T_0}$$

con

$P_0, T_0$ : pressione e temperatura del punto triplo ( $P_0 = 0.00611$  bar;  $T_0 = 0.01$  °C)

$h_0$ : entalpia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $h_0 = 0$  kJ/kg)

$s_0$ : entropia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $s_0 = 0$  kJ/kgK)

$c_l$ : calore specifico dell'acqua liquida ( $c_l = 4186$  J/kgK)

$v_l$ : volume specifico dell'acqua liquida ( $v_l = 0.001$  m<sup>3</sup>/kg)

## Relazioni semplificate vicino al punto triplo **per l'acqua**

### 3. stato vapore (**USARE TABELLE**)

$$h(P, T) = h_0 + h_{lvt} + c_P(T - T_0)$$
$$s(P, T) = s_0 + s_{lvt} + c_P \ln \frac{T}{T_0} - R^* \ln \frac{P}{P_0} = s_0 + \frac{h_{lvt}}{T_0} + c_P \ln \frac{T}{T_0} - R^* \ln \frac{P}{P_0}$$

con

$P_0, T_0$ : pressione e temperatura del punto triplo ( $P_0 = 0.00611$  bar;  $T_0 = 0.01$  °C)

$h_0$ : entalpia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $h_0 = 0$  kJ/kg)

$s_0$ : entropia di riferimento al punto triplo in fase liquida ( $s_0 = 0$  kJ/kgK)

$h_{lvt}$ : entalpia di evaporazione al punto triplo ( $h_{lvt} = 2501.6$  kJ/kg)

$c_P$ : calore specifico a pressione costante dell'acqua vapore ( $c_P = 2009$  J/kgK)