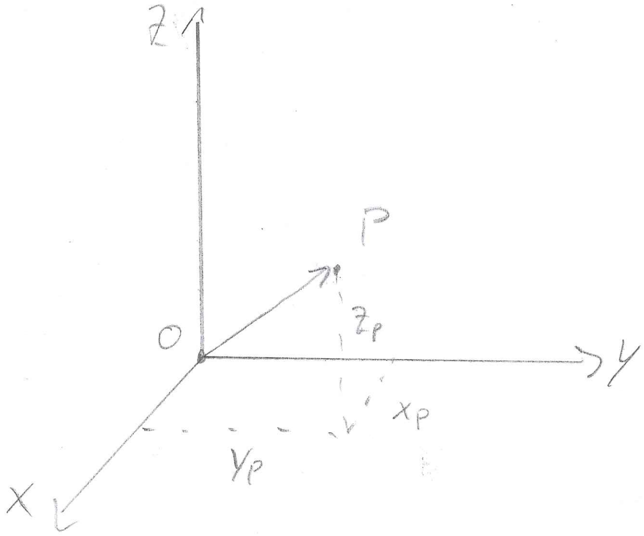
ESERCITAZIONE 1

- RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE
- CINEMATICA DEL PUNTO

• DEFINIZIONE DI VETTORE



in un sistema di riferimento cartesiano definiamo il vettore $\vec{P}$

$\vec{P} = (P-O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono **VERSORI**

un vettore è caratterizzato dalle proprietà: MODULO, DIREZIONE, VERSO + PUNTO o RETTA DI APPLICAZIONE

MODULO DEL VETTORE $\vec{P}$: $|\vec{P}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

i VERSORI hanno modulo unitario.

Nel corso studiamo problemi piani → non è vero che tutti i vettori appartengono al piano. ES. velocità angolare $\vec{\omega}$ è $\perp xy$ $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

Nell'esempio $\vec{P}$ è un vettore posizione: indica la posizione di P nel sistema di riferimento.

In MECCANICA esistono diverse grandezze di tipo VETTORIALE

ES: • grandezze cinematiche: velocità, velocità angolare, accelerazione, accelerazione angolare

• grandezze dinamiche: forze e coppie (momenti)

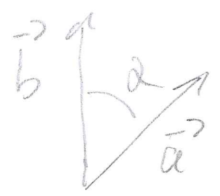
In MECCANICA esistono anche grandezze di tipo SCALARE (sono numeri)

ES: densità, massa (non peso), volume, potenza, lavoro, energia

• OPERAZIONI TRA VETTORI

- PRODOTTO SCALARE $\times$

$c = \vec{a} \times \vec{b}$ → il risultato è uno scalare



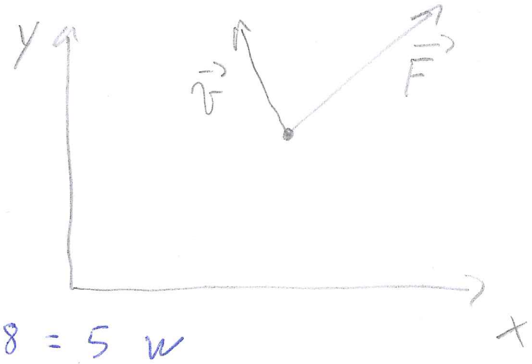
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab \cos\alpha = \vec{b} \times \vec{a}$ (prop. commutativa)

ES: potenza $W = \vec{F} \times \vec{v}$ se $\alpha = 90° \Rightarrow c = 0$

$W = \vec{E} \times \vec{\omega}$

$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ [N]

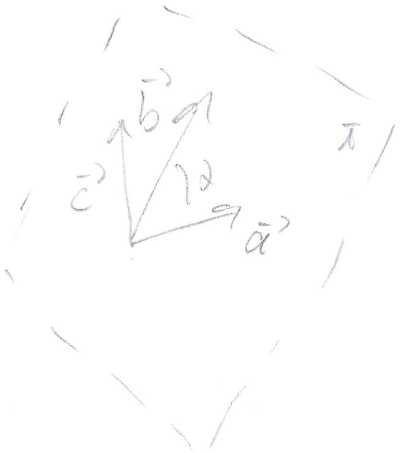
$\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ [m/s]



$W = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 4\vec{j}) = -3 + 8 = 5$ W

-PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ il risultato è un vettore



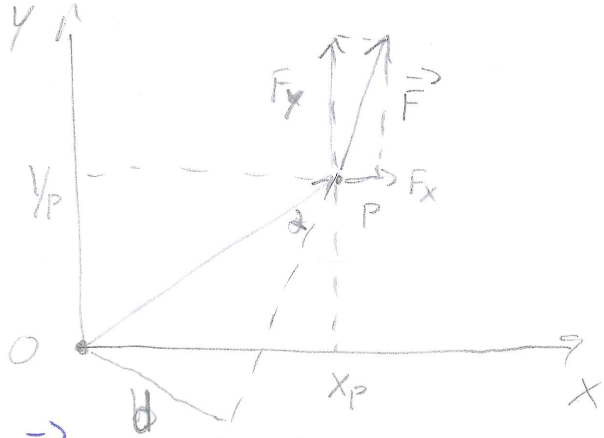
il vettore $\vec{c}$ è $\perp$ al piano definito dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$|\vec{c}| = ab \sin\alpha$ se $\alpha = 0 \Rightarrow \vec{c} = 0$

$\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$ NON commutativo

! regola mano dx

ES. MOMENTO di una forza: $\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F}$



$\vec{M} = (P - O) \wedge \vec{F} =$

$= (x_P \vec{i} + y_P \vec{j}) \wedge (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) =$

$= x_P F_y \vec{k} - y_P F_x \vec{k} = (x_P F_y - y_P F_x)\vec{k}$

$\vec{M}$ è $\perp$ a xy

SI SCOMPONE NELLA SOMMA DEL MOMENTO DOVUTO A F_x E DI QUELLO DOVUTO A F_y

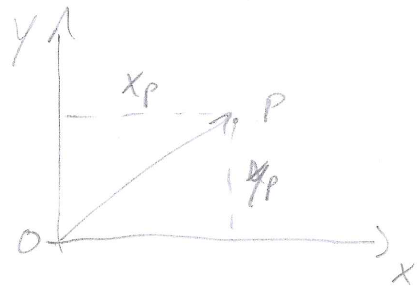
$\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j}$ [N]

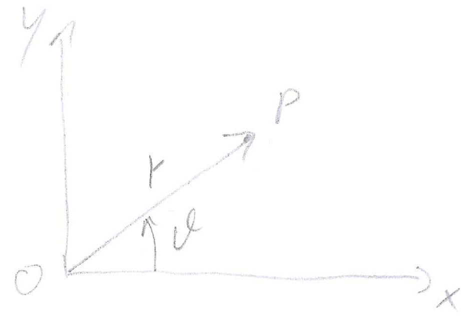
$(P - O) = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ [m]

$\vec{M} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \wedge (\vec{i} + 3\vec{j}) = (15 - 2) = 13\vec{k}$ [Nm]

CINEMATICA NEL PIANO

- vettore posizione





per definire la posizione di un punto nel piano servono 2 coordinate

coordinate cartesiane

$$(P-O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$$

$$|(P-O)| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = r$$

coordinate polari r, ϑ

$$(P-O) = r \cos\vartheta \, \vec{i} + r \sin\vartheta \, \vec{j}$$

$$\tan\vartheta = \frac{y_P}{x_P}$$

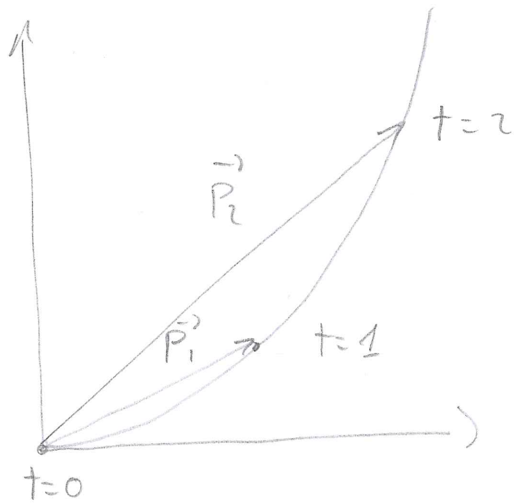
- equazioni scalari del movimento
  posizione di P in funzione del tempo

ES:
$$\begin{cases} x = x(t) = 3t \\ y = y(t) = 5t^2 \end{cases}$$

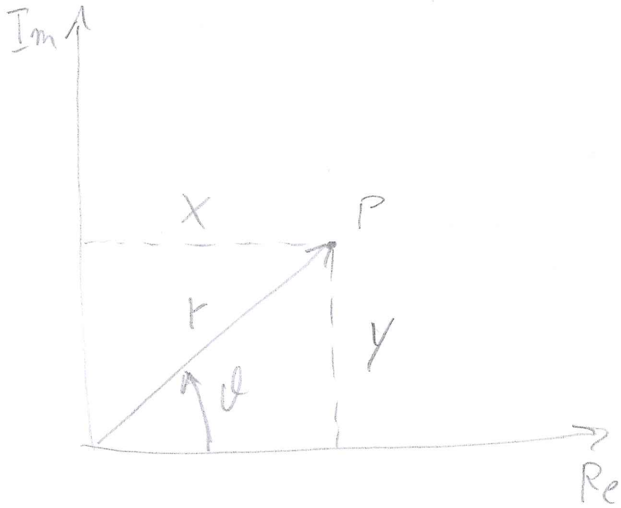
posso ricavare l'equazione della <u>traiettoria</u> $y = f(x)$ (NON SEMPRE È POSSIBILE)

$$t = \frac{x}{3} \qquad y = 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}x^2$$

parabola con vertice in O



UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI



sistema di riferimento Re - Im

r = modulo

ϑ = anomalia (! convenzione ϑ ↺)

- forma cartesiana: $\vec{z} = x + iy$
- forma esponenziale: $\vec{z} = r e^{i\vartheta}$ (rappresentazione polare)

[relazione di Eulero: $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$]

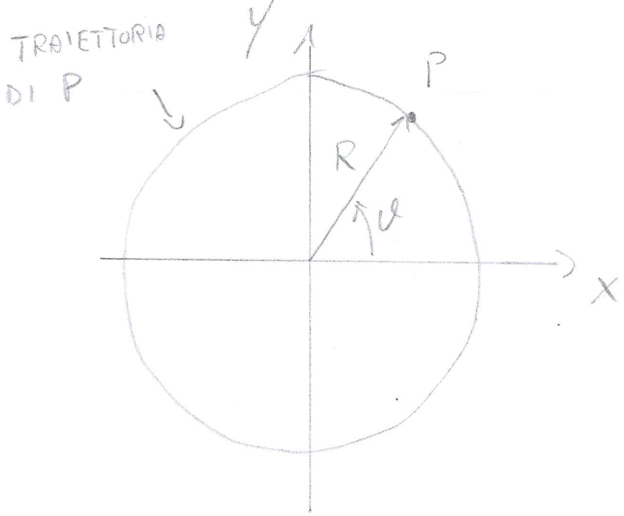
$e^{i0} = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i \qquad e^{i\pi} = -1$

- forma trigonometrica: $\vec{z} = r\cos\vartheta + i\, r \sin\vartheta$

CINEMATICA DEL PUNTO NEL PIANO

- posizione $\vec{P} = (P - O)$
- velocità $\vec{v} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$
- accelerazione: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

APPLICAZIONE: punto su traiettoria circolare



il punto P è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R

se utilizzo coordinate polari

$r = R$ = costante

$\vartheta = \vartheta(t)$ funzione del tempo

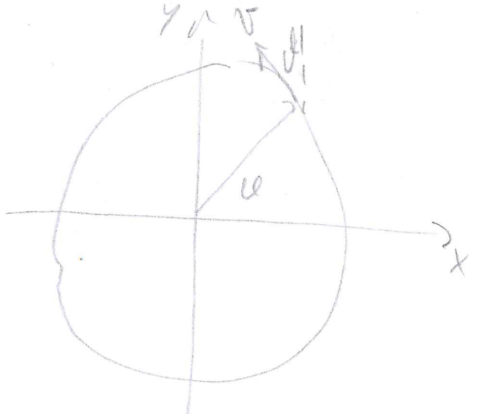
$$\vec{P} = (P-O) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = x(\vartheta(t))\,\vec{i} + y(\vartheta(t))\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad (P-O) = R\cos\vartheta\,\vec{i} + R\sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} = \frac{dx}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\,\vec{j} =$$

$$= -R\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\vec{i} + R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\vec{j} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$$

posso scrivere $\vec{v} = R\dot{\vartheta}\underbrace{\left(-\sin\vartheta\,\vec{i} + \cos\vartheta\,\vec{j}\right)}_{\vec{t}}$ $\qquad \vec{t} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$



$\dot{\vartheta}$ è la velocità con cui varia la direzione di $\vec{v}$

$\dot{\vartheta} > 0$, ALTRIMENTI STO PERCORRENDO LA TRAIETTORIA NELL'ALTRO SENSO

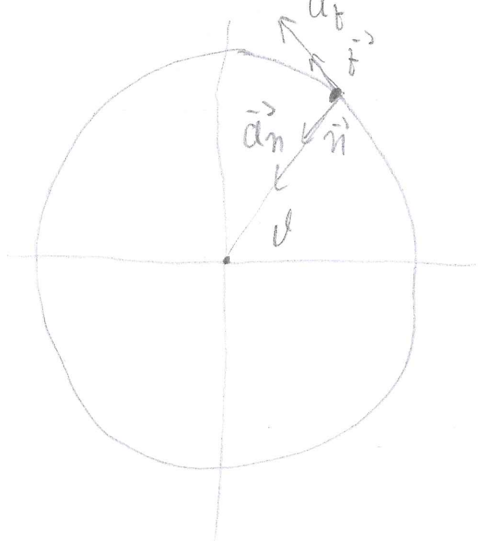
$$|\vec{v}| = R\dot{\vartheta}$$

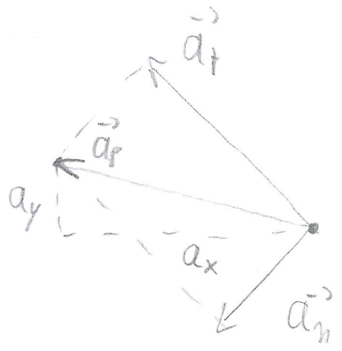
accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{j} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} =$$

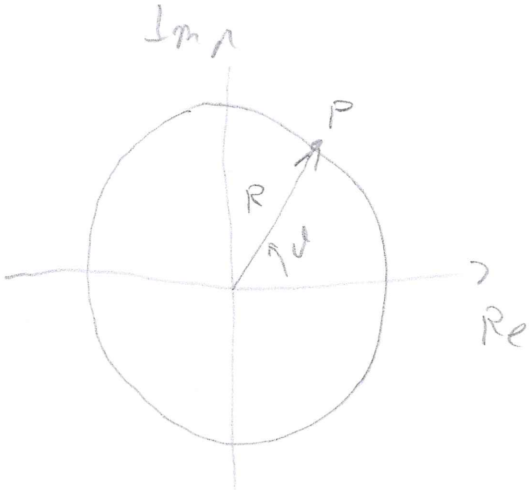
$$= \left(-R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - R\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta}\right)\vec{i} + \left(-R\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + R\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta}\right)\vec{j} = a_x\,\vec{i} + a_y$$

$$\vec{a} = R\ddot{\vartheta}\underbrace{\left(-\sin\vartheta\,\vec{i} + \cos\vartheta\,\vec{j}\right)}_{\vec{t}} \underbrace{- R\dot{\vartheta}^2\left(R\cos\vartheta\,\vec{i} + R\sin\vartheta\,\vec{j}\right)}_{R\dot{\vartheta}^2\vec{n}}$$





approccio con i numeri complessi



$$(P-O) = R e^{i\vartheta} \qquad R = \text{cost} \qquad \vartheta = \text{variabile}$$

$$\begin{cases} x = R_e(\vec{P}) = R\cos\vartheta \\ y = I_m(\vec{P}) = R\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = iRe^{i\vartheta}\dot{\vartheta} = R\dot{\vartheta}e^{i(\vartheta+\frac{\pi}{2})} \qquad [\perp (P-O)]$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} \\ \dot{y} = R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -Re^{i\vartheta}\dot{\vartheta}^2 + iRe^{i\vartheta}\ddot{\vartheta} = \underbrace{R\dot{\vartheta}^2 e^{i(\vartheta+\pi)}}_{\vec{a}_n} + \underbrace{R\ddot{\vartheta}e^{i(\vartheta+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{a}_t}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - R\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta} \\ \ddot{y} = -R\,\cancel{\sin}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + R\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} \end{cases}$$