

23/03/2020

E1) Dato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 6x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

1) AS/s/? Discutere la stabilità del sistema

2) $\begin{matrix} \text{ponendo } x(0) \text{ e } u(t) \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(t) = \sin(2t) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(t) = \sin(2t) \end{matrix}} \right\} \xrightarrow{\text{quanto vale } x(t)} m(t) \quad t \geq 0 \quad ?$

1)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Senza fare conti aggiuntivi ci accorgiamo che la traccia è positiva e quindi il sistema instabile.

$$\text{tr}(A) > 0 \Rightarrow \text{system}$$

Analizziamo ora il punto movimento del sistema. Useremo più di un metodo.

Primo metodo:

2) Calcolab $x_L(t)$ tramite e^{At} e poi $x_F(t)$ con b TDL
 movimento libero movimento forzato trasformata di Laplace

• Autovalori di A

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix} = 0$$

$$(s+2)(s-5) + 12 = 0$$

$$s^2 - 3s + 2 = 0 \Rightarrow s = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ s_2 = 2 \end{array}$$

2 vizioni \Rightarrow 2 aut. con $\text{Re} > 0$

$$s_1 + s_2 = \text{tr}(A)$$

La somma degli autovalori è la traccia di A

↑

(le note in rosso del professore sono osservazioni aggiuntive, non importanti per la soluzione dell'esercizio)

• Auto vettori

Chiamiamo l'autovettore z per abitudine, potete chiamarlo come volete

$S_1 = 1$: $A z = S_1 z$ Per autovettore si intende quel vettore che moltiplicato per la matrice o per l'autovalore da lo stesso risultato. Ci sono altri modi per ricavare gli autovettori.

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2z_1 + 6z_2 = z_1 \\ -2z_1 + 5z_2 = z_2 \end{cases} \Rightarrow 6z_2 = 3z_1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2z_2 \\ \checkmark z_2 \end{cases}$$

Scegliamo quindi un autovettore qualunque:

Scego $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Una volta risolta la prima equazione, la seconda è inutile, il sistema deve essere singolare.

test. nella 2^a eq.

$$-4z_2 + 5z_2 = z_2$$

ok hit \checkmark

$$S_2 = 2 : \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2z_1 + 6z_2 = 2z_1 \\ -2z_1 + 5z_2 = 2z_2 \end{cases} \Rightarrow 6z_2 = 4z_1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{3}{2}z_2 \\ \forall z_2 \end{cases}$$

Stesso discorso di prima

Scegliamo un autovettore qualunque

$$\text{Scego } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

• Matrice diagonalizzante

accostiamo in una matrice gli autovettori (ricordando l'ordine che abbiamo usato)!

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

autovettori s_1 e s_2
(da ricordare l'ordine!)

$$\Rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

s_1 s_2

(stesso ordine della matrice T)

in rosso: informazioni aggiuntive che ci ricordano di fare attenzione all'ordine degli autovettori e autovalori: l'ordine in cui si mettono gli autovettori nella matrice diagonalizzante, è l'ordine con cui compaiono sulla matrice diagonalizzata gli autovalori.

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice dei complementi algebrici: per una

matrice 2x2 (solo e soltanto 2x2)

è calcolabile scambiando di posto i termini nella diagonale principale e invertendo i segni dei termini nella diagonale secondaria.

$$\bullet e^{At} = e^{T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} T^{-1} t} = T e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} T^{-1}$$

Matrice
diagonalizzata

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t & 3e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^t - 3e^{2t} & -6e^t + 6e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

• ΠL di x

$$x_L(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} \bullet & / \\ \bullet & / \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

movimento libero
di x

$$= \begin{bmatrix} 4e^t - 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

Matrice lunga
di prima

$\leftarrow x_{L1}(t)$

$\leftarrow x_{L2}(t)$

• Calcolo $x_F(t)$ tramite TDL

$$\dot{x}_F = A x_F + b u \Rightarrow s X_F = A X_F + b U$$

movimento forzato
di x

~~$x(0)$~~

(non c'è $x(0)$, perchè vale 0 nella componente
del movimento forzato, nei dati dell'esercizio $x(0)$ era una
matrice colonna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$)

$$(sI - A) X_F = b U$$

$$X_F = (sI - A)^{-1} b U = \underbrace{\begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)}$$

$$X_F = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-5 & 6 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} s-5 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-5}{s(s-1)(s-2)} \\ \frac{-2}{s(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow X_{F1}(s)$$

Prima componente della trasformata di Laplace del movimento forzato

$$\leftarrow X_{F2}(s)$$

Secondo componente della trasformata di Laplace del movimento forzato

Antitoxin Formo con tetracide

voglio trasformare questo in

$$X_{F1}(s) = \frac{s-5}{s(s-1)(s-2)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s-1} + \frac{\gamma}{s-2}$$

....questo

denominatore comune e eguaglio i numeratori:

Eguagliando num: $\alpha(s-1)(s-2) + \beta s(s-2) + \gamma s(s-1) = s-5$

prima radice del denominatore $s=0 \Rightarrow 2\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -5/2$

seconda radice del denominatore $s = 1 \Rightarrow -\beta = -4 \Rightarrow \beta = 4$

terza radice del denominatore $s = 2 \Rightarrow 2\gamma = -3 \Rightarrow \gamma = -3/2$

Quindi

sostituisco i valori di alfa beta e gamma:

$$X_{F1}(s) = \frac{-5/2}{s} + \frac{4}{s-1} - \frac{3/2}{s-2}$$

Antitrasformo con le trasformate notevoli:

$$x_{F1}(t) = \left(-\frac{5}{2} + 4e^t - \frac{3}{2}e^{2t} \right) \cos(t)$$

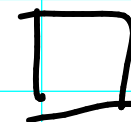
Bisogna ora rifare l'antitrasformazione secondo Heaviside anche per la seconda componente, da fare a casa...

$$X_{F2}(s) = \dots$$

$$x_{F2}(t) = \dots$$

Quindi il movimento finale è la somma del vettore movimento libero e del vettore movimento forzato:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$



Fine primo metodo.

OPPURE

Secondo metodo (per risolvere il secondo punto dell'esercizio):

→ ^{calcolo} solo tutto con la TDL

Partendo da:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bu \\ x(0) \\ u(t) \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

arriviamo a scrivere che:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s)$$

(diversamente da prima, in cui stavamo calcolando solo il movimento forzato, in questo caso teniamo $x(0)$, perchè siamo in una formula che non è legata solo al movimento forzato)

da cui ricaviamo che

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} b U(s)$$

sostituiamo i valori che abbiamo già calcolato prima e facciamo i conti

$$X(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a(0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)}$$

raccogliamo:

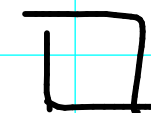
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1+1/s \\ 0 \end{bmatrix}}_{a(0)+b U(s)}$$

(conti da fare a casa)

$$= \bullet - \bullet =$$

Movimento complessivo:

$$\left[\frac{(s-5)(s+1)}{s(s-1)(s-2)} - \frac{2(s+1)}{s(s-1)(s-2)} \right] \dots$$



Questo secondo metodo che abbiamo usato è molto più diretto e comodo, per esempio non ci fa passare per l'esponenziale di matrice

E2

Dati:

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Domanda:

$As/s/1$?

Per prima cosa ci accorgiamo che ci sono due autovalori con parte reale nulla, quindi sicuramente non si tratta di un sistema asintoticamente stabile. Può essere instabile o semplicemente stabile. La strategia da seguire è quella di calcolare il movimento libero, se scopriamo che il movimento libero rimane sempre limitato, il sistema è semplicemente stabile, se scopriamo che il movimento libero diverge, il sistema è instabile.

Calcolo ^{movimento libero di x} $x_L(t)$ per $x(0)$ generico

A non è utilizzabile ^{e quindi siamo costretti a usare la} $\Rightarrow TDL$

$$X_L(s) = (sI - A)^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

lasciamo $x(0)$ indicato con lettere, perchè ci stiamo riferendo a un generico $x(0)$

$$= \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} x_{01} + \frac{1}{s^2} x_{02} \\ \frac{1}{s} x_{02} \end{bmatrix}$$

Antitrasformate notevoli:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = \cos(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \sin(t) = t \cos(t)$$

Quindi antitrasformiamo:

$$\Rightarrow x_L(t) = \begin{bmatrix} (x_{01} + x_{02} t) \cos(t) \\ x_{02} \sin(t) \end{bmatrix}$$

Se $x_{02} \neq 0$ $x_L(t)$ diverge \Rightarrow sistema instabile

E3]

Dati:

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo esercizio A non è diagonalizzabile, quindi usiamo la trasformata di Laplace

Domanda:

$$As/s/1?$$

Calcolo x_L : movimento libero

nel dominio delle trasformate:

$$X_L(s) = (sI - A)^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} x_{01} \\ \frac{1}{s} x_{02} \end{bmatrix}$$

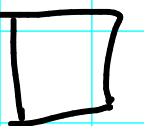
Antitrasformo:

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_{01} s_2(t) \\ x_{02} s_2(t) \end{bmatrix}$$

limitato $\forall x(0)$

\Rightarrow sistema S

La strategia da seguire è quella di calcolare il movimento libero, se scopriamo che il movimento libero rimane sempre limitato, il sistema è semplicemente stabile, se scopriamo che il movimento libero diverge, il sistema è instabile.



E4

Dato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + u \\ y = 2x_2 \end{cases}$$

(funzione di trasferimento)

FdT $G(s)$?

Schemi e blocchi?

Non li abbiamo ancora visti a lezione, ma li introduciamo in maniera informale facendo un esempio.

$$\begin{aligned} G(s) &= C (sI - A)^{-1} b + d = [0 \ 2] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \\ &\approx \frac{1}{(s+1)(s+3)} [0 \ 2] \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} [0 \ 2(s+1)] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2 \cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+3)} = \frac{2}{s+3} \end{aligned}$$

cancellazione polo/zero

(ne abbiamo parlato anche nelle lezioni di teoria. Questa cancellazione fa in modo che nella funzione di trasferimento ci sia un'informazione incompleta: vedendo il denominatore di primo grado si potrebbe pensare che l'ordine del sistema sia 1, ma in realtà è 2! Diremo che c'è una parte nascosta)

Facciamo ora lo schema a blocchi:

Trasformiamo il sistema secondo Laplace, considerando solo i movimenti forzati e la funzione di trasferimento:

Dal sist. scrivere
(TF, considerando FdI)

$$\begin{cases} sX_1 = -X_1 + U \\ sX_2 = -3X_2 + U \\ Y = 2X_2 \end{cases}$$

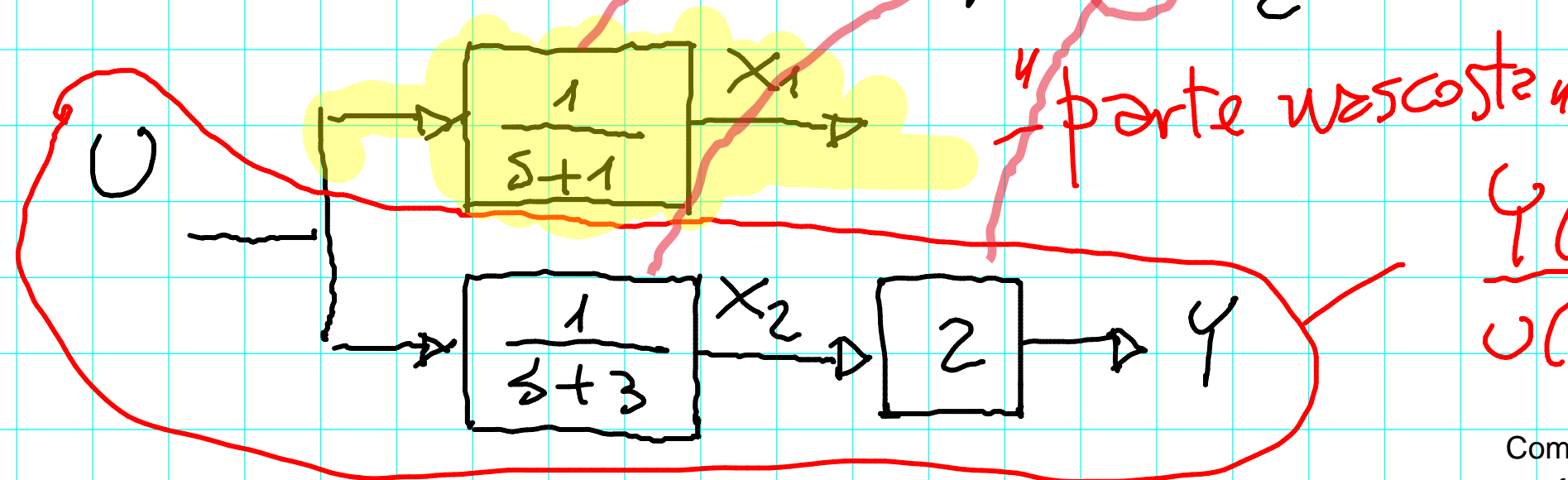
passaggi...

passaggi...

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)X_1 = U \\ (s+3)X_2 = U \\ Y = 2X_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{1}{s+1} U \\ X_2 = \frac{1}{s+3} U \\ Y = 2X_2 \end{cases}$$

Una volta ricondotto il sistema in questa forma, è facile costruire lo schema a blocchi.



"parte nascosta"

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+3} = G(s)$$

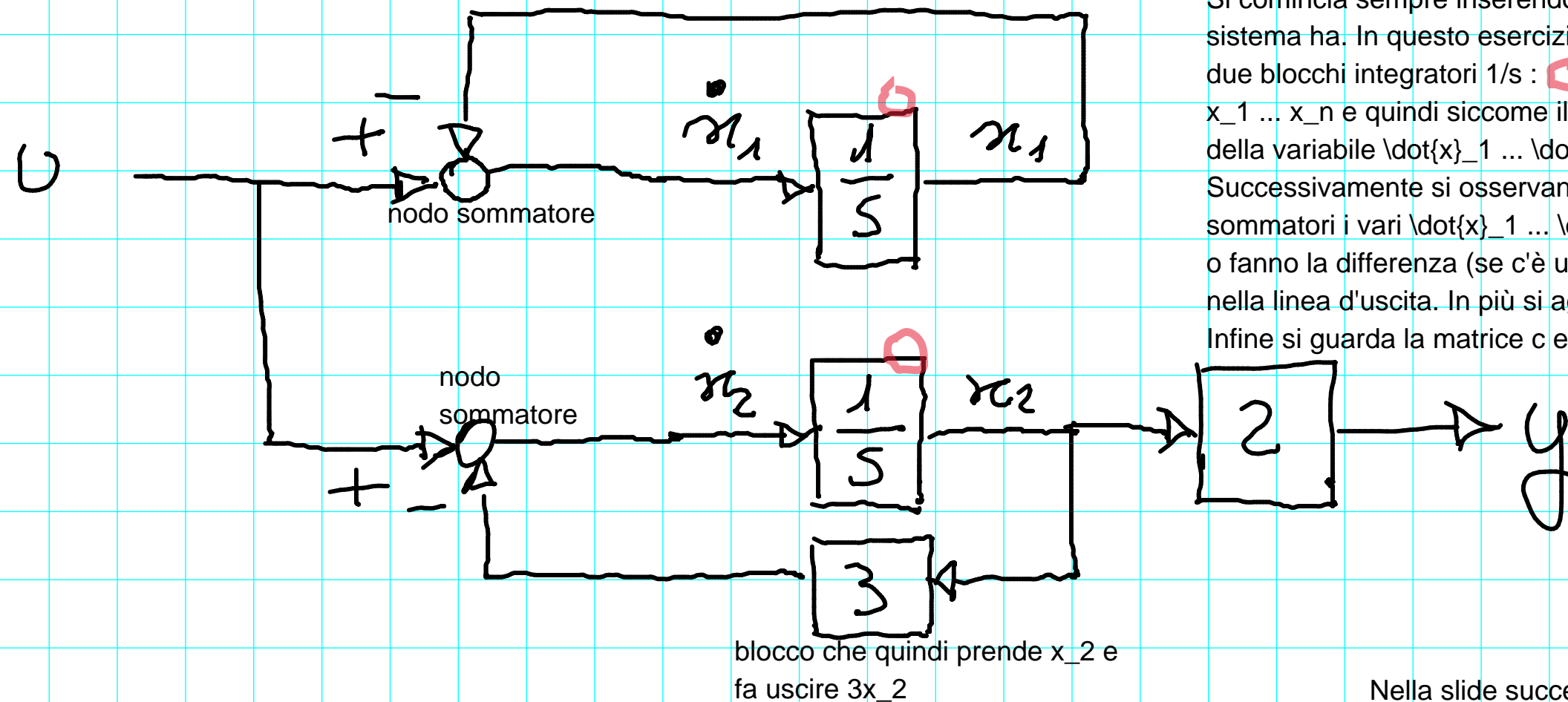
Come abbiamo detto nella slide precedente, la funzione di trasferimento non vede l'intero sistema.

Altro modo di vedere il sistema:

Riconosciamo che se $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ allora $Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$

Quindi $\frac{1}{s}$ è la FAT del sistema "integratore" che si chiama integratore

Cioè se un sistema dinamico fa l'integrale dell'ingresso, lo chiamo integratore e la sua funzione di trasferimento è $1/s$



Si comincia sempre inserendo n integratori in base al numero n di variabili che il sistema ha. In questo esercizio il sistema ha due variabili di stato, quindi metto due blocchi integratori $1/s$. Le uscite di questi blocchi sono i vari segnali $x_1 \dots x_n$ e quindi siccome il blocco integra, il suo ingresso sarà la derivata della variabile $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_n$.

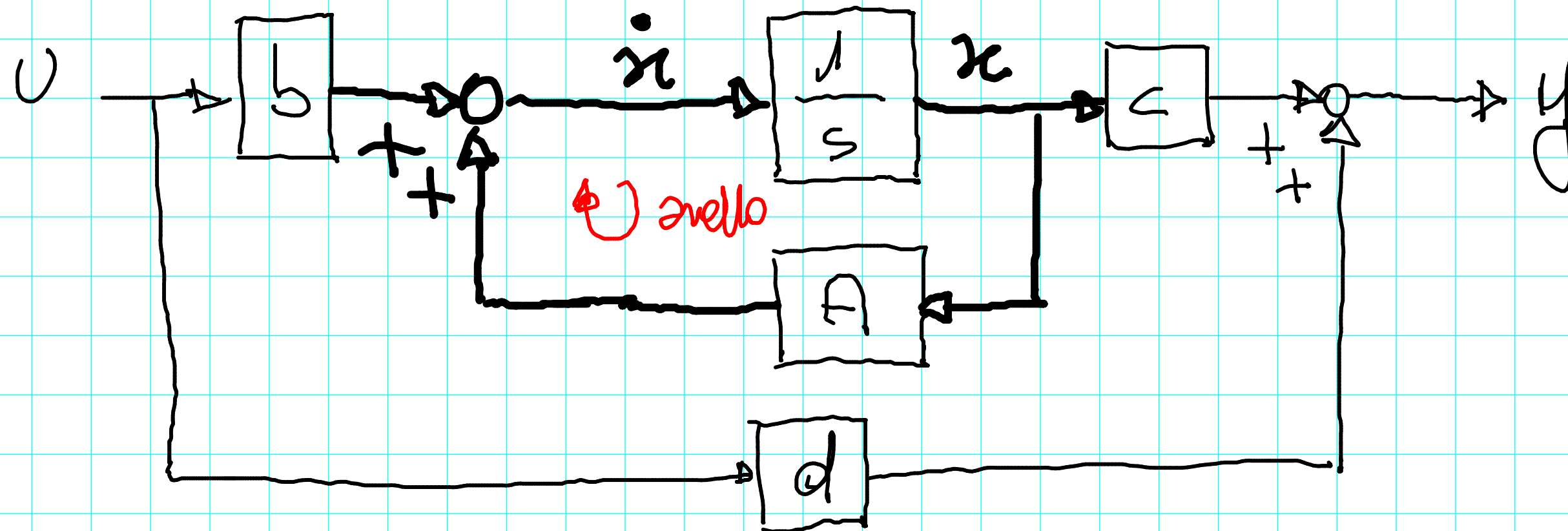
Successivamente si osservano le matrici A e b e si compongono con dei nodi sommatori i vari $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_n$. I nodi sommatori sommano (se c'è un $+$) o fanno la differenza (se c'è un $-$) le linee in entrata e trasmettono il risultato nella linea d'uscita. In più si aggiunge u dove serve.

Infine si guarda la matrice c e d e si compone l'uscita y

Nella slide successiva è mostrato il caso generale

In generale

Schema di dove vanno, in maniera generica, le varie matrici nello schema a blocchi con l'integratore.
Questo schema va ripetuto per tutti le $n \times x$ che ci sono nel sistema

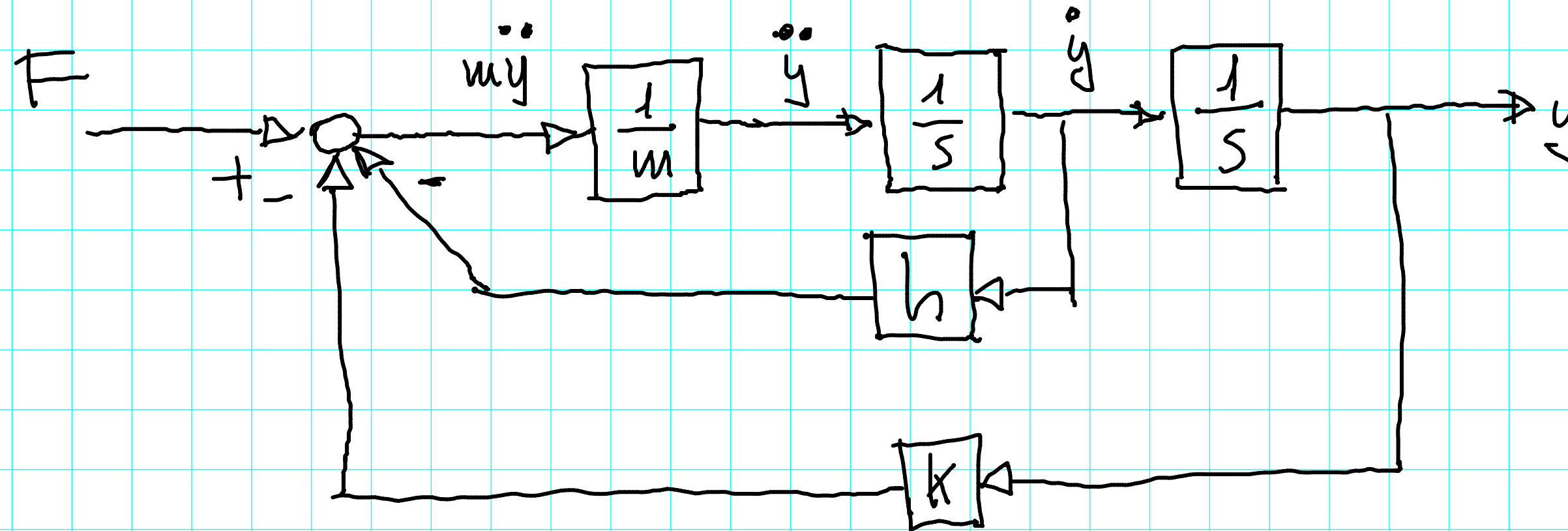


$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$

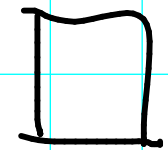
E5

Massa-molla

$$m \ddot{y} = F - ky - h \dot{y}$$



Questo esempio mostra bene che gli schemi a blocchi non sono schemi di flusso, non c'è un tempo con cui le cose si elaborano, avviene tutto contemporaneamente!



E 6

Questo esercizio è per mostrarci cosa succede se gli autovalori sono numeri complessi

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

trovare il movimento libero

$$x_L(t) \quad t \geq 0?$$

Informazione aggiuntiva

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Data una matrice in questa forma

$$\Rightarrow \det(sI - A)$$

i suoi autovalori

$$= (s - \alpha)^2 + \beta^2$$

hanno questa forma

$$\text{radici} \quad \alpha \pm i\beta$$

Quindi le radici sono complesse!

• Autovalori di A: $1 \mp j2$

• Autovettori

$$S_1 = 1 - j2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = (1 - j2) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{1} - 2z_2 = \cancel{1} - 2jz_1 \Rightarrow z_2 = jz_1$$

(la seconda eq è inutile) $\forall z_1$

scelgo un valore qualsiasi

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$S_2 = 1 + j2$$

calcoli che mancano...

risultato:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

(saltiamo i conti)

bla bla bla

• • •

- Matrice diagonalizzante

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (\text{ricordarsi l'ordine degli autovettori!!})$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-2j} \begin{bmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix}$$

(solito trucchetto delle matrici 2x2)

esponenziale di matrice:

$$e^{At} = e^{T \begin{bmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix} T^{-1} t} = T e^{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} t} T^{-1}$$

(ordine degli autovettori di prima!!)

stessa matrice

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1-2j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+2j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(1-2j)t} & e^{(1+2j)t} \\ j e^{(1-2j)t} & -j e^{(1+2j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(1-2j)t} + e^{(1+2j)t} & -j e^{(1-2j)t} + j e^{(1+2j)t} \\ j e^{(1-2j)t} - j e^{(1+2j)t} & e^{(1-2j)t} + e^{(1+2j)t} \end{bmatrix}$$

• ML di x

$$x_2(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1-2i)t} + e^{(1+2i)t} \\ -j e^{(1-2i)t} - j e^{(1+2i)t} \end{bmatrix}$$

la matrice di prima

primo componente
secondo componente

primo componente

$$x_{L1}(t) = e^t \left(\cos(2t) - j \sin(2t) \right) + e^t \left(\cos(2t) + j \sin(2t) \right)$$

Li trasformiamo in forma trigonometrica

$$= 2 e^t \cos(2t)$$

secondo componente

$$x_{L2}(t) = \dots = 2 e^t \sin(2t)$$

In questo conto finale devono sempre sparire tutte le j immaginarie, perchè il movimento libero è un numero vero e che si applica al mondo reale.
Se non rimane un valore immaginario abbiamo sbagliato i calcoli !!

