ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

21 ottobre 2019

[mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019;
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1);
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3);
- manca la lezione di giovedì 17/10/19 (LECTURE 5);

4-ESERCITAZIONE

21/10/19

esercitazione sostitutiva

es. Dimostrare che:

$$n^{\frac{n}{2}} < n! \quad per \quad n \to +\infty$$

$$n! = n \cdot (n-1) \dots (\frac{n}{2}) \dots 1 > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2})!$$

Quindi dopo questa trasformazione mi basta dimostrare:

$$(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2})! > n^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot (\frac{n}{2})! > n^{\frac{n}{2}}$$

$$(\frac{n}{2})! > 2^{\frac{n}{2}}$$

se poniamo $x = \frac{n}{2}$

$$x! > 2^x$$

che è vero e quindi dimostrato.

es. Svolgere il seguente limite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

Ci sono diversi modi per fattorizzare il numeratore:

- Ruffini
- con un cambio di variabile

Proviamo con il cambio di variabile $y = x - 3$

$$\lim_{y \to 0} \frac{(y+3)^2 - 5(y+3)^2 + 3(y+3) + 9}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3 + 4y^2}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2(y+4)}{y} = 0$$

Proviamo con Ruffini:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x-3)(x+1) = 0$$

es. Svolgere il seguente limite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sin(x)}{x - \pi} = \frac{0}{0}$$

Noi sappiamo che $\lim_{x \to 0} sin(x) \sim x$, ma se guardiamo il grafico della funzione seno, notiamo che nell'intorno di π comunque ci avviciniamo a zero in modo estremamente simile.
Lavoriamo ora con un cambio variabile $y = x - \pi$

$$\lim_{y \to 0} \frac{sin(x + \pi)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-sin(y)}{y} = \lim_{y \to 0} -\frac{y + o(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y(-1 + o(1))}{y} = -1$$

es. Svolgere i seguenti due limiti:

$$a) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}}$$

$$b) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}}$$

vediamo a):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{|x|}{2} = \begin{cases}\lim_{x\to 0^+} & \frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 0^-} & -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Il limite non esiste.
vediamo b):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2}\cdot\frac{1}{|x} = \frac{1}{2}$$

Il limite esiste.

Ordini di infinitesimo

def. $x \to x_0 \land f(x) \to 0 \qquad f$ è **infinitesimo** nell'intonro di x_n.

def. infinitesimo campione di ordine k:
con x_0 finito: $i_k(x) = |x - x_0|^k$ con $k > 0$ si dice infinitesimo campione di ordine k per $x \to x_0$
con x_0 infinito: $i_k(x) = \frac{1}{|x|^k}$ con $k > 0$ si dice infinitesimo campione di ordine k per $x \to x_0$

def. dico f infinitesimo di ordine k se:

$$per \quad x \to x_0 \quad \frac{f(x)}{i_k(x)} \longrightarrow c \qquad con \;\; c \neq 0 \;\; e \;\; finito$$

es. trovere l'ordine dei seguenti infinitesimi:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3}$$

Questa funzione per $x \to 3$ tende a 0, ma con che ordine?

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+1)}{x-3}\cdot\frac{1}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^{k+1}} \to 4$$

$$2 = k + 1 \to k = 1$$

$$f(x) = 4(x-3) + o(x-3)$$

Ordini di infinito

def. $x \to x_0$ e $f(x) \to \infty$, f è **infinito** per $x \to x_0$

def. infinito campione
per x_0 finito: $i_k(x) = \frac{1}{|x-x_0|^k}$ con $k > 0$ si dice infinito campione di k-esimo ordine
per x_0 infinito: $i_k(x) = |x|^k$ coon $k > 0$ si dice infinito campione di k-esimo ordine.

def. dico f infinito campione di ordine k seguente

$$per \quad x \to x_0 \quad \frac{f(x)}{i_k(x)} \to c \qquad c \neq 0 \;\; e \;\; finito$$

es. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-1}-x$$

$$\mathbb{D}(f) : (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$$

Vediamo questa funione per $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x^k} =$$

Facendo uscire l'x^2 dalla radice mi esce $|x|$, ma andando a $\to -\infty$ posso sostituire il modulo con un "$-$":

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x((1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}+1)}{x^k} = c$$

Che è vera per $k = 1$
vediamo la funzione per $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x[(1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}+1] = \lim_{x\to+\infty} x\cdot[-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x}) = 0^-$$

Ho quindi trovato che $lim\frac{f(x)}{\frac{1}{2}} = lim\frac{-\frac{1}{2}+o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$, che è un numero finito, quind $k = 1$, cioè infinito di ordine 1.

es. calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to1} \frac{(log(x))^2}{(2x-2)^2} = \frac{0}{0}$$

Noi sappiamo che $log(1+z) = z + o(z)$ per $z \to 0$, quindi trasformiamo il limite così:

$$\lim_{x\to1} \frac{[log(1+(x-1))]^2}{[2(x-1)]^2} = \lim_{x\to1} \frac{[(x-1)+o(x-1)]^2}{4(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2[1+o(1)]}{4(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{1+o(1)}{4} = \frac{1}{4}$$

Abbiamo trovato che:

$$per \quad x\to1 \quad log^2(x) = (x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

quindi $k = 2$, quindi abbiamo un ordine di infinitesimo di 2.

es. calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot log(\frac{x+4}{x-1}) = [0\cdot\infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot log(\frac{x-1+5+1}{x-1}) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot log(1+\frac{1}{x-1}) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot[\frac{6}{x-1}+o(\frac{1}{x-1})] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x}[\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+o(1)] = 6$$

Si vede che $log(\frac{x+5}{x-1}) \to 0$ è infinitesima per $x\to+\infty$,
ord. inf:

$$\frac{f(x)}{i_k(x)} = \frac{log(\frac{x+5}{x-1})}{\frac{1}{x^k}} = x^k\cdot log(\frac{x+5}{x-1}) \to 6(\neq 0) \quad se \quad k = 1$$

quindi è di ordine 1.

es. calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{log(log(x))}{log(x)-4} = \frac{\infty}{\infty}$$

Facciamo un cambio variabile $y = log(x)$

$$\lim_{y\to+infty} \frac{log(y)}{y-4} \to 0$$

Cerchiamo ora l'ordine di infinitesimo:

$$\frac{f(x)}{i_k(x)} = \frac{log(log(x)) \cdot x^k}{log(x) - 4} = \to y = log(x) \to = \frac{log(y)}{y-4} \cdot e^{ky} \quad , \quad per \;\; x \to +\infty : \qquad \begin{cases} +\infty & k > 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Poichè il valore o è infinito o zero, non esiste nessun ordine di infinitesimo.

es. studio locale di

$$f(x) = \frac{log(x)}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Tracciamo un grafico seguendo questo processo:

- dominio, zeri e segno
- negli zeri e alla frontiera del dominio cerco sviluppi asintotici

Dominio:

$$\mathbb{D}(f) = \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

Segno:
è sempre positiva.
Zeri:
non ci sono zeri.
Frontiere del dominio:

- se $x \to 1$: $f = \frac{0}{0} = \frac{log(1+(x-1))}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = (x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot [1 + o(1)] \sim (x-1)^{\frac{2}{3}} \to 0$, quindi è una fuznione infinitesima di ordine $k = \frac{2}{3}$, cioè nell'intonro di 1 si comporta come $x^{\frac{2}{3}}$ (cuspide)
- se $x \to 0^+$: $f \sim -log(x) \to +\infty$, di cui, però, non si trova un ordine di infinito, è semplicemente un infinito logaritmico.
- se $x \to +\infty$: $f = \frac{\infty}{\infty} = \frac{log(x)}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}} \to 0^+$