06/04/2020

E4) Dato il SD LTI a TD SISO

$$\begin{cases} x(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(k-1) + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + u(k) \end{cases}$$

1) è SP? (strettamente proprio)

2) è AS/S/I?

3) primi 3 valori di y per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(k) = \cos(k) + 3\sin(k)$

$k = 0, 1, 2$

i primi tre valori di y sono dati per k = 0,1,2

1) No perché u compare nell'eq. d'uscita

2) Autovalori di A:

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s+1 & -0.5 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + 2s = 0 \qquad s = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

Autovalore con $\underbrace{\text{MODULO} > 1}_{\text{SIAMO A TD!!!}}$ $\Rightarrow$ sistema I

Si guarda il modulo, non la parte reale !!!

3) $v(k) = sca(k) + 3\,ram(k)$

k	0	1	2
$sca(k)$	1	1	1
$ram(k)$	0	1	2
$3\,ram(k)$	0	3	6
$v(k)$	1	4	7

$k=0)$ $\quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \overset{u(0)}{\downarrow}\,1 = 3$$

$k=1)$

$$x(1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x(0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} \underbrace{1}_{u(0)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 = 6$$

$k=2)$ ... (da fare a casa... sono solo conti)

$\square$

E5) Dato

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1) SP?
2) AS/S/I?
3) FdT?
4) Ragg? Oss?
5) $y(t)$ per $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 5\cos(t)$

---

1) Sì perché $d = 0$
2) AS: A triangolare inf, autovalori -1 e -2, entrambi con $\mathrm{Re} < 0$

3) $G(s) = c\,(sI - A)^{-1} b + d$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{//} \begin{bmatrix} 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

4) È R&O perché nel calcolo di $G(s)$ non vi sono state cancellazioni

5) ML con e^{At} e MF con $G(s)$

- Autovalori di A: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$
- Autovettori

s_1)

$$A z = -z$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -z_1 = -z_1 \\ z_1 - 2z_2 = -z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \forall z_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S_2)$ $\quad A z = -2 z$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$-z_1 = -2 z_1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ \forall\, z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- T. diagonalizzante

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

NB $T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\bullet \quad e^{At} = e^{T\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}T^{-1}t} = T\, e^{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}t}\, T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ e^{-t} & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

- ML di x e di y

$$x_L(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y_L(t) = C x_L(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = 4e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

equiv.

opp. $4e^{-2t}\,\mathrm{sca}(t)$

• TF di y

$$Y_F(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\;\frac{1}{s}$$

$u(t) = sca(t)$

Heaviside:

$$Y_F(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+1} + \frac{\gamma}{s+2}$$

$$\alpha(s+1)(s+2) + \beta s(s+2) + \gamma s(s+1) = 2$$

$s=0 \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$

$s=-1 \Rightarrow -\beta = 2 \Rightarrow \beta = -2$

$s=-2 \Rightarrow 2\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 1$

$$Y_F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y_F(t) = \operatorname{sca}(t) - 2e^{-t}\operatorname{sca}(t) + e^{-2t}\operatorname{sca}(t)$$

$$= \left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right)\operatorname{sca}(t)$$

Movimento complessivo:

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t) = 4e^{-2t}\operatorname{sca}(t) + \dots$$

$$= \left(1 - 2e^{-t} + 5e^{-2t}\right)\operatorname{sca}(t) \qquad \square$$

Alternativa: Faccio tutto con TDL e Heaviside

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$sX - x(0) = AX + bU$$

$$(sI - A)X = x(0) + bU$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}\left(x(0) + bU\right)$$

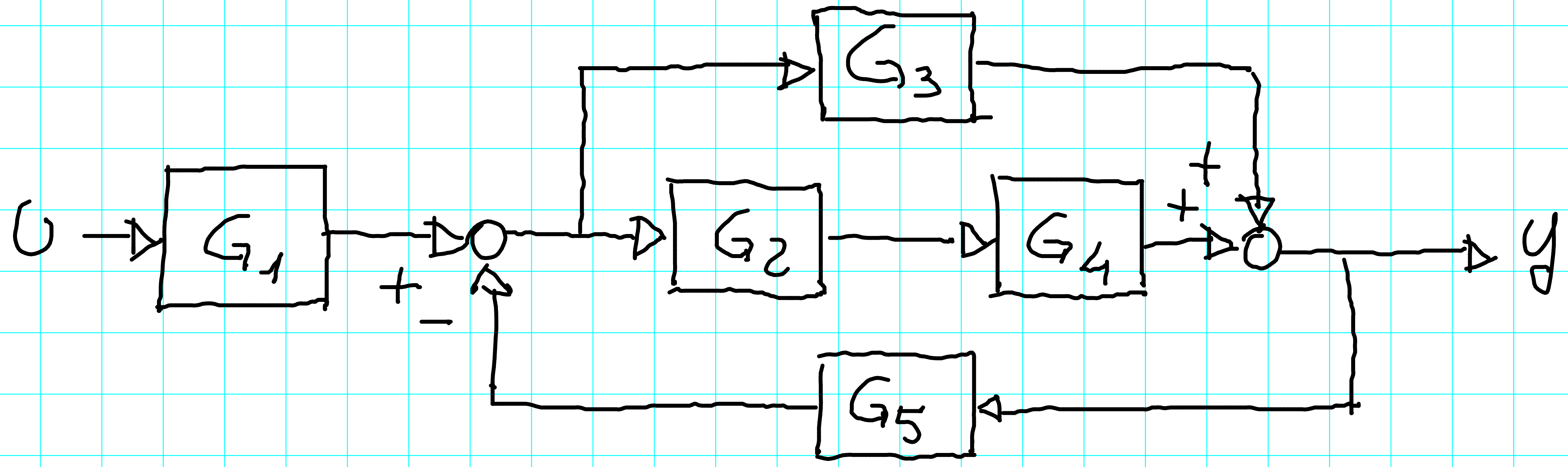
$$Y(s) = c(sI - A)^{-1}\left(x(0) + bU\right) + dU$$

$$= c(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)\,U(s)$$

$\Rightarrow$ Maxima

$\square$

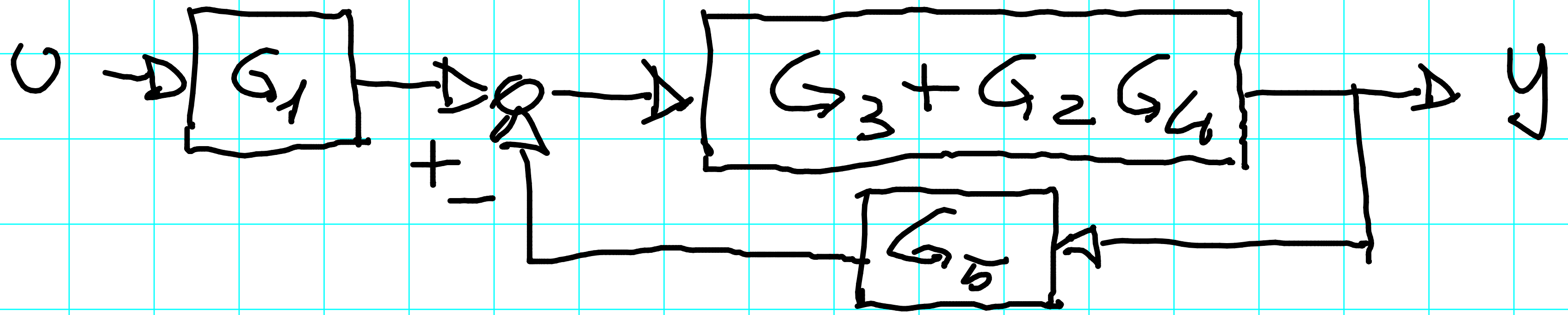
E 6) Dato lo schema a blocchi



1) Esprimere la FdT $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in funzione di $G_1(s) \dots G_5(s)$

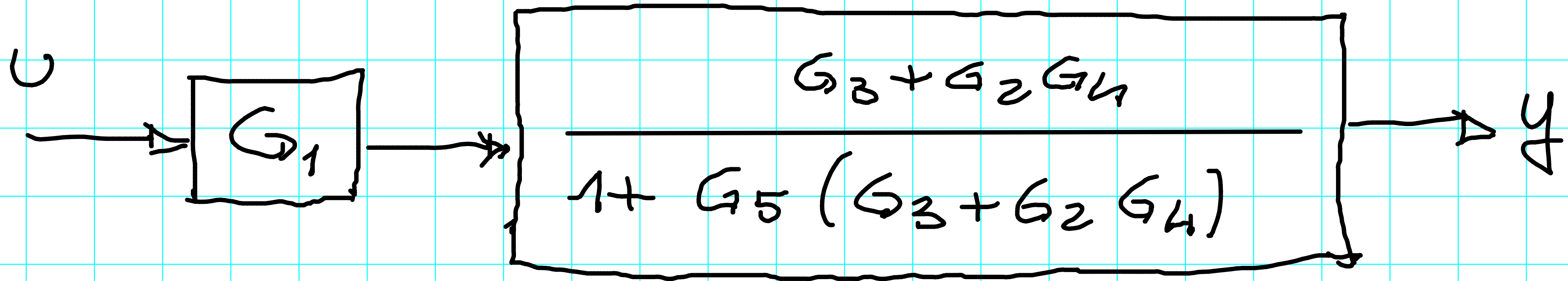
2) Dire se la stabilità (asintotica) di qualcuno dei blocchi $G_1 \dots G_5$ è necessaria e/o sufficiente per quella del sistema complessivo

1) • Serie di G_2 e G_4 in parallelo a G_3



• Anello di retroazione negativa

$G = \dfrac{\text{Andata}}{1 + \text{Anello}}$



• Serie con G_1

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 (G_3 + G_2 G_4)}{1 + G_5 (G_3 + G_2 G_4)}$$

2) È necessaria la stab. (as.) di G_1 in quanto il blocco non è parte di alcun anello

Verifico:

$G_i = \frac{N_i}{D_i}$ $\quad N_i, D_i$ polinomi

$$G(s) = \frac{\frac{N_1}{D_1}\left(\frac{N_3}{D_3} + \frac{N_2}{D_2}\frac{N_4}{D_4}\right)}{1 + \frac{N_5}{D_5}\left(\frac{N_3}{D_3} + \frac{N_2}{D_2}\frac{N_4}{D_4}\right)} = \frac{N_1}{D_1} \frac{\frac{N_3 D_2 D_4 + N_2 N_4 D_3}{D_2 D_3 D_4}}{1 + \frac{N_5(N_3 D_2 D_4 + N_2 N_4 D_3)}{D_5 D_2 D_3 D_4}}$$

$$= \frac{N_1 D_5 (N_3 D_2 D_4 + N_2 N_4 D_3)}{D_1 (D_2 D_3 D_4 D_5 + N_5 (N_3 D_2 D_4 + N_2 N_4 D_3))}$$

$\square$

E7

Dato il SD NL a TC SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 u \\ y = 2 x_1 x_2 \end{cases}$$

1) TI?
2) SP?
3) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per $u(t) = \bar{u} = 2$?
4) stab. equilibri?

---

1) Sì, il tempo non compare esplicitamente in f e g
2) Sì, g non dipende da u

3) Calcolo $\bar{x}$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 \bar{u} \\ 0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \bar{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 (1 + \bar{x}_1 \bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 \begin{cases} 0 \\ -1/\bar{u} \end{cases} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 / \bar{u} \end{cases}$$

Con $\bar{u} = 2$ vi sono i due stati di equilibrio

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_b = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

e in corrispondenza essendo $\bar{y} = 2 \bar{x}_1 \bar{x}_2$

$$\bar{y}_a = 0 \qquad \bar{y}_b = 1/4$$

4) Osservo la m. dinamica f_x del sist. linearizzato

$$f_x = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 u & 0 \\ 1 & -u \end{bmatrix}$$

eq. a: $x_1 = x_2 = 0 \quad u = 2 \Rightarrow f_x\Big|_{eq.a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{/} \end{bmatrix}$

Autovalore in 1 cioè con $Re > 0 \Rightarrow$ equilibrio I

eq. b: $x_1 = -1/2, \; x_2 = -1/4, \; u = 2$

$$f_x\Big|_{eq.b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Autovalori -1 e -2 ambedue con $Re < 0$

$\Rightarrow$ equilibrio AS $\square$

E8

DATO

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1) AS/S/I?
2) $G(s)$?
3) R? O?
4) Schema a blocchi equivalente

1) Autovalori di A

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix} = 0$$

$s^2 + s - 2 = 0 \Rightarrow$ 2° grado e 1 variazione segno coeff $\Rightarrow 1$

Autovalori: $s = \dfrac{-1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

2) $G(s) = c\,(sI - A)^{-1} b + d$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-10 & 9 \\ -12 & s+11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{''} \begin{bmatrix} -2s+8 & s-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{6s - 24 - 3s + 21}{''} = \frac{3\cancel{(s-1)}}{(s+2)\cancel{(s-1)}} = \frac{3}{s+2}$$

cancellazione $\Rightarrow$ non R&O

3) Raggiungibilità

$$M_R = [b \ \ Ab] = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{singolare} \Rightarrow NR$$

Osservabilità

$$M_O = [c' \ \ A'c'] = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{non sing.} \Rightarrow O$$

4) Schema a blocchi