30/03/2020

RISPOSTA ESPONENZIALE (SD LTI a TC, SISO)

Dato $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$

sottoposto all'ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$ $t \geq 0$ $\left(e^{\lambda t} \mathrm{sca}(t)\right)$

$\exists$ $x(0)$ tale che

$$\left.\begin{matrix} x(0) \\ u(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NUMERO}}}{\gamma}\, e^{\lambda t} \quad t \geq 0 \,?$$

In altri termini

$x(0) \to$ ML di y fatto da modi

$v(t) = e^{\lambda t} \to$ MF di y fatto da modi $+ \; \psi e^{\lambda t}$ $t \geq 0$

↳ domanda è:

$\exists \; x(0)$ tale che questi si elidano e resti solo questo?

Vediamo

1) Se voglio che $y(t) = Y e^{\lambda t}$

allora anche $x(t)$ dovrà avere la forma $X e^{\lambda t}$

perché $y(t) = c\,x(t) + d \underbrace{e^{\lambda t}}_{u(t)}$

qualunque cosa in $x(t)$ non del tipo $e^{\lambda t}$ si vedrebbe su y

2) Quindi $x(t) = x(0)\, e^{\lambda t}$

quello che cerco

e di conseguenza $\dot{x}(t) = \lambda\, x(0)\, e^{\lambda t}$

3) Sostituisco $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ appena espressi nell'eq. di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\underbrace{\lambda\, x(0)\, \cancel{e^{\lambda t}}}_{\dot{x}} = A\, \underbrace{x(0)\, \cancel{e^{\lambda t}}}_{x} + b\, \underbrace{\cancel{e^{\lambda t}}}_{u} \qquad (e^{\lambda t} \neq 0)$$

Ottengo quindi

$$(\lambda I - A)\, x(0) = b$$

quella che cerco

Quindi in generale con $u(t) = U e^{\lambda t}$

$\uparrow$ numero

Se λ non è autovalore di A

allora $\exists!\, x(0) = (\lambda I - A)^{-1} b U$

tale che $x(t) = (\lambda I - A)^{-1} b U e^{\lambda t}$

e $y(t) = c x(t) + d u(t)$

$= \left[c (\lambda I - A)^{-1} b + d \right] U e^{\lambda t}$

$= G(\lambda)\, u(t) \qquad t \geq 0$

Riassumendo (risp. esponenziale)

1) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ $\Rightarrow$ con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1} b U$

$u(t) = U e^{\lambda t}$ $t \geq 0$ si ottiene

$\lambda \notin \{\text{aut. di } A\}$ $y(t) = G(\lambda) u(t)$ $t \geq 0$

2) se $G(\lambda) = 0$ $\Rightarrow$ con lo stesso $x(0)$ $y(t) = 0$ $t \geq 0$
("proprietà bloccante" degli zeri)

3) Se INOLTRE il sistema è AS, allora

$\forall x(0)$ $y(t) \to G(\lambda) u(t)$ per $t \to \infty$

$\square$

RISPOSTA SINUSOIDALE (SD LTI a TC, SISO)

Dato
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

e $\quad u(t) = U \sin(\omega t) \qquad t \geq 0$

$\exists\, x(0)$ tale che $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi) \qquad t \geq 0$?

Per rispondere ricordiamo che

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il PSE

Quindi applichiamo 2 volte il risultato ottenuto per $u(t) = U e^{\lambda t}$ e combiniamo

Poniamo $u_1(t) = e^{j\omega t}$ $\Rightarrow u(t) = U \dfrac{u_1(t) - u_2(t)}{2j}$

$u_2(t) = e^{-j\omega t}$

u_1: se $j\omega$ non è autovalore di A

$\exists!\, x_1(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$y_1(t) = G(j\omega)\, e^{j\omega t}$

u_2: se $-j\omega$ non è autovalore di A

$\exists!\, x_2(0)$ tale che $y_2(t) = G(-j\omega)\, e^{-j\omega t}$

Ora combiniamo y_1 e y_2

$$u(t) = \frac{U}{2j}\left(u_1(t) - u_2(t)\right)$$

$$x(0) = \frac{U}{2j}\left(x_1(0) - x_2(0)\right)$$

$$\xRightarrow{\text{PSE}} \quad y(t) = \frac{U}{2j}\left(y_1(t) - y_2(t)\right)$$

Analizziamo $y(t)$

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(G(j\omega)\, e^{j\omega t} - G(-j\omega)\, e^{-j\omega t} \right)$$

Oss: $G(s)$ è razionale fratta

Quindi $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$ (coniugato)

Quindi se pongo $G(j\omega) = M e^{j\varphi}$

sarà $G(-j\omega) = M\, e^{-j\varphi}$

Allora

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(\underbrace{M e^{j\varphi}}_{G(j\omega)} e^{j\omega t} - \underbrace{M e^{-j\varphi}}_{G(-j\omega)} e^{-j\omega t}\right)$$

$$= MU \, \frac{e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}$$

$$= \underset{\underset{|G(j\omega)|}{\uparrow}}{M} \, U \sin(\omega t + \underset{\underset{\measuredangle G(j\omega)}{\nwarrow}}{\varphi})$$

Risultato (Teorema Fondamentale della risposta in Frequenza)

Dato il SD LTI a TC (SISO) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$

detta $G(s)$ la sua FdT

e considerato l'ingresso $u(t) = U \sin(\omega t) \quad t \geq 0$

1) Se $\mp j\omega$ non sono autovalori di A allora $\exists!\, x(0)$ tale che

$$y(t) = |G(j\omega)|\, U \sin(\omega t + \measuredangle G(j\omega)) \qquad t \geq 0$$

2) Se INOLTRE il sistema è AS allora $\forall\, x(0)$

$$y(t) \to |G(j\omega)|\, U \sin(\omega t + \measuredangle G(j\omega)) \quad \text{per } t \to \infty$$

$\square$

Definizione

data una FdT $G(s)$

la sua restrizione all'asse $\mathcal{J}^+$ cioè

$G(j\omega)$ $\qquad \omega \geq 0$

si dice RISPOSTA IN FREQUENZA (RF) di $G(s)$

$\square$

ES

$$G(s) = \frac{1}{1+0{,}1s} \qquad AS$$

$$u(t) = 5 \sin(20t)$$

$$y(t) \to ? \quad \text{per } t \to \infty$$

Sist. AS $\Rightarrow$ per il teo RF

$$y(t) \Rightarrow 5\,|G(j20)|\,\sin(20t + \measuredangle G(j20))$$

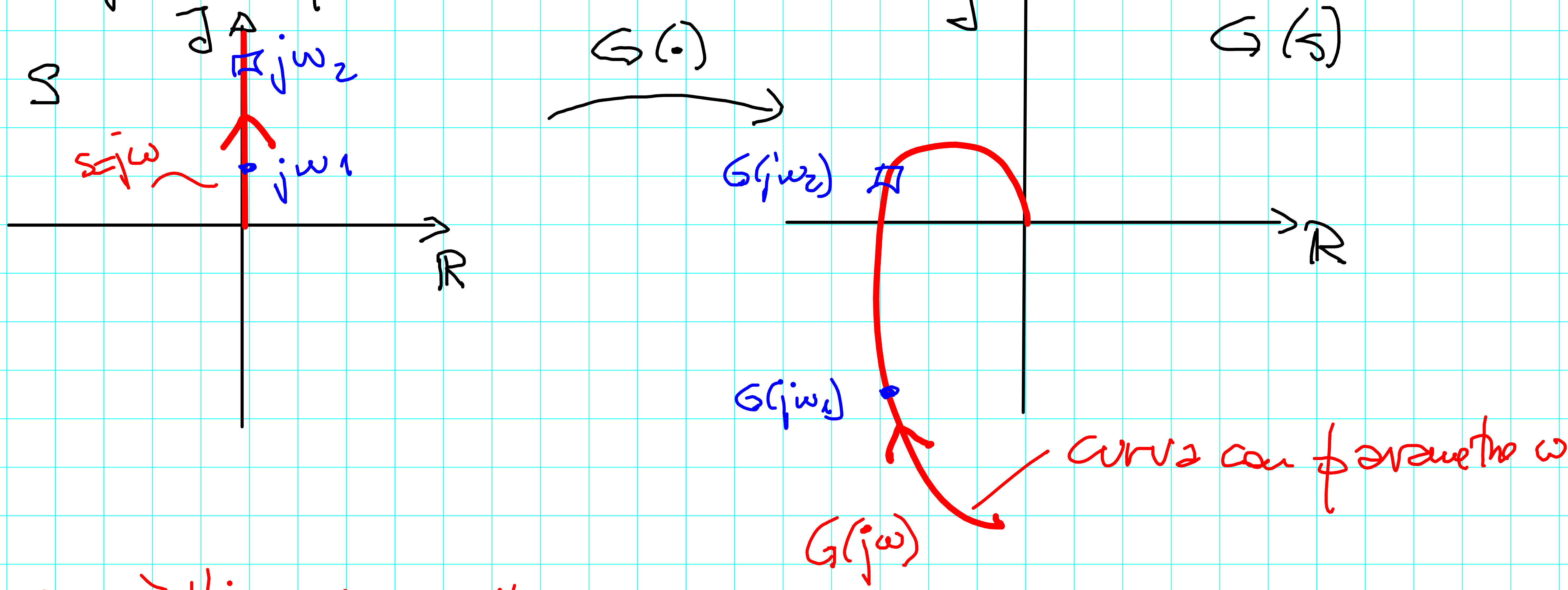
$$G(j20) = \frac{1}{1+2j} \Rightarrow \quad |G(j20)| = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \simeq 0{,}45$$

$$\measuredangle^{\circ} G(j20) = -\arctan^{\circ}(2) \simeq -63.5^{\circ}$$

$\square$

RAPPRESENTAZIONI della RF di una FdT $G(s)$

① Diagramma polare

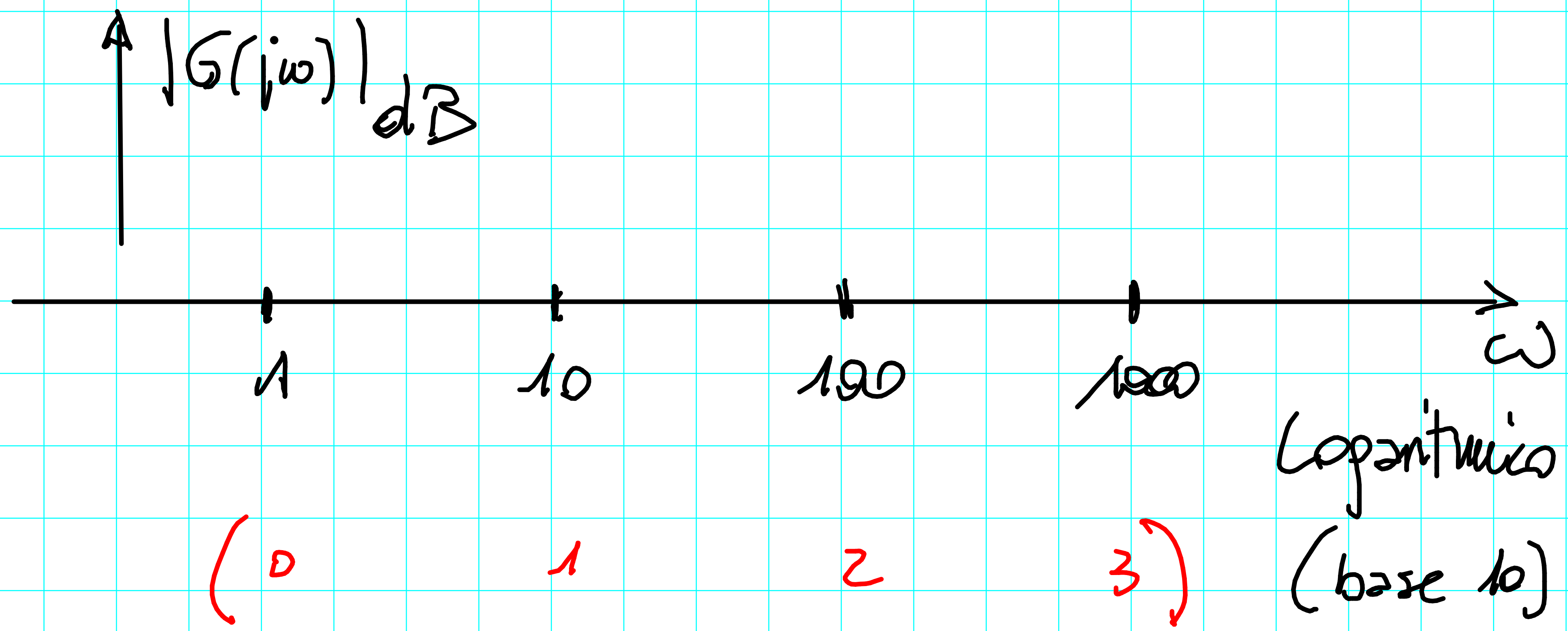


La RF è l'immagine attraverso $G(\cdot)$ del semiasse J^+

② Diagrammi cartesiani o di BODE

- D. di Bode del modulo (DBM)

0 è a $-\infty$



DEF

$$x\big|_{dB} := 20 \log_{10} |x|$$

ES:

$$100\big|_{dB} = 40$$

$$0{,}1\big|_{dB} = -20$$

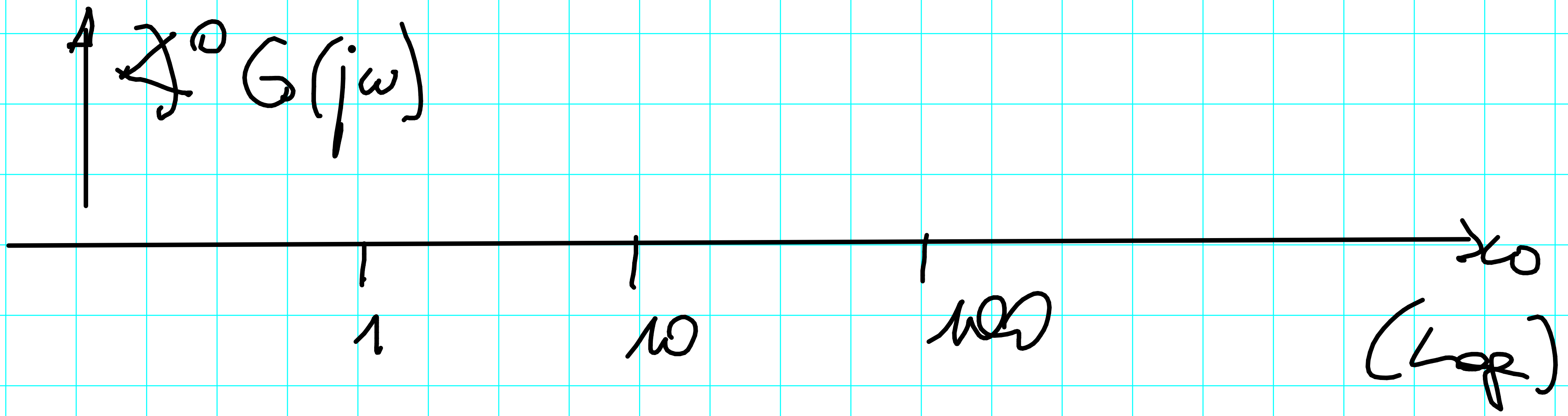
$$-0{,}1\big|_{dB} = -20$$

$$1\big|_{dB} = 0$$

$|x| > 1 \quad x_{dB} > 0$

$|x| < 1 \quad x_{dB} < 0$

• D. di Bode della Fase (DBF)



TRACCIAMENTO dei D. di Bode (asintotici)

Scriviamo la FdT $G(s)$ della cui RF vogliamo i d. di Bode nella forma

GUADAGNO della FdT

zeri reali non nell'origine

coppie di zeri c.c. con

$$G(s) = \frac{\mu}{s^{g}} \, \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots} \, \frac{\left(1+2\frac{\zeta}{\sigma_n}s+\frac{1}{\sigma_n^2}s^2\right)\cdots}{\left(1+2\frac{\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)\cdots}$$

poli (se pos)
o. zeri (se neg)
in $s=0$

TIPO della FdT

poli reali non nell'origine

coppie di poli c.c. con.

VA A 1 per $s \to 0$

T, τ : costanti di tempo di zeri e poli

ω, σ : freq. naturali

ζ, ξ : Fattori di smorzamento

ES)

$$G(s) = \frac{(s+2)(s^2-3s+2)}{s^3+4s^2+s}$$

per D. Bode

$$= \frac{2(1+s/2)(s-1)(s-2)}{s(s^2+4s+1)} = \frac{2(1+s/2)(-1)(1-s)(-2)(1-s/2)}{s\left(s-(-2-\sqrt{3})\right)\left(s-(-2+\sqrt{3})\right)}$$

μ

$$= \frac{2(-1)(-2)}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})} \cdot \frac{(1+s/2)(1-s)(1-s/2)}{s\left(1-\frac{s}{-2-\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{s}{-2+\sqrt{3}}\right)}$$

A

$g=1$

coeff. di s = cost. di tempo

T

Quindi ogni FdT (razionale fratta) si può esprimere come prodotto di termini del tipo

$$G_a(s) = \mu \qquad G_c(s) = 1 + sT$$

$$G_b(s) = \frac{1}{s^g} \qquad G_d(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2$$

o loro inverse

Allora detti G_i i fattori componenti G

$$G = \prod G_i$$

$$\Rightarrow \quad |G| = \prod |G_i| \Rightarrow |G|_{dB} = \sum |G_i|_{dB}$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle^{\circ} G = \sum \measuredangle^{\circ} G_i$$

Vediamo perciò come tracciare i DBM e DBF (asintotici) di $G_{a,b,c,d}$

G2)

$$G_2(s) = \mu$$

$$G_2(j\omega) = \mu$$

$$|G_2(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu|$$

$$\angle^{o} G_2(j\omega) = \begin{cases} 0 & \mu>0 \\ -180^\circ & \mu<0 \end{cases}$$