FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

20 aprile 2020

Indice

Parte I
Lezioni

LEZIONE 13 31/03/2020
link clicca qui

- $G_b(s) = \frac{1}{s^g} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} \rightarrow \begin{cases} |G_b(j\omega)| = \frac{1}{\omega^g} \rightarrow |G_b(j\omega)|_{dB} = -20glog(\omega) \\ arg(G_b(j\omega)) = -g \cdot 90^o \end{cases}$
  [immagine dagli appunti del prof]

  diagramma di bode del modulo: Il diagramma di bode del modulo corrispondente è una retta che interseca sempre l'asse delle ascisse nel punto $\omega = 1$ e la cui pendenza è $-20g\frac{dB}{decade}$ (spesso abbreviato come "pendenza $-g$"), dove la **decade** è la distanza corrispondente a un rapporto che vale 10.

  diagramma di bode della fase: Il diagramma di bode delle fasi è orizzontale al valore $-g \cdot 90^o$. Anche per la fase spesso i termini G_a e G_b vengono analizzati assieme: il valore della retta orizzontale di G_a e G_b assieme è la semplice somma dei valori a cui dovrebbero essere le singole rette di G_a e G_b

  Da notare è che fino ad ora non abbiamo fatto nessuna approssimazione.

- $G_c(s) = 1 + st \rightarrow G_c(j\omega) = 1 + j\omega t \rightarrow \begin{cases} |G_c(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega t)^2} \\ arg(G_c(j\omega)) = arctan(\omega t) \end{cases}$
  Per facilitare i conti applichiamo un approssimazione, che è il motivo del perchè stiamo facendo diagrammi di bode asintotici:

  - se $|\omega t| >> 1$ (molto maggiore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim j\omega t$, per cui otteniamo
    che $\begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim |\omega t| \\ arg(G_c(j\omega)) \sim \begin{cases} 90^o & t > 0 \\ -90^o & t < 0 \end{cases} \end{cases}$
  - se $|\omega t| << 1$ (molto minore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim 1$, per cui otteniamo
    ce $\begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim 1 \\ arg(G_c(j\omega)) \sim 0^o \end{cases}$

  [immagine dagli appunti del prof]

  diagramma di bode del modulo: Definiamo la **frequenza d'angolo** come $\frac{1}{|t|}$ (da notare il modulo !). Grazie alle approssimazioni che abbiamo fatto, andando a sinistra nell'asse delle ω, cioè verso il valore di 0_{dB}, il modulo vale circa 1. Facciamo valere questa approssiamazione fino al valore di frequenza d'angolo. Superata la frequenza d'angolo il modulo cresce con pendenza $+1$, cioè di $20\frac{dB}{decade}$. Questa rappresentazione prende il nome di diagramma di bode del modulo asintotico (il diagramma di bode del modulo esatto è mostrato in figura, e la differenza è che non ha una curva "netta").

  diagramma di bode della fase: approssimiamo tutto ciò che precede la frequenza d'angolo con 0^o, alla frequenza d'angolo c'è un salto in cui se t è positivo prota a 90^o (rossa nel disegno), se è negativo a -90^o (blu nel disegno). La rappresentazione non approssimata dovrebbe seguire la linea tratteggiata in rosso nel disegno.

  Notiamo che l'approssimazione del modulo è molto buona, mentre quella della fase non molto.

- $G_d(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \rightarrow G_d(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$ con $1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ parte reale e $j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$ parte immaginaria

  - per $\omega \rightarrow 0$: $\begin{cases} \text{parte reale } \rightarrow 1 \\ \text{parte immaginaria } \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \rightarrow 1 \rightarrow |G_d(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \\ arg(G_d(j\omega)) \rightarrow 0^o \end{cases}$

- per $\omega \to +\infty$:
  [immagine dagli appunti del prof]
  Chiamiamo le generiche radici coniugate complesse la coppia s_1 e s_2 di $G_d(s) = \frac{1}{\omega_n^2}(s - s_1)(s - s_2)$ e rappresentiamole nel grafico.

  Facciamo un attimo un excursus dal caso $\omega \to \infty$ e dimostriamo i risultati ottenuti precedentemente per $\omega \to 0$: [colore blu nel disegno] prendiamo il punto $j\omega$ con $\omega = 0$, cioè $j0$, i vettori che connettono le radici s_1 e s_2 al punto $j0$ hanno modulo ω_n, quindi il modulo di $|G_d(j0)|$ vale $\frac{\omega_n \cdot \omega_n}{\omega_n^2} = 1$. Possiamo anche dimostrare che la fase di G_d per $\omega \to 0$, cioè in $j0$, che vale 0^o, infatti gli angoli di s_1 e s_2 rispetto a un asse orizzontale sono opposti e si annullano a vicenda.

  Vediamo ora il caso in cui, invece di considerare il punto $j0$, consideriamo il generico punto $j\omega$. Analiziamo i vettori che connettono il generico punto $j\omega$ e s_1 e s_2 [in rosso nel disegno], questi vettori $j\omega - s_i$ per $\omega \to \infty$ (cioè per facendo salire lungo l'asse immaginario il generico punto $j\omega$) hanno entrami modulo che tende a ∞ e fase che tende a 90^o (quindi in totale 180^o).
  Quindi per $\omega \to \infty \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \to \infty & \text{allo stesso modo in cui tende } \omega^2 \\ arg(G_d(j\omega)) \to 180^o \end{cases}$

  [immagine dagli appunti del prof]

  oss. Il modulo del vettore $|j\omega - s_2|$ è monotono crescente, mentre il modulo del vettore $|j\omega - s_1|$ no, infatti ha un minimo per $\omega = Im(s_1)$, il perchè si vede graficamente.

  oss. più s_1 e s_2 sono vicini all'asse immaginario, più il minimo di s_1 è pronunciato e la variazione di fase avviene bruscamente.

  [immagine dagli appunti del prof]

  Diagramma di Bode del modulo: Segnamo la frequenza ω_n che prende il nome di **frequenza naturale**. Approssimiamo tutto ciò che precede ω_n con modulo uguale a 1 ($0dB$), invece dalla frequenza naturale in poi il modulo sale con pendenza $+2$ (cioè $40\frac{dB}{decade}$). Questo è il diagramma asintotico. Il diagramma esatto è mostrato in figura ed è diverso in base al termine ξ ($|\xi| = 1$ abbiamo due radici reali coincidenti, $|\xi| = 0$ abbiamo 2 radici immaginarie, in mezzo a questi due casi ci sono tutti gli altri casi possibili)

  [immagine dagli appunti del prof]

  Diagramma di Bode della fase: Il diagramma asintotico (approssimato) è fatto a scalino e va da 0^o a $+180^o$ se $\xi > 0$ o a -180^o se $\xi < 0$. Il diagramma esatto è mostrato in figura (tratteggiato in rosso) e può avere una pendenza più o meno ripida per $|\xi| \to 0$.

0.0.1 Tracciamento complessivo

Per capire come unire tutti i diagrammi fino ad ora visti di $G_{a,b,c,d}$ vediamo un esempio.

es. Sia $G(s) = \frac{10(1-s)(1+\frac{s}{2})}{s(1+\frac{s}{10})^2}$, con $\mu = 10$ e $g = 1$. Riscriviamolo per una migliore comprensione come:

$$G(s) = \frac{10}{s} \cdot (1 - s) \cdot (1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{10}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$$

Facciamo ora i diagrammi di bode del modulo di tutti questi termini e infine li sommiamo per avere il diagramma complessivo.

- $\frac{10}{s}$: pendenza -1 e intersezione con l'asse ω in 10.
- $(1 - s)$: parte da 0 e alla frequenza d'angolo 1 ottiene pendenza $+1$.
- $(1 + \frac{s}{2})$: vale 0 fino a frequenza 2 e poi sale con pendenza $+1$.

- $\frac{1}{1+\frac{s}{10}}$ (di cui ce ne sono due identici, da ricordare per fare il diagramma complessivo finale): vale 0 fino a frequenza d'angolo 10 e poi ottiene pendenza (scende) -1, perchè essendo a denominatore il logaritmo cambia segno.
- diagramma di bode complessivo: è la somma dei diagrammi precedenti, graficamente si può ragionare sul fatto che il diagramma complessivo è fatto da dei semplici cambi di pendenza dovuti a tutti i diagrammi precedenti. (notiamo che l'ultimo termine è presente due volte).

[immagine dagli appunti del prof]

Facciamo ora i diagrammi di bode della fase di tutti questi termini e infine li sommiamo per avere il diagramma complessivo.

- $\frac{10}{s}$: è una retta orizzontale a -90^o fissi.
- $(1-s)$: parte da 0^o e poi ha uno scalino negativo fino a -90^o (negativo perchè è del tipo $1-j\omega$) alla frequenza di $\omega = 1$.
- $(1+\frac{s}{2})$: parte da 0^o e alla sua frequenza d'angolo che vale 2 ha uno scalino in cui passa a $+90^o$ (positivo perchè è del tipo $1+j\omega$).
- $\frac{1}{1+\frac{s}{10}}$ (di cui ce ne sono due identici, da ricordare per fare il diagramma complessivo finale): parte da 0^o e alla frequenza di 10 ha uno scalino fino a -90^o (è della forma $1+j\omega$, ma **siccome è al denominatore il segno viene cambiato**, quindi è negativo)
- diagramma di bode complessivo: è la somma dei diagrammi precedenti, graficamente si può ragionare sul fatto che il diagramma complessivo è fatto dalla somma dei vari scalini alla frequenza opportuna. (notiamo che l'ultimo termine è presente due volte).

[immagine dagli appunti del prof]

In generale per la fase: Se è del tipo $1+j\omega$ allora abbiamo uno scalino positivo di $+90^o$ gradi alla frequenza d'angolo, se è del tipo $1-j\omega$ allora abbiamo uno scalino negativo di -90^o alla frequenza d'angolo. Se invece il termine $1 \pm j\omega$ è a denominatore, il ragionamento è al contrario, cioè se è del tipo $\frac{1}{1+j\omega}$ allora abbiamo uno scalino negativo di -90^o alla frequenza d'angolo, se è del tipo $\frac{1}{1-j\omega}$ allora abbiamo uno scalino positivo di $+90^o$ alla frequenza d'angolo.

0.0.2 Metodo di tracciamento

Per prima cosa si ricavano i valori di μ, g, poi si ricavano tutte le frequenze d'angolo (modulo delle radici di ogni termine al numeratore e al denominatore, escluse quelle in $s = 0$) e per ognuna di queste si dice quanti zeri (radici del numeratore) destri (con parte reale positiva) o sinistri (con parte reale negativa) e quanti poli (radici del denominatore) destri (con parte reale positiva) o sinistri (con parte reale negativa) ci sono.

Diagramma di Bode del modulo:

1. Tracciare il diagramma di Bode del modulo di $\frac{\mu}{s^g}$ (è una retta la cui pendenza viene ricavata da: $-20 \cdot g \frac{dB}{decade}$; per capire dove interseca l'asse delle ω basta ricavare il valore di ω per cui $\left|\frac{\mu}{\omega^g}\right| = 1$; se la retta non ha pendenza allora è una retta orizzontale all'altezza di $|\mu|_{dB}$).
2. Segnare sull'asse delle ω le frequenze d'angolo dei poli (radici del denominatore) e zeri (radici del numeratore) non in $s = 0$ (perchè son già presenti nel punto precedente).
   Quando si incontra una frequenza d'angolo di uno zero, la pendenza aumenta di 1, quando si incontra una frequenza d'angolo di un polo, la pendenza diminuisce di 1. (Ricordiamo che per 1 di pendenza si intendono $20dB/decade$).

Diagramma di Bode della fase:

1. Il diagramma di Bode della fase parte al valore di $arg(\frac{\mu}{(j\omega)^g})$, che è calcolabile sommando i contributi di μ e $\frac{1}{s^g}$ nel seguente modo:

$$\mu \to \begin{cases} 0^o & se > 0 \\ -180^o & se < 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{s^g} \to -g \cdot 90^o$$

2. zero "a sinistra" la fase aumenta di 90^o;
   zero "a destra" la fase diminuisce di 90^o;
   polo "a sinistra" la fase diminuisce di 90^o;
   polo "a destra" la fase aumenta di 90^o.

0.0.3 Esempio

es. Disegnare i diagrammi di Bode asintotici per la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100(1-s)(1+\frac{s}{5})}{s^2(1-\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})^2}$$

$\mu = 100$ e $g = 2 \Rightarrow \frac{\mu}{s^g}$ ha pendenza -2 e taglia l'asse delle ω per $\frac{100}{\omega^2} = 1$ cioè per $\omega = 10$.

Frequenze d'angolo di poli e zeri non nell'origine:

$\omega = 1$	1 zero destro
$\omega = 5$	1 zero sinistro
$\omega = 10$	1 polo destro
$\omega = 100$	2 poli sinistri

Usiamo ora il foglio semilogaritmico (che si può trovare fra i materiali del corso sul sito del professore):

[immagine dagli appunti del prof]

Notiamo che per convenzione si rappresentano $10dB$ a tacca (verticale), inoltre se mancano le scale nel diagramme di bode si considera errore in sede d'esame!

Parte II
Esercitazioni

1 Esercitazione 5

LEZIONE 15 2/04/2020
link clicca qui

Appunti del prof con annotazioni `../pdf/FdA-L15-2020.04.02.pdf`
Contenuto:

- Diagrammi di Bode;
- Schema a blocchi (sintesi diretta);
- Routh;
- Parti nascoste.

2 Esercitazione 6

LEZIONE 16 6/04/2020
link clicca qui

Appunti del prof con annotazioni `../pdf/FdA-L16-2020.04.06.pdf`
Contenuto:

-