Lezione 10 - Conduzione

Corso di Fisica Tecnica
a.a. 2019-2020

Prof. Gaël R. Guédon
Dipartimento di Energia, Politecnico di Milano

Obiettivi della lezione

- Ricavare **l'equazione generale della conduzione**
- Definire le varie tipologie di **condizioni al contorno**
- Introdurre **l'analogia elettrica** per la risoluzione di problemi di conduzione

DEFINIZIONE

Per conduzione termica si intende la trasmissione di calore per contatto molecolare diretto.

Il principio alla base della conduzione è diverso a seconda della struttura fisica del corpo: se la conduzione termica avviene nei gas è dovuta alla diffusione atomica e molecolare, se invece avviene nei liquidi e nei solidi è a causa di onde elastiche; nei materiali metallici il fenomeno è principalmente dovuto alla diffusione degli elettroni liberi dato che è trascurabile il contributo dell’oscillazione elastica del reticolo cristallino.

STRUMENTI MATEMATICI

Operatore «nabla»:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}T = grad\ T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = div\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

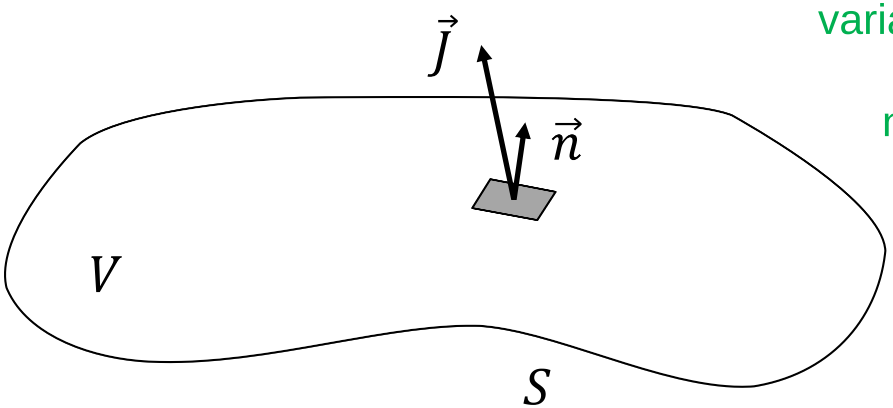
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}T = \nabla^2 T = laplaciano\ di\ T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Teorema della divergenza:

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int_V div\ \vec{v}\, dV$$

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Il postulato di Fourier è uno strumento incompleto ai fini della soluzione di un problema di conduzione. Da esso però si può dedurre un'equazione fenomenologica denominata equazione di Fourier o equazione generale della conduzione, la cui soluzione consente di determinare la distribuzione di temperatura in un mezzo. Questa equazione esprime il bilancio di energia di un sistema sede di trasmissione del calore per conduzione:



potenza entrante

variazione di energia nel tempo

sorgente di potenza

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}^{\leftarrow} + \dot{\Sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u \, dV = -\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS + \int_V \sigma \, dV$$

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u \, dV = -\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS + \int_V \sigma \, dV$$

Per il teorema della divergenza diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u \, dV = -\int_V div \, \vec{J} \, dV + \int_V \sigma \, dV$$

Con le ipotesi di volume, V, e densità, ρ, indipendenti dal tempo si ottiene:

$$\int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dV + \int_V div \, \vec{J} \, dV - \int_V \sigma \, dV = 0$$

$$\int_V \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + div \, \vec{J} - \sigma\right] dV = 0$$

valida per qualunque volume $\longrightarrow$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + div \, \vec{J} - \sigma = 0$$

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

La variazione di energia interna è esprimibile attraverso la relazione $du = c_v dT$

Sfruttando inoltre il postulato di Fourier $\vec{J} = -k\ grad\ T$

Si ottiene
$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = div(k\ grad\ T) + \sigma$$

Con l'ipotesi di materiale omogeneo ed isotropo ($k = \mathrm{costante}$) si ottiene:

$$\boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \sigma}$$

Questa è l'equazione generale della conduzione o equazione di Fourier

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Viene anche scritta come:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$

con $a = \frac{k}{\rho c_v}$ la diffusività termica in [m^2/s]

L'equazione di Fourier è una equazione differenziale alle derivate parziali

- lineare in $T = f(x, y, z, t)$
- del secondo ordine rispetto a x, y, z
- del primo ordine rispetto a t

CONDIZIONI AL CONTORNO

L'equazione di Fourier non è risolvibile in assenza di ulteriori informazioni, quali

- **condizione iniziale** (se il problema è tempo variante)
- **condizioni al contorno** (o ai limiti)

La soluzione richiede quindi che sia **noto**:

- la geometria del mezzo in cui avviene la conduzione
- le proprietà termofisiche del mezzo (ρ, c_v, k)
- le distribuzioni delle sorgenti termiche
- la distribuzione della temperatura nel mezzo all'istante iniziale
- le condizioni al contorno superficiale relative all'interazione tra il mezzo e ciò che lo delimita

CONDIZIONI AL CONTORNO

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, vale la seguente terminologia:

- **Problema di Dirichlet** (condizione di primo tipo): quando è assegnata la distribuzione della funzione T (temperatura) in ogni punto del contorno, eventualmente in funzione del tempo

$$T = T(\vec{x}, t) \qquad \vec{x} \in S$$

- **Problema di Neumann** (condizione di secondo tipo): quando è assegnata al contorno la derivata normale della funzione T, eventualmente in funzione del tempo

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = f(\vec{x}, t) \qquad \vec{x} \in S$$

Questa condizione rappresenta, in senso fisico, la conoscenza del **flusso termico areico** alla superficie del sistema.

CONDIZIONI AL CONTORNO

- **Problema di Cauchy** (condizione di terzo tipo): quando è assegnata al contorno una combinazione lineare della funzione T e della sua derivata normale, eventualmente in funzione del tempo

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} + A\,T = f(\vec{x}, t) \qquad \vec{x} \in S \qquad A = \text{costante}$$

Questa condizione si verifica nella maggior parte dei casi quando vi è scambio termico per convezione alla superficie di controllo del sistema. Si ottiene, avendo indicato con h il coefficiente convettivo:

$$-k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h(T - T_\infty) \qquad \vec{x} \in S$$

essendo T_∞ la temperatura di un eventuale fluido esterno

CONDIZIONI AL CONTORNO

- **Condizione di quarto tipo**: questa condizione corrisponde al caso in cui si ha scambio termico attraverso l'interfaccia di due mezzi in cui è presente un trasporto conduttivo ed aventi diversa conduttività termica (k_1 e k_2)

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial \vec{n}} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \vec{n}} \qquad \vec{x} \in S$$

in cui T_1 e T_2 sono le funzioni che descrivono il campo di temperatura nei mezzi rispettivamente di conduttività k_1 e k_2.

Se il contatto tra i due mezzi materiali è perfetto, può allora essere specificata una ulteriore relazione tra le temperature superficiali dei mezzi:

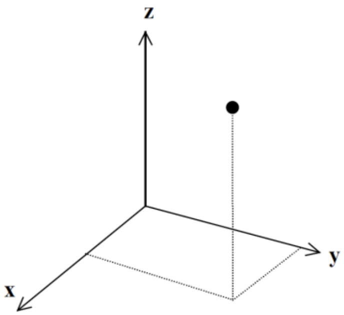
$$T_1 = T_2 \qquad \vec{x} \in S$$

SISTEMA DI COORDINATE

Nell'impostare il problema differenziale è inoltre importante scegliere opportunamente il sistema di coordinate nel quale esplicitare l'operatore di Laplace.

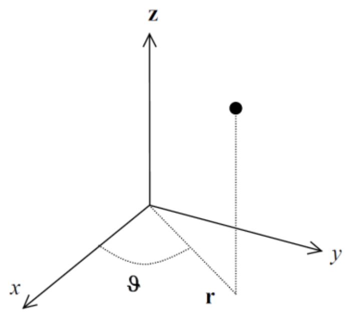
- Coordinate cartesiane ortogonali $T = T(x, y, z)$:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



- Coordinate cilindriche $T = T(r, \theta, z)$:

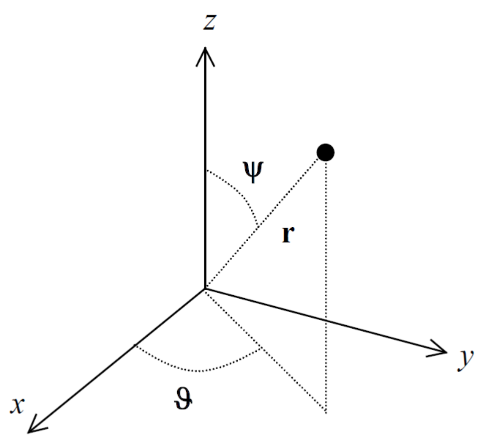
$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



SISTEMA DI COORDINATE

- Coordinate sferiche $T = T(r, \theta, \psi)$:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)$$



CONDUZIONE 1D CON GENERAZIONE INTERNA

L'equazione generale di Fourier in regime stazionario, con generazione interna (costante), monodimensionale diviene…

- in coordinate cartesiane ortogonali $T = T(x)$: $$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\sigma}{k} = 0$$
- in coordinate cilindriche $T = T(r)$: $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\sigma}{k} = 0$$
- In coordinate sferiche $T = T(r)$: $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\sigma}{k} = 0$$

CONDUZIONE 1D CON GENERAZIONE INTERNA

Integrando diviene…

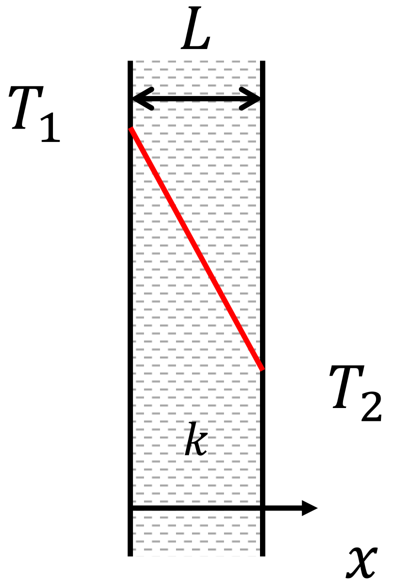
- in coordinate cartesiane ortogonali $T = T(x)$: $$T = -\frac{\sigma}{2k}x^2 + Ax + B$$
- in coordinate cilindriche $T = T(r)$: $$T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + C\ln r + D$$
- in coordinate sferiche $T = T(r)$: $$T = -\frac{\sigma}{6k}r^2 + \frac{E}{r} + F$$

Le **costanti di integrazione** (A, B, C, D, E, F) sono determinabili con le **condizioni al contorno**

PARETE PIANA INDEFINITA

Si consideri il caso senza generazione interna $T = Ax + B$

Si consideri il caso di **due condizioni di prima specie**



$$\begin{cases} x = 0 \\ T = T_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = L \\ T = T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = AL + B \end{cases}$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

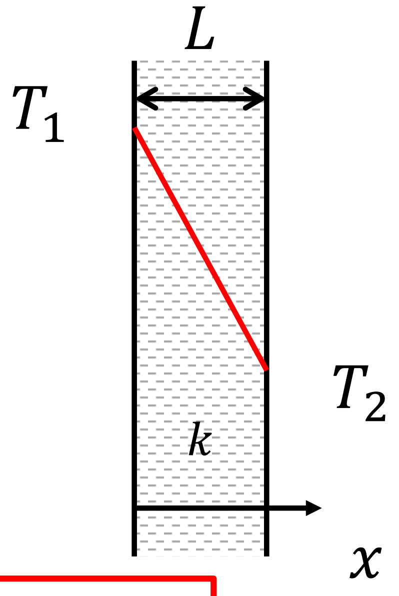
$$J = -k \frac{dT}{dx} \qquad J = k \frac{T_1 - T_2}{L} = \text{costante}$$

$J = \text{costante}$ è intuibile dal bilancio energetico che afferma che la potenza netta entrante in un volume di controllo deve essere nulla (non si accumula energia)

PARETE PIANA INDEFINITA

Si consideri il caso senza generazione interna $T = Ax + B$

Si consideri il caso di **due condizioni di prima specie**



Il flusso termico complessivo è dato per una superficie S:

$$\dot{Q} = kS\frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}}$$

Analogia elettrica ($\Delta V = RI$)

Resistenza termica di tipo conduttiva

$$\boxed{R_{cond} = \frac{L}{kS}}$$

PARETE PIANA INDEFINITA

Caso di una **parete composta**

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{12}}{R_1}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{12} - T_{23}}{R_2}$$

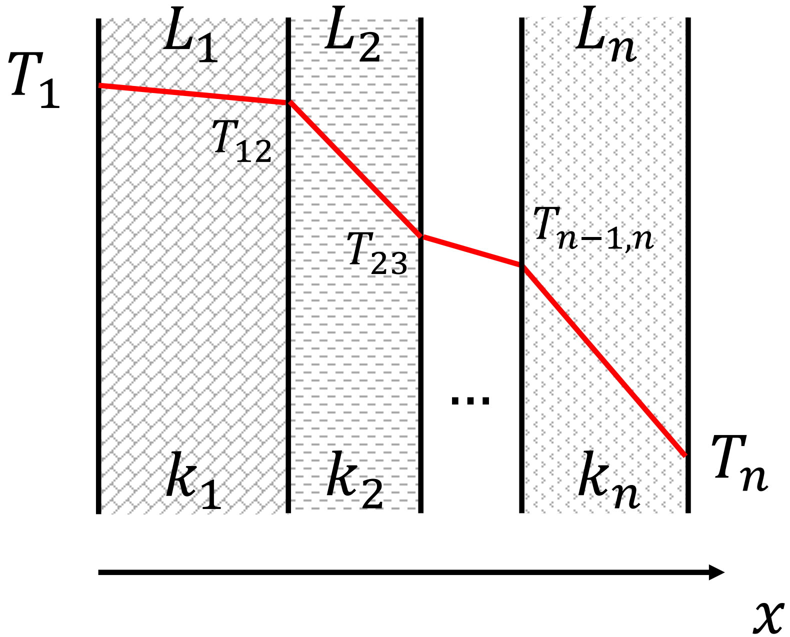
...

$$\dot{Q} = \frac{T_{n-1,n} - T_n}{R_n}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_n}{R_{eq}}$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Resistenze in serie



Il gradiente di temperatura (pendenza) nella parete è inversamente proporzionale alla conduttività termica del mezzo

PARETE PIANA INDEFINITA

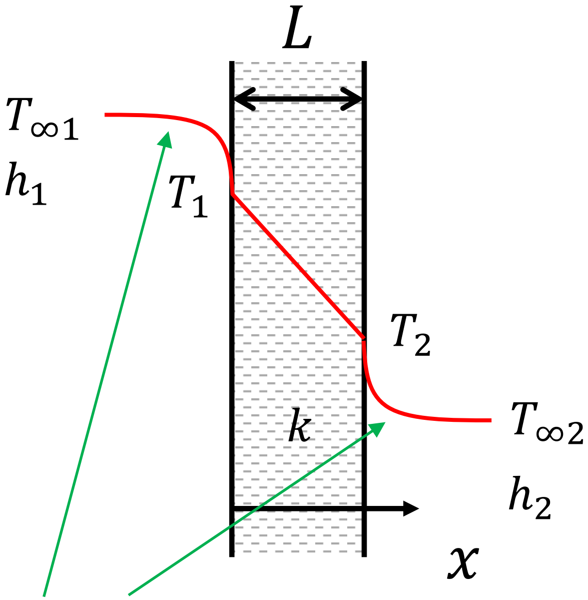
Caso di condizioni al contorno di **terza specie (tipo convettivo)** $T = Ax + B$

$$\begin{cases} x = 0 \\ h_1(T_{\infty 1} - T) = -k\dfrac{dT}{dx} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = L \\ -k\dfrac{dT}{dx} = h_2(T - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1(T_{\infty 1} - B) = -kA \\ -kA = h_2(AL + B - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

$$A = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h_2}\right)}\frac{1}{k} \qquad B = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h_2}\right)}\frac{1}{h_1} + T_{\infty 1}$$

$$T = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h_2}\right)}\left(\frac{x}{k} + \frac{1}{h_1}\right) + T_{\infty 1}$$

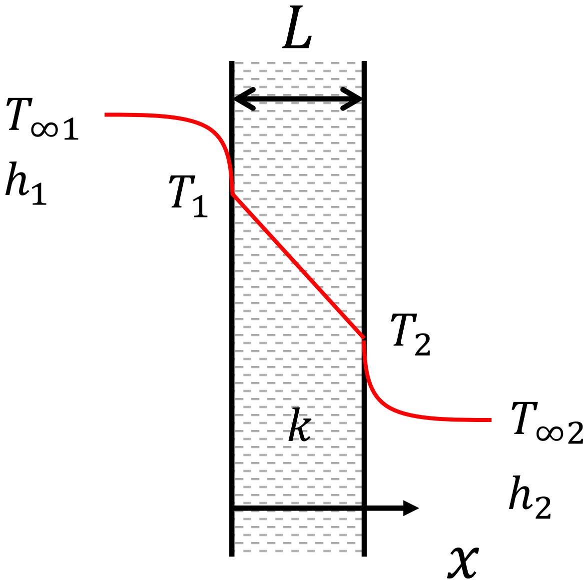


Il profilo di temperatura nel fluido ha un **andamento non-lineare** con forte variazione nello strato limite fluidodinamico

PARETE PIANA INDEFINITA

Caso di condizioni al contorno di **terza specie (tipo convettivo)** $T = Ax + B$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{\frac{1}{h_1 S}} \qquad \dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kS}} \qquad \dot{Q} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_2 S}}$$



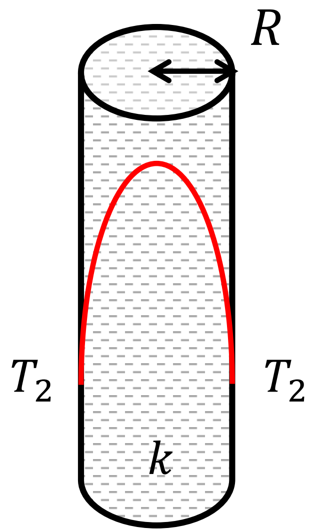
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{S}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}\right)} \qquad \dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{eq}}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}\right)$$

Resistenza termica di tipo convettiva $\boxed{R_{conv} = \frac{1}{hS}}$

BARRA CILINDRICA PIENA (con generazione di potenza)

Caso di condizioni al contorno di **prima specie**



$$T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + C\ln r + D \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma}{2k}r + \frac{C}{r}$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ \dfrac{dT}{dr} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R \\ T = T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 0 \\ D = T_2 + \dfrac{\sigma}{4k}R^2 \end{cases}$$

Simmetria

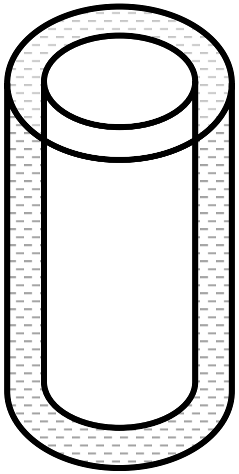
$$T = \frac{\sigma}{4k}(R^2 - r^2) + T_2 \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma}{2k}r$$

$$J = -k\frac{dT}{dr} = \frac{\sigma}{2}r \qquad \frac{\dot{Q}}{L} = \frac{JA}{L} = \pi r^2\sigma$$

A: area dello scambio termico

CILINDRO CAVO (senza generazione di potenza)

Caso di condizioni al contorno di **prima specie**

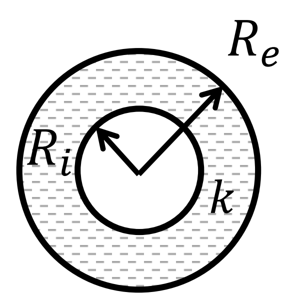


$$T = C \ln r + D$$

$$\begin{cases} r = R_i \\ T = T_i \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R_e \\ T = T_e \end{cases} \qquad \begin{cases} T_i = C \ln R_i + D \\ T_2 = C \ln R_e + D \end{cases}$$

$$T_e - T_i = C(\ln R_e - \ln R_i)$$

$$T = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln r + T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln R_i = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$



$$J = -k \frac{dT}{dr} = k \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \frac{1}{r} \qquad \frac{\dot{Q}}{L} = \frac{JA}{L} = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{1}{2\pi k} \ln \frac{R_e}{R_i}}$$

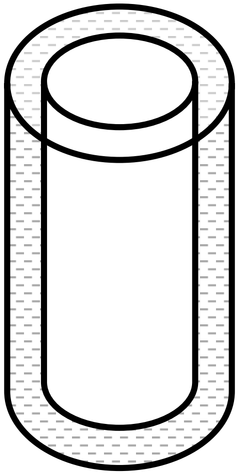
CILINDRO CAVO (senza generazione di potenza)

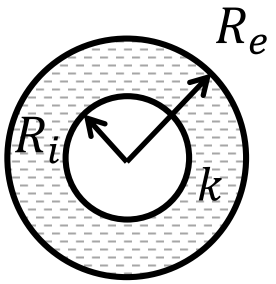
Caso di condizioni al contorno di **prima specie**

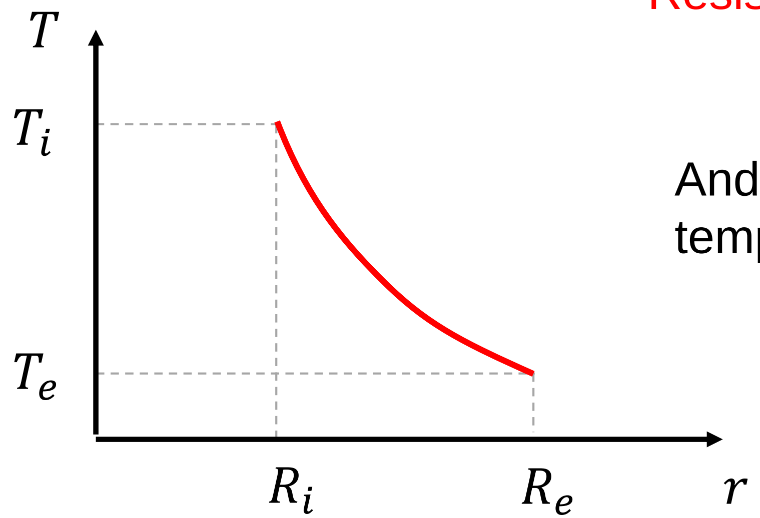
$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{1}{2\pi L k}\ln\frac{R_e}{R_i}} \qquad \dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R_{cond}}$$

$$\boxed{R_{cond} = \frac{1}{2\pi L k}\ln\frac{R_e}{R_i}}$$

Resistenza termica di tipo conduttiva



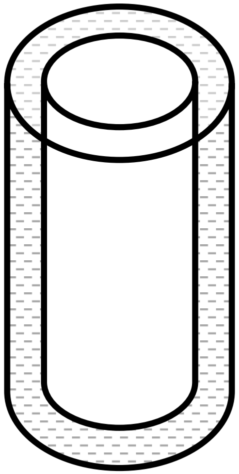




Andamento logaritmico della temperatura nella parete solida

CILINDRO CAVO (senza generazione di potenza)

Caso di condizioni al contorno di **terza specie (tipo convettivo)**

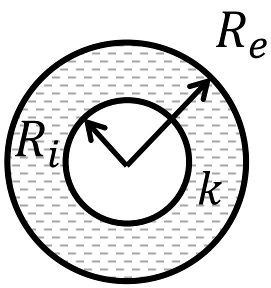


$$\dot{Q} = \frac{(T_{\infty i} - T_{\infty e})}{\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{h_i R_i} + \frac{1}{k}\ln\frac{R_e}{R_i} + \frac{1}{h_e R_e}\right)}$$

$$\dot{Q} = \frac{(T_{\infty i} - T_{\infty e})}{R_{eq}}$$

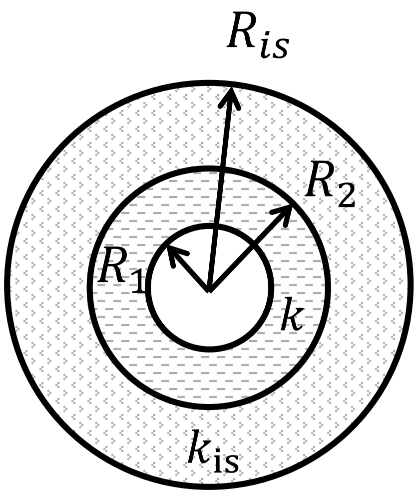
Resistenza termica di tipo convettiva

$$\boxed{R_{conv} = \frac{1}{2\pi L h R}}$$



CILINDRO CAVO (senza generazione di potenza)

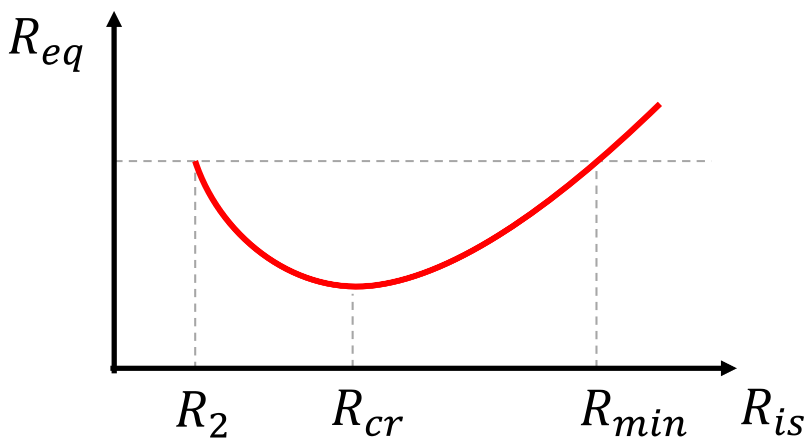
RAGGIO CRITICO DI ISOLAMENTO



$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R_{eq}}$$

T_i: temperatura fluido interno
T_e : temperature fluido esterno

$$R_{eq} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{h_i R_1} + \frac{1}{k}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{k_{is}}\ln\frac{R_{is}}{R_2} + \frac{1}{h_e R_{is}}\right)$$



$$\frac{dR_{eq}}{dR_{is}} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{k_{is}R_{is}} - \frac{1}{h_e R_{is}^2}\right)$$

$$\rightarrow \quad R_{cr} = \frac{k_{is}}{h_e}$$

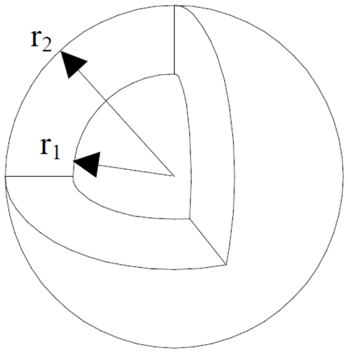
PARETE SFERICA CAVA (senza generazione di potenza)

Caso di condizioni al contorno di **prima specie**

$$T = \frac{E}{r} + F \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{E}{r^2}$$

$$\begin{cases} r = R_1 \\ T = T_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{E}{R_1} + F \\ T_2 = \dfrac{E}{R_2} + F \end{cases}$$



$$T = T_1 + (T_1 - T_2)\frac{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_!}}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{1}{4\pi k}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)}$$

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cond}}$$

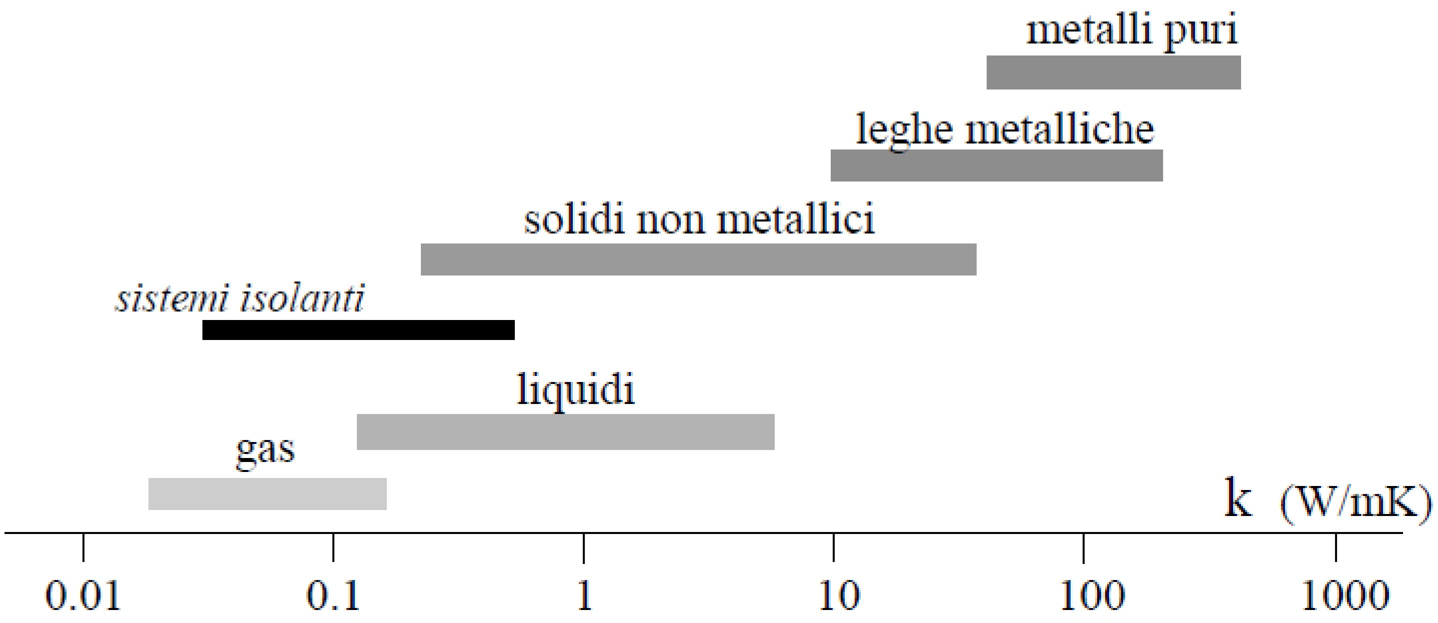
$$J = k\frac{T_1 - T_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}\frac{1}{r^2}$$

Resistenza termica di tipo conduttiva

$$\boxed{R_{cond} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

CONDUTTIVITA' TERMICA

Valori indicativi per diversi materiali in condizioni normali di temperatura e pressione



CONDUTTIVITA' TERMICA

Valori indicativi per diversi Materiali in condizioni normali di temperatura e pressione

Materiale	Sostanza	Conduttività termica (W/mK)
cristallo	Diamante	2300
solidi metallici	Ag	429
	Cu	401
	Au	317
	Al	237
	Fe	80.2
	Bronzo (Cu 90% + Al 10%)	52
	Acciaio (C 1%)	43
	Costantana (Cu 55% + Ni 45%)	23
	Acciaio inox	15
isolanti	Porcellana	1.03
	Vetro	0.78
	Mattone	0.72
	Terra	0.59
	Cemento	0.3
	Plexiglass	0.184
	Legno	0.17
	Gomma	0.13
	Carta	0.12
	Fibra di vetro	0.043
	Lana	0.036
liquidi	Hg	8.54
	Acqua	0.613
gas	He	0.152
	Aria	0.026

COEFFICIENTE CONVETTIVO

Dipende fortemente dal tipo di fluido, dalla geometria e dal tipo di moto (regime, velocità, ecc.)

Valori tipici per l'acqua e per l'aria sono:

- Aria: $h = 5 \div 100$ W/m^{2}K
- Acqua: $h = 200 \div 10000$ W/m^{2}K
- Acqua in transizione di fase: $h = 1000 \div 100000$ W/m^{2}K

Determinazione di h oggetto della prossima lezione.