

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

21 aprile 2020

Indice

I	Lezioni	4
1	SLIDE: Introduzione al corso	4
1.1	Informazioni generale	4
1.2	Concetti preliminari	4
1.3	Prerequisiti, motivazione e collocamento del corso	4
1.4	Relazione fra automatica e informatica	4
2	Il problema del controllo	5
2.1	Concetti fondamentali	5
2.2	Strategie di controllo	5
2.2.1	Controllo in anello aperto (AA)	5
2.2.2	Controllo in anello aperto (AA) con compensazione del disturbo misurabile	5
2.2.3	Controllo in anello chiuso (AC) o in retroazione o Feedback	5
2.2.4	Controllo in anello chiuso (AC) con compensazione del disturbo	5
2.2.5	Esempio	5
3	Sistemi dinamici (SD)	7
3.1	Introduzione	7
3.2	Esempi	7
3.3	Sistema dinamico (SD) a tempo continuo (TC)	8
3.3.1	Espressione del sistema	8
3.3.2	Definizioni	9
3.3.3	Esempi	9
3.4	Sistema dinamico (SD) a tempo discreto (TD)	10
3.4.1	Espressione del sistema	10
3.4.2	Definizioni	11
3.4.3	Esempi	11
3.5	Sistemi dinamici (SD) lineari tempo invarianti (LTI)	11
3.6	Equilibrio	12
3.7	Esempi	13
3.8	Movimento	13
3.8.1	Formule di Lagrange	13
3.9	Esponenziale di matrice	14
3.10	Esempi	15
4	Linearizzazione di sistemi dinamici non lineari (SD, NL, SISO, TC) nell'intorno di un equilibrio	16
4.1	Per l'equazione di stato	16
4.2	Per l'equazione d'uscita	16
4.3	Sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}$	16
4.4	Interpretazione	16

5	Stabilità	17
5.1	Equilibrio	17
5.2	Stabilità nei SD LTI a TC	17
5.3	Proprietà dei SD LTI a TC AS	18
5.4	Stabilità di un SD LTI a TC e matrice A	18
5.5	Stabilità e autovalori di A	18
5.6	Caso a TD (A diagonalizzabile)	18
5.7	Criteri di stabilità (asintotica) per SD LTI a TC	19
5.8	Esempi	19
5.9	Routh	19
5.9.1	Tabella di Routh	19
5.9.2	Criterio di Routh	20
5.9.3	Esempi	20
6	Segnali e trasformate	21
6.1	Serie di Fourier	21
6.2	Trasformata di Fourier	21
6.3	Trasformata di Laplace	21
6.3.1	Esempi	22
6.3.2	Proprietà della trasformata di Laplace	23
6.4	Teorema del valore iniziale	23
6.5	Teorema del valore finale	23
6.6	Trasformate di Laplace notevoli	23
6.7	Antitrasformazione secondo Heaviside	24
7	Funzione di trasferimento	26
7.1	Definizioni e nuovi concetti	26
7.1.1	Equazione di stato	26
7.1.2	Equazione d'uscita	26
7.2	Calcolo e aspetto di una funzione di trasferimento	26
7.3	Esempi	27
8	Esercizi di ricapitolazione degli argomenti fino ad ora trattati	28
8.1	Es. Equilibri e stabilità in un sistema non lineare, TDE 06/05/2014 E1	28
8.2	Es. Stabilità, funzione di trasferimento e calcolo del movimento forzato con Heaviside, TDE 04/05/2015 E1	28
8.3	Es Applicazione reale	30
9	Raggiungibilità e osservabilità	32
9.1	Raggiungibilità (SD LTI a TC SISO)	32
9.1.1	Definizioni	32
9.1.2	Criterio di raggiungibilità	32
9.1.3	Esempi	34
9.2	Osservabilità (SD LTI a TC SISO)	34
9.2.1	Definizioni	34
9.2.2	Criterio di osservabilità	34
9.2.3	Esempi	34
9.3	Osservazioni	35
10	Realizzazione	36
10.1	Forma canonica di raggiungibilità	36
10.1.1	Riassunto	37
10.2	Esempi	38
11	Sistemi interconnessi (LTI a TC)	40
11.1	Elaborazione degli schemi a blocchi	40
11.1.1	Blocchi in serie o cascata	40
11.1.2	Blocchi in parallelo	41
11.1.3	Blocchi in retroazione o feedback	41

12 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)	43
12.1 Domanda	43
12.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)	43
12.3 Generalizzazione della risposta	43
12.4 Riassunto e proprietà	44
13 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)	45
13.1 Domanda	45
13.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)	45
13.3 Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza) . .	45
13.4 Definizione di risposta in frequenza	46
13.5 Esempio	46
14 Rappresentazioni della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento	47
14.1 Diagramma polare	47
14.2 Diagrammi cartesiani o di Bode	47
14.2.1 Diagramma di Bode del modulo	47
14.2.2 Diagramma di Bode della fase	47
14.3 Tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici)	47
14.3.1 Forma della funzione di trasferimento per diagrammi di Bode	47
14.3.2 Diagrammi di bode di modulo e fase di $G_{a,b,c,d}$	48
14.3.3 Tracciamento complessivo	50
14.3.4 Metodo di tracciamento	51
14.3.5 Esempio	51
 II Esercitazioni	 53
15 Esercitazione 1	53
16 Esercitazione 2	53
17 Esercitazione 3	53
18 Esercitazione 4	53
19 Esercitazione 5	53
20 Esercitazione 6	53
21 Esercitazione 7	54

Parte I

Lezioni

LEZIONE 1 9/03/2020

[link](#) clicca qui

1 SLIDE: Introduzione al corso

Slide: ../pdf/IntroduzioneCorsoFdA-2019.2020.pdf.

1.1 Informazioni generale

[0-10]

Prof. Alberto Leva

Il materiale didattico è distribuito su Beep e sulla pagina del corso.

Le slide e il materiale del corso non è sufficiente, bisogna prendere appunti e studiare dai testi.

Non ci sono prove in itinere.

1.2 Concetti preliminari

[11]

[12]

[13]

[14]

[15]

[16]

[17]

[18] Laboratorio: due transistor (marroni) non in contatto diretto, ma legati da una barretta di rame (azzurra), ci sono tre sensori di temperatura (blu), due sui transistor e uno sulla barretta (non si vede), c'è anche una ventola che può essere azionata o meno. Lo scopo è controllare la temperatura della barretta agendo su uno dei due transistor, mentre l'altro ha lo scopo di rappresentare un disturbo.

[19]

[20]

[21]

[22]

1.3 Prerequisiti, motivazione e collocamento del corso

[23]

[24]

[25]

[26]

[27] Struttura del corso. Nozioni base da sapere: derivate, integrali, invertire un matrice, autovalori e autovettori.

1.4 Relazione fra automatica e informatica

[28]

[29]

[30]

[31]

[32]

[33]

[34]

[35]

2 Il problema del controllo

2.1 Concetti fondamentali

[immagine dagli appunti del prof]

S : sistema da controllare.

U : variabili di controllo o in generale variabili di ingresso. Da notare è che per esempio anche una pompa che possiamo comandare e che tira fuori acqua dal nostro sistema è una variabile di ingresso perchè la controlliamo, nonostante la massa fisica dell'acqua esca. y : variabili d'uscita.

w : andamento desiderato di y o segnale di riferimento o set point.

d : disturbi.

L'obiettivo è che y sia il più possibile uguale a w nonostante d e nonostante una conoscenza potenzialmente imperfetta di S .

2.2 Strategie di controllo

2.2.1 Controllo in anello aperto (AA)

[immagine dagli appunti del prof]

C : controllore.

Il controllore decide l'andamento di U sulla base di w . Il controllore non sa cosa succede in y e non conosce d .

Questo approccio funziona se il legame $U \rightarrow y$ è esattamente noto e non ci sono disturbi d .

2.2.2 Controllo in anello aperto (AA) con compensazione del disturbo misurabile

[immagine dagli appunti del prof]

M_d : misuratore del disturbo.

d_m : misura di d .

Il controllore in questo caso non vede y , ma vede d , o meglio d_m .

Questo approccio funziona se il legame $(U, d) \rightarrow y$ è esattamente noto e se $d_m = d$, cioè se la misura del disturbo è corretta.

2.2.3 Controllo in anello chiuso (AC) o in retroazione o Feedback

[immagine dagli appunti del prof]

M_y : misuratore di y .

y_m : misura di y .

Questo sistema può contrastare i disturbi ed errori di modello anche senza conoscerli, il controllore ne vede gli effetti tramite y_m .

Naturalmente occorre sempre che $y_m = y$, se la misurazione è sbagliata non si può fare nulla. Non lavoriamo con le grandezze vere e proprie, ma con le loro misurazioni.

2.2.4 Controllo in anello chiuso (AC) con compensazione del disturbo

[immagine dagli appunti del prof]

Questo approccio è come il caso precedente ma più pronto nel reagire a d . Nel caso precedente in seguito a un disturbo si reagisce alle sue conseguenze, in questo caso si reagisce in maniera preventiva ai disturbi.

N.B. la precisione di M_d conta meno di quella di M_y .

2.2.5 Esempio

[immagine dagli appunti del prof]

Abbiamo una guida su cui scorre una massa M attaccata con una molla di costante elastica k . La massa viene spinta da una forza $F = U$ (è l'ingresso, lo imponiamo al sistema). La y (uscita) del sistema è la posizione della massa sulla guida.

$$F_{molla} = -ky$$

$$F_{attrito} = -h \frac{d}{dt} y = -h \dot{y}$$

Modello statico

Per prima cosa vediamo un **modello statico (all'equilibrio)** di questo sistema:

In un modello statico la velocità è nulla, e quindi la $F_{attrito} = 0$ e $F + F_{molla} = 0$, che diventa $F - k\bar{y} = 0$, dove per \bar{y} si intende il valore di y in stato di equilibrio, e dunque $\bar{y} = \frac{F}{k}$.

Quindi se voglio $y = y^o$, dove per y^o si intende un y desiderato, dovrò applicare una forza $F = ky^o$.

Analizziamo ora il sistema con un controllo in **AA**, supponendo che la costante elastica della molla sia $k = k_n + \Delta k$, dove k_n è detto k nominale.

Applicando quindi $F = k_n y^o$, otterrò $y = \frac{F}{k_n + \Delta k} = \frac{k_n}{k_n + \Delta k} y^o$. Quindi si può avere un errore di modello dovuto a quel Δk , che provoca un errore di controllo, cioè che $y \neq y^o$.

$$\text{Errore nel modello } (\Delta k) \implies \text{errore nel controllo } (y \neq y^o)$$

Analizziamo ora il sistema con un controllo in **AC**.

Posso decidere di applicare una forza $F = \alpha(y^o - y)$, con $\alpha > 0$. Il termine $(y^o - y)$ rappresenta l'errore, (quello che voglio - quello che ho). F è la variabile di controllo ed è proporzionale (α) all'errore. Questo è un esempio di applicazione di controllo ad anello chiuso.

Con questo approccio ottengo $y = \frac{F}{k_n + \Delta k} = \frac{\alpha(y^o - y)}{k_n + \Delta k}$ e continuando i conti si arriva a $\frac{y - y^o}{y^o} = \frac{k}{k + \alpha}$, dove il termine $\frac{y - y^o}{y^o}$ prende il nome di errore normalizzato. Se $k = k_n$ non ho errore, però con α abbastanza grande posso rendere l'errore piccolo a piacere (con possibili problemi di stabilità di cui parleremo più avanti).

Quindi:

- il controllo in AA è basato sul modello (usa k_n); l'errore è nullo se il modello è esatto, se no non si può contrastare l'incertezza.
- il controllo in AC è basato su misure (usa $y^o - y$); l'errore può essere nullo anche con modello esatto, ma può rendere l'errore piccolo a piacere.

Modello dinamico

Vediamo ora il **modello dinamico**: Partiamo dalla famosa formula "massa · accelerazione = \sum forze".

Quindi $m \cdot \ddot{y} = F - ky - h\dot{y}$, cioè $m\ddot{y}(t) + h\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$.

Nel caso di un sistema con controllo in **AA**, $F(t)$ non dipende da $y(t)$ e quindi l'integrale generale non cambia qualunque sia $F(t)$.

Nel caso di un sistema con controllo in **AC**, se, per esempio, $F(t) = \alpha(y^o(t) - y(t)) + \beta\dot{y}(t)$, ovvero se faccio dipendere la forza istante per istante, devo scrivere che $m\ddot{y}(t) + h\dot{y}(t) + ky(t) = \alpha(y^o(t) - y(t)) + \beta\dot{y}(t)$, cioè $m\ddot{y}(t) + (h - \beta)\dot{y}(t) + (k + \alpha)y(t) = \alpha y^o(t)$. Agendo con α e β sto cambiando il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale e quindi sto cambiando l'integrale generale. L'integrale generale dipende dai parametri di controllo α e β .

[immagine dagli appunti del prof]: schema a blocchi (verrà spiegato meglio più avanti) dell'esempio appena fatto.

3 Sistemi dinamici (SD)

3.1 Introduzione

[immagine dagli appunti del prof]

Premettendo che per questa trattazione la presenza del disturbo non è influente, ci poniamo la seguente domanda: se conosco $u(t)$ sull'intervallo $[t_0, t]$, questo mi basta per conoscere $y[t_0, t]$, cioè l'andamento del segnale di y nell'intervallo $[t_0, t]$?

Se la risposta a questa domanda è sì, significa che siamo in presenza di un sistema dinamico, se la risposta è no, il sistema non è dinamico.

Un sistema dinamico è un sistema in cui la conoscenza degli ingressi su un intervallo di tempo non è sufficiente per determinare l'andamento delle uscite sullo stesso intervallo di tempo.

3.2 Esempi

es. sistema non dinamico:

[immagine dagli appunti del prof]

La tensione $u(t)$ è l'ingresso, la corrente sulla resistenza R è l'uscita $y(t)$. La legge che governa questo circuito è $y(t) = \frac{1}{R}u(t)$, quindi noto $U(t)$ conosco $y(t)$. Siamo in presenza di un sistema non dinamico.

es. sistema dinamico:

[immagine dagli appunti del prof]

La tensione $u(t)$ è l'ingresso, la corrente sulla capacità C è l'uscita $y(t)$. Per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrono $u[t_0, t]$ e $y(t_0)$, notiamo che ci serve un solo numero (l'equazione differenziale che governa questo sistema è del primo ordine, quindi necessità di una sola costante arbitraria). Siamo in presenza di un sistema dinamico.

es. sistema dinamico:

[immagine dagli appunti del prof]

E' lo stesso esempio visto alla lezione precedente. Per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrono $u[t_0, t]$ e la posizione e la velocità iniziali, notiamo che ci servono due numeri (l'equazione differenziale che governa questo sistema è del secondo ordine, quindi necessità di due costanti arbitrarie). Siamo in presenza di un sistema dinamico.

es. sistema dinamico:

Prendiamo come esempio un tram che fa delle fermate numerate da $0, \dots, N$. Abbiamo un indice k che indica la fermata corrente, definiamo con $u(k)$ la differenza fra il numero di passeggeri saliti e il numero di passeggeri scesi alla fermata k e con $y(k)$ il numero di passeggeri a bordo quando il tram lascia la fermata k . Siamo in presenza di un sistema dinamico, perchè per conoscere $y[k_0, k]$ mi occorrono $u[k_0, k]$ e $y(k_0)$, notiamo che ci serve un solo numero.

es. sistema dinamico:

[immagine dagli appunti del prof]

Supponiamo di avere un nastro trasportatore, sopra la quale c'è una tamoggia che fa cadere del granulato. Definiamo come $u(t)$ la portata in ingresso in $[kg/s]$. Il granulato viene trasportato dal nastro finchè non cade e definiamo come $y(t)$ questa portata in uscita. Diciamo che il tempo di transito sul nastro trasportatore τ è costante.

Per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrerà analizzare la portata $u[t_0 - \tau, t - \tau]$ (notare i τ) e... in questo caso notiamo che ci servono informazioni su un intervallo di tempo diverso da quello desiderato ($[t_0, t]$). Per proseguire nell'esempio in maniera più semplice non utilizziamo $u[t_0 - \tau, t - \tau]$, ma utilizziamo un approccio del tutto analogo: per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrono $u[t_0, t]$ e $y[t_0 - \tau, t_0]$, che rappresenta cosa c'era sul nastro. Comunque notiamo che, senza fissarci in maniera troppo pignola su questo esempio, diversamente dagli esempi precedenti, la condizione iniziale del sistema sono infiniti numeri, che è ciò che succede quando un sistema è ritardato.

Siamo in presenza di un sistema dinamico.

Quindi un sistema dinamico per conoscere l'andamento dell'uscita ha bisogno di conoscere l'andamento dell'ingresso e il valore iniziale di qualcos'altro, che solitamente è un numero finito di numeri, ma può anche essere un numero infinito se si è in presenza di un ritardo.

es. caso particolare:

Il sistema è costituito da un pulsante e una lampadina e il suo funzionamento segue il seguente meccanismo: quando si rilascia il pulsante la lampada cambia stato (si accende se era spenta e viceversa). Per conoscere l'andamento dell'accensione y nell'intervallo $[t_0, t]$ occorre conoscere l'ingresso (istanti di rilascio entro $[t_0, t]$) e lo stato iniziale della lampada, che non rappresenta un numero, ma una variabile booleana. Non sarebbe sbagliato dire che lo stato iniziale della lampada è un numero, ma lo indichiamo come variabile booleana, per mostrare in maniera marcata che non è una variabile di cui si può fare una derivata temporale, l'intero sistema non è governato da un'equazione differenziale.

oss. Se mi interessa soltanto lo stato della lampada all'istante t , l'informazione che mi occorre è lo stato della lampada a t_0 e se il numero di volte in cui il pulsante è stato rilasciato è pari o dispari.

Tutti questi esempi mostrano i vari sistemi che esistono, noi ci specializzeremo in due classi di sistemi dinamici.

3.3 Sistema dinamico (SD) a tempo continuo (TC)

Le quantità di cui occorre il valore iniziale per conoscere l'uscita, noto l'ingresso, si dicono **variabili di stato** e si indicano tipicamente con x .

$$\left. \begin{matrix} x(t_0) \\ u[t_0, t] \end{matrix} \right\} \rightarrow x(t), y(t) \text{ su } [t_0, t] \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo corso consideriamo (quasi) sempre SD con solo un ingresso e solo un'uscita, i quali si dicono **SISO** (Single Input, Single Output), quindi non lavoriamo con vettori, ma con numeri scalari.

Nel caso a TC abbiamo

- $t \in \mathbb{R}$ (scalare)
- $u, y \in \mathbb{R}$ (scalari)
- $x \in \mathbb{R}^n$ (non per forza uno scalare, può essere un vettore) (come esempio di caso vettoriale si può usare il terzo visto nella sezione precedente, che aveva bisogno di due variabili di stato: posizione e velocità)

dove con n si intende il numero di variabili di stato, (quasi) sempre finito, che prende il nome di **ordine**.

oss. Un SD è definito su un campo, per noi in \mathbb{R} .

3.3.1 Espressione del sistema

Il valore assunto dalla prima variabile di stato $x_1(t)$ all'istante t è una funzione $\phi_1(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t)$, quindi dipende da se stessa e da tutte le altre variabili di stato, da $u[t_0, t]$ e dal tempo t se il sistema è tempo variante. E così pure per le altre variabili di stato:

$$\left. \begin{matrix} x_1(t) = \phi_1(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t) \\ \dots = \dots \\ x_n(t) = \phi_n(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t) \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{funzione di transizione dello stato}$$

Queste espressioni prendono il nome di **funzione di transizione dello stato**.

$$\left. \begin{matrix} y(t) = \gamma(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Questa espressione prende il nome di **equazione o trasformazione d'uscita**.

La differenza fra ϕ e γ è che γ è una semplice funzione a cui noi diamo dei parametri e ci viene restituita la y , mentre le ϕ sembrano "qualcosa di strano" che ci richiede la "storia" del sistema come parametri.

Tutte queste espressioni possono sostanzarsi matematicamente in diversi modi. Vediamo quello principale e il solo di nostro interesse.

Negli SD a TC:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{equazione (differenziale) di stato}$$

Queste espressioni prendono il nome di **equazione (differenziale) di stato**.

$$y(t) = g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \left\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Quello che è cambiato rispetto a prima è che siamo in presenza di un'equazione differenziale e quindi, quando noi integriamo questa equazione differenziale, il valore della funzione dipende da tutta la storia del termine noto.

Con espressione vettoriale:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad u, y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

3.3.2 Definizioni

- Se f e g sono lineari in x e in u , allora dirò che il sistema dinamico è **lineare**.
- Se $f = f(x, u)$ (non compare esplicitamente t) e $g = g(x, u)$ (non compare esplicitamente t), allora dirò che il sistema dinamico è **tempo invariante o stazionario**.
- Se $g = g(x, t)$ (non compare u), allora dirò che il sistema dinamico è **strettamente proprio**.

3.3.3 Esempi

Rivediamo alcuni degli esempi di prima ed altri nuovi analizzandoli con le definizioni e i concetti appena introdotti.

es. esempio del condensatore:

Equazione della maglia $x + Ri = u$ e equazione del condensatore $i = C\dot{x}$.

$$\begin{cases} x + RC\dot{x} = u \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \\ y = x \end{cases} \quad f(x, u) = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \quad \text{e} \quad g(x, u) = x$$

Evidentemente questo è un sistema dinamico, è lineare, è tempo invariante, è del prim'ordine (una equazione di stato), è strettamente proprio.

es. Massa-molla:

Nell'esempio di prima eravamo arrivati a dire che $m\ddot{y} = F - ky - h\dot{y}$, dove $F = u$.

A questo punto dico che $x_1 = \text{posizione} = y$ e $x_2 = \text{velocità} = \dot{y}$, da qui traggio che $m\dot{x}_2 = u - kx_1 - hx_2$ e $\dot{x}_1 = x_2$.

Mettendo tutto assieme ottengo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Questo è un sistema dinamico, è lineare, è tempo invariante, è strettamente proprio, è del secondo ordine.

es. nuovo esempio:

[immagine dagli appunti del prof]

Una cerniera a cui è attaccato un pendolo (un'asta lunga l (senza peso) con attaccato un peso m). θ è l'angolo di sfasamento del pendolo rispetto all'asse verticale. Diciamo che su questo oggetto c'è una coppia (sinonimo di momento) motrice, che chiamo τ_m .

L'equazione che governa questo oggetto è $j = \ddot{\theta} = \sum \text{coppie}$, dove j è il momento di inerzia e $\ddot{\theta}$ è l'accelerazione angolare. In questo ingresso ci sono diverse coppie: τ_m = coppia motrice, il nostro ingresso = u , τ_f = coppia d'attrito = $-h\dot{\theta}$ ($h > 0$), τ_g = coppia gravità = $mg \cdot l \sin(\theta)$ (mg forza di gravità e $l \sin(\theta)$ è il braccio).

Quindi $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$.

Il momento di inerzia è ml^2 .

Quindi riscrivendo l'equazione che governa il sistema otteniamo: $ml^2 \dot{x}_2 = u - hx_2 - mg \cdot l \sin(x_1)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Questo è un sistema dinamico, è tempo invariante, è non lineare (per via del termine $\sin(x_1)$), è strettamente proprio, è del secondo ordine.

3.4 Sistema dinamico (SD) a tempo discreto (TD)

Per tempo discreto si intende che l'evoluzione temporale è "a passi", esiste infatti un indice temporale k intero che tiene traccia dei numeri di passi. In alcuni casi fra k e il tempo t esiste una relazione, nel senso che k rappresenta un intervallo temporale.

3.4.1 Espressione del sistema

Come sarà fatto un sistema dinamico a tempo discreto?

$$\left. \begin{aligned} x_1(k) &= \phi_1(x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0), u[k_0, k], k) \\ \dots &= \dots \\ x_n(k) &= \phi_n(x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0), u[k_0, k], t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{funzione di transizione dello stato}$$

Queste espressioni prendono il nome di **funzione di transizione dello stato**.

$$y(k) = \gamma(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k), k) \left\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Queste espressioni prendono il nome di **equazione o trasformazione d'uscita**.

E' la stessa identica cosa scritta per i sistemi discreti a tempo continuo, solo che invece di t abbiamo k .

Anche qui ci domandiamo come effettivamente sostanzare queste formule a livello pratico. Nel caso di tempo continuo abbiamo usato le equazioni differenziali. Nel caso di tempo discreto invece usiamo le **equazioni (di stato) alle differenze** usando il "passo prima" $k-1$ (capiremo perchè più avanti nel corso).

Negli SD a TD:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(k) &= f_1(x_1(k-1), x_2(k-1), \dots, x_n(k-1), u(k-1), k) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n(k) &= f_n(x_1(k-1), x_2(k-1), \dots, x_n(k-1), u(k-1), k) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{equazioni (di stato) alle differenze}$$

$$y(k) = g(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k), k) \left\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Nel caso a tempo continuo usavamo l'integrazione per esprimere la dipendenza dagli stati passati, qui abbiamo un equivalente a tempo discreto, in cui lo stato attuale (k) dipende dallo stato di prima ($k-1$).

3.4.2 Definizioni

Le definizioni di **lineare**, **tempo invariante**, **strettamente proprio**, **ordine**, sono le stesse di quelle a tempo continuo (sostituendo t con k).

3.4.3 Esempi

Anche per TC rivediamo uno degli esempi analizzandolo con le definizioni e i concetti appena introdotti.

es. Esempio del tram:

$y(k) = x(k)$ = numero di passeggeri a bordo alla partenza dalla fermata k .

$u(k)$ = numero di passeggeri saliti - numeri di passeggeri scesi alla fermata k .

Vediamo la legge che governa questo sistema:

$$x(k) = x(k-1) + u(k)$$

oss. non è un eq. di stato ben posta perchè a secondo membro c'è $u(k)$.

Per capire bene perchè questa equazione di stato non è corretta vediamo un gioco ("educational game"):

Definisco un operatore "anticipo di un passo" e lo chiamo z , cioè, quando scrivo $z[v(k)]$ (qualunque cosa sia v), intendo in realtà dire $v(k+1)$. Questo operatore è lineare ($z(av_1(k) + bv_2(k)) = av_1(k+1) + bv_2(k+1) = a(zv_1(k)) + b(zv_2(k))$).

Tornando al sistema: $y(k) = x(k) = x(k-1) + u(k)$, siccome questo sistema è tempo invariante la stessa cosa succede anche se sposto l'indice di un'unità, quindi posso riscrivere quest'equazione come $x(k+1) = x(k) + u(k+1)$. Ora posso usare il nostro operatore z e scrivere $zx(k) = x(k) + zu(k)$, $(z-1)x(k) = zu(k)$.

A questo punto posso scrivere $y(k) = \frac{z}{z-1}u(k) = (1 + \frac{1}{z-1})u(k) = \frac{1}{z-1}u(k) + u(k)$, dove chia-

mando $\xi(k) = \frac{1}{z-1}u(k)$, posso scrivere $\begin{cases} \xi(k) = \frac{1}{z-1}u(k) \\ y(k) = \xi(k) + u(k) \end{cases}$. Arrivati a questo punto scriviamo

$(z-1)\xi(k) = u(k)$ e $\xi(k+1) - \xi(k) = u(k)$. Se sfasiamo indietro l'indice di quest'ultima equazione otteniamo $\begin{cases} \xi(k) = \xi(k-1) + u(k-1) \text{ (equazione di stato ben posta, non c'è più } u(k)) \\ y(k) = \xi(k) + u(k) \end{cases}$.

Tutto questo mi evidenzia che il sistema è dinamico, lineare tempo invariante, del primo ordine, e non strettamente proprio (compare $u(k)$ nell'equazione d'uscita).

[ci sono problemi tecnici nella lezione per cui questo esempio è molto mal spiegato, il prof ricommenta l'esempio da capo].

La ragione per cui il sistema è dinamico è che c'è un legame fra ciò che succede al passo prima rispetto al passo corrente. La chiave di tutto è che c'è un anticipo (l'operatore lineare z). [numerosi passaggi algebrici dopo] Arrivo ad avere un $\frac{z}{z-1}$, termine con lo stesso grado sia al numeratore sia al denominatore, cosa che non ci piace molto (lo capiremo più avanti nel corso). [altri passaggi algebrici dopo] Arrivo a definire $\xi(k)$ [ancora un passaggio algebrico] e svolgo l'operatore z su ξ (da $(z-1)\xi(k)$ arrivo a $\xi(k+1) - \xi(k)$). [altri passaggi algebrici] e trovo un'equazione di stato ben posta.

Quindi nel caso a tempo continuo, la ragione per cui il sistema è dinamico è perchè c'è un'equazione differenziale e l'operatore utilizzato era la derivata. Nel caso a tempo discreto abbiamo usato questo operatore z , definito da noi.

Questo ci fa capire che andando a lavorare sugli operatori che rendono dinamico un sistema, si può elaborare il sistema stesso in modo da far emergere la sua struttura in termini di equazioni di stato e d'uscita, che ci permette quindi di studiare il sistema in un modo non possibile se lo lasciassimo come era in origine.

LEZIONE 3 12/03/2020

link clicca qui

3.5 Sistemi dinamici (SD) lineari tempo invarianti (LTI)

I sistemi dinamici lineari tempo invarianti sono sistemi in cui f e g sono lineari in x e in u , e per cui non c'è dipendenza esplicita da t (TC) o da k (TD).

Li vedremo solo SISO (single input, single output).

Cominciamo per il caso a **tempo continuo** (TC). L'unico modo per fare un sistema DC TC LTI è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) &= c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

In forma vettoriale:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1 \quad \dots \quad c_n]$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

I termini A, b, c, d prendono il nome di **descrizione di stato**.

Il caso a **tempo discreto** (TD) è analogo.

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1) \\ y(k) = cx(k) + du(k) \end{cases}$$

oss. Nei libri di testo si può trovare scritto così: $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k+1) = cx(k+1) + du(k+1) \end{cases}$, comunque la cosa importante è che nella prima equazione del sistema ci siano due valori successivi di k e nella seconda ci sia un solo valore di k .

3.6 Equilibrio

Poniamoci una domanda: con $u(t)$ (o $u(k)$) = \bar{u} costante, esiste un qualche valore \bar{x} costante tale che

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= \bar{x} \\ u(t) \text{ (o } u(k)) &= \bar{u} \text{ per } t \text{ (o } k) \geq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow x(t) \text{ (o } x(k)) = \bar{x} \text{ per } t \text{ (o } k) \text{ maggiore di } 0$$

, cioè, con un ingresso costante deciso, esiste un qualche stato costante tale che, prendendo proprio questo stato come stato iniziale e applicando l'ingresso costante deciso, lo stato non cambia?

oss. Il concetto di equilibrio è che se io metto un sistema in uno stato di equilibrio, lui rimane lì. Da notare è che la stabilità è un'altra cosa (se muovo dallo stato d'equilibrio, il sistema ritorna lì).

Per rispondere a questa domanda dobbiamo distinguere i casi a tempo continuo e a tempo discreto:

Vediamo il caso a **tempo continuo** (TC). Se x deve rimanere costante, significa che $\dot{x} = 0$ la derivata deve essere nulla. Quindi in generale con $\dot{x} = f(x, u)$, noto il valore \bar{u} segnato che applico, gli eventuali \bar{x} sono le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Vediamo il caso a **tempo discreto** (TD). Se x deve rimanere costante, significa che $x(k+1) = x(k)$ per ogni k , cioè che $x(k+1)$ deve rimanere costante. Quindi in tal caso dovrò risolvere per \bar{x} l'equazione $f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$.

Vediamo ora il caso **tempo continuo** (TC) **lineare tempo invariante** (LTI, per sistemi non lineari guardare l'osservazione più avanti). In questo caso l'equazione da risolvere diventa $0 = A\bar{x} + b\bar{u}$ (risolvendo questo sistema matriciale si trovano i vari stati di equilibrio). Se A non è singolare, allora esiste uno e uno solo $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, altrimenti o non esiste \bar{x} o esistono infiniti \bar{x} .

Vediamo ora il caso **tempo discreto** (TD) **lineare tempo invariante** (LTI). In questo caso l'equazione da risolvere diventa $\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$. Questa equazione si scrive anche $(I - A)\bar{x} = b\bar{u}$ e se $I - A$ non è singolare, cioè se A non ha autovalori in 1, allora esiste uno e uno solo $\bar{x} = (I - A)^{-1}b\bar{u}$, altrimenti

o non esiste \bar{x} o esistono infiniti valori \bar{x} .

Se esiste un \bar{x} (cioè se un sistema ammette un certo stato di equilibrio) per certo $u = \bar{u}$, in generale esiste un **uscita di equilibrio** $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$.

oss. Nel caso non lineare $g(\bar{x}, \bar{u})$ potrebbe anche non avere significato, quindi non esiste un'uscita d'equilibrio. Invece nel caso lineare (sia TC sia TD) se esiste \bar{x} , allora esiste sempre $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$

3.7 Esempi

es. Esempio della massa-molla visto la lezione scorsa:

L'equazione che governa il sistema è $m\ddot{y} = F - ky - h\dot{y}$, con $u = F$, ed eravamo arrivati a dire che

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases} \quad , \text{ con } x_1 \text{ posizione e } x_2 \text{ velocità.}$$

Riscriviamo il tutto in forma matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ponendo $u = \bar{u}$ esiste un equilibrio \bar{x} ?

Pongo $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$, ovvio perchè la velocità è nulla all'equilibrio.

Pongo $\dot{x}_2 = 0$, quindi $-\frac{k}{m}\bar{x}_1 - \frac{h}{m}\bar{x}_2 + \frac{1}{m}\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k}$.

es. Esempio del pendolo visto la lezione scorsa:

[immagine dagli appunti del prof]

Avevamo posto $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$. Andando a rivedere le equazioni che governano questo sistema

che abbiamo scritto la volta scorsa si arriva ad avere $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{h}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u \end{cases}$ Ponendo

$u = \bar{u}$ esiste un equilibrio \bar{x} ?

Pongo $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$, ovvio perchè la velocità angolare è nulla all'equilibrio.

Pongo $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) + \frac{1}{ml^2}\bar{u}$.

Il risultato è che $\begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin(\frac{\bar{u}}{mgl}) \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$ e quindi:

- se $|\bar{u}| > mgl$, non esiste equilibrio \bar{x} , e il pendolo continua a girare.
- se $\bar{u} = 0$, allora abbiamo due soluzioni: $\bar{x}_1 = 0$ o $\bar{x}_1 = \pi$ (sono due equilibri).

3.8 Movimento

Dato uno stato iniziale $x(0)$ e dato un ingresso $u(t)$ o $u(k)$, per t o $k > 0$:

dato uno stato iniziale $x(0)$
dato un ingresso $u(t)$ (o $u(k)$) per t (o k) ≥ 0 $\left\} \rightarrow \text{si produce un } x(t) \text{ (o } x(k)) \text{ e un } y(t) \text{ (o } y(k))\right.$

Questi $x(t)$ (o $x(k)$) e un $y(t)$ (o $y(k)$) prendono il nome di **movimenti di stato e uscita**.

3.8.1 Formule di Lagrange

Vediamo il caso **tempo discreto (TD) lineare tempo invariante (LTI)**. Questo sistema, come sappiamo, è fatto così:

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1) \\ y(k) = cx(k) + d\dot{x}(k) \end{cases}$$

Vediamo cosa succede se imponiamo un $x(0)$ e un $u(k)$ con $k \geq 0$.

Calcoliamo il movimento dello stato x :

$x(0)$ è il dato di partenza,
 $x(1) = Ax(0) + bu(0)$,
 $x(2) = A^2x(0) + Ab u(0) + bu(1)$,
 \dots ,
 quindi per il generico k posso scrivere

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} bu(l)$$

che prende il nome di **formula di Lagrange a tempo discreto per lo stato**, dove il termine $A^k x(0)$ è il **movimento libero (ML) dello stato** e il termine $\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} bu(l)$ è il **movimento forzato (MF) dello stato**.

oss. ML dipende linearmente solo dallo stato iniziale $x(0)$ e non dall'ingresso $u(k)$, MF dipende linearmente solo dall'ingresso $u(k)$ e non dallo stato iniziale $x(0)$.

oss. ML e MF sommati danno il movimento totale, vale quindi il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE).

oss. Se il sistema non è lineare, in genere non si riesce a separare il movimento in ML e MF.

Calcoliamo il movimento dell'uscita u :

Analogamente si giunge alla **formula di Lagrange a tempo discreto per l'uscita**:

$$y(k) = cx(k) + du(k) = cA^k x(0) + c \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} bu(l) + du(k)$$

dove il termine $cA^k x(0)$ è il **movimento libero (ML) dell'uscita** e il termine $c \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} bu(l) + du(k)$ è il **movimento forzato (MF) dell'uscita**.

Vediamo il caso **tempo continuo (TC) lineare tempo invariante (LTI)**.

Formula di Lagrange a tempo continuo per lo stato

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

con $e^{At} x(0)$ **movimento libero (ML) dello stato** e $\int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$ **movimento forzato (MF) dello stato**.

Formula di Lagrange a tempo continuo per l'uscita

$$y(t) = ce^{At} x(0) + c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$$

con $ce^{At} x(0)$ **movimento libero (ML) dell'uscita** e $c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$ **movimento forzato (MF) dell'uscita**.

3.9 Esponenziale di matrice

Per sistemi di ordine maggiore di 1 occorre calcolare l'esponenziale di matrice e^{At} , vediamo come fare per il caso in cui A sia diagonalizzabile (altrimenti si usa un altro metodo, ma la incontreremo più avanti):

Definizioni e concetti importanti:

- Data una matrice M , scriviamo $e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$.
- Se M è diagonalizzabile, allora esiste una matrice T^{-1} (non singolare) tale che $T^{-1}MT = D$ è una matrice diagonale tale che i suoi elementi sulla diagonale sono gli autovalori λ_i di M . Di conseguenza $M = TDT^{-1}$.
 (**oss.** T è la matrice degli autovettori accostati, T^{-1} si ricava da T , e la matrice diagonale D ha lungo la sua diagonale gli autovalori nell'ordine corrispondente agli autovettori di T).

Quindi unendo questi due concetti posso scrivere

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= TT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{TDT^{-1}TDT^{-1}}{2!} + \frac{TDT^{-1}TDT^{-1}TDT^{-1}}{3!} + \dots = \\
&= TT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{TD^2T^{-1}}{2!} + \frac{TD^3T^{-1}}{3!} + \dots =
\end{aligned}$$

[dove $TT^{-1} = I$. Ora raccogliendo ottengo]

$$= T(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots)T^{-1} = Te^DT^{-1}$$

ma siccome $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, allora elevando D a un generico indice k , otteniamo $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$.

Di conseguenza $Te^DT^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} T^{-1}$.

Tornando alla nostra matrice A (diagonalizzabile),

$$e^{At} = e^{TDA T^{-1}t} =$$

[con $D_A = T^{-1}AT$ diagonale (cioè la matrice A diagonalizzata). Porre molta **attenzione** alla posizione dei T e T^{-1} , è un errore molto gettonato all'esame.]

$$= T(It + D_A t + \frac{(D_A t)^2}{2!} + \dots)T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

con λ_i autovalore i -esimo di A , gli autovalori di $e^{\lambda_i t}$ prendono il nome di **modi del sistema**.

In breve i passaggi per calcolare un generico esponenziale di matrice e^{At} da seguire sono:

- calcolare gli autovalori di A ;
- calcolare gli autovettori degli autovalori di A ;
- definire la matrice diagonalizzante T come l'accostamento degli autovettori (e ricordarsi l'ordine) e la sua inversa T^{-1} ;
- notare che $T^{-1}AT = D =$ matrice con gli autovalori di A lungo la diagonale nell'ordine in cui compaiono gli autovettori in T ;
- $e^{At} = e^{TDT^{-1}t}$ (notare l'ordine con cui sono scritti T e T^{-1} , un errore tipico è confondersi in questo punto)

$$\bullet e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}, \text{ si fanno i conti e abbiamo finito.}$$

3.10 Esempi

es. Movimento a TC:

siano

$$\dot{x} = -2x \text{ (solo ML dello stato) e } x(0) = 4$$

Che cosa è $x(t)$ per $t \geq 0$?

Applicando la formula otteniamo: $x(t) = e^{At}x(0) = e^{-2t}4$

es. Da risolvere a casa!

Siano $\dot{x} = Ax$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, allora come è $x(t)$ per $t \geq 0$?

[il professore lo risolve con Maxima]

4 Linearizzazione di sistemi dinamici non lineari (SD, NL, SISO, TC) nell'intorno di un equilibrio

Consideriamo un sistema dinamico non lineare (TI):

$$S : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

e un suo equilibrio $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$.

Volgiamo determinare un sistema dinamico lineare tempo invariante che approssimi il comportamento di S nell'intorno dell'equilibrio, cioè finchè $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ non si discostano "troppo" dai valori \bar{u} , \bar{x} e \bar{y} di equilibrio.

4.1 Per l'equazione di stato

Consideriamo l'**equazione di stato** e sviluppiamola in serie fermandoci al primo ordine:

$$d(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + f_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + f_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u (+ \dots)$$

dove

- δx e δu rappresentano gli scostamenti di x e di u rispetto all'equilibrio;
- $f(\bar{x}, \bar{u})$ vale 0 perchè \bar{x} è stato di equilibrio per $u = \bar{u}$;
- f_x è la derivata parziale rispetto a x della funzione f : $\frac{\delta f}{\delta x}$;
- $(+ \dots)$ indica i termini di ordine superiore dello sviluppo.

$$\frac{d}{dt}(\bar{x} + \delta x) = \frac{d}{dt}(\delta x) = \delta \dot{x} = \text{derivata temporale dello scostamento di } x \text{ rispetto all'equilibrio}$$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x = \bar{x} + \delta x \quad \dot{x} = \delta \dot{x} \quad 0 = \tau + \delta u$$

$$\delta \dot{x} = f_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + f_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u$$

Equazione di stato lineare, alle variazioni \implies Equazione di stato del sistema linearizzato.

4.2 Per l'equazione d'uscita

Consideriamo ora l'**equazione d'uscita** $y = g(x, u)$ e come prima sviluppiamola in serie fermandoci al primo ordine:

$$g(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) = g(\bar{x}, \bar{u}) + g_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + g_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u (+ \dots)$$

dove

- $g(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$ è $g(x, u)$, cioè y ;
- $g(\bar{x}, \bar{u})$ è y ;
- $(+ \dots)$ indica i termini di ordine superiore dello sviluppo.

$$y - \bar{y} = g_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + g_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \implies \delta y = g_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + g_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u$$

4.3 Sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}$

$$\mathcal{L}^S : \begin{cases} \delta \dot{x} = f_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + f_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \\ \delta y = g_x|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + g_u|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \end{cases}$$

con $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta y = y - \bar{y}$.

4.4 Interpretazione

[immagine dagli appunti del prof]

5 Stabilità

5.1 Equilibrio

Il concetto di stabilità si applica solitamente agli equilibri, ma a volte anche a movimenti, e qualche volta ai sistemi.

Equilibrio stabile:

Sia \bar{x} uno stato di equilibrio del SD generico $\dot{x} = f(x, u)$ per $u = \bar{u}$ costante, si dice equilibrio stabile se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x(0) - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x(t) - \bar{x}| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Interpretazione con x scalare:

[immagina dagli appunti del prof]

Equilibrio asintoticamente stabile (AS):

L'equilibrio deve essere stabile e inoltre deve valere

$$|x(t) - \bar{x}| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$

Equilibrio instabile:

In tutti gli altri casi.

5.2 Stabilità nei SD LTI a TC

$$\dot{x} = Ax + bu$$

Sia \bar{x} uno stato di eq. per $u = \bar{u}$

Allora

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = \bar{x} \\ u(t) = \bar{u} \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow x(t) = \bar{x} \quad t \geq 0$$

Quindi

$$x(t) = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b \bar{u} d\tau = \bar{x}$$

Consideriamo ora il movimento perturbato

$$x_{\Delta}(t) = e^{At}(\bar{x} + \Delta\bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b \bar{u} d\tau$$

Quindi

$$x_{\Delta}(t) - \bar{x} = e^{At} \Delta\bar{x}$$

dove notiamo che la maniera in cui x_{Δ} si muove rispetto a \bar{x} non dipende dal particolare \bar{x} che al secondo membro non compare.

Tutti gli equilibri (se ve ne sono) hanno le stesse caratteristiche di stabilità.

Quindi nei sistemi lineari (TI) la stabilità è una proprietà del sistema.

In tal caso la stabilità del sistema dipende soltanto dal comportamento di e^{At} , cioè dalla matrice A .

es. Sistema LTI a TC di ordine 1:

$\dot{x} = ax$, con a scalare e equilibrio $\bar{x} = 0$.

$$x(0) = \Delta\bar{x}$$

$$x(t) = e^{at} \Delta\bar{x} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 & x(t) \rightarrow 0 = \bar{x} \text{ eq. AS} \\ a = 0 & x(t) = \Delta\bar{x} \text{ eq. S} \\ a > 0 & x(t) \text{ diverse eq. I} \end{cases}$$

Riassunto:

Quindi

- $e^{At} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ per $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ sistema AS (ML di $x \rightarrow 0$);
 - e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ sistema I (ML di x diverge salvo eccezioni);
 - e^{At} non $\rightarrow 0$ e non diverge per $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ sistema S.
-

5.3 Proprietà dei SD LTI a TC AS

- i movimenti liberi di x e di y tendono a 0 per $t \rightarrow \infty$, quindi tali SD "dimenticano lo stato iniziale";
- Se

$$u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi segnale} & t < \bar{t} \\ 0 & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

allora per $t \geq \bar{t}$ c'è solo ML e quindi $x, y \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

5.4 Stabilità di un SD LTI a TC e matrice A

Caso in cui A è diagonalizzabile (se ne vedi più avanti): $x_L(t) = e^{At}x(0) = e^{T \text{diag}\{\lambda_i\}T^{-1}t}x(0) = T \text{diag}\{e^{\lambda_i t}\}T^{-1}x(0)$, dove $x_L(t)$ è ML di x , T è la matrice che diagonalizza A e $e^{\lambda_i t}$ prende il nome di modi del sistema.

Se A è reale, allora λ_i sono o reali o coppie complesse coniugate.

Movimento libero $\rightarrow 0$ per ogni $x(0)$ vuol dire che tutti i modi devono tendere a 0 per $t \rightarrow \infty$.

- λ_i reale

$$\begin{cases} \lambda_i > 0 & \text{modo divergente} \\ \lambda_i = 0 & \text{modo costante} \\ \lambda_i < 0 & \text{modo} \rightarrow 0 \end{cases}$$

- $\lambda_{h,k} = \alpha \pm i\beta$ coppia complessa coniugata, con α e β reali, implica che $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t} \sin(\beta t) + i \cos(\beta t)$ [perché $\sin(\beta t) + i \cos(\beta t)$ è limitata] e quindi

$$\begin{cases} \text{Re}(\lambda) < 0 & \text{modo convergente} \\ \text{Re}(\lambda) = 0 & \text{modo limitato ma non tendente a 0} \\ \text{Re}(\lambda) > 0 & \text{modo divergente} \end{cases}$$

5.5 Stabilità e autovalori di A

- Tutti gli autovalori di A hanno $\text{Re} < 0 \iff$ Sistema AS.
- Almeno un autovalore di A ha $\text{Re} > 0 \implies$ Sistema I.
- Tutti gli autovalori di A hanno $\text{Re} \leq 0$ e ne esiste almeno uno con $\text{Re} = 0 \implies$ Sistema S, ma non AS; oppure sistema I.

5.6 Caso a TD (A diagonalizzabile)

$$x_L(k) = A^k x(0)$$

$$A^k = (T \text{diag}\{\lambda_i\}T^{-1})^k = T \text{diag}\{\lambda_i\}T^{-1} \dots (k \text{ volte}) = T \text{diag}\{\lambda_i^k\}T^{-1}, \text{ dove } \lambda_i^k \text{ sono i modi del sistema.}$$

Quindi

- $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \iff$ sistema AS.
- $\exists i : |\lambda_i| > 1 \implies$ sistema I.
- $\begin{cases} |\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i \\ \exists i : |\lambda_i| = 1 \end{cases} \implies$ Sistema S, ma non AS, oppure sistema I.

oss.1 Errore tipico: Nel caso a tempo continuo si guarda la parte reale degli autovalori, nel caso a tempo discreto si guarda il modulo (!) degli autovalori.

oss.2 Errore tipico: Più avanti vedremo il criterio di Routh, ma da notare è che non vale per i sistemi a tempo discreto, vale solo per sistemi a tempo continuo (!).

5.7 Criteri di stabilità (asintotica) per SD LTI a TC

Domanda: data la matrice A , posso dire se tutti i suoi autovalori hanno o meno $Re < 0$ senza calcolarli?

Sì, vi sono criteri per dirlo basati sull'ispezione di A o del suo polinomio caratteristico (PC) $\Pi(s) = \det(sI - A)$:

- $\det(A) = \prod_{i=1}^n S_i$, dove con S_i si intendono gli autovalori \implies se $\det(A) = 0$ esiste $S_i = 0 \implies$ sistema non AS.
- $tr(A) = \sum_{i=1}^n S_i \implies$ se $tr(A) > 0$ esiste S_i tale che $Re(S_i) > 0 \implies$ sistema I.
- Se $Re(S_i) < 0$ per ogni i (cioè se il sistema è AS), allora i coefficienti di $\Pi(s)$ sono tutti concordi e non nulli (n.b. il viceversa vale solo per polinomi del secondo ordine).

LEZIONE 5 17/03/2020

[link](#) clicca qui

5.8 Esempi

es. Prendiamo un polinomio caratteristico $\Pi(s) = 5s^2 + s$: questo è chiaramente non asintoticamente stabile (c'è una radice nulla).

es. $\Pi(s) = s^3 - s^2 + s + 4$: anche questo non è asintoticamente stabile (c'è un coefficiente discorde)

es. $\Pi(s) = s^5 + 4s^3 + 3s^2 + s + 5$: anche questo non è asintoticamente stabile (manca il termine s^4 che quindi ha coefficiente nullo).

es. $\Pi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 5$: in questo esempio le condizioni necessarie sono soddisfatte, ma non sappiamo dire se è o meno asintoticamente stabile. Ci serve ora un criterio per stabilire se è asintoticamente stabile.

5.9 Routh

Il criterio di Routh è una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un SD LTI a TC (NOTA BENE: non vale per sistemi a tempo discreto! L'analogo a TD è il criterio di Jury, ma noi non lo tratteremo).

Il criterio di Routh si basa sulla tabella di Routh che si costruisce a partire dal polinomio caratteristico $\Pi(s)$.

5.9.1 Tabella di Routh

Definiamo il polinomio caratteristico come

$$\Pi(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

oss. il polinomio deve avere tutti i termini, altrimenti violiamo una delle condizioni necessarie che abbiamo visto alla lezione scorsa.

La tabella di Routh si costruisce nel seguente modo:

- Si compilano le prime due righe a "zig-zag" (come mostrato con delle frecce) con i coefficienti del polinomio.

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & & a_2 & & \dots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ a_1 & & a_3 & & \dots \end{array}$$

- l'ultima colonna (delle prime due righe) può terminare in due modi:

$$\begin{array}{ccc} \dots & a_{n-1} & \dots & a_n \\ & & \text{oppure} & \\ \dots & a_n & \dots & 0 \end{array}$$

- Le righe successive si costruiscono a partire dalle prime due.
In totale, considerando anche le prime due righe, ci sono $n + 1$ righe.
Ogni riga dalla terza in poi dipende dalle due precedenti seguendo una regola:

$$h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \dots$$

$$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots$$

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \dots$$

prese due generiche righe (h_i e q_i), la riga successiva (w_i) si genera come $w_i = -\frac{1}{q_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ q_1 & q_{i+1} \end{bmatrix}$.

Gli elementi mancanti al termine delle righe soprastanti si assumono nulli.

- Se troviamo un elemento nullo in prima colonna, ci si ferma, sicuramente il sistema non è asintoticamente stabile, e siamo in presenza di un caso particolare che non ci permette di calcolare la tabella di Routh.

5.9.2 Criterio di Routh

Un SD con polinomio caratteristico $\Pi(s)$ è asintoticamente stabile se e solo tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi (e non nulli).

Corollario

Se non vi sono elementi nulli in prima colonna, allora il numero di inversioni di segno sulla prima colonna è uguale al numero di radici di $\Pi(s)$ con $Re > 0$. [non lo useremo mai questo corollario].

5.9.3 Esempi

es. $\Pi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 5$: soddisfa le condizioni necessarie, quindi facciamo la tabella di Routh. Siccome $n = 4$ la tabella avrà $n + 1 = 5$ righe:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \\ \gamma & & \\ \delta & & \end{array} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 5 \quad \gamma = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = -\frac{13}{7} \quad \delta = -\frac{1}{\gamma} \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome γ è discorde, sappiamo che non è asintoticamente stabile.

Inoltre fra α e γ c'è un'inversione di segno e fra γ e δ c'è un'altra inversione di segno. Avendo due inversioni di segno, so che ci sono due radici con $Re > 0$. Da notare che, anche se abbiamo un solo elemento discorde, ci sono due inversioni di segno.

es. Dato il SD LTI a TC con polinomio caratteristico $\Pi(s) = s^3 + 2s^2 + hs + k$, dire per quali valori di (h, k) esso è asintoticamente stabile.

Deduciamo che dovremo avere $h > 0$ e $k > 0$ (altrimenti violo una delle condizioni necessarie viste la lezione scorsa). Usiamo ora Routh, l'unico caso in cui si può evitare di usare Routh è se il polinomio caratteristico è di secondo grado.

$$\begin{array}{ccc} 1 & h & \\ 2 & k & \\ \alpha & & \\ \beta & & \end{array} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & h \\ 2 & k \end{bmatrix} = \frac{2h - k}{2} \quad \beta = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} 2 & k \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = k$$

Disequazioni per imporre che i termini della prima colonna siano concordi:

$$\begin{cases} h - \frac{k}{2} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > 2h \end{cases} \quad \text{ricordando che } k > 0 \text{ e } h > 0$$

6 Segnali e trasformate

Consideriamo un sistema S dinamico LTI a TC (SISO), con un ingresso u e un'uscita y .

[immagine dagli appunti del prof]

Dominio del tempo: fra il segnale $u(t)$ (la causa) e il segnale $y(t)$ (effetto) per noi c'è un legame differenziale ($u(t) \rightarrow y(t)$). Ciò che attribuisce a un sistema il carattere dinamico è la presenza di equazioni differenziali. Nel dominio del tempo abbiamo $t, u, y \in \mathbb{R}$

Dominio delle trasformate: Supponiamo di poter associare a $u(t)$ del dominio del tempo, con un'operazione che chiamiamo "trasformazione", un'altra funzione $U(s)$ del dominio delle trasformate ($u(t) \rightarrow U(s)$), dove U è una funzione e s è una variabile complessa. Facciamo la medesima cosa, ma con verso opposto, con $Y(s) \rightarrow y(t)$, dove questa operazione prende il nome di "antitrasformazione". Nel dominio delle trasformate abbiamo $s, U, Y \in \mathbb{C}$.

Date queste premesse, il legame fra $U(s)$ e $Y(s)$, il cui corrispondente nel dominio del tempo è differenziale, nel dominio delle trasformate è di tipo algebrico ($U(s) \rightarrow Y(s)$).

6.1 Serie di Fourier

Dato un segnale $v(t)$ periodico di periodo T , posso esprimerlo come

$$v(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin(k\omega_0 t + \phi_k)$$

dove $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Questo significa che posso esprimere un segnale periodico come somma di infinite (infinito numerabile) sinusoidi di frequenze multiple di una fondamentale (ω_0 , di periodo T).

6.2 Trasformata di Fourier

Dato un segnale $v(t)$ definito su tutto \mathbb{R} (non necessariamente periodico), chiamiamo la sua trasformata di Fourier come

$$V(j\omega) = \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{se esiste})$$

L'antitrasformata di Fourier, invece, è

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(j\omega)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

oss. una trasformata è definita dal suo nucleo, che è $e^{-j\omega t}$.

oss. l'antitrasformata è un integrale sulla variabile ω . L'integrale è stato introdotto ad analisi con le somme integrali (per calcolare l'area sottesa a una funzione, si fanno i rettangolini e si sommano, poi si fa tendere la dimensione dei rettangolini a zero, etc). Immaginiamo, con la metafora dei rettangolini, di fare tanti rettangolini dell'asse della nostra variabile ω , prendiamo uno di questi rettangolini e il suo contributo a $v(t)$ nell'antitrasformata è $e^{j\omega t}$ moltiplicata per un numero complesso $V(j\omega)$. Il termine $e^{j\omega t}$, il nostro nucleo, può avere due aspetti, se $\omega = 0$ è una costante, altrimenti è una sinusoide (ricordando che è un numero complesso e può essere espresso come somma di seni e coseni). Ora prendiamo il caso in cui il nucleo è una sinusoide, moltiplicarla per un numero complesso $V(j\omega)$ significa attenuarla o amplificarla (modulo) e sfasarla (argomento). Quindi noi per ricostruire $v(t)$ con l'antitrasformata devo sommare infinite sinusoidi, ognuna delle quali caratterizzate da una propria ampiezza e una propria fase indicata dal valore di $V(j\omega)$, **cioè $V(j\omega)$ ci dice quanto pesa ogni frequenza in $v(t)$** . In questo caso $v(t)$ è somma di infinite (infinito del continuo) sinusoidi.

6.3 Trasformata di Laplace

Dato un segnale $v(t)$ definito per $t \geq 0$ (o equivalentemente nullo per $t < 0$), definiamo trasformata di Laplace come

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$

con $s, V \in \mathbb{C}$.

L'antitrasformata di Laplace, invece, è

$$v(t) = \mathcal{L}[V(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} V(s)e^{st} ds$$

dove gli estremi dell'integrale rappresentano il fatto che quanto integriamo rispetto a una variabile complessa (s) dobbiamo specificare su quale linea si muove la variabile (spiegato molto "alla buona", non dare peso a questo fatto): la variabile di integrazione s si muove su una retta parallela all'asse immaginario di parte reale (ascissa) α , andando con la sua parte immaginaria (ordinata) da $-\infty$ a $+\infty$.

oss. Abbiamo che il nucleo è $e^{st} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$. I segnali con questa forma sono, non solo le costanti e le sinusoidi (come nel caso del nucleo di Fourier), ma anche le sinusoidi che si smorzano, le sinusoidi che divergono, i segnali che esponenzialmente divergono, i segnali che esponenzialmente convergono. I segnali che si lasciano trasformare secondo Fourier, sono i segnali che si lasciano ricostruire per mezzo di una somma infinita di segnali che partono dal nucleo $e^{j\omega t}$, cioè costanti e sinusoidi, moltiplicato per un numero complesso $V(j\omega)$, cioè amplificate o attenuate e sfasate; i segnali che si lasciano trasformare secondo Laplace, sono molti di più, perchè il nucleo di partenza e^{st} rappresenta un insieme di segnali molto più grande. Tutti i segnali trasformabili secondo Fourier sono trasformabili anche secondo Laplace, ma non vale il viceversa.

6.3.1 Esempi

Vediamo tre trasformate di Laplace notevoli (da imparare a memoria, perchè saranno molto frequenti).

es. $v(t) = sca(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, la trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[sca(t)] = \int_0^{\infty} sca(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

es. $v(t) = imp(t) := \begin{cases} imp(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} imp(t) dt = 1 \end{cases}$

[immagine dagli appunti del prof]

La trasformata di Laplace è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[imp(t)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_{\epsilon}(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f_{\epsilon}(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-st}}{-s\epsilon} \right]_0^{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-s\epsilon}}{-s\epsilon} - \frac{1}{-s\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = [F.I., Hopital] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{s}e^{-s\epsilon}}{\cancel{s}} = 1 \end{aligned}$$

es. $v(t) = e^{at}$ per $t \geq 0$ o equivalentemente $v(t) = e^{at}sca(t)$, la trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[e^{at}sca(t)] = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad \text{se } Re(a-s) < 0, \text{ cioè } Re(s) > a$$

Riassunto dei concetti chiave introdotti:

- Le trasformate sono strumenti che legano biunivocamente segnali nel tempo a funzioni complesse di variabile complessa.
 - Le trasformate di Fourier interpretano un segnale come somma di infinite sinusoidi, invece le trasformate di Laplace non considera sinusoidi, ma delle esponenziali complesse (categoria nella quale rientrano anche le sinusoidi).
-

6.3.2 Proprietà della trasformata di Laplace

- La trasformata di Laplace è un operatore lineare:

$$\mathcal{L}[\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[v_1(t)] + \beta \mathcal{L}[v_2(t)]$$

- Trasformata di Laplace della derivata:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[v(t)] - v(0)$$

dove se v è discontinua in 0 si può usare 0^- .

Questa proprietà fa sì che legami differenziali diventino legami algebrici. L'operazione che nel dominio del tempo è la derivata, corrisponde nel dominio delle trasformate a una moltiplicazione per s più un termine $v(0)$.

es. $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}sca(t)\right] = s\mathcal{L}[sca(t)] - sca(0^-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1$.

- Trasformata di Laplace dell'integrale:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[v(t)]$$

L'integrale nel dominio del tempo corrisponde a una divisione per s nel dominio delle trasformate.

- Trasformata di Laplace di un segnale ritardato:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[v(t)]$$

con $\tau > 0$ detto ritardo.

dim. $\mathcal{L}[v(t - \tau)] = \int_0^\infty v(t - \tau)e^{-st}dt$. Se avessimo scritto $e^{-s(t-\tau)}$ non avremmo applicato correttamente la definizione di trasformata: il termine $e^{-st}dt$ nell'integrale è sempre fatto così, non va modificato mai (errore molto frequente), dobbiamo vedere la trasformata di Laplace come un modulo da compilare fatto così: $\mathcal{L}[-] = \int_0^\infty - e^{-st}dt$. Continuiamo la dimostrazione con

un cambio di variabile $x = t - \tau \Rightarrow \begin{cases} t = x + \tau \\ dt = dx \end{cases} \quad \begin{cases} t = 0 \rightarrow x = -\tau \\ t = \infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$, quindi $\int_0^\infty v(t - \tau)e^{-st}dt = \int_{-\tau}^\infty v(x)e^{-s(x+\tau)}dx = \int_0^\infty v(x)e^{-sx}e^{-s\tau}dx = e^{-s\tau} \int_0^\infty v(x)e^{-sx}dx = e^{-s\tau}\mathcal{L}[v(t)]$.

LEZIONE 6 18/03/2020

link clicca qui

6.4 Teorema del valore iniziale

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \implies v(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV(s)$$

dove possiamo usare $v(0^+)$ se v è discontinua in 0.

es. dato $v(t) = sca(t)$, la sua trasformata è $V(s) = \frac{1}{s}$ e $v(0^+) = 1$ perchè $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{s} = 1$.

6.5 Teorema del valore finale

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \implies \text{se esiste } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t), \text{ allora } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s)$$

6.6 Trasformate di Laplace notevoli

$v(t)$	$V(s)$
$k \cdot imp(t)$	$k \cdot 1$
$k \cdot sca(t)$	$k \cdot \frac{1}{s}$
$k \cdot ram(t) = k \cdot t \cdot sca(t)$	$k \cdot \frac{1}{s^2}$
$k \cdot e^{at} sca(t)$	$k \cdot \frac{1}{s-a}$
$t^n \cdot e^{at} sca(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Da notare è che la rampa è l'integrale dello scalino, che a sua volta è l'integrale dell'impulso. Queste prime tre trasformate prendono il nome di segnali canonici, e sono tutte quelle trasformate di Laplace che valgono $\frac{1}{s^n}$.

Notiamo che segnali come trigonometrici sono rappresentabili come esponenziali complessi, come $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \dots$ e così possiamo ricavare le trasformate di Laplace di tutte le funzioni trigonometriche.

6.7 Antitrasformazione secondo Heaviside

Questo metodo vale per trasformate di Laplace razionali fratte, cioè trasformate che possono essere scritte come

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N, D sono polinomi in s , inoltre il grado di N è sempre minore o uguale del grado di D .

Il meccanismo di antitrasformazione di Heaviside consiste nella scomposizione di $V(s)$ in una somma di fratti semplici la cui \mathcal{L}^{-1} è nota.

Vediamo un esempio per capire il meccanismo dell'antitrasformata secondo Heaviside, successivamente esporremo il metodo generale.

es. sia la trasformata di Laplace $V(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$, per antitrasformarla scrivo $V(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+1} + \frac{\gamma}{s+3}$, a questo punto devo calcolare α, β e γ facendo il denominatore comune ed eguagliando i numeratori:

$$\alpha(s+1)(s+3) + \beta s(s+3) + \gamma s(s+1) = s+2$$

e ora mi basta eguagliare i coefficienti dei vari gradi di s in modo da avere un sistema con cui trovare α, β e γ , oppure, più semplicemente, mi basta notare che imponendo $s=0, s=-1$ e $s=-3$ deduco che:

$$\begin{cases} s=0 \Rightarrow 3\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \\ s=-1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3} \\ s=-3 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Quindi $V(s) = \frac{2/3}{s} - \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/6}{s+3}$ di cui so fare l'antitrasformata sfruttando le trasformate notevoli:

$$\mathcal{L}^{-1} = \frac{2}{3} \text{sca}(t) - \frac{1}{2} e^{-t} \text{sca}(t) - \frac{1}{6} e^{-3t} \text{sca}(t)$$

Vediamo ora il **caso generale**:

Sia

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

una trasformata di Laplace, con N, D polinomi in s .

Le radici di $N(s)$ prendono il nome di **zeri** della trasformata di Laplace, mentre le radici di $D(s)$ prendono il nome di **poli** della trasformata di Laplace.

Il primo passaggio è quello di fattorizzare $D(s)$ che risulterà così espresso come prodotto di termini del tipo $s-p$ (dove quindi sarà presente un polo reale semplice) oppure $(s-p)^n$ (dove quindi sarà presente un polo reale multiplo) oppure altri casi complessi che però non tratteremo.

- **Polo reale semplice:**

La trasformata è della forma

$$\frac{N(s)}{\dots (s-p) \dots} =$$

(al denominatore ci possono essere vari fattori, l'importante è che ci sia il fattore $(s-p)$), la cui scomposizione è della forma

$$= \dots + \frac{\alpha}{s-p} + \dots$$

- **Polo reale multiplo:**

La trasformata è della forma

$$\frac{N(s)}{\dots (s-p)^n \dots} =$$

la cui scomposizione è della forma

$$= \dots + \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n} + \dots$$

- **Casi complessi:** [non li vediamo nel corso]

A seguito della scomposizione l'antitrasformata di Laplace è facilmente calcolabile usando le trasformate di Laplace notevoli.

es. dato $V(s) = \frac{2}{(s-1)^2(s+2)}$, trovare $v(t)$: scompongo la trasformata:

$$V(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{s+2}$$

Eguaglio i numeratori:

$$\alpha(s-1)(s+2) + \beta(s+2) + \gamma(s-1)^2 = 2$$

Per trovare α, β e γ ci sono due possibilità, o svolgo tutte le moltiplicazioni dell'equazione precedente e poi costruisco un sistema eguagliando i coefficienti dei vari s^0, s^1, s^2, \dots , oppure più semplicemente cerco i poli che sono 1 e -2 e ricavo α, β e γ sostituendoli in s :

$$\begin{cases} s=1 \Rightarrow 3\beta=2 \Rightarrow \beta=\frac{2}{3} \\ s=-2 \Rightarrow 9\gamma=2 \Rightarrow \gamma=\frac{2}{9} \\ s=[\text{qualunque numero a piacere, per esempio } 0]=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{usando i valori precedentemente trovati di } \beta \text{ e } \gamma \Rightarrow \alpha=-\frac{2}{9} \end{cases}$$

Quindi

$$V(s) = \frac{-2/9}{s-1} + \frac{2/3}{(s-1)^2} + \frac{2/9}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = -\frac{2}{9}e^{t\text{sca}(t)} + \frac{2}{3}te^{t\text{sca}(t)} + \frac{2}{9}e^{-2t\text{sca}(t)}$$

es.

[immagine dagli appunti del prof]

Cerchiamo di scrivere il segnale $v(t)$ a partire dal suo grafico in una somma di segnali canonici eventualmente ritardati.

Ogni volta che c'è un cambio di pendenza interviene una rampa.

$$v(t) = 2\text{sca}(t) + 0,5\text{ram}(t) - 3\text{sca}(t-2) - 0,5\text{ram}(t-2)$$

$$V(s) = \frac{2}{s} + \frac{0,5}{s^2} - \frac{3}{s}e^{-2s} - \frac{0,5}{s^2}e^{-2s}$$

7 Funzione di trasferimento

Lavoriamo con SD LTI a TC SISO.

7.1 Definizioni e nuovi concetti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \quad \text{rappresentamento di stato}$$

Trasformiamo secondo Laplace l'**equazione di stato**:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + bu(t)]$$

Usiamo ora la proprietà della derivata e la proprietà di linearità della trasformata di Laplace:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s)$$

che posso riscrivere come

$$(sI - A)X(s) = x(0) + bU(s)$$

Allora per qualunque s che appartiene all'insieme degli autovalori di A posso scrivere:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}bU(s)$$

7.1.1 Equazione di stato

La trasformata di Laplace dell'**equazione di stato** è quindi composta da due termini: il primo dipende linearmente solo dallo stato iniziale, il secondo dipende linearmente solo dall'ingresso. Quindi il primo termine $(sI - A)^{-1}x(0)$ è la trasformata di Laplace del **movimento libero (ML)** di x , e il secondo termine $(sI - A)^{-1}bU(s)$ è la trasformata di Laplace del **movimento forzato (MF)** di x .

Questa formula che abbiamo scritto è la corrispondente nel dominio delle trasformate di ciò che nel dominio del tempo è la formula di Lagrange nello stato.

7.1.2 Equazione d'uscita

Ora trasformo l'**equazione d'uscita** e vi sostituisco $X(s)$ che abbiamo appena trovato:

$$Y(s) = cX(s) + dU(s) = c(sI - A)^{-1}x(0) + [c(sI - A)^{-1}b + d]U(s)$$

Anche qui il primo termine $c(sI - A)^{-1}x(0)$ è la trasformata di Laplace del **movimento libero (ML)** di y , e il secondo termine $[c(sI - A)^{-1}b + d]U(s)$ è la trasformata di Laplace del **movimento forzato (MF)** di y .

Il movimento forzato contiene al suo interno il fattore $c(sI - A)^{-1}b$, che prende il nome di **funzione di trasferimento** $G(s)$ ed è il termine che moltiplicato per la trasformata dell'ingresso ti restituisce il movimento forzato.

Riassunto per SD LTI a TC SISO:

- Descrizione nello spazio di stato: quaterna A, b, c, d .
- Descrizione ingresso/uscita: funzione di trasferimento (FdT) $G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$.
- Interpretazione: $\mathcal{L}[\text{uscita forzata da } u(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)]$

7.2 Calcolo e aspetto di una funzione di trasferimento

$$\text{Funzione di trasferimento: } G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

Come è fatta? Analizziamone la struttura.

Analizziamo prima il solo termine

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \dots & \Delta_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1}(s) & \dots & \Delta_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

dove il denominatore $\det(sI - A)$ è il polinomio caratteristico di A , che quindi ha grado n (= ordine del sistema); e dove i termini $\Delta_{ik}(s)$ sono determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$ e quindi hanno grado al più $n-1$.

Vediamo ora il termine

$$c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{\det(sI - A)} [c_1 \quad \dots \quad c_n] \begin{Bmatrix} \Delta_{1j}(s) \\ \vdots \\ \Delta_{nj}(s) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

, dove $\{\Delta_{ij}(s)\} = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \dots & \Delta_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1}(s) & \dots & \Delta_{nn}(s) \end{bmatrix}$ come al punto precedente. Ancora una volta otteniamo un polinomio di al più grado $n-1$.

Vediamo ora il termine finale $G(s)$

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \frac{\bar{N}(s)}{D(s)} + d$$

dove il termine $c(sI - A)^{-1}b$ ci riconduce a un'espressione razionale fratta $\frac{\bar{N}(s)}{D(s)}$, con $D(s)$ polinomio caratteristico di A e quindi grado n , e invece $\bar{N}(s)$ è un polinomio di grado al più $n-1$.

Se e solo se $d = 0$ (cioè se il sistema è strettamente proprio) abbiamo $G(s) = \frac{\bar{N}(s)}{D(s)}$ in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.

Altrimenti (se e solo se $d \neq 0$) abbiamo $G(s) = \frac{\bar{N}(s) + dD(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$, con $N(s) = \bar{N}(s) + dD(s)$, in cui il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore.

Quindi, riassumendo,

- $G(s)$ è razionale fratta.
- I suoi poli (radici del denominatore) sono autovalori di A .
oss. In alcuni casi può darsi che non tutti gli autovalori di A compaiano come poli, perchè capita che alcuni termini del numeratore si semplifichino col alcuni termini del denominatore (ci torneremo più avanti).
- Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore se e solo se (\Leftrightarrow) $d \neq 0$, altrimenti il grado del numeratore è minore ($<$) del grado del denominatore.

7.3 Esempi

es. Dato il Sd LTI a TC SISO descritto nell'ospazio di stato da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = [2 \quad 1] \quad d = 0$$

calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$.

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 =$$

[esiste un truccetto per calcolare la trasposta della generica matrice M 2x2: si moltiplica $\frac{1}{M}$ per la matrice ottenuta scambiando di posto i termini sulla diagonale principale e invertendo il segno dei termini sulla diagonale secondaria]

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4) + 3} [2 \quad 1] \begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^2 - 5s + 7} [2 \quad 1] \begin{bmatrix} s-4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2s-5}{s^2 - 5s + 7}$$

8 Esercizi di ricapitolazione degli argomenti fino ad ora trattati

8.1 Es. Equilibri e stabilità in un sistema non lineare, TDE 06/05/2014 E1

Dato il SD NL a TC:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 e^{x_2} \\ y = x_1(x_2 - u) + u^2 \end{cases}$$

Domande:

- Trovare gli stati e le uscite di equilibrio per $u(t) = \bar{u} = -1$;
- Trovare le stabilità degli equilibri eventualmente trovati al punto precedente.

Equilibri:

essendo a TC, la caratteristica degli equilibri è che le derivate dello stato sono nulle (devono essere ferme)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 + \bar{u} &= 0 \\ \bar{x}_1 e^{\bar{x}_2} &= 0 \end{aligned}$$

Con la seconda equazione ricaviamo immediatamente che $\bar{x}_1 = 0$ e con la prima equazione invece ricaviamo che $\bar{x}_2 = -\bar{u}$.

Quindi per $\bar{u} = -1$ esiste il solo equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Stato dell'uscita d'equilibrio:

$$\bar{y} = \bar{x}(\bar{x}_2 - \bar{u}) + \bar{u}^2 = 1$$

Sistema linearizzato e stabilità degli equilibri:

Ripasso dei criteri:

- Sistema linearizzato è asintoticamente stabile, (\Rightarrow) allora abbiamo un equilibrio asintoticamente stabile.
- Matrice A del sistema linearizzato con almeno un autovalore con parte reale positiva, (\Rightarrow) allora equilibrio instabile.
oss. un sistema lineare (o linearizzato) può essere instabile anche senza avere autovalore con parte positiva (ricontrolla la teoria per saperne di più).
- Altrimenti non si può dire nulla, può essere qualunque cosa.

Applichiamo questi criteri:

$$\text{Calcoliamo } f_x = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ e^{x_2} & x_1 e^{x_2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Nell'equilibrio } f_x|_{\bar{x}, \bar{u}} = [\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 1, \bar{u} = -1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e & 0 \end{bmatrix}.$$

Autovalori: $\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -e & s \end{bmatrix} = 0 \rightarrow s^2 - e = 0$, quindi abbiamo un autovalore con parte reale positiva e quindi siamo in presenza di un equilibrio instabile.

8.2 Es. Stabilità, funzione di trasferimento e calcolo del movimento forzato con Heaviside, TDE 04/05/2015 E1

Dato il SD LTI SISO a TC

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

determinare

- Se è asintoticamente stabile, stabile o instabile;
- la funzione di trasferimento $G(s)$;
- $y(t)$ prodotto da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (cioè solo movimento forzato) e $u(t) = 2sca(t)$.

Stabilità:

Autovalori di A :

$$\det \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow s^2 + s - 110 + 108 = 0 \rightarrow s^2 + s - 2 = 0$$

Abbiamo una variazione di segno e un autovalore con parte reale positiva, quindi il sistema è instabile. La risposta a questa domanda termina qua, senza dover calcolare gli autovalori, ma noi proseguiamo coi conti, perchè tanto ci servono per i punti successivi.

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{9}{4}} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

[per il calcolo della trasposta di una matrice 2x2 (solo e soltanto 2x2) si moltiplica $\frac{1}{\det(matrice)}$ per la matrice ottenuta cambiando di posizione i termini della diagonale principale e invertendo i segni dei termini della diagonale secondaria]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s(+2)(s-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-10 & 9 \\ -12 & s+11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(+2)(s-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3s+3 \\ -3s+3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s(+2)(s-1)} (-6s+6-3s+3) = \frac{-9s+9}{(s+1)(s-1)} = \frac{-9(s-1)}{(s+2)(s-1)} = \frac{-9}{s+2} \end{aligned}$$

Movimento forzato prodotto da $u(t) = 2sca(t)$:

Nella consegna il fatto che si imponga $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ significa che nel calcolo dell'uscita nel dominio delle trasformate, non c'è bisogno di calcolare il movimento libero, perchè è nullo, ma per calcolare l'uscita è sufficiente considerare il movimento forzato:

$$U(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = -\frac{18}{s(s+2)}$$

Uso Heaviside:

$$U(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2}$$

Denominatore comune e uguaglio i numeratori:

$$\alpha(s+2) + \beta s = 18 \Rightarrow \begin{cases} s=0 \rightarrow \alpha = -9 \\ s=-2 \rightarrow \beta = 9 \end{cases}$$

Quindi

$$Y(s) = -\frac{9}{s} + \frac{9}{s+2}$$

che antitrasformata mi produce

$$y(t) = -9sca(t) + 9e^{-2t}sca(t) = 9sca(t)(-1 + e^{-2t})$$

8.3 Es Applicazione reale

Consideriamo un corpo solido riscaldato e che scambia convettivamente con una temperatura fissa.
[immagine dagli appunti del prof]

La potenza termica P e la temperatura fissa T_e rappresentano gli ingressi del sistema, la temperatura T del corpo rappresenta lo stato del sistema, inoltre il corpo è caratterizzato da una certa capacità termica C , c'è anche uno scambio termico per convezione con la temperatura fissa e vale $G(T - T_e)$, con G una costante chiamata conduttanza termica.

Diciamo che la capacità termica $C = 10 J/K$, e che la conduttanza termica $G = 2 W/K$

Modello:

Bilancio dinamico di energia:

$$\frac{d}{dt}E = \sum P$$

con $E = CT$ e $P = P - G(T - T_e)$.

Quindi

$$C\dot{T} = P - G(T - T_e)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{C}P - \frac{G}{C}T + \frac{G}{C}T_e$$

$$\dot{T} = -\frac{G}{C}T + \frac{1}{C}P + \frac{G}{C}T_e$$

Che è proprio una equazione di stato in cui $\dot{x} = \dot{T}$, $a = -\frac{G}{C}$, $u = \frac{1}{C}P$, disturbo = $\frac{G}{C}T_e$.

Trasformiamo secondo Laplace e guardiamo soltanto i movimenti forzati:

$$sT(s) = -\frac{G}{C}T(s) + \frac{1}{C}P(s) + \frac{G}{C}T_e(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{s + \frac{G}{C}} \left(\frac{1}{C}P(s) + \frac{G}{C}T_e(s) \right) = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{G}{C}} P(s) + \frac{\frac{G}{C}}{1 + \frac{G}{C}s} T_e(s)$$

Dove il termine $\frac{1}{s + \frac{G}{C}} P(s)$ è la funzione di trasferimento da P a T , cioè l'effetto di P su T , e il termine

$\frac{\frac{G}{C}}{1 + \frac{G}{C}s} T_e(s)$ è la funzione di trasferimento da T_e a T , cioè l'effetto di T_e su T .

T è quindi calcolabile con il principio di sovrapposizione degli effetti.

Scriveremo spesso la funzione di trasferimento da un generico U a un generico Y come $\frac{Y(s)}{U(s)}$, ovvero come nel nostro caso:

$$T(s) = \frac{T(s)}{P(s)} P(s) + \frac{T(s)}{T_e(s)} T_e(s)$$

dove $\frac{T(s)}{P(s)}$ e $\frac{T(s)}{T_e(s)}$ sono funzioni di trasferimento e, invece, $P(s)$ e $T_e(s)$ sono trasformate di Laplace degli ingressi/disturbi.

Si può essere tentati dal fatto di fare erroneamente la seguente semplificazione:

$$T(s) = \cancel{\frac{T(s)}{P(s)}} P(s) + \cancel{\frac{T(s)}{T_e(s)}} T_e(s)$$

L'errore sta nel fatto che i termini $\frac{T(s)}{P(s)}$ e $\frac{T(s)}{T_e(s)}$ sono entità uniche, sono funzioni di trasferimento che vanno lette come $\frac{T_{dovuta a P}(s)}{P(s)}$ e $\frac{T_{dovuta a T_e}(s)}{T_e(s)}$!

Riscriviamo le funzioni di trasferimento in modo leggermente diverso:

$$\frac{T(s)}{P(s)} = G_{TP}(s) = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{G}{C}} = \frac{\frac{1}{G}}{1 + \frac{C}{G}s}$$

$$\frac{T(s)}{T_e(s)} = G_{TT_e}(s) = \frac{\frac{G}{C}}{s + \frac{G}{C}} = \frac{1}{1 + \frac{C}{G}s}$$

Supponiamo di applicare uno scalino a P , quindi l'ingresso $P(s) = \frac{\bar{P}}{s}$, calcoliamo l'effetto su T :

$$T(s) = G_{TP}(s) \cdot P(s) = \frac{\frac{1}{G}}{1 + \frac{C}{G}s} \cdot \frac{\bar{P}}{s} =$$

chiamiamo per semplicità $\mu = \frac{1}{G}$ e $\tau = \frac{C}{G}$

$$T(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau} \bar{P}$$

Usiamo ora Heaviside:

$$T(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{1 + s\tau}$$

Facendo denominatore comune ed uguagliando i numeratori:

$$\alpha(1 + s\tau) + \beta s = \mu \bar{P}$$

Avendo radici $s = 0$ e $s = -\frac{1}{\tau}$ ottengo:

$$\alpha = \mu \bar{P} \quad \beta = -\mu \tau \bar{P}$$

Quindi:

$$T(s) = \frac{\mu \bar{P}}{s} - \frac{\mu \tau \bar{P}}{1 + s\tau} = \frac{\mu \bar{P}}{s} - \frac{\mu \bar{P}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Antitrasformiamo con le trasformate notevoli:

$$\mathcal{L}^{-1}[T(s)] = T(t) = \mu \bar{P} sca(t) - \mu \bar{P} e^{-\frac{t}{\tau}} sca(t) = \mu \bar{P} sca(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

[c'è un errore di un 1 al posto di una s da qualche parte in uno dei passaggi precedenti. . . il prof dice che correggerà i suoi appunti più tardi, quindi per i conti precisi guardare quelli, tanto quel che conta è il ragionamento]

Aspetto della risposta:

$T(0) = 0$ (n.b. è l'effetto di P , cioè la variazione rispetto all'effetto di Te , cioè significa che non si scalda rispetto a Te , ma rimane a temperatura di regime Te).

$$T(\infty) = \mu \bar{P} = \frac{1}{G} \bar{P}.$$

$\frac{dT}{dt}|_{t=0}$, verifico e calcolo con teorema valore iniziale e teorema valore finale: $T(s) = \frac{\mu \bar{P}}{s(1+s\tau)}$, considerando $\tau > 0$.

$$1) T(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sT(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu \bar{P}}{1+s\tau} = 0, \text{ verificato.}$$

$$2) T(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu \bar{P}}{1+s\tau} = \mu \bar{P}, \text{ verificato.}$$

$$\mathcal{L}[\dot{T}] = s\mathcal{L}[T] - T(0) = \frac{\mu \bar{P}}{1+s\tau}$$

$$3) \dot{T}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}[\dot{T}] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu \bar{P}s}{1+s\tau} = \frac{\mu \bar{P}}{\tau}$$

Adesso con le equazioni 1), 2) e 3) possiamo disegnare come è fatta:

[immagine dagli appunti del prof]

9 Raggiungibilità e osservabilità

9.1 Raggiungibilità (SD LTI a TC SISO)

Vogliamo capire sotto quali ipotesi la rappresentazione di stato (A, b, c, d) e la funzione di trasferimento $(G(s))$ sono rappresentazioni equivalenti di un sistema. Inoltre affronteremo il problema di studiare la stabilità di un sistema dalla funzione di trasferimento, tenendo in mente che la funzione di trasferimento può avere delle "parti nascoste".

9.1.1 Definizioni

Uno stato \tilde{x} si dice **raggiungibile** (da zero) se esiste un ingresso $\tilde{u}(t)$ tale che

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ u(t) = \tilde{u}(t) \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(\tilde{t}) = \tilde{x} \quad \tilde{t} < \infty$$

Cioè uno stato (\tilde{x}) è raggiungibile se esiste un ingresso $(\tilde{u}(t))$ che partendo da zero porta il sistema in quel determinato stato in un tempo finito.

Un **sistema** si dice (completamente) **raggiungibile** se ogni stato è raggiungibile.

9.1.2 Criterio di raggiungibilità

Come si determina se un sistema dinamico è o meno raggiungibile?

Teorema di Cayley-Hamilton: Ogni matrice annulla il polinomio caratteristico.

Capiamo meglio questo teorema guardando il polinomio caratteristico di una matrice A che è il determinante della matrice $sI - A$:

$$\Pi(s) = \det(sI - A) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n$$

quindi, se calcoliamo il polinomio caratteristico in A , vediamo questo si che si annulla:

$$\Pi(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} A^n + \beta_1 A^{n-1} + \dots + \beta_n I &= 0 \\ A^n &= -\beta_1 A^{n-1} - \beta_2 A^{n-2} - \dots - \beta_n I \end{aligned}$$

cioè la potenza ennesima della matrice A può essere scritta come combinazione lineare di tutte le potenze inferiori, fino alla potenza 0, cioè la matrice identità.

Applichiamo questo concetto al calcolo del movimento.

Scriviamo la formula di Lagrange nel caso $x(0) = 0$ (cioè solamente movimento forzato):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

dove la matrice $e^{A(t-\tau)}$ è

$$e^{A(t-\tau)} = I + A(t-\tau) + \frac{A^2(t-\tau)^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1}(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + [\text{combinazione lineare dei termini precedenti}] \dots$$

di conseguenza posso fare dei raccoglimenti di tutti i termini "combinazione lineare dei termini precedenti" e scrivere questo termine grazie a una sommatoria:

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t-\tau) \cdot A^l$$

Ora quindi sostituiamo questo risultato nell'espressione del movimento forzato:

$$x(t) = \int_0^t \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t-\tau) \cdot A^l b u(\tau) d\tau =$$

dove $\gamma_l(t-\tau)$ sono termini che non mi interessa calcolare, ma mi basta sapere che ci sono e che rappresentano i termini "combinazione lineare dei termini precedenti",

$$= \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \int_0^t \gamma_l(t-\tau) u(\tau) d\tau =$$

chiamiamo ora l'integrale $\zeta_l(t) = \int_0^t \gamma_l(t-\tau) u(\tau) d\tau$, che dipende solo da t perchè τ muore durante l'integrazione, inoltre, siccome γ_l sono termini di cui non ci interessa la forma, non ci interessa calcolare $\zeta_l(t)$, ci basta sapere che è presente.

Siamo quindi giunti a scrivere che

$$x(t) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \zeta_l(t)$$

Il termine $\zeta_l(t)$ contiene

- i coefficienti del polinomio caratteristico di A ;
- l'ingresso.

Vediamo la scrittura matriciale:

$$x(t) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_0(t) \\ \zeta_1(t) \\ \dots \\ \zeta_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

La prima matrice prende il nome di $M_R = \text{matrice di raggiungibilità} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$, dove nel caso SISO ogni suo termine è una matrice colonna $n \times 1$, e quindi in totale è una matrice $n \times n$.

Invece la seconda matrice (quella colonna) la indichiamo come $Z(t) = \begin{bmatrix} \zeta_0(t) \\ \zeta_1(t) \\ \dots \\ \zeta_{n-1}(t) \end{bmatrix}$ ed è composta

da scalari, quindi in totale è una matrice $n \times 1$. Notiamo che $Z(t)$, essendo composta da tutti i $\zeta_l(t)$ contiene al suo interno i coefficienti del polinomio caratteristico (che sono fissi e conosciamo) e l'ingresso (che è quello che veramente ci interessa nel concetto di raggiungibilità). Quello che è importante da capire è che $Z(t)$ è una riflessione dell'ingresso.

La moltiplicazione di queste due matrici risulta quindi in una matrice $n \times 1$.

Possiamo quindi scrivere

$$x(t) = M_R \cdot Z(t)$$

Tornando al concetto di raggiungibilità:

Supponiamo ora di voler portare lo stato (da zero) a \tilde{x} . Perchè questo sia possibile, deve esistere una certa $\tilde{Z}(t)$ tale che

$$M_R \tilde{Z}(t) = \tilde{x}$$

Quindi dire che ciò è possibile, per ogni \tilde{x} , equivale a dire che M_R non è singolare.

Sistema raggiungibile se e solo se (\Leftrightarrow) M_R è non singolare, dove:

$$M_R = \text{matrice di raggiungibilità} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

9.1.3 Esempi

es.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

Ovviamente se $x(0) = 0$, risulterà $x_1(t) = x_2(t)$ per ogni $u(t)$; nel senso che, data l'espressione di questi due stati, non potrò mai raggiungere lo stato $x = \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}$ con $k \neq j$, ma posso solo raggiungere gli stati nella forma $\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$.

Quindi qualunque stato con $x_1 \neq x_2$ non è raggiungibile. Verifichiamo ora questa affermazione col criterio esposto prima:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_R = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ singolare}$$

[immagine dagli appunti del prof]

Esprimiamo lo spazio di stato con un piano di assi x_1, x_2 , notiamo che lo stato non può muoversi liberamente in tutto lo spazio, ma è vincolata alla retta $x_1 = x_2$ che è il suo sottospazio di raggiungibilità.

9.2 Osservabilità (SD LTI a TC SISO)

9.2.1 Definizioni

Uno stato \tilde{x} è **non osservabile** se

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = \tilde{x} \\ u(t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t) = 0$$

Cioè uno stato è non osservabile se produce sull'uscita un movimento libero nullo.

Un **sistema** è (completamente) **osservabile** se nessuno stato è non osservabile.

9.2.2 Criterio di osservabilità

Chiamiamo M_O una **matrice di osservabilità** $n \times n$ definita come:

$$M_O = [c' \quad A'c' \quad \dots \quad (A^{n-1})'c']$$

Abbiamo ottenuto questa matrice con ragionamenti molto simili (che evitiamo di ripetere) a quelli fatti per la matrice di raggiungibilità.

Sistema osservabile se e solo se (\Leftrightarrow) M_O è non singolare.

9.2.3 Esempi

es.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

La relazione tra u e y (cioè fra l'ingresso e l'uscita, la funzione di trasferimento) è tutta racchiusa nelle due ultime righe del sistema, cioè \dot{x}_1 non influenza y .

Verifichiamo col criterio di osservabilità:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = A' \quad A'c' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$M_O = [c' \quad A'c'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ singolare}$$

9.3 Osservazioni

- Un sistema può avere parti non raggiungibili e/o non osservabili.

es. Riprendiamo l'esempio fatto precedentemente per la raggiungibilità:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

Questo sistema non è completamente raggiungibile, e come si vede a occhio il suo sottospazio di raggiungibilità è la sola retta $x_1 = x_2$. In questo caso per raggiungibilità si intendono regioni dello spazio di stato che non posso raggiungere. Stato "non raggiungibile" significa che, qualunque sia l'ingresso, non posso raggiungere quel determinato stato a partire da 0.

Facciamo un cambio variabili $q_1 = x_1 - x_2$ e $q_2 = x_1 + x_2$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -x_1 + u + x_2 - u = -q_1 \\ \dot{q}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -q_2 + 2u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = -q_1 \\ \dot{q}_2 = -q_2 + 2u \end{cases}$$

Con questa trasformazione il significato di "non raggiungibile" cambia: significa che u non influenza una parte dello stato.

- Le parti non raggiungibili e/o non osservabili non sono presenti nella funzione di trasferimento: la funzione di trasferimento rappresenta il legame ingresso/uscita e quindi la sola parte non raggiungibili e/o non osservabili del sistema.
- Gli autovalori delle parti non raggiungibili e/o non osservabili del sistema nel calcolo della funzione di trasferimento sono cancellati (per cancellazione intendiamo il fatto che nel calcolo della funzione di trasferimento alcuni poli e zeri si possono cancellare fra di loro, e questi rappresentano proprio le parti non raggiungibili e/o non osservabili).

definizione: Una cancellazione è **critica** se avviene al di fuori della regione di asintotica stabilità (a tempo continuo significa che se l'autovalore è cancellato, non ha la parte reale negativa).

Conseguenze:

- La rappresentazione di stato (A, b, c, d) e la funzione di trasferimento $G(s)$ sono rappresentazioni equivalenti di un sistema dinamico, a meno di una trasformazione di similarità (cioè una trasformazione che preserva gli autovalori), se nel calcolo di $G(s)$ non si hanno cancellazioni o equivalentemente se il sistema è raggiungibile e osservabile.
- Poiché i poli di $G(s)$ sono gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema, perchè si possa studiare la stabilità (asintotica) del sistema usando $G(s)$, non vi devono essere cancellazioni critiche.

10 Realizzazione

Per realizzazione si intende partire dalla funzione di trasferimento $G(s)$ e trovare le infinite quaterne (A, b, c, d) corrispondenti:

$$G(s) \rightarrow \infty(A, b, c, d)$$

Le quaterne (A, b, c, d) costruibili a partire da $G(s)$ sono infinite perchè è sufficiente aggiungere una qualunque "parte nascosta" al nostro sistema per creare una nuova quaterna accettabile.

Limitandosi al caso in cui la dimensione di A coincide col grado del denominatore di $G(s)$ (cioè realizzando quaterne minime) esistono dei modi "comodi" per trovare una quaterna (A, b, c, d) corrispondente a $G(s)$? Sì.

Premessa: Se in $G(s)$ il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore, allora possiamo esprimere $G(s)$ nel seguente modo:

$$G(s) = d + \frac{N(s)}{D(s)}$$

con d costante e grado di $N(s) <$ grado di $D(s)$.

Con questa espressione della funzione di trasferimento, d ce lo abbiamo già e le matrici A, b, c le ricaviamo da $\frac{N(s)}{D(s)}$.

Questa premessa ci mostra che è sufficiente imparare a trattare il caso in cui $\frac{N(s)}{D(s)}$ ha grado di $N(s) <$ grado di $D(s)$ (perchè avevamo già dimostrato precedentemente che sicuramente $N(s)$ non può avere grado $>$ del grado di $D(s)$, e nel caso in cui il grado di $N(s) =$ grado di $D(s)$ possiamo ricondurci al caso grado di $N(s) <$ grado di $D(s)$).

10.1 Forma canonica di raggiungibilità

Vediamo ora uno dei possibili modi di operare:

Nel caso più estremo il numeratore ha al massimo grado $n - 1$:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

In uno schema a blocchi possiamo quindi rappresentare il blocco della funzione di trasferimento

$$u \rightarrow \left[\frac{N(s)}{D(s)} \right] \rightarrow y$$

come due blocchi in cascata $\frac{1}{D(s)}$ e $N(s)$

$$u \rightarrow \left[\frac{1}{D(s)} \right] \rightarrow [N(s)] \rightarrow y$$

Chiamiamo X il segnale fra i due blocchi $\frac{1}{D(s)}$ e $N(s)$:

$$u \rightarrow \left[\frac{1}{D(s)} \right] \xrightarrow{X} [N(s)] \rightarrow y$$

Analizzando il primo blocco $\left(\frac{1}{D(s)}\right)$, ricaviamo le seguenti informazioni sulla struttura della matrice A e b :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$X(s)D(s) = U(s)$$

$$s^n X_n + a_1 s^{n-1} X + \dots + a_n X = U$$

Siccome stiamo operando con funzioni di trasferimento e quindi solo col moto forzato ($x(0) = 0$), allora posso scrivere che $S^n X$ diventa $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ e quindi:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \dot{x}(t) + a_n x(t) = u(t)$$

Rinominiamo ora i termini nel seguente modo:

$$x_n = \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}; \quad \dots; \quad x_2 = \dot{x}(t); \quad x_1 = x(t);$$

e quindi possiamo dire che

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dots; \\ \dot{x}_n = -a_1x_n - a_2x_{n-1} - \dots - a_nx_1 + u \end{cases}$$

Quindi vediamo ora le matrici A e c del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

dove la matrice A è composta da una colonna di 0 accostata a una matrice identità di dimensione $n - 1$ e l'ultima riga è la riga dei coefficienti della funzione di trasferimento; la matrice b è invece composta da un vettore colonna con tutti 0 tranne l'ultimo elemento che è un 1.

Abbiamo quindi fino ad ora trovato A, b . Per calcolare c usiamo il secondo blocco ($N(s)$) dello schema a blocchi:

$$u \rightarrow \left[\frac{1}{D(s)} \right] \rightarrow^X \rightarrow [N(s)] \rightarrow y$$

Scriviamo

$$Y(s) = N(s)X(s) = (b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n)X(s)$$

Dove il termine $b_1s^{n-1}X(s)$, nel dominio del tempo, diventa $\rightarrow b_1 \frac{d^{n-1}x(t)}{t^{n-1}} = b_1x_n(t)$.

Allo stesso modo $b_2s^{n-2}X(s) \rightarrow b_2x_{n-1}(t)$.

...

E così fino al termine $b_nX(s) \rightarrow b_nx_1(t)$.

Assemblando il tutto otteniamo la matrice c :

$$y(t) = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1] x(t)$$

10.1.1 Riassunto

Presa una funzione di trasferimento, per ottenere una quaterna (A, b, c, d) di dimensione minima si procede così: se il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore si fa la divisione e si ottiene $G(s) = d + \frac{N(s)}{D(s)}$, da cui si ricava il valore d . A questo punto riscriviamo la frazione

$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$ e scriviamo le A, b e c :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1]$$

LEZIONE 11 26/03/2020

link clicca qui [registrazione solo audio, no video]

Questa realizzazione è sempre raggiungibile, infatti usando questi (A, b, c, d) , la matrice di raggiungibilità ha la seguente forma:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ \dots & 0 & 1 & * & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

Questa matrice è ovviamente non singolare.

Infatti questo metodo di realizzazione prende il nome di **forma canonica di raggiungibilità**.

Esiste anche la **forma canonica di osservabilità**: vedi libro, studio autonomo.

Concetti fondamentali:

- Partendo dalle matrici (A, b, c, d) , esiste sempre una e una sola funzione di trasferimento $G(s)$, una e una sola matrice di raggiungibilità M_R , una e una sola matrice di osservabilità M_O . Quindi siamo a conoscenza dell'intero sistema.
- Se invece partiamo da una funzione di trasferimento senza cancellazioni, allora esistono infinite (a meno di una trasformazione di similarità) quaterne (A, b, c, d) . Queste quaterne possono essere divise in due famiglie:
 - Minime: in cui la dimensione di A è uguale al grado della funzione di trasferimento $G(s)$; queste sono raggiungibili e osservabili, e non ci sono cancellazioni.
 - Non minime: in cui esistono cancellazioni e possono essere o non raggiungibili (ma osservabili) o non osservabili (ma raggiungibili) o non raggiungibili e non osservabili.

10.2 Esempi

es. Esempio di funzione di trasferimento con cancellazione, cioè con parte nascosta:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Ci sarebbe da fare una semplificazione fra $(s+1)$ al numeratore e $(s+1)$ al denominatore. Però vediamo cosa succede se non facciamo la cancellazione:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

Scriviamo ora la forma canonica di raggiungibilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [2 \quad 3 \quad 1]; \quad d = 0.$$

Premettiamo che **la presenza di una cancellazione ci impone il fatto che la realizzazione (A, b, c, d) non può essere raggiungibile e osservabile contemporaneamente**. Quindi siccome abbiamo eseguito la realizzazione con la forma canonica di raggiungibilità, sicuramente (A, b, c, d) sarà raggiungibile e di conseguenza non osservabile (perché esiste una cancellazione). Se avessimo usato la forma canonica di osservabilità saremmo giunti a una realizzazione osservabile, ma non raggiungibile.

oss. Errore tipico: Questo concetto è anche utilizzato nell'analisi di funzioni di trasferimento in cui sono presenti cancellazioni: se abbiamo valutato che è raggiungibile è inutile controllare se è anche osservabile, ovviamente non lo sarà! Vale anche il viceversa, cioè se abbiamo valutato che è osservabile, sicuramente non sarà raggiungibile. Da notare è che se si valuta la funzione di trasferimento non raggiungibile, bisogna per forza controllare se sia o meno osservabile! E anche il viceversa, cioè se valutiamo che è non osservabile, dobbiamo controllare se sia o meno raggiungibile! Potrebbe essere sia non osservabile sia non raggiungibile.

[verifica di questa affermazioni con maxima].

Quindi dalla sola funzione di trasferimento (con una parte nascosta) non possiamo sapere se il sistema è raggiungibile e osservabile (contemporaneamente), lo possiamo sapere solo dalle matrici. Se partiamo dalla funzione di trasferimento, le cancellazioni possono essere provocate o da una non raggiungibilità o da una non osservabilità, ma non sappiamo quale, quindi dobbiamo decidere se realizzare il sistema con la forma canonica osservabile o raggiungibile.

11 Sistemi interconnessi (LTI a TC)

Rappresentiamo i sistemi interconnessi (LTI a TC) con schemi a blocchi.

Logica fondamentale dei sistemi a blocchi: [immagine dagli appunti del prof]

Poniamoci il seguente problema:

[immagine dagli appunti del prof]

Ipotesi: tutti i blocchi sono privi di parti nascoste, ovvero tutte le loro funzioni di trasferimento hanno numeratore e denominatore coprimi (non ci sono cancellazioni).

Domande:

- Come calcolo la generica funzione di trasferimento da $Y_i(s)$ a $U_j(s)$?
- Che relazione c'è tra la stabilità delle singole funzioni di trasferimento e quella del sistema complessivo?
- Posto che i singoli blocchi non hanno parti nascoste, il sistema complessivo può averne?

11.1 Elaborazione degli schemi a blocchi

Andiamo a vedere tre configurazioni particolari che ci permettono di studiare gli schemi a blocchi.

11.1.1 Blocchi in serie o cascata

[immagine dagli appunti del prof]

Quale è la funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{U(s)}$ per un blocco in serie?

$$Y = Y_2 = G_2 U_2 = G_2 Y_1 = G_2 G_1 U_1 = G_2 G_1 U \implies \frac{Y}{U} = G_2 G_1$$

Scriviamo ora $G_1 = \frac{N_1}{D_1}$ e $G_2 = \frac{N_2}{D_2}$:

$$\implies \frac{Y}{U} = G_2 G_1 = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}$$

Per ipotesi abbiamo detto che N_i e D_i sono coprimi fra di loro, ma non per forza lo sono anche N_i e D_j .

Quindi gli autovalori del sistema complessivo sono $\{\text{poli di } G_1\} \cup \{\text{poli di } G_2\}$, ma possono esserci cancellazioni tra N_1 e D_2 e/o tra N_2 e D_1 .

Di conseguenza:

- G_1 e G_2 (entrambi) asintoticamente stabili è condizione necessaria e sufficiente (\Leftrightarrow) per avere un sistema complessivo asintoticamente stabile.
- possono esserci cancellazioni, cioè parti nascoste.

Vediamo ora la stessa cosa nello spazio di stato (realizzazione minime e quindi raggiungibili e osservabili).

Le equazioni costitutive dei blocchi sono:

$$G_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u_1 \end{cases} ; \quad G_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u_2 \end{cases}$$

Le equazioni di connessione sono:

$$u = u_1; \quad y_1 = u_2 \quad y = y_2$$

Di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 + b_2 d_1 u \\ y = c_2 x_2 + d_2 y_1 = c_2 x_2 + d_2 c_1 x_1 + d_2 d_1 u \end{cases}$$

Che ci danno il sistema matriciale nella forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} d_2 c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_1 d_2 u \end{cases}$$

11.1.2 Blocchi in parallelo

[immagine dagli appunti del prof]

$$Y = Y_1 + Y_2 = G_1 U_1 + G_2 U_2 = (G_1 + G_2)U \Rightarrow \frac{Y}{U} = G_1 + G_2$$

scrivendo $G_i = \frac{N_i}{D_i}$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_2 D_1 + N_1 D_2}{D_1 D_2}$$

Gli autovalori del complessivo sistema sono $\{\text{poli di } G_1\} \cup \{\text{poli di } G_2\}$:

- G_1 e G_2 (entrambi) asintoticamente stabili è condizione necessaria e sufficiente (\Leftrightarrow) per avere un sistema complessivo asintoticamente stabile.
- possono esserci cancellazioni, cioè parti nascoste (ce ne sono di sicuro se D_1 e D_2 non sono coprimi).

Vediamo questo ragionamento applicato allo spazio di stato:

Equazioni costitutive dei blocchi:

$$G_1 : (A_1, b_1, c_1, d_1); \quad G_2 : (A_2, b_2, c_2, d_2).$$

Equazioni di connessione:

$$u_1 = u; \quad u_2 = u \quad y = y_1 + y_2$$

Di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u \\ y = y_1 + y_2 = c_1 x_1 + d_1 u + c_2 x_2 + d_2 u \end{cases}$$

Che ci danno sistema matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2)u \end{cases}$$

11.1.3 Blocchi in retroazione o feedback

[immagine dagli appunti del prof]

G_a è il blocco di andata, mentre G_r è il blocco di retroazione.

Per capire come calcolare $\frac{Y}{U}$ immagino di tagliare l'anello nel punto di "taglio fittizio" dell'immagine. Seguiamo poi i numeri (1-2-3-4) nell'immagine per capire quanto valgono i vari segnali. Una volta arrivati al quarto punto, ripristiniamo il taglio fittizio e quindi possiamo porre $G_a(U - G_r Y) = Y$. Quindi rielaborando:

$$G_a U = (1 + G_a G_r) Y \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{G_a}{1 + G_a G_r} \quad \text{per ricordare si dice } \frac{\text{"andata"}}{1 + \text{"anello"}}$$

Posti $G_a = \frac{N_a}{D_a}$ e $G_r = \frac{N_r}{D_r}$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{\frac{N_a}{D_a}}{1 + \frac{N_a N_r}{D_a D_r}} = \frac{\cancel{D_a} D_r \frac{N_a}{\cancel{D_a}}}{D_a D_r + N_a N_r} =$$

questa elisione non è una cancellazione, nel senso che non porta a una parte nascosta, perchè è lo stesso polinomio che compare due volte e si elide nel calcolo, mentre per avere una cancellazione c'è bisogno che l'elisione avvenga fra polinomi diversi

$$= \frac{N_a D_r}{D_a D_r + N_a N_r}$$

tra poli di G_a e G_r e gli autovalori del sistema complessivo non c'è una relazione banale:

- G_a e G_r asintoticamente stabili nè occorrono nè bastano per avere un sistema complessivo asintoticamente stabile. (Dubbio proveniente dall'esercitazione 6 (lezione 16), esercizio 6: non ho ben capito il caso in cui si ha un blocco qualsiasi G_1 in parallelo (o in serie) a un anello G_a composto da altri "sottoblocchi" (quello di andata e quello di ritorno)... chi deve essere asintoticamente stabile? Immagino che affinché il sistema complessivo sia asintoticamente stabile, sicuramente G_1 dovrà esserlo (vedi proprietà dei blocchi in parallelo e in serie), ma per quanto riguarda l'anello G_a complessivo penso che l'intero anello debba essere asintoticamente stabile, mentre i suoi "sottoblocchi" non hanno nessun vincolo, in quanto non limitano la asintotica stabilità dell'intero anello G_a ... Non sono sicuro al 100%, ma mi sembra un ragionamento sensato, TODO).
- possono esserci cancellazioni, cioè parti nascoste.

Vediamo questo ragionamento applicato allo spazio di stato:

Equazioni costitutive dei blocchi:

$$G_a : (A_a, b_a, c_a, d_a); \quad G_r : (A_r, b_r, c_r, d_r).$$

Almeno uno dei due sistemi strettamente proprio è condizione sufficiente perchè l'anello sia ben posto, cioè le equazioni che conducono al sistema complessivo ammettono soluzione.

Equazioni di connessione:

$$y = y_a; \quad u_r = y_a \quad u_a = u - y_r$$

Di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + b_a u_a = A_a x_a + b_a u - b_a y_r = A_a x_a + b_a u - b_a c_r x_r \\ \dot{x}_r = A_r x_r + b_r u_r = A_r x_r + b_r (c_a x_a + d_a u_a) = A_r x_r + b_r c_a x_a + b_r d_a (u - c_r x_r) = \\ \quad = A_r x_r + b_r c_a x_a + b_r d_a u - b_r d_a c_r x_r \\ y = t_a = c_a x_a + d_a u_a = c_a x_a + d_a (u - c_r x_r) = c_a x_a + d_a u - d_a c_r x_r \end{cases}$$

Che ci danno sistema matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & -b_a c_r \\ b_r c_a & A_r - b_r d_a c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_r d_a \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_a & -d_a c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_r \end{bmatrix} + d_a u \end{cases}$$

12 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)

12.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ sottoposto all'ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$ con $t \geq 0$ (o equivalentemente $e^{\lambda t} \text{sca}(t)$), esiste uno stato iniziale $x(0)$ tale che $x(0)$ e $u(t)$ producono un'uscita $y(t) = Y e^{\lambda t}$, con Y un numero qualunque (non la trasformata) e $t \geq 0$?

In altri termini:

Sottoponiamo un sistema dinamico (di cui non sono note le proprietà sulla sua stabilità) a un ingresso esponenziale ($u(t) = e^{\lambda t}$, che può anche essere amplificato come $u(t) = U e^{\lambda t}$, ovviamente il ragionamento non cambia). Detto questo sappiamo che un ingresso $x(0)$ produce un movimento libero di y fatto da modi, invece un uscita del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ produce un movimento forzato fatto da modi + un termine $Y e^{\lambda t}$ (con $t \geq 0$ e con Y un numero, non la trasformata). La domanda è se esiste uno $x(0)$ tale che questi modi si elidano e resti solo il termine $Y e^{\lambda t}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow u(t) = e^{\lambda t} \longrightarrow \exists x(0) \text{ tale che } \longrightarrow y(t) = Y e^{\lambda t} \quad (t \geq 0) ?$$

12.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Rispondiamo a questa domanda:

Primo passaggio:

Se voglio che $y(t) = Y e^{\lambda t}$, allora anche $x(t)$ dovrà avere la forma $X e^{\lambda t}$ (con X un numero, non la trasformata), perchè $y(t) = c x(t) + d e^{\lambda t}$ e qualunque forma di $x(t)$ che non sia del tipo $e^{\lambda t}$ si "vedrebbe" su y .

Secondo passaggio:

Quindi $x(t) = x(0) e^{\lambda t}$ (di cui noi stiamo proprio cercando $x(0)$) e di conseguenza $\dot{x}(t) = \lambda x(0) e^{\lambda t}$.

Terzo passaggio:

Sostituisco $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ appena espressi nell'equazione di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\lambda x(0) e^{\lambda t} = A x(0) e^{\lambda t} + b e^{\lambda t}$$

considerando che $e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0) e^{\cancel{\lambda t}} = A x(0) e^{\cancel{\lambda t}} + b e^{\cancel{\lambda t}}$$

$$\lambda x(0) = A x(0) + b$$

per cui otteniamo che

$$(\lambda I - A) x(0) = b$$

12.3 Generalizzazione della risposta

Quindi **in generale** con $u(t) = U e^{\lambda t}$ (con U un numero qualunque che semplicemente amplifica l'esponenziale), se λ non è autovalore di A , allora esiste uno e uno solo

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1} b U$$

tale che

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda I - A)^{-1} b U e^{\lambda t} \\ y(t) = c x(t) + d u(t) = [c(\lambda I - A)^{-1} b + d] U e^{\lambda t} = G(\lambda) u(t) \end{cases}$$

12.4 Riassunto e proprietà

- Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ in cui $u(t) = Ue^{\lambda t}$, dove $t \geq 0$ e λ non è autovalore di A
 \implies con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$ si ottiene $y(t) = G(\lambda)u(t)$, con $t \geq 0$.
- Proprietà bloccante degli zeri: se $G(\lambda) = 0 \implies$ con lo stesso stato iniziale $x(0)$, l'uscita diventa $y(t) = 0$, con $t \geq 0$.
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$, l'uscita tenderà a $y(t) \rightarrow G(\lambda)u(t)$ per $t \rightarrow \infty$.

13 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)

13.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ e l'ingresso $u(t) = U \sin(\omega t)$ per $t \geq 0$ (o equivalentemente $u(t) = U \sin(\omega t) \text{sca}(t)$), esiste un qualche stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ per $t \geq 0$?

In altri termini:

[La domanda è molto simile a quella data per la risposta esponenziale] Applicato un ingresso sinusoidale, esiste uno stato di iniziale che faccia elidere fra loro i modi del moto libero e i modi del moto forzato in modo che io veda in uscita solo una sinusoide?

13.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Per rispondere ci basta ricordare che

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il principi di sovrapposizione degli effetti. Quindi applichiamo due volte il risultato ottenuto per la risposta esponenziale e combiniamo i risultati.

Poniamo $u_1(t) = e^{j\omega t}$ e $u_2(t) = e^{-j\omega t}$, per cui $u(t) = U \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2j}$

Iniziamo analizzando $u_1(t)$: se $j\omega$ non è autovalore di A , allora esiste uno e un solo $x_1(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_1(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$

Per $u_2(t)$: se $-j\omega$ non è autovalore di A , allora esiste uno e un solo $x_2(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_2(t) = G(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

Combiniamo ora y_1 e y_2 :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{U}{2j}(u_1(t) - u_2(t)) \\ x(0) &= \frac{U}{2j}(x_1(0) - x_2(0)) \end{aligned} \implies \text{Principio di sovrapposizione degli effetti} \implies y(t) = \frac{U}{2j}(y_1(t) - y_2(t))$$

Analizziamo $y(t)$:

$$y(t) = \frac{U}{2j} (G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t})$$

Osserviamo che $G(s)$ è razionale fratta, quindi $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$ (complesso coniugato). Quindi se pongo $G(j\omega) = Me^{j\phi}$ (con M modulo e ϕ argomento di $G(j\omega)$) otteniamo $G(-j\omega) = Me^{-j\phi}$.

Allora

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{U}{2j} (Me^{j\phi}e^{j\omega t} - Me^{-j\phi}e^{-j\omega t}) = MU \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ y(t) &= MU \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

con $M = |G(j\omega)|$ e $\phi = \arg(G(j\omega))$

13.3 Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza)

Dato il sistema dinamico LTI a TC, SISO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$, detta $G(s)$ la sua funzione di trasferimento e considerato l'ingresso $u(t) = U \sin(\omega t)$ per $t \geq 0$:

- Se $\mp j\omega$ non sono autovalori di A , allora esiste uno e uno solo stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = |G(j\omega)|U \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$ per $t \geq 0$. (Se $\mp j\omega$ sono autovalori di A , allora si verifica un fenomeno di risonanza, che però non è argomento di questo corso).
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale, l'uscita tenderà a $y(t) \rightarrow |G(j\omega)|U \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$ per $t \rightarrow \infty$

13.4 Definizione di risposta in frequenza

definizione: Data una funzione di trasferimento $G(s)$, la sua restrizione all'asse immaginario positivo J^+ , cioè $G(j\omega)$ con $\omega \geq 0$, si dice **risposta in frequenza** (RF) di $G(s)$.

13.5 Esempio

es. Dato $G(s) = \frac{1}{1+0,15s}$, che è asintoticamente stabile, e $u(t) = 5\sin(20t)$, a cosa tende $y(t) \rightarrow ?$ per $t \rightarrow \infty$?

Siccome il sistema è asintoticamente stabile, allora per il teorema della risposta in frequenza $y(t) \rightarrow 5|G(j20)|\sin(20t + \arg(G(j20)))$.

$$G(j20) = \frac{1}{1+2j} \Rightarrow \begin{aligned} |G(j20)| &= \frac{1}{\sqrt{1+4}} \sim 0,45 \\ \arg(G(j20)) &= -\arctan(2) \sim -63,5 \end{aligned}$$

[il prof ha terminato i conti e ha tracciato un grafico di $u(t)$ e $y(t)$ usando maxima: ci sta mostrando che il modulo $|G(j20)|$ rappresenta la percentuale dell'ampiezza dell'uscita rispetto all'ampiezza dell'ingresso, in questo esempio l'uscita è ampia il 45% dell'ingresso; invece l'argomento $\arg(G(j20))$ rappresenta lo sfasamento del segnale di uscita rispetto al segnale di ingresso, in questo esempio l'uscita è sfasata di 63 gradi (in ritardo) e per capire quanto effettivamente sia uno sfasamento di 63 gradi basta considerare che un periodo del segnale di ingresso sono 360 gradi]

14 Rappresentazioni della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento

14.1 Diagramma polare

[immagine dagli appunti del prof]

In un piano immaginario il termine $s = j\omega$ "cammina" lungo l'asse immaginario. Se ora calcoliamo $G(s)$ e lo mostriamo in un secondo piano immaginario, otteniamo una curva $G(j\omega)$ con parametro ω .

Possiamo ora dire che la risposta in frequenza è l'immagine attraverso G dell'asse immaginario positivo J^+ .

14.2 Diagrammi cartesiani o di Bode

14.2.1 Diagramma di Bode del modulo

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode del modulo è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è l'asse delle ω e quello delle ordinate è l'asse di $|G(j\omega)|$.

L'asse delle ω è logaritmico, cioè a pari distanza non corrisponde pari differenza, ma pari rapporto logaritmico (in base 10). Inoltre lo zero non viene rappresentato, perchè si trova a $-\infty$, e per questo l'intersezione con l'asse di $|G(j\omega)|$ non viene rappresentato.

L'asse di $|G(j\omega)|$ è, invece, espresso in dB .

Definizione: Rappresentare una quantità in dB significa $x_{dB} = 20\log_{10}|x|$.

Per esempio $100_{dB} = 40$, $0_{dB} = -20$, $-0_{dB} = -20$, $1_{dB} = 0$. Notare che la scrittura in dB non distingue il segno, e inoltre che se $|x| > 1$, allora $x_{dB} > 0$ e se $|x| < 1$, allora $x_{dB} < 0$.

14.2.2 Diagramma di Bode della fase

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode della fase è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è sempre logaritmico ed è l'asse delle ω , invece l'asse delle ordinate è l'asse di $\arg(G(j\omega))$ misurato in gradi.

14.3 Tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici)

14.3.1 Forma della funzione di trasferimento per diagrammi di Bode

Scriviamo la funzione di trasferimento $G(s)$ della cui risposta in frequenza vogliamo i diagrammi di Bode nella forma

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots}{(1 + st_1)(1 + st_2) \dots} \cdot \frac{(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2) \dots}{(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2) \dots}$$

In cui:

- prima frazione: g è il **tipo** della funzione di trasferimento ed è il numero di poli in $s = 0$ meno il numero di zeri in $s = 0$, o, per dirlo in altri termini, il numero di poli (se positivo) o zeri (se negativo) in $s = 0$.
Per esempio una funzione di trasferimento di tipo 1 ha un polo nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo -1 ha uno zero nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 2 ha due poli nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 0 non ha nè poli nè zeri nell'origine.
- seconda frazione: i vari termini a numeratore del tipo $(1 + s\tau_i)$ rendono conto degli zeri reali non nell'origine; invece i vari termini a denominatore del tipo $(1 + st_k)$ rendono conto dei poli reali non nell'origine.
- terza frazione: infine ci possono essere coppie di zeri complessi coniugati e coppie di poli complessi coniugati, rappresentate dai termini $(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2)$ (per gli zeri) e $(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2)$ (per i poli).

Inoltre il numero μ è detto **guadagno** della funzione di trasferimento, i termini t, τ sono **costanti di tempo** di zeri e poli, ω, σ si dicono **frequenze naturali** (o pulsazioni naturali) e ζ, ξ sono i **fattori di smorzamento**.

Una delle proprietà più particolari è che tutto il termine $\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots}{(1+st_1)(1+st_2)\dots} \cdot \frac{(1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2)\dots}{(1+2\frac{\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2)\dots}$ tende a $\rightarrow 1$ per $s \rightarrow 0$, quindi $G(s) \sim \frac{\mu}{s^g}$ per $s \rightarrow 0$.

es. $G(s) = \frac{(s+2)(s^2-3s+2)}{s^3+4s^2+s}$.

Trasformiamola nella forma che vogliamo avere per il diagramma di Bode:

$$G(s) = \frac{2(1+\frac{s}{2})(s-1)(s-2)}{s(s^2+4s+1)} = \frac{2(1+\frac{s}{2})(-1)(1-s)(-2)(1-\frac{s}{2})}{s(s-(-2-\sqrt{3}))(s-(-2+\sqrt{3}))} =$$

$$= \frac{2(-1)(-2)(1+\frac{s}{2})(1-s)(1-\frac{s}{2})}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})s(1-\frac{s}{-2-\sqrt{3}})(1-\frac{s}{-2+\sqrt{3}})}$$

in cui $\mu = \frac{2(-1)(-2)}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}$ e $g = 1$.

Quindi ogni funzione di trasferimento razionale fratta si può esprimere come prodotto di termini del tipo

$$\begin{aligned} G_a(s) &= \mu & G_c(s) &= 1 + st \\ G_b(s) &= \frac{1}{s^g} & G_d(s) &= 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \end{aligned}$$

Allora detti G_i i fattori componenti G , Siccome

$$G = \prod G_i \implies \begin{cases} |G| = \prod |G_i| \implies |G|_{dB} = \sum |G_i|_{dB} \\ \arg(G) = \sum \arg(G_i) \end{cases}$$

14.3.2 Diagrammi di bode di modulo e fase di $G_{a,b,c,d}$

Vediamo perciò come tracciare i diagrammi di bode del modulo e della fase (asintotici) di $G_{a,b,c,d}$. Una volta fatto questo sarà semplice combinarli per arrivare al tracciamento definitivo di G .

$$\bullet G_a(s) = \mu \rightarrow G_a(j\omega) = \mu \rightarrow \begin{cases} |G_a(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu| \\ \arg(G_a(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases} \end{cases}$$

[immagine dagli appunti del prof]

diagramma di bode del modulo: Il diagramma di bode del modulo è una retta orizzontale (se $\mu > 1$ è sopra l'asse delle ascisse, se $\mu < 1$ è sotto l'asse delle ascisse).

diagramma di bode della fase: Anche il diagramma di bode della fase è una retta orizzontale che coincide con l'asse delle ascisse se $\mu > 0$, altrimenti se $\mu < 0$ è posta all'altezza di -180° .

LEZIONE 13 31/03/2020

link clicca qui

$$\bullet G_b(s) = \frac{1}{s^g} \rightarrow G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} \rightarrow \begin{cases} |G_b(j\omega)| = \frac{1}{\omega^g} \rightarrow |G_b(j\omega)|_{dB} = -20g\log(\omega) \\ \arg(G_b(j\omega)) = -g \cdot 90^\circ \end{cases}$$

[immagine dagli appunti del prof]

diagramma di bode del modulo: Il diagramma di bode del modulo corrispondente è una retta che interseca sempre l'asse delle ascisse nel punto $\omega = 1$ e la cui pendenza è $-20g\frac{dB}{decade}$ (spesso abbreviato come "pendenza $-g$ "), dove la **decade** è la distanza corrispondente a un rapporto che vale 10.

diagramma di bode della fase: Il diagramma di bode delle fasi è orizzontale al valore $-g \cdot 90^\circ$.

Anche per la fase spesso i termini G_a e G_b vengono analizzati assieme: il valore della retta orizzontale di G_a e G_b assieme è la semplice somma dei valori a cui dovrebbero essere le singole rette di G_a e G_b

Da notare è che fino ad ora non abbiamo fatto nessuna approssimazione.

$$\bullet G_c(s) = 1 + st \rightarrow G_c(j\omega) = 1 + j\omega t \rightarrow \begin{cases} |G_c(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega t)^2} \\ \arg(G_c(j\omega)) = \arctan(\omega t) \end{cases}$$

Per facilitare i conti applichiamo un approssimazione, che è il motivo del perchè stiamo facendo diagrammi di bode asintotici:

– se $|\omega t| \gg 1$ (molto maggiore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim j\omega t$, per cui otteniamo

$$\text{che } \begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim |\omega t| \\ \arg(G_c(j\omega)) \sim \begin{cases} 90^\circ & t > 0 \\ -90^\circ & t < 0 \end{cases} \end{cases}$$

– se $|\omega t| \ll 1$ (molto minore di 1), allora $G_c(j\omega) \sim 1$, per cui otteniamo

$$\text{ce } \begin{cases} |G_c(j\omega)| \sim 1 \\ \arg(G_c(j\omega)) \sim 0^\circ \end{cases}$$

[immagine dagli appunti del prof]

diagramma di bode del modulo: Definiamo la **frequenza d'angolo** come $\frac{1}{|t|}$ (da notare il modulo!). Grazie alle approssimazioni che abbiamo fatto, andando a sinistra nell'asse delle ω , cioè verso il valore di 0_{dB} , il modulo vale circa 1. Facciamo valere questa approssimazione fino al valore di frequenza d'angolo. Superata la frequenza d'angolo il modulo cresce con pendenza $+1$, cioè di $20 \frac{dB}{decade}$. Questa rappresentazione prende il nome di diagramma di bode del modulo asintotico (il diagramma di bode del modulo esatto è mostrato in figura, e la differenza è che non ha una curva "netta").

diagramma di bode della fase: approssimiamo tutto ciò che precede la frequenza d'angolo con 0° , alla frequenza d'angolo c'è un salto in cui se t è positivo prota a 90° (rossa nel disegno), se è negativo a -90° (blu nel disegno). La rappresentazione non approssimata dovrebbe seguire la linea tratteggiata in rosso nel disegno.

Notiamo che l'approssimazione del modulo è molto buona, mentre quella della fase non molto.

$$\bullet G_d(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \rightarrow G_d(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} \text{ con } 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \text{ parte reale e } j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} \text{ parte immaginaria}$$

$$\text{– per } \omega \rightarrow 0: \begin{cases} \text{parte reale} \rightarrow 1 \\ \text{parte immaginaria} \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \rightarrow 1 \rightarrow |G_d(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \\ \arg(G_d(j\omega)) \rightarrow 0^\circ \end{cases}$$

– per $\omega \rightarrow +\infty$:

[immagine dagli appunti del prof]

Chiamiamo le generiche radici coniugate complesse la coppia s_1 e s_2 di $G_d(s) = \frac{1}{\omega_n^2}(s - s_1)(s - s_2)$ e rappresentiamole nel grafico.

Facciamo un attimo un excursus dal caso $\omega \rightarrow \infty$ e dimostriamo i risultati ottenuti precedentemente per $\omega \rightarrow 0$: [colore blu nel disegno] prendiamo il punto $j\omega$ con $\omega = 0$, cioè $j0$, i vettori che connettono le radici s_1 e s_2 al punto $j0$ hanno modulo ω_n , quindi il modulo di $|G_d(j0)|$ vale $\frac{\omega_n \cdot \omega_n}{\omega_n^2} = 1$. Possiamo anche dimostrare che la fase di G_d per $\omega \rightarrow 0$, cioè in $j0$, che vale 0° , infatti gli angoli di s_1 e s_2 rispetto a un asse orizzontale sono opposti e si annullano a vicenda.

Vediamo ora il caso in cui, invece di considerare il punto $j0$, consideriamo il generico punto $j\omega$. Analizziamo i vettori che connettono il generico punto $j\omega$ e s_1 e s_2 [in rosso nel disegno], questi vettori $j\omega - s_i$ per $\omega \rightarrow \infty$ (cioè per facendo salire lungo l'asse immaginario il generico punto $j\omega$) hanno entrambi modulo che tende a ∞ e fase che tende a 90° (quindi in totale 180°).

Quindi per $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} |G_d(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ allo stesso modo in cui tende } \omega^2 \\ \arg(G_d(j\omega)) \rightarrow 180^\circ \end{cases}$

[immagine dagli appunti del prof]

oss. Il modulo del vettore $|j\omega - s_2|$ è monotono crescente, mentre il modulo del vettore $|j\omega - s_1|$ no, infatti ha un minimo per $\omega = \text{Im}(s_1)$, il perchè si vede graficamente.

oss. più s_1 e s_2 sono vicini all'asse immaginario, più il minimo di s_1 è pronunciato e la variazione di fase avviene bruscamente.

[immagine dagli appunti del prof]

Diagramma di Bode del modulo: Segnamo la frequenza ω_n che prende il nome di **frequenza naturale**. Approssimiamo tutto ciò che precede ω_n con modulo uguale a 1 (0dB), invece dalla frequenza naturale in poi il modulo sale con pendenza +2 (cioè $40 \frac{dB}{decade}$). Questo è il diagramma asintotico. Il diagramma esatto è mostrato in figura ed è diverso in base al termine ξ ($|\xi| = 1$ abbiamo due radici reali coincidenti, $|\xi| = 0$ abbiamo 2 radici immaginarie, in mezzo a questi due casi ci sono tutti gli altri casi possibili)

[immagine dagli appunti del prof]

Diagramma di Bode della fase: Il diagramma asintotico (approssimato) è fatto a scalino e va da 0° a $+180^\circ$ se $\xi > 0$ o a -180° se $\xi < 0$. Il diagramma esatto è mostrato in figura (tratteggiato in rosso) e può avere una pendenza più o meno ripida per $|\xi| \rightarrow 0$.

14.3.3 Tracciamento complessivo

Per capire come unire tutti i diagrammi fino ad ora visti di $G_{a,b,c,d}$ vediamo un esempio.

es. Sia $G(s) = \frac{10(1-s)(1+\frac{s}{2})}{s(1+\frac{s}{10})^2}$, con $\mu = 10$ e $g = 1$. Riscriviamolo per una migliore comprensione come:

$$G(s) = \frac{10}{s} \cdot (1-s) \cdot (1+\frac{s}{2}) \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{10}} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{10}}$$

Facciamo ora i diagrammi di bode del modulo di tutti questi termini e infine li sommiamo per avere il diagramma complessivo.

- $\frac{10}{s}$: pendenza -1 e intersezione con l'asse ω in 10.
- $(1-s)$: parte da 0 e alla frequenza d'angolo 1 ottiene pendenza $+1$.
- $(1+\frac{s}{2})$: vale 0 fino a frequenza 2 e poi sale con pendenza $+1$.
- $\frac{1}{1+\frac{s}{10}}$ (di cui ce ne sono due identici, da ricordare per fare il diagramma complessivo finale): vale 0 fino a frequenza d'angolo 10 e poi ottiene pendenza (scende) -1 , perchè essendo a denominatore il logaritmo cambia segno.
- diagramma di bode complessivo: è la somma dei diagrammi precedenti, graficamente si può ragionare sul fatto che il diagramma complessivo è fatto da dei semplici cambi di pendenza dovuti a tutti i diagrammi precedenti. (notiamo che l'ultimo termine è presente due volte).

[immagine dagli appunti del prof]

Facciamo ora i diagrammi di bode della fase di tutti questi termini e infine li sommiamo per avere il diagramma complessivo.

- $\frac{10}{s}$: è una retta orizzontale a -90° fissi.
- $(1-s)$: parte da 0° e poi ha uno scalino negativo fino a -90° (negativo perchè è del tipo $1-j\omega$) alla frequenza di $\omega = 1$.
- $(1+\frac{s}{2})$: parte da 0° e alla sua frequenza d'angolo che vale 2 ha uno scalino in cui passa a $+90^\circ$ (positivo perchè è del tipo $1+j\omega$).

- $\frac{1}{1+\frac{s}{10}}$ (di cui ce ne sono due identici, da ricordare per fare il diagramma complessivo finale): parte da 0° e alla frequenza di 10 ha uno scalino fino a -90° (è della forma $1+j\omega$, ma **siccome è al denominatore il segno viene cambiato**, quindi è negativo)
- diagramma di bode complessivo: è la somma dei diagrammi precedenti, graficamente si può ragionare sul fatto che il diagramma complessivo è fatto dalla somma dei vari scalini alla frequenza opportuna. (notiamo che l'ultimo termine è presente due volte).

[immagine dagli appunti del prof]

In generale per la fase: Se è del tipo $1+j\omega$ allora abbiamo uno scalino positivo di $+90^\circ$ gradi alla frequenza d'angolo, se è del tipo $1-j\omega$ allora abbiamo uno scalino negativo di -90° alla frequenza d'angolo. Se invece il termine $1 \pm j\omega$ è a denominatore, il ragionamento è al contrario, cioè se è del tipo $\frac{1}{1+j\omega}$ allora abbiamo uno scalino negativo di -90° alla frequenza d'angolo, se è del tipo $\frac{1}{1-j\omega}$ allora abbiamo uno scalino positivo di $+90^\circ$ alla frequenza d'angolo.

14.3.4 Metodo di tracciamento

Per prima cosa si ricavano i valori di μ , g , poi si ricavano tutte le frequenze d'angolo (modulo delle radici di ogni termine al numeratore e al denominatore, escluse quelle in $s=0$) e per ognuna di queste si dice quanti zeri (radici del numeratore) destri (con parte reale positiva) o sinistri (con parte reale negativa) e quanti poli (radici del denominatore) destri (con parte reale positiva) o sinistri (con parte reale negativa) ci sono.

Diagramma di Bode del modulo:

1. Tracciare il diagramma di Bode del modulo di $\frac{\mu}{s^g}$ (è una retta la cui pendenza viene ricavata da: $-20 \cdot g \frac{dB}{decade}$; per capire dove interseca l'asse delle ω basta ricavare il valore di ω per cui $|\frac{\mu}{\omega^g}| = 1$; se la retta non ha pendenza allora è una retta orizzontale all'altezza di $|\mu|_{dB}$).
2. Segnare sull'asse delle ω le frequenze d'angolo dei poli (radici del denominatore) e zeri (radici del numeratore) non in $s=0$ (perchè son già presenti nel punto precedente). Quando si incontra una frequenza d'angolo di uno zero, la pendenza aumenta di 1, quando si incontra una frequenza d'angolo di un polo, la pendenza diminuisce di 1. (Ricordiamo che per 1 di pendenza si intendono $20dB/decade$).

Diagramma di Bode della fase:

1. Il diagramma di Bode della fase parte al valore di $arg(\frac{\mu}{(j\omega)^g})$, che è calcolabile sommando i contributi di μ e $\frac{1}{s^g}$ nel seguente modo:

$$\mu \rightarrow \begin{cases} 0^\circ & se > 0 \\ -180^\circ & se < 0 \end{cases} \quad \frac{1}{s^g} \rightarrow -g \cdot 90^\circ$$

2. zero "a sinistra" la fase aumenta di 90° ;
zero "a destra" la fase diminuisce di 90° ;
polo "a sinistra" la fase diminuisce di 90° ;
polo "a destra" la fase aumenta di 90° .

14.3.5 Esempio

es. Disegnare i diagrammi di Bode asintotici per la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100(1-s)(1+\frac{s}{5})}{s^2(1-\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})^2}$$

$\mu = 100$ e $g = 2 \Rightarrow \frac{\mu}{s^g}$ ha pendenza -2 e taglia l'asse delle ω per $\frac{100}{\omega^2} = 1$ cioè per $\omega = 10$.

Frequenze d'angolo di poli e zeri non nell'origine:

$\omega = 1$	1 zero destro
$\omega = 5$	1 zero sinistro
$\omega = 10$	1 polo destro
$\omega = 100$	2 poli sinistri

Usiamo ora il foglio semilogaritmico (che si può trovare fra i materiali del corso sul sito del professore):

[immagine dagli appunti del prof]

Notiamo che per convenzione si rappresentano $10dB$ a tacca (verticale), inoltre se mancano le scale nel diagramme di bode si considera errore in sede d'esame!

Parte II

Esercitazioni

15 Esercitazione 1

LEZIONE 8 23/03/2020

link [clicca qui](#) per una registrazione di back up

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L08-2020.03.23.pdf

16 Esercitazione 2

LEZIONE 9 24/03/2020

link [clicca qui](#)

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L09-2020.03.24.pdf

17 Esercitazione 3

LEZIONE 10 25/03/2020

link [clicca qui](#) **[inizio lezione - 0:26:39]**

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L10-2020.03.25.pdf **[da pagina 0 a pagina 5]**

18 Esercitazione 4

LEZIONE 14 1/04/2020

link [clicca qui](#)

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L14-2020.04.01.pdf
Contenuto:

- Diagrammi di Bode;
- Regolo delle fasi.

19 Esercitazione 5

LEZIONE 15 2/04/2020

link [clicca qui](#)

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L15-2020.04.02.pdf
Contenuto:

- Diagrammi di Bode;
- Schema a blocchi (sintesi diretta);
- Routh;
- Parti nascoste.

20 Esercitazione 6

LEZIONE 16 6/04/2020

link [clicca qui](#)

Appunti del prof con annotazioni . . /pdf/FdA-L16-2020.04.06.pdf
Contenuto:

- Sistema a tempo discreto;
- Stabilità;
- Funzioni di trasferimento;
- Raggiungibilità e osservabilità;
- Schema a blocchi;
- Equilibri e stabilità degli equilibri;

21 Esercitazione 7

LEZIONE 17 8/04/2020

link [clicca qui](#)

Appunti del prof con annotazioni ../pdf/FdA-L16-2020.04.06.pdf

Contenuto:

-