

# ANALISI II

Federico Mainetti Gambera

6 febbraio 2020

# Indice

# 1-Equazioni differenziali

---

## Modelli differenziali

Si dice equazione differenziale di ordine  $n$  un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dove  $y(t)$  è la funzione incognita.

Si dirà soluzione, o (curva) integrale, di un'equazione differenziale, nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , una funzione  $\phi(t)$ , definita almeno in  $I$  e a valori reali per cui risulti

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Infine si dirà integrale generale di un'equazione differenziale una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni.

---

## Equazioni del primo ordine

---

### Generalità

L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine prende il nome di integrale generale dell'equazione.

Un'equazione differenziale si dice in forma normale se è nella forma

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

e ha infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = \int f(t, y(t)) dt + c.$$

La condizione supplementare

$$y(t_0) = y_0$$

permette di selezionare una soluzione particolare.

Il problema di risolvere queste equazioni prende il nome di problema di Cauchy, e si intende sempre che bisogna trovare come soluzione una funzione:

- definita su un intervallo  $I$ , contenente il punto  $t_0$ ;
  - derivabile in tutto  $I$  e che soddisfa l'equazione in tutto  $I$ .
- 

### Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono equazioni del tipo

$$y' = a(t)b(y)$$

con  $a$  continua in  $I \subset \mathbb{R}$  e  $b$  continua in  $J \subset \mathbb{R}$ .

Per risolverle notiamo che per tutte le  $\bar{y}_0$  per cui  $b(\bar{y}_0) = 0$ , primo e secondo membro si annullano. Prendendo in considerazione, invece, tutte le  $\bar{y}_1$  per cui  $b(\bar{y}_1) \neq 0$ , otteniamo:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt + c$$

Quindi se  $B(y)$  è una primitiva di  $\frac{1}{b(y)}$  e  $A(t)$  è una primitiva di  $a(t)$ , otteniamo:

$$B(y) = A(t) + c$$

e se si può ottenere la funzione inversa di  $B$  possiamo scrivere:

$$y = B^{-1}(A(t) + c)$$

$$y = F(t, c)$$

**teor.** Problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili.

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dove  $a$  è continua in un intorno  $I$  di  $t_0$  e  $b$  è continua in un intorno  $J$  di  $t_0$ . Allora esiste un intorno  $t_0$   $I' \subset I$  e una funzione  $y \in C^1(I')$  soluzione del problema.

Se inoltre  $b \in C^1(J)$ , allora tale soluzione è unica.

### Equazioni lineari del prim'ordine

Sono equazioni la cui forma normale è

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

e viene chiamata equazione completa.

Se  $f = 0$  l'equazione si dice omogenea.

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

**teor.** L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea una soluzione particolare della completa.

**Soluzione dell'equazione omogenea**

$$z(t) = ce^{-\int a(t)dt}$$

### Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa

Se una soluzione particolare non si riesce a trovare facilmente, si può usare il seguente metodo, detto di variazione della costante

$$\bar{y}(t) = c(t)e^{-A(t)}$$

Dove per  $A(t)$  si intende una primitiva di  $a(t)$  (essendo una primitiva qualunque, si può omettere la  $c$ ).

Sostituendo  $\bar{y}$  nella forma completa otteniamo l'integrale generale della forma completa:

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)} dt$$

**oss.** Nella primitiva  $A(t)$  e nell'integrale  $\int f(t)e^{A(t)} dt$  non c'è bisogno di aggiungere la solita costante di integrazione arbitraria.

### Soluzione del problema di Cauchy

La soluzione

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)} dt$$

sarà determinata da una condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0$$

scegliendo la primitiva  $A(t)$  tale che  $A(t_0) = 0$  (cioè  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ ), sarà

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)} ds$$

**teor.** Problema di Cauchy per un'equazione lineare del prim'ordine.

Siano  $a, f$  funzioni continue in un intervallo  $I$  contenente  $t_0$ . Allora, per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $y \in C^1(I)$  e tale soluzione è

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)} ds$$

### Note sugli esercizi

Per trovare il massimo intervallo della soluzione bisogna prendere un intervallo contenente il punto  $t_0$ , per cui la soluzione e la funzione di partenza siano continue e definite (si può anche prolungare per continuità).

## Equazioni lineari del secondo ordine

### Spazi di funzioni

Sia  $I$  un intervallo e consideriamo l'insieme  $\mathbb{F}$  di tutte le funzioni definite in  $I$ , a valori reali. Con le operazioni naturali di somma di due funzioni e prodotto per uno scalare:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$\mathbb{F}$  risulta essere uno spazio vettoriale.

**def.** definiamo  $C^n(I)$  lo spazio delle funzioni dotate di derivata  $n$ -esima continua.

### Generalità sulle equazioni lineari. Problema di Cauchy

Un'equazione differenziale del secondo ordine si dice lineare se è del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

dove le funzioni  $a_i$  e il termine noto  $g$  sono funzioni continue in un certo intervallo  $I$ .

Se il termine noto è nulla l'equazione si dice omogenea, altrimenti si dice completa.

Se i coefficienti  $a_i$  sono costanti, l'equazione si dirà a coefficienti costanti, altrimenti a coefficienti variabili.

Se  $a_2 = 1$  l'equazione si dirà in forma normale (se in un'equazione il coefficiente  $a_2$  non si annulla mai possiamo riscrivere l'equazione in forma normale dividendo per questo).

Nella soluzione si avranno sempre due coefficienti  $c_1$  e  $c_2$ , per selezionare una soluzione particolare avremo bisogno di due condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

che insieme all'equazione iniziale prenderà il nome di problema di Cauchy.

**teor.** (per funzioni del secondo ordine in forma normale)

Se  $a, b, f$  sono funzioni continue in un intervallo  $I$  contenente il punto  $t_0$ , per ogni  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $y \in C^2(I)$ .

Tale soluzione è individuata imponendo le condizioni iniziali nell'espressione che assegna l'integrale generale dell'equazione.

### La struttura dell'integrale generale

**teor.** Struttura dell'integrale generale dell'equazione lineare completa

- L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Lz = 0$  con  $L : C^2(I) \rightarrow C^0(I)$  in un dato intervallo  $I$  è uno spazio vettoriale (sottospazio di  $C^2(I)$ ).
- L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa.

**teor.** Proprietà di un'equazione omogenea del secondo ordine.

Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione due.

Significa che esistono 2 soluzioni  $(z_1, z_2)$  tali che:

- sono linearmente indipendenti
- ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste due soluzioni.
- L'integrale generale dell'equazione omogenea è assegnato dalla formula

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

**teor.** Determinante Wronskiano e indipendenza.

Siano  $z_1$  e  $z_2$  due funzioni  $C^2(I)$ , soluzioni di un'equazione lineare omogenea di secondo ordine nell'intervallo  $I$ . Allora esse sono linearmente indipendenti in  $C^2(I)$  se e solo se la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

detta matrice Wronskiana, ha determinante diverso da 0 per ogni  $t \in I$ . Inoltre, affinché questo accada, è sufficiente che il determinante si adivero da 0 in un punto  $t_0 \in I$  (il determinante o si annulla in tutti i punti o è diverso da 0 in tutti i punti, se è diverso da zero in tutti i punti  $z_1, z_2$  sono indipendenti).

Per determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale completa del secondo ordine si riconduce ai due passi seguenti:

- determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente, cioè due soluzioni  $z_1(t), z_2(t)$  linearmente indipendenti.
- determinare una soluzione particolare  $\bar{y}(t)$  dell'equazione completa.

L'integrale generale avrà dunque la forma:

$$\bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

### Equazioni omogenee a coefficienti costanti

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0$$

Sostituendo  $z(t) = e^{rt}$

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

Calcoliamo il  $\Delta$  di  $r^2 + ar + b$ , detta equazione caratteristica:

- $\Delta > 0$ , due radici reali distinte  $r_1$  e  $r_2$ , soluzione:

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

- $\Delta < 0$ , due radici complesse  $r_1 = \alpha + i\beta$ ,  $r_2 = \alpha - i\beta$ , soluzione:

$$z_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$z_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

da cui

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$$

quest'ultima espressione può essere riscritta anche come  $z(t) = e^{\alpha t} A \cos(\beta t + \phi)$ , con  $A$  e  $\phi$  costanti reali arbitrarie.

- $\Delta = 0$ , unica radice  $r = -\frac{a}{2}$ , soluzioni:

$$e^{rt} \quad te^{rt}$$

$$z(t) = e^{rt}(c_1 + c_2 t)$$

---

### Equazioni completa a coefficienti costanti

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Vediamo per prima cosa il

#### metodo di somiglianza

Si analizza il termine noto  $f(t)$ :

- $f(t) = p_r(t)$ , dove  $p_r(t)$  è un polinomio di grado  $r$ , si cerca una soluzione di tipo polinomiale:

$$\begin{aligned} y(t) &= q_r(t) & \text{se} & \quad b \neq 0 \\ y(t) &= tq_r(t) & \text{se} & \quad b = 0, a \neq 0 \\ y(t) &= t^2 q_r(t) & \text{se} & \quad b = 0, a = 0 \end{aligned}$$

dove  $q_r(t)$  è un generico polinomio di grado  $r$  di cui occorre determinare i coefficienti.

- $f(t) = Ae^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si cerca una soluzione del tipo  $y(t) = e^{\lambda t}\gamma(t)$ :

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A$$

Se:

– se  $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$

$$\gamma(t) = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

$$y(t) = \frac{Ae^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

– se  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , ma  $2\lambda + a \neq 0$

$$\gamma'(t) = \text{costante} = \frac{A}{2\lambda + a}$$

$$\gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}$$

$$y(t) = \frac{Ate^{\lambda t}}{2\lambda + a}$$

– se  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , ma  $2\lambda + a = 0$

$$\gamma'' = A$$

z

$$\gamma(t) = \frac{A}{2}t^2$$

$$y(t) = \frac{A}{2}t^2 e^{\lambda t}$$

Nella classe dei termini noti  $e^{\lambda t}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , rientrano anche:

$$\cos(\omega t), \quad \sin(\omega t), \quad e^{\lambda t} \cos(\omega t), \quad e^{\lambda t} \sin(\omega t)$$

Ricordiamo la formula di Eulero:

$$re^{i\theta} = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

Quindi se si è in presenza di un  $\sin(\omega t)$  come termine noto, si può studiare l'equazione che ha come termine noto  $\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$  e poi prenderne la parte immaginaria.

Viceversa se si è in presenza di una  $\cos(\omega t)$  come termine noto, si può studiare l'equazione che ha come termine noto  $\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$  e poi prenderne la parte reale.

In ogni caso, per facilitare la derivazione, si trasforma  $\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$  in  $e^{i\omega t}$  e si procede nello studio di un termine noto della forma  $f(t) = Ae^{\lambda t}$ .

Fa eccezione a questa tipologia il caso in cui manchi il termine in  $y'$ .

### Metodo di sovrapposizione

se, per esempio, il termine noto  $f(t) = \text{polinomio} + \text{una funzione trigonometrica}$ , si può trovare una soluzione per  $f(t) = \text{polinomio}$ , e una per  $f(t) = \text{funzione trigonometrica}$  e sommando le soluzioni si trova una soluzione dell'equazione di partenza.

### Metodo di variazione delle costanti

Illustriamo ora un metodo generale che consente di determinare una soluzione particolare qualunque sia la forma del termine noto.

Il metodo è applicabile purchè si conoscano già due soluzioni  $z_1, z_2$  indipendenti dell'equazione omogenea associata.

Dovremo quindi trovare le due funzioni  $c_1$  e  $c_2$  tali che

$$\begin{cases} c_1' z_1 + c_2' z_2 = 0 \\ c_1' z_1' + c_2' z_2' = f \end{cases}$$

cioè

$$c_1' = \frac{-z_2 f}{z_2' z_1 - z_2 z_1'}$$



$$c'_2 = \frac{z - 1f}{z'_2 z_1 - z_2 z'_1}$$

Dobbiamo quindi trovare due primitive di  $c'_1$  e  $c'_2$  e sostituire in:

$$y(t) = (c_1(t) + k_1)z_1(t) + (c_2(t) + k_2)z_2(t)$$

con  $k_i$  costanti arbitrarie di integrazione.

---

### Note sugli esercizi

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos(bx) dx &= \operatorname{Re}(\int e^{a+ib} x dx) \\ \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \operatorname{Im}(\int e^{a+ib} x dx) \\ \int e^{(a+ib)x} dx &= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a-ib)(\cos(bx) + i\sin(bx))\end{aligned}$$

### Equazione di Eulero

Per risolvere:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

si risolve l'equazione di secondo grado:

$$ar(r-a) + br + c = 0$$

- $\Delta > 0$ , soluzioni  $r_1, r_2$

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

per  $x > 0$

- $\Delta < 0$ , soluzioni  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y(x) = x^\alpha (c_1 \cos(\beta \log(x)) + c_2 \sin(\beta \log(x)))$$

per  $x > 0$

- $\Delta = 0$ , soluzioni coincidenti  $r$

$$y(x) = x^r (c_1 + c_2 \log(x))$$

per  $x > 0$

Per  $x < 0$ , si studia ancora la stessa equazione di secondo grado e si hanno soluzioni analoghe, ma con  $x$  sostituita da  $-x$ .

---

**Il "metodo di somiglianza" per la ricerca di una soluzione particolare delle equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:**

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (*)$$

(con  $a, b, c$  costanti,  $a \neq 0$ )

Forma di $f(x)$	Forma in cui si cerca $\bar{y}(x)$	Eventuali eccezioni e osservazioni
<b>CASO 1</b> polinomio di grado $n$	polinomio di grado $n$	Se nella (*) $c = 0$ , cercare un polinomio di grado $n + 1$ ; se $c = b = 0$ , cercare un polinomio di grado $n + 2$ .
<b>ESEMPIO CASO 1</b> $y'' + 2y = x^3 + 2$ $y'' - 3y' = 2x + 1$	$\bar{y}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ $\bar{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	
<b>CASO 2</b> esponenziale $Ae^{\lambda x}$	esponenziale $ce^{\lambda x}$ (lo stesso $\lambda$ , e $c$ da determinarsi)	Se non c'è soluzione di questo tipo (cioè accade perché $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , ossia perché $e^{\lambda x}$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea), cercare $\bar{y}(x) = cx^2e^{\lambda x}$ ; se nemmeno questo tipo di soluzione esiste, cercare $\bar{y}(x) = cx^3e^{\lambda x}$ .
<b>ESEMPIO CASO 2</b> $y'' + 2y' + 3y = 2e^{-3x}$ $y'' + 2y' - 3y = 3e^x$ (Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ ; equivalentemente: $e^x$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$ ; perciò occorre moltiplicare per $x$ )	$\bar{y}(x) = ce^{-3x}$ $\bar{y}(x) = cxe^x$	
<b>CASO 3</b> $A\cos\omega x + B\sin\omega x$	$c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ (lo stesso $\omega$ , e $c_1, c_2$ da determinarsi)	Notare che anche se $f$ ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi. Se $b = 0$ può accadere che $c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ sia soluzione dell'omogenea: in tal caso, cercare soluzione $x(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$ .
<b>ESEMPIO CASO 3</b> $y'' + 2y' - y = 3\sin 2x$	$\bar{y}(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	

Forma di $f(x)$	Forma in cui si cerca $\bar{y}(x)$	Eventuali eccezioni e osservazioni
<b>CASO 4</b> $e^{\lambda x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$	$e^{\lambda x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$ (gli stessi $\omega, \lambda$ e $c_1, c_2$ da determinarsi)	Se $z = \lambda + i\omega$ è soluzione di $az^2 + bz + c = 0$ , sostituire $e^{\lambda x}$ con $xe^{\lambda x}$ . Notare che anche se $f$ ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi.
<b>ESEMPIO CASO 4</b> $y'' + 2y = 3e^{-x}\sin 2x$ $y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}\cos x$ (Spiegazione 2° es.: $z = 2 + i$ è soluzione dell'eq. caratteristica $z^2 - 4z + 5 = 0$ , ossia $e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x$ sono soluzioni dell'eq. omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$ , perciò si introduce il fattore $x$ ). (Nel caso 4 può essere più comodo effettuare i calcoli utilizzando i numeri complessi. Per sinteticità, qui non si riporta l'illustrazione di quel metodo).	$\bar{y}(x) = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$ $\bar{y}(x) = xe^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$	
<b>CASO 5</b> $e^{\lambda x}p(x)$ , dove $p(x)$ è un polinomio di grado $n$	$e^{\lambda x}q(x)$ , con lo stesso $\lambda$ , e $q(x)$ polinomio di grado $n$ , da determinarsi	Se $\lambda$ è soluzione dell'eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , cercare una soluzione $y(x) = e^{\lambda x} \cdot$ (polinomio di grado $n + 1$ )
<b>ESEMPIO CASO 5</b> $y'' + 2y' - y = e^{3x}(x + 2)$ $y'' - y = e^x(x + 2)$ (Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ , ossia $e^x$ è soluzione dell'equazione omogenea $y'' - y = 0$ ; perciò il polinomio che compare in $\bar{y}$ si alza di grado).	$\bar{y}(x) = e^{3x}(ax + b)$ $\bar{y}(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$	

**OSSERVAZIONE. QUANDO IL TERMINE NOTO E' SOMMA DI DUE FUNZIONI DEI TIPI PRECEDENTI**

Se il termine noto è del tipo  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , con  $f_1, f_2$  dei tipi descritti in precedenza, è sufficiente cercare (separatamente):  
- una soluzione particolare  $y_1$  dell'equazione  $Ly = f_1$ ; una soluzione particolare  $y_2$  dell'equazione  $Ly = f_2$ ;  
- a questo punto (per la linearità dell'equazione differenziale), la funzione  $y_1 + y_2$  sarà una soluzione particolare di  $Ly = f_1 + f_2$ .

**Esempio:**

$y'' + 2y = 3e^{-x} + x^2 + 1$   
Si cerca una soluzione  $y_1 = c_1e^{-x}$  dell'equazione  $y'' + 2y = 3e^{-x}$ ; si cerca una soluzione  $y_2 = ax^2 + bx + c$  dell'equazione  $y'' + 2y = x^2 + 1$ ;  
la funzione  $y_1 + y_2$  sarà allora una soluzione particolare dell'equazione di partenza.

## 2-Calcolo infinitesimale per le curve

---

### Richiami di calcolo vettoriale

vettore

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

modulo di un vettore

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

versore

$$vers(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

$\vec{x}, \vec{y}$  sono paralleli se

$$\lambda \vec{x} = \mu \vec{y} \quad \text{per qualche } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Somma di vettori: si sommano le componenti simili.

Prodotto fra un vettore e uno scalare: si moltiplica ogni componente per lo scalare.

Prodotto scalare fra vettori: ha come risultato un numero reale ottenuto dalla formula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)$$

Il prodotto scalare può essere espresso anche come

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta)$$

dove  $\theta$  rappresenta l'angolo tra i due vettori. Di conseguenza  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  solo se i due vettori sono ortogonali.

Dal prodotto scalare si può ricavare l'angolo fra due vettori

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Inoltre  $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ .

Prodotto vettoriale:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettoriale si annulla solo se i vettori sono paralleli.

Regola della mano destra: il primo fattore va sul pollice, il secondo sull'indice, il risultato è nel medio.

Inoltre  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ .

Prodotto misto:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Il prodotto misto si annulla solo se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

---

### Funzioni a valori vettoriali, limiti e continuità

Si dice funzione a valori vettoriali una funzione  $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$ . Le funzioni  $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Il limite della funzione a valori vettoriali si calcola componente per componente:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} r_n(t) \right)$$

Valgono allo stesso modo delle funzioni unidimensionali il teorema di unicità del limite e la definizione di continuità (una funzione a valori vettoriali è continua in un punto se lo sono tutte le sue componenti).

---

## Curve regolari e calcolo differenziale vettoriale

Nel caso  $n = 2$  o  $3$ , una funzione  $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  rappresentano curve nel piano o nello spazio tridimensionale.

Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}$ . Si dice arco di curva continua, o cammino, in  $\mathbb{R}^n$  una funzione  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua.

La curva si dice chiusa se  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  con  $I = [a, b]$ .

La curva si dice semplice se non ripassa mai nello stesso punto.

Il sostegno della curva è l'immagine della funzione, cioè l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  percorsi dal punto mobile.

Una curva si dice piana se esiste un piano che contiene il suo sostegno.

### Derivata di una funzione vettoriale. Arco di curva regolare

**def.** Sia  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in I$ , si dice che  $\vec{r}$  è derivabile in  $t_0$  se esiste finito

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

Se  $\vec{r}$  è derivabile in tutto  $I$  e inoltre  $\vec{r}'$  è continuo in  $I$ , si dice che  $\vec{r}$  è di classe  $C^1(I)$  ( $\vec{r}' \in C^1(I)$ ).

Notiamo che il vettore derivato è il vettore delle derivate delle componenti:

$$\vec{r}'(t_0) = (r'_1(t_0), r'_2(t_0), \dots, r'_n(t_0))$$

**def.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Si dice arco di curva **regolare** un arco di curva  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\vec{r} \in C^1(I)$  e  $\vec{r}'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

Di conseguenza per le curve regolari è ben definito il **versore tangente**:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

**def.** Si dice arco di curva regolare a tratti un arco di curva  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che:  $\vec{r}$  è continua e l'intervallo  $I$  può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli, su ciascuno dei quali  $\vec{r}$  è un arco di curva regolare.

Alcune proprietà del calcolo differenziale vettoriale:

$$(\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$$

$$(c\vec{u})' = c\vec{u}' \quad \text{con } c \text{ costante}$$

$$(f\vec{u})' = f'\vec{u} + \vec{u}'f \quad \text{con } f \text{ funzione}$$

$$[\vec{u}(f(t))]' = \vec{u}'(f(t))f'(t)$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}' \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Dato un vettore  $\vec{r}(t)$  si dice

- velocità:  $\vec{r}'(t)$
- velocità scalare:  $|\vec{r}'(t)|$
- accelerazione:  $\vec{r}''(t)$
- accelerazione scalare:  $|\vec{r}''(t)|$

### Integrale di una funzione vettoriale

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left( \int_a^b \vec{r}_1(t) dt, \int_a^b \vec{r}_2(t) dt, \dots, \int_a^b \vec{r}_n(t) dt, \right)$$

Diremo che  $\vec{r}$  è integrabile in  $[a, b]$  se lo è ognuna delle sue componenti.

$$\int_a^b \vec{r}'(t) dt = \vec{r}(b) - \vec{r}(a)$$

Può essere utile utilizzare il seguente lemma:

$$\left| \int_a^b \vec{r}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\vec{r}(t)| dt$$

Se  $\vec{r}(t)$  è una curva regolare e chiusa in  $[a, b]$ , allora  $\int_a^b \vec{r}'(t) dt = 0$ .

---

### Classi di curve piane

#### curve piane, grafico di funzioni

Curve ottenute da grafici di funzioni in una variabile:

$$y = f(x) \quad \text{per } x \text{ in } [a, b]$$

Forma parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad \text{per } t \in [a, b]$$

Proprietà:

- è continua se e solo se  $f$  è continua
- è regolare se e solo se  $f$  è derivabile con continuità (le condizioni di non annullamento della derivata prima sono automaticamente verificate perchè  $x'(t) = 1$ )
- è regolare a tratti se e solo se  $f$  è continua e a tratti derivabile con continuità
- non è mai chiusa
- è sempre semplice

#### curve piane, forma polare

L'equazione

$$\rho = f(\theta) \quad \text{per } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

è una forma abbreviata che, tramite la sostituzione  $x = \rho \cos(\theta)$  e  $y = \rho \sin(\theta)$ , può essere riscritta:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{per } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Ricordiamo che  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  Osserviamo che

$$\vec{r}'(\theta) = (f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta))$$

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}$$

Geometricamente la forma polare  $\rho = f(\theta)$  può essere visualizzata come la curva tracciata da una penna posta su un braccio che ruota attorno all'origine a velocità costante (in modo che il tempo  $t$  combaci con l'angolo  $\theta$ ). Mentre il braccio ruota la penna si sposta lungo il braccio in modo da essere

a distanza  $f(\theta)$  dall'origine all'istante  $\theta$ .

Proprietà:

- è continua se e solo se  $f$  è continua
- è regolare se e solo se  $f$  è derivabile con continuità, inoltre  $f$  e  $f'$  non si annullano mai contemporaneamente
- è chiusa se e solo se  $f(\theta_1) = f(\theta_2)$  e  $\theta_2 - \theta_1 = 2n\pi$  per qualche intero  $n$ .

**coniche in forma polare**

Equazione polare della conica:

$$\rho = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon \cos(\theta)}$$

con  $\epsilon > 0$  e  $p > 0$  e  $\theta$  varia nell'intervallo in cui il secondo membro è definito e positivo.

Questa equazione rappresenta:

$$\begin{cases} \text{un'ellissi} & \text{se } \epsilon < 1 \\ \text{una parabola} & \text{se } \epsilon = 1 \\ \text{un'iperbole} & \text{se } \epsilon > 1 \end{cases}$$

Notiamo che il segno — davanti al coseno non è importante, infatti se cambiamo  $\theta = t + \pi$  l'equazione si trasforma in  $\rho = \frac{\epsilon p}{1 + \epsilon \cos(t)}$ .

Equazione della circonferenza:

$$\rho = R$$

---

## Lunghezza di un arco di curva

---

### Curve rettificabili e lunghezza

**def.** Si dice che  $\gamma$  è rettificabile se

$$\text{sub}_P l(\mathcal{P}) = l(\gamma) < +\infty$$

Dove l'estremo superiore è calcolato al variare di tutte le possibili partizioni  $\mathcal{P}$  di  $[a, b]$ .

In tal caso  $l(\gamma)$  assegna per definizione, la lunghezza di  $\gamma$ .

**teor.** Sia  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  regolare. Allora  $\gamma$  è rettificabile e

$$l(\gamma) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Nello spazio tridimensionale la formula diventa:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

### Lunghezza di un grafico

Sia  $\gamma$  una curva piana regolare che sia grafico di una funzione, ossia:

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad \text{per } t \in [a, b]$$

allora

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Sia  $\gamma$  l'unione di due curve rettificabili, allora  $\gamma$  è rettificabile, la stessa proprietà si estende a un numero finito qualsiasi di curve rettificabili.

Se una curva  $\gamma$  è regolare a tratti, allora è rettificabile.

---

### Cambiamenti di parametrizzazione, curve equivalenti

Passando da  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  a  $\vec{r} = \vec{r}(f(u))$  diremo che abbiamo riparametrizzato la curva, con  $f(u)$  monotona (crescente o decrescente).

Notiamo che dopo una riparametrizzazione la lunghezza dell'arco di curva rimane la stessa, anche se il verso o la velocità di percorrenza cambiano.

Per invertire il senso di percorrenza si può sostituire  $t$  con  $-t$ .

---

### Parametro arco o ascissa curvilinea

Se invece di calcolare la lunghezza in  $[a, b]$  la calcolassimo da  $[t_0, t]$  otterremmo una funzione di  $t$ :

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$$

Se si è in grado di calcolare esplicitamente tale funzione e poi di invertirla, esprimendo  $t$  come funzione di  $s$ , è possibile riparametrizzare la curva in funzione del parametro  $s$ , detto parametro arco o ascissa curvilinea (ricordarsi di ricalcolare anche gli estremi dell'intervallo secondo il nuovo parametro).

Notiamo che se  $|\vec{r}'(t)| = 1$ ,  $t$  coincide con il parametro arco, quindi la curva sarebbe già parametrizzata secondo il parametro arco.

Se  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  è una curva parametrizzata mediante il parametro arco, il vettore derivato  $\vec{r}'(s)$  coincide col versore tangente  $\vec{T}$

Se  $\vec{r}(t)$  è una curva parametrizzata rispetto a un parametro  $t$  qualunque (non necessariamente il parametro arco), si ha:

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = v(t)$$

che si riscrive anche nella forma

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt = v(t) dt$$

dove il simbolo  $ds$  prende il nome di lunghezza d'arco elementare.

---

### Integrali di linea (di prima specie)

Sia  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un arco di curva regolare di sostegno  $\gamma$  e sia  $f$  una funzione a valori reali, definita in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  contenente  $\gamma$ , cioè  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\gamma \subset A$ .

Si dice integrale di linea (di prima specie) di  $f$  lungo  $\gamma$  l'integrale

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

L'integrale di  $f$  di prima specie lungo  $\gamma$  è invariante per parametrizzazioni equivalenti e anche per cambiamento di orientazione.

### applicazioni fisiche

- Il **baricentro** di  $\gamma$  è il punto  $B = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  con:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b x(t) \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b y(t) \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b z(t) \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \end{cases}$$

Se il corpo è omogeneo ( $\rho = \text{costante}$ ), il baricentro si dice centroide e ha coordinate:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\rho}{m} \int_{\gamma} x ds = \frac{1}{l(\gamma)} \int_a^b x(t) |\vec{r}'(t)| dt = \frac{\int_a^b x(t) |\vec{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt} \\ \bar{y} = \text{stesso di sopra} \\ \bar{z} = \text{stesso di sopra} \end{cases}$$

- **momento di inerzia** di  $\gamma$  rispetto a un asse fissato. Se  $\delta(x, y, z)$  indica la distanza del punto  $(x, y, z)$  da quest'asse fissato, si ha:

$$I = \int_{\gamma} \delta^2 \rho ds = \int_a^b \delta^2(\vec{r}(t)) \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

Se il corpo è omogeneo:

$$I = \frac{m}{l(\gamma)} \int_{\gamma} \delta^2 ds = m \frac{\int_a^b \delta^2(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt}$$

Può essere molto utile cercare di ridefinire la curva spostandola in modo tale che l'asse di riferimento sia uno degli assi cartesiani, in questo modo esprimere la distanza  $\delta$  di ogni punto dall'asse può essere più facile.

## Elementi di geometria differenziale delle curve

### Curvatura e normale principale per una curva in $\mathbb{R}^n$

Il versore tangente è definito come:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \text{mentre } \vec{T}(s) = \vec{r}'(s)$$

in quanto  $|\vec{r}'(s)| = 1$ , se  $s$  è il parametro arco.

Sia  $\vec{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una funzione vettoriale di modulo costante, ossia  $|\vec{u}(t)| = c$  per ogni  $t$ . Allora  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ , cioè  $\vec{u}$  è ortogonale a  $\vec{u}'$  in ogni istante.

### Normale principale e curvatura, rispetto al parametro arco

Chiamiamo versore normale principale della curva  $\vec{r}(s)$  (parametrizzata rispetto al parametro arco), il versore

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)|}$$

definito nei punti in cui  $\vec{T}'(s) \neq 0$ .

Chiamiamo curvatura della curva la funzione scalare

$$k(s) = |\vec{T}'(s)|$$

da cui ricaviamo che  $\vec{T}'(s) = k(s) \vec{N}(s)$ .

La normale principale ci dice la direzione verso cui sta curvando la nostra curva, mentre la curvatura è uno scalare e rappresenta l'intensità con cui curva.

Definiamo invece come raggio di curvatura

$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$$



nei punti in cui  $k(s) \neq 0$ , nei punti in cui invece  $k(s) = 0$  si dice che il raggio di curvatura è infinito.

### Normale principale e curvatura, rispetto a un parametro qualsiasi

Versore normale principale:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

e definendo  $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = v(t)$  da cui ricaviamo che la curvatura è:

$$k(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{v(t)}$$

da cui  $\vec{T}'(t) = k(t)v(t)\vec{N}(t)$ .

Raggio di curvatura:

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Vale la seguente formula:

$$\vec{a}(t) = v'(t)\vec{T}(t) + v^2(t)k(t)\vec{N}(t)$$

dove  $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

### Calcolo della curvatura per curve nello spazio $\mathbb{R}^3$ o nel piano

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{v^3(t)}$$

$$k(s) = \frac{|\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)|}{v^3(s)}$$

#### caso di curve piane

Sia  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  per  $t \in [a, b]$ , possiamo vederla come curva in  $\mathbb{R}^3$  così:  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$  per  $t \in [a, b]$ .

Perciò,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix}$$

da cui derivano:

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(s) = \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si dicono vertici di una curva i punti in cui  $k'(t) = 0$ .

### Torsione(manca) e terna intrinseca per curve nello spazio $\mathbb{R}^3$

Data una curva  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , regolare di classe  $C^3(I)$ , definiamo il versore binormale della curva come

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

La terna intrinseca  $\vec{B}, \vec{T}, \vec{N}$  costituisce un sistema di riferimento ortonormale.

## Note sugli esercizi

Proprietà delle curve:

- continua: se le componenti sono continue.
- chiusa: se agli estremi dell'intervallo in cui sono definite la curva ha lo stesso valore (se fosse definita su tutto  $\mathbb{R}$  si controllano i limiti all'infinito).
- asintoti: se i limiti all'infinito hanno un valore finito per una delle due componenti.
- semplice: se la curva non passa mai due volte per lo stesso punto. Si verifica per logica, spesso è utile notare se almeno una delle due componenti è strettamente monotona (crescente o decrescente). Spesso per funzioni trigonometriche si cerca di ragionare sulla loro periodicità.
- regolare: Si calcola la derivata della curva (derivata delle componenti) e in seguito il modulo della derivata (radice della somma delle componenti alla seconda). Se le derivate delle componenti sono funzioni continue e il modulo della derivata non si annulla mai per i valori di  $t$  per cui la curva è definita (estremi esclusi, sempre) allora la curva è regolare. (Ci sono metodi particolari per calcolare il modulo della derivata, per esempio, per funzioni in forma polare il modulo della derivata è:  $\rho = f(\theta) \Rightarrow |\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}$ ; ma, inoltre, non bisogna scordarsi di calcolare le derivate delle componenti per controllare che siano continue).  
Infine per individuare i punti di singolarità (cioè quelli in cui la funzione non è regolare) si calcolano i punti in cui  $\vec{r}'(t) = (x, y, z)$  per cui  $t$  annulla la derivata.

- piana:  
Primo metodo: si controlla se il versore binormale alla curva è costante. Il vettore binormale della curva  $\gamma(x(t), y(t), z(t))$  si calcola come prodotto vettoriale di  $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ , una volta normalizzato (dividendo ogni componente per il modulo (componenti al quadrato sommate sotto radice)) si ottiene il versore e si controlla se è costante (curva piana) o non costante (curva non piana) e dunque basta assicurarsi che non sia presente la variabile  $t$  (p.s.  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ,  $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ ). Concettualmente, se i calcoli sono troppo complicati, si può ragionare sul fatto che se il vettore binormale (che è sempre ortonormale alla curva) ha sempre la stessa direzione (anche se di modulo diverso) allora la curva è piana.  
Secondo metodo: sostituiamo le equazioni parametriche della curva  $\gamma(x(t), y(t), z(t))$  nella formula del piano generico  $ax + by + cz + d = 0$ . Se risulta che l'equazione è sempre soddisfatta, allora la curva è complanare.

Equazione di una retta passante per due punti:

Dati due punti  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  la retta passante per questi punti è definita dall'equazione

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Questa formula vale se i due punti non sono allineati verticalmente o orizzontalmente.

Negli esercizi sul calcolo delle lunghezze di archi di curve e di parametrizzazione secondo il parametro arco è risultato molto utile l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(t)} dt &= \left[ \text{moltiplicando per } \frac{\sqrt{1 - \cos(t)}}{\sqrt{1 - \cos(t)}} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{1 - \cos(t)}} dt = \\ &= [2\sqrt{\cos(t) + 1} \cdot \tan(\frac{t}{2})]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

### 3-Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

---

#### Continuità di una funzione in più variabili:

Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in un punto  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La continuità di una funzione è anche deducibile dal fatto che sia costituita (somma/ prodotto/ quoziente/ certe volte anche composizione) da funzioni elementari continue.

---

#### Calcolo di limiti in più variabili

---

##### Non esistenza del limite

Per mostrare che una certa funzione in più variabili non ammette limite in un determinato punto, è sufficiente determinare due curve passanti per il punto lungo le quali la funzione assume limiti diversi.  
**es.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Analizziamo la funzione lungo due curve:

- con  $y = x$  ottengo  $f(x, x) = \frac{1}{2}$
- con  $y = -x$  ottengo  $f(x, -x) = -\frac{1}{2}$

non ammette limite.

---

##### Uso di maggiorazioni con funzioni radiali per provare l'esistenza del limite

Per dimostrare l'esistenza di un limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , si impone  $x = \rho \cdot \cos(\theta)$  e  $y = \rho \cdot \sin(\theta)$ , successivamente si l'intera funzione sotto modulo e procede con semplificazioni e maggiorazioni (per eliminare i seni e i coseni). E' essenziale che la funzione non dipenda da  $\theta$ .

Più in generale se si volesse calcolare il limite per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  si pongono  $x = x_0 + \rho \cdot \cos(\theta)$  e  $y = y_0 + \rho \cdot \sin(\theta)$

---

##### Note sugli esercizi

- Se il limite non presenta una forma di indeterminazione allora il valore cercato si ricava sostituendo direttamente il punto nella funzione.
- Tecniche standard della maggiorazione:

– disuguaglianza triangolare:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

– maggiorazione di frazioni, con  $a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{b}$$

– maggiorazione di funzioni trigonometriche:

$$|\cos(\theta)| \leq 1, \quad |\sin(\theta)| \leq 1$$

- Il criterio che ci permette di trovare il limite richiede di trovare una funzione maggiorante di  $|f|$  che sia radiale (dipenda solo da  $\rho$ , non  $\theta$ ) e infinitesima. Da notare è che è anche possibile semplificare la funzione anche senza passare subito in coordinate polari.

- Solitamente si suddivide la funzione in una serie di somme di funzioni e si studiano quest'ultime separatamente.

- Spesso la formula

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

risulta molto utile.

## Topologia in $\mathbb{R}^n$ e proprietà delle funzioni continue

Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , un punto  $x_0$  si dice:

- interno ad  $E$ , se esiste un intorno centrato in  $x_0$  contenuto in  $E$ ;
- esterno ad  $E$ , se esiste un intorno centrato in  $x_0$  contenuto in  $E^c$ ;
- di frontiera per  $E$ , se ogni intorno centrato in  $x_0$  contiene almeno un punto di  $E$  e uno di  $E^c$ .

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice:

- aperto, se ogni suo punto è interno a  $E$ ;
- chiuso, se il suo complementare è aperto.

Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , si dice:

- interno di  $E$ , e si indica con  $E^\circ$ , l'insieme dei punti interni di  $E$ ;
- frontiera o bordo di  $E$ , e si indica con  $\delta E$ , l'insieme dei punti di frontiera di  $E$ ;
- chiusura di  $E$ , e si indica con  $\bar{E}$ , l'insieme  $E \cup \delta E$ .

Alcune informazioni extra:

- si ha sempre  $E^\circ \subseteq \delta E \subseteq \bar{E}$ ;
- il complementare di un aperto è chiuso e viceversa;
- esistono insiemi nè aperti nè chiusi, gli unici insiemi sia aperti sia chiusi sono quello vuoto e  $\mathbb{R}^n$ ;
- l'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi aperti e l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti sono insiemi aperti
- l'intersezione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi chiusi è l'unione di un numero finito di insiemi chiusi sono insiemi chiusi;
- un insieme aperto non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera, un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Un insieme si dice:

- limitato se esiste un intorno che lo contiene tutto;
- connesso se per ogni coppia di punti dell'insieme, esiste un arco continuo che li connette contenuto nell'insieme.

Proprietà topologiche delle funzioni continue:

- **teor.** Teorema di Weierstrass. Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e limitato e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua, allora  $f$  ammette massimo e minimo in  $E$ , cioè esistono  $x_m$  e  $x_M$  tali che  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$  per ogni  $x \in E$ .
- **teor.** Teorema degli zeri. Sia  $E$  un insieme connesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua. Se  $x, y$  sono due punti di  $E$  tali che  $f(x) < 0$  e  $f(y) > 0$ , allora esiste un terzo punto  $z \in E$  in cui  $f$  si annulla. In particolare, lungo ogni arco di curva continua contenuto in  $E$  che congiunge  $x$  e  $y$ , c'è almeno un punto in cui  $f$  si annulla.

## Derivate parziali, piano tangente, differenziale

---

### Derivata parziale

Calcolo di una derivata parziale tramite la definizione di rapporto incrementale in un punto  $(x_0, y_0)$ . Per prima fissiamo  $y = y_0$  e deriviamo rispetto alla  $x$ :

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Successivamente facciamo l'opposto, cioè fissiamo  $x = x_0$  e deriviamo rispetto alla  $y$ :

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice derivabile in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le sue derivate parziali; si dice derivabile in  $A$  se è derivabile in ogni punto di  $A$ .

Se  $f$  è derivabile in un punto, chiameremo gradiente  $(\nabla f(x))$  il vettore delle sue derivate parziali.

---

### Piano tangente

Costruire il piano tangente a una funzione in due variabili in un punto  $(x_0, y_0)$ :

1. troviamo la retta tangente alla funzione nel piano  $y = y_0$ :

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

2. troviamo la retta tangente alla funzione nel piano  $x = x_0$ :

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

3. costruiamo il piano che contiene entrambe le rette:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Il procedimento appena mostrato individua il piano tangente nell'ipotesi che esso esista, potrebbe però non esserci.

---

### Differenziabilità e approssimazione lineare

In due o più variabili la sola derivabilità non implica né continuità né l'esistenza del piano tangente. Concetto di differenziabilità in più variabili: l'incremento di  $f$  è uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente, più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento  $(h, k)$  delle variabili indipendenti. In formule:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

Tutto ciò che è prima dell'uguale (primo membro) rappresenta l'incremento della funzione, i primi due addendi del secondo membro rappresentano l'incremento calcolato lungo il piano tangente. Ricordiamo che l'ultimo addendo rappresenta una funzione tale che  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ . Se l'equazione di prima è soddisfatta, diremo che la funzione è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .

Da notare che la differenziabilità implica la derivabilità, cioè se una funzione è differenziabile in un punto, allora è anche derivabile nello stesso.

Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , si dice differenziale di  $f$  calcolato in  $x_0$  la funzione lineare  $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$df(x_0) : h \rightarrow \nabla f(x_0) \cdot h.$$

Nel caso in due variabili, il numero  $\nabla f(x_0) \cdot h$  rappresenta l'incremento della funzione nel passare da  $x_0$  a  $x_0 + h$ , calcolato lungo il piano tangente al grafico di  $f$  in  $x_0$ .

L'approssimazione dell'incremento di  $f$  con il suo differenziale prende il nome di linearizzazione.

---

### Verifica della differenziabilità

Per dimostrare la differenziabilità in un punto  $(x_0, y_0)$  bisogna provare che:

$$\lim_{h,k \rightarrow 0,0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - \{f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)h + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)k\}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

dove  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$ .

Ma per certi casi particolari esistono criteri molto comodi e più semplici.

Teorema di condizione sufficiente di differenziabilità: se le derivate parziali di  $f$  esistono in un intorno di  $x_0$  e sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

In particolare se le derivate parziali esistono e sono continue in tutto  $A$ , allora  $f$  è differenziabile in tutto  $A$ .

Una funzione le cui derivate parziali esistono e sono continue in tutto  $A$  si dice di classe  $C^1(A)$ , dunque:  $f \in C^1(A) \rightarrow f$  differenziabile in  $A$ .

Negli esercizi spesso si usa anche l'omogeneità di una funzione per sapere se essa è differenziabile o continua, oppure le proprietà delle funzioni radiali.

Negli esercizi seguire quest'ordine:

- E' continua nel punto richiesto? se non lo è, può essere allungata?
  - Funzione radiale? (vedi più avanti)
  - Funzione omogenea? (vedi più avanti)
  - Calcolo delle derivate parziali nel punto. Sono continue in quel punto?
  - Verifica della differenziabilità tramite la definizione.
- 

### Derivate direzionali

Si dice derivata direzionale della funzione  $f$  rispetto al versore  $v$ , nel punto  $x_0$ , il limite

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

purchè esista finito.

Detto in maniera diversa significa considerare la restrizione della funzione  $f$  alla direzione della retta passante per  $x_0$  con direzione  $v$ , cioè  $g(t) = f(x_0 + tv)$ , e calcolarne la derivata, cioè  $D_v f(x_0) = g'(0)$ .

Calcolo di una derivata direzionale per un generico vettore  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  nell'origine di una funzione  $f$ : Per prima cosa si ottiene la funzione  $g(t) = f(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta))$  e la si semplifica per  $t \rightarrow 0$  (anche usando asintotici). In seguito si studia la derivata  $g'(0) = \frac{\delta f}{\delta t}(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta))$ .

Se è richiesto il calcolo in un punto generico, e non nell'origine, è sufficiente usare  $t \cdot \cos(\theta) + x_0$  e  $t \cdot \sin(\theta) + y_0$ .

Formula del gradiente:  $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) \cdot v_i$ . Cioè la derivata direzionale è il prodotto scalare del gradiente con il versore nella direzione in cui si deriva, quindi tutte le derivate direzionali sono combinazioni lineari delle derivate parziali. Nel caso in due variabili la formula si riduce a  $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)\cos(\theta) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)\sin(\theta)$ .

Se la formula del gradiente non vale in un punto, allora la funzione non è differenziabile in quel punto. Inoltre la formula del gradiente non vale se la generica derivata direzionale non è combinazione lineare di  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta)$ .

Da notare è che  $\nabla f(x_0)$  indica la direzione di massima crescita di  $f$ , ossia la direzione di massima derivata direzionale, invece  $-\nabla f(x_0)$  rappresenta la direzione di minima derivata direzionale, infine nelle direzioni ortogonali al gradiente le derivate direzionali sono nulle.

## Riepilogo

- $f \in C^1(A) \Rightarrow f$  differenziabile in  $A$  (cioè  $f$  ha iperpiano tangente)  $\Rightarrow f$  è continua, derivabile, ha derivate direzionali, vale la formula del gradiente.
- $f$  continua, derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali  $\nRightarrow f$  differenziabile
- $f$  derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali  $\nRightarrow f$  continua

## Calcolo delle derivate

$$\begin{aligned}\delta(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) &= \alpha \delta(f) + \beta \delta(g) \\ \delta(f \cdot g) &= g \cdot \delta(f) + f \cdot \delta(g) \\ \delta\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \cdot \delta(f) - f \delta(g)}{g^2} \\ h(x) = f(g(x)) = g \circ f &\Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x) \\ \frac{\delta}{\delta x}[|x|] &= \frac{|x|}{x}\end{aligned}$$

Per calcolare il valore di una derivata parziale in punto  $(x_0, y_0)$  secondo la definizione, seguire questo procedimento. Se si richiede di calcolare il valore della derivata parziale di  $x$  (cioè  $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)$ ), si parte dalla funzione  $f(x, y)$  e si sostituisce  $y = y_0$ , ottenendo quindi  $f(x, y_0)$ , successivamente si calcola la derivata parziale, ottenendo dunque  $\frac{\delta f}{\delta x}(x, y_0)$ . Come ultima cosa si sostituisce  $x = x_0$  e si arriva a un risultato numerico. Per la trovare il valore della derivata parziale di  $y$  in un preciso punto seguire lo stesso procedimento opposto.

In alcuni esercizi è richiesto di calcolare le derivate parziali in tutti i punti in cui esistono. Il procedimento tipico consiste nel calcolare per prima cosa le derivate parziali generiche. Una volta calcolare sapremo che sicuramente esistono dove queste sono definite (dominio), ma non siamo sicuri dei punti in cui non lo sono (al di fuori del dominio). Quindi dobbiamo analizzare singolarmente tutti i punti al di fuori del dominio e per farlo sfruttiamo il procedimento visto sopra, calcolando esplicitamente le derivate nei punti richiesti. Finché si tratta per esempio di calcolarle per un punto preciso non ci sono problemi, il calcolo è facile, ma ci sono alcuni casi difficili, per esempio:

- Calcolare le derivate parziali secondo la definizione lungo una retta. Per esempio in  $y = 0$ , per calcolare la  $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, 0)$  non ci sono problemi, si procede come al solito. Ma per la  $\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, 0)$  ci sono difficoltà, siccome non possiamo sostituire le  $y$  con 0 e poi derivare per la  $y$ , dobbiamo ragionare così: la derivata non esiste a meno che non ci sia un valore che le  $x$  possono assumere che annullino la funzione (per gli es che ho fatto fino ad ora sono solo al numeratore). Il concetto generale è che se non si trovano valori per  $x_0$  tali che annullino la funzione e quindi ci permettano di calcolare la derivata parziale, si finisce per tornare a guardare la derivata parziale generica e quindi a non trovarla per quella retta. [spiegato davvero male, ma è un concetto strano].

Per stabilire dove la funzione sia derivabile bisogna calcolare le derivate parziali e osservarne il dominio.

(n.b. tipicamente negli esercizi le funzioni sono descritte da un sistema che contiene una funzione prolungata nell'origine, in questo caso bisogna calcolare le derivate parziali al di fuori dell'origine e studiarne il dominio, in seguito bisogna calcolare il valore della derivata parziale nel punto  $(0, 0)$  col metodo descritto precedentemente).

### Gradiente di una funzione radiale

Si chiama funzione radiale una funzione  $h$  che dipende solo dalla distanza di dall'origine, ossia

$$h(x) = g(|x|).$$

ponendo  $\rho = |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$  si ha:

$$\nabla_\rho = \left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \dots, \frac{x_n}{\rho}\right).$$

$$\nabla h(x) = g'(|x|) \left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|}\right)$$

$$|\nabla h(x)| = |g'(|x|)|$$

Le funzioni radiali sono spesso utilizzate negli esercizi in cui le incognite compaiono solo all'interno del termine  $\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ , in tal caso si ottiene  $g(\rho)$  sostituendo ogni  $\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$  con  $\rho$ , successivamente si può procedere sfruttando le proprietà di continuità e differenziabilità delle funzioni radiali.

---

### Criterio di continuità e differenziabilità per funzioni radiali

Sia  $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione radiale, cioè  $f(x) = g(|x|)$  con  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $f$  continua fuori dall'origine. Allora:

- $f$  è continua in 0, se e solo se esiste finito  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho)$ ;
- $f$  è differenziabile in 0 se e solo se esiste  $g'(0) = 0$ .

Negli esercizi spesso si controlla prima la continuità nell'origine, se non lo è si allunga la funzione e successivamente si calcola la differenziabilità nell'origine.

---

### Funzioni omogenee

Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (eventualmente definita solo per  $x \neq 0$ ), non identicamente nulla, si dice positivamente omogenea di grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  se

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \lambda > 0.$$

La funzione  $f$  si dice omogenea di grado  $\alpha$  se la formula di prima vale anche per  $\lambda < 0$ .

Se  $f$  è positivamente omogenea vale

$$f(x) = f(|x| \cdot \frac{x}{|x|}) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

In particolare se  $f$  è omogenea (o positivamente omogenea) di grado zero, significa che è costante su ogni retta (o semiretta) uscente dall'origine. Infatti, indicata con

$$r(t) = tv$$

con  $v$  versore fissato, sarà

$$f(r(t)) = f(tv) = t^0 f(v) = f(v) = \text{costante}.$$

Più in generale, per una funzione in due variabili positivamente omogenea di grado  $\alpha$  vale la seguente rappresentazione in coordinate polari:

$$f(\rho, \theta) = \rho^\alpha g(1, \theta)$$

per qualche  $\alpha \in \mathbb{R}$  e qualche funzione  $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positivamente omogenea di grado  $\alpha$ , definita e continua per  $x \neq 0$ . Allora:



- $f$  è continua anche nell'origine se  $\alpha > 0$ ; in questo caso  $f(0) = 0$ ;  $f$  è discontinua nell'origine se  $\alpha < 0$ ; è discontinua anche se  $\alpha = 0$ , tranne il caso banale in cui  $f$  è costante.
- $f$  è differenziabile nell'origine se  $\alpha > 1$ ; non è differenziabile nell'origine se  $\alpha < 1$ , tranne il caso banale in cui  $\alpha = 0$  e  $f$  è costante; se  $\alpha = 1$ ,  $f$  è differenziabile se e solo se è una funzione lineare, (ossia  $f(x) = a \cdot x$  per qualche vettore costante  $a \in \mathbb{R}^n$ ).

Si ricordi che ogni derivata parziale prima di una funzione positivamente omogenea di grado  $\alpha$ , se esiste, è una funzione positivamente omogenea di grado  $\alpha - 1$ .

## Ortogonalità del gradiente con le curve di livello

Il gradiente è ortogonale in ogni punto alle linee di livello.

## Equazione del trasporto

Si definisce equazione del trasporto la seguente:

$$c \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta t} = 0 \quad (?)$$

Teorema del valor medio. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile in  $A$ . Allora per ogni coppia di punti  $x_0, x_1 \in A$ , esiste un punto  $x^*$  tale per cui:

$$f(x_1) - f(x_0) = \nabla f(x^*) \cdot (x_1 - x_0).$$

In particolare:

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq |\nabla f(x^*)| \cdot |x_1 - x_0|.$$

## Derivate di ordine superiore e approssimazioni successive

### Derivate di ordine superiore

Teorema di Schwartz. Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Supponiamo che (per certi indici  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) le derivate seconde miste  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  esistano in un certo  $x_0$  e siano continue in  $x_0$ ; allora esse coincidono in  $x_0$ .

Una funzione che ha tutte le derivate parziali seconde continue in un aperto  $A$  si dice di classe  $C^2(A)$ .

Se  $f \in C^2(A)$ , allora  $f \in C^1(A)$  (in particolare  $f$  è differenziabile), le derivate parziali prima sono differenziabili, le derivate parziali seconde sono continue, le derivate seconde miste sono uguali.

## Differenziale secondo, matrice hessiana, formula di Taylor al secondo ordine

Se  $f \in C^2(A)$  e  $x_0 \in A$ , si dice differenziale secondo di  $f$  in  $x_0$  la funzione

$$d^2 f(x_0) : h \rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2(f)}{\delta(x_i) \delta(x_j)}(x_0) h_i h_j.$$

I vari coefficienti  $\frac{\delta^2(f)}{\delta(x_i) \delta(x_j)}(x_0)$  possono essere ordinati in una matrice detta Hessiana:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x_0) & f_{x_1 x_2}(x_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(x_0) \\ f_{x_2 x_1}(x_0) & f_{x_2 x_2}(x_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(x_0) & f_{x_n x_2}(x_0) & \dots & f_{x_n x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

In particolare, per due variabili:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se  $f$  è di classe  $C^2$ , la matrice Hessiana è simmetrica.

Formula di Taylor (resto secondo Lagrange). Sia  $f \in C^2(A)$ ; per ogni  $x_0 \in A$  e  $h \in \mathbb{R}^n$ , tale che  $x_0 + h \in A$ , esiste un numero reale  $\delta \in (0, 1)$ , dipendente da  $x_0$  e  $h$ , tale che:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x_0 + \delta h) h_i h_j.$$

Formula di Taylor (resto secondo Peano). Sia  $f \in C^2(a)$ . Per ogni  $x_0 \in A$  vale la formula:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2).$$

---

## Ottimizzazione, estremi liberi

### Generalità sui problemi di ottimizzazione

- $x_0$  è detto punto di massimo (minimo) globale se per ogni  $x$  si ha  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ );
- $x_0$  è detto punto di massimo (minimo) locale se esiste un intorno di  $x_0$  detto  $U$  tale per cui per ogni  $x \in U$  si ha  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ).

---

### Estremi liberi, condizioni necessarie del prim'ordine

Teorema di Fermat. Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto e  $x_0 \in A$  un punto di massimo o minimo locale per  $f$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $\nabla f(x_0) = 0$ .

I punti in cui il gradiente di una funzione si annulla si dicono punti critici o stazionari di  $f$ . Una volta individuati tutti i punti stazionari, si può iniziare un'analisi su di essi per verificare se sono o meno punti di massimo o minimo. Se non lo sono essi prendono il nome di punti di sella o colle. Da notare particolarmente è che una funzione può assumere valori di massimo o minimo anche in punti in cui non è derivabile, dunque questi punti vanno analizzati separatamente.

---

### Forme quadratiche, classificazione

Un modo per determinare la natura di un punto stazionario è quello di analizzare il segno dell'incremento  $\nabla f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ . Se infatti si riesce a stabilire che  $\nabla f(x_0)$  si mantiene di segno positivo o negativo, per ogni  $h$  di modulo abbastanza piccolo, possiamo dedurre che  $x_0$  è punto di minimo o massimo locale. Se invece al variare di  $h$ ,  $\nabla f(x_0)$  cambia segno, siamo in presenza di un punto di sella.

Lo studio del segno di  $\nabla f(x_0)$  riconduce all'analisi del segno del polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti di  $h$  (che prende il nome di forma quadratica) dato da

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j.$$

Ogni forma quadratica risulta associata a una matrice simmetrica  $M$ . Nel caso del differenziale la matrice  $M$  coincide con la matrice Hessiana.

Il segno della forma quadratica è quindi studiabile analizzando la sua matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  con  $a \neq 0$  nel seguente modo:

- è definitivamente positiva (negativa) se e solo se  $\det(M) > 0$  e  $a > 0$  ( $a < 0$ );
- indefinita se  $\det(M) < 0$ ;
- semidefinita positiva (negativa) se e solo se  $\det(M) = 0$  e  $a > 0$  ( $a < 0$ ).

Se  $a = 0$  e  $c \neq 0$ , nelle affermazioni precedenti occorre sostituire  $a$  con  $c$ .

---

### Forme quadratiche, test degli autovalori

Un importante test per determinare il segno di una funzione quadratica in  $\mathbb{R}^n$  è basato sul segno degli autovalori della matrice  $M$ .

Ricordiamo che un numero complesso  $\lambda$  e un vettore non nullo  $v \in \mathbb{C}^n$  si dicono, rispettivamente, autovalore e autovettore (di  $\lambda$ ) di una matrice  $M$  di ordine  $n$ , se soddisfano la relazione:

$$Mv = \lambda v$$

oppure

$$(M - \lambda I_n)v = 0.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni  $v$  non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare, ovvero se  $\lambda$  è soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

esistono esattamente  $n$  autovalori di  $M$  ciascuno contato secondo la propria molteplicità.

Le matrici  $M$  simmetriche hanno proprietà importanti:

- gli autovalori di  $M$  sono reali e possiedono autovettori reali;
- esistono  $n$  autovettori lineari che costituiscono una base ortonormale in  $\mathbb{R}^n$ ;
- La matrice  $S = w_1, w_2, \dots, w_n$  le cui colonne sono gli autovettori lineari è ortogonale e diagonalizza  $M$ , precisamente:

$$S^T M S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Tornando allo studio del segno della forma quadratica con la sua matrice  $M$ :

- definitivamente positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di  $M$  sono positivi (negativi);
- semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di  $M$  sono  $\geq 0$  ( $\leq 0$ ) e almeno uno di essi è nullo;
- indefinita se  $M$  ha almeno un autovalore positivo e uno negativo.

Da notare è che per una forma quadratica l'origine è sempre un punto stazionario.

---

### Studio della natura dei punti critici

Per estrarre informazioni su un punto critico  $x_0$  occorre studiare e classificare la forma quadratica

$$q(h) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j = h^T H_f(x_0) h$$

dove  $H_f(x_0)$  è la matrice Hessiana di  $f$  in  $x_0$ .

- se la forma quadratica è definitivamente positiva (negativa), allora  $x_0$  è un punto di minimo (massimo) locale forte;
- se la forma quadratica è indefinita, allora  $x_0$  è un punto di sella;

- se la forma quadratica è in  $x_0$  semidefinita positiva (negativa) e non nulla, allora  $x_0$  è di minimo (massimo) debole oppure di colle; la situazione cambia se la forma quadratica è semidefinita positiva (negativa) non solo in  $x_0$ , ma anche per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,  $f$  è convessa (concava), dunque un punto di minimo (massimo) debole;
- se la forma quadratica è nulla, allora non possiamo estrarne informazioni significanti.

Vediamo una strategia da seguire:

1. si isolano i punti di  $f$  che non sono regolari (es. non derivabili una o due volte). Questi punti dovranno essere analizzati separatamente;
2. trovare i punti critici risolvendo:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

3. si studia il segno della forma quadratica per ogni punto critico, se è definita o indefinita si giunge a una conclusione con le regole dette precedentemente, se è nulla o semidefinita si ricorre a uno studio diretto di  $\nabla f(x_0)$  in un intorno di  $x_0$ .

Più precisamente, nel caso bidimensionale, per ogni punto critico:

1. si calcola l'Hessiana:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

2. se  $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$  e

- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è di minimo locale forte;
- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è di massimo locale forte;

(si noti che in questo caso  $f_{xx}(x_0, y_0)$  e  $f_{yy}(x_0, y_0)$  hanno lo stesso segno).

3. se  $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è punto di sella;
4. se  $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$  occorre un'analisi ulteriore.

## Funzioni convesse di n variabili

### Generalità sulle funzioni convesse

Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice convesso se per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in \Omega$  si ha che  $[x_1, x_2] \subseteq \Omega$  (dove col simbolo  $[x_1, x_2]$  si denota il segmento con estremi  $x_1, x_2$ ); si dice strettamente convesso se per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in \Omega$  il segmento  $(x_1, x_2)$  privato degli estremi è strettamente contenuto in  $\Omega$ .

Si dice epigrafico di una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'insieme

$$\text{epi}(f) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq f(x), x \in \Omega\}$$

Si dice che una funzione è convessa se  $\text{epi}(f)$  è un sottoinsieme convesso, si dice che una funzione è concava se  $-f$  è convessa.

Formalmente si dice che una funzione è convessa se e solo se per ogni  $x_1, x_2, t \in [0, 1]$  vale la condizione

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Si noti che  $tx_2 + (1-t)x_1$  percorre il segmento  $[x_1, x_2]$  al variare di  $t \in [0, 1]$

Se  $f$  è convessa allora:

- $f$  è continua;
- $f$  ha derivate parziali destre e sinistre in ogni punto;
- nei punti in cui è derivabile,  $f$  è anche differenziabile.

Teorema di convessità e piano tangente. Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\Omega$ . Allora  $f$  è convessa in  $\Omega$  se e solo se per ogni coppia di punti  $x_0, x \in \Omega$  si ha:

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

In due dimensioni:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

che geometricamente significa che il piano tangente in  $x = x_0, y = y_0$  sta sotto  $f$ .

Teorema di convessità e matrice Hessiana. Sia  $f \in C^2(\Omega)$ , con  $\Omega$  aperto convesso in  $\mathbb{R}^n$ . Se per ogni  $x_0$  in  $\Omega$  la forma quadratica  $d^2f(x_0)$  è semidefinita positiva, allora  $f$  è convessa in  $\Omega$ .

### Ottimizzazione di funzioni convesse e concave

Nelle funzioni convesse (concave) i punti stazionari, se esistono, rappresentano minimi (massimi) globali. Inoltre se la funzione è strettamente convessa (concava), il punto critico è di minimo (massimo) globale forte, quindi, in particolare, è unico.

## Funzioni definite implicitamente

### Funzione implicita di una variabile

Teorema di Dini della funzione implicita. Sia  $A$  un aperto in  $\mathbb{R}^2$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1(A)$ . Supponiamo che in un punto  $(x_0, y_0) \in A$  sia:

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  e un'unica funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $y_0 = g(x_0)$  e

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Inoltre,  $g \in C^1(I)$  e

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad \forall x \in I.$$

Notiamo che se  $f(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ , ma  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , il teorema è ancora applicabile scambiando gli ruoli di  $x$  e  $y$ .

In sostanza i punti in cui il teorema di Dini non è applicabile sono quelli in cui il gradiente di  $f$  si annulla, ossia i punti critici.

### Note sugli esercizi

Tipicamente negli esercizi la richiesta è di calcolare la funzione  $g'(x)$  in un punto. Si inizia calcolando i punti per cui  $f(x, y) = 0$  (solitamente vengono forniti). Una volta trovati questi punti si deve verificare che  $\frac{\delta f}{\delta y}f(x, y)$  (oppure  $\frac{\delta f}{\delta x}f(x, y)$ ) sia  $\neq 0$ . Se queste condizioni si verificano, allora il Teorema di Dini è applicabile e si può procedere a calcolare  $g'(x) = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}(x, y)}{\frac{\delta f}{\delta y}(x, y)}$  e a trovarne il valore in un punto.

Se in un esercizio viene chiesto di calcolare, oltre a  $g'(x)$ , anche  $g''(x)$ , allora si può usare un altro procedimento: si può derivare rispetto a  $x$  l'equazione  $f(x, g(x)) = 0$  e quindi ricavare  $g'(x)$ . Successivamente si può derivare ancora l'equazione e ricavare  $g''(x)$ . Spesso per risolvere queste equazioni è più semplice derivarle e poi sostituire  $x = x_0$  con l' $x_0$  richiesto dall'esercizio.

## Complementi

---

### Topologia e funzioni continue

Teorema di Bolzano-Weierstrass in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  una successione limitata. Allora essa ammette una sottosuccessione convergente.

Successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  una successione in  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che la successione soddisfa la condizione di Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : \forall h, k \geq n_0 \text{ si ha } |x_h - x_k| < \epsilon.$$

Teorema di completezza di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ , allora converge.

Teorema dell'uniforme continuità. Si dice che  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \Omega, \text{ se } |x_1 - x_2| < \delta \text{ allora } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Teorema di Cantor-Heine. Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e limitato e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è uniformemente continua in  $K$ .

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua in  $\Omega$ . Allora  $f$  è prolungabile con continuità fino alla frontiera di  $\Omega$ , ossia esiste una funzione  $\bar{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $\bar{\Omega}$  e tale che in  $\Omega$  coincide con  $f$ .

---

## 4- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

---

### Funzioni di più variabili a valori vettoriali: generalità

$$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Mostriamo alcuni esempi di oggetti rappresentabili tramite funzioni di più variabili a valori vettoriali.

---

### Superfici in forma parametrica

Le superfici in forma parametrica, sono solo un caso particolare del concetto più astratto e generale di varietà  $k$ -dimensionale in forma parametrica in  $\mathbb{R}^m$ . (Più avanti sarà discusso meglio).

---

### Trasformazioni di coordinate

$$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Coordinate polari nel piano.** Il punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  può essere anche individuato in forma polare ed è molto comodo se si è in presenza di simmetrie rispetto all'origine. Ricordando che la distanza dall'origine è  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta$  è l'angolo formato tra il vettore  $(x, y)$  e l'asse  $x$ , otteniamo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{con } \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi) \text{ o qualunque intervallo di ampiezza } 2\pi$$

Questa trasformazione di coordinate si può vedere come una funzione  $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) = f(\rho, \theta)$ .

**Coordinate cilindriche nello spazio.** Viene utilizzato per descrivere insiemi e funzioni che hanno simmetrie rispetto all'asse delle  $z$  in  $\mathbb{R}^3$  e si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi), t \in \mathbb{R}$$

Questa trasformazione si può vedere come una funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Coordinate sferiche nello spazio.** Viene utilizzato per descrivere insiemi e funzioni che hanno simmetrie rispetto all'origine in  $\mathbb{R}^3$  e si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0, \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

Queste trasformazioni si possono vedere come funzioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Da notare che se si ha  $\rho$  costante, il sistema rappresenta la superficie di una sfera di raggio  $\rho$  in forma parametrica.

---

### Campi vettoriali

Sono solo esempi ed esercizi.

---

## Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Se  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , possiamo scrivere

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

dove le  $f_i$  sono componenti di  $\vec{f}$  e sono funzioni reali di più variabili.

Il limite si può calcolare componente per componente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \vec{f}(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right)$$

Una funzione  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Diremo che  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $x_0$  se tutte le sue componenti lo sono.

**Matrice Jacobiana di  $\vec{f}$ :**

$$D\vec{f}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \frac{\delta f_m}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix} (x_0)$$

Da notare è che la colonna  $i$ -esima rappresenta il vettore delle derivate di tutte le funzioni di  $\vec{f}$  derivate rispetto al  $i$ -esimo parametro. Indicheremo questo vettore come  $\vec{f}_{x_i}$

**teor.** Condizione sufficiente affinché una funzione  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $A$  aperto, risulti differenziabile in  $A$  è che tutti gli elementi della sua matrice Jacobiana siano funzioni continue in  $A$ .

Se  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile, allora è derivabile e continua.

**teor.** Siano  $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{g}: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  e supponiamo che sia ben definita almeno in un intorno  $C$  di  $x_0 \in A$  la funzione composta  $\vec{g} \circ \vec{f}: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se  $\vec{f}$  è differenziabile in  $x_0$  e  $\vec{g}$  è differenziabile in  $y_0 = \vec{f}(x_0)$ , anche  $\vec{g} \circ \vec{f}$  è differenziabile in  $x_0$  e la sua matrice jacobiana si ottiene come prodotto (matriciale) delle matrici Jacobiane di  $\vec{f}$  e  $\vec{g}$ , calcolate nei punti  $x_0$  e  $\vec{f}(x_0)$ .

$$D(\vec{g} \circ \vec{f})(x_0) = D\vec{g}(\vec{f}(x_0))D\vec{f}(x_0)$$

---

## Superfici regolari in forma parametrica

Una superficie in forma parametrica è una funzione del tipo:

$$\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

con  $\vec{r} = (x, y, z)$  e

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A$$



Valutare se una superficie in forma parametrica è regolare:

**def.** Una superficie parametrizzata da  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , con  $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice regolare se  $\vec{r}$  è differenziabile in  $A$  e inoltre la matrice Jacobiana di  $\vec{r}$  ha rango due in ogni punto di  $A$ . Se in qualche punto di  $A$  le condizioni vengono violate, chiameremo punti singolari della superficie i punti corrispondenti.

Le condizioni possono essere verificate tramite l'esistenza e il non annullamento di:

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) & \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) & \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \\ \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) & \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) & \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

con

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = \left( \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0), \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0), \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \right)$$

$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = \left( \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0), \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0), \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \right)$$

Una proprietà di quest'ultimo prodotto vettoriale è che è normale alla superficie nel punto in cui è calcolato.

Il versore normale è:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

[Equazione del piano tangente (manca).]

### Superfici cartesiane (grafico di funzioni di due variabili)

Il grafico di  $z = f(x, y)$  è una superficie che si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Matrice Jacobiana per superfici cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = -\vec{i}f_u - \vec{j}f_v + \vec{k}$$

Versore normale per superfici cartesiane:

$$\vec{n} = \frac{-\vec{i}f_u - \vec{j}f_v + \vec{k}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

Se  $f$  è differenziabile in  $A$ , allora il suo grafico è sempre una superficie regolare.

Elemento d'area:

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} du dv$$

## Superfici di rotazione

Superfici ottenute facendo ruotare una curva  $\gamma$  detta generatrice attorno a un asse.

In un riferimento  $(x, y, z)$  sia  $y$  l'asse a cui vogliamo far ruotare una curva  $\gamma$ , inizialmente assegnata al piano  $x, z$  in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = a(t) \\ z = b(t) \end{cases} \quad t \in I$$

La superficie che si ottiene per rotazione è

$$\begin{cases} x = a(t)\cos(\theta) \\ z = b(t)\sin(\theta) \end{cases} \quad t \in I, \theta \in [0, 2\pi]$$

(questo sistema va adattato di caso in caso, badando principalmente a due fatti: che la curva da far ruotare deve essere tutta da una parte (a destra o a sinistra) dell'asse su cui si ruota e che l'asse su cui si ruota la funzione determina come viene scritto il sistema, per esempio, sopra, siccome volevamo far ruotare attorno a  $y$ , allora non abbiamo aggiunto seni o coseni alla coordinata  $y$ ).

Matrice Jacobiana di superfici di rotazione:

$$\begin{pmatrix} a'(t)\cos(\theta) & b'(t) & a'(t)\sin(\theta) \\ -a(t)\sin(\theta) & 0 & a(t)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Elemento d'area di superfici di rotazione:

$$dS = |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dt d\theta$$

Vettore normale di superfici di rotazione:

$$\vec{n} = \frac{(b'(t)\cos(\theta), -a'(t), b'(t)\sin(\theta))}{\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}}$$

---

## Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ e funzioni definite implicitamente

### Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ in forma parametrica

**def.** Si dice varietà regolare k-dimensionale in forma parametrica, immersa in  $\mathbb{R}^n$  (con  $1 \leq k \leq n-1$ ), una funzione  $\vec{r}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^k$ , tale che  $\vec{r} \in C^1(\Omega)$  e la matrice Jacobiana di  $\vec{r}$  ha rango  $k$  in ogni punto di  $\Omega$ .

Nel caso particolare in cui  $k = n-1$  (e  $n > 3$ ) la varietà si dice ipersuperficie in  $\mathbb{R}^n$ .

Dal punto di vista dell'intuizione geometrica, la varietà k-dimensionale è l'immagine della funzione  $\vec{r}$  in  $\mathbb{R}^n$

---

### Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni

Avendo un sistema di  $m$  equazioni in  $n+m$  incognite, il teorema di Rouché-Capelli ci dice che se la matrice del sistema ha rango massimo (cioè  $m$ ) si riescono a esplicitare  $m$  variabili in funzione di altre  $n$ .

Nel caso non lineare ci si limita a verificare il teorema di Rouché-Capelli localmente: nell'intorno di un punto in cui si sa che il sistema è soddisfatto, il rango massimo della matrice del sistema lineare diventa il rango massimo della matrice del sistema linearizzato, cioè della matrice Jacobiana del sistema non lineare.

**notazioni:**

Scriviamo un sistema di  $m$  equazioni in  $n + m$  variabili nella seguente forma vettoriale

$$\vec{f}(x, y) = 0$$

dove  $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ .

Denotiamo con  $D_y \vec{f}(x_0, y_0)$  la matrice Jacobiana della funzione  $y \rightarrow \vec{f}(x_0, y)$ , calcolata nel punto  $y_0$ , ossia la matrice di  $m \times m$  elementi  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)$ , con  $(i, j = 1, 2, \dots, m)$  (con  $D_x \vec{f}(x_0, y_0)$  denotiamo l'analogo per le  $x$ ).

**teor.** Teorema di Dini, della funzione implicita: caso generale.

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{f} \in C^1(A)$ , e supponiamo che nel punto  $(x_0, y_0) \in A$  sia

$$\vec{f}(x_0, y_0) = 0; \quad \det(D_y \vec{f}(x_0, y_0)) \neq 0$$

Allora esiste un intorno  $U \subset \mathbb{R}^n$  di  $x_0$  e un'unica funzione  $\vec{g}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{g} \in C^1(U)$ , tale che, per ogni  $x \in U$ ,

$$\vec{f}(x, \vec{g}(x)) = 0$$

$$D\vec{g}(x) = -D_y \vec{f}(x, \vec{g}(x))^{-1} D_x \vec{f}(x, \vec{g}(x))$$

**Varietà k-dimensionali in  $\mathbb{R}^n$  in forma implicita**

**def.** Si dice varietà k-dimensionale in forma implicita, immersa in  $\mathbb{R}^n$ , un sottoinsieme (non vuoto) di  $\mathbb{R}^n$  del tipo:

$$M = \{x \in \Omega : \vec{f}(x) = 0\}$$

dove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\vec{f} \in C^1(\Omega)$  e il rango di  $D\vec{f}$  è uguale a  $n - k$  in ogni punto di  $\Omega$ . La varietà si dirà di classe  $C^m$  (per qualche intero  $m \geq 1$ ) se, inoltre,  $\vec{f} \in C^m(\Omega)$ ; si dirà di classe  $C^\infty$  se è di classe  $C^m$  per ogni intero  $m$ .

Si noti che se  $k = n - 1$  la funzione  $f$  ha valori reali; in questo caso  $M$  è definita da un'unica equazione in  $n$  variabili, si chiamerà ipersuperficie in forma cartesiana implicita. Nel caso  $n = 3$  si ha semplicemente una superficie in forma cartesiana implicita (es. la sfera:  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ ).

Se  $n = 3$ ,  $k = 1$ , abbiamo due equazioni in tre variabili, cioè una curva in forma cartesiana implicita (vista come intersezione di due superfici).

**Trasformazioni di coordinate e loro inversione****Il teorema della funzione inversa**

Una funzione lineare  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nella forma

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

per una certa matrice  $A$ ,  $n \times n$ , risulta invertibile se e solo se  $\det(A) \neq 0$  (teorema di Cramer).

Per una funzione non lineare  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tale che  $\vec{f} \in C^1(A)$ , per qualche aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  non possiamo usare lo stesso risultato, ma possiamo dire che è invertibile in un intorno di  $x_0$ , quando la matrice Jacobiana (approssimazione lineare della funzione non lineare) calcolata in  $x_0$  è invertibile,  $\vec{f}$  risulta invertibile almeno in un intorno di  $x_0$ .

**def.** Una funzione  $\vec{f}: A \rightarrow B$  ( $A, B$  aperti in  $\mathbb{R}^n$ ) si dice invertibile in  $A$  se è iniettiva, ossia se per ogni  $x_1, x_2 \in A$

$$\vec{f}(x_1) = \vec{f}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\vec{f}$  si dice suriettiva su  $B$  se per ogni  $y \in B$  esiste  $x \in A$  tale che  $\vec{f}(x) = y$ .

$\vec{f}$  si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva.

**teor.** Teorema di inversione locale. Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A$  aperto, tale che  $\vec{f} \in C^1(A)$ . Supponiamo che per un dato punto  $x_0 \in A$  sia

$$\det(Df(x_0)) \neq 0$$

Allora esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  e un intorno  $V$  di  $\vec{f}(x_0)$  tra i quali la funzione  $\vec{f}$  è biunivoca; inoltre, detta  $g : V \rightarrow U$  la corrispondenza inversa, si ha che  $\vec{g} \in C^1(V)$  e

$$D\vec{g}(\vec{f}(x)) = Df(x)^{-1} \quad \text{per ogni } x \in U$$

Bisogna far attenzione al fatto che si sta parlando di invertibilità locale e non globale, tutto ciò che si può dire è che c'è un intorno in cui la funzione è invertibile.

### Coordinate polari nel piano

La trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

ha matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . La trasformazione è regolare ad eccezione di  $\rho = 0$  (origine del piano).

### Coordinate cilindriche nello spazio

La trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

ha matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . La trasformazione è regolare ad eccezione di  $\rho = 0$  (l'asse  $z$ ).

### Coordinate sferiche nello spazio

La trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

ha matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho^2 \sin(\phi)$ . La trasformazione è regolare tranne che per  $\rho = 0$  (origine dello spazio) e  $\phi = 0, \pi$  (i due semiassi  $z$  nello spazio). In conclusione sono singolari tutti i punti dell'asse  $z$ .

## Trasformazione di operatori differenziali

Sia

$$\vec{T}(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$$

una trasformazione regolare  $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Sia ora  $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Posto  $(u, v) = \vec{T}(x, y)$  definiamo

$$g(x, y) = f(\vec{T}(x, y))$$

Sfruttando il teorema della differenziabilità della funzione composta, possiamo scrivere mediante le derivate di  $f$

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x}(\vec{T}(x, y)) \cdot \frac{\delta T_1}{\delta x}(x, y) + \frac{\delta f}{\delta y}(\vec{T}(x, y)) \cdot \frac{\delta T_2}{\delta x}(x, y)$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  rappresentano la prima  $(a(x, y))$  e la seconda  $(b(x, y))$  componente di  $\vec{T}$ . Negli esercizi le derivate parziali rimangono indicate come in formula senza essere esplicitate ( $f$  non viene definita nelle consegne), mentre le derivate con  $T_1$  e  $T_2$  si possono risolvere. Dunque la formula effettivamente diventa:

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x}(a(x, y), b(x, y)) \cdot \frac{\delta a(x, y)}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}(a(x, y), b(x, y)) \cdot \frac{\delta b(x, y)}{\delta x}$$

Analogamente l'altra derivata di  $g$  è:

$$\frac{\delta g}{\delta y}(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x}(\vec{T}(x, y)) \cdot \frac{\delta T_1}{\delta y}(x, y) + \frac{\delta f}{\delta y}(\vec{T}(x, y)) \cdot \frac{\delta T_2}{\delta y}(x, y)$$

Negli esercizi sul libro si fanno anche derivate di secondo grado, ma sinceramente non c'ho capito molto, quindi buona fortuna... chiedi appunti sull'argomento a qualcuno.

Lascio scritte anche le informazioni trovate sul libro di teoria, anche se non sono molto chiare...

Sia

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

una trasformazione regolare di coordinate nel piano e sia  $f(x, y)$  una funzione differenziabile. Sotto l'azione della trasformazione di coordinate,  $f$  diventerà funzione di  $u$  e  $v$  e per il teorema sul differenziale di una funzione composta, si può scrivere:

$$\frac{\delta f}{\delta u} = \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta g}{\delta u} + \frac{\delta f}{\delta y} \frac{\delta h}{\delta u}$$

$$\frac{\delta f}{\delta v} = \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta g}{\delta v} + \frac{\delta f}{\delta y} \frac{\delta h}{\delta v}$$

## Ottimizzazione. Estremi vincolanti

PRESENTE NEL PROGRAMMA DEL CORSO, NON HO TROVATO ESERCIZI SUL LIBRO.

### Vincoli di uguaglianza e moltiplicatori di Lagrange. Funzioni di due variabili

**Problema:** Date due funzioni  $f = f(x, y)$  e  $g = g(x, y)$ , dotate di derivate parziali continue in  $\mathbb{R}^2$ . Si vogliono determinare gli estremi di  $f$  sotto la condizione di vincolo  $g(x, y) = b$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ .

A seconda che sia un caso di massimo o di minimo vincolato scriveremo:

$$\begin{cases} \max f \\ \text{sub} \\ g(x, y) = b \end{cases} \quad \begin{cases} \min f \\ \text{sub} \\ g(x, y) = b \end{cases}$$

Il problema consiste nel massimizzare (minimizzare) la restrizione di  $f$  al vincolo specificato.

- vincolo esplicitabile: caso in cui il vincolo  $g(x, y) = b$  definisce esplicitamente  $y = y(x)$  o  $x = x(y)$  oppure, più in generale, definisce le equazioni parametriche  $(x = x(t), y = y(t))$  di una curva  $\gamma$ . Il problema allora è ricondotto alla ricerca degli estremi di una funzione reale di variabili reali

$$\phi(t) = f(x(t), y(t))$$

- metodo dei moltiplicatori di Lagrange: utilizzato quando il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi forma (parametrica, cartesiana o implicita).

**teor.** Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $(x^*, y^*)$  punto di estremo vincolato per  $f$  sotto il vincolo:

$$g(x, y) = b$$

Se  $(x^*, y^*)$  è regolare per il vincolo, cioè  $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ , allora esiste  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  (detto moltiplicatore di Lagrange) tale che:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Questa formula esprime il fatto che se  $(x^*, y^*)$ , verifica le ipotesi del teorema, allora la derivata di  $f$  lungo la tangente al vincolo si deve annullare e in tal caso diciamo che  $(x^*, y^*)$  è punto critico vincolato.

**oss.** Introducendo la funzione  $L = L(x, y, \lambda)$ , detta Lagrangiana, definita da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$$

il teorema afferma che se  $(x^*, y^*)$  è punto di estremo vincolato, allora esiste  $\lambda^*$  tale che il punto  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  sia punto critico libero per  $L$ . Infatti i punti critici in  $L$  sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ L_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ L_\lambda = b - g = 0 \end{cases}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

- Si isolano gli eventuali punti non regolari dell'insieme  $g(x, y) = b$ , che vanno esaminati a parte.
- si cercano i punti critici liberi della Lagrangiana e cioè soluzioni del sistema visto nell'osservazione.
- si determina la natura dei punti critici. A questo proposito risulta spesso utile il teorema di Weierstrass.

### Moltiplicatore di Lagrange. Il caso generale

Consideriamo ora problemi di ottimizzazione vincolata, per funzioni di  $n$  variabili ( $n \geq 2$ ) con un numero  $m$  di vincoli di uguaglianza.

Siano  $m + 1$  funzioni reali di  $n$  variabili  $f, g_1, g_2, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tutte  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . Si vogliono determinare gli estremi di  $f$  quando le variabili sono soggette alle  $m$  condizioni di vincolo:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

**teor.** Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, caso generale.

Sia  $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  e sia  $\vec{x}^*$  punto di estremo vincolato per  $f$  rispetto al vincolo

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}$$

Se  $\vec{x}^*$  è un punto regolare per  $\vec{g}$ , cioè se il rango di  $D\vec{g}(\vec{x}^*)$  è  $m$ , allora esistono  $m$  numeri reali  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ , detti moltiplicatori di Lagrange, tali che

$$\nabla f(\vec{x}^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(\vec{x}^*)$$

Introduciamo la funzione Lagrangiana

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j [g_j(x_1, \dots, x_n) - b_j]$$

dipendente da  $n + m$  variabili. Se  $\vec{x}^*$  è un punto regolare, allora esiste un vettore di moltiplicatori

$$\vec{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$$

taie che  $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$  è un punto critico libero per la Lagrangiana. Infatti i punti critici liberi per la Lagrangiana si trovano risolvendo il seguente sistema di  $n + m$  equazioni in  $n + m$  incognite:

$$\begin{cases} D_{x_1} L = D_{x_1} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{x_1} g_j = 0 \\ \dots \\ D_{x_n} L = D_{x_n} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{x_n} g_j = 0 \\ D_{\lambda_1} L = b_1 - g_1 = 0 \\ \dots \\ D_{\lambda_m} L = b_m - g_m = 0 \end{cases}$$

## Note sugli esercizi

### elemento d'area e regolarità

$$dS = |\vec{r}_t \times \vec{r}_u| dt du$$

è una scrittura comoda e sintetica che mette in luce la regolarità o meno della superficie (dove  $|\vec{r}_t \times \vec{r}_u|$  si annulla abbiamo punti singolari (vedi superfici regolari in forma parametrica per saperne di più).

L'elemento d'area per **trasformazioni** in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  è calcolato come il modulo del determinante della matrice Jacobiana (che sarà  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ ).

Ricordiamo che per  $\vec{r}_t$  si intende il vettore delle derivate di tutte le funzioni che compongono  $\vec{r}$  derivate rispetto al parametro  $t$ .

## 5-CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

---

### Integrali doppi

L'integrale doppio serve per il calcolo di volumi.

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

Proprietà:

- se  $f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$
- $|\int_{\Omega} f(x, y) dx dy| \leq \int_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$
- linearità:

$$\int_{\Omega} [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)] dx dy = \alpha \int_{\Omega} f(x, y) dx dy + \beta \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

- addittività: Se  $\Omega_1, \Omega_2$  sono aperti tali che  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , allora

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \int_{\Omega_2} f(x, y) dx dy$$

- valor medio: se  $f \in C^0(\Omega)$  con  $\Omega$  chiuso e limitato, allora esiste  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tale che

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

---

**Regione y-semplce:** Se l'intersezione di una qualunque retta verticale con la  $\Omega$  è un segmento o vuota.

**Regione x-semplce:** Se l'intersezione di una qualunque retta orizzontale con la  $\Omega$  è un segmento o vuota.

Una regione piana  $\Omega$  si dice **regolare** se può essere scomposta in un numero finito di regioni semplici.

### Integrale su una regione semplice

Consideriamo il caso in cui  $\Omega$  è un rettangolo con vertici  $a, b, c, d$ .

Prendendo una sezione verticale rispetto a  $x$  nel punto  $x_0$ , notiamo che l'area è rappresentata da  $A = \int_c^d f(x_0, y) dy$ . Variando per tutte le  $x_0$  che appartengono all'intervallo  $[a, b]$  otteniamo

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Questo concetto è applicabile anche a tutte le  $\Omega$  semplici, l'area della sezione rispetto a  $x$  è  $A = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$ , e quindi il volume:

$$\int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Dunque:



**teor.** Formula di riduzione per integrali doppi.

Se  $\Omega$  è **y-semplce**, cioè se  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b, g(x) < y < h(x)\}$

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Dove  $g(x)$  rappresenta il limite inferiore di  $\Omega$ , e  $h(x)$  il limite superiore.

Se  $\Omega$  è **x-semplce**, cioè se  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < y < b, g(y) < x < h(y)\}$

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Dove  $g(y)$  rappresenta il limite inferiore di  $\Omega$ , e  $h(y)$  il limite superiore.

### Baricentro e momento d'inerzia con gli integrali doppi

Gli integrali doppi possono essere usati per calcolare il baricentro di una lamina piana e del momento d'inerzia della lamina rispetto ad un asse perpendicolare al piano della lamina.

Sia  $\Omega$  la forma della lamina e  $d(x, y)$  la densità di massa nel punto  $(x, y)$ . La massa sarà  $M = \int_{\Omega} d(x, y) dx dy$ .

- **Baricentro:**  $B(x_b, y_b)$

$$x_b = \frac{1}{M} \int_{\Omega} x d(x, y) dx dy \quad y_b = \frac{1}{M} \int_{\Omega} y d(x, y) dx dy$$

Se la densità fosse costante avremmo  $d(x, y) = d$ ,  $M = d|\Omega|$  e

$$x_b = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} x dx dy \quad y_b = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} y dx dy$$

- **Momento d'inerzia:**

Detta  $\delta(x, y)$  la distanza di ogni punto  $(x, y) \in \Omega$  dall'asse  $r$  perpendicolare al piano:

$$I = \int_{\Omega} \delta^2(x, y) \cdot d(x, y) dx dy$$

### Cambi di variabili negli integrali doppi

Il problema è quello di trasformare un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  in un altro insieme  $T \subset \mathbb{R}^2$  più semplice geometricamente.

$$(u, v) = \Phi(x, y)$$

La trasformazione  $\Phi$  deve essere biunivoca, cioè all'interno dell'intervallo la derivata prima di  $\Phi$  non deve annullarsi.

Stiamo quindi cercando di creare una trasformazione  $\Phi : \Omega \rightarrow T$  che sia invertibile

$$\Phi : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Cerchiamo ora una condizione sulle derivate di  $\Phi$  in modo che sia sicuramente invertibile.

**Matrice Jacobiana:**

$$\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \quad \text{della trasformazione } \Phi$$

Se risulta  $\det\left(\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)}\right) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in T$  (senza la frontiera), allora  $\Phi$  sarà localmente invertibile.

Questa condizione equivale a imporre che

$$\text{Jacobiano} = \left| \det\left(\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)}\right) \right| = |x_u y_v - x_v y_u| > 0$$

**teor.** Date le premesse fin'ora mostrate, allora:

$$\int_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_T f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left| \det\left(\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)}\right) \right| du dv$$

## Cambio di variabili in coordinate polari

Sia  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , i punti  $(x,y)$  vengono trasformati in punti  $(\rho, \theta) \in T$  tali che

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

La trasformazione  $\Phi$  trasforma il piano  $\mathbb{R}^2$  in una striscia di piano, la cui altezza massima è  $\theta = 2\pi$  (non compresa) e la lunghezza è determinata da  $\rho$ .

Un caso delicato è  $\rho = 0$ , in cui  $\theta$  non è definito.

$$\text{Jacobiano} = \rho$$

Nelle integrazioni in coordinate polari, essendo il Jacobiano  $= \rho$ , il termine  $dx dy$  diventa  $\rho d\rho d\theta$ .

## Integrali impropri

Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un aperto illimitato e  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  soddisfa  $f \geq 0$  (o  $f \leq 0$ ) si costruiscono dei domini invadenti  $\Omega_r = \Omega \cap B_r$ . Se poi esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} f(x) dx$$

diremo che  $f$  è integrabile in senso generalizzato e

$$\int_{\Omega} f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} f(x) dx$$

## Integrali tripli

### Integrazione per fili

Se l'insieme  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse  $z$  o **z-semplce**, cioè esistono  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $g, h \in C^0(\bar{D})$  tali che  $g < h$  in  $D$  e

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, g(x, y) < z < h(x, y)\}$$

cioè se l'intersezione di una retta parallela all'asse  $z$  e  $\Omega$  è un segmento o vuota, allora data  $f \in C^0(\Omega)$  si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Allo stesso modo si procede nel caso di  $\Omega$  x-semplce o y-semplce.

### Integrazione per strati

Se  $\Omega$  è semplice rispetto alla coppia  $(x, y)$  e cioè esistono  $a < b$  tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a < z < b, (x, y) \in D_z \forall z \in (a, b)\}$$

dove  $D_z$  è un insieme regolare  $\forall z \in (a, b)$ , cioè se l'intersezione fra un piano parallelo al piano  $z = 0$  e  $\Omega$  è un insieme regolare oppure è vuota, allora data  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Allo stesso modo si procede nel caso di  $\Omega$  semplice rispetto alle coppie  $(x, z)$  o  $(y, z)$

---

### Cambi di variabili negli integrali tripli

#### Coordinate cilindriche

Preso una sezione verticale (cioè di un piano che passa per l'asse  $z$ ) si definiscono:

$\rho$  rappresenta la distanza tra l'origine degli assi e la proiezione del punto  $P$  sul piano  $xy$  (in poche parole la distanza fra il punto e l'asse  $z$ ).

$z$  rappresenta la quota del punto  $P$  dal piano  $xy$ .

$\theta$  di quando deve ruotare il piano per rappresentare il volume di partenza.

$$\forall \begin{cases} \rho \in [0, \infty) \\ \theta \in [0, 2\pi) \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Matrice Jacobiana:

$$\frac{\delta(x, y, z)}{\delta(\rho, \theta, z)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det\left(\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)}\right) = \rho = \left| \det\left(\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)}\right) \right|$$

#### Coordinate sferiche

$$\forall \begin{cases} \rho \in [0, \infty) \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e rappresenta la distanza fra il punto  $(x, y, z)$  e l'origine

oppure se si prende  $\phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$  si ottengono le coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \cos(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \sin(\phi) \end{cases}$$

Matrice Jacobiana:

$$\frac{\delta(x, y, z)}{\delta(\rho, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det\left(\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)}\right) = \rho^2 \sin(\phi)$$

che si annulla in tutti i punti dell'asse  $z$  che sono punti della frontiera e dunque non interessano.

---

## Note sugli esercizi

Data una funzione su due variabili  $f(x, y)$ :

- $f$  è dispari rispetto a  $x$  se

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

- $f$  è pari rispetto a  $x$  se

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

- $f$  è dispari rispetto a  $y$  se

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

- $f$  è pari rispetto a  $y$  se

$$f(x, -y) = f(x, y)$$

Quindi

- Se la funzione  $f$  è dispari rispetto a  $y$  e la superficie di integrazione è simmetrica rispetto a  $x$ , allora l'integrale è nullo.
- Se la funzione  $f$  è dispari rispetto a  $x$  e la superficie di integrazione è simmetrica rispetto a  $y$ , allora l'integrale è nullo.
- Se la funzione  $f$  è pari rispetto a  $y$  e la superficie di integrazione è simmetrica rispetto a  $x$ , allora l'integrale si può calcolare solo sul metà superficie e moltiplicando per due il risultato finale
- Se la funzione  $f$  è pari rispetto a  $x$  e la superficie di integrazione è simmetrica rispetto a  $y$ , allora l'integrale si può calcolare solo sul metà superficie e moltiplicando per due il risultato finale

---

Dato un dominio  $T$  (superficie) del piano e una funzione  $f(x, y) \geq 0$  definita su  $T$ , l'integrale doppio esteso a  $T$  di  $f$  rappresenta, il volume del solido compreso tra il piano  $xy$  e la superficie definita dalla funzione  $f$ , che si proietta in  $T$ ; sempre in analogia con quanto accade in una variabile, se la funzione cambia segno in  $T$ , il volume del solido va calcolato integrando su  $T$  il valore assoluto di  $f$ :  $|f|$ . Inoltre, ponendo  $f = 1$  su  $T$ , l'integrale doppio della funzione costante uguale a 1 rappresenta l'area di  $T$ .

---

Dato un dominio  $T$  di  $\mathbb{R}^3$ , il volume di  $T$  può essere espresso tramite il calcolo dell'integrale triplo della funzione costante  $f(x, y, z) = 1$

$$\text{Volume}(T) = \int \int \int_T dx dy dz$$

---

Passando nel piano da coordinate cartesiane a coordinate polari abbiamo visto che l'elemento d'area  $dx dy$  diventa  $\rho d\rho d\theta$ , allo stesso modo nello spazio l'elemento di volume  $dx dy dz$  diventa in coordinate cilindriche  $\rho d\rho d\theta dz$  e in coordinate sferiche  $R^2 \sin(\phi) dR d\phi d\theta$  (se però adottiamo le coordinate sferiche con  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  l'elemento di volume diventa  $R^2 \cos(\phi) dR d\phi d\theta$ ).

---

Data una regione piana  $T$ , e detta  $\delta(x, y)$  non negativa su  $T$  densità superficiale di massa relativa alla lamina rappresentata dalla regione  $T$ , l'integrale doppio esteso su  $T$  della funzione  $\delta$  rappresenta la massa  $M$  della lamina  $T$ :

$$M = \int \int_T \delta(x, y) dx dy$$

Valgono inoltre le seguenti formule per il calcolo delle coordinate  $(x_b, x_a)$  del baricentro della lamina e per il calcolo del momento d'inerzia  $M_{(x_0, y_0)}$  della lamina rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per il punto  $(x_0, y_0)$ :

$$x_b = \frac{1}{M} \int \int_T x \delta(x, y) dx dy$$

$$y_b = \frac{1}{M} \int \int_T y \delta(x, y) dx dy$$

$$M_{(x_0, y_0)} = \int \int_T ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \delta(x, y) dx dy$$

---

Data una regione  $T$  di  $\mathbb{R}^3$ , e data una funzione  $\delta(x, y, z)$  non negativa su  $T$ , interpretando  $\delta$  come densità di massa, relativa al solido rappresentato dalla regione  $T$ , l'integrale triplo esteso a  $T$  della funzione  $\delta$  rappresenta la massa  $M$  del solido  $T$ :

$$M = \int \int \int_T \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Valgono inoltre le seguenti formule, per il calcolo delle coordinate  $(x_b, y_b, z_b)$  del baricentro del solido:

$$x_b = \frac{1}{M} \int \int \int_T x \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$y_b = \frac{1}{M} \int \int \int_T y \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$z_b = \frac{1}{M} \int \int \int_T z \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Momento d'inerzia di un solido  $T$  rispetto all'asse  $z$ :

$$M_z = \int \int \int_T (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

---

Domini in  $\mathbb{R}^3$ : vi sono 6 differenti ordini con i quali esprimere i domini, tra questi meritano particolare attenzione i seguenti:

- quello per cui  $z$  è la variabile più esterna e, fissata  $z$ , si procede a fissare le restanti due coordinate ( $x, y$  per coordinate cartesiane,  $\rho, \theta$  per coordinate cilindriche) sui domini piani che corrispondono alle varie quote di  $z$ , la cosiddetta espressione per strati;
- quello per cui  $z$  è la variabile più interna: si fissano le due coordinate piane ( $x, y$  per coordinate polari,  $\rho, \theta$  per coordinate cilindriche) in modo generale, dopodiché per ogni coppia  $x, y$  o  $\rho, \theta$ , si fissa la corrispondente  $z$ , la cosiddetta espressione per fili.

---

Retta per due punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Piano per tre punti  $(x_a, y_a, z_a)$ ,  $(x_b, y_b, z_b)$  e  $(x_c, y_c, z_c)$  è il determinante della matrice

$$\det \begin{pmatrix} x - x_a & y - y_a & z - z_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \end{pmatrix} = 0$$

## 6-Funzioni di più variabili a valori vettoriali

### Campi vettoriali

Un campo vettoriale  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione che ad ogni punto dello spazio  $\mathbb{R}^n$  associa un vettore di  $\mathbb{R}^m$ .

$$F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x})) = \sum_{h=1}^m F_h(\vec{x}) e_h$$

dove le componenti  $F_h$  sono funzioni scalari e gli  $e_h$  rappresentano i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^m$ . Se tutte le componenti  $F_h$  sono di classe  $C^1$ , diremo che  $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

**oss.**  $n = m = 1$  funzione reale di variabile reale;  $n = 1, m \geq 2$  curva;  $n \geq 2, m = 1$  funzione scalare di più variabili.

Sia  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un aperto, dato un campo  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , chiameremo **linea di campo** di  $F$  una curva regolare che in ogni punto del suo sostegno sia tangente a  $F$ .

Con questa definizione si caratterizza una linea di campo di  $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  con una curva regolare  $r = r(t)$  tale che  $r'(t)$  sia proporzionale a  $F(r(t))$ . Dato che il coefficiente di proporzionalità è variabile possiamo scrivere:

$$r'(t) = p(t)F(r(t))$$

dove  $p(t)$  rappresenta la proporzionalità. Notiamo che  $p(t) \neq 0$  per ogni  $t$ , quindi o  $p(t) > 0$  (verso di percorrenza e flusso coincidono) o  $p(t) < 0$  (verso di percorrenza opposto al flusso).

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

$$\frac{x'(t)}{F_1(x(t), y(t), z(t))} = \frac{y'(t)}{F_2(x(t), y(t), z(t))} = \frac{z'(t)}{F_3(x(t), y(t), z(t))}$$
$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

e le linee di campo si ottengono integrando:

$$\int \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \int \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \int \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

Chiamiamo **rotore** di un campo  $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  il vettore

$$\text{rot}(F) = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Un campo a rotore nullo viene chiamato **irrotazionale**.

Per calcolare il rotore di una funzione  $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , è sufficiente immergerlo in  $\mathbb{R}^3$ , ponendo  $F(x, Y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \rightarrow F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$  e si trova:

$$\text{rot}(F) = \nabla \wedge F = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Quindi il rotore è perpendicolare al piano del campo.

Anche in tre dimensioni il rotore individua una direzione che è perpendicolare al piano che localmente tende a contenere le linee di campo.

Il modulo del rotore misura la tendenza a ruotare attorno all'asse della sua direzione. Se le linee di campo tendono ad accogliersi attorno all'asse, il rotore avrà il verso della vite che ruota nel verso delle linee di campo. Se il rotore è nullo, non c'è effetto rotatorio.

Chiamiamo **divergenza** di un campo  $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  lo scalare

$$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Un campo a divergenza nulla viene chiamato solenoidale.  
La divergenza in  $n = 1$  coincide con la derivata di una funzione scalare.

---

**oss.**

$$\nabla \wedge (\nabla u) = \text{rot}(\nabla u) = 0 \quad \forall u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}),$$

cioè un gradiente è irrotazionale;

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge F) = \text{div}(\text{rot}(F)) = 0 \quad \forall F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

cioè un rotore è solenoidale;

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \text{div}(\nabla u) = \Delta u \quad \forall u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}).$$


---

## Lavoro di un campo vettoriale

**def.** Sia  $\gamma$  il sostegno orientato di una curva regolare a tratti  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia  $F \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Si chiama **lavoro** di  $F$  lungo  $\gamma$  l'integrale di linea

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot dr = \int_I F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Sia  $I = [a, b]$ , da un punto di vista fisico,  $L_\gamma(F)$  rappresenta il lavoro che compie la forza  $F$  per spostare il suo punto di applicazione lungo  $\gamma$  da  $r(a)$  a  $r(b)$ .

Rispetto al classico integrale di linea che non cambia se riparametrizziamo la curva con verso opposto, l'integrale che calcola il lavoro cambia segno se la curva cambia verso.

Diremo che  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  è **conservativo** se esiste una funzione reale  $U \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ , che chiameremo **potenziale** di  $F$ , tale che  $\nabla U = F$ .

$$F \text{ conservativo} \implies F \text{ irrotazionale}$$

da cui ricaviamo che se  $F$  non è irrotazionale, allora non è conservativo.

Il lavoro di  $F$  lungo un qualunque sostegno  $\gamma$  si esprime come

$$L_\gamma(F) = \int_a^b \nabla U(r(t)) \cdot r'(t) dt = U(r(b)) - U(r(a))$$

Questa espressione ci dice che il lavoro di un campo conservativo si calcola come differenza di potenziale e che il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva di percorrenza, ma solo dai suoi estremi. Inoltre il lavoro di  $F$  lungo il sostegno di una qualunque linea chiusa è nullo.

**def.** Un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si dice **semplicemente connesso** se ogni linea chiusa  $\gamma \subset \Omega$  è contrattile in  $\Omega$  a un punto di  $\Omega$ . In altre parole, partendo da una linea chiusa  $\gamma \subset \Omega$  deve essere possibile contrarla con continuità, fino a ridurla a un punto e questo deve avvenire sempre rimanendo in  $\Omega$ . In parole povere, in  $\mathbb{R}^2$  un insieme si dice semplicemente connesso se è fatto da un "pezzo unico" e non ha buchi (anche di un solo punto), in  $\mathbb{R}^3$  un buco puntuale non è sufficiente a far perdere questa proprietà, ma deve esserci un buco della forma simile a quella di un segmento perchè l'insieme non sia semplicemente connesso.

**teor.** sia  $\Omega$  un insieme semplicemente connesso, e sia  $F$ , allora

$$F \text{ conservativo} \iff F \text{ irrotazionale}$$

Da notare è il fatto che sia una condizione sufficiente, non necessaria.

Notiamo anche che un campo irrotazionale è sempre localmente conservativo.

Per sapere se un campo è conservativo:

- si controlla se è irrotazionale:

- se non lo è, il campo non è conservativo, e per calcolarne il lavoro dobbiamo per forza usare la definizione (vedi metodi sotto).
- se lo è, dobbiamo vedere se il dominio dove è definito è semplicemente connesso:
  - \* se lo è, il campo è conservativo (vedi metodi sotto per il calcolo del lavoro).
  - \* se non lo è, non possiamo concludere nulla a priori e quindi siamo costretti a provare a costruire un potenziale, che se è differenziabile in tutto il dominio,  $F$  è conservativo.

Come trovare un potenziale di un campo conservativo:

- **Metodo 1:** Dato un campo  $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ ,  $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , cerchiamo una funzione  $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  tale che

$$U_x(x, y, z) = F_1(x, y, z)$$

$$U_y(x, y, z) = F_2(x, y, z)$$

$$U_z(x, y, z) = F_3(x, y, z)$$

Analizziamo il procedimento per la prima di queste: integriamo rispetto a  $x$ , ma trattandosi di un integrale indefinito abbiamo una costante indefinita che potrebbe dipendere da  $y$  e  $z$ :

$$U(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + \phi(y, z)$$

Dunque

$$U(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + \phi(x, z)$$

$$U(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + \phi(x, y)$$

Se riusciamo a trovare un'espressione che si possa esprimere contemporaneamente in queste tre forme, quella sarebbe un potenziale. A livello pratico  $U(x, y, z)$  è uguale a tutti i termini che compaiono nelle tre equazioni viste sopra, senza ripetere gli elementi (per esempio se nella prima equazione esce  $U = x + \phi(\dots)$  e nella seconda  $U = x + y + \phi(\dots)$  e nella terza  $U = z + \phi(\dots)$ , il potenziale sarà  $U = x + y + z$ , cioè senza ripetere i termini uguali).

- **Metodo 2:** Sia  $F(x, y, z) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$  conservativo, esiste  $U(x, y, z)$  tale che

$$\frac{\delta U}{\delta x} = X(x, y, z) \quad \frac{\delta U}{\delta y} = Y(x, y, z) \quad \frac{\delta U}{\delta z} = Z(x, y, z)$$

Ora si considera la più semplice di queste equazioni, immaginiamo sia la prima.

Per determinare  $U$  prendiamo una primitiva di  $U_x$  in cui  $y$  e  $z$  figurano come costanti:

$$f(x, y, z) = \int X(x, y, z) dx + H(y, z)$$

Se adesso deriviamo rispetto a  $y$ , il risultato deve corrispondere a  $Y$ :

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y, z) = Y(x, y, z)$$

Questa relazione ci permette di determinare la "porzione" di  $H(y, z)$  che dipende da  $y$ , quindi sostituendo questa in  $f(x, y, z)$  e quindi trasformando  $H(y, z)$  in solo  $H(z)$  e riderivando rispetto a  $z$  e uguagliando il risultato a  $Z(x, y, z)$ , troveremo l'espressione definitiva di  $U$ , a meno di una costante arbitraria.

- **Metodo 3:** calcolo del lavoro con la definizione:

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot dr = \int_I F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Per calcolarlo usiamo il seguente metodo:

Dati un campo vettoriale e una linea orientata

$$F(x, y) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j},$$



$$l : r(t) = [x(t)]\vec{i} + [y(t)]\vec{j}, \quad \forall t \in [a, b]$$

il lavoro da  $r(a)$  a  $r(b)$  è dato dall'integrale di linea:

$$L_{AB} = \int_l F \cdot dr = \int_l [X(x, y)dx + Y(x, y)dy]$$

Questo integrale si può trasformare in un integrale nella variabile  $t$  ponendo al posto di  $x$  e  $y$  i valori  $x(t)$  e  $y(t)$ , e ponendo  $dx = x'(t)dt$  e  $dy = y'(t)dt$ , ossia:

$$L_{AB} = \int_a^b [X(x(t), y(t)) x'(t) + Y(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

Con  $a$  e  $b$  estremi tali che se  $t = a$  e  $t = b$  la funzione della curva  $r(t)$  valga i suoi estremi.

Se la linea  $l$  è chiusa, allora il lavoro compiuto da  $F$  per compiere un giro (in senso antiorario) lungo  $l$  prende il nome di **circuitazione**.

**oss.** se  $U$  è un potenziale di  $F$ , cioè  $\text{grad}(U) = F$ , anche  $\text{grad}(U + C) = F$ , e quindi anche  $U + C$  è un potenziale per  $F$ , pertanto, se  $F$  è conservativo esistono infiniti potenziali di  $F$ , che differiscono per una costante.

**oss.** è sempre possibile verificare l'esattezza dei propri conti nella ricerca di un potenziale:  $\text{grad}(U) = F$ , dunque calcolando le derivate parziali di  $U$  dovremmo trovare le componenti di  $F$ .

**oss.** Bisogna sempre verificare che il dominio sia un insieme semplicemente connesso, se non lo fosse bisogna suddividere il dominio in tanti intervalli semplicemente connessi e specificare che il potenziale vale per ognuno di questi separatamente.

### Forme differenziali lineari

Nel calcolo del lavoro di un campo  $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , ci imbattiamo in integrande del tipo

$$F \cdot dr = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

nel caso  $n = 3$  e con solo i primi due addendi nel caso  $n = 2$ . UN'espressione di questo tipo prende il nome di **forma differenziale lineare**. Il lavoro si esprime quindi come integrale di linea di una forma differenziale lineare:

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

Se  $F$  è conservativo, esiste un potenziale  $U \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tale che  $\nabla U = F$  e cioè

$$dU = U_x dx + U_y dy + U_z dz = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

In questo caso, la forma differenziale coincide con il differenziale di  $U$  e viene chiamata forma differenziale **esatta**.

Se

$$\begin{cases} (F_1)_y = (F_2)_x \\ (F_1)_z = (F_3)_x \\ (F_2)_z = (F_3)_y \end{cases}$$

allora la funzione  $F$  è irrotazionale e la forma differenziale lineare corrispondente viene chiamata forma differenziale **chiusa**.

Ogni forma differenziale esatta è anche chiusa, mentre il viceversa non è vero.

## Teorema della divergenza

Consideriamo  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e limitato, inoltre sia  $\vec{n}$  un versore definito su un punto del bordo di  $\Omega$  (detto  $\delta\Omega$ ) e perpendicolare al piano tangente in  $\delta\Omega$  e orientato verso l'esterno. Il prodotto scalare  $F \cdot \vec{n}$  rappresenta il flusso uscente (se  $> 0$ , entrante se  $< 0$ ) da  $\delta\Omega$ .

**teor.** della divergenza.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato, semplice rispetto a tutti gli assi cartesiani con versore normale uscente  $\vec{n}$  in ogni punto di  $\delta\Omega$ . Sia  $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  un campo vettoriale. Allora

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(x) dx = \int_{\delta\Omega} F \cdot \vec{n} dS$$

Questo teorema afferma che l'integrale su un dominio della divergenza di un campo è pari al flusso del campo che attraversa la sua frontiera.

Con questo teorema spieghiamo anche il significato dell'operatore divergenza: misura il grado di comprimibilità di un fluido e, più in generale, quella di un campo vettoriale.

In parole più semplici il teorema della divergenza ci permette di dire che:

Se la superficie  $l$  è la frontiera di un solido  $V$ , allora il flusso del campo vettoriale  $F$  uscente da  $l$  è uguale all'integrale triplo su  $V$  della divergenza di  $F$ :

$$Flusso = \int \int_l F \cdot n dS = \int \int \int_V \operatorname{div}(F) dx dy dz$$

**oss.** se  $l$  rappresentasse una superficie  $D$ , possiamo comunque calcolare il flusso del campo vettoriale attraverso  $l$  come l'integrale doppio su  $D$ .

**oss.** Si può combinare il calcolo di flussi in superfici e volumi diversi, per alla fine sommarli o sottrarli ed ottenere flussi di figure complesse.

## 7-Serie di funzioni

---

### Serie di potenze

---

#### Nel campo complesso

**def.** Sia  $\{a_n\}$  una successione di numeri complessi e sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

si chiama **serie di potenza centrata** in  $z_0$ .

Con la semplice traslazione  $z - z_0 \rightarrow z$  possiamo ricondurci al caso  $z_0 = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Una serie di potenze ammette un  $R \in [0, +\infty]$  tale che converge se  $|z| < R$ , non converge se  $|z| > R$  e nulla si può dire se  $|z| = R$ .

**Criterio del rapporto:** Se esiste

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge se  $|z| < R$  e non converge se  $|z| > R$ .

**Criterio della radice:** Se esiste

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge se  $|z| < R$  e non converge se  $|z| > R$ .

L'insieme di convergenza di una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  è un disco.

Se  $R = +\infty$  il disco è tutto  $\mathbb{C}$ , se  $R = 0$  il disco è vuoto. Il numero  $R \in [0, +\infty]$  si chiama **raggio di convergenza** della serie di potenze.

Questi due criteri non dicono nulla sul comportamento della serie nei punti sul bordo del disco, cioè  $|z| = R$ .

**teor.** Sia  $\{a_n\}$  una successione di numeri complessi tale che la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converga per  $|z| < R$  (con  $R > 0$ ). Allora le serie ottenute derivando e integrando termine a termine, e cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

sono rispettivamente la derivata e una primitiva della funzione  $f$ ; inoltre, il loro raggio di convergenza è ancora  $R$ .

---

## Nel campo reale

Diremo che una serie di funzioni  $\sum_n f_n(x)$  **converge puntualmente** per ogni  $x \in I$  se la serie numerica  $\sum_n f_n(x)$  converge per ogni  $x \in I$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n(x) \quad \forall x \in I$$

cioè

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ puntualmente se } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Diremo che la serie di funzioni  $\sum_n f_n(x)$  **converge uniformemente** a  $f(x)$  su  $I$  se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k f_n(x) \right| = 0$$

cioè

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ uniformemente se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

**oss.** Se una serie di potenze converge per  $x \in (a, b)$ , si dimostra che tale serie converge uniformemente in ogni intervallo  $[\alpha, \beta]$  con  $a < \alpha < \beta < b$ ; vale inoltre il teorema di Abel (se la serie di potenze  $\sum a_n(x - x_0)^n$ , converge negli estremi di un intervallo  $[a, b]$ , allora converge uniformemente in tutto l'intervallo  $[a, b]$ ). Possibili casi:

- converge in  $x \in [a, b)$ , converge uniformemente in  $[a, b - \epsilon)$
- converge in  $x \in (a, b]$ , converge uniformemente in  $(a + \epsilon, b]$
- converge in  $x \in [a, b]$ , converge uniformemente in  $[a, b]$
- converge in  $(a, b)$ , converge uniformemente in  $[a + \delta, b - \epsilon)$
- converge per  $x$  uguale a un solo punto, non ha senso parlare di convergenza uniforme
- converge per  $x \in \mathbb{R}$ , converge uniformemente in  $[\alpha, \beta]$  con  $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$

Diremo che la serie di funzioni  $\sum_n f_n(x)$  **converge totalmente** su  $I$  se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| < +\infty$$

convergenza totale  $\implies$  convergenza uniforme  $\implies$  convergenza puntuale

Serie di potenza nel campo reale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

che possiamo traslare nell'origine:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

**Criteri del rapporto e della radice:** Si possono ancora usare i criteri della radice e del rapporto specificati nel campo complesso,  $R$  rappresenta ancora il raggio del disco di convergenza nel piano complesso, ma essendo interezati all'asse reale si considera il solo intervallo  $(-R, R)$ .

La serie di potenza nel campo reale converge **puntualmente** per ogni  $x \in (-R, R)$ , dove  $R$  è dato dal criterio del rapporto o dal criterio della radice, e non converge se  $|x| > R$ .

Come nel caso complesso, non possiamo dire nulla sulla convergenza in  $x = \pm R$ .

Per quanto riguarda la convergenza **uniforme**, la serie di potenza nel campo reale converge uniformemente in  $[-R + \epsilon, R - \epsilon]$  per ogni  $\epsilon \in (0, R)$ .

**Criterio di Abel:** Se la serie di potenza  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge per  $x = R$ , allora converge uniformemente in  $[-R + \epsilon, R]$  per ogni  $\epsilon \in (0, R)$ ; analogo risultato se la serie converge per  $x = -R$ . Se la serie converge per  $x = \pm R$  allora converge uniformemente su tutto  $[-R, R]$ .

**teor. (Integrazione per serie)**

Se la serie di potenza  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[c, d]$  allora

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}$$

**teor. (Derivazione per serie)**

Date le serie

$$(1) \sum f_n(x) \quad (2) \sum f'_n(x),$$

se sono verificate le seguenti ipotesi:

- le  $f_n$  sono continue nell'intervallo  $(a, b)$ ,
- la serie (2) converge uniformemente in  $(a, b)$ ,
- la serie (1) converge per  $x = x_0 \in (a, b)$

allora valgono le seguenti tesi:

- la serie (1) converge uniformemente in  $(a, b)$  (quindi converge a una funzione continua),
- la serie (1) converge a una funzione derivabile in  $(a, b)$ ,
- è possibile derivare la (1) termine a termine, cioè

$$\frac{d}{dx} \left( \sum f_n(x) \right) = \sum f'_n(x).$$

**Serie di Taylor**

Introduciamo una vasta classe di funzioni elementari delle quali sappiamo scrivere esplicitamente le serie di potenza che le rappresentano.

Data una funzione  $f$  di classe  $C^\infty$  in un punto  $x_0$ , possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

che, se poniamo  $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ , coincide con una serie di potenza nel campo reale. Se  $R > 0$  e la serie converge a  $f$ , allora la scrittura non è solo formale ma vale per ogni  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . In tale intervallo di ha convergenza puntuale, mentre la convergenza uniforme è garantita negli intervalli  $[x_0 - R + \epsilon, x_0 + R - \epsilon]$  per ogni  $\epsilon \in (0, R)$ .

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = \infty)$$

$$Ch(x) = \text{termini pari dello sviluppo di } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = \infty)$$

$$Sh(x) = \text{termini dispari dello sviluppo di } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = \infty)$$

$$\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (R = 1)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (R = \infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (R = \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (R=1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (R=1) \quad \begin{cases} \text{se } x=1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ (converge per Leibniz)} \\ \text{se } x=-1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \text{ (diverge, serie armonica)} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -1^n \cdot x^{2n} \quad (R=1)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (R=1)$$


---

## Serie di Fourier

---

### Forma trigonometrica

Nello studio delle serie di potenza  $\sum_n a_n z^n$  abbiamo visto che i problemi principali riguardano lo studio di  $|z| = R$  con  $R$  raggio di convergenza. Per tali possiamo scrivere  $z = R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$  e ottenere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Se  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ , siamo quindi portati a studiare la convergenza di serie trigonometriche del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\theta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(n\theta)$$

Per ogni scelta di  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  le funzioni

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$$

si chiamano **polinomi trigonometrici** di grado  $k$ ; che sono funzioni periodiche di periodo  $2\pi$  che hanno valor medio  $\alpha_0$  su  $[0, 2\pi]$ .

Diremo che una serie in forma trigonometrica converge se converge una successione di polinomi trigonometrici.

**oss.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty \Rightarrow \text{converge totalmente su } [0, 2\pi] \Rightarrow \text{converge uniformemente} \Rightarrow \text{converge puntualmente}$$

**oss.** La serie trigonometrica può perdere la convergenza dopo una derivazione.

### Criterio di Dirichlet

$$\alpha_n, \beta_n \downarrow 0 \Rightarrow \text{polinomio trigonometrico converge puntualmente su } (0, 2\pi)$$

dove con il simbolo  $\downarrow 0$  indichiamo che le successioni decrescono monotonamente a 0 e che sono positive.

**Lemma.** Per ogni  $m, n = 1, 2, \dots$  risulta

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

Si trovano gli stessi valori integrando su qualunque intervallo di ampiezza  $2\pi$ .

**teor.** Se una funzione  $f$  è  $2\pi$ -periodica e si può scrivere nella forma trigonometrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

allora

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \geq 1$$

Gli  $a_n$  e  $b_n$  vengono chiamati **coefficienti di Fourier** di  $f$ , mentre la serie  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  viene chiamata **serie di Fourier** associata a  $f$ .

**oss.** Gli integrali del teorema si possono calcolare se risulta  $\int_0^{2\pi} |f| < \infty$  e cioè se l'integrale improprio di  $|f|$  è convergente.

Diremo che la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

**converge in media quadratica** alla  $f$  se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0$$

**teor.** Sia  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$ . Allora la sua serie di Fourier converge a  $f$  in media quadratica.

Definiamo lo spazio  $X$  delle funzioni  $f$  tali che  $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$  e introduciamo il "prodotto scalare" definito come

$$(x, g)_X = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in X$$

per cui troviamo che

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

è ortonormale in  $X$ .

**teor. Identità di Parseval**

Sia  $f \in X$  e sia  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  la sua serie di Fourier. Allora

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Per il teorema di Riemann-Lebesgue sappiamo che  $a_n, b_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

convergenza uniforme  $\Rightarrow$  convergenza in media quadratica  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  convergenza puntuale su sottosuccession in quasi ogni punto

**def.** Diciamo che  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è **regolare a tratti** se è limitata in  $[0, 2\pi]$  e se l'intervallo  $[0, 2\pi]$  si può scomporre in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali  $f$  è continua e derivabile; inoltre, agli estremi di ogni sottointervallo, esistono finiti i limiti sia di  $f$  che di  $f'$ .

**oss.** se  $f \in C^1[0, 2\pi]$  allora  $f$  è regolare a tratti. Ma anche se ci sono punti angolosi o punti di discontinuità a salto, purché  $f$  e  $f'$  abbiano limiti finiti in prossimità dei salti, allora  $f$  è regolare a tratti. Non devono esserci asintoti verticali o punti a tangenza verticale.

Se una funzione  $f$  è regolare a tratti allora la sua serie di Fourier converge a  $f$  in media quadratica. Dunque a meno di pochi possibili punti, la convergenza sarà anche puntuale.

**teor.** Sia  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto  $x_0 \in [0, 2\pi]$  alla media dei due limiti  $f(x_0^\pm)$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

con la convenzione che  $f(0^\pm) = f(2\pi^\pm)$ . In particolare, se  $f$  è continua in  $x_0$ , allora la serie converge a  $f(x_0)$ .

### Funzioni pari e dispari, periodi diversi da $2\pi$

I coefficienti di Fourier di funzioni  $2\pi$ -periodiche si possono calcolare integrando su un qualunque intervallo di ampiezza  $2\pi$ . Tipicamente si sceglie l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  perchè permette di sfruttare eventuali simmetrie della funzione  $f$ .

Infatti, se la funzione  $f$  è **pari** allora risulta pari anche  $f(x)\cos(nx)$  mentre risulta dispari  $f(x)\sin(nx)$ , dunque:

$$f \text{ pari} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0$$

Invece, se la funzione  $f$  è **dispari** allora risulta dispari anche la funzione  $f(x)\cos(nx)$  mentre risulta pari  $f(x)\sin(nx)$ , dunque:

$$f \text{ dispari} \Rightarrow a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

Come ci si comporta in presenza di funzioni con periodo  $T \neq 2\pi$ ?

L'unica differenza sta nel calcolo dei coefficienti di Fourier:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

La funzione  $f$  si scrive allora:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right)$$

Tutti i teoremi valgono allo stesso modo, l'unico da "sistemare" è l'identità di Parseval, che, per funzioni  $T$ -periodiche  $f$  soddisfacenti  $\int_0^T f^2 < \infty$ , diventa:

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

### Forma esponenziale complessa

La formula di Eulero,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , suggerisce di scrivere una serie di Fourier utilizzando gli esponenziali.

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos(nx) - i\sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$



$$f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\cos(nx) + i\sin(nx))dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx} dx$$

da cui

$$a_n = f_n + f_{-n}$$

$$b_n = i(f_n - f_{-n})$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$$

Identità di Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$$

## Note sugli esercizi

### Serie di potenze nel campo reale

Una volta calcolato il raggio di convergenza  $R$ , ci sono tre casi possibili:

- $R = 0$ , la serie converge se e solo se  $x = x_0$ ;
- $R = +\infty$ , la serie converge puntualmente per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ;
- $0 < R < \infty$ ,
  - la serie converge puntualmente se  $|x - x_0| < R$ , ossia nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$
  - la serie non converge se  $|x - x_0| > R$
  - nulla si può dire riguardo al comportamento della serie nei punti  $x = x_0 - R$  e  $x = x_0 + R$

Per calcolare il raggio di convergenza  $R$  si usano due formule:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

### Sviluppabilità in serie di Fourier

Una funzione periodica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è sviluppabile in serie di Fourier se vale una delle due condizioni seguenti:

- $f$  è limitata e monotona a tratti su un periodo, oppure
- il quadrato di  $f$  è integrabile su un periodo (vale meno di  $\infty$ ).

Inoltre se la funzione  $f$  è continua in  $x_0$ , allora la serie di Fourier converge al valore della funzione, viceversa se in  $x_0$  è presente una discontinuità di prima specie (ma  $f$  è limitata e monotona a tratti):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f_-(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f_+(x_0)$$

$$f_-(x_0) \neq f_+(x_0)$$

allora (quale sia il valore che  $f$  assume in  $x_0$ ) il valore della serie in  $x_0$  è la media aritmetica dei due valori:

$$\frac{f_-(x_0) + f_+(x_0)}{2}$$

In parole povere, **per valutare se la funzione sia rappresentabile o meno con una serie di Fourier**, si prende la funzione, e si fa l'integrale  $\int_0^{2\pi} f^2$ , se l'integrale ha un valore finito, allora la funzione può

essere sviluppata con una serie di Fourier. Da notare che l'integrale può essere svolto anche in senso generalizzato per risolvere punti in cui la funzione va a  $\infty$ .

**Per valutare per quali valori di  $x$  la serie converge effettivamente alla funzione indicata**, si usa il seguente criterio: dove la funzione è continua, la serie converge al valore della funzione, dove ci sono discontinuità a salto la serie converge al valor medio degli estremi del salto, dove ci sono altri tipi di discontinuità non si può concludere nulla sul comportamento della serie.

---

## Riassunto dei criteri per la convergenza della serie di Fourier $\sum F$

### Appunti prof:

Condizione di partenza:

$$\int_0^{2\pi} f^2 < \infty \Leftrightarrow \text{possiamo calcolare } \{a_n, b_n\}$$

- se  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$  (converge)  $\Rightarrow \sum F \rightarrow f$  totalmente  $\Rightarrow \sum F \rightarrow f$  uniformemente.  
Proprietà: una successione/serie di funzioni continue che converge uniformemente ha limite continuo.
- se  $f$  non è continua, la serie di Fourier  $\sum F$  non può convergere uniformemente.
- $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$  e cioè  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty \iff \sum F \rightarrow f$  in media quadratica.
- Criterio di Dirichlet: se  $a_n, b_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum F \rightarrow f$  puntualmente su  $(0, 2\pi)$ .
- $f$  regolare a tratti  $\Rightarrow \sum F(x) \rightarrow \frac{f(x)^+ + f(x)^-}{2}$  puntualmente su  $[0, 2\pi]$

### Note dal libro di esercizi:

Data la generica funzione di Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

per stabilirne la convergenza è possibile percorrere due strade:

- Criterio di Dirichlet: se le successioni  $a_n$  e  $b_n$  sono monotone decrescenti e tendono a 0, allora la serie di Fourier converge in tutti i punti, tranne al più in  $x = 2k\pi$ .
- Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni: Data una serie di funzioni  $\sum f_n(x)$ , se per  $x \in [a, b]$  si ha che
  - $|f_n(x)| \leq c_n$
  - $\sum c_n$  converge

allora la serie di partenza converge uniformemente in tutto l'intervallo  $[a, b]$ .

Per usarlo con le serie di Fourier: poichè

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

se la serie  $\sum |a_n| + |b_n|$  converge, allora la serie di Fourier converge (uniformemente), e quindi la funzione a cui converge è continua.

Inoltre, poichè derivando la funzione termine a termine, otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n) \cos(nx) - (na_n) \sin(nx)$$

è sufficiente riapplicare a quest'ultima i criteri di convergenza, per controllare se la serie di partenza converge a una funzione derivabile.

---

## Armoniche

$$f(x) \sim \text{valor medio} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx + \theta_n)$$

dove

$$\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

e

$$\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$\sin(\theta_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

da cui si ricava che  $\theta_n$  è:

$$\theta_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) & \text{se } a_n > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

se  $a_n = 0$ , non si può usare l'arcotangente, ma in tal caso la trasposizione diventa:

$$b_n \sin(nx) = b_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$$

---

## Ripasso sulle serie di analisi 1

### SERIE

#### serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

#### serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \log(n+1) \rightarrow +\infty$$

#### serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

per  $\alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \quad \text{diverge}$$

per  $\alpha > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \text{converge}$$

per  $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} (\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \text{serie di mengoli})$$

#### serie di mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

numero e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

### sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

### Serie di potenza

Con  $a_k$  costanti reali (o complesse) e  $x$  variabile reale (o complessa)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
$$Sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$Ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{per } |x| < 1$$

per  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{per } |x| < 1$$

**teor.** Condizione necessaria affinché una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converga è che il termine generale  $a_n$  tenda a zero. (Cioè perchè la serie converga, il termine  $a_n$  deve tendere a zero, ma non per forza se il termine  $a_n$  tende a zero allora la serie converge)

**teor.** supponiamo che una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converga, allora per ogni  $k$  anche risulta convergente anche  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ .

**Criterio serie a termini non negativi** Una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a termini non negativi è convergente o divergente a  $+\infty$ . Essa converge se e solo se la successione delle somme parziali  $n$ -esime è limitata.

**Criterio del confronto** Siano  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  due serie a termini non negativi tali che  $a_n < b_n$  definitivamente, allora:

- $\sum b_n$  convergente  $\Rightarrow \sum a_n$  convergente.
- $\sum a_n$  divergente  $\Rightarrow \sum b_n$  divergente.

**Criterio del confronto asintotico** Se  $a_n \sim b_n$ , allora le corrispondenti serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno lo stesso carattere (o entrambe divergenti o entrambe convergenti)

**Criterio della radice** Sia  $\sum a_n$  una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- $l > 1$  la serie diverge  $+\infty$
- $l < 1$  la serie converge

- $l = 1$  nulla si può concludere

Spesso utilizzato con termini che hanno come esponente  $n$ .

**Criterio del rapporto** Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- $l > 1$  diverge  $+\infty$
- $l < 1$  converge
- $l = 1$  nulla si può concludere

Spesso utilizzato quando si hanno termini come  $n^n$  e  $n!$ .

**Criterio serie a termini di segno variabile** Una serie  $\sum a_n$  si dice assolutamente convergente se converge la serie  $\sum |a_n|$ . Se la serie  $\sum a_n$  converge assolutamente, allora converge.

**Criterio di Leibniz** Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ con } a_n \geq 0 \forall n$$

Se la successione  $\{a_n\}$  è decrescente e se  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , allora la serie è convergente.

Il criterio di Leibniz può essere applicato anche se i termini sono definitivamente di segno alterno e la successione  $a_n$  è definitivamente decrescente.

Per verificare la decrescenza bisogna dimostrare che  $a_{n+1} < a_n$  oppure mediante il limite a  $+\infty$  della derivata prima di  $a_n$  o studiare quando la derivata prima di  $a_n < 0$ .

Per determinare se una serie è decrescente non vanno usati gli asintotici !

**Criterio della somma di serie convergenti** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$  converge.

**Criterio della somma di serie convergenti e divergenti** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$  diverge.

**Criterio serie a termini complessi** Sia la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  con  $a_n$  complesso, se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, allora anche  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge

**Criterio di Dirichlet** Siano  $a_n$  e  $b_n$  due successioni tali che:

- $a_n$  è a valori complessi e la sua successione delle somme parziali è limitata.
- $b_n$  è a valori reali positivi e tende monotonamente a zero

allora la serie  $\sum a_n b_n$  è convergente.