FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

18 aprile 2020

Indice

Parte I
Lezioni

LEZIONE 12 30/03/2020
link clicca qui

1 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)

1.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ sottoposto all'ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$ con $t \geq 0$ (o equivalentemente $e^{\lambda t} sca(t)$), esiste uno stato iniziale $x(0)$ tale che $x(0)$ e $u(t)$ producono un'uscita $y(t) = Ye^{\lambda t}$, con Y un numero qualunque (non la trasformata) e $t \geq 0$?

In altri termini:
Sottoponiamo un sistema dinamico (di cui non sono note le proprietà sulla sua stabilità) a un ingresso esponenziale ($u(t) = e^{\lambda t}$, che può anche essere amplificato come $u(t) = Ue^{\lambda t}$, ovviamente il ragionamento non cambia). Detto questo sappiamo che un ingresso $x(0)$ produce un movimento libero di y fatto da modi, invece un uscita del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ produce un movimento forzato fatto da modi + un termine $Ye^{\lambda t}$ (con $t \geq 0$ e con Y un numero, non la trasformata). La domanda è se esiste uno $x(0)$ tale che questi modi si elidano e resti solo il termine $Ye^{\lambda t}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow \ u(t) = e^{\lambda t} \ \longrightarrow \ \exists \ x(0) \ \text{ tale che } \ \longrightarrow \ y(t) = Ye^{\lambda t} \ \ (t \geq 0) \ ?$$

1.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Rispondiamo a questa domanda:
Primo passaggio:
Se voglio che $y(t) = Ye^{\lambda t}$, allora anche $x(t)$ dovrà avere la forma $Xe^{\lambda t}$ (con X un numero, non la trasformata), perchè $y(t) = cx(t) + de^{\lambda t}$ e qualunque forma di $x(t)$ che non sia del tipo $e^{\lambda t}$ si "vedrebbe" su y.

Secondo passaggio:
Quindi $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ (di cui noi stiamo proprio cercando $x(0)$) e di conseguenza $\dot{x}(t) = \lambda x(0)e^{\lambda t}$.

Terzo passaggio:
Sostituisco $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ appena espressi nell'equazione di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\lambda x(0)e^{\lambda t} = Ax(0)e^{\lambda t} + be^{\lambda t}$$

considerando che $e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0)\cancel{e^{\lambda t}} = Ax(0)\cancel{e^{\lambda t}} + b\cancel{e^{\lambda t}}$$
$$\lambda x(0) = Ax(0) + b$$

per cui otteniamo che

$$(\lambda I - A)x(0) = b$$

1.3 Generalizzazione della risposta

Quindi **in generale** con $u(t) = Ue^{\lambda t}$ (con U un numero qualunque che semplicemente amplifica l'esponenziale), se λ non è autovalore di A, allora esiste uno e uno solo

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1} bU$$

tale che

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda I - A)^{-1} bUe^{\lambda t} \\ y(t) = cx(t) + du(t) = [c(\lambda I - A)^{-1}b + d]Ue^{\lambda t} = G(\lambda)u(t) \end{cases}$$

1.4 Riassunto e proprietà

- Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ in cui $u(t) = Ue^{\lambda t}$, dove $t \geq 0$ e λ non è autovalore di A $\Longrightarrow$ con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$ si ottiene $y(t) = G(\lambda)u(t)$, con $t \geq 0$.
- Proprietà bloccante degli zeri: se $G(\lambda) = 0 \implies$ con lo stesso stato iniziale $x(0)$, l'uscita diventa $y(t) = 0$, con $t \geq 0$.
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$, l'uscita tenderà a $y(t) \to G(\lambda)u(t)$ per $t \to \infty$.

2 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)

2.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ e l'ingresso $u(t) = Usin(\omega t)$ per $t \geq 0$ (o equivalentemente $u(t) = Usin(\omega t)sca(t)$), esiste un qualche stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = Ysin(\omega t + \phi)$ per $t \geq 0$?

In altri termini:
[La domanda è molto simile a quella data per la risposta esponenziale] Applicato un ingresso sinusoidale, esiste uno stato di iniziale che faccia elidere fra loro i modi del moto libero e i modi del moto forzato in modo che io veda in uscita solo una sinusoide?

2.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Per rispondere ci basta ricordare che

$$sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il principi odi sovrapposizione degli effetti. Quindi applichiamo due volte il risultato ottenuto per la risposta esponenziale e combiniamo i risultati.

Poniamo $u_1(t) = e^{j\omega t}$ e $u_2(t) = e^{-j\omega t}$, per cui $u(t) = U\frac{u_1(t) - u_2(t)}{2j}$

Iniziamo analizzando $u_1(t)$: se $j\omega$ non è autovalore di A, allora esiste uno e un solo $x_1(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_1(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$

Per $u_2(t)$: se $-j\omega$ non è autovalore di A, allora esiste uno e un solo $x_2(0)$ tale che l'uscita ottenuta è

$$y_2(t) = G(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

Combiniamo ora y_1 e y_2:

$$\begin{matrix} u(t) = \frac{U}{2j}(u_1(t) - u_2(t)) \\ x(0) = \frac{U}{2j}(x_1(0) - x_2(0)) \end{matrix} \implies \text{Principio di sovrapposizione degli effetti} \implies y(t) = \frac{U}{2j}(y_1(t) - y_2(t))$$

Analiziamo $y(t)$:

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

Osserviamo che $G(s)$ è razionale fratta, quindi $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$ (complesso coniugato). Quindi se pongo $G(j\omega) = Me^{j\phi}$ (con M modulo e ϕ argomento di $G(j\omega)$) otteniamo $G(-j\omega) = Me^{-j\phi}$.

Allora

$$y(t) = \frac{U}{2j}\left(Me^{j\phi}e^{j\omega t} - Me^{-j\phi}e^{-j\omega t}\right) = MU\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$

$$y(t) = MUsin(\omega t + \phi)$$

con $M = |G(j\omega|$ e $\phi = arg(G(j\omega))$

2.3 Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza)

Dato il sistema dinamico LTI a TC, SISO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$, detta $G(s)$ la sua funzione di trasferimento e considerato l'ingresso $u(t) = Usin(\omega t)$ per $t \geq 0$:

- Se $\mp j\omega$ non sono autovalori di A, allora esiste uno e uno solo stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = |G(j\omega)|Usin(\omega t + arg(G(j\omega)))$ per $t \geq 0$. (Se $\mp j\omega$ sono autovalori di A, allora si verifica un fenomeno di risonanza, che però non è argomento di questo corso).
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale, l'uscita tenderà a $y(t) \to |G(j\omega)Usin(\omega t + arg(G(j\omega)))$ per $t \to \infty$

2.4 Definizione di risposta in frequenza

definizione: Data una funzione di trasferimento $G(s)$, la sua restrizione all'asse immaginario positivo J^+, cioè $G(j\omega)$ con $\omega \geq 0$, si dice **rispsota in frequenza** (RF) di $G(s)$.

2.5 Esempio

es. Dato $G(s) = \frac{1}{1+0,15}$, che è asintoticamente stabile, e $u(t) = 5sin(20t)$, a cosa tende $y(t) \rightarrow ?$ per $t \rightarrow \infty$?

Siccome il sistema è asintoticamente stabile, allora per il teorema della rispsota in frequenza $y(t) \rightarrow 5|G(j20)|sin(20t + arg(G(j20)))$.

$$G(j20) = \frac{1}{1+2j} \Rightarrow \begin{array}{c} |G(j20)| = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \sim 0,45 \\ arg(G(j20)) = -arctan(2) \sim -63,5 \end{array}$$

[il prof ha terminato i conti e ha tracciato un grafico di $u(t)$ e $y(t)$ usando maxima: ci sta mostrando che il modulo $|G(j20)|$ rappresenta la percentuale dell'ampiezza dell'uscita rispetto all'ampiezza dell'ingresso, in questo esempio l'uscita è ampia il 45% dell'ingresso; invece l'argomento $arg(G(j20))$ rappresenta lo sfasamento del segnale di uscita rispetto al segnale di ingresso, in questo esempio l'uscita è sfasata di 63 gradi (in ritardo) e per capire quanto effettivamente sia uno sfasamento di 63 gradi basta considerare che un periodo del segnale di ingresso sono 360 gradi]

Parte II
Esercitazioni