ESERCITAZIONE 1

EMANUELE RIVA

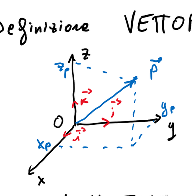
emanuele.riva@polimi.it

ESERCITAZIONI: GIOVEDÍ h. 16:30

- RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE
- CINEMATICA DEL PUNTO

GRANDEZZE
- SCALARE → densità ρ, massa m, volume V, Energia E
- VETTORIALE
  - CINEMATICHE: velocità v, accelerazione a
  - DINAMICHE: Forze F, Coppie C

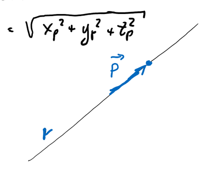
Definizione VETTORE $\in \mathbb{R}^3$



$$\vec{P} = (P-O) = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$$

$$\vec{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

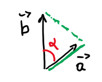
UN VETTORE É DEFINITO DA:
- MODULO $|\vec{P}| = P = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$
- DIREZIONE r
- VERSO $(+/-)$
- PUNTO DI APPLICAZIONE



OSS $|\vec{i}| = 1 = \sqrt{1^2 + 0 + 0} = 1$

OPERAZIONI TRA VETTORI

PRODOTTO SCALARE $c = \vec{a} \times \vec{b}$ SCALARE



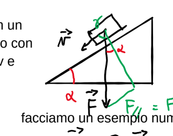
$c = |a||b| \cos\alpha$ = (alfa è l'angolo compreso fra i vettori)

$= a \underbrace{b \cos\alpha}$ bcos(alfa) è la proiezzione di b su a

ESEMPIO

(w = potenza) $W = \vec{F} \times \vec{v} = |F||v| \cos\gamma$

Una massa in un piano inclinato con una velocità v e forza F



$\gamma = 90 - \alpha$ = angolo compreso fra v e F

$w = |F||v| \sin\alpha$

$F_{//} = F \sin\alpha$

facciamo un esempio numerico:

$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ [N]

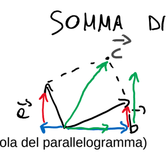
$\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ [m/s]

$W = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \times (-\vec{i} + 4\vec{j}) = -3 + 0 + 0 + 8 = 5$ W

l'angolo compreso fra i due versori i è 0, quindi -3 1 cos(0)= -3

invece l'angolo compreso fra il vesore i e il versore j è 90, quindi cos(90)= 0

SOMMA DI VETTORI



(regola del parallelogramma)

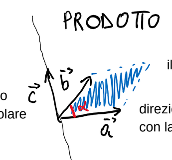
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ la somma di due vettori è un vettore

$$\vec{c} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = c_x \vec{i} + c_y \vec{j}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ VETTORE

il prodotto vettoriale ha come risultato un vettore $\vec{c}$



a e b definiscono un piano e c è il vettore perpendicolare a questo piano

direzione e verso di c sono decisi con la regola della mano destra.

modulo di c: $|\vec{c}| = c = ab \sin\alpha$ (ab è l'area, mentre alfa è l'angolo compreso fra a e b)

calcolo del prodotto vettoriale:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di i

$$= \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) +$$

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di j

$$+ \vec{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di k

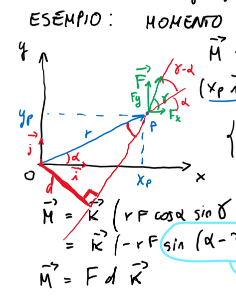
$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} +$$

$$- a_z b_y \vec{i} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

ESEMPIO: MOMENTO DI UNA FORZA

Il momento di una forza rispetto a un polo O è il prodotto vettoriale fra (P-O), dove P è il punto di applicazione della forza, e la forza F.



$$\vec{M} = (P-O) \wedge \vec{F} = (x_p \vec{i} + y_p \vec{j}) \wedge (F_x \vec{i} + F_y \vec{j})$$

$\begin{cases} x_p = r\cos\alpha \\ y_p = r\sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} F_x = F\cos\gamma \\ F_y = F\sin\gamma \end{cases}$

con r intendiamo la distanza (P-O). con gamma intendiamo l'angolo fra F e la sua componente orizzontale.

con alfa intendiamo l'angolo fra P e l'asse delle x

$$\vec{M} = \vec{k}(rF\cos\alpha \sin\gamma - rF\sin\alpha\cos\gamma) =$$

$$= \vec{k}(-rF \sin(\alpha - \gamma)) = \vec{k}\, rF\sin(\gamma - \alpha) =$$

ottenuta con trigonometria

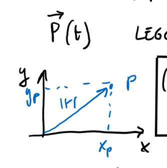
braccio: distanza fra la retta rossa e l'origine)

$$\vec{M} = F d \vec{k}$$

CINEMATICA DEL PUNTO

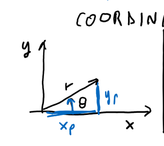
$\vec{P}(t)$ LEGGE ORARIA

La cinematica del punto studia la trasformazione delle coordinate di un punto nel tempo. Quindi il punto P non è più fisso nel tempo, ma sarà una funzione del tempo P(t) detta legge oraria.



$$\boxed{\begin{aligned} (P-O) &= x_p \vec{i} + y_p \vec{j} \\ |P-O| &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = r \end{aligned}}$$

COORDINATE CARTESIANE



$$\boxed{\begin{aligned} (P-O) &= r\cos\theta\, \vec{i} + r\sin\theta\, \vec{j} \\ tg(\theta) &= \frac{y_P}{x_P} \end{aligned}}$$

é importante misurare l'angolo teta a partire dall'asse x

COORDINATE POLARI

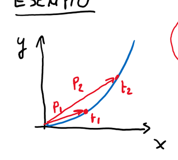
TRAIETTORIA $y(x)$ CURVA PERCORSA DA $P(t)$ DURANTE IL MOTO (P(t) è la legge oraria)

$P(t) = (P-O) = \underbrace{x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}_{\text{forma vettoriale}}$

forma parametrica $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \longrightarrow y(x)$ TRAIETTORIA

data una legge oraria espressa in forma vettoriale, posso passare in forma parametrica e di conseguenza esplicitare y in funzione di x (cioè y(x)) che prende il nome di traiettoria

ESEMPIO



$\boxed{\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 5t^2 \end{cases}}$ FORMA PARAMETRICA

ricavo la t dalla prima equazione

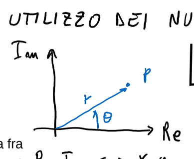
$t = \frac{x}{3} \rightarrow y = 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}x^2$

e sostituendo nella seconda equazione quello che ho ottenuto, ricavo la traiettoria y(x)

$\begin{cases} \vec{P}_1 = \vec{P}(t_1) \\ \vec{P}_2 = \vec{P}(t_2) \end{cases}$

presi due tempi t_1 e t_2, per capire la posizione di P in questi due tempi è sufficiente sostituire t_1 o t_2 nella legge oraria.

UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI



$\boxed{\vec{P} = re^{j\theta}}$ $\boxed{j = \sqrt{-1}}$

FORMA ESPONENZIALE

$\boxed{\vec{P} = r\cos\theta + jr\sin\theta}$

FORMA TRIGONOMETRICA

anche qui è importate misurare teta a partire dall'asse orizzontale (Re)

mappatura fra gli assi x e y e gli assi Re e Im: $Re, Im \longleftrightarrow x, y$

RELAZIONI DI EULERO

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ &e^{j0} = 1;\ e^{j\frac{\pi}{2}} = j;\ e^{j\pi} = -1 \end{aligned}}$$

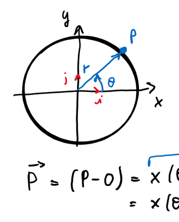
utilizzate per passare dalla forma esponenziale alla forma trigonometrica

Step per affrontare i problemi di cinematica:

1) $\vec{P} = (P-O)$ POSIZIONE
2) $\vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt}$ VELOCITÁ
3) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ACCELERAZIONE

una volta nota la posizione di un punto si può ricavare la sua velocità e la sua accellerazione

ESEMPIO PUNTO SU TRAIETTORIA CIRCOLARE



$\begin{cases} r \text{ COSTANTE} \\ \theta(t) \text{ VARIABILE E NOTO} \end{cases}$ (noto: nel senso che è il dato del problema)

1) $\vec{v}_P$
2) $\vec{a}_P$

dati da trovare

$$\vec{P} = (P-O) = \overbrace{x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}^{\text{forma vettoriale}} = x(\theta(t))\vec{i} + y(\theta(t))\vec{j}$$

FORMA PARAMETRICA $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

FORMA VETTORIALE $(P-O) = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$

per rivedere i concetti di prima scriviamo la posizione in forma parametrica e in forma vettoriale

calcoliamo la velocità

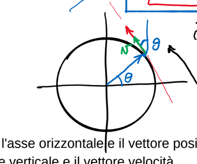
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}\vec{j} =$$

questa forma è possibile solo e soltanto perchè i versori i e j sono fissi nello spazio e nel tempo (che non ruota e non trasla)

utilizzando la regola della catena e il fatto che x(t) =x(teta(t)), svolgiamo ora queste derivate considerando che x = r cos(teta) e y = r sin(teta)

$$= \boxed{-r\sin\theta\,\dot{\theta}}\,\vec{i} + \boxed{r\cos\theta\,\dot{\theta}}\,\vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

quindi v_x =-rsin(teta) e v_y=r cos(teta)



$$\vec{v} = \underbrace{r\dot{\theta}}_{|v|\ \text{MODULO}} \underbrace{(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}_{\vec{t}\ =\ \text{VERSORE TANGENTE}} = \boxed{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

(quest'ultimo è il modo in cui si calcola generalmente)

$\dot{\theta} \gtrless 0$

teta è si l'angolo compreso fra l'asse orizzontale e il vettore posizione, sia l'angolo compreso fra l'asse verticale e il vettore velocità

calcoliamo l'accellerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} =$$

anche qui possiamo scrivere questo perchè i e j sono fissi nel tempo e nello spazio

$$(-R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - R\sin\theta\,\ddot{\theta})\,\vec{i} +$$

questo termine è la derivata seconda di x rispetto al tempo ed è stata ricavata derivando (derivata di un prodotto) il termine v_x calcolato prima

allo stesso modo si calcola questo termine come derivata di v_y

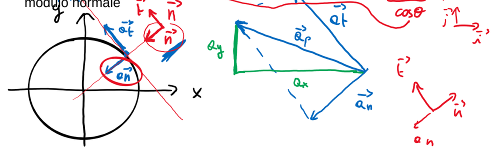
$$(-R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + R\cos\theta\,\ddot{\theta})\,\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

ho quindi trovato le due componenti x e y dell'accellerazione

se raccolgo nel seguente modo, invece, ottengo due componenti diverse di accellerazione, quella tangenziale e quella normale

$$\vec{a} = \underbrace{R\ddot{\theta}}_{|a_t|\ \text{modulo tangente}} \underbrace{(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}_{\vec{t}\ \text{versore tangente}} + (a_y\vec{j} + a_x\vec{i}) \times \vec{i} = a_x$$

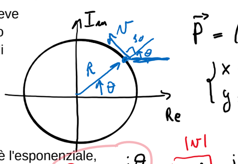
$$\underbrace{-R\dot{\theta}^2}_{|a_n|\ \text{modulo normale}} \underbrace{(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}_{\text{versore normale}}$$



è importante rimanere coerenti con le convenzioni, es. se uso quella cenrtipeda o centrifuga.

APPROCCIO CON NUMERI COMPLESSI

rivediamo l'esercizio coi numeri complessi, che rendono i calcoli molto più semplici



soprattutto per i numeri complessi, in cui per forza si deve passare da r e teta, è molto importante definire l'angolo teta rispetto all'asse reale, perché altrimenti le regole di Eulero sarebbero definite con un altra convenzione

$\vec{P} = (P-O) = Re^{j\theta}$ forma esponenziale

$\begin{cases} x = Re\{\vec{P}\} = R\cos\theta \\ y = Im\{\vec{P}\} = R\sin\theta \end{cases}$ passaggio in forma parametrica

siccome l'unica parte che varia nel tempo è l'esponenziale, la derivata è molto semplice da fare.

$$\vec{v} = jR\dot{\theta}e^{j\theta} = \overbrace{R\dot{\theta}}^{|v|} e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ (eulero)

una volta calcolata la derivata, la riscriviamo in questo modo con le formule di Eulero, in modo da separare modulo e direzione

$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$ passaggio in coordinate parametriche della velocità separando parte reale e parte immaginaria

calcoliamo ora l'accellerazione derivando questa formula ()

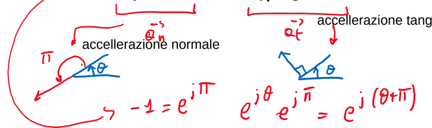
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2 e^{j\theta} + jR\ddot{\theta}e^{j\theta} =$$

tramite le relazioni di Eulero possiamo riscriverle in maniera da separare le componenti tangenziali e normali

$$= \underbrace{R\dot{\theta}^2 e^{j(\theta + \pi)}}_{\vec{a}_n} + \underbrace{R\ddot{\theta}e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})}}_{\vec{a}_t}$$

accellerazione normale

accellerazione tangenziale



$-1 = e^{j\pi}$ $\quad e^{j\theta} e^{j\pi} = e^{j(\theta + \pi)}$