ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

29 ottobre 2019

[mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019;
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1);
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3);
- manca la lezione di giovedì 17/10/19 (LECTURE 5);

6-ESERCITAZIONE

29/10/19

Studi di funzione (non completi)

es.

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}}$$

Dominio:

- logaritmo: $x > 0$
- denominatore: $ln(x) \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

Zeri della funzione:

$$f \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = 0^+ \qquad x \to 0, f(x) \sim x$$

Quindi la funzione nell'intorno dell'origine si comporta come la bisettrice $y = x$.

$$\lim_{x \to 1^-} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = 0^+$$

Confrontiamo questo limite con l'infinitesimo campione (l'infinitesimo campione per $x \to 0$ è x^a, invece per $x \to 1$ è $(x-1)^a$ o $(1-x)^a$). Se ora faccio il rapporto della nostra funzione e l'inititesimo campione posso ricavare l'ordine di infinitesimo della funzione (cioè a):

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}}}{(1-x)^a} =$$

Con $a > 0$.
Cerchiamo di risolvere il logaritmo ponendo $t = 1 - x$, quindi $x = 1 - t$ e per $x \to 1^-$ ottengo $t \to 0^+$.
Inoltre la x al numeratore tende a 1, quindi la ignoro.
Il risultato è:

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{\frac{1}{ln(1-t)}}}{t^a} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^a} = 0 \qquad \forall \; a > 0$$

Siccome la formula è valida per ogni $a > 0$, capisco che la funzione $f(x)$ per $x \to 1^-$ è un infinitesimo superiore di qualunque ordine di x^a. Quindi la funzione per $x \to 1^-$ la funzione $f(x)$ è convessa.

$$\lim_{x \to 1^+} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = +\infty$$

Quindi in $x = 1$ abbiamo un asintoto verticale per $x \to 1^+$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = +\infty$$

Cerchiamo quindi se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{ln(x)}} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} - x = \lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{ln(x)}} - 1) = \lim_{x \to +\infty} x(1 + \frac{1}{ln(x)} + o(\frac{1}{ln(x)} - 1)) = +\infty$$

Quindi non esiste asintoto obliquo.
[immagine: mancante]

es.

$$y = 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x}$$

Dominio: $\mathbb{D}: \quad e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ che equivale a $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = -\infty$$

E posso dedurre che per $x \to -\infty$ la nostra funzione $f(x) \sim -6e^{-x}$, quindi la funzione per $x \to -\infty$ è concava.

$$\lim_{x\to0^-} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale nell'intorno dell'origine. Ora confrontiamo la funzione con l'infinito campione $(\frac{1}{x})^a$ nell'intorno dell'origine, con $a > 0$:

$$\lim_{x\to0} \frac{1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x}}{(\frac{1}{x})^a} = \lim_{x\to0} -2x^a ln(|e^x - 1|) = 0 \qquad \forall\, a > 0$$

Quindi questa funzione tende a $+\infty$ più lentamente di qualunque funzione $(\frac{1}{x})^a$ [non sono sicuro].

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = 1 + x - 2(x + ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} =$$

abbiamo tolto il modulo perchè l'argomento del logaritmo è sicuramente positivo

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + x - 2x - 2(-\frac{1}{e^x} + o(\frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} = -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali, cerchiamo se c'è asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1 = m$$

(ricavato coi conti del limite precedente)

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(e^x - 1) - 6e^{-x} + x = 1 + 2x - 2(x + ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} =$$

$$= 1 + 2x - 2x + 2ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} = 1$$

Asintoto obliquo trovato. [immagine: mancante]

es.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^6 - 6x^5}}{x}$$

Dominio: La radice cubica non ha restrizioni, devo solo guardare il denominatore, quindi $x \neq 0$: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ora che sappiamo che $x \neq 0$ posso riscrivere la funzione così:

$$f(x) = \frac{x\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$$

Se $x \to 0$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}}$$

perciò $f(x) \sim -\sqrt[3]{6}\, x^{\frac{2}{3}}$ che rappresenta una cuspide rivolta verso l'alta in con punta (bucata) in $x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}} = -\infty.$$

Quindi non esiste asintoto orizzonatle, cerchiamo quell oobliquo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}}}{x} = (1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = x(1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}} - x = \lim_{x\to-\infty} x(1 - \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}) - 1) = -2.$$

$x = 6$ è zero della funzione, quindi studiamone il comportamento asintotico:

$$x \to 6 \qquad f(x) \sim 6^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}$$

Cioè graficamente si ha un flesso a tangente verticale in $x = 6$
[immagine: mancante]

es. grafico nell'intorno di 0 di

$$y = \frac{sin(x^2)ln(1-x^3)}{1-cos(2x)}$$

Per $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{x^2 \cdot (-x^3)}{\frac{4x^2}{2}} = -\frac{x^3}{2}$ Quindi c'è un flesso a tangente orizzontale.

es. In un intorno di 1 disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^3-1)^2} = \sqrt[3]{((x-1)^2(x^2+x+1)^2)} = \sqrt[3]{9} \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

Quindi abbiamo una cuspide con punta verso il basso.

es. Studiare la funzione localmente nei punti che si ritengono significativi

$$y = \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Dominio: $(0,1) \cup (1, +\infty)$

- logaritmo: $x > 0$
- radice cubica non da restrizione sul Dominio
- denominatore: $x \neq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} y = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale a destra e $f(x)$ è convessa per $x \to 0^+$, $y \sim -ln(x)$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

Poniamo $t = x - 1$ e quindi $x = 1 + t$, che per $x \to 1^- \Rightarrow t \to 0^-$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{ln(1+t)}{t^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t \to 0^-} t^{\frac{2}{3}}$$

L'esercizio era risolvibile anche aggiungendo all'argomento del logaritmo "$+1-1$".
Comunque $f(x) \sim (x-1)^{\frac{2}{3}}$, che è una cuspide verso il basso con punta bucata in 1.

In $B(+\infty)$ possiamo dire che $f(x) \sim \frac{ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}}$, quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

es.

$$f(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Dominio: $x \neq 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

e la funzione per $x \to -\infty$ è $f(x) \sim 2x$. quindi la funzione si approssima all'asintoto $m = 2x$, ma dobbiamo capire se ci si avvicina da sopra o da sotto.
[C'è stato un errore del prof, sono confuso su questa parte]
Ci sono due metodi per scoprirlo:

- fare il limite della differenza e vedere se ci esce positivo o negativo.
- cercare di capire l'andamento generale della funzione analizzando le intersezioni con la retta $m = 2x$

Usiamo il primo metodo:

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-\frac{1}{x}} - 2x = \lim_{x\to-\infty} 2x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to-\infty} 2x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) - 1) = -2 = q$$

Essendo il risultato negativo, vuol dire che l'asintoto è più grande e quindi la nostra funzione ci si avvicina da sotto. Se avessimo avuto un risultato positivo la funzione si sarebbe avvicinata dall'alto. [fine della parte con l'errore del prof]

$$\lim_{x\to0^-} 2xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{2x}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$$

Un altro modo per vedere quest'ultimo limite:

$$\lim_{x\to0^-} 2xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{2x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+$$

Se ora si facesse lo studio col campione otterremmo: $\lim_{x\to0^+} \frac{2xe^{-\frac{1}{x}}}{x^a} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^{1-a}}{e^{\frac{1}{x}}} = 0,\ \forall\ a > 0.$ Questo significa che la funzione è un infinitesimo di ordine superiore a qualuqnue ordine. Perciò in 0^+ la funzione è come un esponenziale.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty =$$

Approssimiamola meglio:

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = \lim_{x\to+\infty} 2x - 2 + o(1)$$

es.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Dominio: $\mathbb{R}$
Zeri: $f(x) = 0$ per $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Per $x \to 0$: $f(x) \sim -3x$, quindi nell'origine la funzione è approssimabile con la retta $-3x$.
Per $x \to 3$: $f(x) \sim \frac{3}{\sqrt{10}}(x-3)$, quindi in $x = 3$ la funzione si comporta come la retta $\frac{3}{\sqrt{10}}(x-3)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1 - \frac{3}{x})}{-x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + x(|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2(1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x - \frac{1}{2} + o(1)}{-x(1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} = +3$$

L'asintoto obliquo per $-\infty$ è $y = -x + 3$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2(1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))}{x(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x - \frac{1}{2} + o(1)}{x(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} = -3$$

Quindi asintoto obliquo per $+\infty$ è $y = x - 3$

es.

$$f(x) = \frac{(x^2-4)^2}{(x+1)^3}$$

Dominio: $x \neq -1$
Zeri: $x = \pm 2$
Riscriviamo la funzione:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x+1)^3}$$

Per $x \to -2$, $f(x) \sim -16(x+2)^2$, quindi la funzione è come una parabola rivolta verso il basso che tocca $x = -2$) e $x = -2$ è un punto di massimo locale.
Per $x \to +2$, $f(x) \sim \frac{16}{27}(x-2)^2$, quindi anche qui una parabola rivolta verso l'alto, e $x = 2$ è un punto di minimo locale.

$$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$$

Quindi $x = -1$ è un asintoto verticale a sinistra e a destra .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4)^2}{(x+1)^3} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - 8x^2 + 16 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x}{(x+1)^3} = -3$$

Quindi $y = x - 3$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Ora ci sarebbe da scoprire se sta sopra o sotto l'asintoto obliquo.
[da finire a casa]