

# Fisica Tecnica

## Concetti base

### Conversioni

1 atm	101 325 Pa
1 ata	98 066.5 Pa
1 bar	100 000 Pa
1 psi	6895 Pa
<hr/>	
1 kcal	4186 J
<hr/>	
$x\text{ }^{\circ}\text{C}$	$x + 273.15\text{ K}$
$x\text{ }^{\circ}\text{F}$	$\frac{5}{9}(x + 459.67)\text{K}$

### Costanti

Costante dei gas ideali	$R = 8314\text{ J/kmol K}$
Entalpia solidif. $\text{H}_2\text{O}$	$h_{lst,\text{H}_2\text{O}} = -333\text{ kJ/kg}$
Entalpia evaporazione $\text{H}_2\text{O}$	$h_{lvt,\text{H}_2\text{O}} = 2501.6\text{ kJ/kg}$
Entalpia sublimazione $\text{H}_2\text{O}$	$h_{svt,\text{H}_2\text{O}} = 2834.6\text{ kJ/kg}$
Pressione punto triplo $\text{H}_2\text{O}$	$P_0 = 611.2\text{ Pa}$
Temperatura punto triplo $\text{H}_2\text{O}$	$T_0 = 0.01\text{ }^{\circ}\text{C} = 273.16\text{ K}$
Pressione stato critico $\text{H}_2\text{O}$	$P_{cr} = 22.09\text{ MPa}$
Temperatura stato critico $\text{H}_2\text{O}$	$T_{cr} = 647.3\text{ K}$
Calore specifico ghiaccio	$c_s = 2093\text{ J/kg K}$
Volume specifico ghiaccio	$v_s = 0.00109\text{ m}^3/\text{kg}$
Calore specifico acqua	$c_s = 4186\text{ J/kg K}$
Volume specifico acqua	$v_s = 0.001\text{ m}^3/\text{kg}$
Calore specifico medio vapore	$c_p = 2009\text{ J/kg K}$

Masse atomiche (kg/kmol):

H = 1,008   He = 4,003   C = 12,011   N = 14,007

O = 15,999   Ne = 20,18   Ar = 39,95   Kr = 83,798

Masse molecolari:

$\text{H}_2\text{O} = 18,015$    aria(79/21) = 28,85    $\text{CH}_4 = 16,043$

### Sistema termodinamico

	Calore	Lavoro	Massa
Adiabatico	no		
Diatermano	sì		
Rigido		no	
Deformabile		sì	
Chiuso (impermeabile)			no
Aperto (permeabile)			sì
Isolato	no	no	no

### Grandezze

- **Intensive:** non dipendono dall'estensione del sistema (temperatura, pressione, densità);
- **Extensive:** dipendono dall'estensione del sistema (massa, volume);
- **Extensive specifiche:** estensiva/estensiva ( $v = \frac{V}{M}$ ).

### Legge di Duhem

In un sistema semplice monocomponente il numero di parametri intensivi o estensivi specifici necessari per descriverlo all'equilibrio è 2.

### Regola di Gibbs

$$V = C + 2 - F$$

$V$    numero di variabili intensive indipendenti  
 $C$    numero di componenti  
 $F$    numero di fasi

Ne deriva l'esistenza di una legge di stato:

$$f(P, v, T) = 0$$

### Trasformazioni termodinamiche

Trasformazione	Caratteristiche
Quasi-statica o internamente reversibile	Costituita da una successione di stati di equilibrio; può non essere reversibile
Reversibile	Se percorsa in senso inverso, riporta sistema e ambiente nello stato iniziale
Irreversibile	Non è rappresentabile su un diagramma di stato
Chiusa o ciclica	Gli estremi della trasformazione coincidono
Elementare	Se una delle grandezze di stato si mantiene costante durante la trasformazione

### Gas ideali

Un gas può essere considerato ideale per pressioni minori di 10bar.

$$PV = nRT = MR^*T$$

$$Pv = R^*T$$

$P$    pressione [Pa]  
 $V$    volume [ $\text{m}^3$ ]  
 $n$    numero di moli [mol]  
 $R$    costante universale dei gas ideali 8314 J/kmol K  
 $R^*$    costante del gas  $R/Mm$  [J/Kg K]  
 $T$    temperatura [K]  
 $M_m$    massa molecolare

### Gas reali

Equazione di van der Waals:

$$\left(P + \frac{a}{v_m^2}\right)(v_m - b) = RT$$

### Liquidi e solidi

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$$

$$dv = \beta v dT - K_T v dP$$

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad \text{coeff. di dilatazione termica isobaro}$$

$$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \quad \text{coeff. di dilatazione termica isoterma}$$

## Principi della termodinamica

### Principi di conservazione

- Conservazione della **massa**;
- Conservazione della **energia** (I principio);
- Conservazione della **entropia** (II principio);

### Primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q^+ - L^+$$

$U$    energia interna del sistema  
 $Q^+$    calore entrante nel sistema  
 $L^+$    lavoro uscente dal sistema

L'energia interna è una grandezza estensiva:

$$U_z = U_1 + U_2 + \dots$$

Per una trasformazione ciclica:

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$$

Per i sistemi conservativi:

$$\delta L = dE_c + dE_p$$

### Secondo principio della termodinamica

Per un sistema all'equilibrio esiste una funzione di stato detta **entropia**  $S$  la cui variazione per una trasformazione *reversibile* è data da:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}^+}{T}$$

In un sistema isolato in cui avvengono trasformazioni  $\Delta S \geq 0$  e tende a zero al limite della reversibilità.

L'entropia è una grandezza estensiva:

$$S_z = S_1 + S_2 + \dots \quad \Delta S_z = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots$$

In un sistema chiuso il bilancio entropico è dato da:

$$\Delta S = S_Q^- + S_{irr} \quad S_{irr} \geq 0 \quad \text{segno } S_Q^- = \text{segno } Q^-$$

**Enunciato di Clausius** Non esiste una macchina ciclica che non produca altro effetto che il trasferimento di calore da una sorgente fredda a una sorgente calda.

**Enunciato di Kelvin** Non esiste una macchina ciclica il cui unico effetto sia l'assorbimento di calore da una sorgente calda e la produzione di un'equivalente quantità di lavoro.

## Lavoro termodinamico e calore

### Lavoro termodinamico

$$\delta L^+ = P A ds = P dv$$

$$\delta l^+ = P dv$$

$$l^+ = \int_i^f P dv$$

Il lavoro dipende dal percorso: **non** è funzione di stato.

# Calore

Capacità termica	$C_x = \left( \frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_x$
Calore specifico	$c_x = \frac{1}{M} \left( \frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_x$
A pressione cost.	$c_P = \frac{1}{M} \left( \frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_P = \left( \frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT} \right)_P$
A volume cost.	$c_v = \frac{1}{M} \left( \frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_v = \left( \frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT} \right)_v$

Inoltre si ha che

A pressione cost.	$c_P = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$
A volume cost.	$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$

# Entalpia

L'entalpia è una funzione di stato.

$$h = u + Pv$$

$$dh = du + v dP + P dv = \delta q^{\leftarrow} + v dP$$

$$\delta q^{\leftarrow} = dh - v dP$$

# Gas ideali ed energia interna

Nei gas ideali, a seguito di evidenze sperimentali, si ha che  $u = u(T)$ , ovvero l'**energia interna dipende solo dalla temperatura**. Quindi anche l'entalpia,  $c_v$  e  $c_P$  sono dipendenti solo dalla temperatura e si ha che

A pressione cost.	$c_P = \left( \frac{dh}{dT} \right)$
A volume cost.	$c_v = \left( \frac{du}{dT} \right)$

# Relazione di Mayer

$$c_P = \frac{dh}{dT} = \frac{du + d(Pv)}{dT} = \left( \frac{du}{dT} \right) + \frac{dR^*T}{dT} = c_v + R^*$$

Per i gas **perfetti** (gas ideali per variazioni di temperatura non troppo elevate) vale che:

	$c_v$	$c_P$
Gas Monoatomico	$\frac{3}{2} R^*$	$\frac{5}{2} R^*$
Gas Biatomico o Poliatomico lineare	$\frac{5}{2} R^*$	$\frac{7}{2} R^*$
Gas Poliatomico non lineare	$\frac{6}{2} R^*$	$\frac{8}{2} R^*$
Monoatomico	He, Ar, ...	
Linare	O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub> , ...	
Non lineare	CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub> O, ...	

Liquido incompressibile ideale  $C_v = C_P = c(T)$ .  
Liquido incompressibile perfetto  $C_v = C_P = \text{cost.}$

# Politropiche

Data una trasformazione quasi statica per un sistema con un **gas ideale** dove  $c_x = \text{cost.}$

$Pv^n = \text{cost}$	$Tv^{n-1} = \text{cost}$	$\frac{T^n}{P^{n-1}} = \text{cost}$	$PT^{\frac{n}{1-n}} = \text{cost}$
Trasformazione	$c_x$	$n = \frac{c_x - c_P}{c_x - c_v}$	
Isoterma	$\pm\infty$	1	
Isocora	$c_v$	$\pm\infty$	
Isobara	$c_P$	0	
Adiabatica	0	$k = \frac{c_P}{c_v}$	

Per  $n \neq 1$  (quindi non isoterma) l'integrale del lavoro diventa:

$$l^{\rightarrow} = \int_1^2 P dv = \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Per  $n = 1$  l'integrale del lavoro diventa:

$$l^{\rightarrow} = \int_1^2 P dv = P_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

# Diagramma T-s

L'area sottesa dalla curva in una trasformazione *internamente reversibile* è uguale al calore scambiato:

$$dS_{rev} = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad Q_{rev} = \int_i^f dQ_{rev} = \int_i^f T(S) dS$$

Nel piano T-s tutte le trasformazioni politropiche sono esponenziali:

	$T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_x}}$	
Isoterme	$c_x = \infty$	rette orizzontali
Adiabatiche reversibili	$c_x = 0$	rette verticale
Isocore	$c_v < c_P$	più ripide delle isobare

# Per i gas perfetti

Trasformazione	$l = \int P dv$	$q = \int dq$
$P = \text{cost}$	$P\Delta v$	$c_P \Delta T$
$v = \text{cost}$	0	$c_v \Delta T$
$T = \text{cost}$	$R^*T \ln \frac{v_2}{v_1} =$ $-R^*T \ln \frac{P_2}{P_1}$	$R^*T \ln \frac{v_2}{v_1} =$ $-R^*T \ln \frac{P_2}{P_1}$
$dQ = 0$	$-c_v \Delta T$	0
$c_x = \text{cost}$	$(c_x - c_v)\Delta T$	$c_x \Delta T$

# Per i gas perfetti

$$\Delta u = c_v \Delta T \quad \Delta h = c_P \Delta T$$

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$= c_P \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$= c_P \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{P_2}{P_1}$$

# Per i liquidi incompressibili

Se perfetti:

$$\Delta u = c \Delta T \quad \Delta s = c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Se ideali  $c_P = c(T)$ ,  $\beta = 0$  e  $K_T = 0$ :

$$dh = c(T) dT + v dP \quad ds = c(T) \frac{dT}{T}$$

Se perfetti:

$$\Delta h = c \Delta T + v \Delta P$$

# Miscelamenti

In caso di miscelazione **adiabatica** di più gas:

- Isobara:  $\Delta H = 0$
- Isocora:  $\Delta U = 0$

Legge di **Dalton**: il volume di una miscela di gas è uguale alla somma dei volumi che ognuno dei gas avrebbe se se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e pressione della miscela.

Legge di **Dalton**: la pressione di una miscela di gas è uguale alla somma delle pressioni che ognuno dei gas avrebbe se se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e volume della miscela.

# Macchina termodinamica

La macchina termodinamica è un sistema termodinamico composto ed isolato che nel caso più semplice è realizzato da

- due serbatoi di calore
- un serbatoio di lavoro
- una macchina ciclica che è in grado di interagire con continuità con i serbatoi di calore e lavoro

**Serbatoio di calore** sistema termodinamico che scambia solo calore con l'esterno senza alterare il suo stato interno; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche internamente reversibili.

**Serbatoio di lavoro** sistema termodinamico che scambia solo lavoro con l'esterno senza alterare il suo stato interno; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche internamente reversibili.

# Risoluzione problemi macchine termiche

Bisogna impostare e risolvere il sistema contenente le equazioni di bilancio

$$\begin{cases} \Delta U_Z = 0 \\ \Delta S_Z = S_{irr} \end{cases}$$

Per macchina motrice con masse infinite:

$$\begin{cases} -Q_C + Q_F + L = 0 \\ -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

Per macchina operatrice con masse infinite:

$$\begin{cases} Q_C - Q_F - L = 0 \\ \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

## Rendimenti macchine termiche

$$\begin{aligned} \text{Macchina motrice} \quad \eta &= \frac{L}{Q_C} \quad \eta_{II} = \frac{\eta}{\eta_{rev}} = \frac{L}{L_{rev}} \\ \rightarrow \text{serbatoi a massa infinita} \quad \eta &= 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F}{Q_C} S_{irr} \\ \hookrightarrow \text{reversibile} (S_{irr} = 0) \quad \eta_{rev} &= 1 - \frac{T_F}{T_C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Macchina operatrice} \quad & \text{(serbatoi a temp. cost.)} \\ \rightarrow \text{frigorifera} \quad \varepsilon_f &= \frac{Q_F}{L} \quad \eta_{II} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rev}} = \frac{L_{rev}}{L} \\ \hookrightarrow \text{reversibile} \quad \varepsilon_{f,rev} &= \frac{T_F}{T_C - T_F} \\ \rightarrow \text{pompa di calore} \quad \varepsilon_{pdc} &= \frac{Q_C}{L} \\ \hookrightarrow \text{reversibile} \quad \varepsilon_{pdc,rev} &= \frac{T_C}{T_C - T_F} \end{aligned}$$

## Sistemi aperti

### Bilancio di massa

$$\frac{dm}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow}$$

### Equazione di continuità

$$\dot{m} = \rho w \Omega$$

### Bilancio di energia

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{E}_i^{\leftarrow}$$

dove  $E$  rappresenta l'energia associata al trasporto di massa e al lavoro e calore scambiato

### Lavoro di pulsione

$$L_P^{\leftarrow} = - \int_{V+V_m}^V P dV = PV_m = m_i P v_i$$

### Energia associata al trasporto di massa

$$E_m = \sum_i m_i^{\leftarrow} \left( u + gz + \frac{w^2}{2} \right)$$

### Bilancio energetico

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} \left( h + gz + \frac{w^2}{2} \right) + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow}$$

### Bilancio di entropia

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} s_i + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr}$$

### Regime stazionario

$$\dot{m}_{ingresso}^{\leftarrow} = -\dot{m}_{uscita}^{\leftarrow}$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} \left[ (h_i - h_u) + g(z_i - z_u) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2} \right] + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

## Macchina aperta

### Turbina, compressore e pompa

$$\dot{m}^{\leftarrow} (h_i - h_u) - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

### Scambiatore di calore

$$\dot{m}^{\leftarrow} (h_i - h_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

### Diffusore (w↓) e ugello (w↑)

$$(h_i - h_u) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

### Valvola di laminazione

$$(h_i - h_u) = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

## Rendimento isoentropico

### Turbina

$$\eta_{is,turbina} = \frac{\dot{L}_{reale}^{\rightarrow}}{\dot{L}_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{h_1 - h_{2,reale}}{h_1 - h_{2,ideale}}$$

### Compressore

$$\eta_{is,compressore} = \frac{\dot{L}_{ideale}^{\rightarrow}}{\dot{L}_{reale}^{\rightarrow}} = \frac{h_1 - h_{2,ideale}}{h_1 - h_{2,reale}}$$

## Lavoro specifico per unità di massa fluente

Dopo vari passaggi si ottiene che

$$-\delta l_e^{\rightarrow} = v dP + T ds_{irr}$$

Integrando fra la sezione di ingresso e quella di uscita:

$$l_e^{\rightarrow} = - \int_i^u v dP - \int_i^u T ds_{irr}$$

dove il secondo termine è l'energia dissipata per irreversibilità interna.

## Sistemi bifase

Le grandezze estensive specifiche sono la media pesata sulle masse:

$$m = m_{\alpha} + m_{\beta} \quad E = E_{\alpha} + E_{\beta}$$

$$e = \frac{m_{\alpha}}{m} e_{\alpha} + \frac{m_{\beta}}{m} e_{\beta}$$

$$\text{frazione massica: } x_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{m} \quad x_{\beta} = \frac{m_{\beta}}{m}$$

Dalla regola di Gibbs il numero di variabili intensive indipendenti per bifase monocomponente è 1, pressione e temperatura non sono indipendenti.

La transizione di fase è a P costante:  $dh = \delta q$ .

## Stati di aggregazione

Liq. sottoraffreddato	Non in procinto di evaporare
Liq. saturo	In procinto di evaporare
Vapore umido	Stato di transizione
Vapore saturo	In procinto di condensazione
Vapore surriscaldato	Non in procinto di condensazione

## Entalpia di transizione

$$h_{solido} < h_{liquido} < h_{vapore}$$

Per l'acqua allo stato triplo:

Solidificazione	$h_{lst,H_2O} = -333 \text{ kJ/Kg}$
Evaporazione	$h_{lvt,H_2O} = 2501.6 \text{ kJ/Kg}$

## Titolo di vapore, liquido e solido

$$x = x_v = \frac{m_v}{m} \quad x_l = \frac{m_l}{m} \quad x_s = \frac{m_s}{m}$$

$$x_v + x_l + x_s = 1$$

Per interpolare nelle tabelle:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$Y = Y_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1)$$

## Approssimazioni per entropia e entalpie di solidi e liquidi

Formule valide per l'acqua, partendo da uno stato di riferimento, per esempio il punto triplo.

Allo stato solido:

$$h = h_0 + h_{lst} + c_s(T - T_0) + v(P - P_0)$$

$$s = s_0 + s_{lst} + c_s \ln \frac{T}{T_0} = s_0 + \frac{h_{lst}}{T_0} + c_s \ln \frac{T}{T_0}$$

Allo stato liquido:

$$h = h_0 + c_l(T - T_0) + v(P - P_0)$$

$$s = s_0 + c_l \ln \frac{T}{T_0}$$

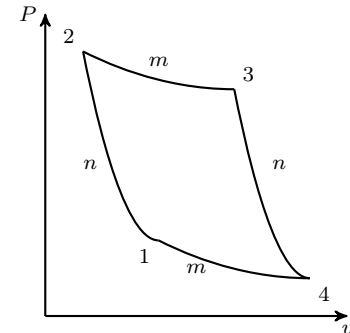
Con le tabelle è possibile trovare  $h$  per l'acqua sottoraffreddata:

$$h = h_{ls}(P_{sat}(T)) + v(P - P_{sat}(T))$$

dove  $v = v_{ls}(P_{sat}(T))$ . Di solito il termine  $v\Delta P$  è trascurabile.

## Cicli simmetrici

Un ciclo formato da 4 politropiche, uguali a due a due.



$$v_1 v_3 = v_2 v_4$$

$$P_1 P_3 = P_2 P_4$$

$$T_1 T_3 = T_2 T_4$$

$$P_1 v_1^n = P_2 v_2^n$$

$$P_2 v_2^m = P_3 v_3^m$$

$$P_3 v_3^n = P_4 v_4^n$$

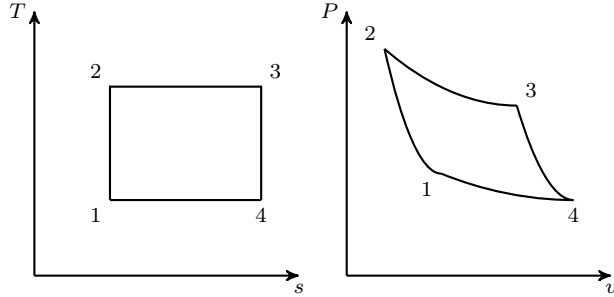
$$P_4 v_4^m = P_1 v_1^m$$

## Ciclo Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo simmetrico composto da due isoentropiche (adiabatiche reversibili) e due isoterme.

Il rendimento ciclo di Carnot vale:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$



## Irreversibilità

Se **irreversibilità esterna** ( $T_1 > T_F$  e  $T_2 < T_C$ ):

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C} > \eta_{ciclo} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Bilancio entropico su tutta macchina termica:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$$

Bilancio entropico su macchina ciclica (ciclo di Carnot):

$$\frac{Q_C}{T_3} = \frac{Q_F}{T_1} = \Delta S$$

Da cui si ricava:

$$Q_C \left( \frac{T_1}{T_F T_3} - \frac{1}{T_C} \right) = S_{irr}$$

Se **irreversibilità interna** ( $s_1 < s_2$  e  $s_3 < s_4$ ):

Bilancio entropico su tutta macchina termica:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$$

Bilancio entropico su macchina ciclica:

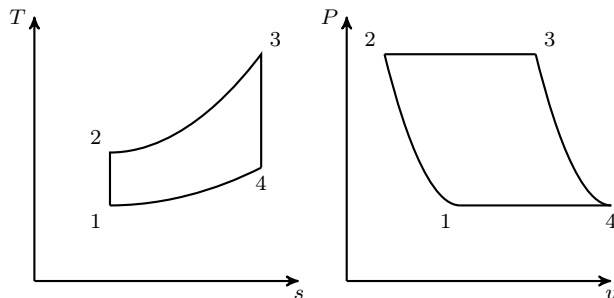
$$\frac{Q_C}{T_C} = S_3 - S_2 \quad \text{e} \quad \frac{Q_F}{T_F} = S_4 - S_1$$

Da cui deriva:  $S_2 - S_3 + S_4 - S_1 = S_{irr} > 0$

## Ciclo Joule-Brayton

Ciclo simmetrico costituito da due *isoentropiche* e due *isobare*.

Applicazioni: impianti a turbina a gas con ciclo chiuso o aperto.



Nell'ipotesi di *gas perfetto* e *ciclo ideale simmetrico*:

$$\dot{Q}_c = \dot{m}(h_3 - h_2)$$

$$\dot{Q}_f = \dot{m}(h_4 - h_1)$$

$$\dot{Q}_c = \dot{m} c_p (T_3 - T_2)$$

$$\dot{Q}_f = \dot{m} c_p (T_4 - T_1)$$

Il rendimento termodinamico del ciclo vale:

$$\eta_{JB} = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Definendo il rapporto di compressione:  $r_p = \frac{P_2}{P_1}$

$$\eta_{JB} = 1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\min \eta \text{ per } r_p = 1 \quad \max \eta \text{ per } T_2 \rightarrow T_3 \Rightarrow r_p^{\max} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

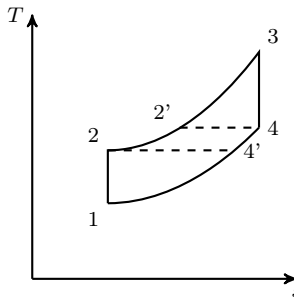
## Lavoro specifico per ciclo Joule-Brayton

$$l = l_T - l_c = c_p(T_3 - T_4) - c_p(T_2 - T_1)$$

Il lavoro massimo si ha in corrispondenza di:

$$r_p^{\text{opt}} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = \sqrt{r_p^{\max}} \quad \text{e} \quad T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

## Ciclo Joule-Brayton con rigenerazione



Si può applicare se  $T_2 \leq T_4$

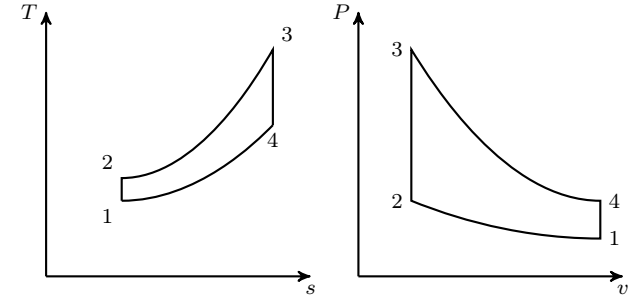
Il rendimento nel caso  $T_{2'} = T_4$  è:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{rig}} &= \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_c} = \frac{\dot{L}_T - \dot{L}_c}{\dot{Q}_c} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_4} = \\ &= 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{T_2 T_1}{T_3 T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\frac{k-1}{k}} \end{aligned}$$

## Ciclo Otto

Ciclo simmetrico costituito da due *isoentropiche* e due *isocore*.

Applicazioni: prevalentemente in campo automobilistico.  $r_v$  tra 6 e 10 per evitare autocombustione della miscela in 1 - 2.



Il rendimento del ciclo Otto nel caso di *gas perfetto*:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{q_f}{q_c} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Dal bilancio entropico tra 1 e 2 vale:  $\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{c_v} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{R^*}$

Chiamando rapporto di compressione volumetrico  $r_v = \frac{V_1}{V_2}$

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - r_v^{1-k}$$

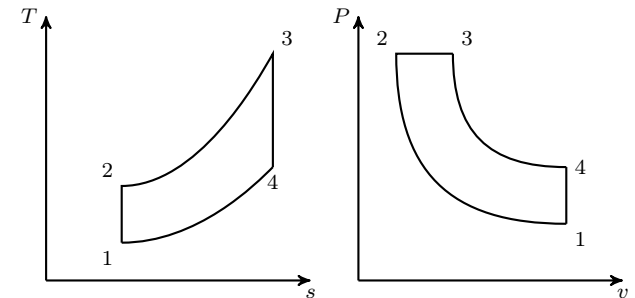
## Lavoro specifico per il ciclo Otto

$$l = c_v(T_3 - T_4) - c_v(T_2 - T_1) = c_v T_3 \left( 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \right) - c_v T_1 (r_v^{k-1} - 1)$$

$$r_v^{\text{opt}} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2(k-1)}}$$

## Ciclo Diesel

Ciclo **NON simmetrico** costituito da due *isoentropiche*, una *isobara* e una *isocora*. Applicazioni: motore endotermico.



Nell'ipotesi di *gas perfetto* e *ciclo ideale*:

$$\eta_{\text{diesel}} = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{c_v T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{c_p T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$

$$\text{Rapporto compressione volumetrico:} \quad r = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\text{Rapporto di combustione:} \quad z = \frac{V_3}{V_2}$$

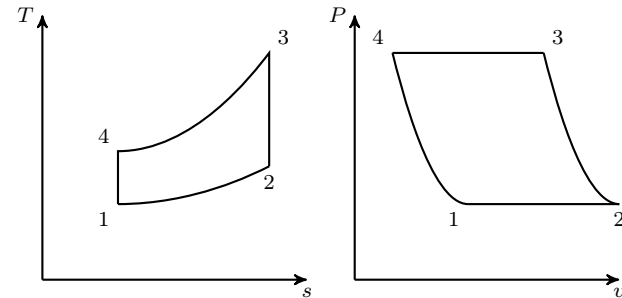
$$\eta_{\text{diesel}} = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \frac{1}{k} \frac{z^k - 1}{z - 1}$$

## Confronto ciclo Otto - ciclo Diesel

- Motore Otto è più leggero a parità di potenza
- Motore Otto ha frequenza di rotazione maggiore
- Motore Otto ha minore rumorosità
- Motore Diesel ha miglior rendimento a causa del maggior rapporto di compressione (circa il doppio rispetto a motore Otto)
- Motore Diesel ha miglior rendimento al diminuire del carico (più facilmente regolabile in potenza)
- Motore Diesel utilizza un combustibile meno pregiato del motore Otto

## Ciclo Joule-Brayton inverso

Ciclo frigorifero inverso costituito da due *isoentropiche* e due *isobare*.



Se il ciclo è simmetrico:

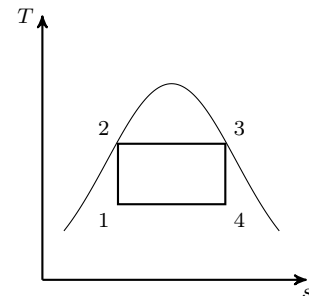
$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c - \dot{Q}_f} = \frac{T_2}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_4 - T_1} = \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1}$$

Alta efficienza per  $r_p \rightarrow 1$ .

## Altri cicli

- Ciclo Stirling: due *isoterme* e due *isocore*;
- Ciclo Ericsson: due *isoterme* e due *isobare*;

## Ciclo Carnot a vapore



Vantaggi:

- L'isobara nel bifase è anche isoterma (meno irreversibilità);
- La transizione di fase aumenta l'energia specifica scambiata lungo le isoterme;

Svantaggi:

- Compressione 1-2 di un bifase difficile da realizzare e soggetta a molte irreversibilità;

- L'espansione 3-4 conviene se  $x_4 < 0.9$ .

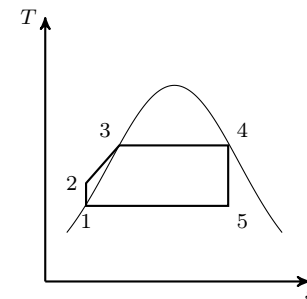
## Fluidi di lavoro in cicli a vapore

- Elevata massa volumica e entalpia di transizione di fase  $\Rightarrow$  ridurre la portata di fluido;
- Elevata temperatura critica  $\Rightarrow$  al punto critico  $h_{lvt} = 0$ ;
- Temperatura del punto triplo inferiore a quella minima del ciclo  $\Rightarrow$  evitare fase solida;
- Fluido non corrosivo  $\Rightarrow$  ridurre i costi e manutenzione;
- Fluido non tossico  $\Rightarrow$  ridurre i rischi ambientali;
- Chimicamente stabile  $\Rightarrow$  aumentare sicurezza impianto;
- Facilmente reperibile e di basso costo;
- Elevata pendenza della curva limite superiore in  $T-s \Rightarrow$  vapore in uscita con elevato titolo;
- Pressione di condensazione  $> 1 \text{ atm} \Rightarrow$  evitare infiltrazioni di gas incondensabili;

Esempi di fluidi adatti:

- Ciclo motore: acqua
- Ciclo frigorifero:
  - Ammoniaca  $\text{NH}_3 \Rightarrow$  tossico;
  - Clorofluorocarburi (CFC o freon)  $\Rightarrow$  dannosi per l'ozono;
  - Clorofluoroidrocarburi (HCFC) o fluoroidrocarburi (HFC)  $\Rightarrow$  meno dannosi per l'ozono ( $R134a$ );

## Ciclo Rankine a vapore saturo



- Trasformazione 1-2: compressione isoentropica (pompa)
- Trasformazione 2-4: riscaldamento isobaro (bruciatore)
- Trasformazione 4-5: espansione isoentropica (turbina)
- Trasformazione 5-1: raffreddamento isobaro (condensatore)

Rendimento ciclo Rankine a vapore saturo:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{m}(h_5 - h_1)}{\dot{m}(h_4 - h_2)} = 1 - \frac{h_5 - h_1}{h_4 - h_2}$$

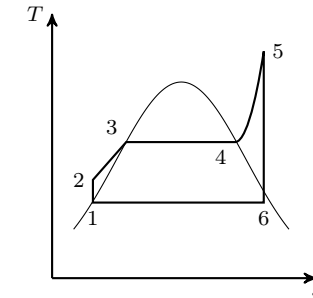
Per il calcolo del salto entalpico in pompa essendo

$dh = T ds + v dP$  ma  $ds = 0$  e fluido incomprimibile:

$$h_2 - h_1 = v(P_2 - P_1)$$

Il ciclo Rankine a vapore saturo non viene utilizzato perché all'uscita dalla turbina il titolo non è sufficientemente alto (si vorrebbe avere titolo superiore a 0.9).

## Ciclo Rankine con surriscaldamento



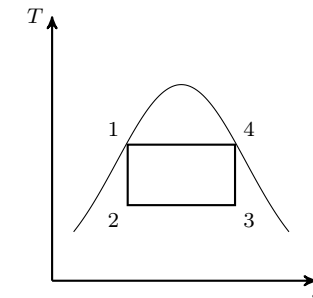
- Trasformazione 1-2: compressione isoentropica (pompa)
  - Trasformazione 2-5: riscaldamento isobaro (bruciatore)
  - Trasformazione 5-6: espansione isoentropica (turbina)
  - Trasformazione 6-1: raffreddamento isobaro (condensatore)
- Rendimento ciclo Rankine:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{m}(h_6 - h_1)}{\dot{m}(h_5 - h_2)} = 1 - \frac{h_6 - h_1}{h_5 - h_2}$$

## Soluzioni per aumento rendimento ciclo Rankine

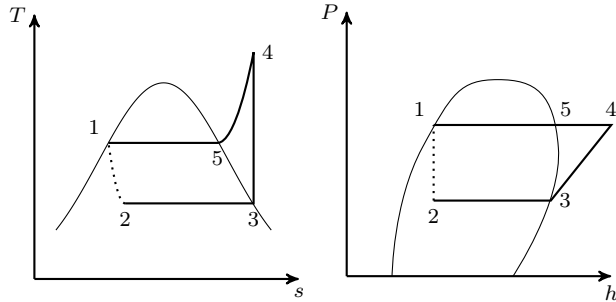
- Abbassamento della pressione di condensazione  $\Rightarrow$  maggior lavoro prodotto (ma anche più calore richiesto all'uscita della pompa, titolo minore in uscita dalla turbina e rischio di infiltrazioni se pressione di condensazione minore pressione atmosferica)
- Aumento della temperatura finale di surriscaldamento  $\Rightarrow$  aumento di lavoro prodotto (ma anche aumento calore richiesto) e titolo in uscita dalla turbina più alto.
- Aumento della pressione di vaporizzazione (a parità di temperatura massima)  $\Rightarrow$  stesso lavoro e meno calore in uscita durante condensazione (ma anche titolo minore in uscita da turbina)
- Surriscaldamenti ripetuti con espansioni in più stadi  $\Rightarrow$  permettono di aumentare lavoro e titolo in uscita da turbina
- Rigenerazione  $\Rightarrow$  si estrae vapore dalla turbina e si mette a contatto con il liquido a bassa temperatura
- Cogenerazione  $\Rightarrow$  si utilizza vapore in uscita da turbina per teleriscaldamento o per altri scopi

## Ciclo Carnot inverso a vapore



- L'espansione 1 – 2 non è problematica;
- La compressione 3 – 4 può condurre ad una elevata erosione del compressore;

## Ciclo frigorifero a vapore



L'espansione 1 – 2 isentropica è sostituita da un'espansione adiabatica isoentalpica (valvola di laminazione).

## Ripasso analisi

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} T = \text{grad } T = \hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v}$$

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = \text{laplaciano di } T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

## Conduzione

Trasferimento di energia per effetto dell'interazione delle particelle di una sostanza dotata di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia. Può avvenire nei solidi, liquidi e gas.

### Postulato di Fourier

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$$

### Equazione di Fourier

$$\frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$

$\vec{q}$  vettore flusso di calore areico

$k$  conduttività termica

$\sigma$  potenza generata nell'unità di volume

$\rho = \frac{1}{v}$  massa volumica

### Casi particolari equazione di Fourier

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Assenza generazione potenza}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0 \quad \text{Regime strazionario (eq. Poisson)}$$

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{Assenza generazione e regime stazionario}$$

### Coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(x, y, z, t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

### Parete piana infinita in $y - z$ in regime stazionario

$$T = -\frac{\sigma}{2k} x^2 + Ax + B \quad \dot{q} = \sigma x - Ak$$

### Lastra piana senza generazione di potenza

Avendo  $T = T_1$  in  $x = 0$  e  $T = T_2$  in  $x = s$  (con  $s$  lo spessore della lastra piana) si ha che:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{s} x + T_1 \quad \dot{q} = -k \left( \frac{T_2 - T_1}{s} \right)$$

$$\text{Ponendo } R_c = \frac{s}{A \cdot k} \quad \text{si ha che } \dot{Q}_{cond} = -\frac{\Delta T}{R_c}$$

### Coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(r, \varphi, z, t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

### Cilindro pieno o cavo di altezza infinita

Supponendo  $T = T(r)$  si ha che, in regime stazionario:

$$T = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + A \ln\left(\frac{r}{B}\right) = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + A \ln(r) + C$$

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2} r - \frac{k}{r} A$$

### Barra cilindrica piena con generazione di potenza

Ponendo come condizione  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$  per  $r = 0$  e  $T = T_2$  per  $r = R$  si ha che:

$$T = \frac{\sigma}{4k} (R^2 - r^2) + T_2 \quad \dot{q}_{areico} = \frac{\sigma}{2} r$$

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \pi r^2 \sigma$$

### Cilindro cavo senza generazione di potenza

Ponendo  $T = T_i$  per  $r = R_i$  e  $T = T_e$  per  $r = R_e$  si ottiene

$$T = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) \quad \dot{q}_{areico} = k \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{r}$$

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \frac{2\pi k}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} (T_i - T_e)$$

$$\text{Ponendo } R_{cil} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi L k} \quad \text{si ha che } \dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{cil}}$$

### Coordinate sferiche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\sigma}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

### Sfera piena o cava

Supponendo  $T = T(r)$  e regime stazionario si ha che

$$T = -\frac{\sigma}{6k} r^2 + \frac{A}{r} + B$$

Analogamente al caso cilindrico si ha che:

$$R_{sfera} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2 k} \quad \dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{sfera}}$$

## Convezione

Trasferimento di energia tra una superficie solida e un fluido adiacente in movimento.

**Convezione forzata** Avviene quando il fluido è forzato a scorrere su una superficie da mezzi esterni

**Convezione naturale** Avviene quando il moto del fluido è causato da forze ascensionali che sono indotte dalle differenze di densità dovute alla variazione di temperatura del fluido in un campo gravitazionale

### Equazione generale

$$\dot{q} = h \cdot (T_s - T_f)$$

$h$  coefficiente convettivo

$T_s$  temperatura superficie

$T_f$  temperatura fluido

$$\text{Ponendo } R_{conv} = \frac{1}{h \cdot A} \quad \text{si ha che } \dot{Q}_{conv} = -\frac{\Delta T}{R_{conv}}$$

### Raggio critico di isolamento

Considerando gusci cilindrici aventi come utimo strato uno strato di isolante soggetto a fenomeni convettivi.

$$R_{tot} = R_{isol} + R_{conv} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi L k} + \frac{1}{2\pi R_e L h}$$

$R_e$  raggio esterno isolante

$R_i$  raggio interno isolante

Si ha che inizialmente  $R_{tot}$  decresce all'aumentare dello spessore di isolante. Si ha  $R_{tot}$  minimo quando  $R_e = R_{critico} = \frac{k}{h}$ .



### Convezione naturale

### Numero di Grashof

$$\text{Gr} = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T D^3}{\mu^2}$$

Può essere interpretato come il rapporto fra le forze di galleggiamento ed il quadrato della risultante delle forze viscosive.

### Moto lungo superficie verticale

$$\begin{aligned} \text{Gr}_L < 10^9 & \quad \text{moto laminare} \\ \text{Gr}_L > 10^9 & \quad \text{moto turbolento} \end{aligned}$$

### Numero di Peclet

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{wD}{a}$$

### Numero di Rayleigh

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta\Delta TD^3}{\alpha\nu}$$

### Alcune correlazioni

Geometria	$D$	Ra	Nu
Piastra			
Vert. altezza $L$	$L$	$10^4\text{--}10^9$ $10^9\text{--}10^{13}$	$0.59 \text{ Ra}^{1/4}$ $0.1 \text{ Ra}^{1/3}$
Oriz. sopra calda	$\frac{A}{p}$	$10^4\text{--}10^7$ $10^7\text{--}10^{11}$	$0.54 \text{ Ra}^{1/4}$ $0.15 \text{ Ra}^{1/3}$
Oriz. sotto calda	$\frac{A}{p}$	$10^5\text{--}10^{11}$	$0.27 \text{ Ra}^{1/4}$
Cilindro			
Vert. alto L, diam D	$L$	Come piast. vert. quando $D \geq \frac{35L}{\text{Gr}^{1/4}}$	
Oriz. diam D	$D$	$10^5\text{--}10^{12}$	$X$

Dove  $p$  è il perimetro della piastra, **tutte le temperature** si

$$\text{riferiscono a } T_{\text{film}} \text{ e } X = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 \text{ Ra}^{\frac{1}{6}}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.559}{\text{Pr}} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2.$$

### Irraggiamento

Un **corpo nero** è un perfetto emettitore di radiazioni poiché emette la massima radiazione ad ogni temperatura e lunghezza d'onda e assorbe tutta la radiazione incidente indipendentemente da direzione e lunghezza d'onda.

$$\text{Potenza radiante del corpo nero} \quad E^n = \sigma_0 T^4 [W/m^2]$$

Dove  $\sigma_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$  è la costante di Stefan-Boltzmann.

### Legge della distribuzione di Planck

Il potere emissivo monocromatico di un corpo nero rispetto la frequenza d'onda  $\lambda$  segue la legge della distribuzione di Planck:

$$E_{\lambda}^n = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}$$

Con  $C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4/\text{m}^2$  e  $C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{mK}$ .

### Legge dello spostamento o di Wien

La legge che regola i picchi del potere emissivo di un corpo nero è la legge di Wien:

$$(\lambda T)_{\text{max pow}} = 2897.8 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

### Emissività

L'emissività è il rapporto tra la radiazione emessa e la radiazione emessa da un corpo nero alla stessa temperatura:

$$\epsilon(T) = \frac{E(T)}{E^n(T)} = \frac{E(T)}{\sigma_0 T^4}$$

Da cui  $E(T) = \epsilon(T)\sigma_0 T^4$ . Per un corpo nero  $\epsilon = 1$ .

### Radiazione incidente

Quando della radiazione colpisce una superficie questa si divide in:

$$\begin{aligned} \text{Assorbita} \quad \alpha &= \frac{I_{\text{assorb}}}{I_{\text{incid}}} \\ \text{Riflessa} \quad \rho &= \frac{I_{\text{riflessa}}}{I_{\text{incid}}} \\ \text{Trasmessa} \quad \tau &= \frac{I_{\text{trasmessa}}}{I_{\text{incid}}} \end{aligned}$$

Vale che  $\alpha + \rho + \tau = 1$ . Un corpo è *opaco* se  $\tau = 0$ , *trasparente* se  $\tau = 1$ , *speculare* se  $\rho = 1$ . Il coefficiente di assorbimento dipende dalla temperatura della sorgente.

La **legge di Kirchhoff** afferma che coefficiente di assorbimento e emissività tendono ad uguagliarsi quando la temperatura dell'emettitore è circa uguale a quella del ricevente (meno di 100 K).

### Fattore di vista

Il fattore di vista tra la superficie  $i$  e la superficie  $j$  si indica  $F_{i \rightarrow j}$  ed è la frazione della radiazione emessa da  $i$  che incide direttamente su  $j$ .

$F_{i \rightarrow j} = 0$   $i$  e  $j$  non sono in vista tra loro.

$F_{i \rightarrow j} = 1$   $j$  circonda completamente  $i$ .

### Regola di reciprocità

$F_{i \rightarrow j} = F_{j \rightarrow i}$  solo se le aree delle superfici sono uguali:

$$A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$$

### Regola della somma

Tutta la radiazione emessa da  $i$  in una cavità deve essere intercettata dalle superfici di  $j$ .

$$\sum_{j=1}^n F_{i \rightarrow j} = 1$$

### Convenzioni adottate

$$\begin{aligned} J_1 & \quad \text{potenza termica areica emessa da 1.} \\ J_{1 \rightarrow 2} & \quad \text{potenza termica areica emessa da 1 intercettata da 2.} \\ \dot{Q}_{1,2} & \quad \text{potenza termica netta scambiata tra 1 e 2.} \end{aligned}$$

$$J_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} J_1$$

$$\dot{Q}_{1,2} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = -\dot{Q}_{2,1}$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A_1 J_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} J_1$$

### Scambio termico tra superfici

#### Superfici nere

$$\begin{aligned} J_1 &= E_1^n = \sigma_0 T_1^4 & J_2 &= E_2^n = \sigma_0 T_2^4 \\ \dot{Q}_{1,2} &= A_1 F_{1 \rightarrow 2} E_1^n - A_2 F_{2 \rightarrow 1} E_2^n & [A_1 F_{1 \rightarrow 2} &= A_2 F_{2 \rightarrow 1}] \\ &= A_1 F_{1 \rightarrow 2} (E_1^n - E_2^n) = A_1 F_{1 \rightarrow 2} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \end{aligned}$$

Resistenza spaziale alla radiazione:  $\frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}}$ .

### Superfici piane parallele, indefinite, nere

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_{1,2} = A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

### Corpo nero in una cavità con superfici nere

Il corpo interno è 1, il corpo attorno è 2.

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_{1,2} = A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

Nota che  $F_{2 \rightarrow 1} \neq 1$  perché parte della radiazione incide sulla cavità essendo concava.

### Bilancio termico superficie grigia opaca

$$J_i = E_i + \rho_i I_i = \epsilon_i E_i^n + (1 - \epsilon_i) I_i$$

Deve  $I_i$  è la radiazione incidente su  $i$ ,  $\rho_i I_i$  è la radiazione riflessa.

La potenza termica netta uscente è  $\dot{Q} = A_i (J_i - I_i)$ .

#### Superfici grigie

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{1,2} = A_1 (J_1 - I_1) = A_1 \left( J_1 - \frac{J_1 - \epsilon_1 E_1^n}{1 - \epsilon_1} \right)$$

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - J_1}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}}$$

Da cui la resistenza superficiale all'irraggiamento è  $\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}$ .

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1,2} &= A_1 F_{1 \rightarrow 2} J_1 - A_2 F_{2 \rightarrow 1} J_2 = A_1 F_{1 \rightarrow 2} (J_1 - J_2) \\ &= \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}}} \end{aligned}$$

Combinando le varie resistenze (ma **non** quelle di tipo conduttivo/convettivo!):

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

### Superfici piane parallele indefinite nera-grigia

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{0 + \frac{1}{A} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A}} = A \epsilon_2 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

### Superfici piane parallele indefinite grigia-grigia

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A} + \frac{1}{A} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A}} = \frac{A \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

### Corpo grigio in una cavità con superfici grigie

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$