

# ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

15 ottobre 2019

**[mancano]:**

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1)
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3)
-

### 3-ESERCITAZIONE

15/10/19

#### Limiti

Vediamo un piccolo riassunto dei concetti fondamentali sui limiti:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{se} \quad \forall B_r(l) \exists B_r(c) : \quad \forall x \in B_r(c) \cup D_f, f(x) \in B_r(l)$$

$$f \sim c \quad \text{per} \quad x \rightarrow c \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{in} \quad B_r(c) \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{per} \quad x \rightarrow c$$

Vediamo alcuni degli asintotici notevoli più diffusi:

per tutti vale che  $x \rightarrow 0$

$$\sin(x) = x + o(x) \sim x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \sim x$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \sim 1 + x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x) \sim 1 + \alpha \cdot x$$

$$\tan(x) = x + o(x) \sim x$$

$$\arcsin(x) = x + o(x) \sim x$$

$$\arctan(x) = x + o(x) \sim x$$

Vediamo ora le proprietà di o-piccolo:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{o(g(x))}{f(x)} = 0$$

$$c \cdot o(g(x)) = o(c \cdot g(x)) = o(g(x))$$

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$$

$$g(x) \cdot o(f(x)) = o(g(x) \cdot f(x))$$

$$o(g(x)) \cdot o(f(x)) = o(g(x) \cdot f(x))$$

$$o(1) = \epsilon(x)$$

Vediamo la gerarchia degli infiniti:

Per  $x \rightarrow \infty$  e  $0 < \alpha < \beta$  e  $1 < a < b$ :

$$(\log_a(x))^\alpha \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x \ll b^n \ll n! \ll n^n$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \sim -\frac{x^2}{2}$$

Da notare che  $o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = o(x^2)$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \ln(x) + \sin(x^2)}{x + x \cdot \ln(x) + 4^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x \cdot \ln(x)} = +\infty$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

tramite la gerarchia degli infiniti otteniamo:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} = \frac{0}{0} =$$

tramite la gerarchia degli infiniti otteniamo:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Un altro modo per risolvere l'esercizio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot (2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} \cdot (x^{\frac{3}{2}} + 1)} = 1$$

**es.** Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = 1^\infty =$$

Si può facilmente usare il limite che definisce il numero  $e$  per svolgere l'esercizio, ma vediamo come risolverlo senza questo limite notevole:

Possiamo usare la seguente uguaglianza:  $x = e^{\ln(x)} = \ln(e^x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} =$$

Ora usiamo  $\ln(1+x) = x + o(x)$  nell'intorno dell'origine e ricordiamoci le proprietà di o-piccolo:  $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$  e  $c \cdot o(f(x)) = o(c \cdot f(x)) = o(f(x))$  con  $c$  una costante

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x(\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3 + o(1)} =$$

dove  $o(1)$  è un infinitesimo, quindi:

$$= e^3$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{0}{0} =$$

risolviamo questo limite con gli o-piccolo

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x))}{x + o(x)} =$$

Da notare come  $o(-x) = o(x)$ .

Perchè abbiamo deciso di usare gli o-piccoli? perchè se cerco di approssimare il limite senza gli o-piccoli

perdo informazioni e non riesco a risolvere il limite e raggiungo la forma di indeterminazione  $\frac{0}{0}$ , con gli o-piccoli invece mantengo informazioni più dettagliate.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = 2$$

**es. es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} + o(x^{\frac{1}{3}})}{2x} = +\infty$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1 - x^2} = \frac{0}{0} =$$

cerchiamo di trasformare l'argomento del logaritmo in forma  $1 + \text{infinitesimo}$ , usiamo un cambio di variabile:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{-y(y + 2)} = \end{aligned}$$

Il denominatore viene da:  $(1 - x^2) = (1 + x) \cdot (1 - x)$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + o(y)}{-y(y + 2)} = -\frac{1}{2}$$

Gli o-piccoli bisogna portarseli dietro fino alla fine, solo allora si decide se servono o se van ignorati, per esempio in questo esercizio solo nell'ultimo passaggio abbiamo deciso di ignorare  $o(y)$  perchè era di un ordine di infinitesimo trascurabile.

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} \cdot \cos(n)}{\sin(\frac{1}{n})} = \frac{0}{0}$$

Trascuriamo per il momento  $\cos(n)$  e valutiamo solo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \sim \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{e^n} \rightarrow 0$$

Riaggiungiamo ora  $\cos(n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} \cdot \cos(n)}{\sin(\frac{1}{n})} = \frac{n}{e^n} \cos(n) = 0$$

**es.** Scrivere lo sviluppo asintotico della seguente successione

$$a_n = (-1)^n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2}{1 - n}\right)$$

Dobbiamo usare la seguente formula:

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

L'argomento dell'arcotangente si comporta così

$$\frac{n^2}{1 - n} < 0 \quad \forall n \geq 2$$

Nell'intorno dell'origine

$$\operatorname{arctg}(x) = x + o(x) \sim x \quad \text{con } f(x) \rightarrow 0 \quad \operatorname{arctg}(f(x)) = f(x) + o(f(x))$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{n^2}{1-n}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-n}{n^2}\right)$$

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

Poichè

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n}$$

posso ignorare  $\frac{1}{n^2}$ :

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

ora usando con  $f(x) \rightarrow 0 \quad \operatorname{arctg}(f(x)) = f(x) + o(f(x))$  ottengo:

$$= (-)^{n+1} \left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

Svolgiamo ora tutti i conti

$$= (-)^{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-)^{n+1} \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n \sim (-)^{n+1} \frac{\pi}{n}$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3} = \frac{0}{0} =$$

Per il teorema di Ruffini  $P(3) = 0 \iff P(x)/(x-3)$  ( $P(x)$  significa polinomio di  $x$ ...)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot (x+1) = 0$$

Abbiamo risolto il limite senza sviluppi particolari. Ma ora vogliamo sapere il comportamento del limite in un intorno di 3:

$$4(x-3) \sim f(x)$$

quindi in un intorno di 3 il comportamento asintotico è approssimabile a quello della retta  $4(x-3)$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{2}{n}} = \infty^0 =$$

Risolviamo passando all'esponenziale

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(n^{\frac{2}{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n} \cdot \ln(n)} =$$

a questo punto non dobbiamo approssimare con gli asintotici il logaritmo perchè  $n \rightarrow \infty$ , invece usiamo la gerarchia degli infiniti:

$$= e^0 = 1$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right) =$$

usiamo  $(1 + f(x))^\alpha = 1 + \alpha f(x) + o(f(x)) \sim 1 + \alpha f(x)$  con  $f(x)$  funzione infinitesima

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)} = 1$$

perchè sappiamo  $\ln(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 1$  e che  $\sin(x) \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ , quindi  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$

Un altro modo di vedere la soluzione è il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + o(\ln(x))}{\ln(x)} = 1$$

che usa il principio che  $\sin(x) \sim x$  per  $x \rightarrow 0$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+3) - \sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = \frac{0}{0} =$$

usiamo le formule di addizione del seno

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(3) + \cos(x)\sin(3) - \sin(3)}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(3)}{x \cdot \cos(x)} + \frac{\cos(x)\sin(3) - \sin(3)}{x \cdot \cos(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos(3)}{\cos(x)} + \frac{\sin(3)}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x} \right) = \end{aligned}$$

Vediamo che  $\frac{\cos(x)-1}{x} \rightarrow 0$ , poi  $\frac{\sin(3)}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x} \rightarrow 0$ , poi  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$

$$= \cos(3)$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \frac{0}{0}$$

Facciamo un cambio di variabile

$$\begin{aligned} y &= x - \pi \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin(y)}{y} = -1 \end{aligned}$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} = \infty \cdot 0 =$$

in un intorno dell'origine  $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x} = \\ &= \begin{cases} \text{per } x \rightarrow 0^+ & \frac{1}{2} \\ \text{per } x \rightarrow 0^- & -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

quindi il limite non esiste.

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} =$$

Facciamo un cambio variabile per avere un logaritmo più comodo

$$y = x - e$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + e) - 1}{y} =$$

Sappiamo che  $\ln(1 + \epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$ , per cui raccogliamo nel logaritmo per avere questa forma:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln[e(1 + \frac{y}{e})] - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1 + \frac{y}{e}) - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{y}{e})}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{e} + o(y)}{y} = \frac{1}{e}$$