

ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

7 ottobre 2019

Indice

30/09/19 - LEZIONE

Formula di Newton [mancano primi 20 minuti]

es. trovare il coefficiente di b^7 nell'espressione $(a^3b^2 - b)^5$

$$(a^3b^2 - b)^5 = b^5(a^3b - 1)^5$$

il coefficiente di b^7 è uguale a quello di b^2 in $(a^3b - 1)^5$

$$(a^3b^2 - b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} [a^3b]^k (-1)^{5-k}$$

per ottenere il coefficiente di b^2 devo prendere $k = 2$

$$\binom{5}{2} (a^3)^2 b^2 (-1)^{5-2} \\ - \binom{5}{2} a^6 b^2$$

il coefficiente cercato è $-\binom{5}{2} = -\frac{5!}{2!3!} = 10$.

es. dimostrare che la seguente uguaglianza vale

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k = 3^n$$

è possibile dimostrare questa formula per induzione, ma in realtà è molto più semplice usare direttamente la formula di Newton $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. Infatti se poniamo $a = 2$ e $b = 1$ otteniamo esattamente l'equazione della consegna.

es dimostrare che la seguente uguaglianza vale

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1$$

Calcolo combinatorio

dim. dimostrazione combinatoria della formula di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

n.b. $\binom{n}{k} = P_{k,n-k}^*$ dove $P_{k,n-k}^*$ rappresenta il numero delle permutazioni con ripetizione di n oggetti k di un tipo e $n-k$ dell'altro.

$(a+b)^n = (a+b)_1(a+b)_2 \dots (a+b)_n$. Nello svolgere questi prodotti avrò scelto k volte a e $n-k$ volte b per ottenere $a^k b^{n-k}$. E' come avere n caselle di cui le prime k occupate da a e le restanti $n-k$ occupate da b :

$$[a_1]_1[a_2]_2 \dots [a_k]_k[b_1]_{k+1}[b_2]_{k+2} \dots [b_{n-k}]_n$$

Ma una configurazione così può presentarsi $P_{k,n-k}^*$ (cioè $\binom{n}{k}$) volte.

def. dato un insieme X di n oggetti distinti, chiamo combinazioni semplici (senza ripetizioni) di classe K un qualsiasi sottoinsieme (il cui ordine non importa) di k oggetti estratti da X .

$C_{n,k}$ è il simbolo che rappresenta il numero di combinazioni semplici di k oggetti estratti senza ordine.

teor. $C_{n,k} = \binom{n}{k}$

dim. Immaginiamo di dover inserire elementi in delle caselle per ottenere uno specifico allineamento. abbiamo k caselle e n elementi. Nella prima casella posso scegliere fra n elementi da inserire, nella seconda potrò scegliere fra $n-1$ elementi e così via.

$$n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Ma questo modo di ragionare rappresenta un allineamento con questo ordine, noi non vogliamo considerare l'ordine. Allora dividiamo il risultato trovato prima per le $k!$ permutazioni possibili.

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n.b. $n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cardinalità di un insieme

E' lo studio del numero di oggetti appartenenti a un certo insieme. dato un insieme X di n oggetti, qual è la cardinalità dell'insieme delle parti di X ? L'insieme delle parti è l'insieme di tutti i sottoinsiemi ed è rappresentato dalla lettera $\mathcal{P}(X)$

teor. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X di cardinalità n ha cardinalità 2^n

dim. X ha certamente come sottoinsiemi quelli banali, cioè \emptyset e X stesso.

Quanti sottoinsiemi di 1 elemento ha X ? n (riscrivibile come $C_{n,1}$)

Quanti sottoinsiemi di 2 elementi ha X ? $C_{n,2}$

...

Quanti sottoinsiemi di $n-1$ elementi ha X ? $C_{n,n-1}$

Dal teorema precedentemente visto sappiamo che $C_{n,x} = \binom{n}{x}$

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-1} + 1,$$

dove il primo 1 rappresenta l'insieme vuoto e l'ultimo 1 rappresenta X stesso.

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n$$

(l'ultimo passaggio è stato ottenuto tramite l'utilizzo della formula di Newton)

cons. L'insieme delle parti di un insieme finito(!) ha cardinalità sempre maggiore dell'insieme stesso.

Teologia in \mathbb{R}

def. definizione fondamentale: Intorno di un punto x_0

in \mathbb{R} : IMMAGINE

in \mathbb{R}^2 : IMMAGINE

$B_r(x_0)$ è il simbolo che viene rappresentato l'intorno di raggio r del punto x_0 .

$B_r(x_0)$ è l'insieme dei punti con distanza inferiore ($<$) di r dal centro x_0 , i punti sul bordo/confine dell'intorno non appartengono all'intorno.

definizioni formali:

in \mathbb{R} :

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

in \mathbb{R}^2 :

$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, p_0) < r\}$$

dove $\text{dist}(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

n.b. in \mathbb{R} una qualunque semiretta è detta "intorno di $\pm\infty$ ". in \mathbb{R}^2 , invece, non si parla di "intorno di $\pm\infty$ ".

def. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ oppure \mathbb{R}^2 , x^* è un punto interno ad A se (non solo se $\subset A$, ma anche se è circondato solo da punti di A):

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A$$

ovviamente se x^* è un punto interno allora $x^* \in A$

n.b. questa definizione non si occupa di definire l'operatore " \in ", ma definisce il termine "interno".

def. x^* è un punto esterno ad A (non solo se non è in A ($\notin A$), ma anche se è circondato solo da punti di A):

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A^c$$

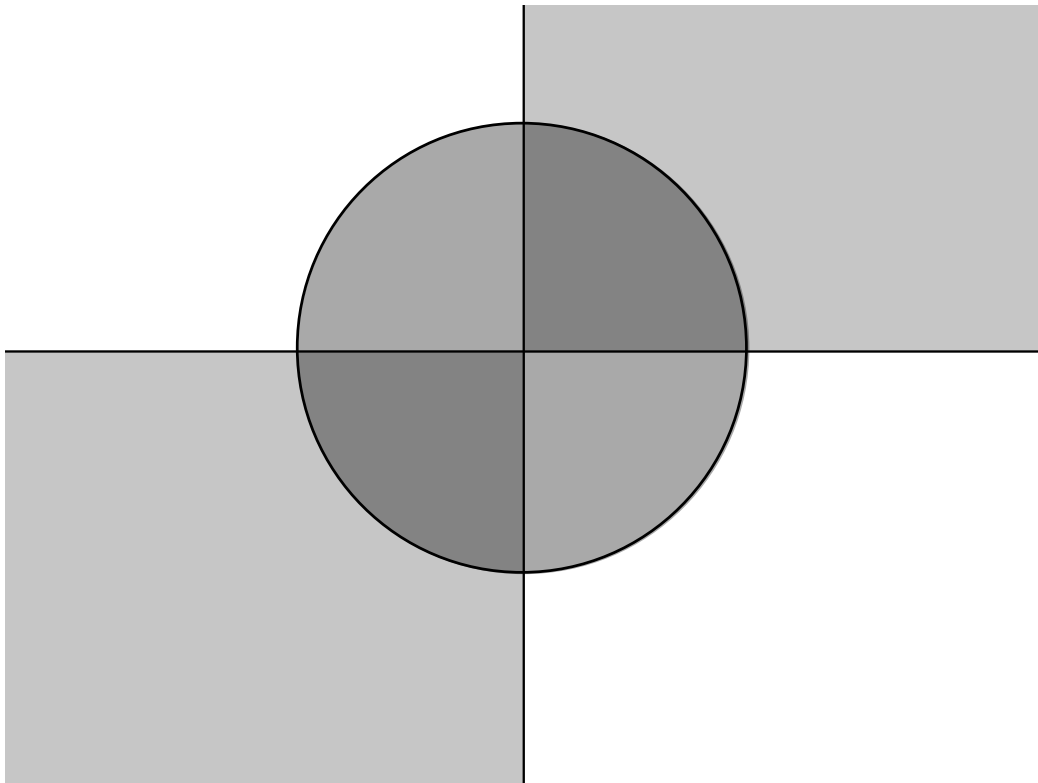
ovviamente se x^* è un punto esterno allora $x^* \in A^c$ ovvero $x^* \notin A$

def. x^* è un punto di frontiera (se non è né interno né esterno):

$$\forall B_r(x^*), B_r(x^*) \cap A \neq \emptyset \wedge B_r(x^*) \cap A^c \neq \emptyset$$

es.

$$a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge xy > 0\}$$



def. Dato un insieme A (in \mathbb{R} o in \mathbb{R}^2)

- è aperto se è fatto solo da punti interni;
- è chiuso se il suo complementare è aperto oppure se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

es. l'insieme "aperto" in \mathbb{R}

$$A = (a, b)$$

IMMAGINE

I punti a e b sono di frontiera...

es. ...se, però, cambiamo ambiente e andiamo in \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, y = 0\}$$

IMMAGINE

non è aperto, è costituito solo da punti di frontiera, ma non li contiene tutti, quindi non è neanche chiuso.

01/10/19 - ESERCITAZIONE

Numeri complessi

es. risolvere

$$|z|^2 - 2z = 0$$

Due soluzioni possibili. La prima:

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

La seconda:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$|z| = \rho$$

$$\rho^2 - 2\rho e^{i\theta} = 0$$

raccogliamo ρ

$$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rho - 2e^{i\theta} = 0$$

$$\rho = 2e^{i\theta}$$

ρ è il modulo

$$\rho e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$$

$$\theta = 0 \wedge \rho = 2$$

es. determina z_1 e z_2 tali che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) = 2$

$$z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 - 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

ora verifica che $\bar{z}_1 = z_2$

$$\bar{z}_1 = -1 + 2i$$

$$-z_2 = -1 + 2i$$

es.

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) + 1 = 0\}$$

(IMMAGINE di A e di B)

$$C = \{v \in \mathbb{C} : v = z - 3 + i, z \in A \cap B\}$$

il termine $v = z - 3 + i$ rappresenta un traslazione di $(-3, 1)$ da applicare all'insieme che è l'intersezione di A e B :

$$z = x + iy$$

$$z = -3 + i = x + iy - 3 + i$$

$$v = (x - 3) + i(1 + y)$$

es. trovare le soluzioni di

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{i}z = 0$$

Non si può applicare il teorema fondamentale dell'algebra per via della presenza di \bar{z} .

Iniziamo togliendo i dal denominatore

$$-\frac{2i}{i} = -\frac{2i}{1} = -2i$$

$$z^2 - z\bar{z} + 2iz = 0$$

$$z(z - \bar{z} + 2i) = 0$$

prima soluzione è $z = 0$

Ora poniamo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$

$$2iy + 2i = 0$$

$$2i(y + 1) = 0$$

Da cui ricaviamo $y = -1$

Definire l'insieme B (A rappresenta le soluzioni del punto precedente):

$$B = \{w \in (C) : w = z + 3i, z \in A\}$$

Notiamo che $w = z + 3i$ rappresenta una traslazione verso l'alto. Quindi il punto $(0, 0)$ diventa $(0, 3i)$, invece la retta $y = -1$, cioè $Im(z) = -1$, diventa la retta $Im(w) = 2$.

es.

$$i^{255} z^3 = \bar{z}$$

Per risolvere i^{225} si può notare che gli esponenti di i seguono un pattern: $i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$. Inoltre da ricordarsi che i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$
IMMAGINE

$$i^{225} = i^{224+1} = i^{224} i^1 = 1i = i$$

$$iz^3 = \bar{z}$$

Ora risolviamo questa equazione usando la forma esponenziale dei numeri complessi: $z = \rho e^{i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho(\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-i\theta})$$

Che da origine a due soluzioni. La prima:

$$\rho = 0$$

Accettata perchè ρ è un numero reale positivo. La seconda:

$$\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{-i\theta}$$

Modulo:

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = \pm 1$$

Ma essendo ρ un numero reale positivo rifiutiamo -1 come soluzione. Quindi $\rho = 1$.

Argomento:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi$$

$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

per $k = 0, \dots, 3$.

es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}|\operatorname{Im}(z)|\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : iw^2 \in A\}$$

partendo dal fatto che $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} : x = \sqrt{3}|y|\}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & y \geq 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_z e^{i\frac{\pi}{6}} & y \geq 0 \\ \rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}} & y < 0 \end{cases}$$

$$w = \rho_w e^{i\theta_w}$$

$$iw^2 = z$$

moltiplico per $-i$

$$w^2 = -iz$$

Per A^+ :

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{i\frac{\pi}{6}})$$

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = \rho_z e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$

$$\arg(w) = 2\theta_w = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \theta_w = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k = 0, 1$.

Per A^- :

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \rho_z e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$

$$\theta_w = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$$

Permutazioni con e senza ripetizioni

Definiamo il fattoriale di un numero $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1) \dots 2 \cdot 1 & n \geq 1 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è tipicamente usato per calcolare il numero di possibili permutazioni. Per esempio il numero di possibili permutazioni (anagrammi) di una parola si ottiene con il fattoriale del numero di lettere.

es. ROMA $\rightarrow 4!$

es. FARFALLA $\rightarrow 8!$, ma se per esempio volessimo eliminare la possibilità di permutare lettere identiche, dovremmo togliere a $8!$ le possibili permutazioni delle F ($2!$), delle A ($3!$), e delle L ($2!$) e quindi otterremmo:

$$\frac{8!}{2!2!3!}$$

es. In quante configurazioni diverse si possono porre 9 persone in fila indiana? $9!$

es. Se le 9 persone dell'esercizio fossero 5 maschi e 4 femmine e noi volessimo avere sempre per prima i tutti i maschi e poi tutte le femmine? $5!4!$

Esercizi sui Fattoriali

es. TDE. 3 uomini e 3 donne devono sedersi alternati a un tavolo rotondo, quante sono le diverse possibili configurazioni?

Per risolvere questo esercizio ragioniamo a "coppie" di persone (uomo-donna) che possiamo creare: $3!$.

Queste $3!$ coppie possibili possono essere disposte sul tavolo in $3!$ modi diversi.

Il numero fino ad ora ottenuto va moltiplicato per due perchè abbiamo solo lavorato con le coppie uomo-donna, ma possiamo rifare lo stesso ragionamento anche per le coppie donna-uomo.

Ultimo fattore da considerare è il fatto che il tavolo sia rotondo, infatti le permutazioni possibili di elementi su un tavolo rotondo non sono $n!$ ma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Questo accade perchè se avessimo un fila indiana da riempire con gli elementi A,B e C otterremmo tre possibili configurazioni: ABC, CAB, BCA. Ma se disposte su un tavolo rotondo queste tre disposizioni sono esattamente la stessa disposizione.

Risposta:

$$\frac{3!2!2!}{6}$$

(6 sono i posti a tavola)

es. TDE

Possibili anagrammi di ESAME?

$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

es. TDE

Con 14 partite di una schedina di calcio con 3 pareggi e 2 vittorie in casa, quante possibilità di compilare la schedina ci sono?

$$\frac{14!}{9!2!3!}$$

es. TDE

Quante password di 6 cifre e composte solo dai caratteri "0" "1" "2" esistono?

$$3^6$$

Coefficienti binomiali

def. Coefficiente binomiale con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vediamo alcuni coefficienti binomiali notevoli:

caso $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = 1$$

caso $k = n$:

$$\binom{n}{n} = 1$$

caso k piccolo, comodo perchè risolve il binomiale trasformandolo in una frazione con k fattori sopra e sotto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

dim.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!}$$

caso n e k sono numeri molto simili, comodo perchè riconduce il binomiale alla formula precedente

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dim.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

def. potenza del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

es. coefficiente di x^7y^3 nello sviluppo di $(2x-y)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^k (-y)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} 2^k (-1)^{10-k} x^k y^{10-k}$$

per x^7y^3 devo prendere $k=7$:

$$\binom{10}{7} 2^7 (-1)^3 = \dots = -30 \cdot 2^9$$

es. TDE. Coefficiente di a^5b^7 nello sviluppo di $(2\sqrt{ab} + 3ab)^7$

Si potrebbe applicare direttamente Newton, ma per semplificare i calcoli sarebbe meglio prima raccogliere ab

$$a^{\frac{7}{2}}b^7(2+3a^{\frac{1}{2}})^7 = a^{\frac{7}{2}}b^7 \left[\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^k (3a^{\frac{1}{2}})^{7-k} \right]$$

l'intera sommatoria è moltiplicata per b^7 e $a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{7}{2}-\frac{k}{2}}$, quindi per ottenere b^7a^5 devo prendere $k = 4$.

$$k = 4 \rightarrow \binom{7}{4} 2^4 (3)^3 = \dots$$

es. risolvere la seguente equazione

$$2 \binom{x-1}{1} + 3 \binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$$

per $x-1 \geq 1$, per $x+1 \geq 3$ e $x \geq 2$, quindi solo $x \geq 2$

$$2 \frac{(x-1)!}{(x-2)!} + 3 \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - \frac{x!}{2!(x-2)!} = 0$$

$$2(x-1) \frac{(x-2)!}{(x-2)!} + 3 \frac{x+1}{6} - \frac{x(x-1)}{2} = 0$$

$$(x-1)(2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = 0$$

$x-1=0$ non si accetta.

$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$ è impossibile.

non ci sono soluzioni.

Topologia in \mathbb{R}

def.

Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **maggiorante** di A se $k \geq x, \forall x \in A$.

Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **minorante** di A se $k \leq x, \forall x \in A$.

Un insieme è **limitato superiormente** se ne esiste almeno un maggiorante.

Un insieme è **limitato inferiormente** se ne esiste almeno un minorante.

L'**estremo inferiore** $\inf(A)$ è il massimo dei minoranti (non deve per forza appartenere ad A).

L'**estremo superiore** $\sup(A)$ è il minimo dei maggioranti (non deve per forza appartenere ad A).

Il **minimo** $\min(A)$ è uguale all' $\inf(A)$ se esso appartiene ad A . Notare che se esiste il $\min(A)$ esso è anche l' $\inf(A)$, ma non vale il viceversa.

es. consideriamo l'insieme $A = (0, 1]$.

-1 è un minorante, pure -2 , etc. L'insieme dei minoranti di A è: $(-\infty, 0]$, il più grande è lo 0 , che quindi è l' $\inf(A)$, ma non è il $\min(A)$, perchè non

appartiene ad A .

Se invece l'insieme fosse stato $A = [0, 1]$, l'insieme dei minoranti sarebbe ancora $(-\infty, 0]$, $\inf(A)$ sarebbe ancora 0, ma in questo caso sarebbe anche il $\min(A)$.

L'insieme dei maggioranti è invece $[1, +\infty]$, $\sup(A) = 1$, $\max(A) = 1$.

def. Un punto è detto di **accumulazione** se:

- qualunque intorno di quel punto contiene almeno un punto di A
- ogni intorno di x_0 contiene un punto in A diverso da x_0

def. un punto è detto di **frontiera** se:

- in ogni intorno cadono punti di A e di A^c

def. un punto è detto **isolato** se:

- per qualunque intorno non ci sono altri punti di A

es.

$$A = \{-2\} \cup (1, 3]$$

-2 è di frontiera e isolato, 1 e 3 sono di frontiera.

def. un insieme è detto **interno** se:

- esiste almeno un intorno con solo punti di A

def. un insieme è detto **aperto** se:

- tutti i punti di A sono punti interni

def. un insieme è detto **chiuso** se:

- tutti i punti di A sono punti di accumulazione

es.

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \in [1, 5]\}$$

che equivale all'insieme

$$\{-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{5}\} \cap \mathbb{Q}$$

maggioranti: $(\sqrt{5}, +\infty)$

$\sup(B) = \sqrt{5}$, ma non esiste perchè siamo in \mathbb{Q}

$\inf(B) = \dots$

$\max(B) = \text{non esiste}$

$\min(B) = \dots$