12/03/2020

Sistemi dinamici LTI (SISO)

f e g lineari in x e in u

ma c'è dipendenza esplicita da t (TC) o k (TD)

TC)
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) \cdots + a_{1n} x_n(t) + b_1 u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1} x_1(t) \cdots + a_{nn} x_n(t) + b_n u(t) \\ y(t) = c_1 x_1(t) \cdots + c_n x_n(t) + d u(t) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$c = [c_1 \cdots c_n]$$

(A, b, c, d) descr. "di stato"

TD) È del tutto analogo

$$\begin{cases} x(\overset{k+1}{k}) = A\,x(\overset{k}{k-1}) + b\,u(\overset{k}{k-1}) \\ y(\underset{k+1}{k}) = c\,x(\underset{k+1}{k}) + d\,u(\underset{k+1}{k}) \end{cases}$$

COSA IMPORTANTE

2 val. succ. di k

1 solo valore di k

$$\begin{cases} x(k+96) = A\,x(k+95) + b\,u(k+95) \\ y(k-16) = c\,x(k-16) + d\,u(k-16) \end{cases}$$

è corretto

EQUILIBRIO

Con $u\binom{t}{k} = \bar{u}$ costante, $\exists$ qualche $\bar{x}$ costante/i tale che

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \bar{x} \\ u\binom{t}{k} = \bar{u} \quad \text{per } \underset{k}{t} \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow x\binom{t}{k} = \bar{x} \quad \text{per } \underset{k}{t} \geq 0 \,?$$

Se ne esistono, gli $\bar{x}$ si dicono stati di equilibrio per $u = \bar{u}$

TC) Se x deve rimanere costante, $\dot{x}=0$

quindi in generale con $\dot{x}=f(x,u)$

NOTO $\bar{u}$

gli eventuali $\bar{x}$ sono le soluzioni di $f(\bar{x},\bar{u})=0$

TD) x costante $\Rightarrow x(k+1)=x(k) \quad \forall K$

Quí ci in tal caso dovrò risolvere per $\bar{x}$

l'eq. $f(\bar{x},\bar{u})=\bar{x}$

Caso TC LTI

$$0 = A\bar{x} + b\bar{u}$$

Se A non è singolare

$$\exists!\ \bar{x} = -A^{-1} b\bar{u}$$

altrimenti
- o $\nexists\ \bar{x}$
- o $\exists\ \infty\ \bar{x}$

Uscita di equilibrio

Se $\exists\ \bar{x}$ per $u = \bar{u}$

in generale $\exists\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$

NB nel caso NL $g(\bar{x}, \bar{u})$ potrebbe anche non avere significato

Invece nel caso lineare (TC e TD)

se $\exists\ \bar{x}$ $\quad \exists$ sempre $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$

ES 1: massa/molle

$$m\ddot{y} = F - ky - h\dot{y}$$

$F \to u$

x_1 pos x_2 vel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{b} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$d = 0$

pongo $u = \bar u$: $\exists\, \bar x$?

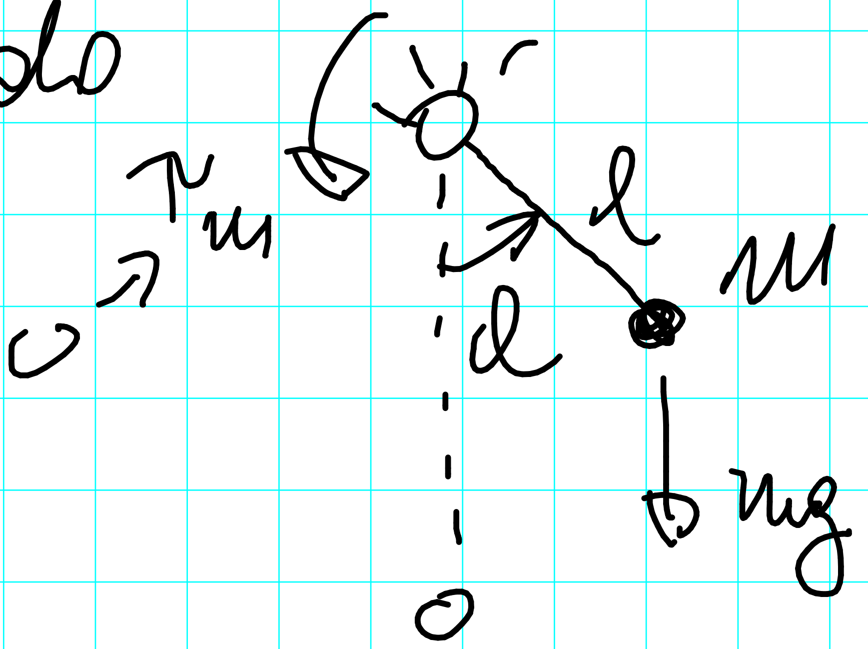
$\dot x_1 = 0 \Rightarrow \bar x_2 = 0$ ovvio, vel. nulla all'ep.

$$\dot x_2 = 0 \qquad -\frac{k}{m}\bar x_1 - \cancel{\frac{h}{m}\bar x_2} + \frac{1}{m}\bar u = 0$$

$$\Rightarrow \bar x_1 = \frac{\bar u}{k}$$

potrei anche calcolare $\bar x = -A^{-1} b \bar u$ . . .

ES 2: pendolo



$$x_1 = \theta \qquad x_2 = \dot{\theta} \qquad \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l} \sin x_1 - \dfrac{k}{ml^2} x_2 + \dfrac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Pongo $u = \bar{u}$: $\exists\, \bar{x}$?

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0$ ovvio, vel. angolare nulla all'eq.

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{g}{l}\sin \bar{x}_1 + \frac{1}{ml^2}\bar{u}$$

Risultato

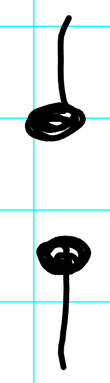
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin\left(\dfrac{\bar{u}}{mgl}\right) \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

① se $|\bar{u}| > mgl$

$\nexists$ ep. $\Rightarrow$ GIRA

② $\bar{u} = 0$

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$



Equilibrio nel caso LTI TD

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$$

$$(I - A)\bar{x} = b\bar{u}$$

Se $I - A$ non è singolare

cioè se A non ha autovalori in 1

allora $\exists!\ \bar{x} = (I-A)^{-1} b\bar{u}$

altrimenti o $\nexists\ \bar{x}$ o $\exists\ \infty\ \bar{x}$

MOVIMENTO

$$\left.\begin{matrix} x(0) \\ u\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \rightarrow x\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \quad y\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix}$$

per $\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \geq 0$

MOVIMENTI
di stato
e uscita

pensiamo al caso TI, quindi l'origine dei tempi si può scegliere a piacere

Caso LTI a TD

$$\begin{cases} x(k) = A x(k-1) + b u(k-1) \\ y(k) = c x(k) + d u(k) \end{cases}$$

Dati $x(0)$ e $u(k)$ $k \geq 0$

Movimento di x: $x(0)$ dato

$$x(1) = A x(0) + b u(0)$$
$$x(2) = A x(1) + b u(1) = A^2 x(0) + A b u(0) + b u(1)$$
$$x(3) = A^3 x(0) + A^2 b u(0) + A b u(1) + b u(2)$$
$$\dots$$

$$\Rightarrow x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{\text{MOVIMENTO LIBERO (ML) dello stato}} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} b u(\ell)}_{\text{MOVIMENTO FORZATO (MF) dello stato}}$$

FORMULA DI LAGRANGE a TD per lo stato

Il mov. di x è la SOMMA di ML e MF

ML dipende linearmente da $x(0)$ e non da $u(k)$

MF " " " $u(k)$ " " " $x(0)$

Vale cioè il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE)

Movimento dell'uscita (F. di Lagrange)

$$y(k) = c\,x(k) + d\,u(k)$$

$$= \underbrace{c\,A^{k}x(0)}_{\text{ML di } y} + \underbrace{c\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1}\,b\,u(l) + d\,u(k)}_{\text{MF di } y}$$

Formule di Lagrange a TC

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\,u(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{c\,e^{At}x(0)}_{\text{TL}} + \underbrace{c\int_0^t e^{A(t-\tau)} b\,u(\tau)\,d\tau + d\,u(t)}_{\text{TF}}$$

ES1 Movimento a TC

$\dot{x} = -2x$ solo ML dello stato

$x(0) = 4$

$x(t) \quad t \geq 0$?

$$x(t) = e^{At} x(0) = e^{-2t} 4$$

NB per sistemi di ordine > 1

occorre calcolare e^{At}

Vediamo come nel caso in cui A
sia diagonalizzabile
(se no useremo un altro metodo)

<u>DEF</u>

$M \quad n \times n$

$$e^{M} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

Se M è diagonalizzabile

$\exists\, T^{-1}$ tale che $T^{-1} M T = \mathrm{diag}\{\lambda_i\} = D$

λ_i autovalori di M

$$\Rightarrow M = T D T^{-1}$$

$$e^M = \underbrace{TT^{-1}}_{I} + \underbrace{TDT^{-1}}_{M} + \frac{TD\cancel{T^{-1}}\cancel{T}DT^{-1}}{2!} + \frac{TD\cancel{T^{-1}}\cancel{T}D\cancel{T^{-1}}\cancel{T}DT^{-1}}{3!} + \cdots$$

$$= T\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots\right)T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

Ma

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Quindi (con A diagonalizzabile)

$$e^{At} = e^{T D_A T^{-1} t} \qquad \text{con } D_A = T^{-1} A T \text{ diagonale}$$

$$= T\left(It + D_A t + \frac{(D_A t)^2}{2!} \dots\right) T^{-1}$$

$$= T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1} \qquad \lambda_i \text{ autovalori di } A$$

I termini $e^{\lambda_i t}$ si chiamano MODI del sistema

$\boxed{\text{ES}}$

$$\dot{x} = A x \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x(t)$ $t \geq 0$?

$\Rightarrow$ home work

(qui uso Maxima)