ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

22 novembre 2019

[mancano]:

lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019;
primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1);
tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3);
manca la lezione di giovedì 17/10/19 (LECTURE 5);

0-LEZIONE

[manca]

1-LEZIONE

30/09/19

Formula di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dim. dimostrazione per induzione:
[manca] . . .

es. Trovare il coefficiente di b^7 nell espressione $(a^3b^2 - b)^5$.

$$(a^3b^2 - b)^5 = b^5(a^3b - 1)^5$$

il coefficiente di b^7 e uguale a quello di b^2 in $(a^3b - 1)^5$

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} [a^3b]^k (-1)^5 - k$$

per ottenere il coefficiente di b^2 devo porre $k = 2$, quindi ottengo:

$$\binom{5}{2} (a^3)^2 b^2 (-1)^{5-2} = -\binom{5}{2} a^6 b^2$$

il coefficiente cercato è $-\binom{5}{2} = -\frac{5!}{2!3!} = 10$.

es. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k = 3^n.$$

E' possibile dimostrare questa uguaglianza per induzione, ma in realtà è molto più semplice usare direttamente la formula di Newton $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. Infatti se poniamo $a = 2$ e $b = 1$ otteniamo esattamente l'equazione della consegna.

es. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1.$$

Per dimostrare questa uguaglianza usiamo ancora una volta la formmula di Newton con $a = -2$ e $b = 1$ e, invece di n, usiamo $2n$.

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k b^{2n-k} = (a+b)^{2n}.$$

Calcolo combinatorio

dim. Dimostrazione combinatoria della **formula di Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Utiliziamo il termine $P^*_{k,n-k} = \binom{n}{k}$ per rappresentare il numero delle permutazioni con ripetizione di n oggetti k di un tipo e $n-k$ dell'altro.
Partiamo dalla definizione di esponenziale $(a+b)^n = (a+b)_1(a+b)_2 \dots (a+b)_n$. Nello svolgere questi prodotti avrò scelto k volte a e $n-k$ volte b per ottenere $a^k b^{n-k}$. E' come avere n caselle di cui le prime k occupate da a e le restanti $n-k$ occupate da b:

$$[a_1]_1 [a_2]_2 \dots [a_k]_k [b_1]_{k+1} [b_2]_{k+2} \dots [b_{n-k}]_n$$

Ma una configurazione così può presentarsi $P^*_{k,n-k}$ (cioè $\binom{n}{k}$) volte.
Da qui quindi arriviamo alla forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

def. dato un insieme X di n oggetti distinti, chiamo **combinazioni semplici (senza ripetioni) di classe** K un qualsiasi sottoinsieme (il cui ordine non importa) di k oggetti estratti da X.
$C_{n,k}$ è il simbolo che rappresenta il numero di combinazioni semplici di k oggetti estratti senza ordine.

teor.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

dim. Immaginiamo di dover inserire elementi in delle caselle per ottenere uno specifico allineamento. abbiamo k caselle e n elementi. Nella prima casella posso scegliere fra n elementi da inserire, nella seconda potrò scegliere fra $n-1$, poi fra $n-2$ elementi e così via.

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Seguendo questo ragionamento abbiamo disposto in maniera **ordinata** gli elementi lungo un allineamento. Se non si vuole considerare l'ordine, dobbiamo dividere il risultato trovato per le $k!$ permutazioni possibili:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n.b. $\quad n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cardinalità di un insieme

E' lo studio del numero di oggetti appartenenti a un certo insieme.
Dato un insieme X di n oggetti, qual è la cardinalità dell'insieme delle parti di X? L'insieme delle parti è l'insime di tutti i sottoinsiemi ed è rappresentato dalla lettera $\mathcal{P}(X)$

teor. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X di cardinalità n ha cardinalità 2^n.
dim. X ha certamente come sottoinsiemi quelli banali, cioè $\emptyset$ e X stesso.
Quanti sottoinsiemi di 1 elemento ha X? n (riscrivibile come $C_{n,1}$, cioè come combinazione semplice senza ripetizioni di classe 1)
Quanti sottoinsiemi di 2 elemento ha X? $C_{n,2}$
...
Quanti sottoinsiemi di n-1 elemento ha X? $C_{n,n-1}$
Dal teorema precedentemente visto sappiamo che $C_{n,x} = \binom{n}{x}$, quindi:

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-1} + 1 \quad = \quad 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + + \binom{n}{n-1} + 1$$

dove il primo 1 rappresenta $/O$ e l'ultimo 1 rappresetna X stesso.
Ora questa espressione può essere raccolta in una sommatoria e tramite la formula di Newton possiamo scrivere:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

oss. L'**insieme delle parti** di un insieme **finito** ha cardinalità sempre **maggiore** dell insieme stesso.

Topologia in $\mathbb{R}$

Intorno

def. concetto fondamentale è quello di **intorno** di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ o $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
in $\mathbb{R}$: IMMAGINE
in $\mathbb{R}^2$: IMMAGINE
$B_r(x_0)$ è il simbolo che rappresenta l'intorno di raggio r del punto x_0.
$B_r(x_0)$ è l'insieme dei punti con distanza inferiore ($<$) di r dal centro x_0. Da notare è il fatto che i punti sul bordo/confine dell'intorno non appartengono all'intorno.
Vediamo ora una definizione formale:

- in $\mathbb{R}$:
$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$
- in $\mathbb{R}^2$:
$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : dist(p, p_0) < r\}$$
dove $dist(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

oss. in $\mathbb{R}$ una qualunque semiretta è detta "intorno di $\pm\infty$". in $\mathbb{R}^2$, invece, non si parla di "intorno di $\pm\infty$".

Punti interni, esterni e di frontiera

def. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^2$, x^* è un punto **interno** ad A se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A$$

oss. Ovviamente se x^* è un punto interno allora $x^* \subset A$, ma per essere un punto interno non deve solo essere $\subset$ in A, ma anche se è circondato solo da punti di A).
oss. questa definizione non si occupa di definire l'operatore "$\in$", ma definise il concetto di punto "interno".

def. x^* è un punto **esterno** ad A se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A^c$$

oss. Ovviamente se x^* è un punto esterno allora $x^* \in A^c$ ovvero $x^* \notin A$, ma per essere un punto esterno ad A non deve $\in$ ad A^c e, inoltre, deve essere circondato solo da punti di A^c

def. x^* è un punto di **frontiera** se

$$\forall B_r(x^*),\ (B_r(x^*) \cap a) \neq \emptyset \quad \wedge \quad (B_r(x^*) \cap A^c) \neq \emptyset$$

oss. Un punto è di frontiera se non é nè interno nè esterno.

Insiemi aperti e chiusi

def. Dato un insieme A (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^2$)

- si dice **aperto** se è fatto solo da punti interni;
- si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto oppure se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

es. l'insieme in $\mathbb{R}$
$$A = (a, b)$$
è un insieme aperto e i punti a e b sono di frontiera.
es. se, però, cambiamo l'ambiente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ otteniamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a < x < b, \ \ y = 0\}$$

che non è aperto in quanto è costituito solo da punti di frontiera, ma non li contiene tutti, quindi non è neanche chiuso.
IMMAGINE

2-LEZIONE

07/10/19

Topologia in $\mathbb{R}$

Punti isolati e di accumulazione

def. Un punto $x_0 \in A$ si dice **isolato** per A se

$$\exists B_r(x_0) \quad : \quad B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$$

img1

es. Prendiamo l'insieme

$$A = x \in \mathbb{R} \ : \ x = n \in \mathbb{N}$$

img2
Notiamo che A è fatto di soli punti isolati.

def. Un punto x_0 è un punto di **accumulazione** per A se

$$\forall B_r(x_0) \exists x \in A \ e \ x \neq x_0$$

cioè se esiste una successione di punti di A che raggiunge x_0.
img3
il disegno mostra come ci sia un percorso che raggiunge x_0.
oss. Da notare è il fatto che il punto può $\in A$ come può $\in A^c$.
oss. tutti i punti interni ad un insieme sono di accumulazione.
oss. i punti di frontiera sono di accumulazione purchè non siano isolati

es.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x \ : \ -4 < x \leq e \ \vee \ x = \pi \ \vee \ x > 10\}$$

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

I punti di frontiera sono $-4, e, \pi, 10$. Ma π non è un punto di accumulazione.

Insieme limitato, convesso, non convesso e compatto

def. Un insieme A è **limitato** se occupa una porzione con area finita dell'ambiente. Formalmente si dice che è limitato se

$$\exists y \in \mathbb{R}^2 \ e \ B_r(y) \subset A.$$

Spesso per y si prende l'origine degli assi.

es. Analizza il seguente insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x \ : \ -4 < x \leq e \ \vee \ x = \pi \ \vee \ x > 10\}$$

L'insieme corrispone a questo:

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

che non è limitato per via di $(10, +\infty)$.

def. un insieme A è **convesso** se $\forall x, \ y \in A$ il segmento di estremi x e y appartiene ad A.
Esempi di insiemi convessi:
img4

def. un insieme A è **non convesso** se esiste un segmento con estremi $x, \ y \ \in \ A$ tale per cui parte di esso non sia contenuto nell'insieme A.
Esempi di insiemi non convessi:
img5

es. In $\mathbb{R}$ gli insiemi "convessi" che insiemi sono?
$\mathbb{N}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
$\mathbb{Q}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
Gli unici insimei "convessi" in $\mathbb{R}$ sono gli insiemi:

- singoletti;
- intervalli;
- semirette.

def. un insieme A è **compatto** se è chiuso e limitato.

es. esempio di insieme compatto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1 \ e \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

img6
l'insieme è chiuso e limitato, quindi compatto.

Funzioni

Definizioni principali

def. cos'è una **funzione**?

Una funzione ha tre "ingredienti" principali che la compondono:

- un insieme di partenza detto **dominio** V, un elemento di questo insieme lo simboleggiamo con la lettera v.
- un insieme di arrivo detto **codominio** W, un elemento del secondo insieme lo simboleggiamo con la lettera w.
- una legge che definisce la funzione, simboleggiata dal simbolo $f()$.

def. Si dice **dominio naturale** l'insieme V', contenuto o uguale V, il più grande sottoinsieme del dominio dove la legge è completamente definita.

def. Si dice che w è l' **immagine** di v attraverso f.

$$w = f(v)$$

def. Si dice che v è la **controimmagine** di w attraverso f.

def. L'**insieme immagine** è la totalità delle immagini e si indica come $im(f)$, spesso si dice anche "immagine della funzione".

$$im(f) = \{w \in W \ : \ \exists \, v \to f(v) = w\}$$

Funzioni iniettive, suriettive e biettive

def. una funzione f si dice **iniettiva** se preserva elementi distinti.

$$se \ \ \forall v_1 \neq v_2 \ \ \to \ \ f(v_1) \neq f(v_2)$$

def. una funzione è **non iniettiva** se ci sono elementi diversi con la stessa immagine.

def. una funzione è **suriettiva** se "invade" tutto il codominio.

$$im(f) \ \equiv \ W$$

es. Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to y = sin(x)$$

non è iniettiva e non è suriettiva.

es. Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

$$x \to y = sin(x)$$

img8
è iniettiva e suriettiva.

def. una funziona che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biiettia**.

Successioni

definizione

def. Le successioni sono funzioni particolari il cui dominio è $\mathbb{N}$ e il codominio $\mathbb{R}$

$$f: \; V = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \to y = f(n)$$

Spesso si scrive: $n \to y = f_n$, oppure $n \to y = a_n$, dove a_n è l'immagine dell'elemento n-esimo.
img9

Successioni monotone e limitate

def. Una successione si dice **monotona** se ha un andamento con un trend costante.

def. Una successione di dice monotona **crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} < a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} > a_{n_2}$$

oss. una successione **costante** è una successione monotona crescente e decrescente.

def. una successione è **limitata** se il suo insieme immagine $im(f)$ è un insieme limitato di $\mathbb{R}$

$$im(f) \;\; \subseteq \;\; B_r(x)$$

Vediamo alcuni esempi di successioni che contengono alcuni casi notevoli.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

img10

Notiamo che n non può assumere il valore 0, che quindi è escluso dal suo dominio. La successione è limitata, ma oscilla, quindi non è monotona.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

img11

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > a_1$$
$$a_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} > a_2$$

Questa successione è famosa perchè converge al valore e. E' limitata e monotona strettamente crescente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a = ln(n)$$

Non è limitata, ma è limitata solamente inferiormente, è monotona strettametne crescente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

img13

è limitata e periodica con periodo $T = 2$.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = sin(n)$$

img14

è limitata, non è monotona, può sembrare periodica, ma non lo è perchè il periodo sarebbe $2\pi \notin \mathbb{N}$.

es. successione potenza

$$a_n = n^{\frac{1}{2}}$$

img15

monotona strettamente crescente, limitata inferiormente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^{(\frac{1}{2})}$$

img16

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

img17

Natura delle successioni

def. La **natura** (o **comportamento**) di una successione è l'andamento osservato per grandi valori del dominio.
La natura di una successione è di tre tipi:

- convergente
- divergente (positivamente o negativamente)
- irregolare

def. Si dice che $\{a_n\}$ **converge** a L e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow[+\infty]{} L$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

img18
definizione formale:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \ \ se \ \ \forall B_r(L)\ \exists\, M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(L)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r del limite L esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno del valore L.
img19

def. a_n è **positivamente divergente** o **divergente a** $+\infty$ e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ \ se \ \ \forall B_r(+\infty)\ \exists\, M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(+\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img20

def. una successione è **negativamente divergente** o **divergente a** $-\infty$ e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty \ \ se \ \ \forall B_r(-\infty)\ \exists\, M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(-\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img21

def. Una successione ha una **proprietà definitiva** se la proprietà è valida per la successione da un certo valore in poi.

Le definizioni di convergenza e divergenza possono essere riscritte usando la definizione della proprietà definitiva.

def. Una successione che non è né divergente né convergente è **irregolare**.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

questa successione è irregolare e limitata.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

questa successione è irregolare e illimitata.

3-LEZIONE

10/10/19

[perso i primi 20 minuti]

Sta parlando di limiti...

$$\forall B_s(l) \, \exists \, B_q(x_0) \quad : \quad \forall x \in A \cap B_q(x_0) - \{x_0\} \quad , \quad f(x) \in B_s(l)$$

"per ogni intorno del valore limite l" definitivamente vicino a x_0 la funzione sta nell'intorno del valore limite.

Algebra dei limiti

Per poter fare dei confronti rigorosi fra limiti, ovvero fra funzioni, ho bisogno di introdurre due simboli:

- asintotico: $\sim$
- o-piccolo: o

o-piccolo

def. $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se f è trascurabile rispetto g. Cioè se, confrontando f e g, f perde.

def. Definizione formale:

$$f = o(g) \;\; se \;\; f(x) = g(x)h(x) \;\; e \;\; h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

oss. conseguenza è che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

es. Per $x \longrightarrow 0$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to vera$$

$$x = o(x^2) \to falsa$$

es. Per $x \longrightarrow +\infty$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to falsa$$

$$x = o(x^2) \to vera$$

regola. Nell'intorno dell'origine (tendendo a $\to 0$) potenze alte della variabili sono trascurabili, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più basse.
regola. allontanandosi dall'origine (tendendo a $\to \pm\infty$) potenze basse sono trascurabili rispetto a potenze più alte, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più alte.

Proprietà di o-piccolo

- Costanti in o-piccolo.
  Con $k \in \mathbb{R}$ e costante:

$$o(k \cdot g) = o(g) = k \cdot o(g)$$

  dim.

$$f = o(k \cdot g) \to f = o(g)$$

$$f = k \cdot g \cdot h$$

  ma $h \to 0$, quindi $k \cdot h \to 0$

$$f = o(g)$$

- Somma di o-piccoli.

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

dim. conseguenza della proprietà precedente.
oss. errore tipico: $o(g) - o(g) = 0$. SBAGLIATISSIMO.
es. per $z \longrightarrow +\infty$

$$f_1 = x^3 - 2x + 4 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_2 = x^3 + x^2 - 7 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_1 - f_2 = x^3 + o(x^3) - (x^3 + o(x^3)) = o(x^3) - o(x^3) \neq 0$$
$$f_1 - f_2 = -2x + 4 - x^2 + 7$$

- Prodotto di funzioni e o-piccolo.
Con f una funzione

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

dim.

$$F = o(g) = g \cdot h \ \ e \ \ h \to 0$$

moltiplico entrambe le parti per f

$$f \cdot F = f \cdot g \cdot h$$

- Potenze di o-piccolo.
Con $k \in \mathbb{R}^+$

$$[o(g)]^k = o(g^k)$$

dim.

$$G = o(g)$$
$$G = g \cdot h \ \ e \ \ h \to 0$$

elevo tutto alla k

$$G^k = g^k \cdot h^k \qquad H = h^k \to 0$$

Asintotico

def. f è **asintotico** a g se tendono allo stesso valore e inoltre ci tendono allo stesso modo.

$$f \sim g \quad x \to x_0$$

formalmente:

$$f \sim g \quad se \quad f = g \cdot h \ \ e \ \ h \to 1$$

oss. conseguenza:

$$\frac{f}{g} \to 1$$

teor. **teorema fondamentale** che lega $\sim$ e $o()$
per $x \to x_0$

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$$

Due funzioni sono asintotiche se hanno lo stesso termine dominante.

dim. dimostrazione da sinistra a destra ($\Rightarrow$):
ipotesi: $f = g \cdot h$ e $h \to 1$. Sottraggo g da entrambi i membri:

$$f - g = g \cdot h - g = g(h-1) \quad H = h - 1 \longrightarrow 0$$
$$f - g = o(g)$$
$$f = g + o(g)$$

dim. dimostrazione da destra a sinistra ($\Leftarrow$)
ipotesi: $f - g = o(g)$

$$f - g = g \cdot h \quad h \to 0$$
$$f = g + g \cdot h = g(1+h) \quad H = h + 1 \to 1$$
$$f \sim g$$

Proprietà di asintotico

- Potenza di funzioni asintotiche:
$$f \sim g \iff f^k \sim g^k$$

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f = g \cdot h \quad \dots$$

- Prodotti e rapporti di funzioni asintotiche.
  $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora
$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$
$$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$$
  prodotti e rapporti di funzioni asintotiche sono asintotici fra loro.

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f_1 \sim g_1$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$f_2 \sim g_2$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$\dots$$
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot H \quad H = \frac{h_1}{h_2} \to 1$$

oss. Notare che non c'è una proprietà per la somma di asintotici, che invece nell'o-piccolo c'è.

Limiti notevoli

[Stiamo guardando simulazioni su MATLAB. Osserviamo che il seno nell'intorno dell origine è approssimabile con la bisettrice, il cosendo con la parabola, la funzione esponenziale traslata in giù di un unità con la bisettrice, il logaritmo traslato a sinistra di un unità con la bisettrice,etc.]
Vediamo ora in formule questi risultati:

- **Seno**
  per $x \to 0$
$$sin(x) = x + o(x)$$
  questa uguaglianza si può riscrivere come $sin(x) - x = o(x)$, cioè o(x) è l'errore che sto facendo nell'approssimare $sin(x)$ come x.
  img1
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$sin(x) \sim x$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- **Coseno**
  per $x \to 0$
$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
  img2
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$

- **Esponenziale**
  per $x \to 0$
  $$e^x - 1 = x + o(x)$$
  img3
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$e^x - 1 \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- **Logaritmo**
  per $x \to 0$
  $$ln(1 + x) = x + o(x)$$
  img4
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$ln(1 + x) \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1$$

Per ognuno di questi limiti notevoli sono state fornite tre versioni che rappresentano la stessa cosa, la più importante e più ricca di significato è sempre la prima, quella con o-piccolo.

es. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \qquad x \to +\infty$$
numeratore:
$$3x^4 - x = 3x^4 + o(3x^4) = 3x^4 + o(x^4)$$
$$3x^4 - x \sim 3x^4$$
$$(3x^4 - x)^{\frac{1}{2}} \sim (3x^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} \sim \sqrt{3x^4}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} = \sqrt{3x^4} + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 \sim x^2$$
usiamo ora la proprietà dei rapporti di funzioni asintotiche:
$$\frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{3x^4}}{x^2} = \sqrt{3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} = \sqrt{3}$$

Limite notevole della pontenza α-esima con $0 < \alpha < 1$
$$y = x^\alpha \quad con\ 0 < \alpha < 1$$
$$per \;\; x \to 0$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$
$$(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$$
img5
Questo limite notevole viene usato per risolvere le radici.
Forniamo, come per gli altri limiti notevoli visti, le altre due forme notevoli:
$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x\to 0} \dots [manca]$$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)}$$

per studiare il limite analiziamo l'andamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)} \quad per \;\; x \to 0$$

occupiamoci della radice con la proprietà appena vista:

$$(1+t)^\alpha - 1 = \alpha t + o(t) \quad per \;\; t \to 0$$

se prendo $t = 2x^2 - x^3$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(2x^2-x^3)$$

Analizzando $o(2x^2 - x^3)$, noto che x^3 è trascurabile rispetto a $2x^2$ (ricorda che $x \to 0$), Inoltre la costatne 2 non conta nell'o-piccolo, quindi:

$$1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(x^2)$$

Inoltre anche in $(2x^2 - x^3)$ posso ignorare x^3 per lo stesso motivo, quindi:

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Quindi tornando alla funzione originale
Numeratore:

$$1 + x^2 + o(x^2) - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore:

$$x + o(x)$$

Numeratore/denominatore:

$$\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x+o(x)} \sim \frac{\frac{3}{2}x^2}{x} \sim \frac{3}{2}x$$

Quindi la funzione tende a 0 con la pendenza di $\frac{3}{2}x$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{16x^2-2}}{\sqrt{x+1}}$$

Analiziamo $\sqrt[4]{16x^2-2}$, vorremmo usare il limite notevole della potenza α-esima con $0 < \alpha < 1$, in questo caso $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$(1+t)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}t + o(t) \quad t \to 0$$

ma noi nell'espressione della consegna abbiamo $x \to +\infty$ e non possiamo quindi usare il limite notevole, perciò:

$$= \sqrt[4]{16x^2-2} = \sqrt[4]{16x^2(1-\frac{2}{16x^2})} = 2\sqrt{|x|}(1-\frac{1}{8x^2})^{\frac{1}{4}} =$$

Ora possiamo usiamo il limite notevole con $t = -\frac{1}{8x^2}$, perchè ora $\frac{1}{x^2}$ tende a 0 per $x \to +\infty$

$$= 2\sqrt{x}(1 + \frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{8x^2})) + o(\frac{1}{x^2}) =$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

Analiziamo ora $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x(1-\frac{1}{x})} = \sqrt{x}(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{x}[1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{x}) + o(-\frac{1}{x})] =$$

essendo il $-$ dentro all'o-piccolo, lo considero come una costante (-1) e quindi lo posso togliere:

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Ora, quindi, ottengo:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Fra i due o-piccolo, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ è più grande di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

4-LEZIONE

14/10/19

Gerarchia degli infiniti

def. Si dice **infinito** una qualunque successione o funzione con limite infinito, cioè divergente.

Vediamo alcune successioni particolari:

$$a_n = ln(n)$$

$$b_n = n$$

$$c_n = e^n$$

$$d_n = n!$$

Tutte queste successioni divergono a $+\infty$, ma non sono asintotiche fra loro, perchè non tendono a $+\infty$ allo stesso modo.

Osserviamo (tramite grafici su Matlab) che $a_n = ln(n)$ e $b_n = n$ tendono a infinito in maniera diversa, infatti possiamo dire che $ln(n) = o(n)$.
Lo stesso vale per n, e^n e $n!$: $n = o(e^n)$ e $e^n = o(n!)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$

Gerarchia degli infiniti:

$$ln(n) = o(n) \qquad n = o(e^n) \qquad e^n = o(n!)$$

Questa gerarchia si mantiene anche con potenze positive diverse fra di loro.
es. $ln(n)^k = o(n^{\frac{1}{k}})$ con $k > 0$.

Gerarchia degli infinitesimi

def. Si dice **infinitesimo** una qualunque successione o funzione con limite zero, cioè convergente a 0.

$$a_n = \frac{1}{ln(n)}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$c_n = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$d_n = \frac{1}{n!}$$

Tutte queste successioni convergono a 0, ma non sono asintotiche fra loro, perchè non tendono a 0 allo stesso modo.

Osserviamo (tramite grafici su Matlab) che $a_n = \frac{1}{ln(n)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ tendono a 0 in maniera diversa, infatti possiamo dire che $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{ln(n)})$, ha un comportamento opposto agli infiniti.
Lo stesso vale per $\frac{1}{n}$, e^{-n} e $\frac{1}{n!}$: $e^{-n} = o(\frac{1}{n})$ e $\frac{1}{n!} = o(e^{-n})$.

Gerarchia degli infinitesimi:

$$\frac{1}{n!} = o(e^{-n}) \qquad e^{-n} = o(\frac{1}{n}) \qquad \frac{1}{n} = o(\frac{1}{ln(n)})$$

Questa gerarchia si mantiene anche con potenze positive diverse fra loro.

es. Trova l'adamento asintotico del seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}}$$

Analiziamo il numeratore:

$$N(x) = \sqrt{x^2+1}+x$$

$$N(x) = [\infty - \infty]$$

è una forma di indeterminazione, quindi dobbiamo risolverla

$$x^2 + 1 = x^2 + 0(x^2)$$

$$\sqrt{x^2+1} \sim \sqrt{x^2} = |x| \ \ (= -x) =$$

$-x$ per valori negativi e dato che $x \to -\infty$ possiamo scriverlo.

$$= |x| + o(|x|) = -x + o(x)$$

$$N(x) = \sqrt{x^2+1} + x = -x + o(x) + x = o(x)$$

Questi passaggi non mi permettono di uscire dalla forma di indeterminazione.
Quindi potremmo provare a usare:

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t) \quad per \ \ t \to 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \sqrt{x^2}(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}} = |x| \cdot [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})] =$$

$$= -x \cdot [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})] =$$

$$-x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

$$N(x) = \sqrt{x^2+1} + x = -x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) + x = -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

Analiziamo il denominatore:

$$D(x) = (x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}$$

$$x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}} =$$

Essendo $\frac{3}{5} > \frac{1}{7}$:

$$= x^{\frac{3}{5}} + o(x^{\frac{3}{5}}) \sim x^{\frac{3}{5}}$$

$$(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{3}} \sim (x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = x^1$$

$$D(x) = x + o(x)$$

Vediamo ora numeratore/denominatore:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})}{x - o(x)} \sim -\frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^-$$

Ricorda di fare sempre i conti con o-piccolo, e di toglierlo solo all'ultimo passaggio, quando hai fatto già tutti i conti necessari.

es. TDE(parziale) determinare il carattere della seguente successione:

$$a_n = \frac{ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1|)}{sin(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2})}$$

Analiziamo il numeratore:

$$N(x) = ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1|)$$

$$t = -\frac{1}{ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^-$$

Ora usiamo questa formula:

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$e^t - 1 = t + o(t) \quad per \quad \to 0$$

$$e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1 = -\frac{1}{ln(n)} + o(\frac{1}{ln(n)}) \sim -\frac{1}{ln(n)}$$

potenze di funzioni asintotiche sono ancora asintotiche fra loro

$$(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 \sim (-\frac{1}{ln(n)})^2 = \frac{1}{ln^2(n)}$$

$$(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 = \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1| = | - 1 + \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})| =$$

Il segno del valore assoluto è negativo ($| - 1 + \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})|$), quindi posso toglierlo e cambiare il segno al suo intenro:

$$= 1 - \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1|) = ln(1 - \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$ln(1 + t) = t + o(t)$$

con $t = -\frac{1}{ln^2(n)}$

$$-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)}) + o(-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})) =$$

Questo $o(-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)}))$ si può eliminare:

$$= N(x) = -\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

Analiziamo il denominatore:

$$D(x) = sin(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}) = cos(\frac{1}{n})$$

Imponiamo $\frac{1}{n} = t$

$$-cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$-cos(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Vediamo numeratore/denominatore:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = a_n = \frac{-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})}{-(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} \sim -\frac{1}{ln^2(n)} \to 0^+$$

Continuità (puntuale) di una funzione def. Si dice che

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to y = f(x)$$

è **continua** in $x_0 \in A$, se

- x_0 è un punto isolato di A
- x_0 è un punto di accumulazione di A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

oss. le successioni sono continue in tutto il loro dominio (son ocostituite da soli punti isolati)

Continuità di una funzione in un insieme def. Si parla di **continuità in tutto l'insieme** A se è continua in tutti i punti di A.

teor. le funzioni elementari sono funzioni continue in tutto il loro dominio naturale.
Vediamo alcuni esempi di funzioni elementari:

- $y = sin(x)$
- $y = x^2 + x$
- $y = arctg(x)$
- $y = e^x$
- $y = a^x$
- $y = ln(x)$
- $y = \frac{1}{x}$
- $y = tg(x)$

Se prendiamo la funzione $y = tg(x)$ notiamo che c'è un salto, ma essa non è definita in quel punto, quindi possiamo dire che sono continue nel loro dominio naturale.

classificazione delle discontinuità es.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & sex = 0 \end{cases}$$

Analiziamola in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

C'è un salto, questa discontinuità si dice del III tipo o eliminabile.

def. discontinuità del III tipo o eliminabile

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

oss. la funzione $y = \frac{sin(x)}{x}$ di dominio $\mathbb{R} - \{0\} = A$ è una funzione continua su A può anche essere **estesa o prolungata per continuità** si tutto $\mathbb{R}$.

def. discontinuità del II tipo Questa discontinuità non è eliminabile e appare se anche solo uno

dei due limiti (o da destra o da sinistra o entrambi) sia infinito o non esista.
es.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

analiziamo la continuità in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t=\frac{1}{x} \to +\infty} e^{-t} = 0^+$$

f risulta continua da destra nell'origine

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t=\frac{1}{x} \to -\infty} e^{-t} = +\infty$$

f tende a $+\infty$ da sinistra nell'origine.
Siamo in presenza di una discontinuità di II specie.

def. discontinuità di I specie o a salto

$$x_0 \in A \qquad \exists f(x_0)), \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ma i limiti destri e sinistri sono diversi.
Anche questa discontinuità non è eliminabile.

es. trovare i valori di a e b per avere continuità in questa funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2sin(x) & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot sin(x) + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ cos(x) & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

in $\mathbb{R} - \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ la funzione f è continua. Analiziamo ora i due punti $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, devo verificare queste due cose:

$$\lim_{x \to -(\frac{\pi}{2})^+} a \cdot sin(x) + b = -2sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} = (a \cdot sin(x) + b) = cos(\frac{\pi}{2})$$

Svolgiamo i limiti:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} a \cdot sin(x) + b = +2 = -a + b$$

$$\lim_{x \to -(\frac{\pi}{2})^-} a \cdot sin(x) + b = 0 = a + b$$

Da cui

$$b = 1$$

$$a = -1$$

es. Vediamo un esempio di funzione discontinua in tutti i suoi punti:

$$f(x)0 \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & se\ x \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\} \end{cases}$$

è costituito da solo discontinuità di seconda specie.

5-LEZIONE

17/10/19

[MANCA TUTTA]

6-LEZIONE

28/10/19

Modalità prova in itinere

- invece di 6, ci saranno 4 domande a risposta multipla, senza soglia, ma con penalità
- 19 punti di esercizi, la soglia è di 9 punti
- 10 punti di teoria
- vengono amessi alla seconda prova tutti coloro che prendono 15 punti, non più 18

Il programma va fino a tutte le informazioni che possiamo trarre dalle funzioni, non chiede l'applicazione dello studio di funzioni (no studio del segno), chiede limiti, dominio, asintotici. Prima si fa la teoria, poi la pratica.

DIMOSTRAZIONI

Oggi vediamo tutte le dimostrazioni che abbiamo lasciato indietro.
Per le definizioni e le dimostrazioni, sono necessarie formule formali supportate da del testo.

Terorema di Regolarità delle successioni monotone

Quando le successioni sono **regolari**? Le successioni possono essere convergenti(1), divergenti(2) a $\pm\infty$ o irregolari(3). Solo le (1) e (2) sono successioni regolari, cioè che hanno un limite.
Vediamo i casi particolari:

- una saccessione monotona e limitata **converge**
- una successione monotona e non limitata **diverge**:
  - se a_n (illimitata) è crescente, allora diverge a $+\infty$
  - se invece a_n (illimitata) è descrescente, allora diverge a $-\infty$

Quindi le successioni monotone sono regolari, perchè o convergono o divergono, e ciò dipende dal fatto che siano limitate o illimitate.

iniziamo dimostrando il primo caso:
una saccessione monotona e limitata converge
a_n è monotona crescente:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

a_n è limitata:

$$a_n \in B_r(0) \quad con \quad r > 0 \, fissato$$

Se queste due ipotesi valgono:

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

dim. Se a_n è limitata c'è un suo maggiorante (r) e dunque c'è il sup (il più piccolo dei maggioranti).
Dimostro che il limite $L = sup\{a_n\}$.
Chiamiamo $sup\{a_n\} = S$, $\forall \, \epsilon > 0 \quad S - \epsilon$ non è più maggiorante, quindi esiste un $a_{n^*} \quad : \quad S - \epsilon < a_{n^*} \leq S$
$\forall \, n > n^*$, $S - \epsilon < a_{n^*} \leq S \qquad a_n \in B_\epsilon(S)$
[imagine: mancante]
Per esercizio dimostrare il caso in cui la successione fosse monotona decrescente.

Dimostriamo ora il secondo caso:
una successione monotona e non limitata diverge

- se a_n (illimitata) è crescente, allora diverge a $+\infty$.
  Abbiamo ancora due ipotesi: illimitata e crescente:
$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n$$
$$\nexists\ B_r(0) subsetrigirato \{a_n\}\ \forall\, n$$
  $\forall\ B_r(0)\ \ \exists\ \ a_{n^*}$ che non sta in $B_r(0)$, $\quad a_{n^*} \notin B_r(0)\ \ a_{n^*} \geq r$ e $\ \forall\ n > n^* a_{n^*} \leq a_n$ (sto dicendo che definitivamente, da n^* in poi, $a_n \in B_r(+\infty)$).
  Quindi per definizione di limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
  [immagine: mancante]
- se invece a_n (illimitata) è descrescente, allora diverge a $-\infty$.
  Per esercizio dimostrare anche questo caso.

Carattere della successione che definisce il numero di Nepero

Applico l'ultimo teorema visto a $a_n = (1\frac{1}{n})^n$.
Vogliamo dimostrare che a_n è monotona crescetne e limitata, quindi (per il teorema fondamentale delle successioni monotone) converge.
dim. La dimostrazione si divide in due passi:

- Verifica della monotonia crescente:
  $\forall\, n\ ,\ a_n \leq a_{n+1}$ $\quad$ ovvero $\quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(\frac{n-1+1}{n-1})^{n-1}} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1} =$$
$$= (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^{-1} = (1-\frac{1}{n^2})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^{-1}$$
  Ora usiamo la disuguaglianza di Bernoulli:
$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x > -1$$
  Se prendo $x = -\frac{1}{n^2}$ ottengo:
$$(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1 + n(-\frac{1}{n^2})$$
  E tornando alla dimostrazione posso sostituire quest'ultimo risultato dove eravamo rimasti:
$$(1-\frac{1}{n^2})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^-1 \geq (1-\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{1}{n})^{-1} = 1$$
  Per qui abbiamo dimostrato che è monotona crescente.
- Verifica della limitatezza:
  la successione a_n è inoltre limitata e per dimostrarlo introduciamo una successione ausiliaria:
$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} =$$
  Questa successione b_n è decrescente:
$$= (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) = a_n \cdot (1+\frac{1}{n})$$
  Dove $(1+\frac{1}{n}) > 1$.
  Quindi $a_n < b_n \quad \forall\, n$. Dimostro che b_n decresce, automaticamente segue la limitatezza di a_n.
$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \ldots \quad < \quad \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1$$
  Come si vede $a_n < b_1$, dove $b_1 = (1+\frac{1}{1})^2 = 4$.
  Per dimostrare che b_n decresce uso la stessa metodo di prima, cioè dimostrare che
$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(\frac{n-1+1}{n-1})^n} = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \cdot (\frac{n-1}{n})^n =$$

$$= (1+\frac{1}{n})^{n+1} \cdot (1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^1 =$$

$$= (\frac{n^2-1}{n^2})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^1 = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(\frac{n^2}{n^2-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}$$

Ora usiamo la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall\, x > -1 \quad \forall\, n$$

Con $x = \frac{1}{n^x - 1}$.

$$(1+\frac{1}{n^2-1}) \geq 1 + n \cdot (\frac{1}{n^2-1}) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Quindi grazie alla disuguaglianza di Bernoulli ho ottenuto che:

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 + \frac{1}{n} \quad quindi \quad (1+\frac{1}{n^2-1})^{-n} \leq (1+\frac{1}{n})^{-1}$$

Quindi tornando alla dimsotrazione:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n})^1} = 1$$

Teorema di unicità del limite (per successioni)

Se una succesione converge, il valore cui converge è unico.
dim. dimostriamo per assurdo:
Sia $\{a_n\}$ una successione convergente e

$$\lim a_n = L_1 \quad \wedge \quad \lim a_n = L_2$$

con $L_1 \neq L_2$.
Formaliziamo:

$$\forall\, B_r(L_1) \;\exists\; M_1 \,\forall\, n > M_1 \;\; a_n \in B_r(L_1)$$

$$\forall\, B_r(L_2) \;\exists\; M_2 \,\forall\, n > M_2 \;\; a_n \in B_r(L_2)$$

[immagine: mancante]
scelgo $r = \frac{dist(L_1, L_2)}{2} < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$, così $b_r(L_1) \cap B_r(L_2) = \emptyset$
$\forall\; n > max\{M_1, M_2\}$ la successione non può stare contemporaneamente nelle due strisce, perchè? per definizione di successione, si ha una sola immagine per ogni valore del dominio, quindi o è in una o nell'altra.

teorema della permanenza del segno (per successioni)

Se a_n è definitivamente positiva e convergente allora il suo limite sarà **non negativo**.
dim.
$\exists\; M \,\forall\, n > M \quad a_n > 0$ e $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e voglio dimostrare che $L \geq 0$.
Procedo per assurdo supponendo $L < 0$.
La definizione di limite dice che

$$\forall\, B_r(L) \;\exists\; M^* \qquad \forall\, n > M^* \qquad a_n \in B_r(L)$$

se $r < \frac{|L|}{2}$ sto dicendo che la successione è definitivamente negativa (da M^* in poi), e questo è assurdo, perchè una successione non può essere contemporaneamente definitivamente positiva e definitivamente negativa.
[immagine:mancante]

Teorema del confronto (per successioni)

Conosciuto anche come teorema dei carabinieri.
Siano a_n, b_n, c_n tali che definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$. Inoltre a_n e c_n convergono ad L. Allora $L = \lim_{n \to +\infty} b_n$.
dim. traduciamo formalmente queste tre ipotesi:

- $a_n \leq b_n \leq c_n$: $\quad \exists\ M_1\ \forall\, n > M_1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- $a_n \to L$: $\quad \forall\ B_r(L)\ \ \exists\ \ M_2\ \forall\ n > M_2 \quad a_n \in B_r(L)$, questa può essere riscritta come: $L - r < a_n < L + r$
- $c_n \to L$: $\quad \forall\ B_r(L)\ \ \exists\ \ M_3\ \forall\ n > M_3 \quad c_n \in B_r(L)$, questa può essere riscritta come: $L - r < c_n < L + r$

chiamo $M^* = max\{M_1, M_2, M_3\}$, cioè il punto oltre il quale valgono tutte e tre le ipotesi iniziali.
Possiamo quindi unire tutte tre le ipotesi e dire:

$$L - r < a_n \leq b_n \leq c_n < L + r \qquad \forall\, n > M^*$$

perciò $b_n \in B_r(L)$ definitivamente, quindi $\lim_{n \to +\infty} b_n = L$

7-LEZIONE

31/10/19

[manca primi 20 minuti]

Teorema di Bolzano o teorema degli zeri [dimostrazione iterativa, manca]

presa una funzione $f \;:\; A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:
ipotesi:

- $A = [a, b]$ è un intervallo compatto
- f è continua su A
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

teor. $\exists \; x^* \in (a, b) \;:\; f(x^*) = 0$

dim. Per fissare le idee posiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$
Procediamo per bisezione: si prende...

Teorema di Darboux o teorema dei valori intermedi

E' una conseguenza del teorema di Bolzano e Weierstrass.
Enunciato:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

ipotesi:

- $A = [a, b]$ intervallo compatto
- f è continua su A

Tesi:
Con m minimo e M massimo valori di massimo della funzione in A, possiamo dire che $\forall \; \lambda$ con $m < \lambda < M \;\exists\; x_\lambda \in A \;:\; f(x_\lambda) = \lambda$.

dim. Valendo Weierstrass, so che esistono M e m e almeno un valore di massimo x_M e uno di minimo x_m.

$$f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$$

Introduco ora una funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - \lambda$ che è la funzione f traslata "in giù" di λ (se $\lambda > 0$).
Nota: g ha la stessa regolarità di f (è continua).
Inoltre g, studiata nell'intervallo $[x_m, x_M]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Bolzano, quindi le valutazioni di g agli estremi dell'intervallo hanno segno opposto.

$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$$

$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

Per il teorema di Bolzano, quindi, $\exists \; x^* \;:\; g(x^*) = 0 = f(x^*) - \lambda = 0$.

Cardinalità degli insiemi infiniti

def. due insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi (la **stessa cardinalità**) se e solo se riesco a costruire una **corrispondenza biunivoca** tra i due insiemi.

def. un'insieme X è **numerabile** se posso scrivere i suoi elementi in una successione (ovvero se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$).

- $\mathbb{N}$ è numerabile? sì
- $\mathbb{Z}$ è numerabile? è chiaro che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ma si può costruire una successione ordinata che copra tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$? sì, per esempio: $0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3,\ \ldots$, quindi $\mathbb{Z}$ è numerabile.
  oss. Da notare è che un insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoco con una sua parte.
- $\mathbb{Q}$ è numerabile? è chiaro, anche qui, che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ma può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$?
  Vediamo come si può scrivere una successione che elenca tutti i razionali:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

  Ora per dare un ordine a questa tabella, che copre tutti i razionali, ci basta percorrerla in diagonali che vanno verso il basso a sinistra.
  La prima diagonale contiene solo l'elemento 0, la seconda contiene gli elementi 1 e 0, poi abbiamo $2, -1, 0\ldots$ e così via.
  Quindi sì, $\mathbb{Q}$ è numerabile.

$\mathbb{R}$ è numerabile? il problema è che $\mathbb{R}$ è continua e di conseguenza non numerabile.
def. si dice che $\mathbb{R}$ ha cardinalità superiore a quella numerabile, detta **cardinalià del continuo**.
dim. dimostriamo che non è possibile numerare tutti gli elementi di $\mathbb{R}$.
Per semplicità dimostriamo che non posso numerare nemmeno una parte di $\mathbb{R}$, per esempio nell'intervallo $[0, 1]$.
Dimostrazione per assurdo:
Se l'intervallo $[0, 1]$ fosse numerabile, potrei scrivere i suoi elementi in una succesione, per esempio:
x_0: 0.1327401101279 ...
x_1: 0.00010104 ...
x_2: 0.1110140510000 ...
x_3: 0.31313131 ...
x_4: 0.00500010 ...
x_5: ...
Ma per quanto grande sia la lista, sarà sempre incompleta. Trovo in fretta un numero reale compreso fra 0 e 1 che in questa successione non appare, costruiamolo:
Prendiamo la prima cifra da x_0, che è un uno, poi prendiamo la seconda cifra dell'elemento x_1, poi il terzo dell'elemtno x_2 e così via ottengo:
$0.101104\ldots$
Ora sommiamo uno a ogni cifra ottenuta 1:
$0.212215\ldots$
E così ottengo sicuramente un elemento che non appartiene alla lista, perchè ogni elemento ha almeno una cifra diversa da quella del numero appena costurito.

Anche i numeri **irrazionali** ($\mathbb{I}$) hanno la cardinalità del **continuo**.

Presa una retta, essa ha cardinalità del continuo, come $\mathbb{R}$, ma un piano? che cardinalità ha? Si riesce a costruire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$? [Riflettere a casa.]

8-LEZIONE

11/11/19

Ottimizzazione di funzioni in una variabile

Presa una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$, si operano scelte "ottime", ovvero cerco i valori (e i punti) di ottimo locale (massimi e minimi in un intorno).

def. Valore di massimo locale è M, tale che $M = f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall\ x \in B_r(x_0)$. Invece x_0 è il **punto di massimo locale**.

def. Valore di minimo locale è m, tale che $m = f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\ x \in B_r(x_0)$. Invece x_0 è il **punto di minimo locale**.

def. Valore di massimo globale è M, tale che $M = f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall\ x \in A$. Invece x_0 è il **punto di massimo globale**.

def. Valore di minimo globale è m, tale che $m = f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\ x \in A$. Invece x_0 è il **punto di minimo globale**.

In tutta questa parte del corso di analisi I si fa sempre un' **ipotesi generale: funzioni derivabili nel loro dominio (lisce)**.

def. Tutti gli ottimi locali hanno **tangente orizzontale**, ma non tutti i punti a tangente orizzontale sono punti di ottimo locale.

def. x_0 è un **punto stazionario** se $f'(x_0) = 0$ (cioè se ha tangente orizzontale).

teor. Teorema di Fermat sui punti stazionari.
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$.
Ipotesi:

- $A = (a, b)$ è un intervallo aperto e $x_0 \in A$.
- f è derivabile in A.
- x_0 è un punto di ottimo.

Tesi:
$f'(x_0) = 0$, cioè il punto x_0 è stazionario.
dim.
A: "x_0 è un punto di ottimo"
B: "x_0 p stazionario"
Graficamente diremmo che B contiene A.
Dimostriamo per x_0 punto di massimo locale. Scriviamo il rapporto incrementale dividendolo in due casi:

- se $h > 0$, siccome il numeratore è sicuramente negativo e il denominatore positivo:
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$
Se ora passiamo al limite:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$
- se $h < 0$, siccome sia numeratore, sia denominatore son negativi otteniamo:
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$
Se ora passiamo al limite:
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Sappiamo che per forza il limite esiste per le ipotesi, e siccome il rapporto incrementale da destra e da sinistra danno lo stesso valore, il limite è 0.

teor. di Rolle
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$.
Ipotesi:

- $A = [a, b]$ è chiuso
- f continue su A e derivabile su (a, b)
- $f(a) = f(b)$

$\implies \ \exists \ x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ (sia un punto stazionario).
dim. Se la funzione è costante, la sua derivata è nulla, quindi dimostrato. Se la funzione non è costante, secondo Weierstrass, la funzione massimo M e minimo m nell'intervallo (a, b). I punti di massimo e minimo sono non coincidenti, dunque ci sono varie configurazioni: massimo (o minimo) agli estremi e minimo (o massimo) in mezzo all'insieme, o sia minimo sia massimo in mezzo all'insieme, dunque per Fermat è dimostrata.
[dimostrazione ufficiale nelle foto di Wp della ludo]

teor. di Lagrange
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$.
Ipotesi:

- A=[a,b]
- f è continua in A e derivabile in (a, b)

La pendenza del segmento che collega gli estremi $f(a)$ e $f(b)$ è $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, allora $\ \exists \ x_0$ tale che $f'(x_0) = m =$
dim.
Chiamiamo i punti $r = (a, f(a))$ e $s = (b, f(b))$ e la retta passante per i punti r e s detta $t = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ e introduco una funzione ausiliaria $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

Da notare che $g(x)$ ha la regolarità di $f(x)$ (cioè è continua in A e derivabile in a, b).
Inoltre $g(a) = 0 = g(b)$.
Quindi per il teorema di Rolle applicato a $g(x)$ su A, esiste un punto stazionario interno all'intervallo per g.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\exists \ x_0$ tale che $0 = g'(x) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, dimostrato.

Test di Monotonia di f su un intervallo aperto

(questo test mostra quanto sia importante il teorema di Lagrange)
Il test di Monotonia vale per funzioni:
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$.
Ipotesi:

- $A = (a, b)$
- f è derivabile su A e quindi anche continua su A.

$\Longrightarrow$ allora:

- $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in A \Longrightarrow f$ è monotona strettamente crescente su A.
  dim.
  Riscriviamo la tesi del teorema di Lagrange: $\exists\ x_0 \in (a,b)$ tale che $f(b)-f(a) = f'(x_0)\cdot(b-a)$. Siano x_1, x_2 tali che $a < x_1 < x_2 < b$, cioè seleziono un sottointervallo $[x_1, x_2]$ chiuso di A, su cui posso applicare Lagrange a f, quindi $\exists\ x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x-2) - f(x_1) = f'(x_0)\cdot(x_2 - x_1)$, inoltre so che $f'(x) > 0$ per la prima ipotesi, quindi $f(x_1) < f(x_2)\ \forall\, x_1 < x_2$.

- $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in A \Longrightarrow f$ è monotona strettamente decrescente su A.
  dim.
  [da fare a casa].

Esercizi

es. primo esempio di studio di funzione

$$f(x) = |x^2 - 3|e^x$$

passo 1] Tutto ciò che posso dire direttamente a partire da $f(x)$ (dominio, limiti agli estremi del dominio analizzando anche il comportamento asintotico, studio del segno, studio del comportamento asintotico negli zeri della funzione, regolarità di $f(x)$).
passo 2] Tutto ciò che posso dire direttamente a partire da $f'(x)$ (punti stazionari, massimi e minimi locali, punti con tangenti verticali o orizonatali, cerco tutti gli intervalli aperti dove posso applicare il test di monotonia)
passo 3] Tutto ciò che posso dire direttamente dalla $f''(x)$ (studio del segno della derivata seconda che ci fornisce informazioni sulla concavità della funzione).

Passo 1:
Dominio e regolarità di $f(x)$: $f \in C^0(\mathbb{R})$ (C^0 è uno spazio vettoriale). Noto che $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Gli zeri di f sono gli zeri di $|x^2 - 3|$, cioè $f = 0$ in $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.
Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} |x^2 - 3|e^x \sim \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x^2 - 3|e^x \sim \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^x = [t = -x] = \lim_{t\to\infty} t^2 \cdot e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} |x^2 - 3|e^x = \lim_{x\to-\sqrt{3}} |x - \sqrt{3}| \cdot |x + \sqrt{3}| \cdot e^x \sim \lim_{x\to-\sqrt{3}} 2\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}}|x + \sqrt{3}|$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} |x^2 - 3|e^x = \lim_{x\to\sqrt{3}} |x - \sqrt{3}| \cdot |x + \sqrt{3}| \cdot e^x = |x - \sqrt{3}|2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}}$$

Passo 2:
Derivata prima, ricorda che $y = |x|$ ha derivata $y' = sign(x)$, cioè la funzione che vale 1 per le x positive, -1 per le x negative, e non è definita per $x = 0$:

$$f'(x) = e^x \cdot sign(x^2 - 3) \cdot (2x) + |x^2 - 3| \cdot e^x$$

Che ha dominio naturale pari a $\mathbb{R} - \{+\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.
Studiamo il segno della derivata prima:
Trasformiamo $|x^2 - 3|$ in $sing(x^2 - 3) \cdot (x^2 - 3)$

$$f'(x) = e^x \cdot sign(x^2 - 3) \cdot (2x) + sing(x^2 - 3) \cdot (x^2 - 3) \cdot e^x = sing(x^2 - 3)e^x \cdot [x^2 + 2x - 3]$$

$sing(x^2 - 3)$ ha sengno positivo per $x < -\sqrt{3}$ e $x > +\sqrt{3}$, invece $[x^2 + 2x - 3]$ ha segno positivo per $x < -3$ e $x > 1$.
Quindi il segno di $f'(x)$ è positivo per $x < -3$ e o $-\sqrt{3} < x \leq 1$ e $x > +\sqrt{3}$.
Applicando il test di monotonia notiamo che la funzione è crescente in $x < -3$, in $x = -3$ è un punto stazionario, nell'intervallo $-3 < x < -\sqrt{3}$ la funzione è decrescente, in $(-\sqrt{3}, 1)$ la funzione è crescente, poi da $(1, 3)$ la funzione decresce, in $x = 1$ c'è un punto stazionario, e infine in $(\sqrt{3}, \infty)$ la funzione è crescente. [da finire a casa per esercizio]

9-LEZIONE

14/11/19

[MISSING]

10-LEZIONE

18/11/19

Sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari

Riprendiamo dall'ultima lezione sul polinomio di Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Il polinomio di Taylor viene chiamato polinomio di **MacLaurin** se si prende $x_0 = 0$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

es. scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 9 di $sin(x)$

$$f(x) = sin(x) \to x = 0 \to 0$$
$$f'(x) = cos(x) \to x = 0 \to 1$$
$$f''(x) = -sin(x) \to x = 0 \to 0$$
$$f'''(x) = -cos(x) \to x = 0 \to -1$$
$$f^{iv}(x) = sin(x) = f(x) \to x = 0 \to 0$$

e ciclo di derivate riinizia. Quindi $T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{ix}(0)}{9!}x^9 =$ tutti i termini pari si annullano $=$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9$$

Notiamo che più si calcola un polinomio di grado maggiore e più troviamo una funziona che approssima meglio la funzione seno. Per esempio T_1 approssima il seno solo vicino all'origine, T_3, invece, approssima molto meglio di T_1 (graficamente notiamo che T_3 ha già le prime curvature del seno), etc.
[immagine:mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

es. scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 9 di $cos(x)$.
Questo esercizio è estremamente simile a quello precedente, qua invece di annullarsi i termini pari, si annullano quelli dispari. [Fare a casa].
[immagine:mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

es. scrivere il polinomio di MacLauri di grado 9 dell'esponenziale.

$$f(x) = e^x$$
$$f^{(k)} = e^k \to x = 0 \to 1$$
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

Quindi per $n = 9$ avremo:

$$T_9(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}.$$

[immagine: mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

Teorema del resto secondo Peano

descrive l'errore nell'approssimazione di $f(x)$ con $T_n(x)$. Dove x, che è il punto in cui sto facendo l'approssimazione, è nell'intorno di x_0 (ma $x \neq x_0$).
teor. Se $f : A \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow y = f(x)$ e ipotesi:

- $A = (a, b)$, $x_0 \in A$
- $f \in C^n(A) = \{$continua con tutte le derivate continue fino a $f^{(n)}$ in ogni punto di $A\}$

allora

$$f(x) = T_n(x) + o(\ (x - x_0)^n\ ) \qquad x \to x_0$$

Questa formula è conosciuta anche in questa forma: $f(x) - T_n(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$ per $x \to x_0$.

Corollario 1 del teorema di Lagrange(che enuncia: $\exists\ \ \theta \in (a, b) \quad : \quad (b - a)f'(\theta))f(b) - f(a)$).
Teorema di Cauchy:
Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ e $y = g(x)$, e ipotesi:

- $A = [a, b]$
- f, g continue in A e derivabili in (a, b)

Allora per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\begin{cases} \exists\ \ \theta_1 \in (a, b) \ \ : \ \ f'(\theta_1)(b - a) = f(b) - f(a) \\ \exists\ \ \theta_2 \in (a, b) \ \ : \ \ g'(\theta_2)(b - a) = g(b) - g(a) \end{cases}$$

Allora

$$\exists\ \ x^* \in (a, b) \ \ : \ \ \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dim. Uso un funzione ausiliaria $h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$, che ho ricavato portando tutto a primo termine da : $\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ e togliendo le "derivate".
h ha la regolarità di f e di g perchè è una combinazione lineare di queste due funzione. Applico ora il teorema di Rolle:

$$h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$$

Valutiamo gli estremi: in a

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

in b

$$h(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$$

Quindi per Rolle sappiamo che h ha un punto stazionario. Calcoliamo ora la derivata di h

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Ma sappiam oche esiste un x^* per cui la derivata è nulla:

$$h'(x^*) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x^*) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x^*) = 0$$

Corollario 2 del teorema di Lagrange(che enuncia: $\exists\ \ \theta \in (a, b) \quad : \quad (b - a)f'(\theta))f(b) - f(a)$).
Teorema di de l'Hopital (di Voldemort, da non usare secondo il prof.):
Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ e $y = g(x)$, e ipotesi:

- $A = [a, b]$
- f, g continue in A e derivabili in (a, b)
- entrambe le fuznioni sono infinitesime in $x_0 \in (a, b)$

Allora se $l = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora $l = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

dim. diretta dal corollario 1 (cauchy), $\exists\ \theta \in (a, b)\ :$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

Dimostrazione del teorema del resto secondo Peano

se $f \in C^n(A)$ e $A = (a, b)$ e $x_0 \in A$, allora $f(x) - T_n^f(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$
dim. per induzione su n

- verifico per $n = 1$:

  $$f \in C^1\ \ ,\ \ f(x) - [f(x_=) + f'(x_0)(x - x_0)]\ \ =?\ o(x - x_0)$$

  per $x \to x_0$

  $$\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

  Verificata.

- Supponendo che valga per $n - 1$ verifico per n.
  Scriviamo la validità per $n - 1$ con una funzione g: $\forall\ g \in C^{n-1}(A)$ allora so che vale

  $$g(x) - T_{n-1}^g(x) = o(\ (x - x_0)^n - 1\ )$$

  Ora dobbiamo verificare che presa $f \in C^n(A)$ allora vale che

  $$f(x) - T_n^f(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$$

  e per farlo ci basta dimostrare che

  $$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n}$$

  tenda a 0 per $x \to x_0$. Per calcolare questo limite usiamo il corollario 2:

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'}$$

  Analiziamo prima:

  $$[T_n^f(x)]' = [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n] =$$

  $$= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} = T_{n-1}^{f'}(x)$$

  Quindi: $[T_n^f(x)]' = T_{n-1}^{f'}(x)$.
  Ora possiamo tornare al limite:

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n \cdot (x - x_0)^{n-1}} =$$

  che per ipotesi di induzione (quella con la funzione g) è

  $$= 0$$

Fine dimostrazione.

Teorema del resto secondo Lagrange

Questo teorema, rispetto a quello del resto secondo Peano, presenta ipotesi più restrittive, che consentono di scrivere il resto in modo pi dettagliato.
$f \in C^{n+1}(A)$, $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, Allora $\exists\ \theta \in (x_0, x)\ :$

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0^{(n+1)})$$

Notiamo che $\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0^{(n+1)})$ è $o(\ (x - x_0)^n\ )$, quindi la forma di Lagrange è più dettagliata di Peano.

dim. Considero due funzioni ausiliarie:

$$g(x) = f(x) - T_n(x)$$
$$w(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

$w(x)$ ha regolarità $\in C^\infty(\mathbb{R})$ e $g(x)$ ha regolarità $inC^{n+1}(A)$.
Calcoliamo $g(x_0)$, $g'(x_0)$, $\ldots$, $g^{n+1}(x_0)$ e $w(x_0)$, $w'(x_0)$, $\ldots$, $w^{n+1}(x_0)$.
Dato che f e T_n hanno un contatto di ordine n in x_0:

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^n(x_0) = 0$$

Ci rimane quindi da calcolare solo $g^{n+1}(x)$.
Anche per w notiamo che in x_0 le derivate sono nulle:

$$w(x_0) = w'(x_0) = \cdots = w^n(x_0) = 0$$

Anche qui quindi ci rimane da calcolare solo $w^{n+1}(x)$.

$$g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x)$$
$$w^{n+1}(x) = (n+1)!$$

A questo punto vogliamo dimostrare che

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Per farlo portiamo $T_n(x)$ a primo menbro otteniamo:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Ora dividiamo per $(x - x_0)^{n+1}$

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Dimostreremo il teorema in questa forma.

Riprendiamo le due funzioni ausiliarie

$$\frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{w(x) - w(x_0)} =$$

dove $g(x_0) = w(x_0) = 0$ e col Corollario 1 (Cauchy), otteniamo che $\exists\ x_1 \in (x_0, x)$:

$$= \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1) - g'(x_0)}{w'(x_1) - w'(x_0)} =$$

riapplicando ora nuovamente il Corollario 1 (Cauchy), otteniamo che $\exists\ x_2 \in (x_0, x_1)$:

$$= \frac{g''(x_2)}{w''(x_2 =} = \frac{g''(x_2) - g''(x_0)}{w''(x_2) - w''(x_0)} =$$

riapplichiamo per la terza volta il Corollario 1 (Cauchy) restringendo sempre di più l'intervallo, quindi otteniamo $\exists\ x_3 \in (x_0, x_2)$:

$$= \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \ldots$$

iterando n volte otteniamo:
$\exists\ \theta \in (x_0, X_n)$:

$$\cdots = \frac{g^{n+1}(\theta)}{w^{n+1}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

10-LEZIONE

21/11/19

[manca]

1-ESERCITAZIONE

Numeri complessi

es. risolvere

$$|z|^2 - 2z = 0$$

Due soluzioni possibili. La prima:

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

La seconda:

$$z = \rho e * i\theta$$

$$|z| = \rho^2$$

$$\rho^2 - 2\rho e^{i\theta} = 0$$

raccogliamo ρ

$$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rho - 2e^{i\theta} = 0$$

$$\rho = 2e^{i\theta}$$

ρ è il modulo

$$\rho e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$$

$$\theta = 0 \wedge \rho = 2$$

es. determina z_1 e z_2 tali che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \ \wedge \ Im(z_1) = Im(z_2) = 2$

$$z = x + iy = Re(z) + iIm(z)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 y = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 - 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

ora verifica che $\bar{z_1} = z_2$

$$\bar{z_1} = -1 + 2i$$

$$-z_2 = -1 + 2i$$

es.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 3\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ Re(w) + Im(w) + 1 = 0\}$$

(IMMAGINE di A e di B)

$$C = \{v \in \mathbb{C} \ : \ v = z - 3 + i, z \in A \cap B\}$$

il termine $v = z-3+i$ rappresenta un tranlazione di $(-3, 1)$ da applicare all'insieme che è l'intersezione di A e B:

$$z = x + iy$$

$$z = -3 + i = x + iy - 3 + i$$

$$v = (x - 3) + i(1 + y)$$

es. trovare le soluzioni di

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{i}z = 0$$

Non si può applicare il teorema fondamnetale dell'algebra per via della presenza di $\bar{z}$.
Iniziamo togliendo i dal denominatore

$$-\frac{2}{i}\frac{i}{i} = -\frac{2i}{1} = 2i$$

$$z^2 - z\bar{z} + 2iz = 0$$

$$z(z - \bar{z} + 2i) = 0$$

prima soluzione è $z = 0$
Ora poniamo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$

$$2iy + 2i = 0$$

$$2i(y + 1) = 0$$

Da cui ricaviamo $y = -1$
Definire l'insieme B (A rappresenta le soluzioni del punto precedente):

$$B = \{w \in (C) \ : \ w = z + 3i, z \in A\}$$

Notiamo che $w = z+3i$ rappresenta una traslazione verso l'alto. Quindi il punto $(0, 0)$ diventa $(0, 3i)$, invece la retta $y = -1$, cioè $Im(z) = -1$, diventa la retta $Im(w) = 2$.

es.

$$i^{255}z^3 = \bar{z}$$

Per risolvere i^{225} si può notare che gli esponenti di i seguono un pattern: $i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$. Inoltre da ricordarsi che i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$
IMMAGINE

$$i^{225} = i^{224+1} = i^{224}i^1 = 1i = i$$

$$iz^3 = \bar{z}$$

Ora risolviamo questa equazione usando la forma esponenziale dei numeri complessi: $z = \rho e^{i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}\rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho(\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-i\theta})$$

Che da origine a due soluzioni. La prima:

$$\rho = 0$$

Accettata perchè ρ è un numero reale positivo. La seconda:

$$\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{-i\theta}$$

Modulo:

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = \pm 1$$

Ma essendo ρ un numero reale positivo rifiutiamo -1 come soluzione. Quindi $\rho = 1$.
Argomento:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi$$
$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

per $k = 0, \ldots, 3$.
es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = \sqrt{3|Im(z)|}\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ iw^2 \in A\}$$

partendo dal fatto che $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ x = \sqrt{3}|y|\}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & y \geq 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_z e^{i\frac{\pi}{6}} & y \geq 0 \\ \rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}} & y < 0 \end{cases}$$

$$w = \rho_w e^{i\theta_w}$$
$$iw^2 = z$$

moltiplico per $-i$

$$w^2 = -iz$$

Per A^+:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{i\frac{\pi}{6}})$$
$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = \rho_z e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$arg(w) = 2\theta_w = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\theta_w = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k = 0, 1$.
Per A^-:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta w} = (-i)(\rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \rho_z e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$\theta_w = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$$

Permutazioni con e senza ripetizioni

Definiamo il fattoriale di un numero $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)\ldots 2\ 1 & n \geq 1 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è tipicamente usato per calcolare il numero di possibili permutazioni. Per esempio il numero di possibili permutazioni (anagrammi) di una parola si ottiene con il fattoriale del numero di lettere.
es. ROMA $\rightarrow 4!$
es. FARFALLA $\rightarrow 8!$, ma se per esempio volessimo eliminare la possibilità di permutare lettere identiche, dovremmo togliere a $8!$ le possibili permutazioni delle F ($2!$), delle A ($3!$), e delle L ($2!$) e quindi otteremmo:

$$\frac{8!}{2!2!3!}$$

es. In quante configurazioni diverse si possono porre 9 persone in fila indiana? $9!$
es. Se le 9 persone dell'esercizio fossero 5 maschi e 4 femmine e noi volessimo avere sempre per prima i tutti i maschi e poi tutte le femmine? $5!4!$

Esercizi sui Fattoriali

es. TDE. 3 uomini e 3 donne devono sedersi alternati a un tavolo rotondo, quante sono le diverse possibili configurazioni?
Per risolvere questo esercizio ragioniamo a "coppie" di persone (uomo-donna) che possiamo creare: $3!$.
Queste $3!$ coppie possibili possono essere disposte sul tavolo in $3!$ modi diversi.
Il numero fino ad ora ottenuto va moltiplicato per due perchè abbiamo solo lavorato con le coppie uomo-donna, ma possiamo rifare lo stesso ragionamento anche per le coppie donna-uomo.
Ultimo fattore da considerare è il fatto che il tavolo sia rotondo, infatti le permutazioni possibili di elementi su un tavolo rotondo non sono $n!$ ma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Questo accade perchè se avessimo un fila indiana da riempire con gli elementi A,B e C otterremmo tre possibili configurazioni: ABC, CAB, BCA. Ma se disposte su un tavolo rotondo queste tre disposizioni sono esattamente la stessa disposizione.
Risposta:

$$\frac{3!2!2!}{6}$$

(6 sono i posti a tavola)

es. TDE
Possibili anagrammi di ESAME?

$$\frac{5!}{2!} = 5\ 4\ 3 = 60$$

es. TDE
Con 14 partite di una schedina di calcio con 3 pareggi e 2 vittorie in casa, quante possibilità di compilare la schedina ci sono?

$$\frac{14!}{9!2!3!}$$

es. TDE
Quante password di 6 cifre e composte solo dai caratteri "0" "1" "2" esistono?

$$3^6$$

Coefficienti binomiali

def. Coefficiente binomiale con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vediamo alcuni coefficienti binomiali notevoli:
caso $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = 1$$

casp $k = n$:

$$\binom{n}{n} = 1$$

caso k piccolo, comodo perchè risolve il binomiale trasformandolo in una frazione con k fattori sopra e sotto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

dim.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) = (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k!)}$$

caso n e k sono numeri molto simili, comodo perchè riconduce il binomiale alla formula precedente

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dim.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

def. potenza del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

es. ceofficiente di x^7y^3 nello sviluppo di $(2x-y)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^k(-y)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} 2^k(-1)^{10-k}x^ky^{10-k}$$

per x^7y^3 devo prendere $k=7$:

$$\binom{10}{7} 2^7(-1)^3 = \cdots = -30\ 2^9$$

es. TDE. Coefficiente di a^5b^7 nello sviluppo di $(2\sqrt{a}b+3ab)^7$
Si potrebbe applicare direttamente Newton, ma per semplificare i calcoli sarebbe meglio prima raccogliere ab

$$a^{\frac{7}{2}}b^7(2+3a^{\frac{1}{2}})^7 = a^{\frac{7}{2}}b^7\left[\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k(3a^{\frac{1}{2}})^{7-k}\right]$$

l'intera sommatoria è moltiplicata per b^7 e $a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{7}{2}-\frac{k}{2}}$, quindi per ottenere b^7a^5 devo prendere $k=4$.

$$k=4 \to \binom{7}{4}2^4(3)^3 = \dots$$

es. risolvere la seguente equazione

$$2\binom{x-1}{1} + 3\binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$$

per $x-1 \geq 1$, per $x+1 \geq 3$ e $x \geq 2$, quindi solo $x \geq 2$

$$2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + 3\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - \frac{x!}{2!(x-2)!} = 0$$

$$2(x-1)\frac{(x-2)!}{(x-2)!} + 3\frac{x+1}{6} - \frac{x(x-1)}{2} = 0$$

$$(x-1)(2+\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}) = 0$$

$x-1=0$ non si accetta.
$\frac{1}{2}x^2+2=0$ è impossibile.
non ci sono soluzioni.

Topologia in $\mathbb{R}$

def.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **maggiorante** di A se $k \geq x, \forall x \in A$.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **minorante** di A se $k \leq x, \forall x \in A$.
Un insieme è **limitato superiormente** se ne esiste almeno un maggiorante.
Un insieme è **limitato inferioremente** se ne esiste almeno un minorante.

L'**estremo inferiore** $inf(A)$ è il massimo dei minoranti (non deve per forza appartenere ad A).
L'**estremo superiore** $sup(A)$ è il minimo dei maggioranti (non deve per forza appartenere ad A).
Il **minimo** $min(A)$ è uguale all'$inf(A)$ se esso appartiene ad A. Notare che se esiste il $min(A)$ esso è anche l'$inf(A)$, ma non vale il viceversa.

es. consideriamo l'insieme $A = (0, 1]$.
-1 è un minorante, pure -2, etc. L'insieme dei minoranti di A è: $(-\infty, 0]$, il più grande è lo 0, che quindi è l'$inf(A)$, ma non è il $min(A)$, perchè non appartiene ad A.
Se invece l'insieme fosse stato $A = [0, 1]$, l'insime dei minoranti sarebbe ancora $(-\infty, 0]$, l'$inf(A)$ sarebbe ancora 0, ma in questo caso sarebbe anche il $min(A)$.
Linsieme dei maggioranti è invece $[1, +\infty]$, $sup(A) = 1$, $max(A) = 1$.

def. Un punto è detto di **accumulazione** se:

- qualunque intorno di quel punto contiene almeno un punto di A
- ogni intorno di x_0 contiene un punto in A diverso da x_0

def. un punto è detto di **frontiera** se:

- in ogni intorno cadono punti di A e di A^c

def. un punto è detto **isolato** se:

- per qualunque intorno non ci sono altri punti di A

es.
$$A = \{\{-2\} \cup (1, 3]\}$$
-2 è di frontiera e isolato, 1 e 3 sono di frontiera.

def. un insieme è detto **interno** se:

- esiste almeno un intorno con solo punti di A

def. un insieme è detto **aperto** se:

- tutti i punti di A sono punti interni

def. un insieme è detto **chiuso** se:

- tutti i punti di A sono punti di accumulazione

es.
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \in [1, 5]\}$$
che equivale all'insime
$$\{-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \ \ \vee \ \ 1 \leq x \leq \sqrt{5}\} \cap \mathbb{Q}$$
maggioranti: $(\sqrt{5}, +\infty)$
$sup(B) = \sqrt{5}$, ma non esiste perchè siamo in II
$inf(B) = \ldots$
$max(B) =$ non esiste
$min(B) = \ldots$

2-ESERCITAZIONE

08/10/19
es. Studiare il seguente insieme:

$$B = \{X \in \mathbb{R} \ : \ -3 < x \leq 3\}$$

L'insieme dei minoranti è $(-\infty, -3]$, inoltre -3 è il massimo dei minoranti, quindi $inf(B) = -3$, ma non è il $min(B)$ perchè non $\in B$.
Linsieme dei maggioranti è $[3, +\infty)$, inoltre 3 è il $sub(B)$ e $max(B)$.
-3, 3 sono punti di frontiera.
$[-3, 3]$ punti di accumulazione.
Non esistono punti isolati.
B non é nè aperto nè chiuso.

es. studiare i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 \in A\}$$

$$A = \{-2 \leq x - 1 \leq 2\} = \{-1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{-1 \leq x^2 \leq 3\} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

B è chiuso, $infB) = -\sqrt{3} = min(B)$, $\sqrt{3} = sub(B) = max(B)$

es.

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x^3| - x > 0\}$$

Riscrittura algebrica:

$$\begin{cases} per \ \ x \geq 0 & x^3 - x^3 > 0 \ \ \nexists x \in \mathbb{R} \\ per \ \ x < 0 & -2x^3 > 0 \ \ \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \{xin\mathbb{R} \ : \ x < 0\}$$

es.

$$f(x, y) = \frac{arccos(x)}{arcsin(y)}$$

$$D = \{-1leqx \leq 1, -1 \leq y \leq 1, y \neq 0\}$$

L'insieme è limitato perchè

$$\exists k \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} < K$$

L'insieme non è aperto (il punto (1,1) non è interno).
L'insieme non è chiuso (il punto (1,0) è di accumulazione e $\notin A$)

es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 9| > |z - 9i|\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ arg(w) = \frac{\pi}{4}\}$$

$A \cup B$ è:

- chiuso
- aperto
- nè chiuso nè aperto
- numerabile (cioè se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali)

img 22
I punti che appartengono ad A sono quelli al di sopra della bisettrice, bisettrice non inclusa. L'insieme B è invece la bisettrice che parte dall'origine e taglia il I quadrante.
I punti della semiretta bisettrice che parte dall'origine e taglia il III quadrante è costituita da punti di accumulazione.
La risposta corretta è che l'insieme $A \cup B$ non è nè chiuso nè aperto.

es. TDE

$$A = \{z = x + iy \ \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z-2|}{|z|} < 1\}$$

A è:

- senza punti di accumulazione
- aperto
- chiuso
- limitato

$$z - 2 = x - 2 + iy$$
$$\frac{|z-2|}{|z|} = \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 < x^2 + y^2$$
$$x > 1$$

Ha punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ascisse, non è limitato, non è chiuso perchè non contiene tutti i suoi punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ordinate. La risposta giusta è che è aperto.

es.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = 5 - \frac{2}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

per $n = 1$ abbiamo $x_1 = 3$, poi per $n = 2$ abbiamo $x_2 = 4$, poi $x_3 = 5 - \frac{2}{3}$ etc.
L'idea dell'insieme è che al crescere di n ci avviciniamo sempre di più al valore 5.

$$f(x) = 5 - \frac{2}{x}$$

img23
Troviamo inf e sup di A:

$$inf(A) = 3 = min(A)$$

Per verificare che 3 sia l'inf devo verificare che sia un minorante e sia il massimo dei minoranti.
Verifichiamo che 3 sia un minorante:

$$3 \leq x_n$$
$$3 \leq 5 - \frac{2}{n}$$
$$\frac{2}{n} \leq 2$$
$$\frac{1}{n} \leq 1$$

Ora verifichiamo che sia il massimo dei minoranti, cioè che se salgo sopra il 3, non trovo più un minorante:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ x_n \ : \ x_n < 3 + \epsilon$$
$$5 - \frac{2}{n} < 3 + \epsilon$$
$$\frac{2}{n} > 2 - \epsilon$$
$$n < \frac{2}{2 - \epsilon}$$

essendo $\frac{2}{2-\epsilon}$ maggiore di 1 mi basta prendere $n = 1$.
Inoltre 3 è anche minimo perchè appartiene all'insieme.
Verifichiamo ora che 5 è il sup ma non il max di A.

$$sup(A) = 5 \neq max(A)$$

Per essere il sup deve essere maggiorante e il minimo dei maggioranti.

$$5 \geq X_n \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$5 \geq 5 - \frac{2}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$0 \geq -\frac{2}{n}$$

Ora voglio verificare che sia il minimo dei maggioranti, cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \, x_n \ : \ x_n > 5 - \epsilon$$

$$5 - \frac{2}{n} > 5 - \epsilon$$

$$-\frac{2}{n} > -\epsilon$$

$$\epsilon > \frac{2}{n}$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

$$n = \frac{2}{\epsilon} + 3$$

Ora dobbiamo dimostrare che non è il massimo, cioè che non appartiene all'insieme.
Tutti gli elementi dell'insieme hanno la forma

$$5 - \frac{2}{n}$$

Ma siccome non esiste n per cui $5 - \frac{2}{n} = 5$, l'elemento non appartiene all'insieme.
L'insieme è limitato? sì.
Tutti i punti sono isolati? sì, dimostriamolo:

$$x_{\bar{n}} = 5 - \frac{2}{\bar{n}}$$

$$d = dist(x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}) = \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}$$

se quindi prendiamo l'intorno

$$B(x_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}) \quad (?)$$

abbiamo dimostrato che tutti i punti sono isolati.
Troviamo ora il limite per $n \to \infty$ e dimostriamolo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x_n = 5 - \frac{2}{n} \ \ , n \in \mathbb{N} - 0\}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 5$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \, \bar{n} \ : \ \forall n > \bar{n} \ \ vale \ \ |x_n - 5| < \epsilon$$

$$|x_n - 5| < \epsilon$$

$$|(3 - \frac{2}{n} - 5)| < \epsilon$$

$$\frac{2}{n} < \epsilon$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

es. dimsotrare

$$lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{n^2-1}=3$$

$$\forall\epsilon>0\;\exists\;\bar{n}\;:\;\forall n>\bar{n}\;\;vale\;\;|\frac{3n^2+n}{n^2-1}|<\epsilon$$

$$|\frac{n+3}{n^2-1}|<\epsilon$$

$$-\epsilon<\frac{n+3}{n^2-1}<\epsilon$$

$$\begin{cases}\frac{n+3}{n^2-1}>-\epsilon\\ \frac{n+3}{n^2-1}<\epsilon\end{cases}$$

La prima disequazione è sempre verificata, per la seconda:

$$\epsilon n^2-n-(\epsilon+3)>0$$

$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\epsilon(\epsilon+3)}}{2\epsilon}$$

$$n\leq\frac{\alpha??}{2\epsilon}\vee\frac{1+\sqrt{1+4\epsilon(\epsilon+3)}}{2\epsilon}$$

es. descrivere il carattere della seguente successione:

$$a_n=n-2cosn\frac{\pi}{2}\;\;\to n\in\mathbb{N}-\{0\}$$

notiamo un pattern:

$$cos(1+\frac{\pi}{2})=0\;\;,\;\;cos(2+\frac{\pi}{2})=-1\;\;,\;\;cos(3+\frac{\pi}{2})=0\;\;,\;\;cos(4+\frac{\pi}{2})=1$$

al crescere di n il pattern si ripete. La nostra successione quindi si muove così:z

$$a_1=1\;\;,\;\;a_2=4\;\;,\;\;a_3=3\;\;,\;\;a_4=2$$

quindi a_n è:

$$a_n=\begin{cases}4k+1 & se\;n=4k+1\\ 4k+4 & se\;n=4k+2\\ 4k+3 & se\;n=4k+3\\ 4k+2 & se\;n=4k+4\end{cases}$$

con $k\in\mathbb{N}$
Il limite di a_n per $n\to+\infty$ é $+\infty$.
dimostriamolo:

$$\forall k>0\;\exists\;\bar{n}\;:\;\forall n\geq\bar{n}\;\;vale\;\;a_n>k$$

qualunque k fissato riesco a trovare un $\bar{n}$ per cui tutti i successivi elementi sono maggiori di k.
[manca dimostrazione] ...

es.

$$a_n=(1-cos\frac{9}{10}\pi)^n$$

E' simile alla successione geometrica ($a_n=q^n$).
Analiziamo la sua ragione:

$$-1<cos\frac{9}{10}<0$$

quindi

$$1<q<2$$

diverge a $+\infty$

3-ESERCITAZIONE

15/10/19

Limiti

Vediamo un piccolo riassunto dei concetti fondamentali sui limiti:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad se \quad \forall\, B_r(l)\; \exists\, B_r(c) \quad : \quad \forall\, x \in B_r(c) \cup D_f, f(x) \in B_r(l)$$

$$f \sim c \quad per \quad x \to c \quad se \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad in\ B_r(c) \quad se \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad per\ x \to c$$

Vediamo alcuni degli asintotici notevoli più diffusi:
per tutti vale che $x \to 0$

$$sin(x) = x + o(x) \sim x$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$ln(1+x) = x + o(x) \sim x$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \sim 1 + x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x) \sim 1 + \alpha \cdot x$$

$$tan(x) = x + o(x) \sim x$$

$$arcsin(x) = x + o(x) \sim x$$

$$arctan(x) = x + o(x) \sim x$$

Vediamo ora le proprietà di o-piccolo:

$$f(x) = o(g(x)) \;\; se \;\; \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to c} \frac{o(g(x))}{f(x)} = 0$$

$$c \cdot o(g(x)) = o(c \cdot g(x)) = o(g(x))$$

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$$

$$g(x) \cdot o(f(x)) = o(g(x) \cdot f(x))$$

$$o(g(x)) \cdot o(f(x)) = o(g(x) \cdot f(x))$$

$$o(1) = \epsilon(x)$$

Vediamo la gerarchia degli infiniti:
Per $x \to \infty$ e $0 < \alpha < \beta$ e $1 < a < b$:

$$(log_a(x))^\alpha \quad << \quad x^\alpha \quad << \quad x^\beta \quad << \quad a^x \quad << \quad b^x \quad << \quad b^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} ln(cos(x)) = ln(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) \sim -\frac{x^2}{2}$$

Da notare che $o(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = o(x^2)$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + ln(x) + sin(x^2)}{x + x \cdot ln(x) + 4^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x \cdot ln(x)} = +\infty$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

tramite la gerarchia degli infiniti otteniamo:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{0}{0} =$$

tramite la gerarchia degli infiniti otteniamo:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Un altro modo per risolvere l'esercizio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\cdot(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\cdot(x^{\frac{3}{2}}+1)} = 1$$

es. Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^{3x} = 1^{\infty} =$$

Si può facilmente usare il limite che definisce il numero e per svolgere l'esercizio, ma vediamo come risolverlo senza questo limite notevole:
Possiamo usare la seguente uguaglianza: $x = e^{ln(x)} = ln(e^x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{3x\cdot ln(1+\frac{1}{x})} =$$

Ora usiamo $ln(1+x) = x + o(x)$ nell'intorno dell'origine e ricordiamoci le proprietà di o-piccolo: $f(x)\cdot o(g(x)) = o(f(x)\cdot g(x))$ e $c\cdot o(f(x)) = o(c\cdot f(x)) = o(f(x))$ con c una costante

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{3x(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))} = \lim_{x\to+\infty} e^{3+o(1)} =$$

dove $o(1)$ è un infinitesimo, quindi:

$$= e^3$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^-x}{sin(x)} = \frac{0}{0} =$$

risolviamo questo limite con gli o-piccolo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-(1-x+o(x))}{x+o(x)} =$$

Da notare come $o(-x) = o(x)$.
Perchè abbiamo deciso di usare gli o-piccoli? perchè se cerco di approssimare il limite senza gli o-piccoli

perdo informazioni e non riesco a risolvere il limite e raggiungo la forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$, con gli o-piccoli invece mantengo informazion ipiù dettagliate.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = 2$$

es. es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(\sqrt[3]{x})}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} + o(x^{\frac{1}{3}})}{2x} = +\infty$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{1 - x^2} = \frac{0}{0} =$$

cerchiamo di trasformare l'argomento del logaritmo in forma $1+$ infinitesimo, usiamo un cambio di variabile:

$$y = x - 1$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{ln(1 + y)}{-y(y + 2)} =$$

Il denominatore viene da: $(1 - x^2) = (1 + x) \cdot (1 - x)$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y + o(y)}{-y(y + 2)} = -\frac{1}{2}$$

Gli o-piccoli bisogna portarseli dietro fino alla fine, solo allora si decide se servono o se van ignorati, per esempio in questo esercizio solo nell'ultimo passaggio abbiamo deciso di ignorare $o(y)$ perchè era di un ordine di infinitesimo trascurabile.

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{-n} \cdot cos(n)}{sin(\frac{1}{n})} = \frac{0}{0}$$

Trascuriamo per il momento $cos(n)$ e valutiamo solo:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{\cdot n}}{sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to +\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \sim \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{e^n} \to 0$$

Riaggiungiamo ora $cos(n)$:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{-n} \cdot cos(n)}{sin(\frac{1}{n})} = \frac{n}{e^n} cos(n) = 0$$

es. Scrivere lo sviluppo asintotico della seguente successione

$$a_n = (-)^n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}) \cdot arctg(\frac{n^2}{1 - n})$$

Dobbiamo usare la seguente formula:

$$arcth(x) + arctg(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}$$

Ll'argomento dell'arcotangente si comporta così

$$\frac{n^2}{1 - n} < 0 \qquad \forall\, n \geq 2$$

Nell'intonro dell'origine

$$arctg(x) = x + o(x) \sim x \qquad con \;\; f(x) \to 0 \quad arctg(f(x)) = f(x) + o(f(x))$$

$$arctg(\frac{n^2}{1-n}) = -\frac{\pi}{2} - arctg(\frac{1-n}{n^2})$$

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (-\frac{\pi}{2} \cdot arctg(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}))$$

Poichè

$$\frac{1}{n^2} << \frac{1}{n}$$

posso ignorare $\frac{1}{n^2}$:

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (-\frac{\pi}{2} \cdot arctg(\frac{1}{n})) =$$

ora usando $con \;\; f(x) \to 0 \quad arctg(f(x)) = f(x) + o(f(x))$ ottengo:

$$= (-)^{n+1}(\frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) + o(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) =$$

Svolgiamo ora tutti i conti

$$= (-)^{n+1} \cdot (\frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n})) = (-)^{n+1}\frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$a_n \sim (-)^{n+1}\frac{\pi}{n}$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x-3} = \frac{0}{0} =$$

Per il teorema di Ruffini $P(3) = 0 \Longleftrightarrow P(x)/(x-3)$ ($P(x)$ significa polinomio di x...)

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x-3)\cdot(x+1) = 0$$

Abbiamo risolto il limite senza sviluppi particolari. Ma ora vogliamo sapere il comportamento del limite in un intorno di 3:

$$4(x-3) \sim f(x)$$

quindi in un intorno di 3 il comportamento asintotico è approssimabile a quello della retta $4(x-3)$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}} = \infty^0 =$$

Risolviamo passando all'esponenziale

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{ln(n^{\frac{2}{n}})} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}\cdot ln(n)} =$$

a questo punto non dobbiamo approssimare con gli asintotici il logaritmo perchè $n \to \infty$, invece usiamo la gerarchia degli infiniti:

$$= e^0 = 1$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})} - x) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1) =$$

usiamo $(1+f(x))^\alpha = 1 + \alpha f(x) + o(f(x)) \sim 1 + \alpha f(x)$ con $f(x)$ funzione infinitesima

$$= \lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - 1 = \lim_{x\to+\infty} x(-\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) = 0$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{sin(ln(x))}{ln(x)} = 1$$

perchè sappiamo $ln(x) \to 0 \quad per \ x \to 1$ e che $sin(x) \sim x \quad per \quad x \to 0$, quindi $\frac{sin(x)}{x} \to 1 \quad per \ \ x \to 0$
Un altro modo di vedere la soluzione è il seguente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{sin(ln(x))}{ln(x)} = \frac{ln(x) + o(ln(x))}{ln(x)} = 1$$

che usa il principio che $sin(x) \sim x \ \ per \ x \to 0$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x+3) - sin(x)}{x \cdot cos(x)} = \frac{0}{0} =$$

usiamo le formule di addizione del seno

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)cos(3) + cos(x)sin(3) - sin(3)}{x \cdot cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)cos(3)}{x \cdot cos(x)} + \frac{cos(x)sin(3) - sin(3)}{x \cdot cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} (\frac{sin(x)}{x} \cdot \frac{cos(3)}{cos(x)} + \frac{sin(3)}{cos(x)} \cdot \frac{cos(x) - 1}{x}) =$$

Vediamo che $\frac{cos(x)-1}{x} \to 0$, poi $\frac{sin(3)}{cos(x)} \cdot \frac{cos(x)-1}{x} \to 0$, poi $\frac{sin(x)}{x} \to 1$

$$= cos(3)$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sin(x)}{x - \pi} = \frac{0}{0}$$

Facciamo un cmabio di variabile

$$y = x - \pi$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \to 0} -\frac{sin(y)}{y} = -1$$

es. Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}} = \infty \cdot 0 =$$

in un intorno dell'origine $1 - cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{2x} =$$

$$= \begin{cases} per \ x \to 0^+ & \frac{1}{2} \\ per \ x \to 0^- & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi il limite non esiste.

es. Risolvere i lseguente limite:

$$\lim_{x \to e} \frac{ln(x) - 1}{x - e} =$$

Facciamo un cambio variabile per avere un logaritmo più comodo

$$y = x - e$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{ln(y+e)-1}{y} =$$

Sappiamo che $ln(1+\epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$, per cui raccogliamo nel logaritmo per avere questa forma:

$$\lim_{y\to 0} \frac{ln[e(1+\frac{y}{e})]-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1+ln(1+\frac{y}{e})-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{ln(1+\frac{y}{e})}{y} = \lim_{y\to 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y}{e}+o(y)}{y} = \frac{1}{e}$$

4-ESERCITAZIONE

21/10/19

esercitazione sostitutiva

es. Dimostrare che:

$$n^{\frac{n}{2}} < n! \quad per \quad n \to +\infty$$

$$n! = n \cdot (n-1) \dots (\frac{n}{2}) \dots 1 > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2})!$$

Quindi dopo questa trasformazione mi basta dimostrare:

$$(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2})! > n^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot (\frac{n}{2})! > n^{\frac{n}{2}}$$

$$(\frac{n}{2})! > 2^{\frac{n}{2}}$$

se poniamo $x = \frac{n}{2}$

$$x! > 2^x$$

che è vero e quindi dimostrato.

es. Svolgere il seguente limite

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

Ci sono diversi modi per fattorizzare il numeratore:

- Ruffini
- con un cambio di variabile

Proviamo con il cambio di variabile $y = x - 3$

$$\lim_{y \to 0} \frac{(y+3)^2 - 5(y+3)^2 + 3(y+3) + 9}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3 + 4y^2}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2(y+4)}{y} = 0$$

Proviamo con Ruffini:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x-3)(x+1) = 0$$

es. Svolgere il seguente limite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{sin(x)}{x - \pi} = \frac{0}{0}$$

Noi sappiamo che $\lim_{x \to 0} sin(x) \sim x$, ma se guardiamo il grafico della funzione seno, notiamo che nell'intorno di π comunque ci avviciniamo a zero in modo estremamente simile.
Lavoriamo ora con un cambio variabile $y = x - \pi$

$$\lim_{y \to 0} \frac{sin(x+\pi)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-sin(y)}{y} = \lim_{y \to 0} -\frac{y + o(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y(-1 + o(1))}{y} = -1$$

es. Svolgere i seguenti due limiti:

$$a) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}}$$

$$b) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}}$$

vediamo a):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{|x|}{2} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} & \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 0^-} & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il limite non esiste.
vediamo b):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2} \cdot \frac{1}{|x} = \frac{1}{2}$$

Il limite esiste.

Ordini di infinitesimo

def. $x \to x_0 \wedge f(x) \to 0 \qquad f$ è **infinitesimo** nell'intonro di x_n.

def. infinitesimo campione di ordine k:
con x_0 finito: $i_k(x) = |x - x_0|^k$ con $k > 0$ si dice infinitesimo campione di ordine k per $x \to x_0$
con x_0 infinito: $i_k(x) = \frac{1}{|x|^k}$ con $k > 0$ si dice infinitesimo campione di ordine k per $x \to x_0$

def. dico f infinitesimo di ordine k se:

$$per \quad x \to x_0 \quad \frac{f(x)}{i_k(x)} \longrightarrow c \qquad con \;\; c \neq 0 \;\; e \;\; finito$$

es. trovere l'ordine dei seguenti infinitesimi:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3}$$

Questa funzione per $x \to 3$ tende a 0, ma con che ordine?

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{x-3} \cdot \frac{1}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^{k+1}} \to 4$$

$$2 = k + 1 \to k = 1$$

$$f(x) = 4(x-3) + o(x-3)$$

Ordini di infinito

def. $x \to x_0$ e $f(x) \to \infty$, f è **infinito** per $x \to x_0$

def. infinito campione
per x_0 finito: $i_k(x) = \frac{1}{|x - x_0|^k}$ con $k > 0$ si dice infinito campione di k-esimo ordine
per x_0 infinito: $i_k(x) = |x|^k$ coon $k > 0$ si dice infinito campione di k-esimo ordine.

def. dico f infinito campione di ordine k seguente

$$per \quad x \to x_0 \quad \frac{f(x)}{i_k(x)} \to c \qquad c \neq 0 \;\; e \;\; finito$$

es. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-1}-x$$

$$\mathbb{D}(f):(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$$

Vediamo questa funione per $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x^k}=$$

Facendo uscire l'x^2 dalla radice mi esce $|x|$, ma andando a $\to-\infty$ posso sostituire il modulo con un "$-$":

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x((1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}+1)}{x^k}=c$$

Che è vera per $k=1$
vediamo la funzione per $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}x[(1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}+1]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot[-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})=0^-$$

Ho quindi trovato che $lim\frac{f(x)}{\frac{1}{2}}=lim\frac{-\frac{1}{2}+o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$, che è un numero finito, quind $k=1$, cioè infinito di ordine 1.

es. calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to1}\frac{(log(x))^2}{(2x-2)^2}=\frac{0}{0}$$

Noi sappiamo che $log(1+z)=z+o(z)$ per $z\to0$, quindi trasformiamo il limite così:

$$\lim_{x\to1}\frac{[log(1+(x-1))]^2}{[2(x-1)]^2}=\lim_{x\to1}\frac{[(x-1)+o(x-1)]^2}{4(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2[1+o(1)]}{4(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1+o(1)}{4}=\frac{1}{4}$$

Abbiamo trovato che:

$$per\quad x\to1\quad log^2(x)=(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

quindi $k=2$, quindi abbiamo un ordine di infinitesimo di 2.

es. calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot log(\frac{x+4}{x-1})=[0\cdot\infty]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot log(\frac{x-1+5+1}{x-1})=\lim_{x\to+\infty}x\cdot log(1+\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to+\infty}x\cdot[\frac{6}{x-1}+o(\frac{1}{x-1})]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x}[\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+o(1)]=6$$

Si vede che $log(\frac{x+5}{x-1})\to0$ è infinitesima per $x\to+\infty$,
ord. inf:

$$\frac{f(x)}{i_k(x)}=\frac{log(\frac{x+5}{x-1})}{\frac{1}{x^k}}=x^k\cdot log(\frac{x+5}{x-1})\to6(\neq0)\quad se\quad k=1$$

quindi è di ordine 1.

es. calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{log(log(x))}{log(x)-4}=\frac{\infty}{\infty}$$

Facciamo un cambio variabile $y=log(x)$

$$\lim_{y\to+infty}\frac{log(y)}{y-4}\to0$$

Cerchiamo ora l'ordine di infinitesimo:

$$\frac{f(x)}{i_k(x)} = \frac{log(log(x)) \cdot x^k}{log(x) - 4} = \rightarrow y = log(x) \rightarrow = \frac{log(y)}{y-4} \cdot e^{ky} \quad , \quad per \;\; x \rightarrow +\infty : \quad \begin{cases} +\infty & k > 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Poichè il valore o è infinito o zero, non esiste nessun ordine di infinitesimo.

es. studio locale di

$$f(x) = \frac{log(x)}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Tracciamo un grafico seguendo questo processo:

- dominio, zeri e segno
- negli zeri e alla frontiera del dominio cerco sviluppi asintotici

Dominio:

$$\mathbb{D}(f) = \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

Segno:
è sempre positiva.
Zeri:
non ci sono zeri.
Frontiere del dominio:

- se $x \rightarrow 1$: $f = \frac{0}{0} = \frac{log(1+(x-1))}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = (x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot [1 + o(1)] \sim (x-1)^{\frac{2}{3}} \rightarrow 0$, quindi è una fuznione infinitesima di ordine $k = \frac{2}{3}$, cioè nell'intonro di 1 si comporta come $x^{\frac{2}{3}}$ (cuspide)
- se $x \rightarrow 0^+$: $f \sim -log(x) \rightarrow +\infty$, di cui, però, non si trova un ordine di infinito, è semplicemente un infinito logaritmico.
- se $x \rightarrow +\infty$: $f = \frac{\infty}{\infty} = \frac{log(x)}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}} \rightarrow 0^+$

6-ESERCITAZIONE

29/10/19

Studi di funzione (non completi)

es.

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}}$$

Dominio:

- logaritmo: $x > 0$
- denominatore: $ln(x) \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

Zeri della funzione:

$$f \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$$

Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = 0^+ \qquad x \to 0, f(x) \sim x$$

Quindi la funzione nell'intorno dell'origine si comporta come la bisettrice $y = x$.

$$\lim_{x \to 1^-} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = 0^+$$

Confrontiamo questo limite con l'infinitesimo campione (l'infinitesimo campione per $x \to 0$ è x^a, invece per $x \to 1$ è $(x-1)^a$ o $(1-x)^a$). Se ora faccio il rapporto della nostra funzione e l'inititesimo campione posso ricavare l'ordine di infinitesimo della funzione (cioè a):

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}}}{(1-x)^a} =$$

Con $a > 0$.
Cerchiamo di risolvere il logaritmo ponendo $t = 1 - x$, quindi $x = 1 - t$ e per $x \to 1^-$ ottengo $t \to 0^+$.
Inoltre la x al numeratore tende a 1, quindi la ignoro.
Il risultato è:

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{\frac{1}{ln(1-t)}}}{t^a} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^a} = 0 \qquad \forall \; a > 0$$

Siccome la formula è valida per ogni $a > 0$, capisco che la funzione $f(x)$ per $x \to 1^-$ è un infinitesimo superiore di qualunque ordine di x^a. Quindi la funzione per $x \to 1^-$ la funzione $f(x)$ è convessa.

$$\lim_{x \to 1^+} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = +\infty$$

Quindi in $x = 1$ abbiamo un asintoto verticale per $x \to 1^+$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} = +\infty$$

Cerchiamo quindi se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{ln(x)}} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{ln(x)}} - x = \lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{ln(x)}} - 1) = \lim_{x \to +\infty} x(1 + \frac{1}{ln(x)} + o(\frac{1}{ln(x)} - 1)) = +\infty$$

Quindi non esiste asintoto obliquo.
[immagine: mancante]

es.

$$y = 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x}$$

Dominio: $\mathbb{D}: \quad e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ che equivale a $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = -\infty$$

E posso dedurre che per $x \to -\infty$ la nostra funzione $f(x) \sim -6e^{-x}$, quindi la funzione per $x \to -\infty$ è concava.

$$\lim_{x \to 0^-} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale nell'intorno dell'origine. Ora confrontiamo la funzione con l'infinito campione $(\frac{1}{x})^a$ nell'intorno dell'origine, con $a > 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x}}{(\frac{1}{x})^a} = \lim_{x \to 0} -2x^a ln(|e^x - 1|) = 0 \qquad \forall\, a > 0$$

Quindi questa funzione tende a $+\infty$ più lentamente di qualunque funzione $(\frac{1}{x})^a$ [non sono sicuro].

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(|e^x - 1|) - 6e^{-x} = 1 + x - 2(x + ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} =$$

abbiamo tolto il modulo perchè l'argomento del logaritmo è sicuramente positivo

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + x - 2x - 2(-\frac{1}{e^x} + o(\frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} = -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali, cerchiamo se c'è asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1 = m$$

(ricavato coi conti del limite precedente)

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + x - 2 \cdot ln(e^x - 1) - 6e^{-x} + x = 1 + 2x - 2(x + ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} =$$

$$= 1 + 2x - 2x + 2ln(1 - \frac{1}{e^x})) - 6e^{-x} = 1$$

Asintoto obliquo trovato. [immagine: mancante]

es.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^6 - 6x^5}}{x}$$

Dominio: La radice cubica non ha restrizioni, devo solo guardare il denominatore, quindi $x \neq 0$: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ora che sappiamo che $x \neq 0$ posso riscrivere la funzione così:

$$f(x) = \frac{x\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$$

Se $x \to 0$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}}$$

perciò $f(x) \sim -\sqrt[3]{6}\, x^{\frac{2}{3}}$ che rappresenta una cuspide rivolta verso l'alta in con punta (bucata) in $x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}} = -\infty.$$

Quindi non esiste asintoto orizzonatle, cerchiamo quell oobliquo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}}}{x} = (1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = x(1 - \frac{6}{x})^{\frac{1}{3}} - x = \lim_{x \to -\infty} x(1 - \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}) - 1) = -2.$$

$x = 6$ è zero della funzione, quindi studiamone il comportamento asintotico:

$$x \to 6 \qquad f(x) \sim 6^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}$$

Cioè graficamente si ha un flesso a tangente verticale in $x = 6$
[immagine: mancante]

es. grafico nell'intorno di 0 di

$$y = \frac{sin(x^2)ln(1-x^3)}{1-cos(2x)}$$

Per $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{x^2\cdot(-x^3)}{\frac{4x^2}{2}} = -\frac{x^3}{2}$ Quindi c'è un flesso a tangente orizzontale.

es. In un intorno di 1 disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^3-1)^2} = \sqrt[3]{((x-1)^2(x^2+x+1)^2)} = \sqrt[3]{9}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}$$

Quindi abbiamo una cuspide con punta verso il basso.

es. Studiare la funzione localmente nei punti che si ritengono significativi

$$y = \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Dominio: $(0,1)\cup(1,+\infty)$

- logaritmo: $x > 0$
- radice cubica non da restrizione sul Dominio
- denominatore: $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 0^+} y = +\infty$$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale a destra e $f(x)$ è convessa per $x \to 0^+$, $y \sim -ln(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

Poniamo $t = x-1$ e quindi $x = 1+t$, che per $x \to 1^- \Rightarrow t \to 0^-$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{ln(1+t)}{t^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t\to 0^-} t^{\frac{2}{3}}$$

L'esercizio era risolvibile anche aggiungendo all'argomento del logaritmo "$+1-1$".
Comunque $f(x) \sim (x-1)^{\frac{2}{3}}$, che è una cuspide verso il basso con punta bucata in 1.

In $B(+\infty)$ possiamo dire che $f(x) \sim \frac{ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}}$, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

es.

$$f(x) = 2x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Dominio: $x \neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e la funzione per $x \to -\infty$ è $f(x) \sim 2x$. quindi la funzione si approssima all'asintoto $m = 2x$, ma dobbiamo capire se ci si avvicina da sopra o da sotto.
[C'è stato un errore del prof, sono confuso su questa parte]
Ci sono due metodi per scoprirlo:

- fare il limite della differenza e vedere se ci esce positivo o negativo.
- cercare di capire l'andamento generale della funzione analizzando le intersezioni con la retta $m = 2x$

Usiamo il primo metodo:

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-\frac{1}{x}} - 2x = \lim_{x\to-\infty} 2x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to-\infty} 2x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) - 1) = -2 = q$$

Essendo il risultato negativo, vuol dire che l'asintoto è più grande e quindi la nostra funzione ci si avvicina da sotto. Se avessimo avuto un risultato positivo la funzione si sarebbe avvicinata dall'alto.
[fine della parte con l'errore del prof]

$$\lim_{x\to0^-} 2xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{2x}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$$

Un altro modo per vedere quest'ultimo limite:

$$\lim_{x\to0^-} 2xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{2x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+$$

Se ora si facesse lo studio col campione otterremmo: $\lim_{x\to0^+} \frac{2xe^{-\frac{1}{x}}}{x^a} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^{1-a}}{e^{\frac{1}{x}}} = 0, \ \forall\, a > 0$. Questo significa che la funzione è un infinitesimo di ordine superiore a qualuqnue ordine. Perciò in 0^+ la funzione è come un esponenziale.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty =$$

Approssimiamola meglio:

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = \lim_{x\to+\infty} 2x - 2 + o(1)$$

es.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Dominio: $\mathbb{R}$
Zeri: $f(x) = 0$ per $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Per $x \to 0$: $f(x) \sim -3x$, quindi nell'origine la funzione è approssimabile con la retta $-3x$.
Per $x \to 3$: $f(x) \sim \frac{3}{\sqrt{10}}(x-3)$, quindi in $x = 3$ la funzione si comporta come la retta $\frac{3}{\sqrt{10}}(x-3)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 3x}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1 - \frac{3}{x})}{-x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + x(|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2(1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x - \frac{1}{2} + o(1)}{-x(1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} = +3$$

L'asintoto obliquo per $-\infty$ è $y=-x+3$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^2(1+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))}{x(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-\frac{1}{2}+o(1)}{x(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}}=-3$$

Quindi asintoto obliquo per $+\infty$ è $y=x-3$

es.

$$f(x)=\frac{(x^2-4)^2}{(x+1)^3}$$

Dominio: $x\neq-1$
Zeri: $x=\pm2$
Riscriviamo la funzione:

$$f(x)=\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x+1)^3}$$

Per $x\to-2$, $f(x)\sim-16(x+2)^2$, quindi la funzione è come una parabola rivolta verso il basso che tocca $x=-2$) e $x=-2$ è un punto di massimo locale.
Per $x\to+2$, $f(x)\sim\frac{16}{27}(x-2)^2$, quindi anche qui una parabola rivolta verso l'alto, e $x=2$ è un punto di minimo locale.

$$\lim_{x\to-1^{\mp}}f(x)=\mp\infty$$

Quindi $x=-1$ è un asintoto verticale a sinistra e a destra .

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-4)^2}{(x+1)^3}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-8x^2+16-x^4-3x^3-3x^2-x}{(x+1)^3}=-3$$

Quindi $y=x-3$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$. Ora ci sarebbe da scoprire se sta sopra o sotto l'asintoto obliquo.
[da finire a casa]

7-ESERCITAZIONE

12/11/19

Derivate

es.

$$y = x^2 + x^4$$

Analizzare la retta tangente nel punto $(1, 2)$, con la definizione di derivata.

$$m = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + (1+h)^4 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + 4h^2 + h^4 + 4h + 2h^2 + 4h^3 + -2}{h} = 6$$

Quindi avremo $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, che diventa $y - 2 = 6(x - 1)$, $y = 6x - 4$.

es. Con la definizione di derivata calcolare la derivata di:

$$f(x) = a^{2x+1}$$

con $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{2(x+h)+1} - a^{2x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{2x+1}(a^{2h} - 1)}{h} =$$

$$= a^{2x+1} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{2 \cdot h \cdot ln(a)} - 1}{h} = 2 \cdot ln(a) \cdot a^{2x+1}$$

es. Studiare la continuità, la derivabilità di $f(x)$ e la continuità di $f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 2\sqrt{x} \cdot sen(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione è continua perchè composta di funzioni elementari continue nel loro dominio. Analiziamo l'unico punto problematico, cioè $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Perciò la funzione è continua.
Analiziamo quindi la derivabilità: se esistono finiti $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L$, allora la funzione è derivabile.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot sen(x) + 2\sqrt{x} \cdot cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot sen(x) + 2\sqrt{x} \cdot cos(x) = 0$$

Quindi il limite destro e sinistro della derivata esistono, coincidono e sono finiti. Concludo che $\exists \ f'(0) = 0$ e la derivata è continua.

es. Sia data $y = f(x)$ tale che $f(1) = 1$ e $f'(1) = 3$, calcolare $[f(x^2)]'_{x=1}$.

$$[f(x^2)]'_{x=1} = [f'(x^2) \cdot 2x]_{x=1} = 3 \cdot 2 = 6$$

Calcolare $[x^2 + f(x)]'_x = 1$

$$[x^2 + f(x)]'_x = 1 = [2x + f'(x)]_x = 1 = 2 + 3 = 5$$

Calcolare $[\frac{x^2}{f(x)}]'_{x=1}$

$$[\frac{x^2}{f(x)}]'_{x=1} = [\frac{2x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x)}{f^2(x)}]_{x=1} = \frac{2 \cdot 1 - 1^2 \cdot 3}{1} = -1$$

es. Studio di funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$$

Dominio: $\frac{x^2}{x+1} \geq 0$, numeratore: $x \geq 0$, denominatore: $x > -1$, quindi $x < -1 \cup x \geq 0$.
Segno della funzione: $f \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{D}$
Zeri della funzione: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, quindi $x = 0$ è minimo globale.
Analiziamo il comportamento asintotico della funzione in 0: $x \to 0 \quad f(x) \sim x^{\frac{3}{2}}$
Calcoliamo ora i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Cerchiamo se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot |x| \sqrt{\frac{x}{x+1}} = -1 = m.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = -x \cdot \sqrt{\frac{x}{x+1}} + x = \lim_{x \to -\infty} -x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - 1) = +\frac{1}{2} = q.$$

Quindi esiste asintoto obliquo $y = -x + \frac{1}{2}$, (per capire se la funzione converge a questo asintoto da sopra o da sotto, useremo la derivata seconda). Continuiamo con il prossimo limite:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

Quindi la retta $y = -1$ è un asintoto verticale. Continuiamo con il prossimo limite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Cerchiamo se esiste un asintoto obliquo. Modificando leggermente i calcoli già fatti per $x \to -\infty$ otteniamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = m$, per la q, invece, otteniamo $q = -\frac{1}{2}$. Perciò l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è $y = x - \frac{1}{2}$.
Derivate:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}} \cdot \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^3}} \cdot \frac{(2x+3)x^2}{(x+1)^2}$$

Segno della derivata: Per come è fatta $f'(x)$, la derivata è positiva quando $2x+3$ è positiva. Quinid $2x + 3 \geq 0$ per $x \geq -\frac{3}{2}$, quindi $f(-\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{27}{4}}$ è un minimo locale della funzione. L'asintoto in $-\frac{3}{2}$ vale 2. Siccome $\sqrt{\frac{27}{4}} > 2$, la funzione è sopra all'asintoto.
Vediamo Se la funziona interseca gli asintoti, analiziamo per $x < -1$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = -x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 + \frac{1}{4} - x$$

$$x^3 = x^3 + \frac{1}{4}x - x^2 + x^2 + \frac{1}{4} - x$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Ma siccome siamo in $x < -1$, il risultato $x = \frac{1}{3}$ non è accettato e quindi la funzione non interseca l'asintoto. Vediamo ora per $x > \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = x - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Ma per lo stesso motivo il risultato $x = \frac{1}{3}$ non è accettato, quindi la funzione non interseca l'asintoto.
Saltiamo la derivata seconda perchè è troppo complicata.
[immagine: grafico della funzione]

es. Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - ln(x) > 0$$

Per risolvere questa disequazione facciamo uno studio di funzione chiamando $f(x) = x^2 - ln(x)$.
Dominio: $(0, +\infty)$
Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Derivata:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} \geq 0$$

Quindi $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Notiamo che $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un minimo globale.

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$$

[immagine: grafico della funzione]
Quindi la disequaione ha valore $\forall\ x > 0$.

es. [esercizio preso male] Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 \cdot (ln(|x|) - \frac{1}{3})$$

Dominio: $x \neq 0$
Cosideriamo le simmetrie: $f(-x) = -x^3(ln(|-x| - \frac{1}{3})) = -(fx)$, quindi la funzione è dispari e c'è una simmetria rispetto allorigine.
Quindi studio $f_1(x) = x^3(ln(x) - \frac{1}{3})$ nel dominio $(0, +\infty)$, da cui poi ricavo $f(x)$ per simmetria.

$$f_1(x) \geq 0$$

$$ln(x) \geq \frac{1}{3}$$

$$x \geq e^{\frac{1}{3}}$$

$$t = x - e^{\frac{1}{3}}$$

$$f_1(t) = (t + e^{\frac{1}{3}})^3 \cdot (ln(t + e^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{3}) =$$

$ln(e^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{t}{e^{\frac{1}{3}}})) = \frac{1}{3} + ln(1 + \frac{t}{e^{\frac{1}{3}}})$

$$= (t + e^{\frac{1}{3}})^3 \cdot (ln(1 + \frac{t}{e^{\frac{1}{3}}})) \sim (per\ \ t \to 0) : (e^{\frac{1}{3}})^3 \cdot \frac{t}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{2}{3}} \cdot t$$

Da qui ricaviamo che

$$per \quad x \to e^{\frac{1}{3}} \qquad f_1(x) \sim e^{\frac{2}{3}}(x - e^{\frac{1}{3}})$$

Poi vediamo i limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$f_1'(x) = 3x^2(ln(x) - \frac{1}{3}) + x^2 = x^2(3ln(x)) \geq 0$$

Da cui $x \geq 1$.
$x = 1$ è un minimo globale di f_1, $f_1(1) = -\frac{1}{3}$.
Analiziamo la derivata seconda:

$$[x^2 \cdot 3 \cdot ln(x)]' = f_1''(x) = 6x \cdot ln(x) + 3x = 3x(2ln(x) + 1)$$

$$3x(2ln(x) + 1) \geq 0$$

in $ln(x) \geq -\frac{1}{2}$, $x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, quindi c'è un flesso qui.
A questo punto basta fare la simmetria rispetto allìorigine e lo studio di funzione è finito.
[immagine: grafico della funzione]

es. trovare tutto gli ottimi globali e locali nell'intervallo $[-1, 1]$ della funzione:

$$f(x) = x + x^{\frac{2}{3}}$$

Cerchiamo i minimi e massimi nei punti tali che $f'(x) = 0$, nei punti in cui la funzione non è derivabile e negli estremi del dominio.
Estremi del dominio:

$$f(-1) = 0$$

$$f(1) = 2$$

Vediamo ora la derivata

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} + 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Il dominio della derivata è $[-1, 1] - \{0\}$.

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \mp\infty$$

Quindi $f(0) = 0$ è punto di minimo relativo.

$$f(x) \geq 0$$

$$x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + 1) \geq 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} \geq -1$$

$$x \geq -1$$

Quindi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$.

$$f'(x) \geq 0$$

denominatore > 0 quando $x > 0$
numeratore ≥ 0 quando $\sqrt[3]{x} \geq -\frac{2}{3}$
Quindi la funzione è crescente per $x < -\frac{8}{27}$, decrescente per $-\frac{8}{27} < x < 0$ e crescente per $0 < x < 1$.
Quindi calcoliamo $f(-\frac{8}{27}) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$.
Qindi:

- $x = -1$ e $x = 0$ sono minimi assoluti
- $x = -\frac{8}{27}$ è punto di massimo relativo
- $x = 1$ è punto di massim0 assoluto.

Questo esercizio mostra come non bisogna analizzare solamente la derivata prima per trovare i massimi e i minimi.

es. Trovare gli asintoti (1), gli intervalli di monotonia(2) e dimostrare che la funzione ammette un solo zero e che sia in $(0,1)$

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}+arctan(\frac{1}{x})$$

$$f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}+arctan(\frac{1}{x})$$

Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.
Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

Quindi $x=0$ è un punto di discontinuità a salto.

$$\lim_{x\to 1^{\mp}}f(x)=\mp\infty$$

Quindi $x=1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

cerchiamo un asintoto obliquo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{1}{x}arctan(\frac{1}{x})=1=m$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}x+1+\frac{1}{x-1}+arctan(\frac{1}{x})-x=(1+\frac{1}{x-1}+arctan(\frac{1}{x}))=1=q$$

Quindi $y=x+1$ è asintoto obliquo della funzione per $x\to-\infty$.
Con praticamente gli stessi conti riusciamo a calcolare i limiti a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=1=1$$

Quindi $y=x+1$ è asintoto obliquo anche per $x\to+\infty$.

$$x\to+\infty\qquad f(x)-(x+1)\sim\frac{1}{x}>0$$

Quindi la funzione sta sopra l'asintoto.
Invece, con un calcolo estremamente simile, capiamo che per $x\to-\infty$ la funzione sta sotto l'asintoto.
Ora studiamo la monotonia della funzione, quindi analiziamo il segno della derivata:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x(x-2)(x^2+1)-(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{x^4-2x^3+x^2-2x-x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^3(x-2)-1}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Ora ne studiamo il segno:

$$\frac{x^3(x-2)-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\geq 0$$

$$x^3(x-2)\geq 1$$

per $x>2$

$$x^3\geq\frac{1}{x-2}$$

per $x<2$

$$x^3\leq\frac{1}{x-2}$$

per $x = 2$ l'equazione non è una soluzione, quindi posso anche ignorarlo. Le due equazioni viste sopra si possono risolvere graficamente disegnano x^3 e $\frac{1}{x-2}$ (iperbole traslata), da cui noto che le due funzioni si intersecano due volte. Quindi la soluzione della disequazione iniziale è valida per una certa $x < \alpha$ e $x > \beta$, con $\alpha < 0 < 1 < 2 < \beta$. α sarà un massimo, mentre β un minimo.
[immagine: grafico della funzione]

a

6-ESERCITAZIONE

19/11/19

[manca]