ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

14 ottobre 2019

[mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1)
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3)
-

3-LEZIONE

10/10/19

[perso i primi 20 minuti]

Sta parlando di limiti...

$$\forall B_s(l) \; \exists \; B_q(x_0) \quad : \quad \forall x \in A \cap B_q(x_0) - \{x_0\} \quad , \quad f(x) \in B_s(l)$$

"per ogni intorno del valore limite l" definitivamente vicino a x_0 la funzione sta nell'intorno del valore limite.

Algebra dei limiti

Per poter fare dei confronti rigorosi fra limiti, ovvero fra funzioni, ho bisogno di introdurre due simboli:

- asintotico: $\sim$
- o-piccolo: o

o-piccolo

def. $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se f è trascurabile rispetto g. Cioè se, confrontando f e g, f perde.

def. Definizione formale:

$$f = o(g) \;\; se \;\; f(x) = g(x)h(x) \;\; e \;\; h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

oss. conseguenza è che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

es. Per $x \longrightarrow 0$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to vera$$

$$x = o(x^2) \to falsa$$

es. Per $x \longrightarrow +\infty$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to falsa$$

$$x = o(x^2) \to vera$$

regola. Nell'intorno dell'origine (tendendo a $\to 0$) potenze alte della variabili sono trascurabili, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più basse.
regola. allontanandosi dall'origine (tendendo a $\to \pm\infty$) potenze basse sono trascurabili rispetto a potenze più alte, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più alte.

Proprietà di o-piccolo

- Costanti in o-piccolo.
  Con $k \in \mathbb{R}$ e costante:

  $$o(k \cdot g) = o(g) = k \cdot o(g)$$

  dim.

  $$f = o(k \cdot g) \to f = o(g)$$

  $$f = k \cdot g \cdot h$$

  ma $h \to 0$, quindi $k \cdot h \to 0$

  $$f = o(g)$$

- Somma di o-piccoli.

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

dim. conseguenza della proprietà precedente.
oss. errore tipico: $o(g) - o(g) = 0$. SBAGLIATISSIMO.
es. per $z \longrightarrow +\infty$

$$f_1 = x^3 - 2x + 4 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_2 = x^3 + x^2 - 7 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_1 - f_2 = x^3 + o(x^3) - (x^3 + o(x^3)) = o(x^3) - o(x^3) \neq 0$$
$$f_1 - f_2 = -2x + 4 - x^2 + 7$$

- Prodotto di funzioni e o-piccolo.
Con f una funzione

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

dim.

$$F = o(g) = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$

moltiplico entrambe le parti per f

$$f \cdot F = f \cdot g \cdot h$$

- Potenze di o-piccolo.
Con $k \in \mathbb{R}^+$

$$[o(g)]^k = o(g^k)$$

dim.

$$G = o(g)$$
$$G = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$

elevo tutto alla k

$$G^k = g^k \cdot h^k \qquad H = h^k \to 0$$

Asintotico

def. f è **asintotico** a g se tendono allo stesso valore e inoltre ci tendono allo stesso modo.

$$f \sim g \quad x \to x_0$$

formalemente:

$$f \sim g \quad se \quad f = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 1$$

oss. conseguenza:

$$\frac{f}{g} \to 1$$

teor. teorema fondamentale che lega $\sim$ e $o()$
per $x \to x_0$

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$$

Due funzioni sono asintotiche se hanno lo stesso termine dominante.

dim. dimostrazione da sinistra a destra ($\Rightarrow$):
ipotesi: $f = g \cdot h$ e $h \to 1$. Sottraggo g da entrambi i membri:

$$f - g = g \cdot h - g = g(h-1) \quad H = h - 1 \longrightarrow 0$$
$$f - g = o(g)$$
$$f = g + o(g)$$

dim. dimostrazione da destra a sinistra ($\Leftarrow$)
ipotesi: $f - g = o(g)$

$$f - g = g \cdot h \quad h \to 0$$
$$f = g + g \cdot h = g(1+h) \quad H = h + 1 \to 1$$
$$f \sim g$$

Proprietà di asintotico

- Potenza di funzioni asintotiche:
$$f \sim g \Longleftrightarrow f^k \sim g^k$$

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f = g \cdot h \quad \dots$$

- Prodotti e rapporti di funzioni asintotiche.
  $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora
$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$
$$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$$
  prodotti e rapporti di funzioni asintotiche sono asintotici fra loro.

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f_1 \sim g_1$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$f_2 \sim g_2$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$\dots$$
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot H \quad H = \frac{h_1}{h_2} \to 1$$

oss. Notare che non c'è una proprietà per la somma di asintotici, che invece nell'o-piccolo c'è.

Limiti notevoli

[Stiamo guardando simulazioni su MATLAB. Osserviamo che il seno nell'intorno dell origine è approssimabile con la bisettrice, il cosendo con la parabola, la funzione esponenziale traslata in giù di un unità con la bisettrice, il logaritmo traslato a sinistra di un unità con la bisettrice,etc.]
Vediamo ora in formule questi risultati:

- **Seno**
  per $x \to 0$
$$sin(x) = x + o(x)$$
  questa uguaglianza si può riscrivere come $sin(x) - x = o(x)$, cioè o(x) è l'errore che sto facendo nell'approssimare $sin(x)$ come x.
  img1
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$sin(x) \sim x$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- **Coseno**
  per $x \to 0$
$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
  img2
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$

- **Esponenziale**
  per $x \to 0$
  $$e^x - 1 = x + o(x)$$
  img3
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$e^x - 1 \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- **Logaritmo**
  per $x \to 0$
  $$ln(1 + x) = x + o(x)$$
  img4
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$ln(1 + x) \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1$$

Per ognuno di questi limiti notevoli sono state fornite tre versioni che rappresentano la stessa cosa, la più importante e più ricca di significato è sempre la prima, quella con o-piccolo.

es. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \qquad x \to +\infty$$
numeratore:
$$3x^4 - x = 3x^4 + o(3x^4) = 3x^4 + o(x^4)$$
$$3x^4 - x \sim 3x^4$$
$$(3x^4 - x)^{\frac{1}{2}} \sim (3x^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} \sim \sqrt{3x^4}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} = \sqrt{3x^4} + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 \sim x^2$$
usiamo ora la proprietà dei rapporti di funzioni asintotiche:
$$\frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{3x^4}}{x^2} = \sqrt{3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} = \sqrt{3}$$

Limite notevole della pontenza α-esima con $0 < \alpha < 1$
$$y = x^\alpha \quad con\ 0 < \alpha < 1$$
$per \ \ x \to 0$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$
$$(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$$
img5
Questo limite notevole viene usato per risolvere le radici.
Forniamo, come per gli altri limiti notevoli visti, le altre due forme notevoli:
$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x\to 0} \dots [manca]$$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)}$$

per studiare il limite analiziamo l'andamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)} \quad per \;\; x \to 0$$

occupiamoci della radice con la proprietà appena vista:

$$(1+t)^\alpha - 1 = \alpha t + o(t) \quad per \;\; t \to 0$$

se prendo $t = 2x^2 - x^3$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(2x^2-x^3)$$

Analizzando $o(2x^2-x^3)$, noto che x^3 è trascurabile rispetto a $2x^2$ (ricorda che $x \to 0$), Inoltre la costatne 2 non conta nell'o-piccolo, quindi:

$$1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(x^2)$$

Inoltre anche in $(2x^2-x^3)$ posso ignorare x^3 per lo stesso motivo, quindi:

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Quindi tornando alla funzione originale
Numeratore:

$$1 + x^2 + o(x^2) - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore:

$$x + o(x)$$

Numeratore/denominatore:

$$\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} \sim \frac{\frac{3}{2}x^2}{x} \sim \frac{3}{2}x$$

Quindi la funzione tende a 0 con la pendenza di $\frac{3}{2}x$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{16x^2-2}}{\sqrt{x+1}}$$

Analiziamo $\sqrt[4]{16x^2-2}$, vorremmo usare il limite notevole della potenza α-esima con $0 < \alpha < 1$, in questo caso $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$(1+t)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}t + o(t) \quad t \to 0$$

ma noi nell'espressione della consegna abbiamo $x \to +\infty$ e non possiamo quindi usare il limite notevole, perciò:

$$= \sqrt[4]{16x^2-2} = \sqrt[4]{16x^2(1-\frac{2}{16x^2})} = 2\sqrt{|x|}(1-\frac{1}{8x^2})^{\frac{1}{4}} =$$

Ora possiamo usiamo il limite notevole con $t = -\frac{1}{8x^2}$, perchè ora $\frac{1}{x^2}$ tende a 0 per $x \to +\infty$

$$= 2\sqrt{x}(1 + \frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{8x^2})) + o(\frac{1}{x^2}) =$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

Analiziamo ora $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x(1-\frac{1}{x})} = \sqrt{x}(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{x}[1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{x})+o(-\frac{1}{x})] =$$

essendo il $-$ dentro all'o-piccolo, lo considero come una costante (-1) e quindi lo posso togliere:

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Ora, quindi, ottengo:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Fra i due o-piccolo, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ è più grande di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

4-LEZIONE

14/10/19

Gerarchia degli infiniti

def. Si dice **infinito** una qualunque successione o funzione con limite infinito, cioè divergente.

Vediamo alcune successioni particolari:

$$a_n = ln(n)$$

$$b_n = n$$

$$c_n = e^n$$

$$d_n = n!$$

Tutte queste successioni divergono a $+\infty$, ma non sono asintotiche fra loro, perchè non tendono a $+\infty$ allo stesso modo.

Osserviamo (tramite grafici su Matlab) che $a_n = ln(n)$ e $b_n = n$ tendono a infinito in maniera diversa, infatti possiamo dire che $ln(n) = o(n)$.
Lo stesso vale per n, e^n e $n!$: $n = o(e^n)$ e $e^n = o(n!)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$

Gerarchia degli infiniti:

$$ln(n) = o(n) \qquad n = o(e^n) \qquad e^n = o(n!)$$

Questa gerarchia si mantiene anche con potenze positive diverse fra di loro.
es. $ln(n)^k = o(n^{\frac{1}{k}})$ con $k > 0$.

Gerarchia degli infinitesimi

def. Si dice **infinitesimo** una qualunque successione o funzione con limite zero, cioè convergente a 0.

$$a_n = \frac{1}{ln(n)}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$c_n = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$d_n = \frac{1}{n!}$$

Tutte queste successioni convergono a 0, ma non sono asintotiche fra loro, perchè non tendono a 0 allo stesso modo.

Osserviamo (tramite grafici su Matlab) che $a_n = \frac{1}{ln(n)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ tendono a 0 in maniera diversa, infatti possiamo dire che $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{ln(n)})$, ha un comportamento opposto agli infiniti.
Lo stesso vale per $\frac{1}{n}$, e^{-n} e $\frac{1}{n!}$: $e^{-n} = o(\frac{1}{n})$ e $\frac{1}{n!} = o(e^{-n})$.

Gerarchia degli infinitesimi:

$$\frac{1}{n!} = o(e^{-n}) \qquad e^{-n} = o(\frac{1}{n}) \qquad \frac{1}{n} = o(\frac{1}{ln(n)})$$

Questa gerarchia si mantiene anche con potenze positive diverse fra loro.

es. Trova l'adamento asintotico del seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}}$$

Analiziamo il numeratore:

$$N(x) = \sqrt{x^2+1}+x$$

$$N(x) = [\infty - \infty]$$

è una forma di indeterminazione, quindi dobbiamo risolverla

$$x^2 + 1 = x^2 + 0(x^2)$$

$$\sqrt{x^2+1} \sim \sqrt{x^2} = |x| \ \ (= -x) =$$

$-x$ per valori negativi e dato che $x \to -\infty$ possiamo scriverlo.

$$= |x| + o(|x|) = -x + o(x)$$

$$N(x) = \sqrt{x^2+1} + x = -x + o(x) + x = o(x)$$

Questi passaggi non mi permettono di uscire dalla forma di indeterminazione.
Quindi potremmo provare a usare:

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t) \quad per \ \ t \to 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \sqrt{x^2}(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}} = |x| \cdot [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})] =$$

$$= -x \cdot [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})] =$$

$$-x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

$$N(x) = \sqrt{x^2+1} + x = -x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) + x = -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

Analiziamo il denominatore:

$$D(x) = (x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{7}}$$

$$x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}} =$$

Essendo $\frac{3}{5} > \frac{1}{7}$:

$$= x^{\frac{3}{5}} + o(x^{\frac{3}{5}}) \sim x^{\frac{3}{5}}$$

$$(x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{7}})^{\frac{5}{3}} \sim (x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = x^1$$

$$D(x) = x + o(x)$$

Vediamo ora numeratore/denominatore:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})}{x - o(x)} \sim -\frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^-$$

Ricorda di fare sempre i conti con o-piccolo, e di toglierlo solo all'ultimo passaggio, quando hai fatto già tutti i conti necessari.

es. TDE(parziale) determinare il carattere della seguente successione:

$$a_n = \frac{ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1|)}{sin(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2})}$$

Analiziamo il numeratore:

$$N(x) = ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1|)$$

$$t = -\frac{1}{ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^-$$

Ora usiamo questa formula:

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$e^t - 1 = t + o(t) \quad per \quad \to 0$$

$$e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1 = -\frac{1}{ln(n)} + o(\frac{1}{ln(n)}) \sim -\frac{1}{ln(n)}$$

potenze di funzioni asintotiche sono ancora asintotiche fra loro

$$(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 \sim (-\frac{1}{ln(n)})^2 = \frac{1}{ln^2(n)}$$

$$(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 = \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1)^2 - 1| = |-1 + \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})| =$$

Il segno del valore assoluto è negativo ($|-1 + \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})|$), quindi posso toglierlo e cambiare il segno al suo intenro:

$$= 1 - \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$ln(|(e^{-\frac{1}{ln(n)}} - 1|) = ln(1 - \frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

$$ln(1 + t) = t + o(t)$$

con $t = -\frac{1}{ln^2(n)}$

$$-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)}) + o(-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})) =$$

Questo $o(-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)}))$ si può eliminare:

$$= N(x) = -\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})$$

Analiziamo il denominatore:

$$D(x) = sin(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}) = cos(\frac{1}{n})$$

Imponiamo $\frac{1}{n} = t$

$$-cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$-cos(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Vediamo numeratore/denominatore:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = a_n = \frac{-\frac{1}{ln^2(n)} + o(\frac{1}{ln^2(n)})}{-(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} \sim -\frac{1}{ln^2(n)} \to 0^+$$

Continuità (puntuale) di una funzione def. Si dice che

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to y = f(x)$$

è **continua** in $x_0 \in A$, se

- x_0 è un punto isolato di A
- x_0 è un punto di accumulazione di A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

oss. le successioni sono continue in tutto il loro dominio (son ocostituite da soli punti isolati)

Continuità di una funzione in un insieme def. Si parla di **continuità in tutto l'insieme** A se è continua in tutti i punti di A.

teor. le funzioni elementari sono funzioni continue in tutto il loro dominio naturale.
Vediamo alcuni esempi di funzioni elementari:

- $y = sin(x)$
- $y = x^2 + x$
- $y = arctg(x)$
- $y = e^x$
- $y = a^x$
- $y = ln(x)$
- $y = \frac{1}{x}$
- $y = tg(x)$

Se prendiamo la funzione $y = tg(x)$ notiamo che c'è un salto, ma essa non è definita in quel punto, quindi possiamo dire che sono continue nel loro dominio naturale.

classificazione delle discontinuità es.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & sex = 0 \end{cases}$$

Analiziamola in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

C'è un salto, questa discontinuità si dice del III tipo o eliminabile.

def. discontinuità del III tipo o eliminabile

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

oss. la funzione $y = \frac{sin(x)}{x}$ di dominio $\mathbb{R} - \{0\} = A$ è una funzione continua su A può anche essere **estesa o prolungata per continuità** si tutto $\mathbb{R}$.

def. discontinuità del II tipo Questa discontinuità non è eliminabile e appare se anche solo uno

dei due limiti (o da destra o da sinistra o entrambi) sia infinito o non esista.
es.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

analiziamo la continuità in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t=\frac{1}{x} \to +\infty} e^{-t} = 0^+$$

f risulta continua da destra nell'origine

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t=\frac{1}{x} \to -\infty} e^{-t} = +\infty$$

f tende a $+\infty$ da sinistra nell'origine.
Siamo in presenza di una discontinuità di II specie.

def. discontinuità di I specie o a salto

$$x_0 \in A \qquad \exists f(x_0)), \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ma i limiti destri e sinistri sono diversi.
Anche questa discontinuità non è eliminabile.

es. trovare i valori di a e b per avere continuità in questa funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2sin(x) & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot sin(x) + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ cos(x) & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

in $\mathbb{R} - \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ la funzione f è continua. Analiziamo ora i due punti $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, devo verificare queste due cose:

$$\lim_{x \to -(\frac{\pi}{2})^+} a \cdot sin(x) + b = -2sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} = (a \cdot sin(x) + b) = cos(\frac{\pi}{2})$$

Svolgiamo i limiti:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} a \cdot sin(x) + b = +2 = -a + b$$

$$\lim_{x \to -(\frac{\pi}{2})^-} a \cdot sin(x) + b = 0 = a + b$$

Da cui

$$b = 1$$

$$a = -1$$

es. Vediamo un esempio di funzione discontinua in tutti i suoi punti:

$$f(x)0 \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & se\ x \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\} \end{cases}$$

è costituito da solo discontinuità di seconda specie.