25/03/2020

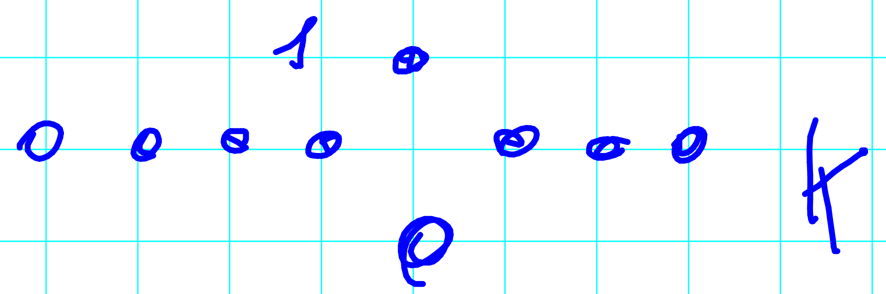
E 10 | Dato

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

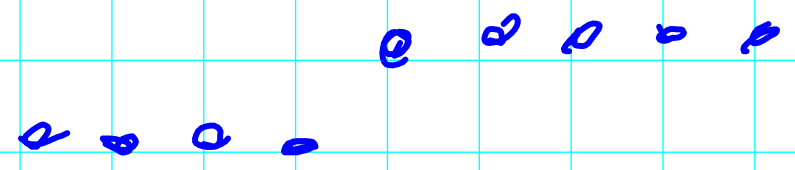
$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u(k) = \text{sca}(k)$

$y(k)$ per $k = 0, 1, 2$?

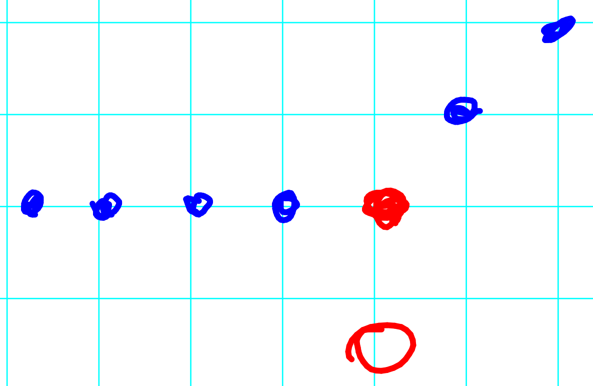
$$\mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sca}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{ram}(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



$$k=0: \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$k=1: \quad x(1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0{,}2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} \cdot \underbrace{1}_{u(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}$$

k	u
0	1
1	1
2	1
3	1

$$y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}2 \end{bmatrix} = 5{,}2$$

$$k=2: \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}44 \end{bmatrix}$$

$$y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}44 \end{bmatrix} = 6{,}94$$

Es. M

Dato il SD LTI a TC con pol. caratteristico

$$\pi(s) = s^3 + 2s^2 + ks + 1$$

dire per quali valori di k esso è AS

Uso Routh sapendo che deve essere $k > 0$

Tabella

$$
\begin{array}{llll}
1 & k & 0 & \dots \\
2 & 1 & 0 & \dots \\
\alpha & & & \\
\beta & & &
\end{array}
$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2k-1}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Coeff. 1ª colonna concordi, cioè sistema AS, per

$$2k-1>0 \quad \Rightarrow \quad k > \frac{1}{2}$$

$\square$

RAGGIUNGIBILITÀ (SD LTI STC SISO)

Uno stato $\tilde{x}$ si dice RAGGIUNGIBILE [da zero]
se $\exists$ $\tilde{u}(t)$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ u(t)=\tilde{u}(t) \quad t \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow x(\tilde{t})=\tilde{x}, \quad \tilde{t}<\infty$$

Un sistema si dice [completamente] raggiungibile se ogni stato è raggiungibile

Domanda: come determinare se un SD è o meno raggiungibile (R)?

- Teorema di Cayley-Hamilton

$$\pi(s) = \det(sI - A) = s^n + \beta_1 s^{n-1} \dots + \beta_n$$

$$\pi(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0$$

Quindi

$$A^n + \beta_1 A^{n-1} \dots + \beta_n I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -\beta_1 A^{n-1} - \beta_2 A^{n-2} \dots - \beta_n I$$

Di conseguenza, partendo da $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{I + A(t-\tau) + \frac{A^2(t-\tau)^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1}(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots} b\, u(\tau)\, d\tau$$

comb lin. degli termini precedenti

$$= \int_0^t \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t-\tau) A^l}_{e^{A(t-\tau)}} b\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \underbrace{\int_0^t \gamma_l(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau}_{\zeta_l(t)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \, \underbrace{\zeta_l(t)}_{}$$

contiene i coeff. del pol. caratt. di A
e l'ingresso

Ovvero

SISO

$$x(t) = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix}}^{M_R, \text{ m. di raggiungibilità}}_{\substack{\text{colonne } (n \times 1) \\ n \times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_0(t) \\ \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{Z(t)}$$

scalare

$n \times 1$

$n \times 1$

$$x(t) = M_R Z(t)$$

contiene l'ingresso

Supponiamo ora di voler portare lo stato (da zero) a $\tilde{x}$

Perché questo sia possibile deve esistere $\tilde{Z}(t)$ tale che

— contiene i coeff. di $\pi(s)$ e $\tilde{U}(t)$

$$\Pi_R \, \tilde{Z}(t) = \tilde{x}$$

Quindi dire che ciò è possibile $\forall \tilde{x}$ equivale a dire che Π_R non è singolare

Ovvero

sistema R $\iff$ Π_R non è singolare

ES 1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

Ovviamente se $x(0) = 0$ risulterà $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall u(t)$

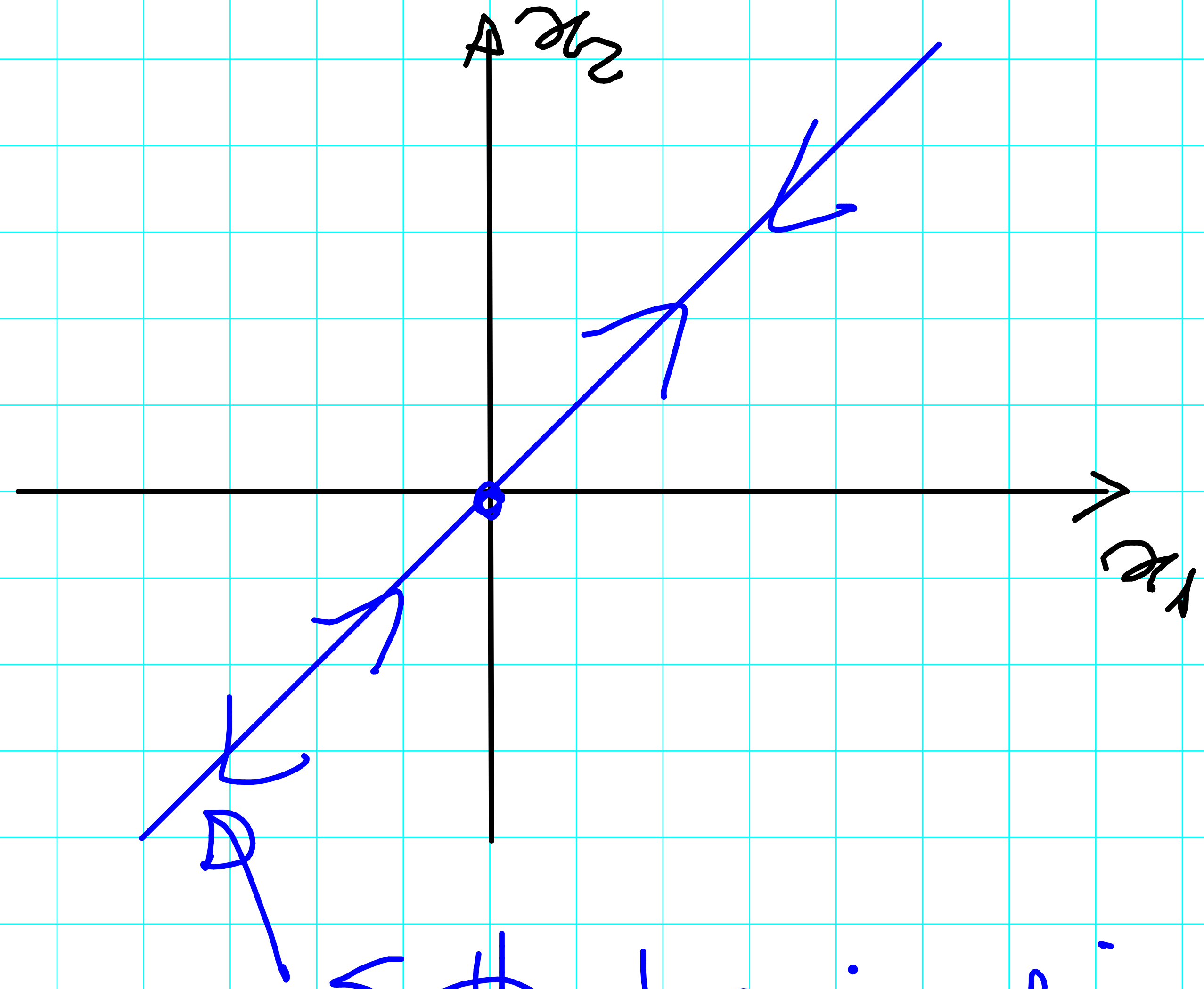
$\Rightarrow$ $\forall$ stato con $x_1 \neq x_2$ non è R

Verifico col criterio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_R = [b \;\; Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

singolare

Spazio di stato:
piano (x_1, x_2)



Sottospazio di raggiungibilità: retta $x_1 = x_2$

$\square$

OSSERVABILITÀ (SD LTI a TC SISO)

Uno stato $\tilde{x}$ è NON OSSERVABILE se

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \tilde{x} \\ u(t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow y(t) = 0 \qquad t \geq 0$$

Sistema [completamente] osservabile :
nessuno stato è non osservabile

Criterio di osservabilità

$$M_o = \left[c' \;\; A'c' \;\; \cdots\cdots \;\; (A^{n-1})'c' \right]$$

m. di osservabilità $(n \times n)$

Sistema Osservabile (O) $\iff$ M_o non singolare

ES2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

la relazione $u \to y$ (ingresso/uscita, FdT)
è tutta qui

criterio oss.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = A' \qquad A'c' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T_0 = [c' \quad A'c'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{singolare}$$

$\square$

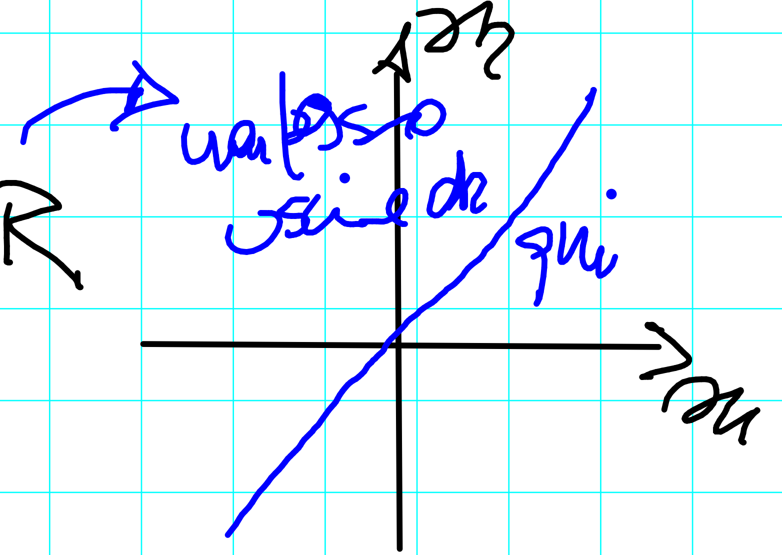
Osservazioni

1) Un sistema può avere parti NR e/o NO

ES)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

non R



cambio variabili: $q_1 = x_1 - x_2$
$q_2 = x_1 + x_2$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -x_1 + \cancel{u} + x_2 - \cancel{u} = -q_1$$
$$\dot{q}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -q_2 + 2u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = -q_1 \\ \dot{q}_2 = -q_2 + 2u \end{cases}$$

u non influenza una parte dello stato $\leftarrow$ non R $\square$

2) Queste parti nella FdT non si vedono:
la FdT rappresenta la sola parte R&O del sistema

3) Gli autovalori delle parti NR e/o NO del sistema
nel calcolo della FdT sono cancellati

$\Rightarrow$ Vedi schema sul libro

Def: una cancellazione è CRITICA se avviene al di fuori della regione di asintotica stabilità (a TC, se l'autovalore cancellato non ha $Re < 0$)

Conseguenze

① (A, b, c, d) e $G(s)$ sono rappresentazioni equivalenti di un SD, a meno di una trasformazione di similarità, se nel calcolo di $G(s)$ non si hanno cancellazioni o equivalentemente se il sistema è R&O.

(2) Poiché i poli di $G(s)$ sono gli autovalori della parte R&O del sistema, perché si possa studiare la stabilità (asintotica) del sistema usando $G(s)$ non vi devono essere cancellazioni critiche.

REALIZZAZIONE

$$G(s) \longrightarrow \infty \, (A, b, c, d)$$

realizzazione MINIMA

Limitandosi al caso in cui
la dimensione di A coincide col grado del den. di $G(s)$
esistono modi "comodi"
per trovare UNA sistema (A, b, c, d) corrispondente
a $G(s)$?

Ne realizzano una

Premessa

Se in $G(s)$ grado num = grado den

$$G(s) = d + \frac{N(s)}{\underbrace{D(s)}_{\to\, A, b, c}}$$

grado N < grado D

Ci basta perciò trattare il caso

Come detto, vediamo UN possibile modo di operare

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} \dots \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} \dots \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$U \rightarrow \boxed{\frac{N(s)}{D(s)}} \rightarrow Y \quad \Rightarrow \quad U \rightarrow \boxed{\frac{1}{D(s)}} \xrightarrow{X} \boxed{N(s)} \rightarrow Y$$

a solo scopo di calcolo

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} \dots + a_n} \Rightarrow X(s)\,D(s) = U(s)$$

$$s^n X + a_1 s^{n-1} X \dots + a_n X = U$$

FdT → solo MF → $x(0) = 0$

$s^n X$

↓

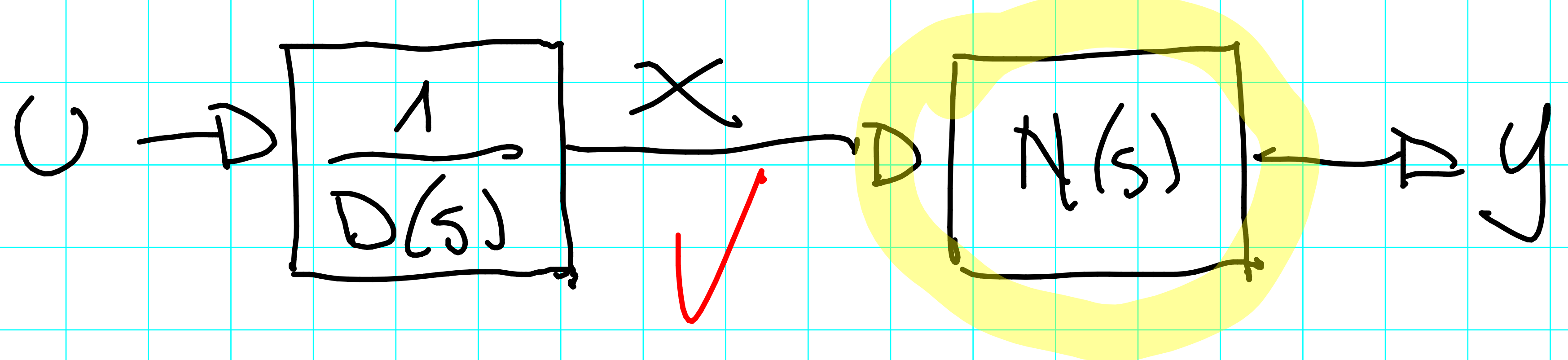
$$\underbrace{\frac{d^n x(t)}{dt^n}}_{\dot{x}_n} + a_1 \underbrace{\frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}}_{x_n} \ldots + a_{n-1} \underbrace{\dot{x}(t)}_{x_2} + a_n \underbrace{x(t)}_{x_1} = u(t)$$

$\dot{x}_n \Leftarrow x_n$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} \ldots - a_n x_1 + u \end{cases}$$

I_{n-1}

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1\end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{b} u$$



$$Y(s) = N(s)\,X(s) = \left(b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} \cdots\cdots + b_n\right) X(s)$$

termini:

$$b_1 s^{n-1} X(s) \longrightarrow b_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{t^{n-1}} = b_1 x_n(t)$$

$$b_2 s^{n-2} X(s) \longrightarrow b_2 x_{n-1}(t)$$

$$\vdots$$

$$b_n X(s) \longrightarrow b_n x_1(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\left[b_n \; b_{n-1} \; \cdots\cdots \; b_1 \right]}_{C} x(t)$$

$\square$