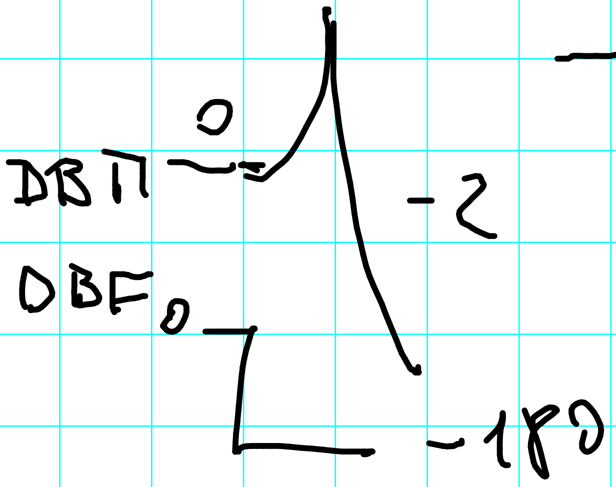
15/04/2020

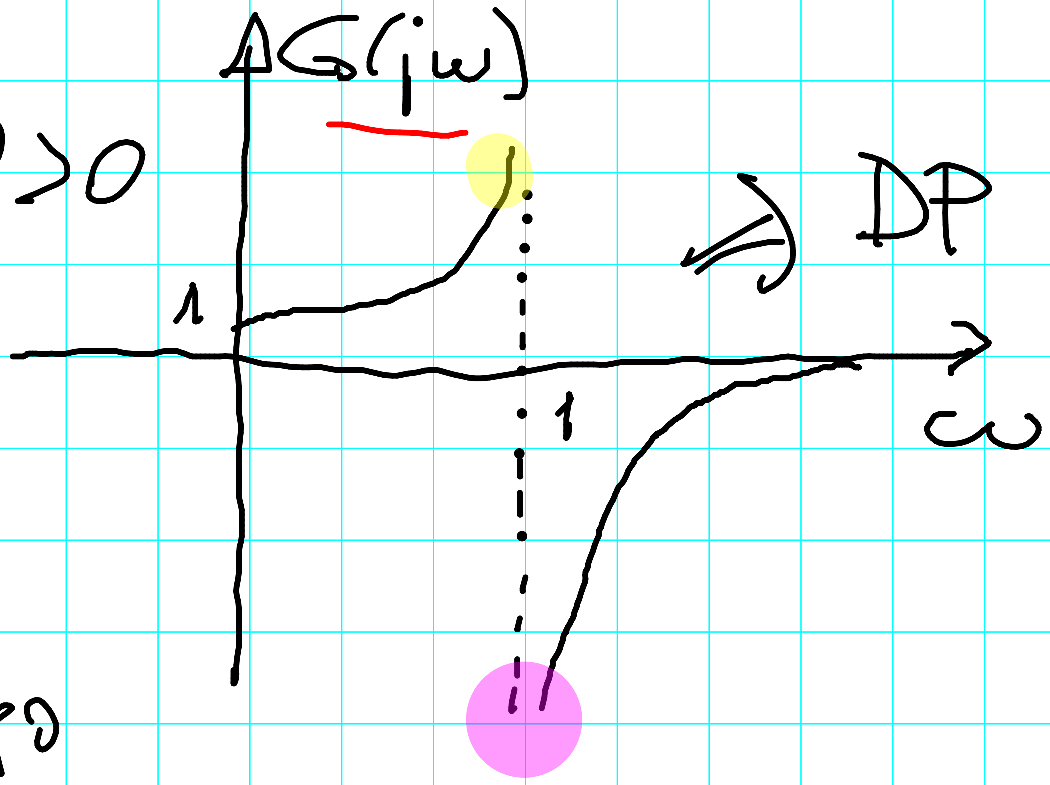
- Erratum:

$$G(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

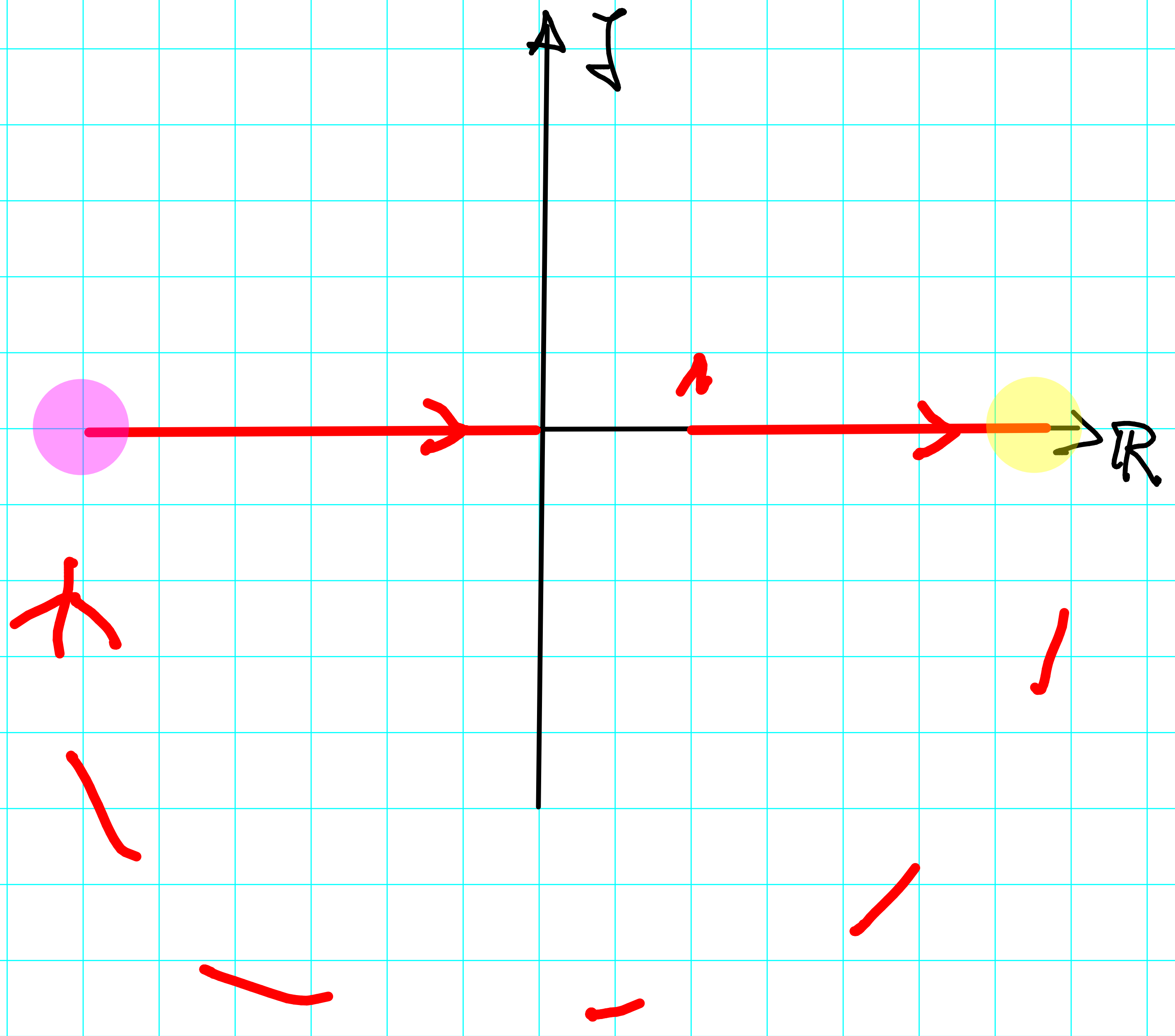
$$G(j\omega) = \frac{1}{1+(j\omega)^2} = \frac{1}{1-\omega^2} \in \mathbb{R}$$

$\omega > 0$



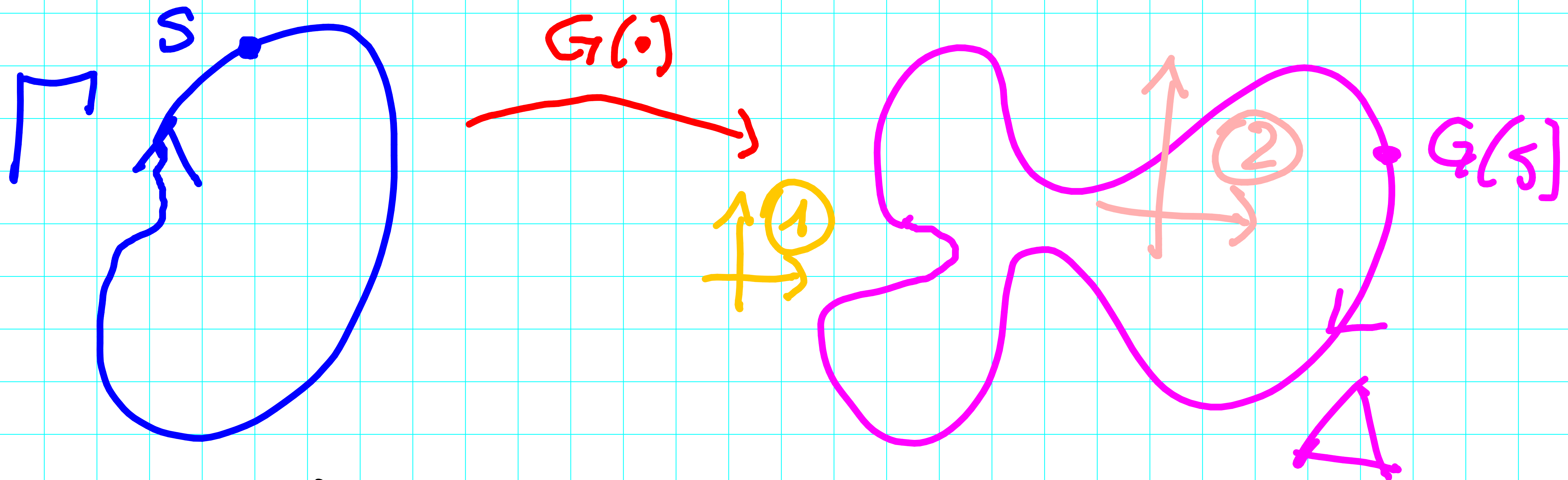


$\Rightarrow$ DP



$\square$

- Studio di una f. complessa razionale fratta $G(s)$ di v. complessa s su una curva chiusa

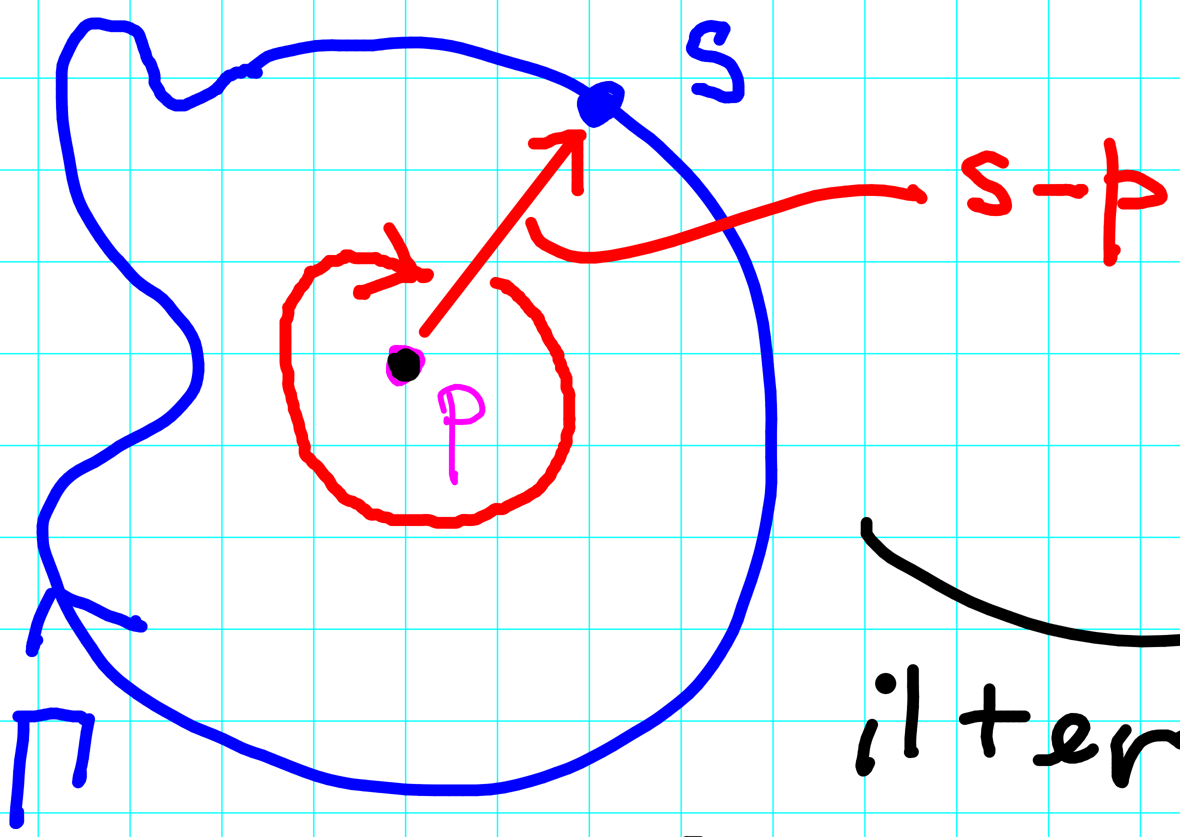


Domanda: Δ circonda l'origine del piano $\mathbb{C}$ dove si muove $G(s)$?

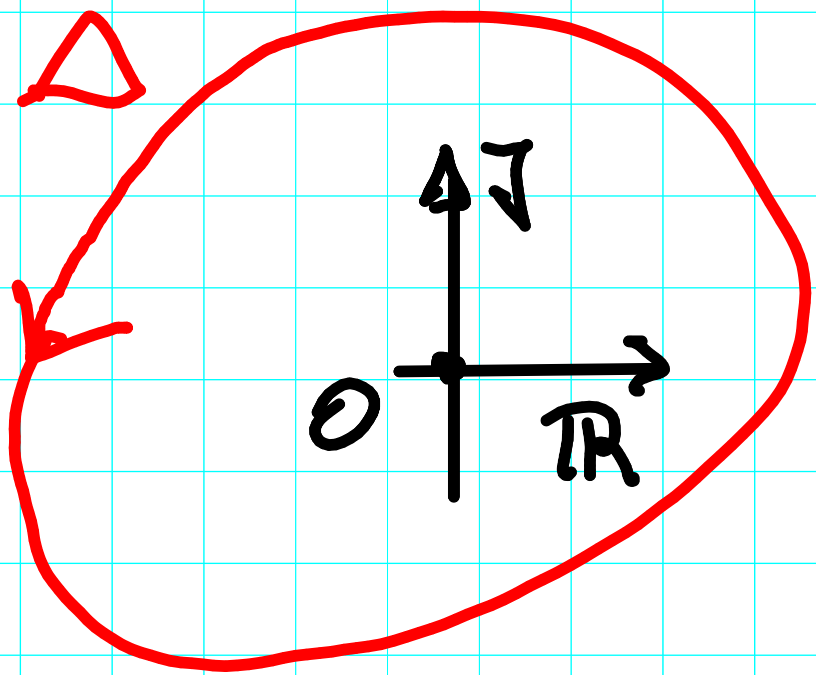
Cioè: 1 (NO) o 2 (SÌ)?

$$G(s) \simeq \frac{\cdots\cdots (s-z) \cdots\cdots}{\cdots\cdots (s-p) \cdots\cdots} \Rightarrow \angle G(s) = \cdots + \angle(s-z) \cdots - \angle(s-p) \cdots$$

Caso 1: Γ circonda un polo p di $G(s)$ in senso orario (O)



il termine $s-p$ compare al DENOM. di G

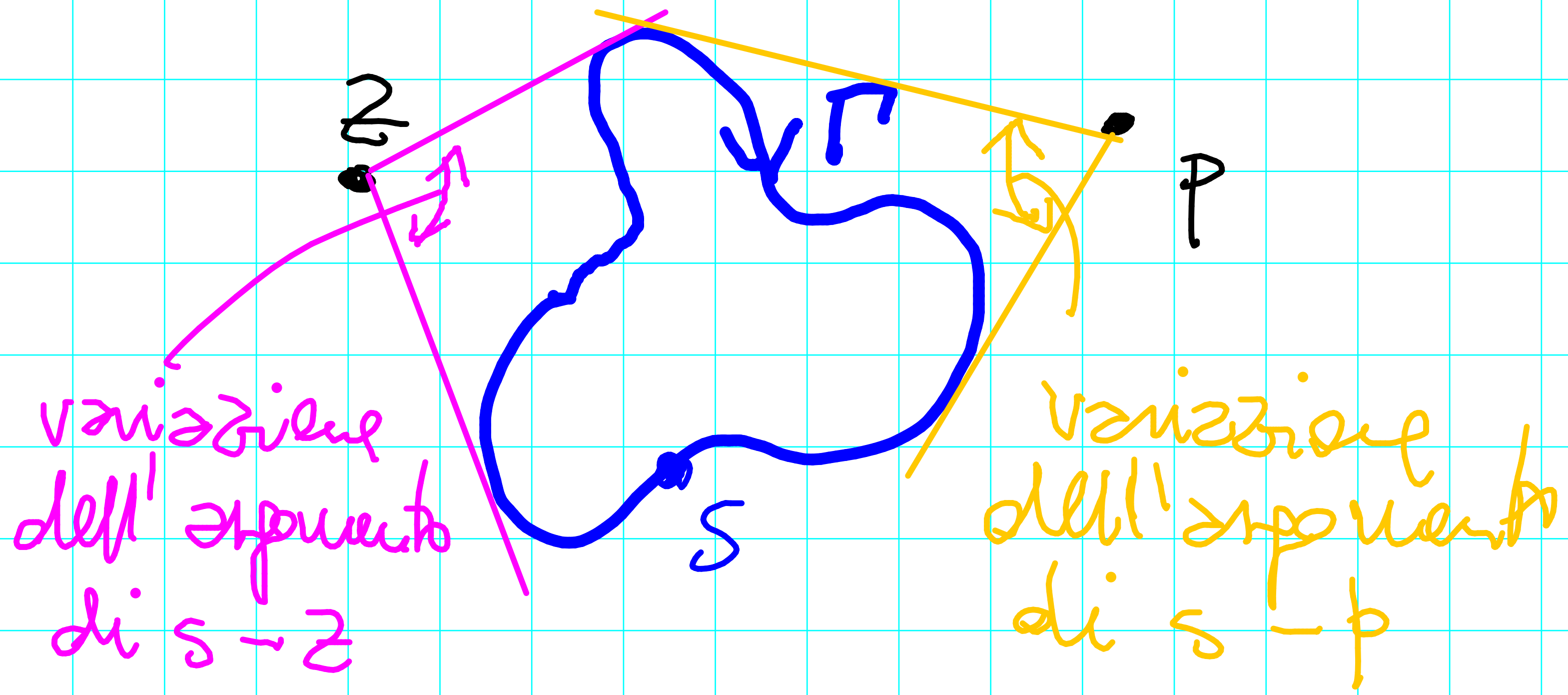


Δ compie un giro antiorario (AO) attorno all'origine del suo piano G

Caso 2: Γ circonda in senso ↻ uno zero z di $G(s)$

$\Rightarrow$ Δ compie un giro ↻ attorno all'origine del suo piano G

Caso 3: Γ non circonda né zeri né poli di $G(s)$



$\Rightarrow$ Δ non circonda l'origine del suo piano G

Quindi

\# di giri AO che l'immagine Δ della curva Γ attraverso $G(\cdot)$ compie attorno all'origine del suo piano $\mathbb{C}'$

$=$

\# di poli di G circondati da Γ in senso O

$-$

\# di zeri di G circondati da Γ in senso O

NB (1 giro O) = −(1 giro AO) e viceversa

- Prendiamo come Γ il percorso di Nyquist di G
  $\Rightarrow$ Γ circonda il semipiano DX in senso ○
  $\Rightarrow$ Δ è il d. di Nyquist di G
- Consideriamo un SD retroazionato con FdT d'anello L e prendiamo

$$G = 1 + L$$

Allora $G = 1 + \frac{L_n}{L_d} = \frac{L_n + L_d}{L_d}$

$\Rightarrow$ POLI di G = poli dell'anello APERTO (radici di L_d)
ZERI di G = poli dell'anello CHIUSO (radici di $L_n + L_d$)

$\Rightarrow L = G - 1 \Rightarrow$ # di giri del DN di G attorno all'origine
= # di giri del DN di L attorno al punto $(-1, 0)$

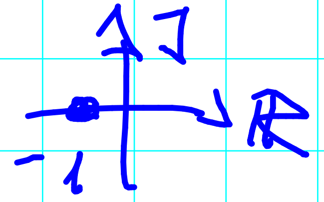
Conclusione

di giri AO del DN di G attorno all'origine

= # di poli di G circondati dal suo PdN in senso ○

− # di zeri di G " " " " " " "

$$\Downarrow$$

$\Delta(-1,0)$ 

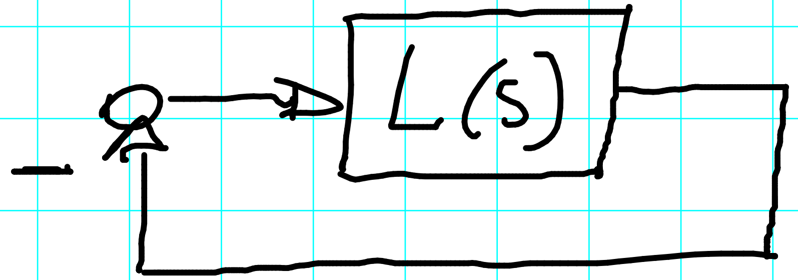
di giri AO del DN di L attorno al "punto −1"

= # di poli di L con Re > 0

− # dei poli dell'anello chiuso con Re > 0

CRITERIO DI NYQUIST

- Si consideri il SD



(SD in AC)

- Si tracci il DN di L(s) (FdT di A)
- Sia P_D il numero di poli di $L(s)$ con $Re > 0$
- Sia N il numero di giri del DN di $L(s)$ attorno al punto -1, contati con segno + se AO e − se O; se il DN di $L(s)$ passa per il punto -1 si dirà che N non è ben definito

CRITERIO

Sistema in anello CHIUSO asint. stabile $\overset{}{\underset{\text{CNS}}{\Longleftrightarrow}}$ N ben definito e uguale a P_D $\square$

Caso N non ben definito

N non ben def $\Rightarrow$ Il DN di $L(s)$ passa per -1

$\Rightarrow$ $\exists\, \bar{\omega}$ tale che $L(j\bar{\omega}) = -1$

e quindi

$$1 + L(j\bar{\omega}) = 0$$

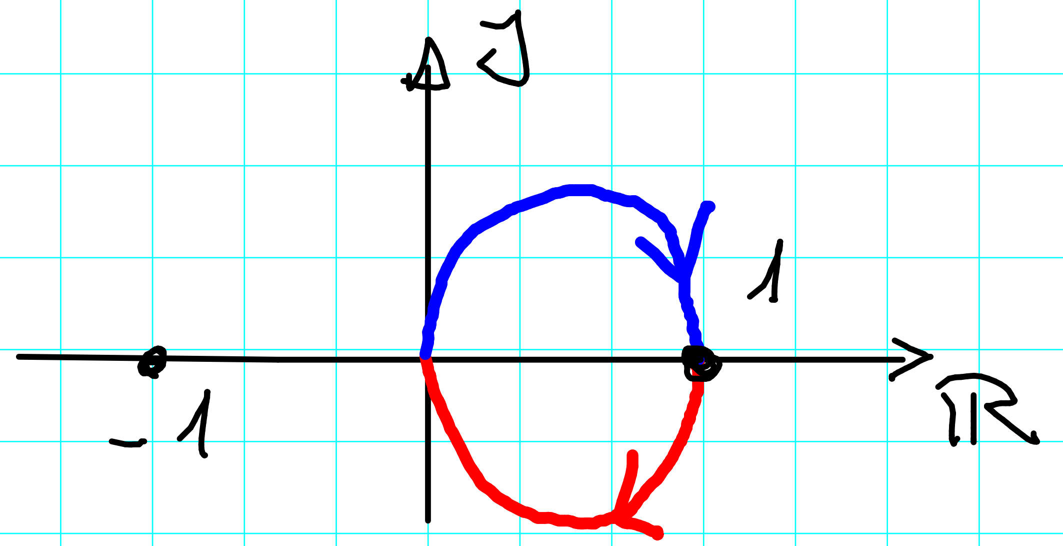
e quindi il sistema in A $\subseteq$ ha poli con $Re = 0$

$\Rightarrow$ non AS

$\square$

ES 1

$$L(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow p_D = 0 \quad (\underline{\underline{AA}} \text{ ha 1 solo polo in } -1)$$



$\Rightarrow N = 0$ (DN di $\underline{\underline{A}}$ A non circonda -1)

N ben def e $= p_D \Rightarrow A \underline{\underline{\leq}}$ AS

Verifica: $\frac{L}{1+L} = \frac{1/s+1}{1+1/s+1} = \frac{1}{s+2}$ polo -2 ✓

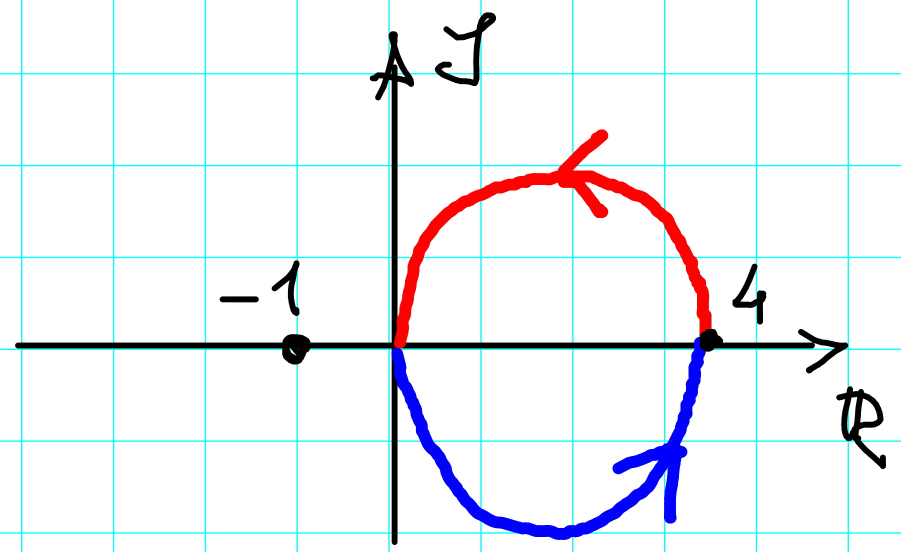
$\square$

ES 2

$$L(s) = \frac{4}{1-s}$$

$P_D = 1$ (AA ha 1 polo in +1)

NB anello APERTO instabile



$N = 0$ (DN di AA non circonda -1)

N ben def ma $\neq P_D \Rightarrow$ AC non AS

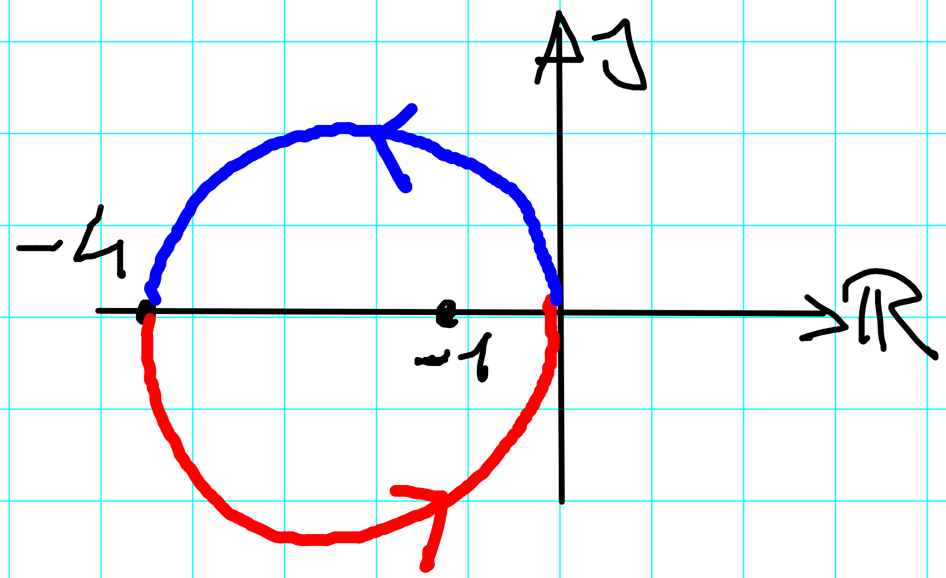
Verifica: $\frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+4/(1-s)} = \frac{1-s}{1-s+4} = \frac{1-s}{5-s}$ ✓

polo 5

Es 3)

$$L(s) = \frac{4}{s-1} \quad \left(= \frac{-4}{1-s} \text{ per Bode} \right) \qquad p_D = 1$$

NB anello APERTO instabile



$\Rightarrow N = 1$ (DN di A $\underline{\underline{A}}$ fa 1 giro AO attorno a -1)

N ben def e $= p_D \Rightarrow$ anello <u>CHIUSO</u> AS

Verifica: $\dfrac{L}{1+L} = \dfrac{L_n}{L_n + L_d} = \dfrac{4}{s+3}$ ✓

polo -3

- Caso particolare ma molto frequente:

$$p_D = 0$$

in questo caso dev'essere $N = 0$

- Se $N < 0$ (più poli a dx che AO del DN di L attorno a -1)

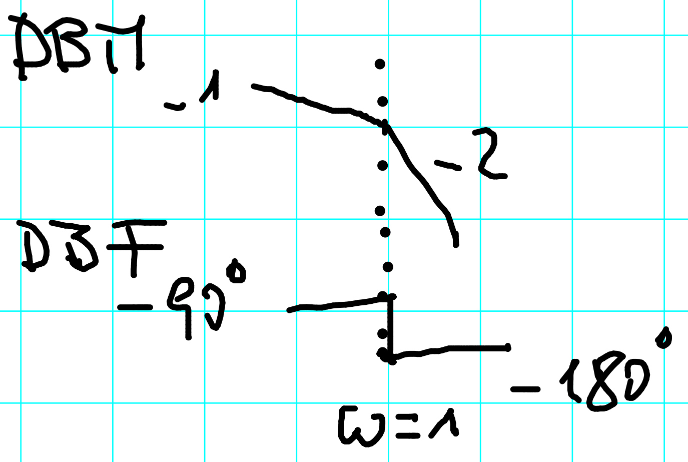
l'anello chiuso non può essere AS

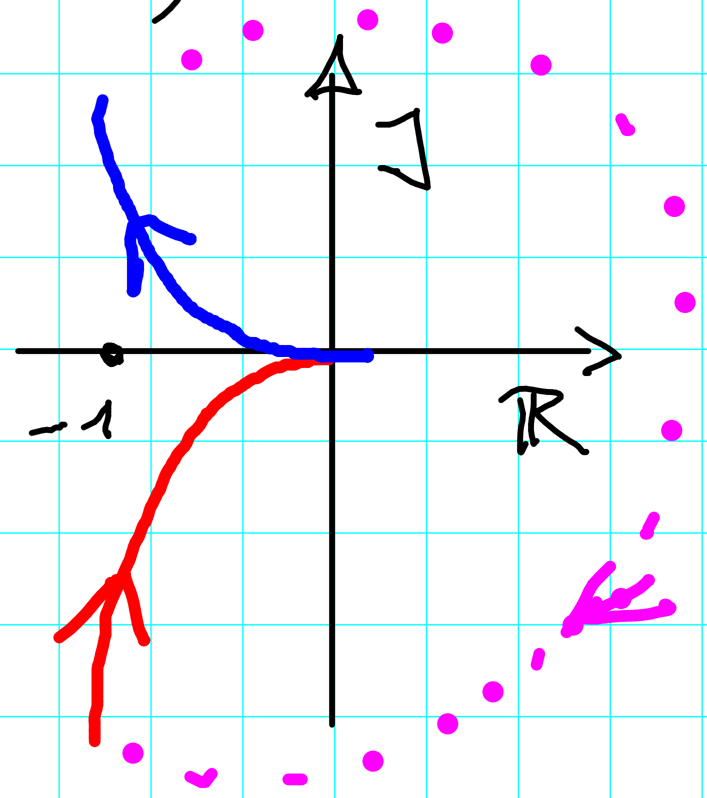
(p_D non può essere negativo)

ES 4

$$L(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

$p_D = 0$ (AA non ha poli con Re > 0)





$N = 0$

N bendette $= p_D \Rightarrow$ AC AS

Verifica

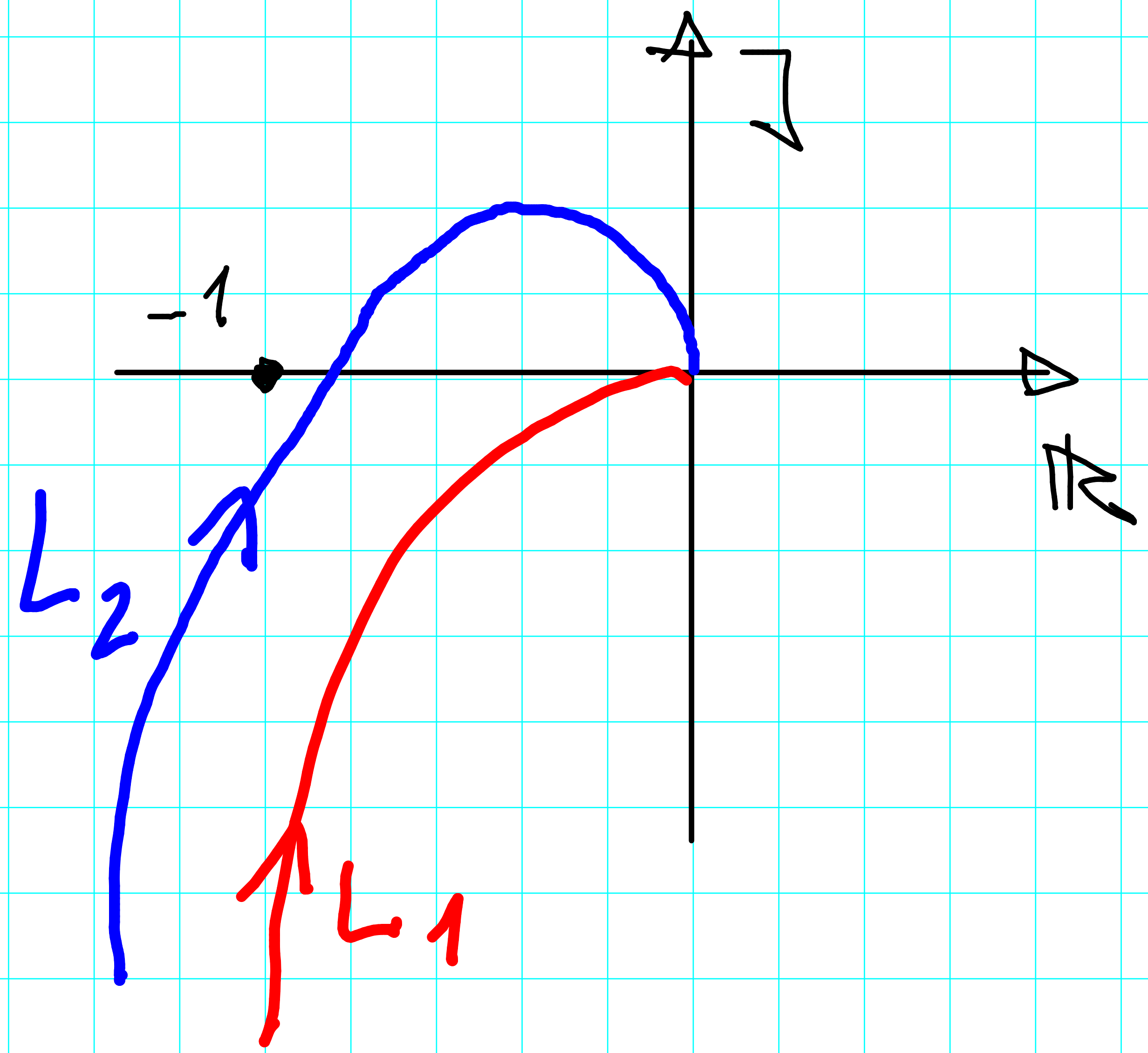
$$\frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+\frac{1}{s(1+s)}} = \frac{\dots}{s^2+s+1}$$

radici con Re < 0

✓

□

GRADO o INDICI o MARGINI DI STABILITÀ (2°) ($\Phi_D = 0$)



Consideriamo due sistemi S_1 e S_2 in AS con FdT di AA rispettivamente L_1 e L_2 con $\Phi_D = 0$

Intuitivamente, S_2 è "più vicino a perdere la stabilità (asintotica)"

Usiamo quest'idea per quantificare il grado di stabilità con opportuni "margini"

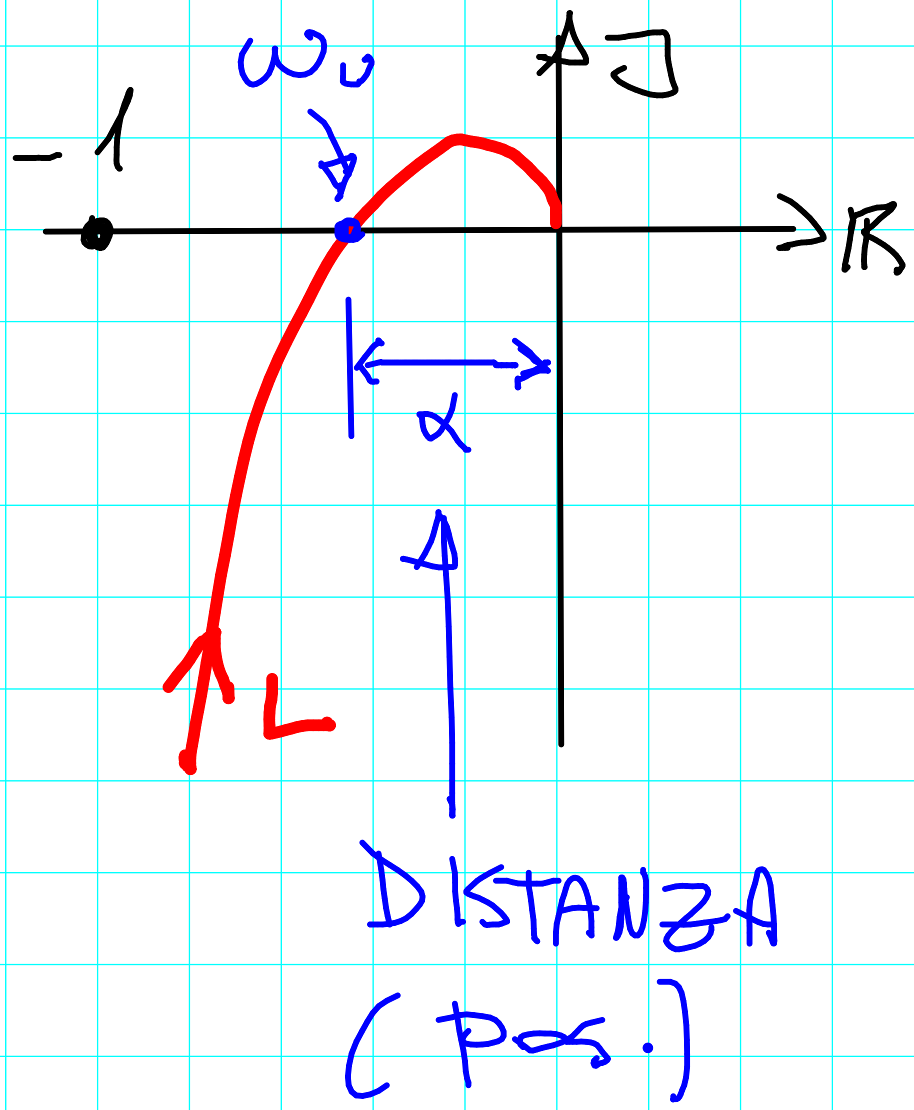
1) MARGINE DI MODULO M_m $\quad (P_D = 0)$

$$M_m := \min_{\omega} \underbrace{\left| 1 + L(j\omega) \right|}_{L(j\omega) - (-1)}$$

minima distanza del DN di $L(s)$ dal punto -1

Scomodo da calcolare "a mano"

2) MARGINE DI GUADAGNO k_m $(p_d = 0)$



Supponiamo che $L(j\omega)$ intersechi $\mathbb{R}^-$

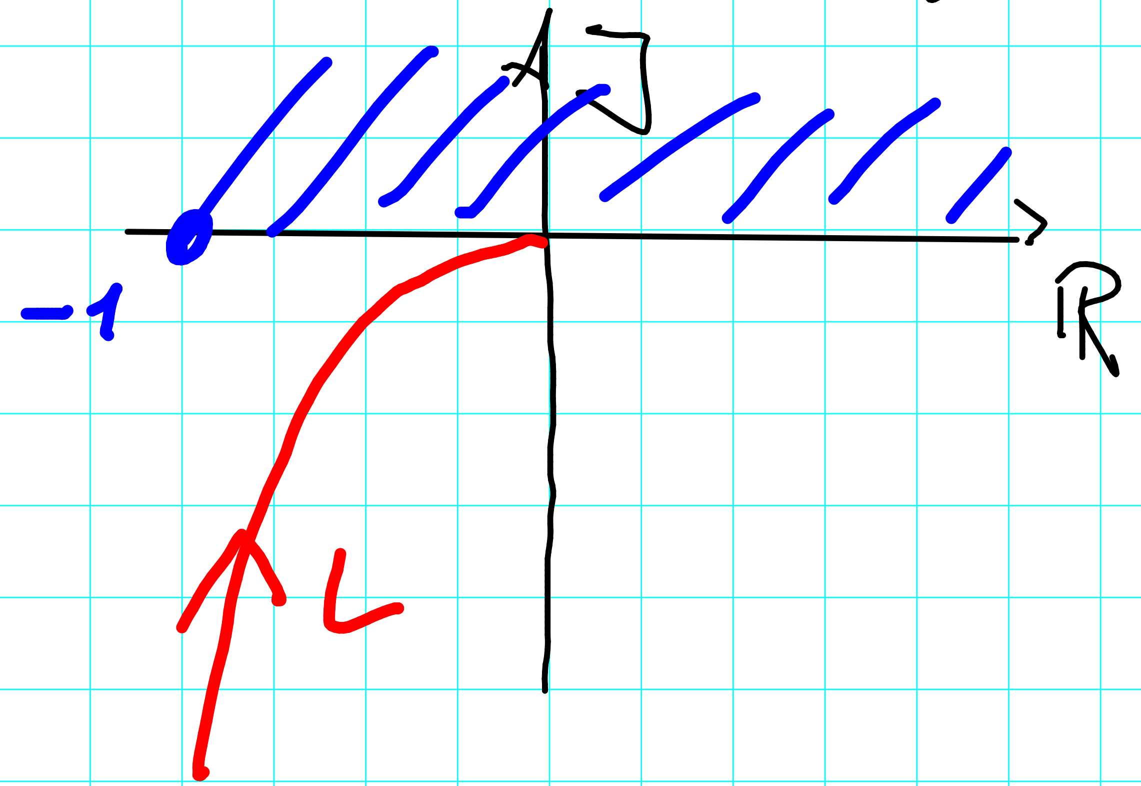
cioè che $\exists\ \omega_u$ finita t.c.

$$\measuredangle^{\circ} L(j\omega_u) = -180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \quad k_m := \frac{1}{\alpha}$$

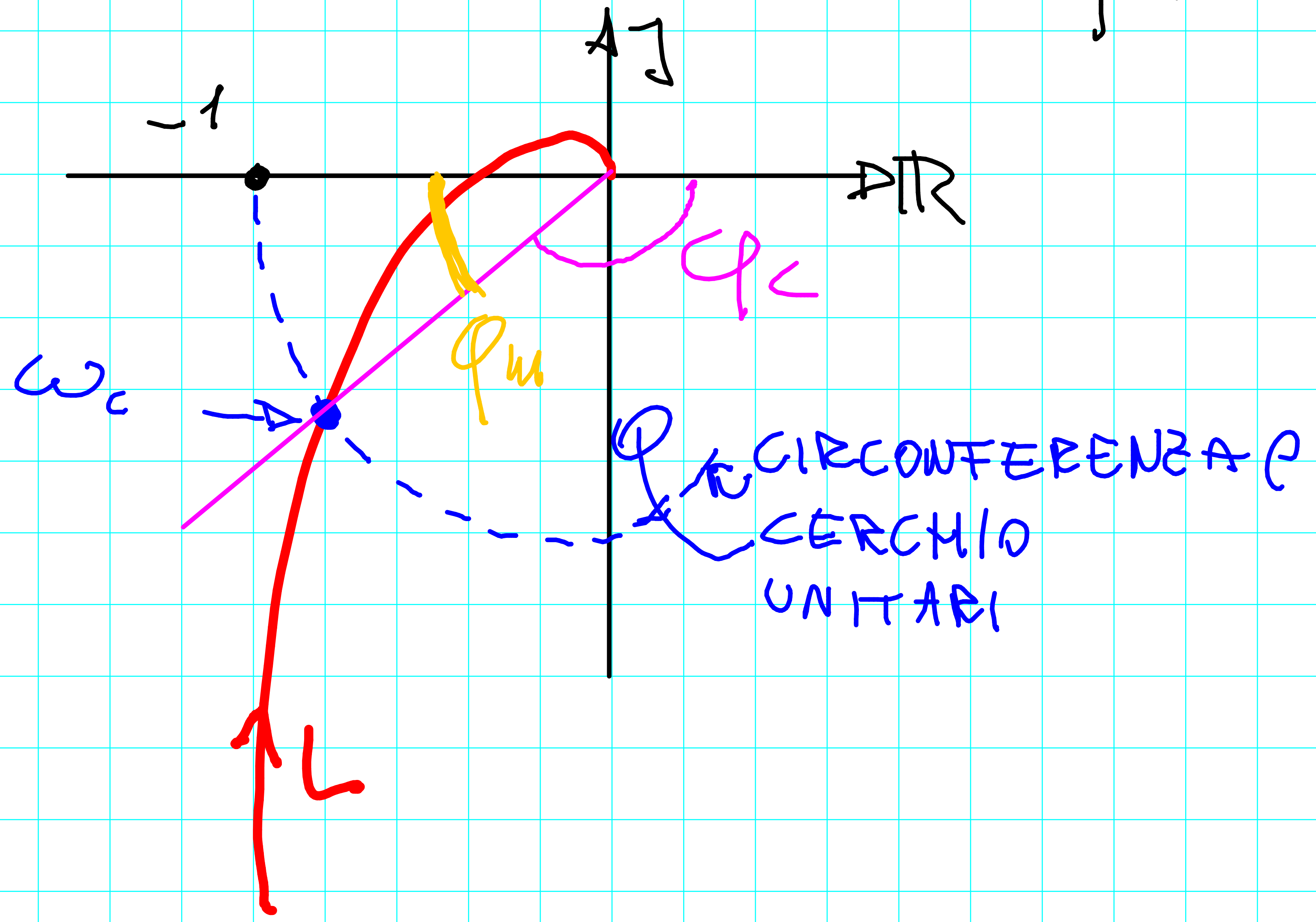
Interpretazione: A $\leqq$ AS a patto che il guadagno di L non aumenti di un fattore $\geq k_m$

Nel caso in cui $\measuredangle^{\circ} L(j\omega) > -180^{\circ}$



$$k_m = \infty$$

3) MARGINE DI FASE φ_M $(p_D = 0)$



Freq./puls. critica ω_c

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

Fase critica

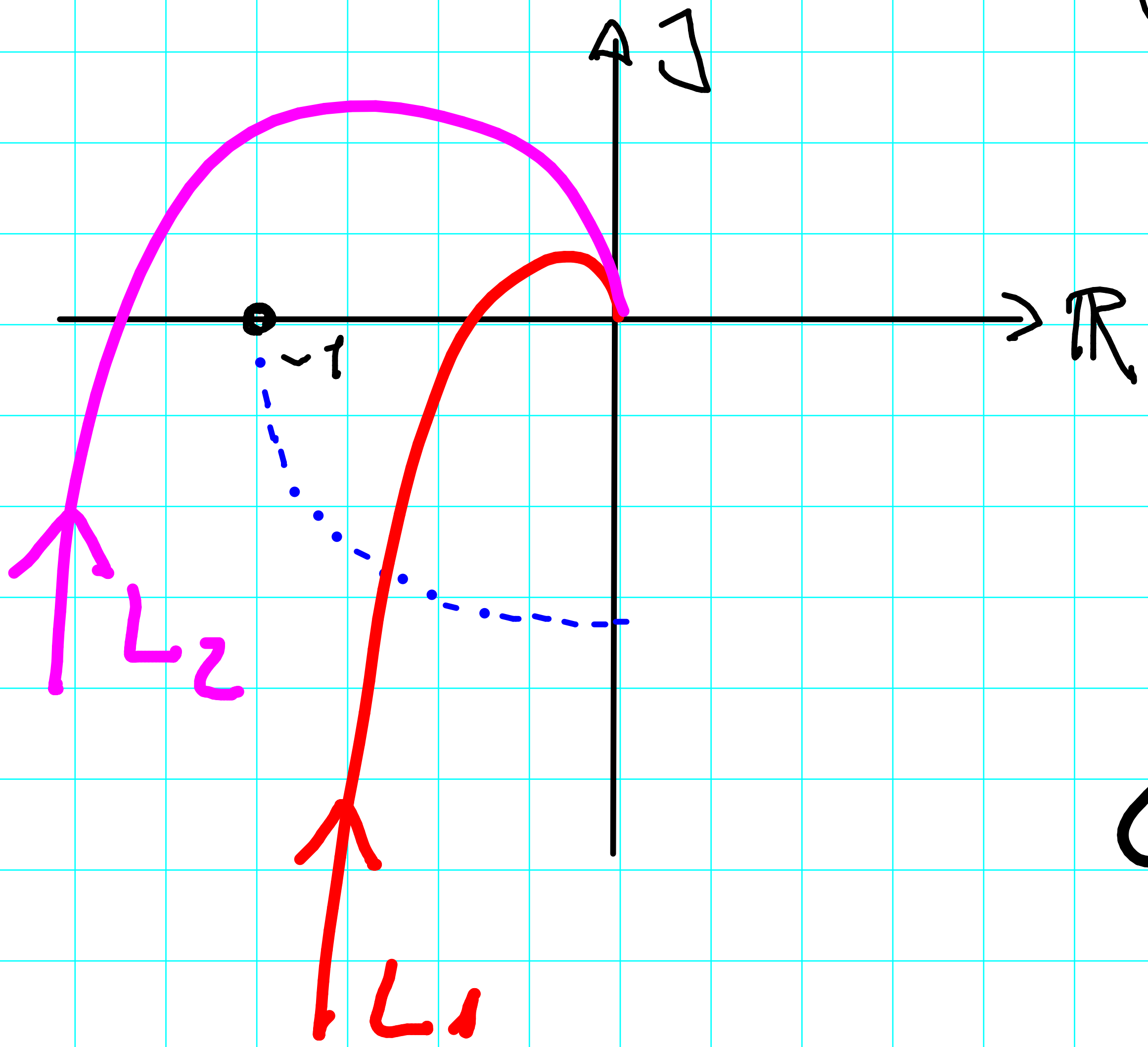
$$\varphi_c = \measuredangle^{\circ} L(j\omega_c)$$

Margine di Fase

$$\varphi_M = 180^{\circ} - |\varphi_c|$$

Se $L(j\omega)$ fosse tutta entro il cerchio unitario diremo che φ_M non è def. oppure che è ∞ (nessuno sfasamento di L le farebbe circondare -1)

INTERPRETAZIONE ($p_P = 0$)

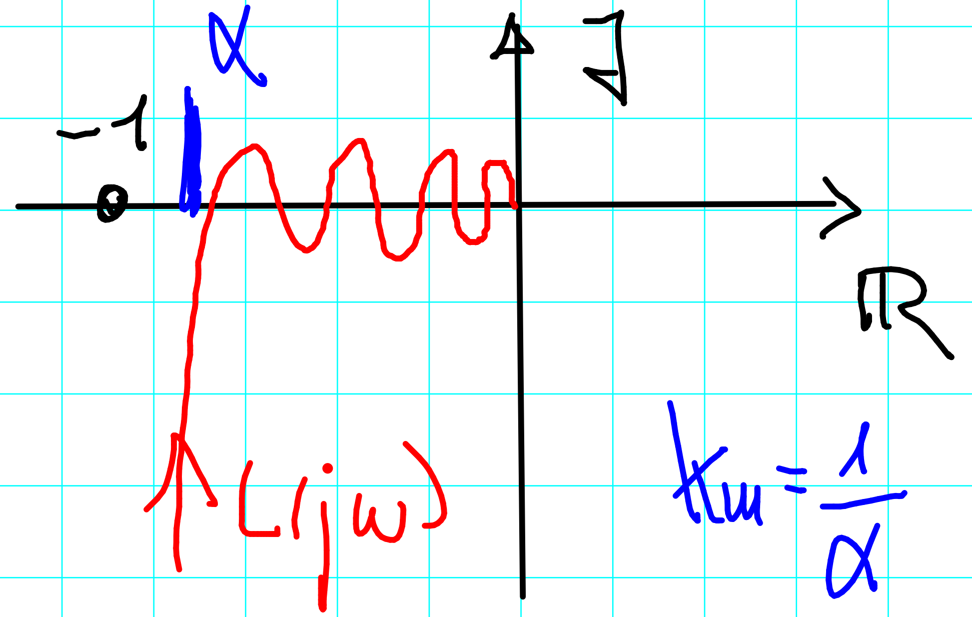


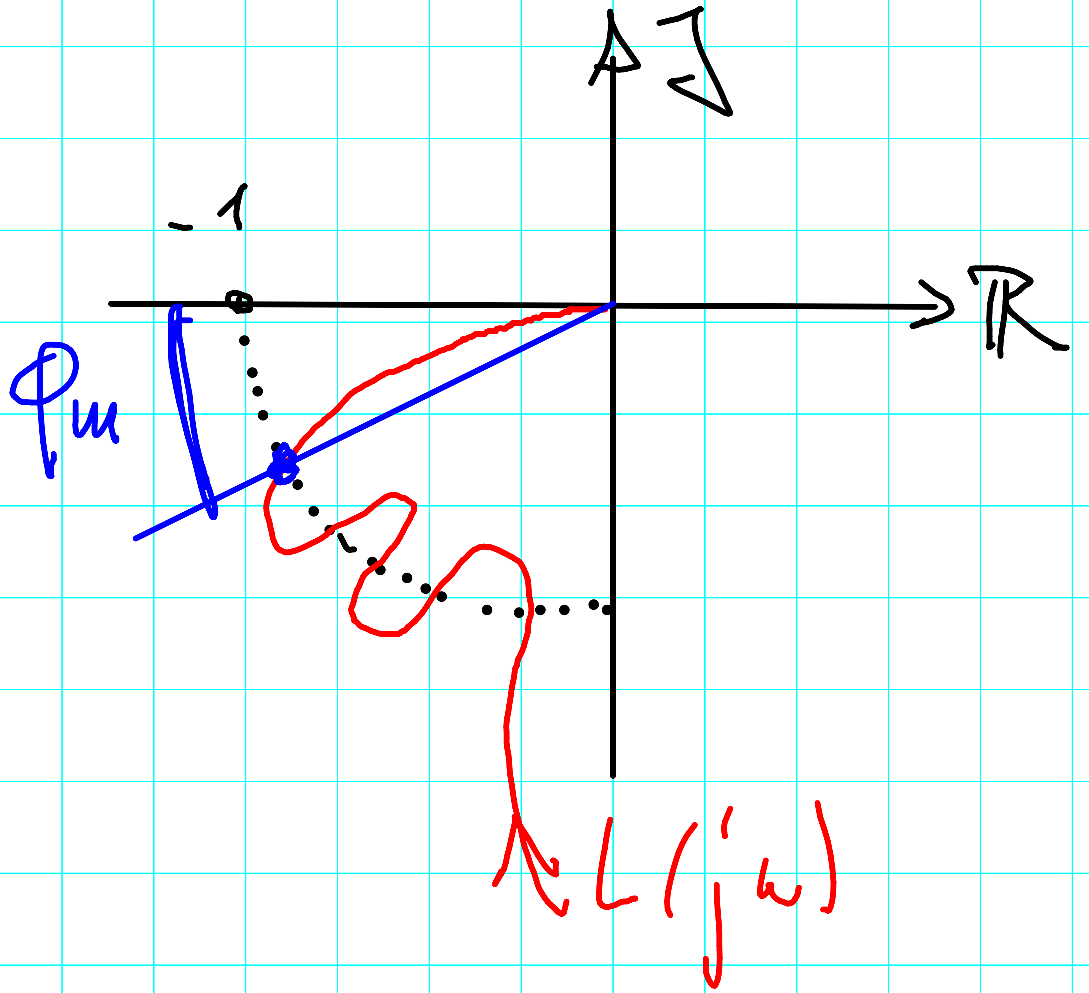
$L_1 \Rightarrow$ AC $\Leftrightarrow$ AS $\quad \varphi_m > 0,\ K_m > 1$

$L_2 \Rightarrow$ AC $\Leftrightarrow$ non AS $\quad \varphi_m < 0,\ K_m < 1$

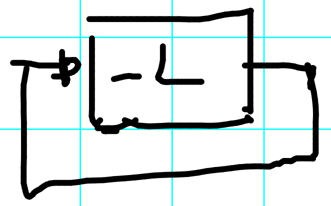
$\varphi_m = 0$, $K_m = 1$ $\Leftrightarrow$ "AC al limite di stabilità"

CASI PARTICOLARI (celuno, sempre $p_A = 0$)





Si considera il punto più sfavorevole

CRITERIO DI BODE 

Condizioni di applicabilità

1) $P_D = 0$
2) Il d. di Bode del modulo di $L(s)$ taglia l'asse 0dB una e una sola volta dall'alto verso il basso

Criterio: detto μ_L il guadagno di L e φ_m il m. di Fase

$$A \equiv AS \underset{CNS}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mu_L > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases}$$