ANALISI II

Federico Mainetti Gambera

26 novembre 2019

Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

Continuità di una funzione in più variabili:

Una funzione $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La continuità di una funzione è anche deducibile dal fatto che sia costituita (somma/prodotto/quoziente/certe volte anche composizione) da funzioni elementari continue.

Calcolo di limiti in più variabili

Non esistenza del limite

Per mostrare che un certa funzione in più varibili non ammette limite in un determinato punto, è sufficiente determinare duee curve passasnti per il punto lungo le quali la funzione assume limiti diversi.
es.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Analiziamo la funzione lungo due curve:

- con $y = x$ ottengo $f(x, x) = \frac{1}{2}$
- con $y = -x$ ottengo $f(x, -x) = -\frac{1}{2}$

non ammette limite.

Uso di maggiorazioni con funzioni radiali per provare l'esistenza del limite

Per dimostrare l'esistenza di un limite per $(x, y) \to (0, 0)$, si impone $x = \rho \cdot cos(\theta)$ e $y = \rho \cdot sin(\theta)$, successivamente si l'intera funzione sotto modulo e procede con semplificazioni e maggiorazioni (per eliminare i seni e i coseni). E' essenziale che la funzione non dipenda da θ.
Più in generale se si volesse calcolare il limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ si pongono $x = x_0 + \rho \cdot cos(\theta)$ e $y = y_0 + \rho \cdot sin(\theta)$

Topologia in $\mathbb{R}^n$ e proprità delle funzioni continua

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, un punto x_0 si dice:

- interno ad E, se esiste un intorno centrato in x_0 contenuto in E;
- esterno ad E, se esiste un intorno centrato in x_0 contenuto in E^c;
- di frontiera per E, se ogni intorno centrato in x_0 contiene almeno un punto di E e uno di E^c.

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice:

- aperto, se ogni suo punto è interno a E;
- chiuso, se il suo complementare è aperto.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si dice:

- interno di E, e si indica con E^o, l'insieme dei punti interni di E;
- frontiera o brodo di E, e si indica con δE, l'insieme dei punti di frontiera di E;
- chiusura di E, e si indica con $\bar{E}$, l'insieme $E \cup \delta E$.

Alcune informazioni extra:

- si ha sempre $E^o \subseteq \delta E \subseteq \bar{E}$;
- il complementare di un aperto è chiuso e viceversa;

- esistono insiemi nè aperti nè chiusi, gli unici insiemi sia aperti sia chiusi sono quello vuoto e $\mathbb{R}^n$;
- l'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi aperti e l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti sono insiemi aperti
- l'intersezione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi chiusi è l'unione di un numero finito di insiemi chiusi sono insiemi chiusi;
- un insieme aperto non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera, un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Un inieme si dice:

- limitato se esiste un intorno che lo contiene tutto;
- connesso se per ogni coppia di punti dell'insieme, esiste un arco continuo che che li connette contenuto nell'insieme.

Proprietà topologiche delle funzioni continue:

- **teor.** Teorema di Weierstrass. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato e $f \;:\; E \to \mathbb{R}$ sia continua, allora f ammette massimo e minimo in E, cioè esistono x_m e x_M tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $xinE$.
- **teor.** Teorema degli zeri. Sia E un insieme connesso di $\mathbb{R}^n$ e $f \;:\; E \to \mathbb{R}$ sia continua. Se x, y sono due punti di E tali che $f(x) < 0$ e $f(y) > 0$, allora esiste un terzo punto $z \in E$ in cui f si annulla. In particolare, lungo ogni arco di curva continua contenuto in E che congiunge x e y, c'è almeno un punto in cui f si annulla.

Derivate parziali, piano tangente, differenziale

Derivata parziale

Calcolo di una derivata parziale tramite la definizione di rapporto incrementale in un punto (x_0, y_0). Per prima fissiamo $y = y_0$ e deriviamo rispetto alla x:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Successivamente facciamo l'opposto, cioè fissiamo $x = x_0$ e deriviamo rispetto alla y:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le sue derivate parziali; si dice derivabile in A se è derivabile in ogni punto di A.
Se f è derivabile in un punto, chiameremo gradiente ($\nabla f(x)$) il vettore delle sue derivate parziali.

Piano tangente

Costruire il piano tangente a una funzione in due variabili in un punto (x_0, y_0):

1. troviamo la retta tangente alla funzione nel piano $y = y_0$:

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

2. troviamo la retta tangente alla funzione nel piano $x = x_0$:

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

3. costruiamo il piano che contiene entrambe le rette:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Il procedimento appena mostrato individua il piano tangente nell'ipotesi che esso esista, potrebbe però non esserci.

Differenziabilità e approssimazione lineare

In due o più variabili la sola derivabilità non implica nè continuità nè l'esistenza del piano tangente.
Concetto di differenziabilità in più variabili: l'incremento di f è uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente, più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento (h, k) delle variabili indipendenti. In formule:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

per $(h, k) \to (0, 0)$.
Tutto ciò che è prima dell'uguale (primo membro) rappresenta l'incremento della funzione, i primi due addendi del secondo membro rappresentano l'incremento calacolato lungo il pinao tangente. Ricordiamo che l'ultimo addendo rappresenta una funzione tale che $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.
Se l'equazione di prima è soddisfatta, diremo che la funzione è differenziabile in (x_0, y_0).

Da notare che la differenziabilità implica la derivabilità, cioè se una funzione è differenziabile in un punto, allora è anche derivabile nello stesso.

Se f è differenziabile in x_0, si dice differenziale di f calcolato in x_0 la funzione lineare $df(x_0) \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da:

$$df(x_0) \quad : \quad h \to \nabla f(x_0) \cdot h.$$

Nel caso in due varibiali, il numero $\nabla f(x_0) \cdot h$ rappresenta l'incremento della funzione nel passare da x_0 a $x_0 + h$, calcolato lungo il piano tangente al grafico di f in x_0.

L'approssimazione dell'incremento di f con il suo differenziale prende il nome di linearizzazione.

Verifica della differenziabilità

Per dimostrare la differenziabilità in un punto (x_0, y_0) bisogna provare che:

$$\lim_{h,k\to 0,0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - \{f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)h + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)k\}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ma per certi casi perticolari esistono criteri molto comodi e più semplici.

Teorema di condizione sufficiente di differenziabilità: se le derivate parziali di f esistono in un intorno di x_0 e sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.
In particolare se le derivate parziali esistono e sono continue in tutto A, allora f è differenziabile in tutto A.
Una funzione le cui derivate parziali esistono e sono continue in tutto A si dice di classe $C^1(A)$, dunque: $f \in C^1(A) \to$ f differenziabile in A.

Derivate direzionali

Si dice derivata direzionale della funzione f rispetto al versore v, nel punto x_0, il limite

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

purchè esista finito.
Detto in maniera diversa signifca considerare la restrizione della funzione f alla direzione della retta passante per x_0 con direzione v, cioè $g(t) = f(x_0 + tv)$, e calcolarne la derivata, cioè $D_v f(x_0) = g'(0)$.

Formula del gradiente: $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) \cdot v_i$. Cioè la derivata direzionale è il prodotto scalare del gradiente con il versore nella direzione in cui si deriva, quindi tutte le derivate direzionali sono combinazioni lineari delle derivate parziali. Nel caso in due variabili la formula si riduce a $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) cos(\theta) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) sin(\theta)$.

Da notare è che $\nabla f(x_0)$ indica la direzione di massima crescita di f, ossia la direzione di massima derivata direzionale, invece $-\nabla f(x_0)$ rappresenta la direzione di minima derivata direzionale, infine nelle direzioni ortogonali al gradiente le derivate direzionali sono nulle.

Riepilogo

- $f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in A (cioè f ha iperpiano tangente) $\Rightarrow f$ è continua, derivabile, ha derivate direzionali, vale la formula del gradiente.
- f continua, derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali $\not\Rightarrow f$ differenziabile
- f derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali $\not\Rightarrow f$ continua

Calcolo delle derivate

$$\delta(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha\delta(f) + \beta\delta(g)$$
$$\delta(f \cdot g) = g \cdot \delta(f) + f\delta(g)$$
$$\delta(\frac{f}{g}) = \frac{g \cdot \delta(f) - f\delta(g)}{g^2}$$
$$h(x) = f(g(x)) = g \circ f \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Gradiente di una funzione radiale

Si chiama funzione radiale una funzione h che dipende solo dalla distanza di dall'origine, ossia

$$h(x) = g(|x|).$$

ponendo $\rho = |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$ si ha:

$$\nabla_\rho = (\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, \dots, \frac{x_n}{\rho}).$$

$$\nabla h(x) = g'(|x|)(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|})$$
$$|\nabla h(x)| = |g'(|x|)|$$

Ortogonalità del gradiente con le curve di livello

Il gradiente è ortogolane il ogni punto alle linee di livello

Equazione del trasporto

Si definisce equazione del trasporto la seguente:

$$c\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta t} = 0 \qquad (?)$$

Teorema del valor medio. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f \ : \ A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in A. Allora per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in A$, esiste un punto x^* tale per cui:

$$f(x_1) - f(x_0) = \nabla f(x^*) \cdot (x_1 + x_0).$$

In particolare:

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq |\nabla f(x^*)| \cdot |(x_1 + x_0)|.$$

Derivate di ordine superiore e approssimazioni successive

Derivate di ordine superiore

Teorema di Schwartz. Sia $f \ : \ A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Supponiamo che (per certi indici $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) le derivate seconde miste f_{x_i,x_j} e f_{x_j,x_i} esistano in un certo x_0 e siano continue in x_0; allora esse coincidono in x_0.

Una funzione che ha tutte le derivate parziali seconde continue in un aperto A si dice di classe $C^2(A)$.
Se $f \in C^2(A)$, allora $f \in C^1(A)$ (in particolare f è differenziabile), le derivate parziali prima sono differenziabili, le derivate parziali seconde sono continue, le derivate seconde miste sono uguali.

Differenziale secondo, matrice hessiana, formula di Taylor al secondo ordine

Se $f \in C^2(A)$ e $x_0 \in A$, si dice differenziale secondo di f in x_0 la funzione

$$d^2 f(x_0) \quad : \quad h \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta^2(f)}{\delta(x_i)\delta(x_j)}(x_0) h_i h_j.$$

I vari coefficienti $\frac{\delta^2(f)}{\delta(x_i)\delta(x_j)}(x_0)$ possono essere ordinati in una matrice detta Hessiana:

$$H_f(x_0) = \begin{matrix} f_{x_1 x_1}(x_0) & f_{x_1 x_2}(x_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(x_0) \\ f_{x_2 x_1}(x_0) & f_{x_2 x_2}(x_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1}(x_0) & f_{x_n x_2}(x_0) & \dots & f_{x_n x_n}(x_0) \end{matrix}$$

In particolare, per due variabili:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{matrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{matrix}$$

Se f è di classe C^2, la matrice Hessiana è simmetrica.

Formula di Taylor (resto secondo Lagrange). Sia $f \in c^2(A)$; per ogni $x_0 \in A$ e $h \in \mathbb{R}^n$, tale che $x_0 + h \in A$, esiste un numero reale $\delta \in (0, 1)$, dipendente da x_0 e h, tale che:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x_0 + \delta h) h_i h_j.$$

Formula di Taylor (resto secondo Peano). Sia $f \in C^2(a)$. Per ogni $x_0 \in A$ vale la formula:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2).$$

Ottimizzaione, estremi liberi

Generalità sui problemi di ottimizzazione

- x_0 è detto punto di massimo (minimo) globale se per ogni x si ha $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$;
- x_0 è detto punto di massimo (minimo) locale se esiste un intorno di x_0 detto U tale per cui per ogni $x \in U$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Estremi liberi, condizioni necessarie del prim'ordine

Teorema di Fermat. Sia $f \quad : \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e $x_0 \in A$ un punto di massimo o minimo locale per f. Se f è derivabile in x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$.

I punti in cui il gradiente di una funzione si annulla si dicono punti critici o stazionari di f. Una volta individuati tutti i punti stazionari, si può iniziare un'analisi su di essi per verificare se sono o meno punti di massimo o minimo. Se non lo sono essi prendono il nome di punti di sella o colle. Da notare particolarmente è che una funzione può assumere valori di massimo o minimo anche in punti in cui non è derivabile, dunque questi punti vanno analizzati separatamente.

Forme quadratiche, classificazione

Un modo per determinare la natura di un punto stazionario è quello di analizzare il segno dell'incremento $\nabla f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Se infatti si riesce a stabilire che $\nabla f(x_0)$ si mantiene di segno positivo o negativo, per ogni h di modulo abbastanza piccolo, possiamo dedurre che x_0 è punto di minimo o massimo locale. Se invece al variare di h, $\nabla f(x_0)$ cambia segno, siamo in presenza di un punto si sella.

Lo studio del segno di $\nabla f(x_0)$ riconduce all'analisi del segno del polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti di h (che prende il nome di forma quadratica) dato da

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j.$$

Ogni forma quadratica risulta associata a una matrice simmetrica M. Nel caso del differenziale la matrice M coincide con la matrice Hessiana.
Il segno della forma quadratica è quindi studiabile analizzando la sua matrice $M = \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix}$ con $a \neq 0$ nel seguente modo:

- è definitivamente positiva (negativa) se e solo se $det(M) > 0$ e $a > 0$ $(a < 0)$;
- indefinita se $det(M) < 0$;
- semidefinita positiva (negativa) se e solo se $det(M) = 0$ e $a > 0$ $(a < 0)$.

Se $a = 0$ e $c \neq 0$, nelle affermazioni precedenti occore sostituire a con c.

Forme quadratiche, test degli autovalori

Un importante test per determinare il segno di una funzione quadratica in $\mathbb{R}^n$ è basato sul segno degli autovalori della matrice M.
Ricordiamo che un numero complesso λ e un vettore non nullo $v \in \mathbb{C}^n$ si dicono, rispettivamente, autovalore e autovettore (di λ) di una matrice M di ordine n, se soddisfano la relazione:

$$Mv = \lambda v$$

oppure

$$(M - \lambda I_n)v = 0.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni v non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti e singolare, ovvero se λ è soluzione dell'equazione caratteristica:

$$det(M - \lambda I) = 0$$

esistono esattamente n autovalori di M ciascuno contato secondo la propria molteplicità.
Le matrici M simmetriche hanno prorpietà importanti:

- gli autovalori di M sono reali e possiedono autovettori reali;
- esistono n autovettori lineari che costituiscono una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$;
- La matrice $S = w_1, w_2, \ldots, w_n$ le cui colonne sono gli autovettori lineari è orotognale e diagonalizza M, precisamente:

$$S^T M S = \Lambda = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{matrix}$$

Tornando allo studio del segno della forma quadratica con la sua matrice M:

- definitivamente positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di M sono positivi (negativi);
- semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di M sono ≥ 0 (≤ 0) e almeno uno di essi è nullo;
- indefinita se M ha almeno un autovalore positivo e uno negativo.

Da notare è che per una forma quadratica l'origine è sempre un punto stazionario.

Studio della natura dei punti critici

Per estrarre informazioni su un punto critico x_0 occorre studiare e classificare la forma quadratica

$$q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j = h^T H_f(x_0) h$$

dove $H_f(x_0)$ è la matrice Hessiana di f in x_0.

- se la forma quadratica è definitivamente positiva (negativa), allora x_0 è un punto di minimo (massimo) locale forte;
- se la forma quadratica è indefinita, allora x_0 è un punto di sella;
- se la forma quadratica è in x_0 semidefinita positiva (negativa) e non nulla, allora x_0 è di minimo (massimo) debole oppure di colle; la situazione cambia se la forma quadratica è semidefinita positiva (negativa) non solo in x_0, ma anche per ogni x in un intorno di x_0, f è convessa (concava), dunque un punto di minimo (massimo) debole;
- se la forma quadratica è nulla, allora non possiamo estrarne informazioni significanti.

Vediamo una strategia da seguire:

1. si isolano i punti di f che non sono regolari (es. non derivabili una o due volte). Questi punti dovranno essere analizzati separatamente;
2. trovare i punti critici risolvendo:
$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$
3. si studia il segno della forma quadratica per ogni punto critico, se è definita o indefinita si giunge a una conclusione con le regole dette precedentemente, se è nulla o semidefinita si ricorre a uno studio diretto di $\nabla f(x_0)$ in un intorno di x_0.

Più precisamente, nel caso bidimensionale, per ogni punto critico:

1. si calcola l'Hessiana:
$$H_f(x_0, y_0) = \begin{matrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_y x(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{matrix}$$
2. se $det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ e
   - $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è di minimo locale forte;
   - $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è di massimo locale forte;

   (si noti che in questo caso $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $f_{yy}(x_0, y_0)$ hanno lo stesso segno).
3. se $det(H_f(x_0, y_0)) < 0$ allora (x_0, y_0) è punto di sella;
4. se $det(H_f(x_0, y_0)) = 0$ occore un analisi ulteriore.

Funzioni convesse di n variabili

Generalità sulle funzioni convesse

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \Omega$ si ha che $[x_1, x_2] \subseteq \Omega$ (dove col simbolo $[x_1, x_2]$ si denota il segmento con estremi x_1, x_2); si dice strettamente convesso se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento (x_1, x_2) privato degli estremi è strettamente contenuto in Ω.

Si dice epigrafico di una funzione $f \ : \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'insieme

$$epi(f) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ z \geq f(x), x \in \Omega\}$$

Si dice che una funzione è convessa se $epi(f)$ è un sottoinsieme convesso, si dice che una funzione è concava se $-f$ è convessa.
Formalmente si dice che una funzione è convessa se e solo se per ogni x_1, x_2, $t \in [0,1]$ vale la condizione

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Si noti che $tx_2 + (1-t)x_1$ percorre il segmento $[x_1, x_2]$ al variare di $t \in [0,1]$

Se f è convessa allora:

- f è continua;
- f ha derivate parziali destre e sinistre in ogni punto;
- nei punti in cui è derivabile, f è anche divverenziabile.

Teorema di convessità e piano tangente. Sia $f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in Ω. Allora f è convessa in Ω se e solo se per ogni coppia di punti $x_0, x \in \Omega$ si ha:

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

In due dimensioni:

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

che geometricamente signifca che il paino tangente in $x-0, y_0$ sta sotto f.

Teorema di convessità e matrice Hessiana. Sia $f \in C^2(\Omega)$, con Ω aperto convesso in $\mathbb{R}^n$. Se per ogni x_0 in Ω la forma quadratica $d^2f(x_0)$ è semidefinita positiva, allora f è convessa in Ω.

Ottimizzazione di funzioni convesse e concave

Nelle funzioni convesse (concave) i punti stazionari, se esistono, rappresentano minimi (massimi) globali. Inoltre se la funzione è strettamente convessa (concava), il punto critico è di minimo (massimo) globale forte, quindi, in particolare, è unico.

Funzioni definite implicitamente

Funzione implicita di una variabile

Teorema di Dini della funzione implicita. Sia A un aperto in $\mathbb{R}^2$ e $f \ : \ A \to \mathbb{R}$ una funzione $C^1(A)$. Supponiamo che in un punto $(x_0, y_0) \in A$ sia:

$$f(x_0,y_0) = 0 \quad e \quad f_y(x_0,y_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno I di x_0 in $\mathbb{R}$ e un'unica funzione $g \ : \ I \to \mathbb{R}$, tale che $y_0 = g(x_0)$ e

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in I.$$

Inoltre, $g \in C^1(I)$ e

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g_x)}{f_y(x, g_x)} \qquad \forall\, x \in I.$$

Notiamo che se $f(x_0,y_0) = 0$ e $f_y(x_0,y_0) = 0$, ma $f_x(x_0,y_0) \neq 0$, il teorema è ancora applicabile scambiando gli ruoli di x e y.
In sostanza i punti in cui il teorema di Dini non è applicabile sono quelli in cui il gradiente di f si annulla, ossia i punti critici.

Complementi

Topologia e funzioni continue

Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione limitata. Allora essa ammette una sottosuccessione convergente.

Successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Si dice che la successione soddisfa la condizione di Cauchy se

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 \ : \ \forall\, h, k \geq n_0 \ \ si \ \ ha \ \ |x_h - x_k| < \epsilon.$$

Teorema di completezza di $\mathbb{R}^n$. Se $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, allora converge.

Teorema dell'uniforme continuità. Si dice che $f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0 \ : \ \forall\, x_1, x_2 \in \Omega, \ \ se \ \ |x_1 - x - 2| < \delta \ \ allora \ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Teorema di Cantor-Heine. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato e $f \ : \ K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua in K.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto e sia $f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ uniformemente continua in Ω. Allora f è prolungabile con continuità fino alla frontiera di Ω, ossia esiste una funzione $\bar{f} \ : \ \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua in $\bar{\Omega}$ e tale che in Ω coincide con f.

Funzioni omogenee

Una funzione $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (eventualmente definita solo per $x \neq 0$), non identicamente nulla, si dice positivamente omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \lambda > 0.$$

La funzione f si dice omogenea di grado α se la formula di prima vale anche per $\lambda < 0$.
Se f è positivamente omogenea vale

$$f(x) = f(|x| \cdot \frac{x}{|x|}) = |x|^{\alpha} f(\frac{x}{|x|}).$$

In particolare se f è omogenea (o positivamente omogenea) di grado zero, significa che è costante su ogni retta (o semiretta) uscente dall'origine. Infatti, indicata con

$$r(t) = tv$$

con v versore fissato, sarà

$$f(r(t)) = f(tv) = t^0 f(v) = f(v) = costante.$$

Più in generale, per una funzione in due variabili positivamente omogenea di grado α vale la seguente rappresentazione in coordinate polari:

$$f(\rho, \theta) = \rho^{\alpha} g(1, \theta)$$

per qualche $\alpha in \mathbb{R}$ e qualche funzione $g \ : \ [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$.

Sia $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzioen positivamente omogenea di grado α, definita e continua per $x \neq 0$. Allora:

- f è continua anche nell'origine se $\alpha > 0$; in questo caso $f(0) = 0$; f è discontinua nell'origine se $\alpha < 0$; è discontinua anche se $\alpha = 0$, tranne il caso banale in cui f è costante.
- f è differenziabile nell'origine se $\alpha > 1$; non è differenziabile nell'origine se $alfa < 1$, tranne il caso banale in cui $\alpha = 0$ e f è costante; se $\alpha = 1$, f è differenziabile se e solo se è una funzione lineare, (ossia $f8x) = a \cdot x$ per qualche vettore costante $a \in \mathbb{R}^n$).