ESERCITAZIONE 1

EMANUELE RIVA
emanuele.riva@polimi.it

ESERCITAZIONI: GIOVEDÍ h. 16:30

- RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE
- CINEMATICA DEL PUNTO

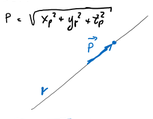
GRANDEZZE
- SCALARE → densità ρ, massa m, volume V, Energia E
- VETTORIALE
  - CINEMATICHE: velocità v, accelerazione a
  - DINAMICHE: Forza F, Coppia C

Definizione VETTORE $\in \mathbb{R}^3$

$\vec{P} = (P-O) = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$

$\vec{i} = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$ $\vec{j} = \begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$ $\vec{k} = \begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$

UN VETTORE É DEFINITO DA:
- MODULO $|\vec{P}| = P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$
- DIREZIONE r
- VERSO (+/-)
- PUNTO DI APPLICAZIONE



OSS $|\vec{i}| = 1 = \sqrt{1^2+0+0} = 1$

OPERAZIONI TRA VETTORI

PRODOTTO SCALARE $c = \vec{a} \times \vec{b}$ SCALARE

$c = |a||b|\cos\alpha$ ← (alfa è l'angolo compreso fra i vettori)

$= a\,b\cos\alpha$ — $b\cos(\text{alfa})$ è la proiezione di b su a

ESEMPIO (w = potenza) $W = \vec{F} \times \vec{v} = |F||v|\cos\gamma$

Una massa in un piano inclinato con una velocità v e forza F

$\gamma = 90 - \alpha$ = angolo compreso fra v e F

$W = |F||v|\sin\alpha$

facciamo un esempio numerico:

$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ [N]

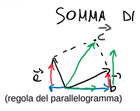
$\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ [m/s]

$W = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \times (-\vec{i} + 4\vec{j}) = -3 + 0 + 0 + 8 = 5$ W

l'angolo compreso fra i due versori i è 0, quindi -3 1 cos(0)= -3

invece l'angolo compreso fra il vesore i e il versore j è 90, quindi cos(90)= 0

SOMMA DI VETTORI



(regola del parallelogramma)

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ la somma di due vettori è un vettore

$\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = c_x\vec{i} + c_y\vec{j}$

PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ VETTORE

il prodotto vettoriale ha come risultato un vettore $\vec{c}$

a e b definiscono un piano e c è il vettore perpendicolare a questo piano

direzione e verso di c sono decisi con la regola della mano destra.

modulo di c: $|\vec{c}| = c = a\,b\sin\alpha$ (ab è l'area, mentre alfa è l'angolo compreso fra a e b)

calcolo del prodotto vettoriale: $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \det\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} =$

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di i

$= \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - b_x a_y)$

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di k

prodotto incrociato senza la riga e la colonna di j

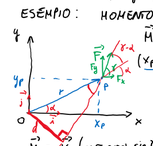
$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} +$

$- a_z b_y \vec{i} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) +$

$+ \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$

ESEMPIO: MOMENTO DI UNA FORZA



$\vec{M} = (P-O) \wedge \vec{F} =$

$(x_P\vec{i} + y_P\vec{j}) \wedge (F_x\vec{i} + F_y\vec{j})$

$\begin{cases} x_P = r\cos\alpha \\ y_P = r\sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} F_x = F\cos\gamma \\ F_y = F\sin\gamma \end{cases}$

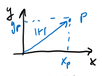
$\vec{M} = \vec{k}(rF\cos\alpha\sin\gamma - rF\sin\alpha\cos\gamma) =$

$= \vec{k}(-rF\sin(\alpha-\gamma)) = \vec{k}\,rF\sin(\gamma-\alpha) =$

$\vec{M} = F d\,\vec{k}$

CINEMATICA DEL PUNTO

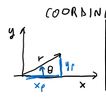
$\vec{P}(t)$ LEGGE ORARIA



$(P-O) = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}$

$|P-O| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = r$

COORDINATE CARTESIANE



$(P-O) = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$

$tg(\theta) = \frac{y_P}{x_P}$

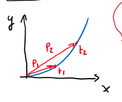
COORDINATE POLARI

TRAIETTORIA $y(x)$ CURVA PERCORSA DA P/H DURANTE IL MOTO

$P(t) = (P-O) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \longrightarrow y(x)$ TRAIETTORIA

ESEMPIO

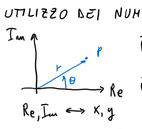


$\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 5t^2 \end{cases}$ FORMA PARAMETRICA

$t = \frac{x}{3} \rightarrow y = 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}x^2$

$\begin{cases} \vec{P_1} = \vec{P}(t_1) \\ \vec{P_2} = \vec{P}(t_2) \end{cases}$

UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI



$\vec{P} = re^{j\theta}$ $\boxed{j = \sqrt{-1}}$

FORMA ESPONENZIALE

$\vec{P} = r\cos\theta + jr\sin\theta$

FORMA TRIGONOMETRICA

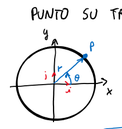
Re, Im ⟷ x, y

RELAZIONI DI EULERO $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$e^{j0} = 1$; $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$; $e^{j\pi} = -1$

1) $\vec{P} = (P-O)$ POSIZIONE
2) $\vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt}$ VELOCITÀ
3) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ACCELERAZIONE

PUNTO SU TRAIETTORIA CIRCOLARE



$\begin{cases} r \text{ COSTANTE} \\ \theta(t) \text{ VARIABILE E NOTO} \end{cases}$

1) $\vec{v}_P$
2) $\vec{a}_P$

$\vec{P} = (P-O) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} =$

$= x(\theta(t))\vec{i} + y(\theta(t))\vec{j}$

FORMA PARAMETRICA $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

FORMA VETTORIALE $(P-O) = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$

$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$ $\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\vec{j} =$

$= \boxed{-r\sin\theta\,\dot{\theta}}\vec{i} + \boxed{r\cos\theta\,\dot{\theta}}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$\vec{v} = \underbrace{r\dot{\theta}}_{|v|\ \text{MODULO}}\underbrace{(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}_{\vec{t}\ \text{VERSORE TANGENTE}}$ $\boxed{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$

$\dot{\theta} \gtrless 0$

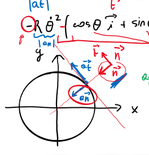
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} =$

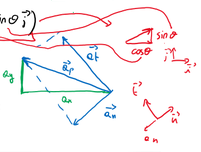
$(-R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - R\sin\theta\,\ddot{\theta})\vec{i} +$

$(-R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + R\cos\theta\,\ddot{\theta})\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

$\vec{a} = \underbrace{R\ddot{\theta}}_{|a_t|}\underbrace{(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}_{\vec{t}} + (a_y\vec{j} + a_x\vec{i}) \times \vec{i} = a_x$

$-\underbrace{R\dot{\theta}^2}_{|a_n|}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$





APPROCCIO CON NUMERI COMPLESSI

$\vec{P} = (P-O) = Re^{j\theta}$

$\begin{cases} x = Re\{\vec{P}\} = R\cos\theta \\ y = Im\{\vec{P}\} = R\sin\theta \end{cases}$

$\vec{v} = jR\dot{\theta}e^{j\theta} = \underbrace{R\dot{\theta}}_{|v|}\underbrace{e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}}$ ($j = e^{j\frac{\pi}{2}}$)

$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2e^{j\theta} + jR\ddot{\theta}e^{j\theta} =$

$= \underbrace{R\dot{\theta}^2e^{j(\theta+\pi)}}_{\vec{a_n}} + \underbrace{R\ddot{\theta}e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}}_{\vec{a_t}}$

$-1 = e^{j\pi}$ $e^{j\theta}e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j(\theta+\pi)}$