

Esercitazioni di Fisica Tecnica



Si ringraziano gli ingg. Gianluca Belluco, Alessia Ruggieri,
Stefano Parolo e Stefano Devecchi che hanno curato la
stesura e la revisione della presente raccolta di esercitazioni

Indice

Esercitazione 1 - Gas Ideali -	3
Esercitazione 2 - Ciclo Otto -	11
Esercitazione 3 - Macchine Motrici ed Operatrici -	15
Esercitazione 4 - Sistemi Aperti -	20
Esercitazione 5 - Sistemi Bifase -	28
Esercitazione 6 - Cicli Rankine e Joule-Brayton -	33
Esercitazione 7 - Conduzione -	45
Esercitazione 8 - Convezione -	51
Esercitazione 9 - Irraggiamento -	60
Esercitazione 10 - Conduzione e Convezione -	69
Esercitazione 11 - Convezione e Irraggiamento -	78

Esercitazione 1 - Gas Ideali -

Esercizio 1 : Primo Principio della Termodinamica $\rightarrow \Delta U = Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow}$

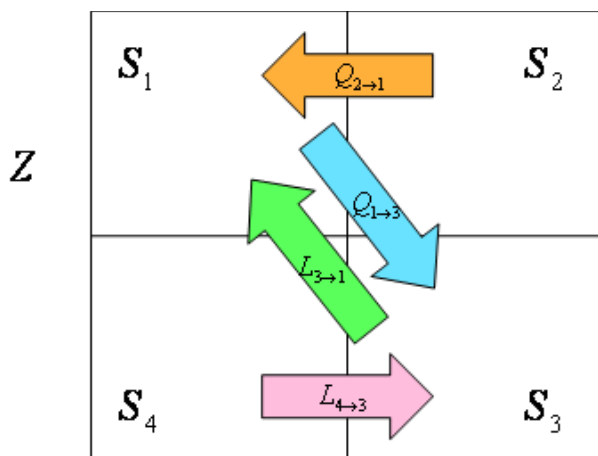
Un sistema è costituito da quattro sottosistemi S_1 , S_2 , S_3 e S_4 .

S_1 cede un calore $Q_{1 \rightarrow 3} = 400 \text{ kcal}$ a S_3 e riceve un calore $Q_{2 \rightarrow 1} = 20 \text{ kcal}$ da S_2 .

S_3 fornisce un lavoro $L_{3 \rightarrow 1} = 1000 \text{ kJ}$ a S_1 e assorbe un lavoro $L_{4 \rightarrow 3} = 700 \text{ kJ}$ da S_4 .

Calcolare ΔU per ogni sottosistema e per il sistema composto.

Risoluzione



Il sistema composto Z non scambia calore e/o lavoro con l'ambiente esterno, quindi è un SISTEMA ISOLATO.

$$\Delta L_Z = 0$$

$$\Delta S_Z = S_Q^{\leftarrow} + S_{irr}$$

Poiché il sistema non scambia calore con l'ambiente: $S_Q^{\leftarrow} = 0$

$$\text{Quindi: } \Delta S_Z = S_{irr}$$

Per poter applicare il Primo Principio della termodinamica dobbiamo convertire le calorie in Joule : $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$

$$Q_{(1 \rightarrow 3)} = 400 \text{ kcal} = 1675 \text{ kJ}$$

$$Q_{(2 \rightarrow 1)} = 20 \text{ kcal} = 84 \text{ kJ}$$

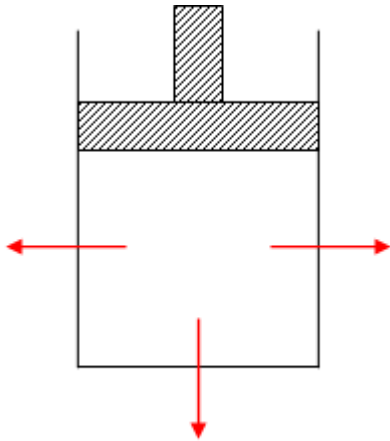
$$L_{(2 \rightarrow 1)} = 1000 \text{ kJ}$$

$$L_{(4 \rightarrow 3)} = 700 \text{ kJ}$$

	Q^{\leftarrow}	-	L^{\rightarrow}	=	ΔU
S_1	-1675 + 84	-	-1000	=	-591
S_2	-84	-	0	=	-84
S_3	1675	-	1000 - 700	=	1375
S_4	0	-	700	=	-700
Z	0	-	0	=	0

Esercizio 2 : Bilancio entropico per un sistema chiuso

Consideriamo un sistema CHIUSO (sistema in grado di scambiare energia con l'ambiente esterno) costituito da una miscela aria-benzina contenuta in un cilindro dotato di pistone.



Se la trasformazione è irreversibile può la variazione totale di entropia essere minore di zero?

$$\Delta S_{TOT} = S_Q^{\epsilon} + S_{irr}$$

$$\text{dove } S_Q^{\epsilon} < 0 \text{ e } S_{irr} > 0$$

Quindi se $|S_Q^{\epsilon}| > S_{irr}$ allora $\Delta S < 0$

Esercizio 3 : Trasformazioni dei gas ideali

In un sistema cilindro-pistone vi sono 0,3 kg di azoto (N_2 gas perfetto biatomico) alla temperatura $T_1 = 25^\circ C$ e alla pressione $P_1 = 1 \text{ bar}$.

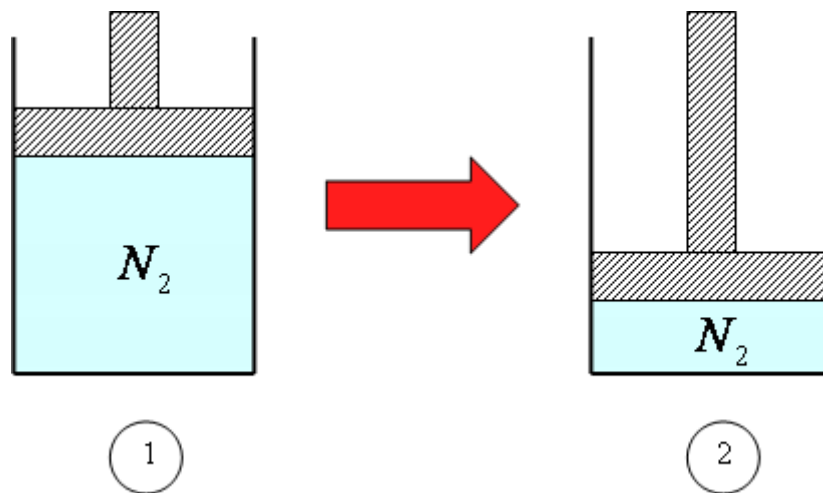
Comprimiamo adiabaticamente con $\beta = \frac{V_1}{V_2} = 4$ fino a raggiungere la pressione

$$P_2 = 10 \text{ bar}$$

determinare V_2, T_2 e $L_{compressione}$; dire se ΔS è maggiore, minore o uguale a zero e calcolarne il valore.

Nel caso in cui il processo risulti irreversibile, calcolare $P_{(2, rev)}$ e $L_{(compressione, rev)}$ ottenuti per un processo reversibile che evolva tra le stesse temperature T_1 e T_2 .

Risoluzione



Per prima cosa bisogna riportare temperatura e pressione nelle unità di misura del SI

$$T_{\text{Kelvin}} = T_{(^{\circ}\text{C})} \frac{\text{K}}{(^{\circ}\text{C})} + 273\text{K} \quad \rightarrow \quad T_1 = 25^{\circ}\text{C} \frac{\text{K}}{(^{\circ}\text{C})} + 273\text{K} = 298\text{K}$$

$$1\text{bar} = 10^5 \text{Pa} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} P_1 &= 10^5 \text{Pa} \\ P_2 &= 10^6 \text{Pa} \end{aligned}$$

Per calcolare V_1 utilizziamo l'**equazione di stato dei gas perfetti** $\rightarrow P_1 V_1 = m R^* T$

$$M_{m, N_2} = 2 \cdot 14 = 28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad \text{massa molare della molecola di azoto}$$

$$R^* = \frac{R}{M_{m, N_2}} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol}}}{28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\text{quindi } V_1 = \frac{m R^* T_1}{P_1} = \frac{0,3 \text{kg} \cdot 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 298\text{K}}{10^5 \text{Pa}} = 0,265 \frac{\text{J}}{\text{Pa}} = 0,265 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{Pa}} = 0,265 \text{m}^3$$

$$\text{mentre } V_2 = \frac{V_1}{4} = 0,066 \text{m}^3$$

$$\text{ne consegue } T_2 = \frac{P_2 V_2}{m R^*} = \frac{10^6 \text{Pa} \cdot 0,066 \text{m}^3}{0,3 \text{kg} \cdot 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 740,99 \text{K} = 741\text{K}$$

	$T [K]$	$P [Pa]$	$V [m^3]$
1	298	10^5	0,265
2	741	10^6	0,07

Calcoliamo il lavoro della trasformazione adiabatca

$$\Delta U = Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow} = mc_v \Delta T$$

In una trasformazione adiabatca non avviene scambio di calore con l'ambiente, quindi $Q^{\leftarrow} = 0$

$$L^{\rightarrow} = -mc_v \Delta T = -\frac{5}{2} mR^* \Delta T = -98,645 \text{ kJ}$$

Bilancio di entropia:

$\Delta S = S_Q^{\leftarrow} + S_{irr}$ Poichè la trasformazione è adiabatca $S_Q^{\leftarrow} = 0$ quindi $\Delta S = S_{irr} > 0$.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = m \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1} \right) =$$

$$= 0,3 \text{ kg} \left(\frac{7}{2} \cdot 296,9 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \ln \frac{741K}{298K} - 296,9 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \ln \frac{10^6 Pa}{10^5 Pa} \right) = 78,879 \frac{J}{K} > 0$$

si tratta di una trasformazione irreversibile

Se la trasformazione fosse stata reversibile, avremmo $\Delta S = 0$

N.B. T_1, T_2, V_1 restano fissi, mentre β cambia!

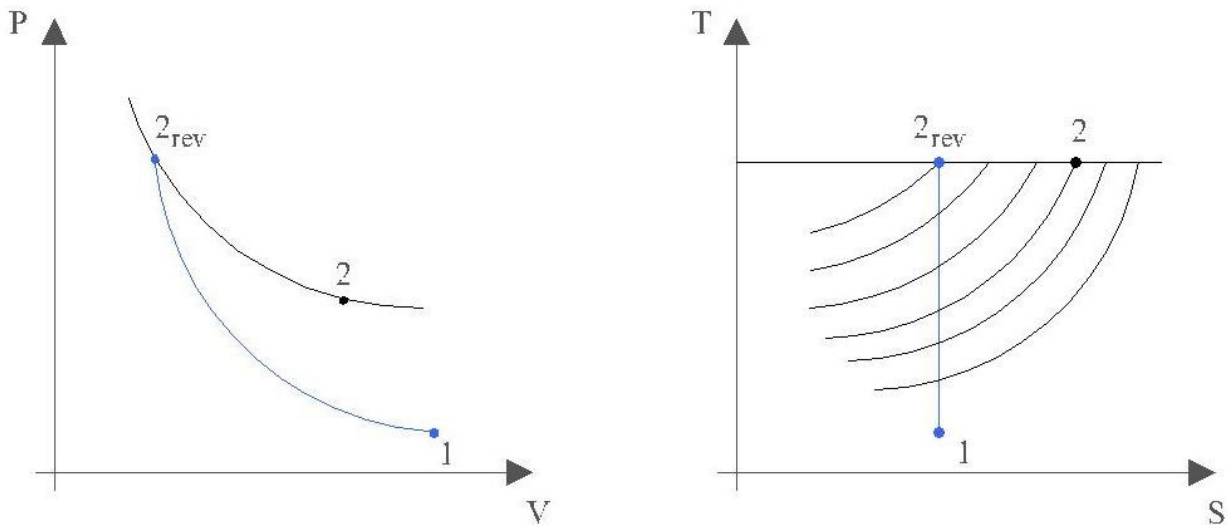
$$\Delta S = S_2 - S_1 = m \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1} \right) = 0$$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p} - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{R^*} = 0 \rightarrow P_{2, rev} = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{c_p}{R^*}} = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{7}{2}} = 10^5 Pa \left(\frac{741K}{298K} \right)^{\frac{7}{2}} = 24,2 \cdot 10^5 Pa$$

$$V_2 = \frac{mR^* T_2}{P_2} = \frac{0,3 \text{ kg} \cdot 296,9 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \cdot 298K}{24,2 \cdot 10^5 Pa} = 0,011 \frac{J}{Pa} = 0,011 \frac{Pa \cdot m^3}{Pa} = 0,011 m^3$$

$$L^{\rightarrow} = -mc_v \Delta T = -\frac{5}{2} mR^* \Delta T = -98,645 \text{ kJ}$$

Il lavoro rimane invariato perché invariata è, rispetto al caso precedente, la variazione di temperatura, ma a parità di temperatura lo stesso lavoro produce una compressione più efficace e quindi una pressione finale più alta e un volume finale più piccolo.



Esercizio 4 : Trasformazioni dei gas ideali

Si dispone di una massa $m=2 \text{ kg}$ di N_2 nelle condizioni iniziali $P_1=6 \text{ ata}$ e $T_1=20^\circ \text{C}$ che vengono espansi fino a pressione finale $P_2=2 \text{ ata}$ e alla temperatura finale $T_2=70^\circ \text{C}$ con l'impiego di due serie di trasformazioni semplici:

I possibilità: riscaldamento isobaro fino a T_2 (stato **a**) ed espansione isoterma fino a P_2 .

II possibilità: espansione adiabatica fino a V_2 (stato **b**) e isocora fino a P_2 e T_2 .

Calcolare per le due serie di trasformazioni $\Delta U, \Delta H, \Delta S, \Delta V, Q, L$.

Risoluzione

Per prima cosa è necessario riportare temperatura e pressione nelle unità di misura del sistema internazionale.

$$T_{\text{KELVIN}} = T_{^\circ \text{C}} \cdot \frac{\text{K}}{^\circ \text{C}} + 273 \text{K} \quad \rightarrow \quad T_1 = 20^\circ \text{C} \cdot \frac{\text{K}}{^\circ \text{C}} + 273 \text{K} = 293 \text{K}$$

$$T_2 = 70^\circ \text{C} \cdot \frac{\text{K}}{^\circ \text{C}} + 273 \text{K} = 343 \text{K}$$

$$1 \text{ ata} = 98066,5 \text{ Pa} \quad \rightarrow \quad P_1 = 6 \text{ ata} = 6 \cdot 98066,5 \text{ Pa} = 588399 \text{ Pa}$$

$$P_2 = 2 \text{ ata} = 2 \cdot 98066,5 \text{ Pa} = 196133 \text{ Pa}$$

Per calcolare v_1 uso l'**equazione di stato dei gas perfetti** $\rightarrow P_1 v_1 = R^* T_1$

$$M_{m, N_2} = 2 \cdot 14 = 28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad \text{massa molare della molecola di azoto}$$

$$R^* = \frac{R}{M_{m, N_2}} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}}{28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_p = \frac{7}{2} \cdot R^* = 1039,15 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad c_v = \frac{5}{2} \cdot R^* = 742,25 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{R^* T_1}{P_1} = \frac{296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{K}}{588399 \text{Pa}} = 0,148 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{Pa}} = 0,148 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{Pa}} = 0,148 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$v_2 = \frac{R^* T_2}{P_2} = \frac{296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 343 \text{K}}{196133 \text{Pa}} = 0,520 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{Pa}} = 0,520 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{Pa}} = 0,520 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

	P [Pa]	T [K]	V $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$
1	588399	293	0,148
2	196133	343	0,520

Conoscendo lo stato di partenza e quello di arrivo possiamo calcolare le seguenti grandezze:

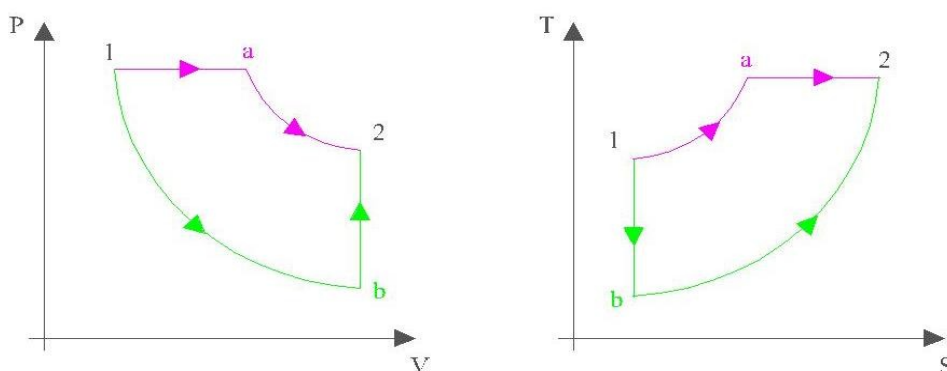
$$\Delta U = m \Delta u = m c_v \Delta T = 2 \text{kg} \cdot 742 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (343 \text{K} - 293 \text{K}) = 74200 \text{ J}$$

$$\Delta V = m \Delta v = 2 \text{kg} \left(0,520 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} - 0,148 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right) = 0,744 \text{ m}^3$$

$$\Delta H = m \Delta h = m c_p \Delta T = 2 \text{kg} \cdot 1039 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (343 \text{K} - 293 \text{K}) = 103900 \text{ J}$$

$$\Delta S = m \Delta s = m \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1} \right) = 2 \text{kg} \cdot \left(1039 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \ln \frac{343 \text{K}}{293 \text{K}} - 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \ln \frac{196133 \text{ Pa}}{588399 \text{ Pa}} \right) = 979,8 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Infatti queste sono tutte **FUNZIONI DI STATO**, quindi non dipendono dalla trasformazione



eseguita, ma solo dagli stati iniziale e finale.

Grafico PV

1 → a isobara

a → 2 isoterma

1 → b adiabatrica isoentropica

b → 2 isocora

Grafico TS

1 → a isobara

a → 2 isoterma

1 → b adiabatrica isoentropica

b → 2 isocora

Stato a

$$v_a = \frac{T_a R^*}{P_a} = \frac{T_2 R^*}{P_1} = \frac{343 \text{ K} \cdot 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}}{588399 \text{ Pa}} = 0,173 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

	P [Pa]	T [K]	V $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$
1	588399	293	0,148
a	588399	343	0,173
2	196133	343	0,520

Stato b

Possiamo risolvere l'esercizio in due modi:

1) Utilizzando le proprietà delle trasformazioni adiabatiche

$$P v^n = \text{cost} \quad \text{ma } n = k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1039 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}}{742 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 1,4 \quad \text{quindi } P v^k = \text{cost}$$

$$P_1 v_1^k = P_b v_b^k$$

$$P_b = P_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_b} \right)^k = 588399 \text{ Pa} \cdot \left(\frac{0,148 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,520 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \right)^{1,4} = 101306 \text{ Pa}$$

$$T_b = \frac{P_b v_b}{R^*} = \frac{101306 \text{ Pa} \cdot 0,520 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 177,43 \text{ K}$$

2) Considerando che le trasformazioni adiabatiche sono isoentropiche

$$\Delta S_{1 \rightarrow b} = m \cdot \left(c_v \ln \frac{T_b}{T_1} + R^* \ln \frac{v_b}{v_1} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad c_v \ln \frac{T_b}{T_1} + R^* \ln \frac{v_b}{v_1} = 0$$

$$\ln\left(\frac{T_b}{T_1}\right)^{c_v} = \ln\left(\frac{v_1}{v_b}\right)^{R^*} \quad \rightarrow \quad T_b = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_b}\right)^{\frac{R^*}{c_v}} = 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{0,148 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{0,520 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}\right) = 177 \text{ K}$$

	P [Pa]	T [K]	V $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right]$
1	588399	293	0,148
b	101306	177,43	0,520
2	196133	343	0,520

Trasformazione 1 → a → 2

	L[J]	Q[J]
Isobara 1 → a	$L = mP \Delta v_{1 \rightarrow a} = mP(v_a - v_1) =$ $= 2 \text{ Kg} \cdot 588399 \text{ Pa} \cdot \left(0,173 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} - 0,148 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right) =$ $= 29420 \text{ J}$	$Q = \Delta H_{1 \rightarrow a} = mc_p(T_a - T_1) =$ $= 2 \text{ kg} \cdot 1039 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (343 \text{ K} - 293) =$ $= 103900 \text{ J}$
Isoterma a → 2	$L = m \int_a^2 P dv = m \int_a^2 R^* \frac{T}{v} dv = mR^* T \int_a^2 \frac{dv}{v} =$ $= mR^* T \ln\left(\frac{v_2}{v_a}\right) =$ $= 2 \text{ kg} \cdot 296,9 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 343 \text{ K} \ln\left(\frac{0,520}{0,173}\right) =$ $= 224150 \text{ J}$	$\Delta U = 0$ $Q = L = 224150 \text{ J}$

Verifica: $\Delta U = Q - L = [(103900 + 224150) - (29420 + 224150)] \text{ J} = 74480 \text{ J} \approx 74200 \text{ J}$

Trasformazione 1 → b → 2

	L[J]	Q[J]
Adiabatica Isoentropica 1 → b	$L = -\Delta U = mc_v(T_b - T_1) =$ $= 2 \text{ kg} \cdot 742 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (177,43 \text{ K} - 293 \text{ K}) =$ $= 171505 \text{ J}$	$Q = 0$
Isocora b → 2	$L = 0$	$Q = \Delta U = mc_v(T_2 - T_b) =$ $= 2 \text{ kg} \cdot 742 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (343 \text{ K} - 177,43 \text{ K}) =$ $= 245706 \text{ J}$

Verifica: $\Delta U = Q - L = 245706 \text{ J} - 171505 \text{ J} = 74201 \text{ J} \approx 74200 \text{ J}$

Esercitazione 2 - Ciclo Otto -

Esercizio : **Ciclo Otto**

Si vuole realizzare un nuovo modello di automobile, equipaggiata con un motore 4 cilindri a ciclo Otto a quattro tempi ed una cilindrata di 1800cm^3 .

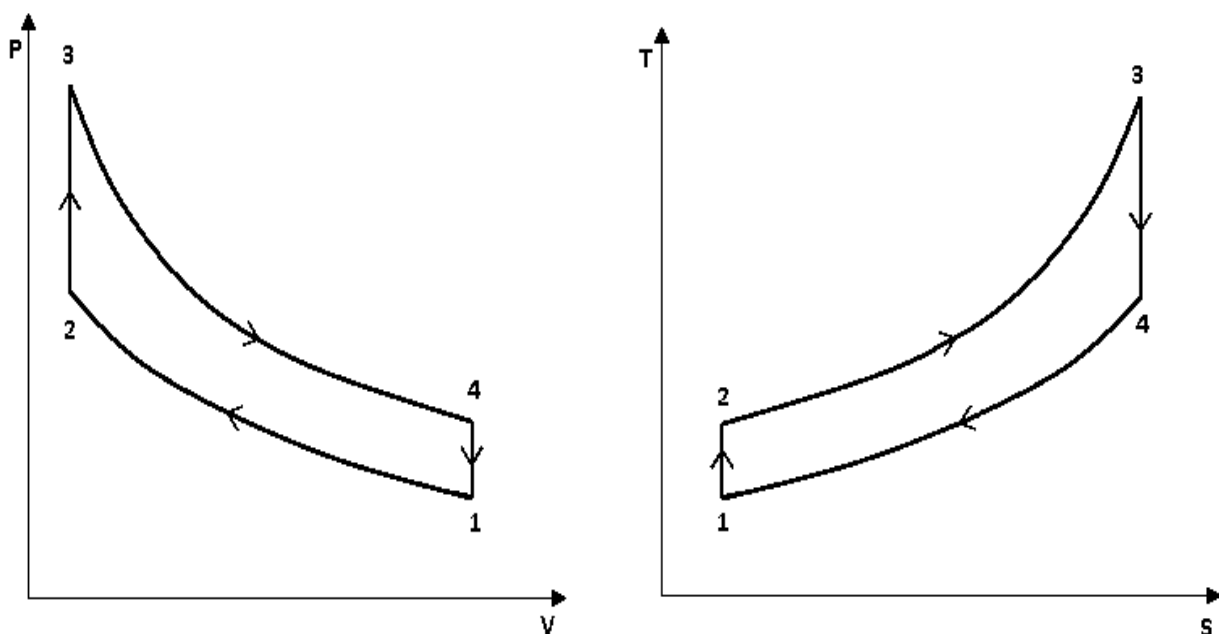
I dati di progetto da rispettare sono i seguenti:

1. Rapporto di compressione volumetrico β pari a 9.
2. Temperatura massima del ciclo T_3 di 2500°C .
3. Al termine dell'aspirazione, la miscela aspirata ha una pressione P_1 di 0,95 ata e una temperatura T_1 di 50°C .

Per dimensionare i componenti meccanici del motore, bisogna conoscere il valore delle variabili termodinamiche nei punti caratteristici. Si chiede quindi di caratterizzare il ciclo. Ipotizzare il ciclo ideale e considerare la miscela aria-benzina come un gas ideale avente le caratteristiche dell'aria.

Determinare inoltre il rendimento termodinamico del ciclo

Ciclo termodinamico “Otto” nel piano P-V e nel piano T-S



1-2 : compressione adiabatica

2-3 : isocora

3-4 : espansione adiabatica

4-1 : isocora

Risoluzione

Consideriamo un singolo cilindro come sede del ciclo (i conti eseguiti valgono anche per gli altri 3 cilindri).

La cilindrata del singolo cilindro è un quarto del volume totale:

$$\Delta V = \frac{V_{Totale}}{4} = \frac{1800 \text{ cm}^3}{4} = 450 \text{ cm}^3 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

La cilindrata è il volume del cilindro spazzato dal pistone durante la sua corsa dal punto morto inferiore al punto morto superiore.

C'è quindi un volume residuo alla fine della corsa del pistone (che è il volume V_2) del quale dobbiamo tenere conto per il calcolo di V_1

Le condizioni che ci permettono di definire V_1 e V_2 sono:

$$\beta = \frac{V_1}{V_2} = 9$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

dalle quali si ricava facilmente

$$9V_2 = V_1$$

$$9V_2 - V_2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

da cui

$$V_2 = \frac{4,5}{8} \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 0,5625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 5,625 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$V_1 = 9 \cdot V_2 = 5,0625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Questo sarà quindi il volume all'inizio della compressione ovvero al termine dell'aspirazione della miscela aria-benzina.

Per quanto riguarda la pressione e la temperatura in questo punto, esse saranno quelle date dal punto 3) dei vincoli di progetto.

Convertiamo le altre grandezze in SI, ricordando che:

$$1 \text{ ata} = 98066,5 \text{ Pa} \quad T_{(K)} = T_{(^{\circ}C)} + 273,15$$

$$P_1 = 0,95 \text{ ata} \approx 9,316 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad T_1 = 50^{\circ}C \approx 323 \text{ K} \quad T_3 = 2500^{\circ}C \approx 2773 \text{ K}$$

Posso inoltre calcolare la massa di miscela aspirata. Per ipotesi consideriamo la miscela aria-benzina un gas ideale avente le caratteristiche dell'aria, ossia composto da Azoto all'80% ed Ossigeno al 20%. La sua massa molare sarà quindi:

$$M = (0,8 \cdot 14 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot 2) + (0,2 \cdot 16 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot 2) = 28,8 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Con tale ipotesi ricavo R^* :

$$R^*_{aria} = \frac{8314}{28,8} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \approx 288,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

La massa di miscela aspirata si ricava con l'equazione di stato in 1:

$$m_{aspirata} = \frac{P_1 \cdot V_1}{R^*_{aria} \cdot T_1} = \frac{9,316 \cdot 10^4 Pa \cdot 5,1 \cdot 10^{-4}}{288,7 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 323K} \approx 5,1 \cdot 10^{-4} kg$$

Compressione adiabatica (isoentropica) 1-2:

Il volume del gas a fine compressione vale come visto:

$$V_2 = 5,625 \cdot 10^{-5} m^3$$

Possiamo ricavare P_2 considerando che la trasformazione è isoentropica, e segue la legge delle politropiche con indice della politropica $n=k$ ossia:

$$P_1 \cdot V_1^k = P_2 \cdot V_2^k \quad \text{con} \quad k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{7}{2} R^*}{\frac{5}{2} R^*} = \frac{7}{5} \quad \text{e quindi}$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^k = 9,316 \cdot 10^4 Pa \cdot 9^{\frac{7}{5}} \approx 2 \cdot 10^6 Pa = 20 \text{ bar}$$

Si poteva giungere allo stesso risultato anche basandosi sul fatto che la variazione di entropia tra 1 e 2 è = 0.

Nota P_2 ricaviamo ora T_2 con l'equazione di stato in 2:

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{m \cdot R^*_{aria}} = \frac{2 \cdot 10^6 Pa \cdot 5,625 \cdot 10^{-5} m^3}{5,1 \cdot 10^{-4} kg \cdot 288,7 \frac{J}{kg \cdot K}} \approx 764 K$$

A causa della compressione, il gas raggiunge temperature notevoli già prima dell'ignizione.

Isocora 2-3:

Dal grafico del ciclo possiamo notare che $V_3 = V_2$, mentre T_3 è la temperatura massima del ciclo, data dal punto 1) dei vincoli di progetto:

$$T_3 = 2500^\circ C = 2773 K$$

Dall'equazione di stato si ricava la pressione P_3 :

$$P_3 = \frac{m \cdot R^*_{aria} \cdot T_3}{V_3} = \frac{5,1 \cdot 10^{-4} kg \cdot 288,7 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 2773 K}{5,625 \cdot 10^{-5} m^3} \approx 7,2 \cdot 10^6 Pa \approx 72 \text{ bar}$$

Espansione adiabatica 3-4:

Per ricavare P_4 possiamo applicare lo stesso ragionamento utilizzato per la compressione adiabatica, considerando che è isoentropica:

$$P_3 \cdot V_3^k = P_4 \cdot V_4^k \quad \text{con} \quad k = \frac{7}{5} \quad \text{e quindi}$$

$$P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^k = P_3 \left(\frac{1}{\beta} \right)^k = 7,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \frac{1}{9^{\frac{7}{5}}} \approx 3,32 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Notiamo che dal grafico del ciclo $V_4 = V_1$.

Per ricavare T_4 applichiamo l'equazione di stato in 4:

$$T_4 = \frac{P_4 \cdot V_4}{m \cdot R_{aria}^*} = \frac{3,32 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{5,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot 288,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} \approx 1150 \text{ K}$$

	Pressione [Pa]	Volume [m ³]	Temperatura [K]
1	$9,316 \cdot 10^4$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	323
2	$2 \cdot 10^6$	$5,625 \cdot 10^{-5}$	764
3	$7,2 \cdot 10^6$	$5,625 \cdot 10^{-5}$	2773
4	$3,32 \cdot 10^5$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	1150

Nota 1:

Per il calcolo della pressione P_2 avremmo potuto seguire un altro ragionamento, basandoci sul fatto che la variazione di entropia tra 1 e 2 è pari a zero:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{per cui} \quad c_p \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + c_v \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 0 \quad \text{ottenendo} \quad P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{c_p}{c_v}}$$

Nota 2:

Potrebbe risultare utile ed interessante calcolare il lavoro netto e la potenza prodotti dal motore; sapendo che la variazione di energia interna del ciclo ideale è pari a zero, dalla seconda legge della termodinamica:

$$\Delta U = Q - L \rightarrow Q = L \quad \text{dove}$$

$$Q_c = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \frac{5}{2} \cdot 288,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (2773 \text{ K} - 765 \text{ K}) = 739 \text{ J}$$

$$Q_f = m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_1) = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \frac{5}{2} \cdot 288,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (1150 \text{ K} - 323 \text{ K}) = 304 \text{ J}$$

$$Q = L = Q_c - Q_f = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) - m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_1) = 739 \text{ J} - 304 \text{ J} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2 - T_4 + T_1)$$

$$= 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \frac{5}{2} \cdot 288,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (2773 \text{ K} - 765 \text{ K} - 1150 \text{ K} + 323 \text{ K}) \approx 435 \text{ J}$$

Idealmente quindi otteniamo da ogni ciclo 435 J

Il rendimento risulta: $\eta = \frac{L}{Q} = \frac{435}{739} = 0,58$

Il lavoro per ciclo compiuto dal motore (moltiplicando per il numero di cilindri) è pari a:

$$L_{motore} = 435 J \cdot 4 = 1740 J$$

Per esempio, calcoliamo la potenza sviluppata dal motore a *3000 rpm*, supponendo che per ogni rotazione il motore compia mezzo ciclo (nel motore 4 tempi, il pistone compie un ciclo utile ogni 2 rotazioni dell'albero motore!):

$$P_{3000rpm} = 3000 \frac{\text{cicli}}{60s} \cdot \frac{1740}{2} \frac{J}{\text{cicli}} = \frac{50}{s} \cdot \frac{1740}{2} J = 43,5 kW \approx 57 cv$$

$$P_{6000rpm} = 6000 \frac{\text{cicli}}{60s} \cdot \frac{1740}{2} \frac{J}{\text{cicli}} = \frac{100}{s} \cdot \frac{1740}{2} J = 87 kW \approx 115 cv$$

Valore verosimile, ma bisogna ricordare che abbiamo considerato il ciclo ideale e abbiamo trascurato gli attriti!

NOTA

Si tratta solo della seconda esercitazione e potrebbe sembrare prematuro richiedere la caratterizzazione di un ciclo termodinamico come il ciclo Otto quando ancora non è stata trattata la termodinamica dei processi.

Si osservi però che l'esercizio proposto è all'incirca equivalente a un esercizio di questo tipo:

“Un ciclo termodinamico è composto da

- una trasformazione adiabatica dallo stato termodinamico 1 ($T_1=50^\circ\text{C}$, $P_1=0,95 \text{ ata}$, $V_1=5,0625 \text{ m}^3$) allo stato termodinamico 2 ($V_2=V_1/9$)
- una trasformazione isocora dallo stato td 2 fino allo stato td 3 ($T_3=2500^\circ\text{C}$)
- una trasformazione adiabatica dallo stato td 3 allo stato td 4 ($V_4=V_1$)
- una trasformazione isocora fino allo stato td 1

Caratterizzare il ciclo”

Esercitazione 3 - Macchine Motrici ed Operatrici -

Macchine motrici ed operatrici

Definiamo il “rendimento di secondo principio” ed il “rendimento di confronto”:

$$\eta_{IIp} = \frac{\eta_{reale}}{\eta_{IDEALE reversibile}} = \frac{\frac{L_{reale}}{Q_c}}{\frac{L_{ideale}}{Q_c}} = \frac{L_{reale}}{L_{IDEALE reversibile}} \quad \eta_{Confronto} = \frac{\eta_{Serbatoio Reale}}{\eta_{Serbatoio Ideale}}$$

Essenzialmente, ci indicano nel primo caso quanto la macchina reale si avvicina al suo equivalente ideale e, nel secondo, quanto il serbatoio reale pesa sull'efficienza della macchina in esame.

Definiamo il “coefficiente di prestazione” :

$$COP_F = \frac{Q_F}{L}$$

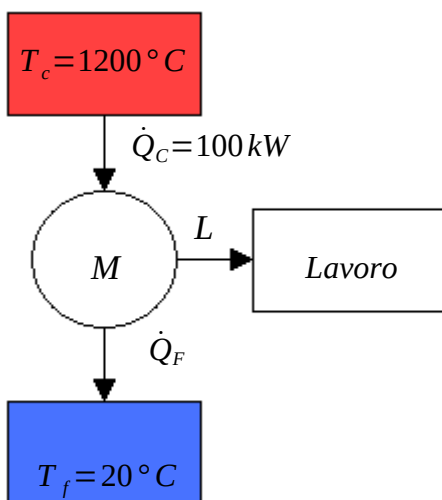
Nel caso di macchina reversibile con serbatoi ideali a temperatura costante la formula si semplifica come segue:

$$COP_{REV} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Presentiamo ora qualche semplice esercizio esplicativo.

Esercizio 1 : Macchina motrice

Viene assegnata una macchina motrice irreversibile con $\eta_{IIp} = 0,5$ schematizzabile come segue:



Calcolare la potenza meccanica sviluppata dalla macchina.

Dati

Convertiamo i valori in SI:

$$T_C = 1473K$$

$$T_F = 293K$$

$$\dot{Q}_C = 100kW$$

$$\eta_{IIp} = 0,5$$

Risoluzione

Per arrivare alla soluzione, considero prima la macchina ideale, per calcolare solo in seguito il lavoro reale:

$$\eta_{ID} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{293 \text{ K}}{1473 \text{ K}} = 0,8$$

$$\dot{L}_{ID} = \eta_{ID} \cdot \dot{Q}_C = 0,8 \cdot 100 \text{ kW} = 80 \text{ kW}$$

$$\dot{L}_{REALE} = \eta_{IIP} \cdot \dot{L}_{ID} = 40 \text{ kW}$$

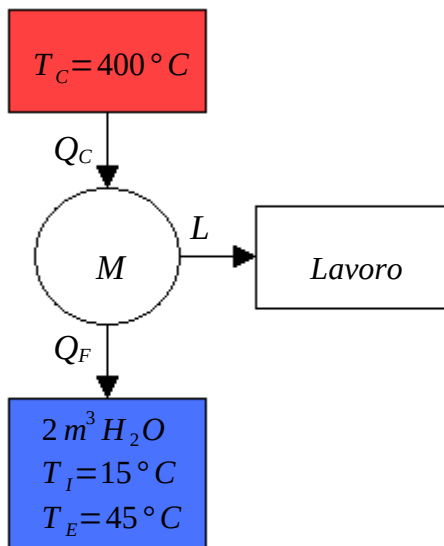
Nota

Potevamo giungere alla soluzione considerando che $\eta_{IIP} \cdot \eta_{IDEALE} = \eta_{REALE}$ e quindi calcolando direttamente :

$$\dot{L}_{REALE} = \eta_{REALE} \cdot \dot{Q}_C = 0,4 \cdot 100 \text{ kW} = 40 \text{ kW}$$

Esercizio 2 : Macchina motrice

Viene ora assegnata una macchina motrice reversibile, ma con serbatoio freddo non ideale, composto da 2 metri cubi d'acqua a temperatura iniziale $T_I = 15^\circ\text{C}$ e temperatura finale $T_F = 45^\circ\text{C}$, schematizzabile come segue:



Confrontare con una macchina avente serbatoio freddo ideale con $T_F = 15^\circ\text{C}$; calcolare $\eta_{CONFRONTO}$.

Dati

Convertiamo i valori in SI:

$$T_C = 673 \text{ K}$$

$$T_I = 288 \text{ K}$$

$$T_E = 318 \text{ K}$$

$$m = 2000 \text{ kg} \quad (= 2 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O})$$

$$T_F = 288 \text{ K}$$

Risoluzione

Per il calcolo del rendimento con serbatoio ideale possiamo utilizzare la nota formula:

$$\eta_{\text{SerbatoioIdeale}} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{288 \text{ K}}{673 \text{ K}} = 0,572$$

Per quanto riguarda il rendimento con serbatoio reale, dobbiamo calcolare il rapporto tra il lavoro compiuto dalla macchina ed il calore assorbito dalla sorgente calda (la formula utilizzata sopra non è applicabile!), con qualche procedimento in più rispetto al caso ideale, cominciando dall'equazione di bilancio di energia applicata al serbatoio freddo:

$$Q_F = mc \Delta T = mc (T_E - T_I) = 2000 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (318 \text{ K} - 288 \text{ K}) = 251,16 \text{ MJ}$$

Scrivendo ora l'equazione per il bilancio di entropia applicato all'intera macchina termica, possiamo ricavare Q_C :

$$-\frac{Q_C}{T_C} + mc \ln\left(\frac{T_E}{T_I}\right) = S_Q + S_{\text{Irreversibile}}$$

Possiamo semplificare notando che:

- il processo è adiabatico : $S_Q = 0$
- è reversibile : $S_{\text{Irreversibile}} = 0$

L'equazione diventa dunque:

$$Q_C = mc T_C \ln \frac{T_E}{T_I} = 2000 \text{ kg} \cdot 673 \text{ K} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{318 \text{ K}}{288 \text{ K}} = 558,31 \text{ MJ}$$

Il lavoro non è altro che la differenza tra Q_C e Q_F :

$$L = Q_C - Q_F = 558,31 \text{ MJ} - 251,16 \text{ MJ} = 307,15 \text{ MJ}$$

Abbiamo ora gli elementi necessari per calcolare il rendimento con serbatoio reale:

$$\eta_{\text{SerbatoioReale}} = \frac{L}{Q_C} = \frac{307,15 \text{ J}}{558,31 \text{ J}} \approx 0,55$$

Possiamo finalmente ricavare il rendimento di confronto:

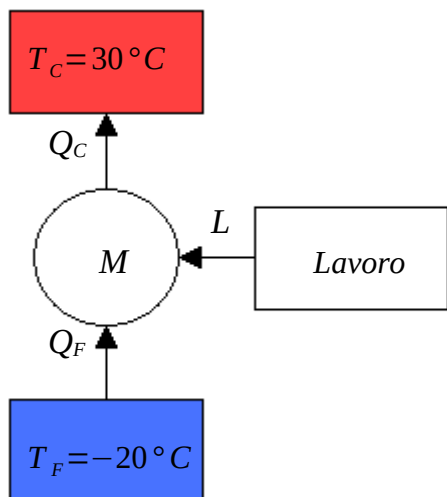
$$\eta_{\text{Confronto}} = \frac{\eta_{\text{SerbatoioReale}}}{\eta_{\text{SerbatoioIdeale}}} = \frac{0,55}{0,572} \approx 0,962$$

Nonostante la macchina sia reversibile, la sola presenza del serbatoio freddo non ideale decurta di quasi il 4% l'efficienza massima raggiungibile!

Esercizio 3 : Macchina operatrice

Una macchina termodinamica ciclica operatrice interagisce con 2 sorgenti a temperatura costante $T_C = 30^\circ\text{C}$ e $T_F = -20^\circ\text{C}$ cedendo $Q_C = 1200\text{ kJ}$ alla sorgente superiore. Se l'efficienza frigorifera della macchina è $COP_F = 4$ determinare:

- la quantità di lavoro assorbita dalla macchina
- il lavoro minimo teorico assorbibile L_{Ideale} da una macchina che opera tra le medesime sorgenti.



Dati

Convertiamo i valori in SI:

$$T_C = 303\text{ K}$$

$$T_F = 253\text{ K}$$

$$Q_C = 1,2\text{ MJ} = 1,2 \cdot 10^6\text{ J}$$

$$COP_F = 4$$

Nota

Il problema è mal posto: se la macchina è frigorifera, assieme al COP_F si dovrebbe assegnare Q_F , se fosse invece una pompa di calore con Q_C bisognerebbe conoscere COP_{PdC} . Questa scorretta impostazione crea problemi successivamente nell'identificazione del lavoro ideale assorbito dalla macchina.

Risoluzione

La macchina in esame è irreversibile, facilmente deducibile dal coefficiente di prestazione assegnatoci.

Cominciamo con il calcolo del lavoro :

$$Q_F + L = Q_C \rightarrow Q_F = COP_F \cdot L \rightarrow COP_F \cdot L + L = Q_C$$

Possiamo ricavare il lavoro dall'ultima equazione :

$$4L + L = 5L = Q_C \rightarrow L = \frac{Q_C}{5} = \frac{1,2 \cdot 10^6\text{ J}}{5} = 240\text{ kJ} = 240 \cdot 10^3\text{ J}$$

Per il prossimo quesito sarà utile conoscere anche Q_F :

$$Q_F = Q_C - L = 1200 \text{ kJ} - 240 \text{ kJ} = 960 \text{ kJ} = 960 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Passando dal caso reale a quello ideale, dovrò scegliere (tra Q_C e Q_F) un valore di riferimento che rimarrà invariato, mentre il secondo potrà variare. Il bilancio dell'entropia invece subirà inevitabilmente una variazione e così anche il lavoro assorbito dalla macchina. Esaminiamo entrambe le strade (i passaggi si commentano da soli).

$Q_F = 960 \text{ kJ}$	$Q_C = 1,2 \text{ MJ}$
$COP_{REV} = \frac{253 \text{ K}}{303 \text{ K} - 253 \text{ K}} = 5,06$	$COP_{REV} = \frac{253}{303 - 253} = 5,06$
$L_{ideale} = \frac{Q_F}{COP_{REV}} = \frac{960 \text{ kJ}}{5,06} = 189,72 \text{ kJ}$	$L_{ideale} = \frac{Q_F}{COP_{REV}} = \frac{Q_C - L_{ideale}}{COP_{REV}}$
$Q_C = Q_F + L_{ideale} =$ $= 960 \text{ kJ} + 189,72 \text{ kJ} \simeq 1,15 \text{ MJ}$	$L_{ideale} \cdot COP_{REV} = Q_C - L_{ideale}$
	$L_{ideale} (1 + COP_{REV}) = Q_C$
	$L_{ideale} = \frac{Q_C}{1 + COP_{REV}} = \frac{1,2 \text{ MJ}}{1 + 5,06} \simeq 198 \text{ kJ}$

Nota

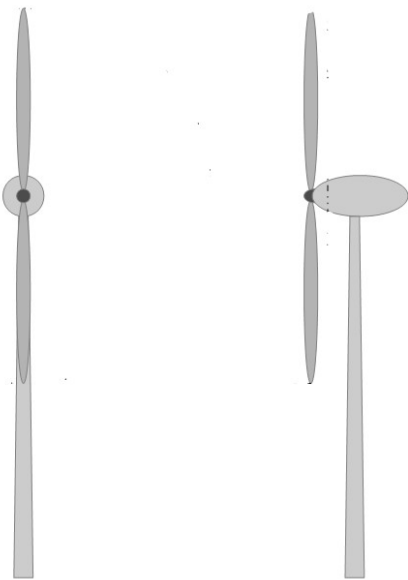
Essendo Q_F direttamente legato alla formula del lavoro ideale, fissando Q_F arriviamo più rapidamente alla soluzione, mentre fissando Q_C siamo costretti a effettuare qualche passaggio in più, essendo la via meno “diretta”.

Esercitazione 4 - Sistemi Aperti -

Esercizio 1 : Generatore Eolico

Un generatore eolico con la torre alta 100 m e con diametro delle pale di 100 m è investita da un flusso d'aria a $T=10^\circ\text{C}$ e $P=1\text{ atm}$. L'aria arriva sulle pale alla velocità di 12 m/s ed in uscita a una velocità di 3 m/s . Assumendo che il generatore eolico abbia un'efficienza pari al 60% si calcoli la potenza \dot{L} generata.

Risoluzione



Trattiamo la torre come un **sistema aperto**.

Immaginiamo un tronco di cono di diametro iniziale $\Phi=100\text{ m}$, all'interno del quale ruotano le pale, e chiamiamo tale volume "volume di controllo".

Il volume di controllo è necessariamente di tipo tronco-conico per soddisfare l'equazione di continuità visto che la velocità e presumibilmente anche la pressione dell'aria diminuiscono nel passaggio da monte a valle delle pale.

Convertiamo i dati in unità del S.I.

$$T_1 = 283\text{ K}$$

$$P_1 = 101325\text{ Pa}$$

$$W_1 = 12\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W_2 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Phi = 100\text{ m}$$

Scriviamo l'equazione di bilancio della potenza per sistemi aperti:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m} \cdot \left(h_i - h_u + g \cdot (z_i - z_u) + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \right) + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}^{\rightarrow}$$

Considerando che :

- il sistema è ipotizzato a regime, quindi il flusso d'aria è costante: $\frac{dE}{dt} \simeq 0$;
- il processo è isentalpico in quanto la trasformazione è isoterma:
 $dh = c_p \cdot dT \rightarrow h_i - h_u \simeq 0$;
- l'energia potenziale del vento non cambia: $z_i - z_u \simeq 0$;

- non c'è scambio di calore: $\dot{Q}^* \simeq 0$.

L'equazione di bilancio diventa: $\dot{L}_{ideale} = \dot{m} \left(\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \right)$

dove \dot{m} si ottiene dalla formula: $\dot{m} = \rho \cdot W \Omega = \frac{1}{v} \cdot W \cdot \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4}$

Essendo il sistema stazionario $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$, possiamo scegliere di calcolarla in ingresso :

$$\dot{m} = \frac{P_1}{R^* T_1} \cdot W_1 \cdot \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4}$$

ricordando che : $R^* = \frac{8314 \frac{J}{K \cdot kmol}}{28,8 \frac{kg}{kmol}} \simeq 287 \frac{J}{K kg}$

possiamo calcolare infine \dot{L}_{ideale} e \dot{L}_{reale} :

$$\dot{L}_{ideale} = \left(\frac{101325 Pa}{287 \frac{J}{K kg} \cdot 283 K} \cdot 12 \cdot \frac{\pi \cdot (100 m)^2}{4} \right) \cdot \left(\frac{\left(12 \frac{m}{s} \right)^2 - \left(3 \frac{m}{s} \right)^2}{2} \right) = 7940956,7 W \approx 7,941 MW$$

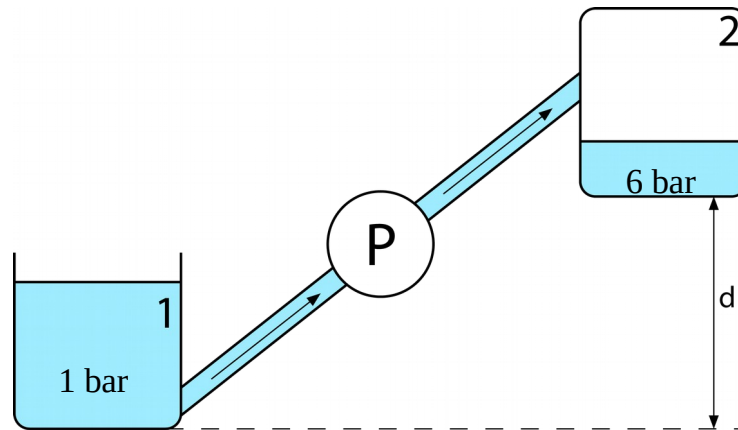
$$\dot{L}_{reale} = 0,6 \cdot \dot{L}_{ideale} \simeq 4,7 MW$$

Esercizio 2: Sistemi aperti

Una pompa aspira una portata d'acqua $m = 10000 \text{ kg/h}$ da un serbatoio 1 a pressione $P_1 = 1 \text{ bar}$ e la immette in un serbatoio 2 pressurizzato a $P_2 = 6 \text{ bar}$, ad una quota di $d = 60 \text{ m}$ rispetto al serbatoio 1.

Nell'ipotesi che il serbatoio operi **stazionariamente**, che l'**acqua** si comporti come **fluido incompressibile** e che la **differenza di energia cinetica** dell'acqua fra ingresso e uscita sia **trascurabile**, determinare la potenza minima assorbita dalla pompa.

Risoluzione:



Per prima cosa bisogna riportare tutte le grandezze nelle unità di misura del SI

$$\dot{m} = 10000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} = \frac{10^4}{3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad \text{portata massica}$$
$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad \rightarrow \quad P_1 = 10^5 \text{ Pa}$$
$$P_2 = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Sapendo che la densità dell'acqua è $\rho_{\text{acqua}} = \frac{m}{V} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{1}{10^{-3}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

ma $v = \frac{m}{V} \rightarrow \rho_{\text{acqua}} = \frac{m}{m \cdot v} = \frac{1}{v}$

Quindi è possibile ricavare il volume specifico dell'acqua:

$$v_{\text{acqua}} = \frac{1}{\rho_{\text{acqua}}} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,001 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Per un sistema stazionario la portata massica resta costante, non vi è quindi accumulo di massa all'interno del volume di controllo; l'**equazione di bilancio di massa** è:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}^{\leftarrow} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{m}_i^{\leftarrow} = -\dot{m}_u^{\leftarrow}$$

Consideriamo l'**equazione di bilancio entropico** per un sistema aperto:

$$-\frac{dS}{dt} = \dot{m}(s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^*} + \dot{S}_{irr}$$

Il sistema è stazionario ed adiabatico, quindi l'entropia non varia nel tempo e non c'è scambio di calore con l'ambiente:

$$-\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{S}_{Q^*} = 0$$

Inoltre la macchina si comporta idealmente compiendo trasformazioni reversibili (infatti si

ha potenza minima in condizioni di reversibilità), pertanto:

$$\dot{S}_{irr}=0$$

Il bilancio entropico diventa dunque: $\rightarrow \dot{m}(s_i - s_u) = 0$

$$\downarrow \\ s_i = s_u$$

la macchina si comporta in modo ISENTROPICO

Per ipotesi il liquido è INCOMPRESSIBILE:

$$s_1 - s_2 = c \ln \frac{T_1}{T_2} = 0 \rightarrow \ln \frac{T_1}{T_2} = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

Consideriamo ora l'equazione di bilancio di energia:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m} \left[(h_i - h_u) + g(z_i - z_u) + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \right] + \dot{Q}^* - \dot{L}$$

Sapendo che:

- il sistema è stazionario ed adiabatico

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{Q}^* = 0$$

- la differenza di energia cinetica dell'acqua fra ingresso e uscita è trascurabile

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = 0$$

- dalla definizione di entalpia è possibile ricavare h in funzione di P e T

$$H = U + PV$$

$$h = u + Pv$$

per liquidi incompressibili v resta costante

$$\Delta h = \Delta u + v \Delta P$$

L'equazione di bilancio diventa:

$$\dot{L} = \dot{m} [c(T_i - T_u) + v(P_i - P_u) + g(z_i - z_u)]$$

ma, come abbiamo dimostrato prima $T_i = T_u$

$$\dot{L} = \dot{m} [v(P_i - P_u) + g(z_i - z_u)] = \frac{10^4}{3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \left[0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} (10^5 \text{ Pa} - 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}) + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (-60 \text{ m}) \right] =$$

$$\text{N.B.} \quad \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

$$= -3023,9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} - \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = -3023,9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = -3023,9 \frac{\text{J}}{\text{s}} = -3023,9 \text{ W} = -3,02 \text{ kW}$$

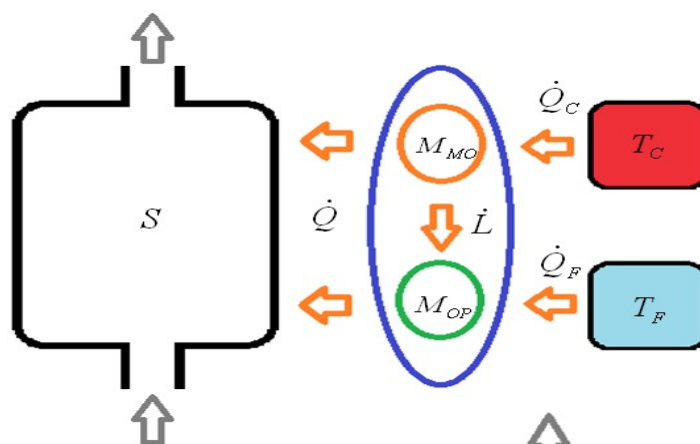
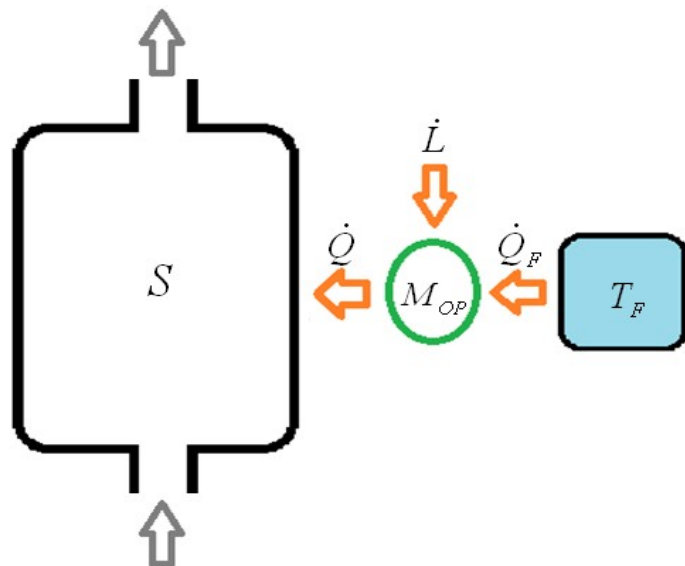
Pompa di Calore a Termocompressione

La pompa di calore è una macchina in grado di trasferire energia termica da una sorgente a temperatura più bassa ad una sorgente a temperatura più alta, o viceversa, utilizzando differenti forme di energia.

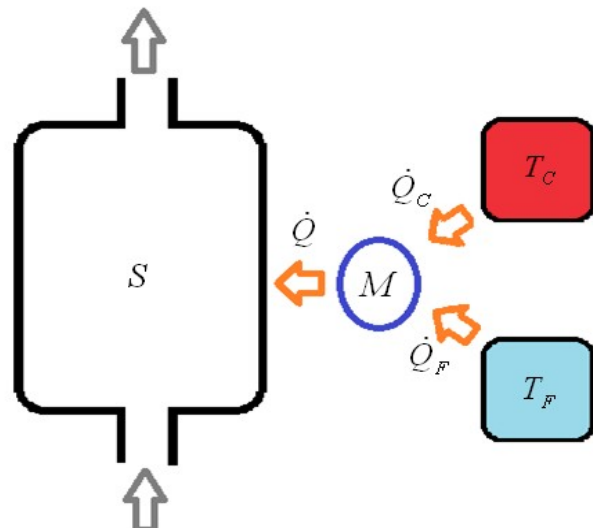
Immaginiamo di voler riscaldare un flusso d'aria, che transita nel sistema aperto S , attraverso l'impiego di una pompa di calore.

È possibile realizzare la pompa utilizzando una macchina operatrice. Tuttavia, questa soluzione non è molto efficiente; infatti, per funzionare, una macchina operatrice ha bisogno che le si fornisca una determinata potenza \dot{L} dall'esterno.

Per evitare di dover fornire questo lavoro dall'esterno, è possibile combinare il sistema con una macchina motrice che, prelevando calore da una sorgente calda, è in grado di fornire il lavoro necessario per mantenere in funzione la macchina operatrice e di contribuire al riscaldamento del flusso d'aria.



Quindi è possibile realizzare la pompa di calore richiesta utilizzando una macchina M che scambiando calore con due sorgenti, una calda e una fredda, è in grado di riscaldare il flusso d'aria, senza la necessità



di dover fornire energia dall'esterno.

In questo modo aumento di molto il rendimento del sistema!

$$\varepsilon_M > \varepsilon_{M_{OP}}$$

Esercizio 3 : Pompa di Calore a Termocompressione

Una corrente d'aria (portata volumetrica = $700 \text{ m}^3/\text{h}$) a $T_1=0^\circ\text{C}$ e pressione atmosferica $P=1 \text{ atm}$ viene riscaldata fino a $T_2=40^\circ\text{C}$ grazie ad una pompa di calore a termocompressione che scambia calore con l'ambiente a $T_F=0^\circ\text{C}$ e con una sorgente a temperatura $T_C=90^\circ\text{C}$. Determinare la potenza termica richiesta dall'aria, la potenza termica scambiata con l'ambiente, la potenza termica scambiata con la sorgente e l'efficienza della PdC.

DEFINIZIONI

Definiamo il coefficiente di prestazione della macchina ε_M , il volume specifico dell'aria v e la portata massica del sistema \dot{m} .

$$\varepsilon_M = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_C}$$

$$v = \frac{R^* T}{P}$$

$$\dot{m} = \frac{\dot{V}}{v}$$

IPOTESI E DATI

Ipotizziamo l'aria un gas biatomico perfetto formato da 20% di O_2 e 80% di N_2 :

$$m_m \simeq 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad R^* = \frac{8314}{29} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \simeq 286,7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_p = \frac{7}{2} R^* \simeq 1003,4 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Per ipotesi consideriamo S un sistema aperto stazionario e M una macchina ideale.

Convertiamo i dati in SI:

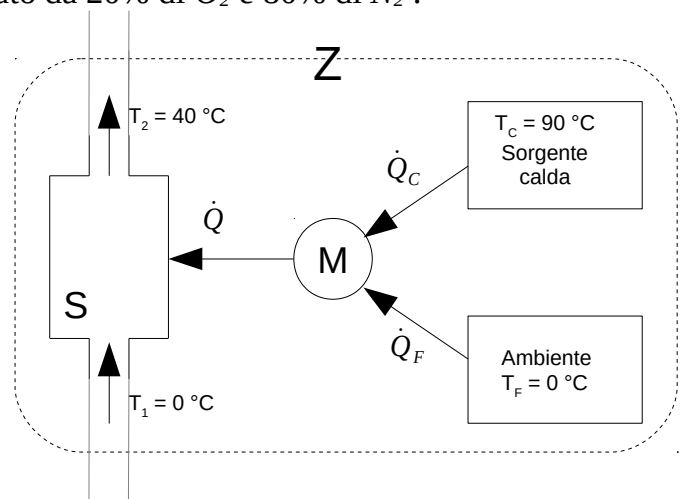
$$P = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad T_1 = 0^\circ\text{C} \simeq 273 \text{ K}$$

$$T_2 = 40^\circ\text{C} \simeq 313 \text{ K} \quad T_F = 0^\circ\text{C} \simeq 273 \text{ K}$$

$$T_C = 90^\circ\text{C} \simeq 363 \text{ K}$$

$$\dot{V} = 700 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = \frac{700}{3600} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$v = \frac{8314}{29} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \frac{273 \text{ K}}{101325 \text{ Pa}} \simeq 0,773 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$



Risoluzione

Scriviamo le equazioni di bilancio della potenza e dell'entropia per sistemi aperti:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_S}{dt} + \frac{dE_M}{dt} + \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_F}{dt} = \dot{m} \cdot \left(h_i - h_u + g \cdot (z_i - z_u) + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \right) + \dot{Q}_Z - \dot{L}_Z$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_S}{dt} + \frac{dS_M}{dt} + \frac{dS_C}{dt} + \frac{dS_F}{dt} = \dot{m} \cdot (s_i - s_u) + \dot{S}_{Q_Z} - \dot{S}_{IRR}$$

Per la macchina termodinamica nel suo complesso è necessario porre l'ipotesi di comportamento ideale:

$\dot{S}_{IRR} = 0$ o in alternativa trascurarsi appresso la potenza entropica generata per irreversibilità fino alla fine. Inoltre:

- il sistema in cui scorre la corrente d'aria è stazionario: $\frac{dE_S}{dt} = 0$, $\frac{dS_S}{dt} = 0$;
- per la macchina ciclica valgono: $\frac{dE_M}{dt} = 0$, $\frac{dS_M}{dt} = 0$;
- si ipotizzi che la variazione di energia potenziale sia trascurabile: $z_i - z_u \approx 0$;
- si ipotizzi che la variazione di energia cinetica sia trascurabile: $\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \approx 0$;
- il sistema Z è isolato (con riferimento ai soli scambi energetici e non a quelli di massa): $\dot{Q}_Z = 0$, $\dot{L}_Z = 0$, $\dot{S}_{Q_Z} = 0$.

Pongo le equazioni a sistema, che semplificate come da commenti diventano:

$$\begin{cases} \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_F}{dt} = -\dot{Q}_C - \dot{Q}_F = \dot{m}(h_i - h_u) \\ \frac{dS_C}{dt} + \frac{dS_F}{dt} = -\frac{\dot{Q}_C}{T_C} - \frac{\dot{Q}_F}{T_F} = \dot{m}(s_i - s_u) \end{cases}$$

Ricavo \dot{Q}_F dalla seconda equazione di bilancio e lo sostituisco nella prima:

$$\begin{cases} \dot{Q}_F = -\dot{m} T_F (s_1 - s_2) - \frac{\dot{Q}_C}{T_C} T_F \\ \dot{m}(h_1 - h_2) - \dot{m} T_F (s_1 - s_2) + \dot{Q}_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) = 0 \end{cases}$$

Esplicito in funzione di \dot{Q}_C :

$$\dot{Q}_C = \frac{\dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{m} T_F (s_2 - s_1)}{1 - \frac{T_F}{T_C}} \stackrel{(\text{Hp. G.P.})}{=} \frac{\dot{m} c_p (T_2 - T_1) - \dot{m} T_F \left(c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \overbrace{R^* \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}^{P_2 = P_1 \text{ isobaro} = 0} \right)}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

Possiamo ora calcolare \dot{m} :

$$\dot{m} = \frac{\dot{V}}{v} = \frac{700}{3600} \frac{m^3}{s} \cdot \frac{1}{0,773} \frac{kg}{m^3} \simeq 0,25 \frac{kg}{s}$$

Calcoliamo \dot{Q}_C :

$$\dot{Q}_C = \dot{m} c_p \frac{(T_2 - T_1) - T_F \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = 0,25 \frac{kg}{s} \cdot 1003,4 \frac{J}{kg \cdot K} \frac{40 K - 273 K \cdot \ln\left(\frac{313 K}{273 K}\right)}{1 - \frac{273 K}{363 K}} \simeq \mathbf{2704 W}$$

Calcoliamo la potenza totale assorbita dall'aria:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = 0,25 \frac{kg}{s} \cdot 1003,4 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 40 K = \mathbf{10034 W}$$

Dall'equazione di bilancio di M ricaviamo \dot{Q}_F :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_C + \dot{Q}_F \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_F = \dot{Q} - \dot{Q}_C = 10034 W - 2704 W = \mathbf{7330 W}$$

Infine calcoliamo ϵ_M :

$$\epsilon_M = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_C} = \frac{10034 W}{2704 W} \simeq \mathbf{3,71}$$

Esercitazione 5 - Sistemi Bifase -

Esercizio 1 : **Rendimento isentropico di espansione per turbine**

Determinare il rendimento isentropico di una turbina a gas che produce $l=2000 \frac{kJ}{kg}$ espandendo elio (gas perfetto monoatomico) da $P_1=8 \text{ bar}$ $T_1=800^\circ C$ a $P_2=2 \text{ bar}$.

Risoluzione

Definiamo il rendimento isentropico d'espansione per una turbina:

$$\eta_{IsentropicoEspansione} = \frac{l_{REALE}}{l_{IDEALE}}$$

Il lavoro per una turbina è pari al salto entalpico:

$$l = h_1 - h_2$$

Il lavoro ideale e reale si calcolano con le rispettive formule:

$$l_{IDEALE} = h_1 - h_{2IDEALE} \quad l_{REALE} = h_1 - h_{2REALE}$$

Per un gas perfetto possiamo dire che:

$$\Delta h = c_p (T_1 - T_{2IDEALE})$$

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2IDEALE} = c_p \ln \frac{T_{2IDEALE}}{T_1} - R^* \ln \frac{P_{2IDEALE}}{P_1}$$

$\Delta s_{1 \rightarrow 2IDEALE} = 0$ in quanto la trasformazione in condizioni ideali è isentropica e adiabatica reversibile

Dalla quale si ricava

$$T_{2IDEALE} = T_1 \cdot \left(\frac{P_{2IDEALE}}{P_1} \right)^{\frac{R^*}{c_p}} = 1073 \text{ K} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{8 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \right)^{\frac{0,667}{1,667}} = 616 \text{ K}$$

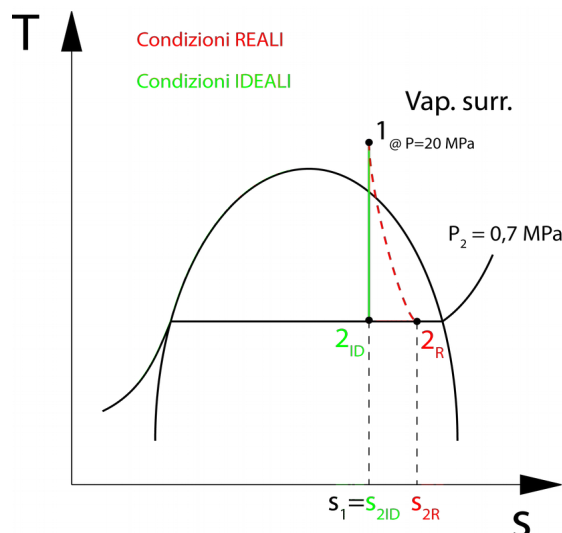
Il rendimento della turbina è:

$$\eta_{IsentropicoEspansione} = \frac{l_{REALE}}{l_{IDEALE}} = \frac{2000 \frac{kJ}{kg}}{5,196 \frac{kJ}{kg} (1073 \text{ K} - 616 \text{ K})} = 0,84$$

Vediamo ora la differenza con una turbina a vapore che lavora con un ciclo bifase

Determinare il rendimento isoentropico di espansione di una turbina adiabatica che opera in regime stazionario di cui sono note le condizioni di ingresso ($P_i=200 \text{ bar}$, $T_i=500^\circ C$, la pressione in

uscita $P_u=7 \text{ bar}$ ed il lavoro specifico reale prodotto $l_{reale}=650 \frac{kJ}{kg}$.



Normalmente all'ingresso di una turbina si ha vapore surriscaldato. E' possibile verificare tale ipotesi confrontando il valore della temperatura T_1 con il valore di $T_{Sat@P_1}$: essendo $T_1 > T_{Sat@P_1}$ si deduce che ci si trova in presenza di vapore surriscaldato.
Dobbiamo trovare h_1 e h_{2id} , ma il vapore non è un gas perfetto!
(**N.B.** errore grave considerarlo tale!)

Si usano le tabelle per ottenere h_1 del vapore surriscaldato.

$$h_1 = 3241,2 \frac{kJ}{kg} \quad s_1 = 6,144 \frac{kJ}{kg \cdot K}$$

Posso porre l'isentropicità $s_{2id} = s_1$.

Per sapere se in uscita dalla turbina siamo in campo bifase, dobbiamo confrontare il valore di s_{2id} con

$s_{v@P_2}$ (entropia di vapore saturo) indicato in tabella:

- se $s_{2id} < s_{v@P_2}$ siamo in campo bifase;
- se $s_{2id} > s_{v@P_2}$ abbiamo ancora vapore surriscaldato.

Calcoliamo h_{2id} nello stato bifase:

$$h_{2id} = h_{l@P_2} + x \cdot h_{lv@P_2} = 697 + x \cdot 2065,8$$

Non conosciamo x , ma lo possiamo ricavare ponendo l'isentropicità:

$$s_{2id} = s_1 = s_{l@P_2} + x \cdot s_{lv@P_2} = 1,99 + x \cdot 4,715 \rightarrow x_{2id} = \frac{s_2 - s_1}{s_{lv}} = \frac{6,1401 - 1,99}{4,715} = 0,88$$

il titolo in uscita è un po' basso (normalmente dovrebbe essere superiore a 0,9 per escludere problemi di deterioramento della turbina) ma si tratta del titolo in condizioni ideali. E' lecito supporre che in condizioni reali l'entropia sia maggiore e conseguentemente anche il titolo raggiunga un valore più elevato.

Avendo ora il titolo in uscita, possiamo calcolare h_{2id} :

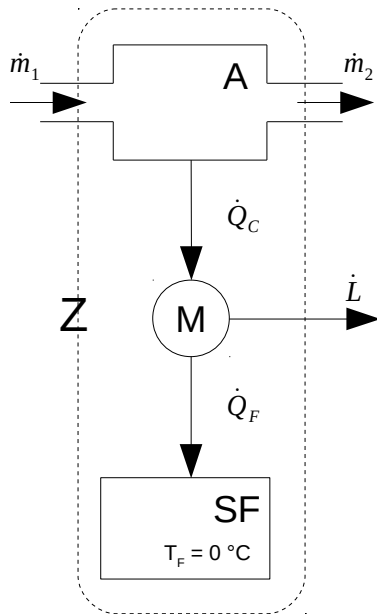
$$h_{2id} = 697 + 0,88 \cdot 2065,8 = 2515 \frac{kJ}{kg}$$

Il rendimento isentropico d'espansione sarà dunque:

$$\eta_{IsentropicoEspansione} = \frac{l_{REALE}}{l_{IDEALE}} = \frac{650}{3241,2 - 2515} = 0,9$$

A questo punto è possibile calcolare h_2 reale ($h_1 - l_{reale} = 2591,2 \text{ kJ/kg}$) e x_2 reale $[(h_2 \text{ reale} - h_1)/h_{lv} @ 0,7 \text{ MPa} = 0,92]$ e verificare che il titolo in uscita sia effettivamente superiore a 0,9

Esercizio 2 : Contatori di lavoro vs. contatore di calore



Un sistema aperto A cede potenza termica a una macchina motrice M che scambia potenza termica anche con l'ambiente a $T_{SF} = 0\text{ °C}$ (Sorgente Fredda). Valutare le differenti quantità di potenza meccanica prodotta dalla macchina a parità di potenza termica ceduta dal sistema aperto nei casi in cui:

- 1) all'ingresso del sistema vi sia una portata di acqua a $T_1 = 200\text{ °C}$ e $P_1 = 20\text{ bar}$;
- 2) all'ingresso del sistema vi sia una portata di vapore saturo a $T_2 = 200\text{ °C}$.

All'uscita del sistema aperto c'è in ambedue i casi acqua a $T_F = 20\text{ °C}$ e $P_F = 1\text{ bar}$.

Si ipotizzi il sistema aperto stazionario e la macchina reversibile.

Analizzando i risultati ottenuti, si valuti se è sufficiente tenere sotto controllo i consumi con un contatore di calore o tenere sotto controllo anche le prestazioni con un contatore di lavoro.

Risoluzione

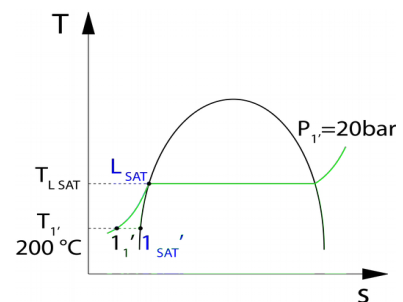
Condizione iniziale i = 1

$$T_1 = 200\text{ °C} \rightarrow T_1 = 473\text{ K}$$

$$P_1 = 20\text{ bar} \rightarrow P_1 = 20 \cdot 10^5\text{ Pa} = 2\text{ MPa}$$

Controlliamo la tabella:

$T_1 < T_{SAT@2\text{MPa}}$ sono in condizione di acqua sottoraffreddata e quindi non posso usare i valori in tabella



Considero la definizione di entalpia:

$$\Delta h_{A0} = c \Delta T + v \Delta P$$

ma $\Delta T = 0$ quindi $h_A = h_0 + v \Delta P = h_0 + v(P_A - P_0)$

tuttavia $v(P_A - P_0)$ è trascurabile rispetto ad $h_0 \rightarrow h_A \simeq h_0 = h_l @ T_0 T_A$

Ora posso leggere in tabella $h_1 \simeq h_l @ T = 200\text{ °C} = 852,45 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

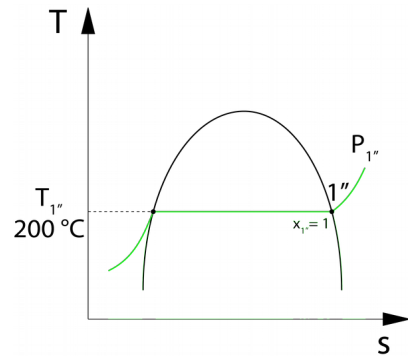
$$s_1 \approx s_{l@T=200^\circ\text{C}} = 2,3309 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Condizione iniziale i = 2 (vapore saturo)

Per questo caso è sufficiente leggere i valori di h e s riportati in tabella per acqua satura a $T=200^\circ\text{C}$

$$h_2 = h_v = 2793,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_2 = s_v = 6,4323 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

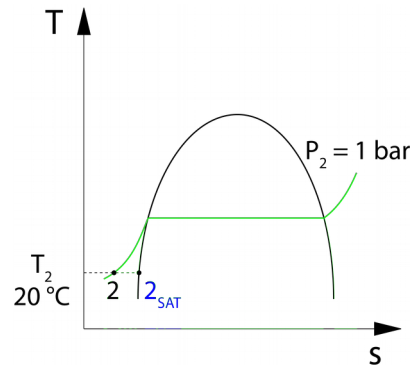


Condizione finale f (comune ad entrambe le macchine)

Acqua sottoraffreddata (1bar, 20°C l'acqua è di sicuro liquida)

$$h_{fin} \approx h_{l@T=20^\circ\text{C}} = 83,96 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_{fin} \approx s_{l@T=20^\circ\text{C}} = 0,2966 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$



Consideriamo ora le equazioni di bilancio per il sistema Z:

- Bilancio di massa $\rightarrow \frac{d\dot{m}}{dt} = \dot{m}_i - \dot{m}_{fin}$
 Il sistema è stazionario, quindi $\frac{d\dot{m}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{m}_i = \dot{m}_{fin} = \dot{m}$
- Bilancio di energia $\rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dE_A}{dt} + \frac{dE_M}{dt} + \frac{dE_{SF}}{dt} = \dot{m}(h_i - h_{fin}) + \dot{Q} - \dot{L}$
 (E_{pot} e E_{cin} trasc.)
 Il sistema A è stazionario $\frac{dE_A}{dt} = 0$
 La macchina M è ciclica $\frac{dE_M}{dt} = 0$
 Il sistema Z è adiabatico $\dot{Q} = 0$
 Inoltre $\frac{dE_{SF}}{dt} = \dot{Q}_F \rightarrow \dot{m}(h_i - h_{fin}) + \dot{L} = \dot{Q}_F$
- Bilancio di entropia $\rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{dS_A}{dt} + \frac{dS_M}{dt} + \frac{dS_{SF}}{dt} = \dot{m}(s_i - s_{fin}) + \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr}$
 Il sistema A è stazionario $\frac{dS_A}{dt} = 0$
 La macchina M è ciclica $\frac{dS_M}{dt} = 0$

Il sistema Z è adiabatico $\dot{S}_Q=0$

Le trasformazioni sono generalmente reversibili $\dot{S}_{irr}=0$

$$\text{Inoltre } \frac{dS_{SF}}{dt} = \frac{\dot{Q}_F}{T_F} \quad \rightarrow \quad \dot{m}(s_i - s_{fin}) = \frac{\dot{Q}_F}{T_F}$$

Condizione di partenza: \dot{Q}_C è la stessa per entrambi i casi
bisognerà bilanciare le portate massiche.

Ricaviamo \dot{Q}_F dal bilancio di entropia e lo inseriamo nel bilancio di energia

$$\dot{Q}_F = \dot{m} T_F (s_i - s_{fin}) \quad \text{e} \quad \dot{L} = \dot{m} (h_i - h_{fin}) - \dot{m} T_F (s_i - s_{fin}) = \dot{Q}_C - \dot{Q}_F$$

ma $\dot{Q}_{C,1} = \dot{Q}_{C,2}$ quindi devo imporre $\dot{m}_1 (h_1 - h_{fin}) = \dot{m}_2 (h_2 - h_{fin})$

$$\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_2} = \frac{h_2 - h_{fin}}{h_1 - h_{fin}} \quad \text{pongo arbitrariamente } \dot{m}_2 = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$
$$\dot{m}_1 = \frac{2793,2 - 83,96}{852,45 - 83,96} = 3,53 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Ora calcoliamo \dot{L} nei due casi:

$$\dot{L}_1 = 3,53 \cdot [(852,45 - 83,96) - 273(2,3309 - 0,2966)] = 752,33 \text{ kW}$$

$$\dot{L}_2 = 1 \cdot [(2793,2 - 83,96) - 273(6,4323 - 0,2966)] = 1034,19 \text{ kW}$$

$$\frac{\dot{L}_2 - \dot{L}_1}{\dot{L}_2} = 0,27$$

Conclusioni

L'esercizio chiede di valutare la potenza meccanica estraibile da una macchina termica che preleva potenza termica da un sistema aperto con in ingresso un fluido a 200° C (in un caso acqua sottoraffreddata ad alta pressione, in un' altro caso vapore saturo) e che versa potenza termica a un serbatoio a 0° C.

Sembrano assetti abbastanza simili e, a parità di temperature, parrebbe di poter affermare che le potenze meccaniche estraibili possano essere all' incirca le stesse. La tentazione è dunque quella di contabilizzare semplicemente la potenza termica prelevata.

Svolgendo l'esercizio si scopre invece che c'è una differenza di quasi il 30 % nella potenza meccanica prodotta sia pur a parità di potenza termica prelevata e a parità di temperature. Ciò è dovuto al diverso livello di entropia caratterizzante i due diversi casi di studio e dalle diverse portate.

Possiamo senz'altro affermare che per un ingegnere appaia dunque più appropriato contabilizzare anche la potenza meccanica prodotta (le prestazioni) invece che la sola potenza termica prelevata (i consumi).

Esercitazione 6 - Cicli Rankine e Joule-Brayton -

Esercizio 1 : Ciclo Combinato

Una turbina a gas opera secondo un ciclo Joule-Brayton (per i calcoli si faccia riferimento al ciclo ad aria standard, peso atomico $M_m = 28,8 \frac{kg}{mol}$) che opera tra una pressione iniziale di $P_1 = 1 \text{ atm}$ e alla temperatura iniziale $T_1 = 27^\circ C$ ed una temperatura massima all'ingresso della turbina pari a $T_3 = 1427^\circ C$. Il rapporto manometrico di compressione che massimizza il lavoro specifico del ciclo è $\beta = 20$.

Utilizzando tale rapporto si calcoli la temperatura all'uscita del compressore T_2 , il calore specifico da fornire al ciclo $q_{IN_{JB}}$, la temperatura all'uscita della turbina T_4 e il rendimento del ciclo η . Si determini inoltre la portata di gas \dot{m}_{gas} necessaria affinché l'impianto eroghi una potenza netta di 250 MW e l'area utile di ingresso in turbina Ω , sapendo che la velocità del gas all'ingresso della stessa è pari a $w = 100 \text{ m/s}$.

Il 90% della potenza termica scaricata dall'impianto sopra descritto è trasferita ad una sezione a ciclo Rankine dove il vapore è condensato alla temperatura di $33^\circ C$, l'acqua è inviata in caldaia alla pressione di 15 MPa e riscaldata sino alla temperatura di $600^\circ C(*)$. Il vapore subisce una prima espansione in una turbina ad alta pressione sino alla pressione di 1 MPa ed è quindi nuovamente surriscaldato sino a $600^\circ C(*)$ prima di essere espanso nella turbina di bassa pressione.

Si determini il rendimento del ciclo Rankine η_R , la potenza generata dalla sezione a vapore \dot{L}_R e il rendimento globale del ciclo combinato η_{CC} .

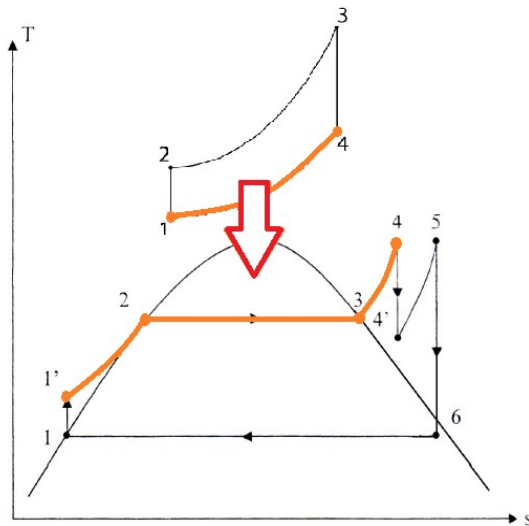
() Si noti che la temperatura di $600^\circ C$ che, secondo il testo, l'aria del ciclo Rankine dovrebbe raggiungere è errata. Si calcolerà infatti che la temperatura massima raggiunta dall'aria nel primo ciclo Joule-Brayton è di circa $449^\circ C$, il che rende impossibile un riscaldamento dell'aria nel secondo ciclo sino ad una temperatura superiore ad essa, come appunto quella dichiarata. Al fine dello svolgimento dei calcoli verrà in ogni caso mantenuto il valore del testo.*

Risoluzione:

Un **Ciclo combinato** è composto a sua volta da due cicli e oggi è utilizzato dalla maggioranza delle centrali per la produzione di energia elettrica.

Il primo è un ciclo Joule-Brayton a gas, realizzato con una turbina a reazione che prende energia dalla combustione di metano e sviluppa una potenza netta sia meccanica che termica.

Per non disperdere calore ed aumentare il rendimento, la potenza termica prodotta dal primo ciclo viene usata per alimentare un ciclo Rankine, che sfrutta questo calore per far funzionare un ciclo a vapore.

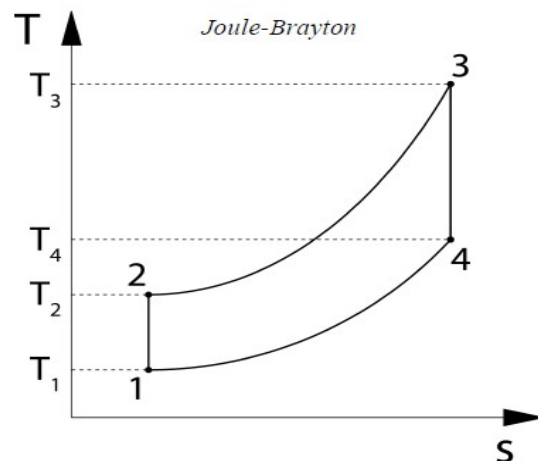


Soluzione ciclo Joule-Brayton

Le trasformazioni coinvolte sono due isobare e due isoentropiche (o due adiabatiche, se viene a cadere il vincolo dell'idealità).

Il ciclo si compone di quattro fasi:

1. compressione isoentropica del gas in un compressore con scambio di lavoro negativo;
2. riscaldamento isobaro;
3. espansione isoentropica del gas in una turbina, viene scambiato lavoro positivo;
4. raffreddamento isobaro.



Posso supporre che si tratti di un ciclo ideale e simmetrico.

DATI $M_{m,aria} = 28,8 \frac{kg}{kmol}$ considero l'aria come un gas perfetto biatomico

$$R^* = \frac{8314}{28,8} = 288,69 \frac{J}{kg \cdot K} ; \quad c_p = \frac{7}{2} \cdot R^* = 1,01 \frac{kJ}{kg \cdot K} ; \quad P_1 = 1 atm = 101325 Pa$$

$$T_1 = 27^\circ C = 300 K ; \quad T_3 = 1427^\circ C = 1700 K ; \quad \beta = \frac{P_2}{P_1} = 20$$

$$\dot{L}_{OUT_{JB}} = 250 MW = 250 \cdot 10^6 W \quad \text{potenza netta in uscita dal ciclo} \quad w_{IN} = 100 \frac{m}{s}$$

RICHIESTE

$$T_2 = ?, \quad T_4 = ?$$

$$q_{IN_{JB}} = ? \quad \text{calore per unità di massa fluente in ingresso}$$

$$\eta_{JB} = ? \quad \text{rendimento}$$

$$\dot{m} = ? \quad \text{portata massica}$$

$$\Omega = ? \quad \text{area della sezione di ingresso della turbina}$$

Avendo supposto il ciclo ideale, le trasformazioni $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ risultano isoentropiche.

Il bilancio entropico quindi è:

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} \stackrel{G.P.}{=} c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{p_2}{p_1} = 0$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R^*}{c_p}} = 706,06 \, K = 433^\circ C$$

Ora che abbiamo la temperatura di partenza e quella di arrivo della fase di riscaldamento possiamo trovare il calore specifico fornito al ciclo.

Lo scambio di calore avviene in uno scambiatore, ovvero un sistema aperto,.

Il calore per unità di massa fluente è pari alla variazione di entalpia:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = q_{IN_{JB}} = h_3 - h_2 \stackrel{G.P.}{=} c_p (T_3 - T_2) = 1004,25 \frac{kJ}{kg}$$

Poichè anche la trasformazione $3 \rightarrow 4$ è isentropica: $T_4 = T_3 \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{R^*}{c_p}}$

Metodo più veloce: essendo il ciclo ideale e **simmetrico**

$$T_4 = \frac{T_1 \cdot T_3}{T_2} = \frac{300 \cdot 1700}{706,06} = 722,31 \, K = 449^\circ C \quad (*) \text{ Vedi nota nel testo}$$

$$\eta_{JB_{ID}} \stackrel{G.P. \text{ ciclo simm}}{=} 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{706,06} = 0,58$$

Ora abbiamo tutti i dati per calcolare la portata massica di aria in entrata al nostro ciclo.

$$\dot{L}_{OUT_{JB}} = l_{netto} \cdot \dot{m}_{JB}$$

calcolo l_{netto} come $l_{turbina} - l_{compressore}$

Bilancio di energia alla turbina (sistema aperto, stazionario, adiabatico, in cui posso trascurare variazioni di energia cinetica e potenziale):

$$l_{turbina} - l_{compressore} = h_3 - h_4 - (h_2 - h_1) = c_p (T_3 - T_4) - c_p (T_2 - T_1) = 987,84 \frac{kJ}{kg} - 410,28 \frac{kJ}{kg} = 577,56 \frac{kJ}{kg}$$

OSS. La potenza assorbita dal compressore NON è trascurabile rispetto a quella della turbina.

$$\dot{m}_{JB} = \frac{\dot{L}_{OUT_{JB}}}{l_{netto_{JB}}} = \frac{\dot{L}_{OUT_{JB}}}{l_T - l_C} = \frac{250 \cdot 10^6 \, W}{577,56 \frac{kJ}{kg}} = 432,85 \frac{kg}{s}$$

Rimane da definire l'area della sezione Ω

$$\dot{m} = \rho_3 w_3 \Omega \quad \text{equazione di continuità}$$

è possibile ricavare ρ dal volume specifico: $\rho_3 = \frac{1}{v_3}$

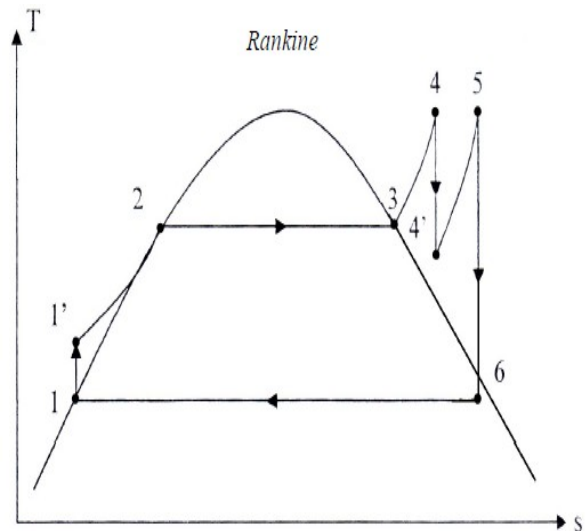
$$\text{Quindi possiamo calcolare} \quad \Omega = \frac{\dot{m}}{\rho_3 w_3} = \frac{\dot{m} v_3}{w_3} = \frac{\dot{m} R^* T_3}{P_3 w_3} = \frac{432,85 \cdot 288,68 \cdot 1700}{(101325 \cdot 20) \cdot 100} = 1,05 \, m^2$$

Soluzione ciclo Rankine

Generalmente il ciclo Rankine è un ciclo termodinamico composto da due trasformazioni isobare e due adiabatiche; nel nostro caso abbiamo tre isobare e tre adiabatiche.

Il ciclo è composto da diverse fasi:

1. l'acqua in ingresso alla pompa (1) viene portata a una pressione maggiore (1')
2. l'acqua viene scaldata isobaricamente mediante il calore fornito dal ciclo Joule-Bryton e passa attraverso tre fasi:
 - 1' → 2 fase liquida
 - 2 → 3 bifase
 - 3 → 4 fase vapore surriscaldato
3. espansione isoentropica in turbina
4 → 4' espansione isentropica AP
4. nuovo riscaldamento isobaro
4' → 5
5. espansione isoentropica in turbina
5 → 6 espansione isentropica BP



DATI $T_1 = 33^\circ C = 306 \, K$ temperatura di condensazione del ciclo Rankine, cioè la temperatura alla quale il fluido passa alla condizione di liquido saturo

$P_{1'} = 15 \, MPa$ pressione in ingresso alla caldaia

$T_4 = T_5 = 600^\circ C = 873 \, K$

$P_{4'} = 1 \, MPa$

RICHIESTE

$\eta_R = ?$ rendimento del ciclo Rankine

$\dot{L}_R = ?$ potenza generata dalla sezione vapore

$\eta_{CC} = ?$ rendimento globale del ciclo combinato

Calcoliamo la potenza in ingresso al ciclo Rankine, ovvero il 90% di quella in uscita al ciclo Joule-Brayton a causa delle perdite nel generatore a recupero:

$$\dot{Q}_{IN_{JB}} = \dot{m}_{JB} q_{IN_{JB}} = 432,85 \cdot 1004,25 = 434,7 \text{ MW} \quad (\text{servirà nella seconda parte dell'esercizio})$$

$$\dot{Q}_{OUT_{JB}} = \dot{m}_{JB} (h_4 - h_1) \stackrel{GP}{=} \dot{m}_{JB} c_p (T_4 - T_1) = 432,85 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1010,38 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (722,31 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 184,7 \text{ MW}$$

$$\dot{Q}_{IN_R} = 90\% \dot{Q}_{OUT_{JB}} = 0,9 \cdot \dot{Q}_{OUT_{JB}} = 0,9 \cdot 184,7 \text{ MW} = 166,23 \text{ MW}$$

NB Essendo la portata massica dell'aria (fluido di lavoro del ciclo JB) in genere molto diversa dalla portata massica dell'acqua (fluido di lavoro del ciclo Rankine) questo calcolo va effettuato sulle potenze termiche totali e non sulle potenze termiche specifiche all'unità di portata massica.

Punto 4:

$T_4 = 600^\circ \text{C} > T_{SAT @ 15 \text{ MPa}} \rightarrow$ siamo in condizioni di vapore surriscaldato, possiamo ricavare $s (=6,6796)$ e $h (=3583,1)$ dalla tabella.

4 \rightarrow 4' Prima espansione isoentropica in turbina fino a $P_{4'} = 1 \text{ MPa}$

Punto 4':

$s_4 = s_{4'} > s_{v @ 1 \text{ MPa}} = 6,5850$ siamo ancora in condizioni di vapore surriscaldato

In tabella non troviamo il valore di $s_{4'}$ per trovare $h_{4'}$ devo quindi interpolare:

$$h_{4'} = h_{min} + \frac{s_{4'} - s_{min}}{s_{mag} - s_{min}} \cdot h_{mag} - h_{min} = 2777,1 + \frac{6,6796 - 6,5850}{6,6956 - 6,5850} \cdot (2828,3 - 2777,1) = 2816,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

4' \rightarrow 5 Riscaldamento isobaro fino a $T_5 = T_4 = 600^\circ \text{C}$

Punto 5:

$T_5 > T_{sat @ P=1 \text{ MPa}}$ quindi siamo (ovviamente) ancora in condizioni di vapore surriscaldato

Dalle tabelle ricaviamo i valori di entropia ($s_5 = 8,0311$) ed entalpia ($h_5 = 3698,6$)

5 \rightarrow 6 Seconda espansione isoentropica in turbina fino a $P_6 = P_1$

Punto 6:

$T_6 = 33^\circ \text{C}$ non è presente nella tabella in temperatura

Prima di interpolare provo a guardare nella tabella in pressione e trovo che per 5 kPa la temperatura di saturazione è $32,87^\circ \text{C}$ molto vicino a 33°C

Quindi, essendo $s_6 = s_5 = 8,0311$, controllando in tabella, alla pressione di 5 kPa troviamo che $8,0311 < s_{v @ P=5 \text{ kPa}} = 8,3938$ quindi siamo in campo bifase;

l'entropia è dovuta in parte a vapor saturo e in parte a liquido saturo, quindi bisogna calcolare la percentuale di vapor saturo e quella di liquido saturo:

$$s_6 = s_l @ T=33^\circ \text{C} + x_6 s_{lv @ T=33^\circ \text{C}}$$

$$x_6 = \frac{s_6 - s_l @ T=33^\circ \text{C}}{s_{lv @ T=33^\circ \text{C}}} = \frac{8,0311 - 0,4762}{7,9167} = 0,954$$

$$h_6 = h_{2 @ P=5 \text{ kPa}} + x_6 h_{l @ P=5 \text{ kPa}} = 137,75 + 0,954 \cdot 2423 = 2449,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

6 \rightarrow 1 Trasformazione isoterma che porta il sistema nelle condizioni di liquido saturo.

1 → 1' Il liquido saturo viene portato, mediante un sistema di pompaggio, alla pressione $P_{1'} = P_4$

Punto 1':

Il lavoro compiuto dalla pompa, che è assimilabile a un sistema aperto, è pari al salto entalpico:

$$l_{POMPA,1 \rightarrow 1'} = h_{1'} - h_1$$

$$h_{1'} = h_1 + l_{POMPA IDEALE} = h_1 + v(P_{1'} - P_1) = 137,75 + 0,001 \cdot (15000 - 5) = 152,75 \frac{kJ}{kg}$$

1 → 4 Riscaldamento isobaro

	P [MPa]	T [°C]	h [kJ/kg]	s [kJ/kgK]
4	15	600	3583,1	6,6796
4'	1		2816,6	6,6796
5	1	600	3698,6	8,0311
6	$5 \cdot 10^{-3}$	33	2449,3	8,0311
1		33	137,75	
1'			152,75	

Grazie ai valori di entalpia trovati, calcoliamo \dot{m} sapendo che $\dot{Q}_{IN_R} = 166,23 MW$ infatti $\dot{Q}_{IN_R} = \dot{m}_R[(h_4 - h_{1'}) + (h_5 - h_{4'})] = 166,23 MW$

$$\dot{m}_R = \frac{\dot{Q}_{IN_R}}{[(h_4 - h_{1'}) + (h_5 - h_{4'})]} = \frac{166,22 \cdot 10^3 kW}{[(3583,1 - 152,75) + (3698,6 - 2816,6)] \frac{kJ}{kg}} = 38,54 \frac{kg}{s}$$

Ora possiamo calcolare la potenza totale del ciclo Rankine:

OSS. Si noti che la potenza assorbita dalla pompa è trascurabile rispetto a quella generata dalle turbine, poiché si sta lavorando con un liquido incompressibile.

$$\dot{L}_R = \dot{L}_{TURBINA\ 1} + \dot{L}_{TURBINA\ 2} - \dot{L}_{POMPA} = \dot{m}_R[(h_4 - h_{4'}) + (h_5 - h_6) - (h_{1'} - h_1)] = 38,5(766,5 + 1249,3 - 15) = 78,2 MW$$

$$\text{Infine il rendimento del ciclo Rankine è: } \eta_R = \frac{\dot{L}_R}{\dot{Q}_{IN_R}} = \frac{78,2 MW}{166,22 MW} = 0,47$$

Il rendimento totale dei due cicli è:

$$\eta_{CC} = \frac{\dot{L}_{netto_{JB}} + \dot{L}_{netto_R}}{\dot{Q}_{IN_{JB}}} = \frac{250 MW + 78,2 MW}{434,7 MW} = 0,755$$

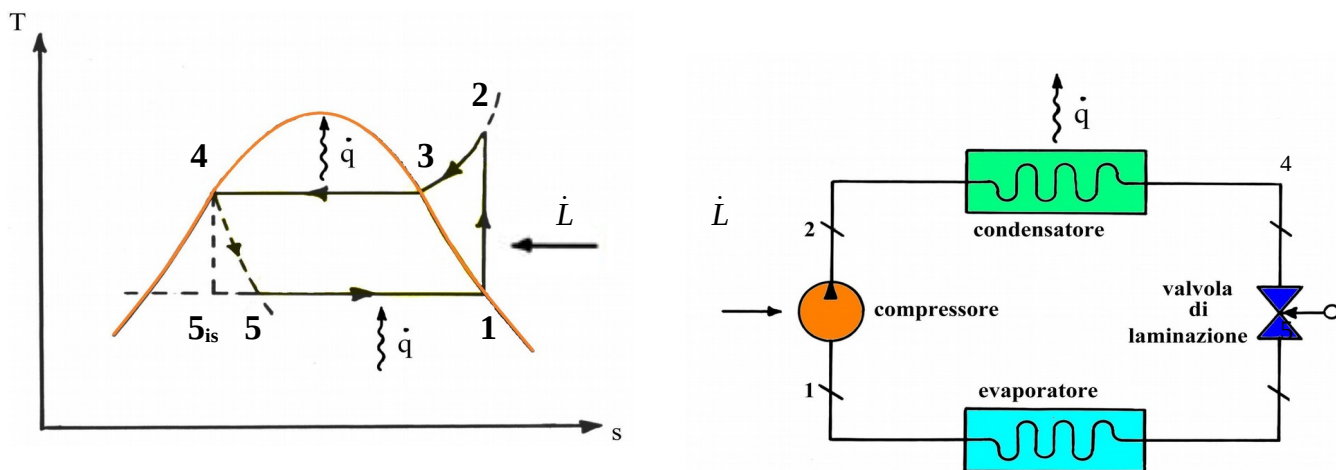
Il rendimento del ciclo combinato η_{CC} è maggiore del rendimento del singolo ciclo Joule-Brayton, poiché il calore assorbito dal ciclo Rankine è “gratuito”, a costo zero!

Esercizio 2 : Impianto Frigorifero a Vapore (Ciclo Rankine Inverso)

In un impianto frigorifero a vapore (R-134a) si ha una temperatura di evaporazione $T_1 = -28^\circ\text{C}$ ed una pressione massima $P_2 = 8 \text{ bar}$. Si chiede di determinare l'efficienza frigorifera del ciclo, la portata del fluido refrigerante, la potenza ceduta dal condensatore e l'entropia prodotta per irreversibilità nella valvola di laminazione sapendo che la potenza termica che deve essere asportata dalla sorgente inferiore è $\dot{Q}_i = 200 \text{ kW}$

Risoluzione:

NB si noti che i valori usati per risolvere questo esercizio sono leggermente differenti da quelli delle tabelle del libro di testo consigliato. Ciò è dovuto al carattere sperimentale delle tabelle stesse che, a seconda degli autori, sono state elaborate con procedure di rilevazione dei dati leggermente diverse fra loro.



Gli impianti frigoriferi sfruttano trasformazioni termodinamiche cicliche attraverso le quali una certa quantità di calore viene prelevata da un “serbatoio freddo” ed un'altra viene ceduta a un “serbatoio caldo”, mediante l'apporto di energia dall'esterno.

Nel nostro caso consideriamo un ciclo frigorifero a compressione – espansione che utilizza una trasformazione Rankine percorsa in senso inverso.

Il ciclo è composto da quattro fasi:

1. Compressione: il fluido arriva dalla cella frigorifera come vapore saturo a bassa pressione (1) e viene compresso e riscaldato isoentropicamente fino alla condizione di vapore surriscaldato (2).
2. Condensazione: il fluido percorre la serpentina cedendo una certa quantità di calore all'ambiente, per cui si raffredda e condensa a pressione costante.

Siccome il punto 2 è fuori dalla curva limite le fasi di raffreddamento e di condensazione sono ben distinte:

- 2 → 3 fase di raffreddamento che avviene nel campo di vapore surriscaldato
- 3 → 4 fase di condensazione in cui varia il titolo della miscela liquido-vapore e la

temperatura rimane costante.

3. Espansione nella valvola di laminazione:

- $4 \rightarrow 5_{is}$ la trasformazione è isentropica.
- $4 \rightarrow 5$ la trasformazione è reale, viene conservata l'entalpia.

4. Evaporazione: Il fluido evapora e da liquido quasi saturo (5_{is} o 5) a vapore saturo (1)

DATI $\dot{Q}_i = 200 \text{ kW}$

$$T_1 = T_5 = T_{5'} = -28^\circ \text{C}$$

$$P_2 = 8 \text{ bar} = 0,8 \text{ MPa}$$

RICHIESTE

$\dot{m} = ?$	portata massica del fluido refrigerante
$\dot{L}_C = ?$	potenza meccanica del compressore
$\dot{Q}_{out} = ?$	potenza del condensatore
$\Delta s_{v.l.} = ?$	entropia prodotta per irreversibilità nella valvola di laminazione

Poichè il frigorifero utilizza il refrigerante R-134a come fluido evolvente, utilizziamo le relative tabelle per ricavare i valori di entropia ed entalpia.

Punto 1:

Siamo in condizione di vapor saturo a $T_1 = -28^\circ \text{C}$, quindi da tabella posso ricavare

$$P_1 = 0,09305 \text{ MPa}$$

$$h_1 = h_{v@T=-28^\circ \text{C}} = 230,38 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_1 = s_{v@T=-28^\circ \text{C}} = 0,9411 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$1 \rightarrow 2$ Espansione isoentropica fino a $P_2 = 0,8 \text{ MPa}$

Punto 2:

Siamo in condizione di vapor surriscaldato, ma in tabella non ho il valore di $s_2 = s_1$, quindi devo interpolare!

$$- \frac{T_2 - T_{min}}{T_{mag} - T_{min}} = \frac{s_2 - s_{min}}{s_{mag} - s_{min}} \rightarrow T_2 = 40 + \frac{0,9411 - 0,9374}{0,9711 - 0,9374} \cdot (50 - 40) = 41,1^\circ \text{C}$$

N.B. $T_2 > T_{v@P=0,8 \text{ MPa}} = 31,33^\circ \text{C}$ Verifica della condizione di vapor surriscaldato

$$- \frac{h_2 - h_{min}}{h_{mag} - h_{min}} = \frac{s_2 - s_{min}}{s_{mag} - s_{min}} \rightarrow h_2 = 273,66 + \frac{0,9411 - 0,9374}{0,9711 - 0,9374} \cdot (284,39 - 273,66) = 274,84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$2 \rightarrow 3$ Trasformazione isobara

$3 \rightarrow 4$ Trasformazione isobara ed isoterma

Punto 4:

Siamo in condizione di liquido saturo.

$$P_4 = P_2 = 0,8 \text{ MPa}$$

$$T_4 = T_3 = T_{v @ P = 0,8 \text{ MPa}} = 31,33^\circ \text{C}$$

Dalla tabella ricavo:

$$h_4 = h_{l @ P = 0,8 \text{ MPa}} = 93,42 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_4 = s_{l @ P = 0,8 \text{ MPa}} = 0,3459 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

4 → 5_{is} Espansione isoentropica.

4 → 5 Espansione isoentalpica

Punto 5:

$$h_5 = h_4 = 93,42 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$T_5 = T_1 = -28^\circ \text{C}$$

$$P_5 = P_1 = 0,09305 \text{ MPa}$$

Sfruttando l'entalpia calcoliamo titolo ed entropia:

$$x_5 = \frac{h_5 - h_{l @ T = -28^\circ \text{C}}}{h_{lv @ T = -28^\circ \text{C}}} = \frac{93,42 - 14,37}{216,01} = 0,366$$

$$s_5 = s_l + x_5 s_{lv @ T = -28^\circ \text{C}} = 0,06 + 0,366 \cdot (0,9411 - 0,06) = 0,382$$

$$\Delta s_{v,l} = s_5 - s_4 = 0,382 - 0,3459 = 0,0361$$

	$h \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$	$T \left[^\circ \text{C} \right]$	$P \left[\text{MPa} \right]$	$s \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$
1	230,38	-28	0,09	0,9411
2	274,83	41,1	0,8	0,9411
4	93,42	31,33	0,8	0,3459
5	93,42	-28	0,09	0,3820
5 _{is}		-28	0,09	0,3459

Ora possiamo calcolare la portata massica :

$$\dot{Q}_i = \dot{m}(h_1 - h_5) \rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{Q}_i}{h_1 - h_5} = 1,46 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Calcoliamo la potenza meccanica del compressore:

$$\dot{L}_C = \dot{m}(h_2 - h_1) = 1,46 \cdot (274,83 - 230,39) = 64,86 \text{ kW}$$

Calcoliamo la potenza termica del condensatore:

$$\dot{Q}_{out} = \dot{m}(h_2 - h_4) = 264,86 \text{ kW}$$

$$\dot{S}_{v.l.} = \dot{m}(s_5 - s_4) = 0,053 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Esercizio 3 : Ciclo di Joule Brayton inverso

(Sistema per la refrigerazione dell'abitacolo di un aereo di linea)

In figura è mostrata una parte di macchina frigorifera a gas (Ciclo Brayton) utilizzato per la refrigerazione dell'abitacolo di un aereo di linea, comprendente un primo scambiatore, una turbina e un secondo scambiatore.

All'uscita del compressore di uno dei motori a reazione viene prelevata una piccola portata d'aria $\dot{m} = 0,7 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ a una pressione di 3 bar e una temperatura di 370 K. Questa corrente di aria viene raffreddata prima nello scambiatore SC1 (temperatura di uscita $T_2 = 310 \text{ K}$) e poi attraverso un'espansione nella turbina T (rendimento isoentropico $\eta_{IS_T} = 0,85$ pressione di uscita $p - 3 = 1 \text{ bar}$).

Infine l'aria viene immessa nello scambiatore SC2, in cui raffredda l'aria calda proveniente dalla cabina, da cui esce alla temperatura $T_4 = 270 \text{ K}$.

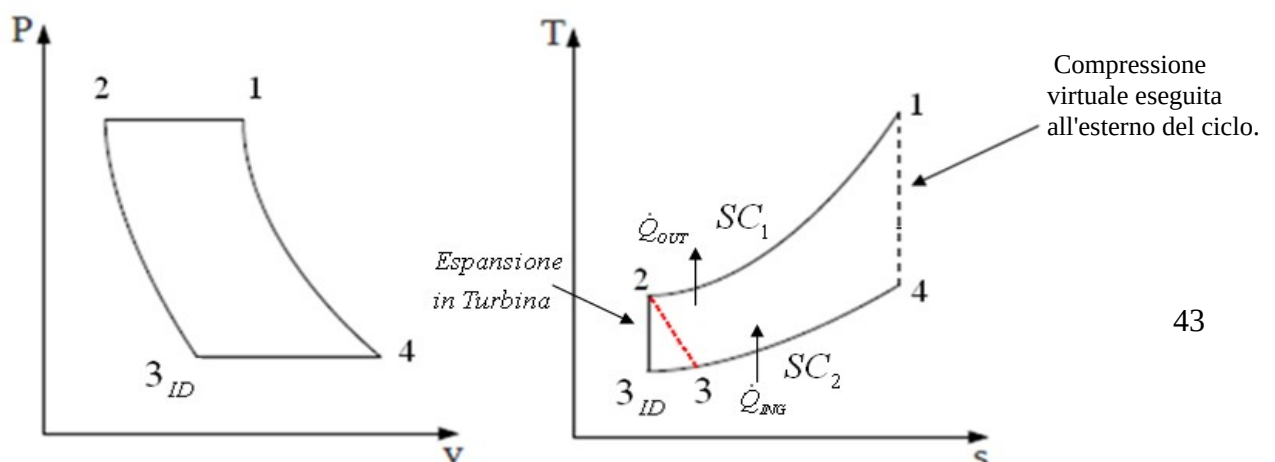
Nell'ipotesi che la macchina operi stazionariamente, che siano trascurabili le dispersioni termiche dei tre componenti considerati e le cadute di pressione nei due scambiatori e che

l'aria si comporti come un gas perfetto biatomico di massa molare $M_n = 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$

determinare :

1. la potenza termica ceduta all'ambiente esterno attraverso il primo scambiatore SC1
2. la potenza meccanica erogata dalla turbina
3. la potenza termica assorbita dall'aria proveniente dalla cabina
4. il COP effettivo

Osserviamo il grafico T-S dal punto 1 al punto 2, vi è un raffreddamento, poi un tratto di espansione idealmente isoentropica, successivamente un riscaldamento e infine una compressione.



Risoluzione

DATI $\eta_{IS_T} = 0,85$; $M_n = 29 \frac{kg}{kmol}$

RICHIESTE $\dot{Q}_{out} = ?$ $\dot{L}_{turbina} = ?$ $\dot{Q}_{ING} = ?$ $COP = ?$

1) Scambiatore SC1

Gli scambiatori di calore, così come le turbine, possono essere considerati sistemi **aperti e stazionari**.

Consideriamo l'equazione di bilancio di energia : $\frac{dE}{dt} = \dot{m}(h_1 - h_2) + \dot{Q}^* = 0$

da cui si ricava : $\dot{Q}^* = \dot{m}(h_2 - h_1) \stackrel{GP}{=} \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$

dove $c_p = \frac{7}{2} R^* = \frac{7}{2} \frac{8314}{29} = 1003,4 \frac{J}{kg \cdot K}$ poiché possiamo considerare l'aria come un gas biatomico perfetto.

Quindi: $\dot{Q}^* = -42143 W$

N.B. Il segno negativo sottolinea come la potenza termica sia in realtà uscente.

2) Turbina $\dot{L}_T = \eta_{IS_T} \cdot \dot{L}_{T_{ID}}$

Non è possibile considerare direttamente la trasformazione reale $2 \rightarrow 3$, quindi inizialmente analizziamo quella isentropica.

Equazione di bilancio di energia :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m}(h_2 - h_3) - \dot{L} = 0$$

h_3 non è nota, di conseguenza bisogna tener conto anche del bilancio di entropia:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{m}(s_2 - s_{3_{ID}}) = \dot{m} \left[c_p \ln \left(\frac{T_{3_{ID}}}{T_2} \right) - R^* \ln \left(\frac{P_{3_{ID}}}{P_2} \right) \right] = 0 \rightarrow T_{3_{ID}} = T_2 \left(\frac{P_{3_{ID}}}{P_2} \right)^{\frac{R^*}{c_p}} = 226,5 K$$

Calcoliamo la potenza che la turbina può erogare in modo reversibile:

$$\dot{L}_{REV} \stackrel{GP}{=} \dot{m} c_p (T_2 - T_{3_{ID}}) = 58649 W$$

$$\dot{L}_{REALE} = \dot{L}_{ID} \eta_{IS_T} = 58649 W \cdot 0,85 = 49851 W$$

$$\dot{Q}_{ING} = \dot{m}(h_4 - h_3) \stackrel{GP}{=} \dot{m} c_p (T_4 - T_3)$$

N.B. Non è possibile fare $\dot{Q}_{ING} = \dot{Q}_{out} - \dot{L}_{netto}$ perchè il lavoro netto non è noto, conosco solamente la potenza generata dalla turbina.

$$\dot{L}_R = \dot{m} c_p (T_2 - T_3) \rightarrow T_3 = T_2 - \frac{\dot{L}}{\dot{m} c_p} = 239 K$$

$$\dot{Q}_{ING} = \dot{m} c_p (T_4 - T_3) = 0,7 \cdot 1003,4 (270 - 239) = 21774 W$$

Ora è possibile calcolare il coefficiente di prestazione :

$$COP = \frac{\dot{Q}_{ING}}{\dot{L}_{netto}} \quad \text{cioè il rapporto tra quello che ottengo e quello che ho speso per avere un tale risultato}$$

$$\text{Poichè } \dot{L}_{netto} = \dot{Q}_{OUT} - \dot{Q}_{ING}$$

$$\text{allora: } COP = \frac{\dot{Q}_{ING}}{\dot{Q}_{OUT} - \dot{Q}_{ING}} = \frac{21774}{42143 - 21774} = 1,07$$

Esercitazione 7 - Conduzione -

Conduzione

Per conduzione termica si intende la trasmissione di calore per contatto molecolare diretto.

$$\dot{q} = -k \cdot \nabla T \quad \text{Postulato di Fourier}$$

$$\frac{\rho \cdot c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} \quad \text{Equazione di Fourier (di bilancio energetico)}$$

Casi Particolari dell'equazione di Fourier

1. In assenza di generazione di potenza:

$$\sigma = 0 \rightarrow \nabla^2 T = \frac{\rho \cdot c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

2. Regime stazionario (equazione di Poisson):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

3. In assenza di generazione di potenza e in regime stazionario (equazione di Laplace):

$$\nabla^2 T = 0$$

Lastra piana

In regime stazionario si ricava dall'equazione generale:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{k} = 0 \xrightarrow{\int dx} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\sigma}{k} \cdot x + A \xrightarrow{\int dx} T = -\frac{\sigma}{2k} \cdot x^2 + Ax + B$$

Per il postulato di Fourier si ottiene:

$$\dot{q} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -k \left(-\frac{\sigma}{k} \cdot x - A \right) = \sigma \cdot x - A \cdot k$$

Cilindro indefinito

Il flusso termico dipende solo dal flusso radiale :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cdot r \right)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{k} \rightarrow \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cdot r \right)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{k} \cdot r \xrightarrow{\int dx} r \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r^2 + C$$

↓

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r + \frac{C}{r} \xrightarrow{\int dx} T = -\frac{\sigma}{4k} \cdot r^2 + C \ln(r) + D$$

Per il postulato di Fourier:

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -k \left(-\frac{\sigma}{2k} \cdot r + \frac{C}{r} \right) = \frac{\sigma}{2} \cdot r - \frac{k}{r} \cdot C$$

Lastra piana monostrato senza generazione di potenza

In assenza di generazione di potenza, integrando l'equazione di Fourier si ottiene:

$$T = -\frac{\sigma}{2k} \cdot x^2 + Ax + B \rightarrow T = Ax + B$$

$$\begin{cases} T = T_1 & x = 0 \rightarrow T_1 = B \\ T = T_2 & x = s \rightarrow T_2 = A \cdot s + T_1 \rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{s} \end{cases}$$

Dove s è lo spessore della lastra; si ricava quindi:

$$T = A \cdot x + B = \frac{T_2 - T_1}{s} \cdot x + T_1$$

Il flusso termico areico risulta: $\dot{q} = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -k \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{s} \right) = -\frac{\Delta T}{R}$

con: $R = \frac{s}{k}$ (resistenza termica)

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A = -\frac{\Delta T}{R} \cdot A$$

N.B: potrei trovare anche la resistenza termica come $R = \frac{s}{k \cdot A}$ e $\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}$ dove si è ommesso il segno perchè NON considero la potenza entrante o uscente ma siamo interessati solo al modulo!

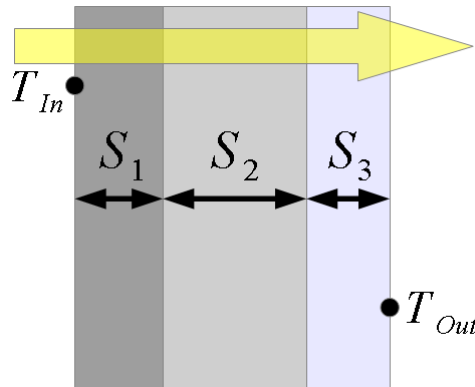
In generale non ho a che fare con una parete sola ma con un multistrato.

N.B. : se non ho generazione di potenza, posso fare comunque questo ragionamento senza dover passare dalle equazioni di Fourier per ogni temperatura.

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{TOT}}{R_{TOT}}$$

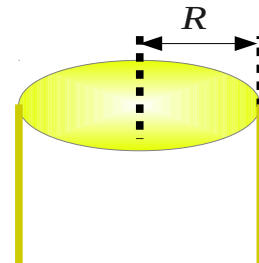
$$R_{TOT} = \frac{s_1}{k_1 \cdot A} + \frac{s_2}{k_2 \cdot A} + \frac{s_3}{k_3 \cdot A}$$

$$\Delta T_{refrattario} = \dot{Q} \cdot R_{refrattario}$$



Barra cilindrica piena (con generazione di potenza)

$$T = -\frac{\sigma}{4k} \cdot r^2 + C \cdot \ln(r) + D \quad \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r + \frac{C}{r}$$



Consideriamo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & r=0 & \rightarrow & \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 & \rightarrow & C=0 \\ T=T_2 & r=R & \rightarrow & T_2 = -\frac{\sigma}{4k} \cdot R^2 + D & \rightarrow & D = T_2 + \frac{\sigma}{4k} \cdot R^2 \end{cases}$$

Sostituendo le costanti nel profilo di temperatura si ottiene:

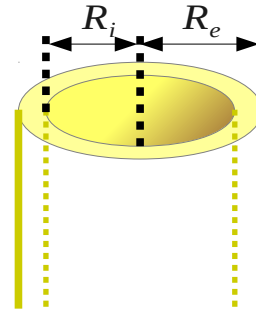
$$T = \frac{\sigma}{4k} \cdot (R^2 - r^2) + T_2 \quad \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k} \cdot r$$

Il flusso termico areico risulta: $\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2} \cdot r$

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot \text{Volume} = \frac{\sigma}{2} r \cdot 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma = V \sigma$$

$$\dot{q}_{\text{per unit\`a di lunghezza}} = \pi r^2 \sigma$$

Cilindro cavo senza generazione di potenza



$$T = C \ln(r) + D$$

$$\begin{cases} T = T_i & r = R_i & \rightarrow & T_i = C \ln(R_i) + D \\ T = T_e & r = R_e & \rightarrow & T_e = C \ln(R_e) + D \end{cases} \Rightarrow T_e - T_i = C (\ln(R_e) - \ln(R_i))$$

Dall'ultima formula si ricava $C = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$

che sostituito nella formula di T_i permette di calcolare $D = T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln(R_i)$

Ora è possibile sostituire entrambi le costanti nel profilo di temperatura:

$$T = C \cdot \ln(r) + D = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \ln(r) + T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \ln(R_i) = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

Il flusso termico aerico risulta: $\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = k \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \frac{1}{r}$

Potenza termica totale : $\dot{Q} = k \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r L = k \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} 2\pi L = \text{cost}$

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \frac{2\pi k}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} (T_i - T_e)$$

Esercizio 1 : Centrale Nucleare

L'elemento di combustibile di una centrale nucleare è un lungo cilindro di ossido di uranio di diametro $D_{UO_2} = 12 \text{ mm}$, contenuto in una guaina di Zircaloy dello spessore di 1 mm .

In condizioni operative stazionarie, nel combustibile avviene una generazione uniforme di potenza $\sigma = 2 \cdot 10^8 \frac{W}{m^3}$. Inoltre la parete esterna dello Zircaloy si trova alla temperatura

$$T_3 = 557^\circ C.$$

Determinare la T_{MAX} raggiunta dal combustibile.

Risoluzione

Innanzitutto riepiloghiamo i dati, ricercando anche le conducibilità dei materiali, convertendoli nelle unità di misura adatte.

Dati

$$\begin{aligned} D_U = 12 \text{ mm} \rightarrow R_U = R_i = 0,006 \text{ m} \quad ; \quad \sigma = 2 \cdot 10^8 \frac{W}{m^3} \quad ; \quad k_{UO_2} = 2 \frac{W}{m \cdot K} \\ R_e = 0,007 \text{ m} \quad T_3 = 557^\circ C = 830 \text{ K} \quad k_z = 25 \frac{W}{m \cdot K} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ossido d'uranio impongo il sistema:

$$\begin{cases} T = \frac{\sigma}{4k_{UO_2}} (R_i^2 - r^2) + T_2 \\ \dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \pi r^2 \sigma \end{cases}$$

Il \dot{q} che esce dalla barra ed entra in guaina sarà pari a:

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \pi R_i^2 \sigma$$

Passiamo ora al sistema inerente allo Zircaloy:

$$\begin{cases} T = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \ln \frac{r}{R_i} \\ \dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}} 2\pi k_z \end{cases}$$

Sapendo che per $r=R_i$, $\dot{q}_{UO_2} = \dot{q}_Z$ e ponendo $T_i = T_2$, $T_e = T_3$, possiamo ricavare T_2 dalla formula:

$$\pi R_i^2 \sigma = \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot 2\pi k_z$$

$$\downarrow$$

$$T_2 = \frac{\pi R_i^2 \sigma \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi k_z} + T_3 = \frac{(0,006\text{ m})^2 2 \cdot 10^8 \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \ln\left(\frac{0,007\text{ m}}{0,006\text{ m}}\right)}{2 \cdot 25 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}} + 830\text{ K} \simeq 852\text{ K}$$

Ora abbiamo tutti gli elementi necessari per il calcolo della massima temperatura raggiunta dal combustibile, localizzata al centro della barra d'uranio ($r=0$):

$$T|_{r=0} = T_1 = \frac{\sigma}{4 k_{UO_2}} (R_i^2 - r^2) + T_2 = \frac{2 \cdot 10^8 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}}{4 \cdot 2 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}} \cdot [(0,006\text{ m})^2 - 0] + 852\text{ K} = 1752\text{ K}$$

Esercitazione 8 - Convezione -

Convezione

La convezione è il trasferimento di energia tra una superficie solida e un fluido adiacente in movimento.

Implica gli effetti combinati di conduzione e trasporto di massa; il calore trasmesso per convezione aumenta con la velocità del fluido.

Esistono due tipi di convezione:

- convezione forzata: avviene quando il fluido è forzato a scorrere su una superficie da mezzi esterni (ad esempio un ventilatore);
- convezione naturale (o libera): avviene quando il moto del fluido è causato da forze ascensionali che sono indotte dalle differenze di densità dovute alla variazione di temperatura del fluido in un campo gravitazionale.

La potenza termica trasmessa per convezione è espressa dalla relazione:

$$\dot{Q}_{conv} = h A (T_s - T_f) \quad \text{Legge di Newton}$$

Esercizio : Trasmissione del calore in condotta per teleriscaldamento

Si ha una condotta per teleriscaldamento lunga 1200 m di cui 100 m passano all'esterno.

Per il tratto esterno ipotizziamo le condizioni ambientali peggiori (invernali):

- $T_{\infty} = 0^{\circ}C$
- $V_{\infty} = 36 \frac{km}{h}$

La potenza termica da cedere all'utenza è pari a $\dot{Q} = 20774 kW$

I parametri di processo sono:

- temperatura di mandata del fluido interno alla condotta (acqua) pari a $100^{\circ}C$;
- temperatura di ritorno del fluido interno alla condotta pari a $57^{\circ}C$.

I dettagli relativi alla struttura della tubatura sono nella figura B.

Calcolare:

- diametro interno della tubazione;
- potenza di pompaggio;
- potenza dispersa nel tratto esterno.

Risoluzione

Cominciamo identificando i dati disponibili, convertendoli in unità del sistema

internazionale:

- Tipologia fluido interno alla condotta = Acqua
- Tipologia fluido esterno alla condotta = Aria
- Temperatura mandata fluido interno = $T_m = 100^\circ C = 373 K$
- Temperatura ritorno fluido interno = $T_r = 57^\circ C = 330 K$
- Temperatura fluido esterno = $T_\infty = 0^\circ C = 273 K$
- Velocità fluido esterno = $V_\infty = 36 \frac{km}{h} = 10 \frac{m}{s}$
- Potenza termica da cedere all'utenza = $\dot{Q} = 20774 kW$
- $k_{isolante} = 0,04 \frac{W}{m \cdot K}$
- $k_{guaina} = 0,1 \frac{W}{m \cdot K}$

Schematizzazioni grafiche del problema:

Figura A

Schematizzazione sistema

Figura B

Schematizzazione tubatura

Innanzitutto calcoliamo la portata massica che dobbiamo garantire per avere $\dot{Q} = 20774 kW$ con la ΔT data :

$$\dot{Q} = \dot{m} c_{pm} \Delta T \rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{Q}}{c_{pm} \Delta T_{H_2O}}$$

Per calcolarla numericamente abbiamo tutti i dati tranne il calore specifico medio c_{pm} che, con qualche approssimazione, possiamo mediare dai dati tabellari (appendice del libro Çengel) prendendo un valore intermedio fra la temperatura di andata e quella di ritorno:

$$\left. \begin{array}{l} @ 330 K \Rightarrow c_p = 4180 \frac{J}{kg \cdot K} \\ \\ c_{pm} \simeq 4,2 \frac{kJ}{kg \cdot K} \end{array} \right\}$$

$$@ 373 K \Rightarrow c_p = 4220 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Notiamo che il valore a $330 K$ non è presente in tabella: è stato utilizzato un valore intermedio tra $320 K$ e $340 K$.

Alla fine, numericamente, otteniamo
$$\dot{m} = \frac{20774 kW}{4,2 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot 43 K} = 115 \frac{kg}{s}.$$

Prima di calcolare il diametro effettivo del tubo, possiamo fare alcune considerazioni inerenti ai costi delle tubazioni:

- $diametro\ tubo \propto costo\ tubo$
- $diametro\ tubo \propto \frac{1}{perdite\ di\ carico} = \frac{1}{\Delta p}$
- $diametro\ tubo \propto \frac{1}{potenza\ pompaggio} = \frac{1}{\dot{L}}$

In altre parole, alcuni costi (quelli di approvvigionamento) sono direttamente proporzionali al diametro del tubo mentre altri (quelli di gestione dell'impianto) sono inversamente proporzionali allo stesso parametro.

Si andrà dunque a dimensionare la tubazione e a verificare che la potenza di pompaggio richiesta non sia eccessiva.

Tenuto conto di quanto detto, si può procedere al corretto dimensionamento di un condotto. Per il calcolo del diametro sfruttiamo la portata massica appena calcolata:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot \Omega = \rho \cdot w \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \dot{m}}{\pi w \rho}}$$

con $\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$ (per via della geometria cilindrica).

Per effettuare questo calcolo abbiamo tutti i dati tranne la velocità w del fluido interno alla tubatura e la densità ρ .

Possiamo ragionevolmente ipotizzare la velocità pari a $w_m = 2 \frac{m}{s}$; si tratta di un'ipotesi basata sull'esperienza (in caso di tema d'esame sarebbe fornito come dato nel testo iniziale).

La densità ρ è ricavabile interpolando i valori disponibili in tabella (testo Çengel) prendendo un valore intermedio fra la temperatura di mandata e quella di ritorno:

$$\left. \begin{array}{l} @ 330 K \Rightarrow \rho = 984 \frac{kg}{m^3} \\ @ 373 K \Rightarrow \rho = 958 \frac{kg}{m^3} \end{array} \right\} \rho_m \simeq 971 \frac{kg}{m^3}$$

Sostituiamo tutti i dati e otteniamo:

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 115 \frac{kg}{s}}{3,14 \cdot 2 \frac{m}{s} \cdot 971 \frac{kg}{m^3}}} \simeq 0,27 m .$$

Dato che in commercio è impossibile trovare delle tubature con questi diametri, scegliamo il valore (disponibile a catalogo) $D=0,3 m$.

Poiché da un diametro $D=0,27 m$ siamo passati ad un diametro $D=0,3 m$, è necessario ricalcolare le variabili in gioco nella formula del diametro.

Nella formula $D = \sqrt{\frac{4 \dot{m}}{\pi w \rho}}$ compaiono:

- Portata massica \dot{m} : deve rimanere invariata affinché le ΔT siano quelle dichiarate nel testo $\dot{m} = 115 \frac{kg}{s}$.
- Densità ρ : è tabellare e per i valori di temperatura dichiarati deve restare invariata.
- Velocità w : è l'unica variabile che può essere ridimensionata.

In precedenza abbiamo ipotizzato un valore verosimile di velocità, conoscendo il diametro del tubo possiamo ricavarla analiticamente dalla formula:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot \Omega = \rho \cdot w \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \rightarrow w_m = \frac{\dot{m} \cdot 4}{\rho \cdot \pi \cdot D^2} = \frac{115 \frac{kg}{s} \cdot 4}{974 \frac{kg}{m^3} \cdot \pi \cdot 0,09 m^2} = 1,67 \frac{m}{s}$$

Ricordiamo che per un sistema aperto $dl = v dP$.

Per una pompa, in prima approssimazione, il volume specifico resta costante (perché stiamo considerando un liquido).

Immaginiamo di utilizzare una pompa ideale: $L = v \Delta P$.

La potenza di pompaggio necessaria sarà dunque:

$$\dot{L} = P_{Pompaggio} = \dot{V} \Delta p = \frac{\dot{m}}{\rho} \Delta p = \dot{m} v \Delta p$$

Il salto di pressione che deve compiere il fluido è dovuto solo alle perdite di carico in quanto la pressione intrinseca del fluido resta sostanzialmente costante.

Il salto di pressione relativo alle perdite di carico, dovute agli attriti e alle turbolenze, è descrivibile analiticamente dalla formula:

$$\Delta p = \frac{f \cdot L \cdot \rho \cdot w^2}{2 \cdot D}$$

Δp è proporzionale al coefficiente di attrito, alla lunghezza della tubazione, alla densità del fluido e alla sua velocità, mentre è inversamente proporzionale al diametro interno del tubo. L'unico termine mancante è il coefficiente d'attrito del fluido nel condotto f , che è funzione del numero di Reynolds.

In condizioni di moto turbolento si ha: $f = 0,184 \cdot Re^{-0,2}$.

Per sapere se il moto è realmente turbolento oppure laminare è necessario calcolare il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\mu} = \frac{w \cdot D}{\nu}$$

dove μ è la viscosità dinamica e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosità cinematica, che otteniamo mediando i dati in tabella:

$$\left. \begin{array}{l} @ 340 K \Rightarrow \nu = 0,43 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \\ @ 360 K \Rightarrow \nu = 0,33 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \end{array} \right\} @ 351 K \Rightarrow \nu \simeq 0,38 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Possiamo quindi calcolare:

$$Re = \frac{w \cdot D}{\nu} = \frac{1,67 \frac{m}{s} \cdot 0,3 m}{0,38 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} \simeq 1,32 \cdot 10^6$$

Poiché $Re \gg Re_{cr} = 2300$ il moto all'interno della tubatura è a carattere turbolento.

Avendo constatato che il moto è a regime turbolento, possiamo utilizzare la seguente relazione per trovare il coefficiente di attrito:

$$f = 0,184 \cdot Re^{-0,2} = 0,184 \cdot (1,32 \cdot 10^6)^{-0,2} = 0,011$$

Ora che abbiamo anche il termine f possiamo inserirlo nella formula iniziale per la potenza di pompaggio:

$$P_{Pompaggio} = \frac{\dot{m}}{\rho} \cdot \frac{f \cdot L \cdot \rho \cdot w^2}{2 \cdot D} = \frac{115 \frac{kg}{s} \cdot 0,011 \cdot 1200 m \cdot 1,67^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 0,3 m} = 7056 W$$

Si tratta di soli $7 kW$ di potenza richiesta per fornire quasi $21 MW$ termici alle utenze. Il dimensionamento della tubazione è quindi ritenuto accettabile.

Per quel che concerne la potenza termica dispersa, possiamo esprimerla come:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{totale}} = \frac{T_{\infty} - T_{H_2O}}{R_{totale}}$$

Per effettuare il calcolo abbiamo tutti i dati tranne la resistenza totale che, per via della struttura e della disposizione della tubatura, si può esprimere come:

$$R_{totale} = \frac{1}{h_i \cdot A_i} + \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_i}\right)}{2 \cdot \pi \cdot k_{acciaioacromo} \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot k_{isolante} \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{2 \cdot \pi \cdot k_{guaina} \cdot L} + \frac{1}{h_e \cdot A_e}$$

Ovvero come serie di 3 resistenze cilindriche conduttive e di 2 resistenze cilindriche convettive.

Per calcolare la resistenza totale disponiamo di quasi tutti i dati:

- I raggi della tubatura sono dati dal diametro trovato al punto 2 e dalla descrizione della tubatura della figura B
- I coefficienti per le resistenze conduttive sono tabellari o forniti dal testo (Çengel):
 - $k_{acciaioacromo} = 40 \frac{W}{mK}$, in realtà $k = 37,7 \div 48,9$
 - $k_{isolante} = 0,04 \frac{W}{mK}$
 - $k_{guaina} = 0,1 \frac{W}{mK}$
- I coefficienti di scambio termico per le resistenze convettive invece non sono conosciuti e bisogna ricavarli con la formula $h = \frac{Nu \cdot k}{D}$.

Per utilizzare questa formula abbiamo tutti i dati tranne il numero di Nusselt che però è ricavabile dalla relazione di Dittus-Boelter:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n$$

Dove:

- $n = 0,3$ in caso di liquido in fase di raffreddamento, $n = 0,4$ in caso di liquido in fase di riscaldamento
- Numero di Reynolds: $Re = \frac{w \cdot D}{\nu}$
- Numero di Prandtl: $Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{k} = \frac{c_p \cdot \nu \cdot \rho}{k}$ con ν e k tabellari (testo Çengel)

Detto ciò, procediamo al calcolo dei coefficienti di scambio termico convettivo.

h_i FLUSSO INTERNO AL TUBO (ACQUA)

I valori per le proprietà dell'acqua sono calcolati a $373 K$ e non interpolati con valori medi perchè nei 100 m di condotta esterna la caduta di T è trascurabile e l'errore commesso con quest'approssimazione è molto basso.

$$\begin{aligned}
@ 373 K &\Rightarrow c_p = 4220 \frac{J}{kg \cdot K} \\
@ 373 K &\Rightarrow k_{H_2O} \simeq 0,681 \frac{W}{m \cdot K} \\
@ 373 K &\Rightarrow v = 0,29 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \\
@ 373 K &\Rightarrow \rho = 958 \frac{kg}{m^3}
\end{aligned}
\quad
Pr = \frac{c_p \cdot v \cdot \rho}{k} = \frac{4220 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0,29 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot 958 \frac{kg}{m^3}}{0,681 \frac{W}{m \cdot K}} \simeq 1,72$$

Possiamo ora calcolare il numero di Reynolds, che insieme al numero di Prandtl utilizzeremo per ricavare il numero di Nusselt:

$$Re = \frac{w \cdot D}{v} = \frac{1,67 \frac{m}{s} \cdot 0,3 m}{0,29 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} \simeq 1,73 \cdot 10^6 \gg Re_{cr} = 2300 \Rightarrow \text{Moto turbolento!}$$

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,3} = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot 1,75^{0,3} = 2692$$

Abbiamo ora tutti gli elementi per calcolare il coefficiente convettivo h_i :

$$h_i = \frac{Nu_i \cdot k_{H_2O}}{D_i} = \frac{2692 \cdot 0,681 \frac{W}{m \cdot K}}{0,3 m} = 6111 \frac{W}{m^2 K}$$

h_e FLUSSO ESTERNO AD UN CILINDRO (ARIA)

I valori per le proprietà dell'aria andrebbero valutate alla temperatura di film

$T_{film} = \frac{T_{aria} + T_{extTubo}}{2}$ ma la temperatura esterna del tubo non è nota e dunque, per il valore della temperatura di film, possiamo solo avanzare delle ipotesi che poi dovranno essere verificate. Ipotizziamo $T_{film} \simeq 7^\circ C = 280 K$, dalla tabella otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k_{aria} \simeq 0,0246 \frac{W}{m \cdot K} \\
@ 280 K &\Rightarrow Pr \simeq 0,717 \\
&\Rightarrow v \simeq 1,40 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}
\end{aligned}$$

Ora siamo in grado di calcolare il numero di Reynolds, che insieme al numero di Prandtl utilizzeremo per ricavare il numero di Nusselt:

$$Re = \frac{w \cdot D_e}{v} = \frac{10 \frac{m}{s} \cdot 0,55 m}{1,4 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} \simeq 3,9 \cdot 10^5 > Re_{cr} = 2 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{Moto turbolento!}$$

$$Nu_e = 0,027 \cdot Re^{0,805} \cdot 0,717^{\frac{1}{3}} = 0,027 \cdot (3,9 \cdot 10^5)^{0,805} \cdot 0,717^{\frac{1}{3}} = 765,6$$

Abbiamo ora tutti gli elementi per calcolare il coefficiente convettivo h_e :

$$h_e = \frac{Nu_e \cdot k_{aria}}{D_e} = \frac{765,6 \cdot 0,0246 \frac{W}{m \cdot K}}{0,55 m} = 34,24 \frac{W}{m^2 K}$$

Ora che abbiamo calcolato le variabili che entravano in gioco nella formula iniziale possiamo procedere a ritroso.

Calcolo numerico della resistenza totale:

$$R_i = \frac{1}{h_i \cdot A_i} = \frac{1}{6111 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot \pi \cdot 0,3 m \cdot 100 m} = 1,74 \cdot 10^{-6} \frac{m^2 \cdot K}{W \cdot m^2} = 1,74 \cdot 10^{-6} \frac{K}{W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e \cdot A_e} = \frac{1}{34,24 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot \pi \cdot 0,55 m \cdot 100 m} = 169 \cdot 10^{-6} \frac{K}{W}$$

$$R_1 = \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_i}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k_1} = \frac{\ln\left(\frac{0,155}{0,150}\right)}{6,28 \cdot 100 m \cdot 40 \frac{W}{m \cdot K}} = \frac{0,0328}{25120 \frac{W}{K}} = 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{K}{W}$$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k_{isolante}} = \frac{\ln\left(\frac{0,255}{0,155}\right)}{6,28 \cdot 100 m \cdot 0,04 \frac{W}{m \cdot K}} = \frac{0,4978}{25,12 \frac{W}{K}} = 198 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W}$$

$$R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k_{guaina}} = \frac{\ln\left(\frac{0,275}{0,255}\right)}{6,28 \cdot 100 m \cdot 0,1 \frac{W}{m \cdot K}} = \frac{0,0755}{62,8 \frac{W}{K}} = 12 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W}$$

$$R_{totale} = \sum R = 211 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W}$$

Ora che abbiamo trovato la resistenza totale possiamo tornare alla formula iniziale e calcolare numericamente la potenza dispersa:

$$\dot{Q}_d = \frac{\Delta T}{R_{totale}} = \frac{100 K}{211 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W}} = 4739 W$$

Il problema sembrerebbe finito ma non lo è!

Difatti, la temperatura di film per ricavare il coefficiente di scambio convettivo dell'aria era stata ipotizzata pari a $T_{film} \simeq 7^{\circ}C = 280\text{ K}$ corrispondente a una temperatura esterna della tubazione di $T_s \simeq 14^{\circ}C = 287\text{ K}$.

Se volessimo fare dei calcoli finali precisi sarebbe necessario:

- prendere l'equazione $\dot{Q} = h_e \cdot A_e \cdot (T_s - T_{\infty})$ basata sulla legge di Newton
- ricavare $T_s = T_{\infty} + \frac{\dot{Q}}{h_2 \cdot A_2} = 0 + \frac{4739\text{ W}}{34,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}} \cdot \pi \cdot 0,55\text{ m} \cdot 100\text{ m}} \simeq 0,8^{\circ}\text{C}$
- ricalcolare la temperatura di film come $T_{film} = \frac{0,8^{\circ}\text{C} + 0^{\circ}\text{C}}{2} = 0,4^{\circ}\text{C}$
- tramite questa nuova temperatura di film ricalcolare il coefficiente di convezione esterno
- reiterare nuovamente il procedimento finchè le differenze tra la temperatura superficiale utilizzata per il calcolo del coefficiente di convezione e quella ritrovata con l'uso della formula $T_s = T_{\infty} + \frac{\dot{Q}}{h_2 \cdot A_2}$ presentano differenze minime ed accettabili.

Esercitazione 9 - Irraggiamento -

Esercizio 1 : Irraggiamento

Calcolare la temperatura della terra in assenza di atmosfera.

- coefficiente di assorbimento (medio) $\alpha=0,75$
- coefficiente di emissività $\epsilon=0,93$
- irraggiamento medio $I_s=1353 \frac{W}{m^2}$
- raggio della terra $R_T=6,37 \cdot 10^6 m$
- temperatura fossile dell'universo $T_{universo}=3 K$
- $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} = c. \text{ di Stefan-Boltzmann}$



Risoluzione:

A_{terra} = superficie della terra

$A_{universo}$ = superficie del cielo

$F_{terra \rightarrow universo}$ = fattore di vista terra-universo. È unitario

Il bilancio, trascurando l'energia geotermica posseduta dalla Terra, diventa:

$$\alpha I_s \cdot \pi R_T^2 = \frac{\sigma (T_{terra}^4 - T_{universo}^4)}{\frac{1-\epsilon}{A_{terra} \cdot \epsilon} + \frac{1}{A_{terra} \cdot F_{terra \rightarrow universo}} + \frac{1-\epsilon_{universo}}{A_{universo} \cdot \epsilon_{universo}}} = \frac{A_{terra} \cdot \sigma (T_{terra}^4 - T_{universo}^4)}{\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \frac{1}{1} + \frac{A_{terra} \cdot (1-\epsilon_{universo})}{A_{universo} \cdot \epsilon_{universo}}}$$

Osservazione: l'area della terra è trascurabile rispetto all'area del cielo. Per $\frac{A_{terra}}{A_{universo}} \rightarrow 0$

il bilancio tra l'energia assorbita e l'energia ceduta dalla terra diventa

$$\alpha I_s \cdot \pi R_T^2 = \epsilon \sigma (T_{terra}^4 - T_{universo}^4) 4 \pi R_T^2$$

Calcoliamo la temperatura della terra:

$$T_{terra} = \left(\frac{\alpha \cdot I_s}{4 \epsilon \cdot \sigma} + T_{universo}^4 \right)^{0,25} \simeq 260 K$$

Esercizio 2 : Irraggiamento su pannello solare termico piano

Un pannello solare di $A_p = 2 \text{ m}^2$ ha una superficie selettiva con coefficiente di assorbimento di radiazione solare di $\alpha_p = 0,95$ e coefficiente di emissione di $\varepsilon_p = 0,1$.

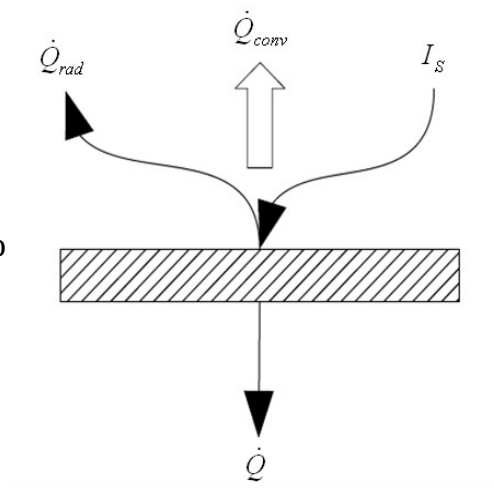
A una certa ora del giorno, la radianza solare sul pannello è di $I_s = 735 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ mentre la sua temperatura è di $T_p = 65^\circ \text{C}$. Supponendo che l'aria abbia una temperatura di $T_{\text{aria}} = 30^\circ \text{C}$ e un coefficiente di scambio termico col pannello di $h_{\text{aria}} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ e che la temperatura apparente del cielo sia di $T_{\text{cielo}} = 260 \text{ K}$, determinare la potenza \dot{Q} assorbita dal pannello.

Risoluzione

Cominciamo elencando i dati e convertendoli nelle unità di misura del SI.

Dati

- $A_p = 2 \text{ m}^2$ superficie pannello
- $\alpha_p = 0,95$ coefficiente di assorbimento della radiazione solare
- $\varepsilon_p = 0,1$ coefficiente di emissione del pannello
- $I_s = 735 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ radianza solare
- $T_p = 65^\circ \text{C} = 338 \text{ K}$ temperatura pannello
- $T_a = 30^\circ \text{C} = 303 \text{ K}$ temperatura aria
- $T_c = 260 \text{ K}$ temperatura cielo
- $\dot{Q} = ? [\text{W}]$



Della potenza termica irradiata dal Sole I_s solo il 95% entra nel pannello.

Inoltre, una parte di questa potenza in ingresso viene dispersa a causa del moto convettivo dell'aria attorno al pannello \dot{Q}_{conv} e una parte viene dispersa a causa dell'irraggiamento del pannello \dot{Q}_{rad} .

Consideriamo quindi il bilancio: $\frac{dE}{dt} = \alpha_p I_s A_p - \dot{Q}_{\text{rad}} - \dot{Q}_{\text{conv}} - \dot{Q}$ dove:

- $\frac{dE}{dt} = 0$ perché il sistema è stazionario
- La potenza termica dissipata per convezione vale:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = h_{\text{aria}} \cdot A_p (T_p - T_a) = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot 2 \text{ m}^2 (338 - 303) \text{ K} = 700 \text{ W}$$

- La potenza termica dissipata per irraggiamento vale:

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \frac{\sigma (T_p^4 - T_c^4)}{\frac{1 - \varepsilon_p}{A_p \varepsilon_p} + \frac{1}{F_{p \rightarrow c} A_p} + \frac{1 - \varepsilon_c}{A_c \varepsilon_c}} = \frac{\sigma (T_p^4 - T_c^4)}{\frac{1}{A_p} \left(\frac{1 - \varepsilon_p}{\varepsilon_p} + \frac{1}{F_{p \rightarrow c}} + \frac{(1 - \varepsilon_c) A_p}{\varepsilon_c A_c} \right)}$$

Considerando che:

- $F_{p \rightarrow c} = 1$
- $\frac{(1-\varepsilon_c) A_p}{\varepsilon_c A_c} \simeq 0$ poichè $A_c \gg A_p$
- $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann

L'equazione si semplifica:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{rad} &= \frac{A_p \sigma (T_p^4 - T_c^4)}{\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon_p} + 1} = \frac{\varepsilon_p A_p \sigma (T_p^4 - T_c^4)}{1-\varepsilon_p + \varepsilon_p} = \sigma A_p \varepsilon_p (T_p^4 - T_c^4) = \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 2 m^2 \cdot 0,1 (338^4 - 260^4) K^4 = 96,2 W \end{aligned}$$

Ora è possibile ricavare dall'equazione di bilancio, la potenza termica \dot{Q} effettivamente assorbita dal pannello:

$$\dot{Q} = \alpha_p I_s A_p - \dot{Q}_{rad} - \dot{Q}_{conv} = 0,95 \cdot 735 \frac{W}{m^2} \cdot 2 m^2 - 96,2 W - 700 W = 600,3 W \simeq 600 W$$

Esercizio 3 : Irraggiamento

All'interno di un grosso condotto, percorso da aria a temperatura elevata e le cui pareti sono mantenute alla temperatura uniforme e costante di $T_p = 40^\circ C$, è montata una piccola sonda di temperatura.

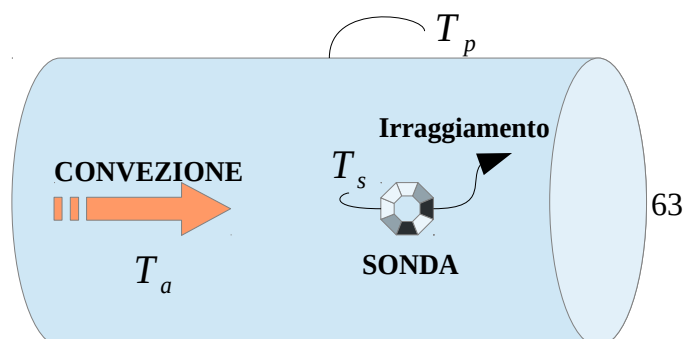
Nell'ipotesi che l'aria abbia un coefficiente di assorbimento nullo nello spettro dell'infrarosso $\alpha_{infrarosso} = 0$, che il coefficiente di scambio convettivo tra aria e sonda sia pari a $h = 50 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ e che il coefficiente di emissione della sonda sia pari a $\varepsilon_s = 0,8$, determinare la temperatura effettiva dell'aria nel caso in cui la temperatura indicata dalla sonda sia di $T_s = 230^\circ C$.

Risoluzione

Cominciamo elencando i dati e convertendoli nelle unità di misura del SI.

Dati

$\alpha_{infrarosso} = 0$ coefficiente di assorbimento



$\varepsilon_s = 0,8$ nello spettro dell'infrarosso
 coefficiente di emissione
 della sonda
 $h = 50 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ coefficiente di scambio
 convettivo tra aria e sonda
 $T_p = 40^\circ C = 313 K$ temperatura parete condotto
 $T_s = 230^\circ C = 503 K$ temperatura misurata dalla sonda
 $T_a = ?$ temperatura aria

La sonda dovrebbe misurare la temperatura dell'aria che passa nel condotto; in realtà misura una temperatura falsata dall'energia irradiata dalla sonda e riflessa dalle pareti del condotto. Siamo in condizioni stazionarie, quindi il bilancio di potenza diventa:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_{conv} - \dot{Q}_{irr} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_{conv} = \dot{Q}_{irr}$$

N.B. Se $\dot{Q}_{irr} = 0$ avremmo $\dot{Q}_{conv} = h A_s (T_a - T_s) = 0 \quad \rightarrow \quad T_a = T_s$

$$h A_s (T_a - T_s) = \frac{\sigma (T_s^4 - T_p^4)}{\frac{1 - \varepsilon_s}{A_s \varepsilon_s} + \frac{1}{F_{s \rightarrow p} A_s} + \frac{1 - \varepsilon_p}{A_p \varepsilon_p}} = \frac{A_s \sigma (T_s^4 - T_p^4)}{\frac{1 - \varepsilon_s}{\varepsilon_s} + \frac{1}{F_{s \rightarrow p}} + \frac{(1 - \varepsilon_p) A_s}{A_p \varepsilon_p}}$$

Considerando che:

- $F_{p \rightarrow c} = 1$
- $\frac{(1 - \varepsilon_c) A_p}{\varepsilon_c A_c} \simeq 0$ poichè $A_c \gg A_p$
- $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann

L'equazione diventa:

$$\begin{aligned}
 h A_s (T_a - T_s) &= \frac{A_s \sigma (T_s^4 - T_p^4)}{\frac{1 - \varepsilon_s}{\varepsilon_s} + 1} = \frac{\varepsilon_s A_s \sigma (T_s^4 - T_p^4)}{1 - \varepsilon_s + \varepsilon_s} = \sigma A_s \varepsilon_s (T_s^4 - T_p^4) \\
 &\quad \downarrow \\
 h (T_a - T_s) &= \sigma \varepsilon_s (T_s^4 - T_p^4) \\
 &\quad \downarrow \\
 T_a = T_s + \frac{\sigma \varepsilon_s}{h} (T_s^4 - T_p^4) &= 503 K + \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 0,8}{50 \frac{W}{m^2 \cdot K}} (503^4 - 313^4) K^4 = 552,37 K = 279,37^\circ C
 \end{aligned}$$

Esercizio 4 : Irraggiamento da schermo radiativo

Due superfici cilindriche concentriche di diametro $D_1 = 1 m$ e $D_2 = 1,6 m$ sono separate da un'intercapedine in cui è effettuato il vuoto. Le loro temperature superficiali sono,

rispettivamente, $T_1 = 200^\circ \text{C} = 473 \text{ K}$ e $T_2 = 20^\circ \text{C} = 293 \text{ K}$. Nell' ipotesi che le due superfici possano essere considerate nere, determinare:

- la potenza termica scambiata tra le due superfici;
- la potenza termica scambiata tra le due superfici nel caso si introduca uno schermo radiativo di spessore infinitesimo con $\epsilon = 0,03$ su entrambe le facce.

Risoluzione

Notiamo che tutta la radiazione emessa dal cilindro interno è captata dal cilindro esterno (figura 1), mentre la radiazione emessa dal cilindro esterno irraggia sia il cilindro interno che sé stesso (figura 2).

$$A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1}$$

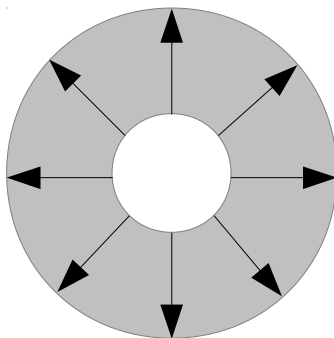


Figura 1

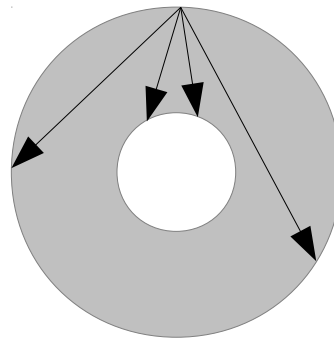


Figura 2

Osserviamo che:

- il mantello del cilindro esterno è maggiore di quello interno: $A_2 > A_1$;
- i fattori di vista risultano essere: $F_{2 \rightarrow 1} < F_{1 \rightarrow 2} = 1$;
- la costante di Stefan-Boltzmann è : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$

Possiamo calcolare la potenza termica scambiata con la nota formula:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{F_{1 \rightarrow 2} A_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

Considerando che:

- le superfici sono state supposte nere: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \rightarrow \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} = \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2} = 0$
- la superficie laterale del generico cilindro è: $A = \pi \Phi l$
- il fattore di vista è unitario, ovvero tutta la radiazione emessa dal cilindro interno è captata da quello esterno: $F_{1 \rightarrow 2} = 1$.

La formula diventa:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \pi \Phi_1 L (T_1^4 - T_2^4) = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \pi \cdot 1 m \cdot 1 m (473^4 - 293^4) \simeq 7,6 kW$$

Andiamo ora a introdurre lo schermo. Il problema non è posto in maniera precisa: dovremo decidere noi in quale posizione interporre lo schermo. Scegliamo di inserirlo a metà distanza tra i due cilindri, ottenendo quindi $\Phi_s = 1,3 m$. La potenza termica scambiata dopo l'introduzione dello schermo è :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{F_{1 \rightarrow s} A_1} + \frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s A_s} + \frac{1}{F_{s \rightarrow 2} A_s} + \frac{1}{F_{s \rightarrow 2} A_s} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

Considerando che:

- le superfici sono state supposte nere: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \rightarrow \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} = \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2} = 0$
- i fattori di vista sono unitari: $F_{1 \rightarrow s} = F_{s \rightarrow 2} = 1$
- lo schermo è di spessore infinitesimo, la resistenza superficiale dello schermo verso i condotti è uguale e ciascuna è pari a $\frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s A_s}$, con $A_s = \pi \Phi_s L$

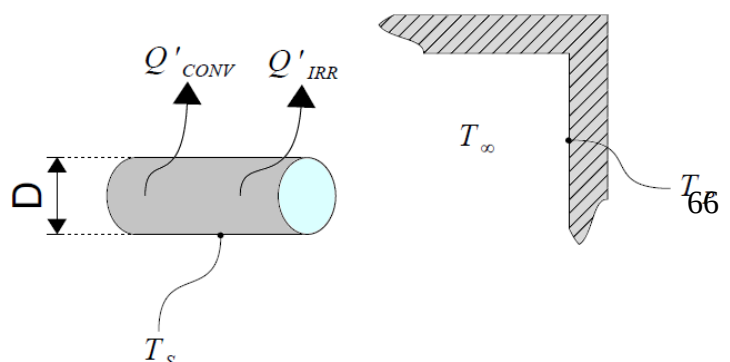
L'equazione diventa:

$$\dot{Q} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1} + 2 \cdot \frac{1 - \epsilon_s}{\epsilon_s A_s} + \frac{1}{A_s}} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} ((473 K)^4 - (293 K)^4)}{\frac{1}{\pi \cdot 1 m \cdot 1 m} + 2 \cdot \frac{1 - 0,03}{0,03 \cdot \pi \cdot 1,3 m \cdot 1 m} + \frac{1}{\pi \cdot 1,3 m \cdot 1 m}} \simeq 147,6 W$$

Notiamo che la potenza termica trasmessa è diminuita di più di un fattore 50!

Esercizio 5 : Condotta a vapore

Una condotta di vapore ad alta pressione (diametro esterno $D = 0,1 m$) passa in un grande locale le cui pareti sono alla stessa temperatura dell'aria ($T_\infty = T_p = 23^\circ C$). La condotta ha una temperatura superficiale di $T_s = 165^\circ C$ e una emissività $\epsilon_c = 0,85$. Stimare la potenza termica dispersa dalla condotta.



Risoluzione

Dati

$$\Phi = 0,1 \text{ m}$$

$$T_{\infty} = T_p = 23^{\circ} \text{ C} = 296 \text{ K}$$

$$T_s = 165^{\circ} \text{ C} = 438 \text{ K} \quad \text{temperatura superficie condotta}$$

$$\epsilon_c = 0,85 \quad \text{emissività superficie condotta}$$

$$\dot{q} = ? \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right]$$

La potenza termica è dispersa per convezione e per irraggiamento (per unità di lunghezza):

$$\dot{q} = \dot{q}_{\text{CONV}} + \dot{q}_{\text{IRR}}$$

Ipotizziamo le pareti come corpo nero:

$$F_{C \rightarrow P} = F_{\text{CONDOTTA} \rightarrow \text{PARETI}} = 1 \quad (\text{Fattore di vista})$$

Sostituendo nella formula, facendo i dovuti raccoglimenti e applicando le stesse considerazioni adottate per i corpi neri degli esercizi precedenti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{IRR}} &= \frac{\sigma (T_s^4 - T_p^4)}{\frac{1 - \epsilon_c}{A_c \epsilon_c} + \frac{1}{F_{c \rightarrow p} A_c} + \frac{1 - \epsilon_p}{A_p \epsilon_p}} = \frac{\sigma A_c (T_s^4 - T_p^4)}{\frac{1 - \epsilon_c}{\epsilon_c} + 1 + \frac{1 - \epsilon_p}{A_p \epsilon_p} A_c} = \epsilon_c A_c \sigma \frac{(T_s^4 - T_p^4)}{1 - \epsilon_c + \epsilon_c} = \epsilon_c A_c \sigma (T_s^4 - T_p^4) = \\ &= \epsilon_c \pi \cdot \Phi \cdot L \cdot \sigma (T_s^4 - T_p^4) = 0,85 \cdot \pi \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot L \cdot 0,1 \text{ m} \cdot ((438 \text{ K})^4 - (296 \text{ K})^4) = 441 \text{ W} \cdot L [\text{m}] \end{aligned}$$

E dunque la potenza irradiata per unità di lunghezza è pari a:

$$\dot{q}_{\text{IRR}} = \frac{\dot{Q}_{\text{IRR}}}{L} = 441 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Dobbiamo ora calcolare la potenza dispersa per convezione naturale, in quanto non trascurabile:

$$\dot{Q}_{\text{CONV}} = h \cdot \pi \cdot \Phi \cdot L (T_s - T_{\infty})$$

Questa formula dipende, tramite il coefficiente convettivo h , da parametri che sono funzione della temperatura di film:

$$h = \frac{Nu \cdot k}{\Phi}$$

Dove k è tabellare (T_{FILM}) ed il numero di Nusselt Nu , si ricava tramite la formula:

$$Nu = \left\{ 0,6 + \frac{0,387 \cdot Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2 \quad (\text{valida se } 10^{-5} < Ra < 10^{12})$$

A sua volta dipendente dal numero di Prandtl, che per fortuna è tabellare (T_{FILM}), mentre il numero di Rayleigh si ricava dalla formula:

$$Ra = \frac{g \cdot \alpha_p (T_s - T_\infty) \Phi^3}{\nu \cdot a}$$

Dove la maggior parte dei coefficienti sono tabellari (T_{FILM}).

Bene. Ora, dopo un caffè e una sana passeggiata, stimiamo la temperatura di film come:

$$T_{FILM} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{438 K + 296 K}{2} = 367 K = 94^\circ C$$

Possiamo ora ricavare da tabella le proprietà dell'aria a tale temperatura mediando i due valori @350 K e @400 K:

$$k = \text{conducibilità termica} = 0,0313 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\nu = \text{viscosità cinematica} = 22,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$a = \text{coefficiente di diffusione del calore} = \frac{k}{c_p \cdot \rho} = 32,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$Pr = 0,697$$

$$\alpha_p = \text{coefficiente di dilatazione isobara} \stackrel{G.P.}{=} \frac{1}{T} = 2,725 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

Finalmente siamo pronti per calcolare il mostruoso numero di Nusselt e di conseguenza anche h :

$$Ra = \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2,725 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K} (438 K - 296 K) \cdot (0,1 m)^3}{22,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot 32,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 5,076 \cdot 10^6$$

$$\downarrow$$

$$10^{-5} < Ra < 10^{12}$$

\downarrow

$$Nu = \left\{ 0,6 + \frac{0,387 \cdot (5,076 \cdot 10^6)^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0,559}{0,697} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2 = 23,095 \approx 23,1$$

$$\downarrow$$

$$h = \frac{Nu \cdot k}{\Phi} = \frac{23,1 \cdot 0,0313 \frac{W}{m \cdot K}}{0,1 m} = 7,23 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Finalmente possiamo calcolare la potenza termica scambiata per convezione naturale, ed infine la potenza termica totale scambiata:

$$\dot{q}_{CONV} = \frac{\dot{Q}_{CONV}}{L} = h \cdot \pi \cdot \Phi (T_s - T_\infty) = 7,23 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot \pi \cdot 0,1 m \cdot (438 K - 296 K) \simeq 322,5 \frac{W}{m}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{q}_{TOT} = \dot{q}_{CONV} + \dot{q}_{IRR} = 322,5 \frac{W}{m} + 441 \frac{W}{m} = 763,5 \frac{W}{m}$$

Esercitazione 10 - Conduzione e Convezione -

Esercizio 1 : Analisi congiunta Conduzione-Convezione

Calcolare il flusso termico attraverso le superfici indicate nei seguenti 3 casi:

- a) vetro singolo di spessore $s_{\text{vetro}} = 4\text{mm}$
- b) doppi vetri con intercapedine aria $s_{\text{intercapedine } a} = 15\text{mm}$
- c) doppi vetri con intercapedine aria $s_{\text{intercapedine } b} = 200\text{mm}$

Dati:

- Conducibilità termica del vetro singolo: $k_{\text{vs}} = 0.6 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- Conducibilità termica dell'aria: $k_{\text{aria}} = 0.02 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- Coefficiente di scambio termico interno $h_i = 7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
- Coefficiente di scambio termico esterno $h_o = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
- Temperatura interna $T_i = 20^\circ \text{C}$
- Temperatura esterna $T_o = 0^\circ \text{C}$

Risoluzione:

a) vetro singolo

Valutiamo le resistenze termiche che entrano in gioco:
abbiamo una resistenza convettiva tra l'ambiente a

20°C e la lastra di vetro;

il vetro introduce una sua resistenza di conduzione;

infine vi è una resistenza convettiva tra il vetro e
l'ambiente a 0°C .

La variazione di temperatura tra i due ambienti è $\Delta T = 20^\circ \text{C}$.

Il flusso termico è calcolabile come potenza termica fluente attraverso la superficie di interesse; non avendo a disposizione dati riguardanti l'estensione della superficie, calcoliamo il flusso termico per unità di superficie.

Valutiamo le resistenze per unità di area:

- convezione interna : $R_{\text{conv}} = \frac{1}{h_i A_i}$;



- conduzione all'interno del vetro: $R_{cond} = \frac{s_{vetro}}{k_v A_v}$;
- convezione esterna: $R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o}$;
- quindi la resistenza termica complessiva è: $R_{tot} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{s_{vetro}}{k_v A_v} + \frac{1}{h_o A_o}$.

Le superfici sono uguali, possiamo dire che : $A_i = A_e = A_v$.

Possiamo andare a valutare direttamente il flusso termico per unità di area, vanificando la mancanza di dati sull'area del vetro.

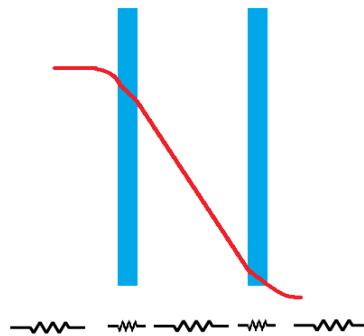
$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{s_{vetro}}{k_v A_v} + \frac{1}{h_o A_o}}$$

ricordando che $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$ e $A_i = A_e = A_v$ quindi otteniamo :

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i} + \frac{s_{vetro}}{k_v} + \frac{1}{h_o}} = 100.3 \frac{W}{m^2}$$

N.B. : il valore inverso della resistenza termica totale si chiama trasmittanza ed è un parametro tenuto in considerazione anche nel calcolo della classe energetica degli edifici.

b) Vetro doppio con intercapedine d'aria spessa 15 mm



Anche in questo caso andremo a valutare le resistenze che entrano in gioco. Lo spessore dell'intercapedine è molto piccolo, l'aria contenuta all'interno sarà in una condizione che è ben approssimabile alla quiete, quindi funzionerà come un buon isolante.

Questa condizione di buon isolante dell'aria ci porta a considerare il suo comportamento resistivo come una resistenza di conduzione di pendenza piuttosto elevata. In formule

otteniamo :

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i} + \frac{s_{\text{vetro}}}{k_v} + \frac{s_{\text{intercapedine}}}{k_{\text{aria}}} + \frac{s_{\text{vetro}}}{k_v} + \frac{1}{h_o}} = 20.9 \frac{W}{m^2}$$

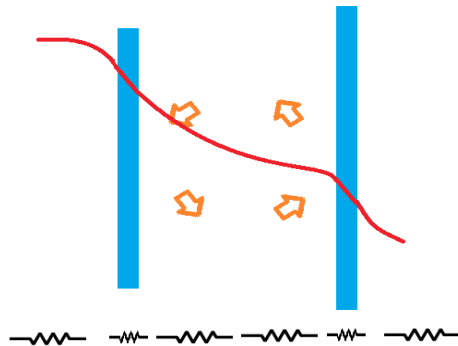
Otteniamo un miglioramento notevole ! Ovviamente il nostro scopo è quello di ridurre il flusso termico verso l'esterno, se stiamo parlando di una finestra di una casa .

c) Vetro doppio con intercapedine d'aria spessa 200mm

Visti i miglioramenti ottenuti mettendo un vetro doppio con un'intercapedine d'aria, vogliamo verificare se la situazione continua a migliorare, aumentando lo spessore dell'intercapedine. In questo modo potremmo ottenere a basso costo un grande miglioramento dell'isolamento.

Possiamo procedere come i due esercizi precedenti.

L'intercapedine è molto ampia, ha uno spessore di 20 cm , lo spazio è sufficiente per permettere un moto di massa d'aria, il fluido all'interno presenterà considerevoli moti convettivi.



Approssimando, ipotizziamo che l'aria contenuta nell'intercapedine abbia una resistenza convettiva simile a quella dell'aria interna. Sviluppando il conto :

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i} + \frac{s_{\text{vetro}}}{k_v} + \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_i} + \frac{s_{\text{vetro}}}{k_v} + \frac{1}{h_o}} = 40.6 \frac{W}{m^2}$$

In accordo con le considerazioni fatte questo valore è più alto che nel caso precedente, quindi avremmo un isolamento peggiore, nonché una finestra molto ingombrante!

Esercizio 2 : Analisi congiunta Conduzione-Convezione

Si consideri un cilindro di diametro $\Phi = 1\text{ cm}$, a temperatura esterna $T_{\text{ext}} = 70^\circ\text{C}$. Il cilindro viene poi rivestito con una guaina isolante di spessore $s = 2\text{ mm}$ e conducibilità termica $k_{\text{isolante}} = 0.05 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ ed è immerso in un fluido a temperatura $T_{\text{fluido}} = 20^\circ\text{C}$ e coefficiente di scambio termico $h_{\text{fluido}} = 5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$. Valutare come varia la potenza termica scambiata al variare dello spessore della guaina s .

Risoluzione:

Non abbiamo dati sulla lunghezza del cilindro, calcoliamo la potenza termica scambiata per unità di lunghezza.

Per la geometria cilindrica del problema la resistenza termica conduttiva è pari a

$$R_{\text{conduttiva}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k L}$$

dove $r_1 = \frac{\Phi}{2}$ e $r_2 = \frac{\Phi}{2} + s$ e L è la lunghezza del cilindro (supposta unitaria).

La resistenza convettiva è pari a $\frac{1}{h_{\text{fluido}} 2\pi r_2 L}$.

La potenza termica scambiata è pari a:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{\text{tot}}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{conduttiva}} + R_{\text{convettiva}}} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{fluido}}}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k l} + \frac{1}{h_{\text{fluido}} 2\pi r_2 l}}$$

Con $s = 2\text{ mm} \rightarrow r_2 = 7\text{ mm}$

$$\dot{Q} = \frac{50}{\frac{\ln\left(\frac{7}{5}\right)}{2\pi \cdot 0,05 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot 1\text{ m}} + \frac{1}{5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot 2\pi \cdot 7 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot 1\text{ m}}} \simeq 8,9\text{ W}$$

La potenza termica scambiata per unità di lunghezza è quindi pari a: $\dot{q} \simeq 8,9 \frac{\text{W}}{\text{m}}$

Osservazioni:

- r_2 influisce diversamente nelle resistenze conduttiva e convettiva:
Ad un aumento di r_2 , ovvero con uno strato di isolante più spesso, corrisponde un aumento di resistenza conduttiva $R_{\text{conduttiva}}$, ma si riduce la resistenza convettiva $R_{\text{convettiva}}$, poiché è maggiore la superficie di scambio termico.

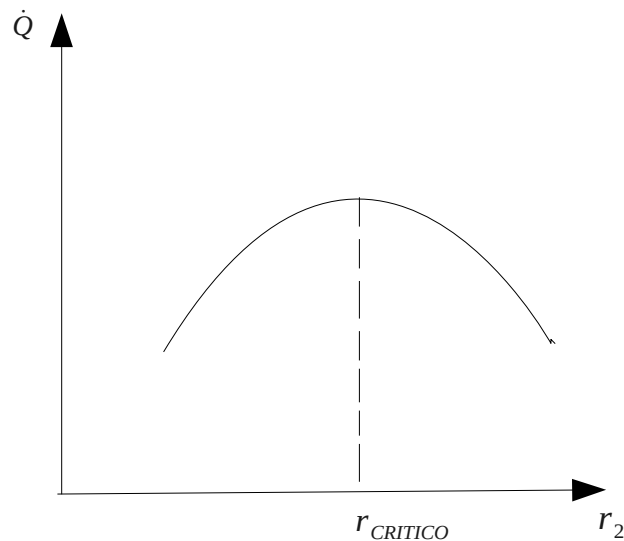
Valutiamo ora l'andamento della potenza scambiata al variare di spessore della guaina s .

Utilizzando la formula ricavata per la potenza termica \dot{Q} e sostituendo i valori di s e r_2 otteniamo:

- $s = 4 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 9 \text{ mm} \rightarrow \dot{Q} \approx 9,24 \text{ W}$
- $s = 5 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 10 \text{ mm} \rightarrow \dot{Q} \approx 9,27 \text{ W}$
- $s = 7 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 12 \text{ mm} \rightarrow \dot{Q} \approx 9,17 \text{ W}$
- $s = 10 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 15 \text{ mm} \rightarrow \dot{Q} \approx 8,89 \text{ W}$

Osservazioni:

- L'andamento del valore di potenza termica scambiata in funzione del raggio r_2 raggiunge un massimo nel punto detto “raggio critico di isolamento”.
- Il raggio critico di isolamento è ottenibile con la formula: $r_2^{\text{critico}} = \frac{k_{\text{isolante}}}{h_{\text{fluido}}}$
- Generalmente si utilizza la zona sotto il raggio critico per l'isolamento di cavi elettrici, mentre per le tubazioni domestiche di acqua calda si sfrutta la zona sopra il raggio critico.



Esercizio 3 : Convezione (Problema di flusso nei tubi)

Per scaldare acqua in un impianto con portata massica $\dot{m} = 2 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$ e portarla dalla temperatura $T_1 = 20^\circ \text{C}$ a $T_2 = 80^\circ \text{C}$ vengono utilizzati dei tubi riscaldati elettricamente, con diametro $d = 5 \text{ mm}$, in grado di fornire un flusso termico $\dot{q} = 250 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$. La velocità del fluido è $w_{H_2O} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

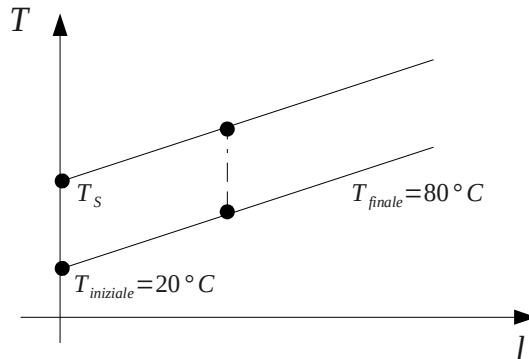
Calcolare :

- a) il numero di tubi da utilizzare
- b) la lunghezza di ciascun tubo

- c) la differenza di temperatura tra fluido e superficie
- d) la potenza di pompaggio per vincere le perdite di carico.

Risoluzione:

Problema di flusso nei tubi, per l'acqua vi è flusso superficiale costante $\dot{q}_s = \text{cost.}$



Osservazione: per motivi impiantistici (turbolenza,..) è limitata la velocità, devo quindi risolvere il problema con una variabile in più: il numero di tubazioni.

a) numero di tubi

La richiesta del numero di tubi da utilizzare può sembrare ambigua e metterci in difficoltà, in quanto del fluido conosciamo già la velocità, la portata massica e il diametro dei tubi. Se però andiamo a verificare la portata massica dai dati di velocità e di diametro del tubo notiamo che è ben diversa.

La portata massica è pari a: $\dot{m} = N \rho \Omega w$

- N è il numero di tubi,
- w la velocità del fluido,
- Ω la sezione.

Ci serve valutare la massa volumica di H_2O , la ricavo dalle tabelle, considerando la temperatura media tra T_1 e T_2 : $\rho(50^\circ C) = 989 \frac{Kg}{m^3}$

- $\Omega = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ dove d è il diametro del tubo

Ogni tubazione garantisce questa portata massica:

$$\dot{m}_{tubo} = \rho w \Omega = 989 \frac{kg}{m^3} \cdot 4 \frac{m}{s} \cdot \pi \cdot (0,0025 m)^2 \simeq 0,078 \frac{kg}{s}$$

Ricaviamo quindi N : $N = \frac{\dot{m}_{tot}}{\dot{m}_{tubo}} = \frac{\dot{m}}{\rho \Omega w} = \frac{2 \frac{kg}{s}}{0,078 \frac{kg}{s}} \simeq 26$, devo approssimare in modo da

avere un numero intero.

b) lunghezza di ciascun tubo

Dobbiamo procedere ora per poter ricavare la lunghezza del tubo, poniamo la potenza termica assorbita dal fluido pari alla potenza termica ceduta dalle resistenze:

$$\dot{m} c_p (T_{out} - T_{in})_{H_2O} = \dot{q} \pi d l_{tubo} N$$

Osservazione: devo prestare attenzione alla differenza di temperatura ΔT richiesta dal problema, in questo caso si tratta di quella dell'acqua $\Delta T = (T_{out} - T_{in})_{H_2O}$

Il calore specifico a pressione costante è: $c_p = 4176 \frac{J}{kg K}$

Il mantello del cilindro è: $mantello = \pi d l_{tubo}$

Possiamo ricavare la lunghezza di ciascun tubo: $l_{tubo} = \frac{\dot{m} c_p (T_{out} - T_{in})_{H_2O}}{\dot{q} \pi d N} = 4.9 m$

c) differenza di temperatura superficiale e temperatura media del fluido

Possiamo ricavare la differenza di temperatura conoscendo il flusso termico:

$$\dot{q} = h(T_s - T_m) \rightarrow (T_s - T_m) = \frac{\dot{q}}{h}$$

Il coefficiente convettivo h è ricavabile dai numeri di Reynolds, Nusselt e Prandtl.

Il numero di Reynolds è: $Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = 33898 \gg Re_{CRITICO}$ quindi siamo in regime turbolento.

Nel calcolo del numero di Reynolds è richiesto $\nu = 5.9 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ che è il parametro di viscosità cinematica.

Per giungere al numero di Nusselt che ci serve per calcolare h , dobbiamo ricavare anche il numero di Prandtl, che a sua volta ci richiede $c_p = 4176 \frac{J}{Kg K}$.

Il numero di Prandtl è: $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = 3,79$

In condizioni di regime turbolento vale la legge di Dittus-Boelter:

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4} = 164,94$$

La conducibilità termica dell'acqua è: $k = 0.637 \frac{W}{mK}$

Ricaviamo h : $h = \frac{Nu \cdot k}{d} = 21013 \frac{W}{m K}$.

Possiamo ricavare ora il valore della differenza di temperatura richiesta:

$$(T_s - T_m) = \frac{\dot{q}}{h} \simeq 11,9^\circ C$$

d) potenza di pompaggio

La potenza di pompaggio è pari a $L_{pompaggio} = \dot{m} v \Delta P = \dot{m} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \Delta P$

dove $v = \text{volume specifico}_{H_2O} = \frac{1}{\text{densità}_{H_2O}} = \frac{1}{\rho}$

ΔP sono le perdite di carico.

Il salto di pressione relativo alle perdite di carico, dovute agli attriti e alle turbolenze, è descrivibile analiticamente dalla formula:

$$\Delta p = \frac{f \cdot L \cdot \rho \cdot w^2}{2 \cdot d}$$

Δp è proporzionale al coefficiente di attrito, alla lunghezza della tubazione, alla densità del fluido e alla sua velocità, mentre è inversamente proporzionale al diametro interno del tubo.

L'unico termine mancante è il coefficiente d'attrito del fluido nel condotto f , che è funzione del numero di Reynolds.

In condizioni di moto turbolento si ha: $f = 0,184 \text{ Re}^{-0,2} = 0,023$

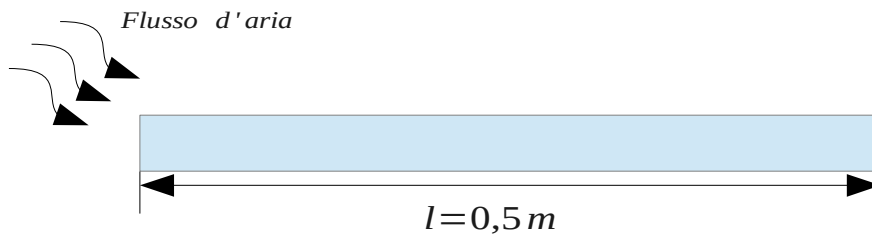
Osservazione: la formula per ricavare il coefficiente di attrito è una formula empirica tratta da letteratura.

$$L_{pompaggio} = \dot{m}_{tubo} \frac{1}{\rho} \frac{f \rho w^2 l_{tubo} N}{2 \cdot d} = 366 \text{ W}$$

Esercitazione 11 - Convezione e Irraggiamento -

Esercizio 1 : Convezione

Un flusso d'aria a pressione pari a $P=6 \text{ kPa}$ e $T_{aria}=300^\circ\text{C}$ scorre con velocità $w=10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ su una lastra lunga $l=0,5 \text{ m}$.
Stimare il flusso termico di raffreddamento per unità di larghezza della lastra, necessario a mantenere la superficie a $T_{lastra}=27^\circ\text{C}$.



Risoluzione:

Rispetto ai precedenti esercizi svolti sulla convezione, si presenta una difficoltà aggiuntiva: la pressione dell'aria non è quella atmosferica, ma è pari a 6 kPa. Tutti i valori tabellari per i gas sono forniti a pressione ambiente, dobbiamo valutare come variano i parametri tabellari in funzione della pressione.

Osservazioni:

- k, Pr, μ non dipendono sostanzialmente dalla pressione, possiamo con buona approssimazione usare i valori dati a P ambiente;
- $\rho = \frac{1}{v}$ dipende dalla pressione;
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ dipende dalla pressione.

Osservazione: Nella realtà la temperatura varia sezione per sezione, è possibile semplificare il problema considerando il sistema composto da flusso d'aria e lastra alla temperatura costante, media tra le due temperature, detta temperatura di film:

$$T_{FILM} = \frac{300^\circ\text{C} + 27^\circ\text{C}}{2} = 163,5^\circ\text{C} \simeq 436 \text{ K}$$

Dalla tabella, prendendo i valori per $T_{TAB}=450 \text{ K}$ e $P=1 \text{ atm}$, otteniamo per l'aria:

- viscosità cinematica: $\nu_{Patm} = 3,18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
- numero di Prandtl: $Pr = 0,7$
- viscosità dinamica: $\mu = 2,49 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$
- densità $\rho = 0,785 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Calcoliamo ora la viscosità cinematica $\nu_1 = \nu_{@6kPa}$:

la viscosità cinematica a pressione atmosferica è $\nu_2 = \nu_{@Patm}$

dalla legge dei gas perfetti abbiamo che $\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{P}{R^* T} = \frac{1}{\nu}$

Per calcolare la viscosità cinematica, approssimiamo il sistema come sistema isoterma, quindi vale il rapporto:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mu \rho_{@Patm}}{\mu \rho_{@6kPa}} = \frac{P_2 R^* T}{P_1 R^* T} = \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \nu_1(T_1 = T_{FILM}, P = 6 kPa) = \nu_2(T_{TAB}, P_{atm} = 1 atm) \cdot \frac{1 atm}{6 kPa}$$

$$\nu_1 = \frac{\nu_2 \cdot 101,325 kPa}{6 kPa} = 5,37 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s} .$$

Procediamo ora nel calcolo del flusso termico di raffreddamento.

Calcolo il numero di *Reynolds*: $Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{w D}{\nu} = \frac{10 \frac{m}{s} \cdot 0,5 m}{5,37 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}} \simeq 9311$

D è la lunghezza della nostra geometria.

Nel caso di flusso su lastra piana, la transizione da moto laminare a turbolento avviene quando $Re_{CRITICO, lastra piana} \simeq 5 \cdot 10^5$.

Siamo quindi in regime laminare: $Re < Re_{CRITICO, lastra piana}$.

Il numero di *Nusselt* si determina dalle relazioni per flusso turbolento su piastra piana.

$$Nu = \frac{h \cdot l}{k} = 0,664 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \simeq 56,89$$

Ricaviamo k = *conducibilità termica dell' aria* dalle tabelle.

$$@ 450 K \Rightarrow k = 0,05298 \frac{W}{m \cdot K}$$

Si ottiene quindi $h = \frac{k}{l} \cdot Nu = \frac{0,05298 \frac{W}{m \cdot K}}{0,5 m} \cdot 56,89 \simeq 6,03 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Ora possiamo ricavare il flusso termico scambiato per convezione:

$$\dot{q} = h \cdot l \cdot (T_{aria} - T_{lastra}) = 6,03 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot 0,5 m \cdot (573 K - 300 K) = 822,8 \frac{kW}{m}$$

Osservazione: Nella risoluzione dei problemi è necessario un approccio critico alle tabelle, i dati sono validi solo in determinate condizioni.

Esercizio 2 : Convezione

Valutare il numero di Nusselt Nu per una portata d'acqua $\dot{m}=0,2 \frac{kg}{min}$ che scorre attraverso un condotto cilindrico di diametro $\Phi=2 cm$, noti:

- densità dell'acqua: $\rho=998 \frac{kg}{m^3}$
- viscosità dinamica: $\mu=8,3 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m \cdot s}$
- numero di Prandtl: $Pr=4,7$
- conducibilità termica $k=0,637 \frac{W}{m \cdot K}$

Sapendo dalla letteratura che:

$Nu=4,36$ se il moto è laminare

$Nu=0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33}$ se il moto è turbolento

Richieste:

- a) Date queste due relazioni per Nu , stabilire quale è corretta.
- b) Calcolare la temperatura all'uscita del tubo ipotizzando $T_{ingr}=30^\circ C (H_2O)$ e $T_{Singr}=50^\circ C (tubo)$ ipotizzando una lunghezza del tubo pari a 1 m.
- c) Calcolare la temperatura all'uscita della tubazione nelle stesse condizioni sopra date ma con $Nu=3,66 (laminare)$.
- d) Calcolare la lunghezza del tubo affinché $T_{USCITA_{H_2O}} \simeq 50^\circ C$

Risoluzione:

a) Relazione corretta

Per capire quale relazione è corretta devo capire se il fluido è in condizione turbolenta o laminare.

Calcoliamo il numero di Reynolds: $Re = \frac{\rho w D}{\mu}$

$D=\Phi$ è il diametro.

Non conosco la velocità w , ma conosco la portata massica :

$$\dot{m} = \rho w \Omega = \rho w \frac{\pi \Phi^2}{4} \rightarrow w = \frac{4 \dot{m}}{\rho D^2 \pi}$$

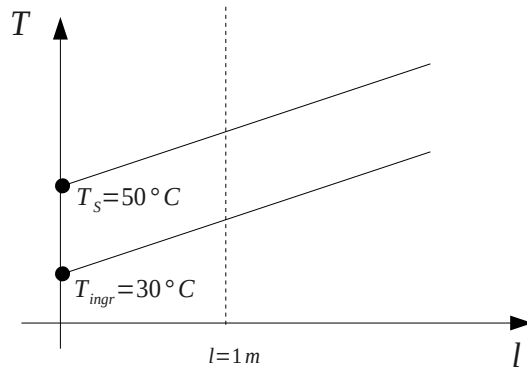
Sostituendo nella formula per Re ottengo:

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{4 \rho \dot{m} D}{\rho D^2 \pi \mu} = \frac{4 \cdot \frac{0,2 kg}{60 s}}{\pi 0,02 m \cdot 8,3 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{ms}} = 255,67 < Re_{CRITICO} = 2300$$

Possiamo quindi concludere che siamo in condizioni di moto laminare.

b) Temperatura all'uscita del tubo ($\dot{Q} = costante$)

Confrontando i dati e le formule empiriche fornite con il libro di testo, troviamo che siamo in condizioni di $\dot{Q} = \text{costante}$.



Uso come strumento un bilancio di potenza termica; scorrendo all'interno della tubazione l'acqua acquista un calore pari alla potenza termica scambiata per convezione tra tubo e acqua.

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A = \dot{m} c_p (T_u - T_i) \rightarrow h(T_s - T_m) = \dot{m} c_p (T_u - T_i)$$

Con i valori trovati prima otteniamo:

$$h = \frac{Nu \cdot k}{D} = \frac{4,36 \cdot 0,637 \frac{W}{m \cdot K}}{0,02 m} = 138,87 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

E dunque la temperatura in uscita:

$$T_U = T_I + \frac{h(T_s - T_m) \pi \Phi L}{\dot{m} c_p} = 30^\circ C + \frac{138,87 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot 20^\circ C \cdot 3,14 \cdot 0,02 m \cdot 1 m}{\frac{0,2 kg}{60 s} \cdot 4186 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}} = 42,5^\circ C$$

Abbiamo tutti i valori per calcolare la potenza totale scambiata, sebbene non sia richiesto è utile per fare un confronto con il punto successivo.

$$P_{TOT \text{ scambiata}} = \dot{Q}_s = h(T_s - T_m) \cdot \pi \Phi L = 174,42 W$$

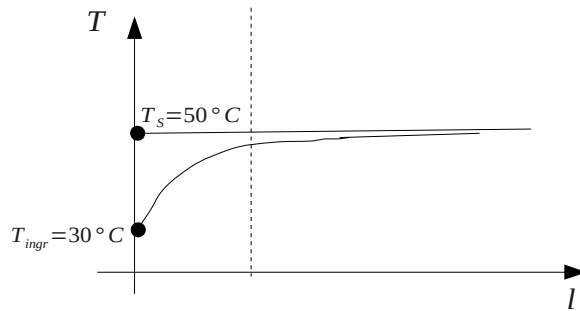
c) Temperatura all'uscita del tubo ($T_s = \text{COST}$)

Se ci fosse stato fornito $Nu = 3,66$ saremmo in condizione di temperatura superficiale costante: $T_s = \text{COST}$.

Ovvero si tratta di una situazione in cui la temperatura del fluido, man mano che l'acqua scorre nel tubo, tende asintoticamente a T_s .

Nello scambio termico convettivo: $\dot{q} = h \Delta T$

In questo caso ΔT non resta più costante: usiamo un ΔT medio logaritmico.



La temperatura in uscita dal tubo è $T_U = T_s - (T_s - T_{ingr}) e^{\frac{-hA}{\dot{m}c_p}}$

Dove
$$h = \frac{Nu k}{D} = \frac{3,66 \cdot 0,637 \frac{W}{m \cdot K}}{0,02 m} = 116,57 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Quindi:
$$T_U = 50^\circ C - (50^\circ C - 30^\circ C) e^{\frac{116,57 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot \pi \cdot 0,02 m \cdot 1 m}{\frac{0,2 kg}{60 s} \cdot 4186 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}}} = 38,16^\circ C$$

Essendo $\Delta T_{ingr} = 20^\circ C$ e $\Delta T_U = 11,84^\circ C$ ricaviamo:

$$\Delta T_{medio\logaritmico} = \frac{20^\circ C - 11,84^\circ C}{\ln \frac{20}{11,84}} = 15,56^\circ C$$

La potenza totale scambiata in questo caso è:

$$P_{TOT} \text{ scambiata} = \dot{Q}_s = h A \cdot \Delta T_{m \log} = 116,57 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \cdot \pi \cdot 0,02 m \cdot 1 m \cdot 15,56^\circ C = 113,5 W$$

La potenza presenta una notevole differenza rispetto al caso precedente!

d) lunghezza del tubo affinché $T_{USCITA_{H_2O}} \simeq 50^\circ C$

Affinchè $T_U \simeq T_s = 50^\circ C$ la parte esponenziale deve rendere infinitesimo il termine sottrattivo.

Teoricamente si ottiene all'infinito, ma in realtà è sufficiente considerare l'esponente

$$\frac{hA}{\dot{m}c_p} \geq 5 \text{ per avere uno scarto trascurabile tra la temperatura } T_s \text{ e } T_U.$$

Il termine $\frac{hA}{\dot{m}c_p} \geq 5$ prende il nome di *numero di unità termiche*.

Poniamo: $\frac{hA}{\dot{m}c_p} = \frac{h \pi \Phi L}{\dot{m}c_p} = 5$ e otteniamo la lunghezza:

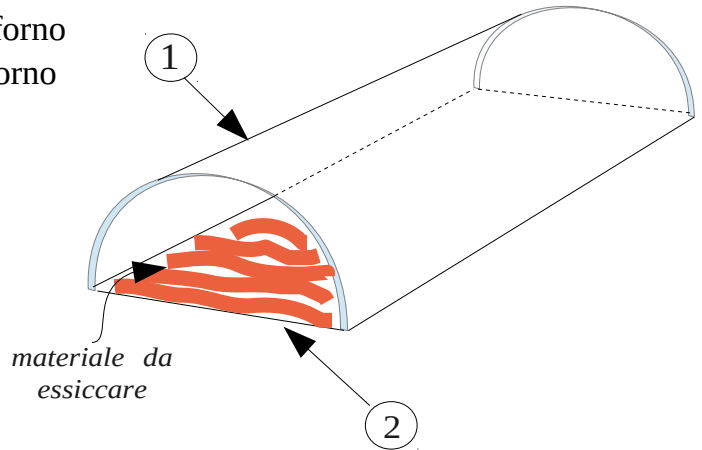
$$L = \frac{5 \dot{m} c_p}{h \pi \Phi} = \frac{\frac{5 \cdot 0,2 \text{ kg}}{60 \text{ s}} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}}{116,57 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot \pi \cdot 0,02 \text{ m}} = 9,53 \text{ m}$$

Esercizio 3 : Irraggiamento

Un forno da essiccazione è costituito da un condotto semicircolare di diametro $\Phi = 1 \text{ m}$ e lunghezza $L = 10 \text{ m}$. Sul fondo del forno viene depositato del materiale umido da essiccare. Rileviamo i seguenti valori:

- $T_2 = 50^\circ\text{C} = 323 \text{ K}$ sul fondo piano del forno
- $T_1 = 1000^\circ\text{C} = 1273 \text{ K}$ sulla parete del forno

Determinare la portata di acqua che evapora.



Risoluzione:

1) parete del forno: $A_1 = \frac{\pi \cdot \Phi \cdot L}{2} = 15,7 \text{ m}^2$

2) piano di appoggio: $A_2 = \Phi \cdot L = 10 \text{ m}^2$

Dati:

emissività del materiale da essiccare depositato sul fondo: $\epsilon_2 = \epsilon_{\text{MATERIALE}} = 1$

emissività delle pareti: $\epsilon_1 = \epsilon_{\text{PARETI}} = 0,8$

Osservazioni:

manca il fattore di vista $F_{1 \rightarrow 2}$, il fattore di vista $F_{2 \rightarrow 1}$ è unitario, ma non è vero il contrario! trascuriamo le dispersioni nelle sezioni iniziale e finale, immaginiamo che siano perfettamente coibentate.

Ipotesi: lunghezza indefinita.

Valuto $F_{1 \rightarrow 2}$ con la legge della reciprocità: $F_{1 \rightarrow 2} A_1 = F_{2 \rightarrow 1} A_2$, con $F_{2 \rightarrow 1} = 1$.

La quantità di energia necessaria per vaporizzare l'unità di massa di H_2O è fornita

dall'entalpia di vaporizzazione: $h_{\text{vaporizzazione}} = h_{\text{H}_2\text{O}@50^\circ\text{C}} = 2390 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Nel caso di trasmissione di calore per irraggiamento in cavità con due superfici, la rete di radiazione consiste di due resistenze superficiali e una spaziale.

La formula per la potenza termica netta scambiata per irraggiamento è:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{F_{1 \rightarrow 2} A_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

Otteniamo, essendo $F_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_2}{A_1}$:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} A_2 + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \right) \frac{1}{A_2}} = \frac{A_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} A_2 + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

Considerando che $\epsilon_2 = \epsilon_{MATERIALE} = 1$, la formula diventa:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \frac{A_2}{A_1} + 1} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 10 m^2 \cdot [(1273 K)^4 - (323 K)^4]}{\frac{1 - 0,8}{0,8} \cdot \frac{2}{\pi} + 1} = 1,279 \cdot 10^6 W$$

Con $\sigma = \text{costante di Stefan-Boltzmann} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

Ricaviamo ora la portata massica di acqua in evaporazione:

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot h_{\text{vaporizzazione}} \rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{Q}}{h_{\text{vaporizzazione}}} = \frac{1,279 \cdot 10^6 W}{2,39 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}} = 0,535 \frac{kg}{s}$$