

25/03/2020

E 10] Dato

Sistema a tempo DISCRETO:

$$\begin{cases} x(k+1) = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix}} x(k) + \overset{b}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}} u(k) \\ y(k) = \overset{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} x(k) \end{cases}$$

Dati

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u(k) = \sin(k)$$

calcolare

$y(k)$ per $k = 0, 1, 2$?

Il sistema è asintoticamente stabile, la matrice A è triangolare e gli autovalori sono lungo la diagonale e hanno modulo minore di 1, se questa fosse la matrice di un SD a TC il sistema sarebbe instabile (gli autovalori hanno parte reale positiva), ma siccome siamo a TD quindi non conta la parte reale ma il modulo degli autovalori.

Inoltre il sistema è strettamente proprio e LTI

INTERMEZZO

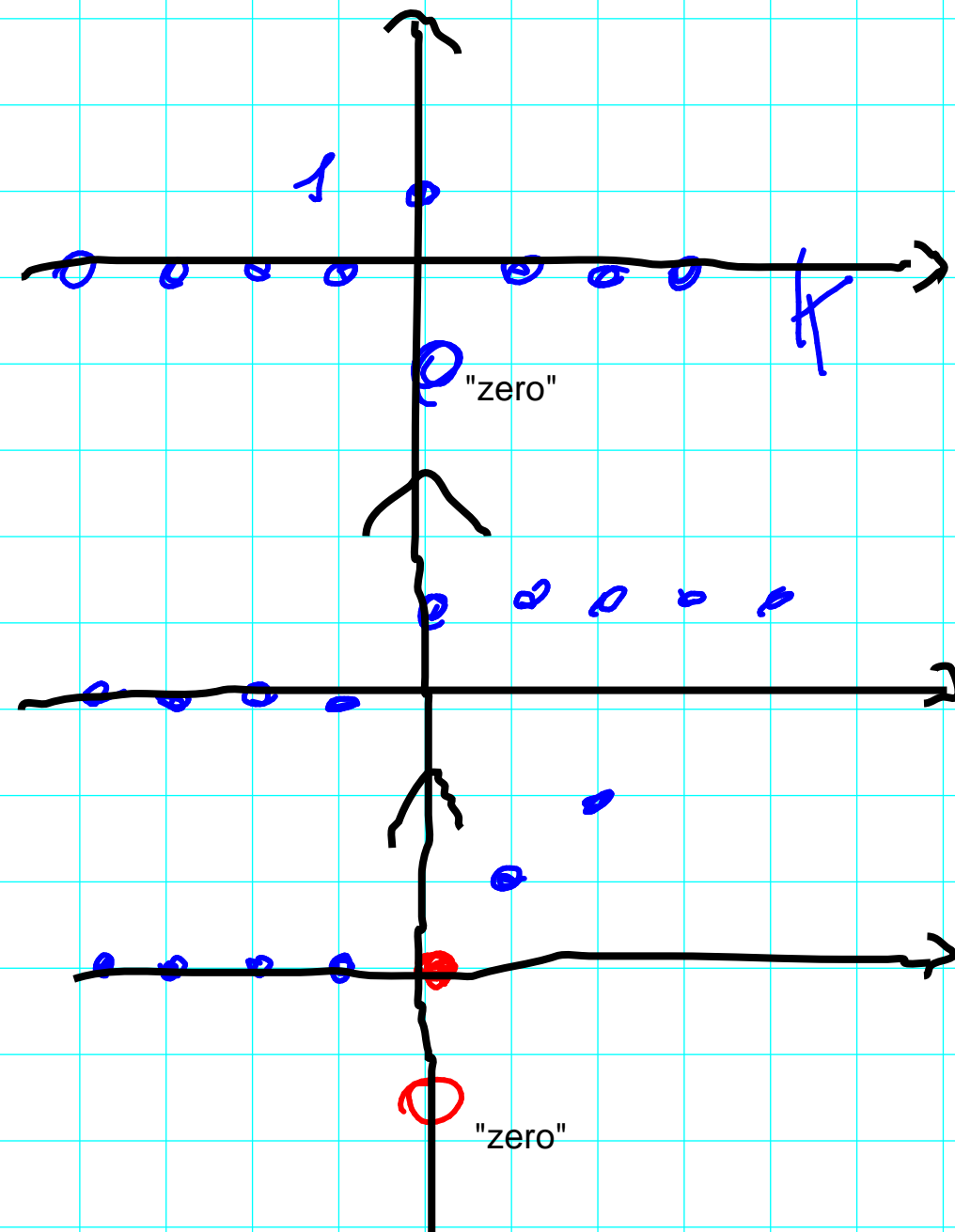
I

$$\text{imp}(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{scz}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\text{ram}(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

L



$$k=0: \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y(0) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

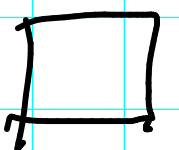
$$k=1: \quad x(1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b \cdot \underbrace{1}_{u(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2.2 \end{bmatrix} = 5.2$$

$$k=2: \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.44 \end{bmatrix}$$

$$y(2) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.44 \end{bmatrix} = 6.94$$

k	u
0	1
1	1
2	1
3	1



EM

Dato il SD LTI a TC con pol. caratteristica

$$\pi(s) = s^3 + 2s^2 + ks + 1$$

olive per quali valori di k esso è AS

Us Routh Routh ~~sapendo~~ sapendo ~~che~~ che ~~deve~~ deve ~~essere~~ essere $k > 0$

Tabella di Routh

1	k	0	---
2	1	0	---
α	\vdots		
β			

$$\alpha = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2k-1}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Coeff. 1^a column concordi, cioè sistema AS, per

$$\alpha > 0 \implies 2k-1 > 0 \implies k > \frac{1}{2}$$

□

RAGGIUNGIBILITÀ' (SD LTI 2TC SISO)

Uno stato \tilde{x} si dice RAGGIUNGIBILE [da zero]

se $\equiv \exists u(t)$ tale che

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ u(t) = \tilde{u}(t) \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow x(\tilde{t}) = \tilde{x}, \quad \tilde{t} < \infty$$

Un sistema si dice [completamente] raggiungibile se ogni stato è raggiungibile

Domanda: come determinare se un SD è o meno raggiungibile (R)?

- Teorema di Cayley-Hamilton

$$\pi(s) = \det(sI - A) = s^n + \beta_1 s^{n-1} \dots + \beta_n$$

$$\pi(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0$$

Quindi

$$A^n + \beta_1 A^{n-1} \dots + \beta_n I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -\beta_1 A^{n-1} - \beta_2 A^{n-2} \dots - \beta_n I$$

Di conseguenza, partendo da $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

$$I + A(t-\tau) + \frac{A^2(t-\tau)^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1}(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

contiene
gli termini
precedenti

$$= \int_0^t \sum_{l=0}^{n-1} e^{A(t-\tau)} A^l b u(\tau) d\tau$$

$$e^{A(t-\tau)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \underbrace{\int_0^t f_l(t-\tau) u(\tau) d\tau}_{\sum_l(t)}$$

$$\Rightarrow z(t) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l b \underbrace{\sum_l(t)}$$

contiene i coeff. del pol. caratter. di A
e l'ingresso

Ovvero

Π_R , m. di raggiungibilità

$$x(t) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

SISO

columna ($n \times 1$)

$n \times n$

$$\begin{bmatrix} \overset{\text{scalare}}{\sum_0(t)} \\ \sum_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$n \times 1$

$Z(t)$

$n \times 1$

$$x(t) = \Pi_R Z(t)$$

↑

contiene l'ingresso

Supponiamo ora di voler portare lo stato (da zero) a \tilde{x}
Perché questo sia possibile deve esistere $\tilde{Z}(t)$
tale che

$$\Pi_R \tilde{Z}(t) = \tilde{x}$$

- contiene i coeff. di $\pi(s)$ e $\tilde{v}(t)$

Quindi dire che ciò è possibile $\forall \tilde{x}$
equivale a dire che Π_R non è singolare

ovvero

$$\text{sistema } R \iff \Pi_R \text{ non è singolare}$$

ES 1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

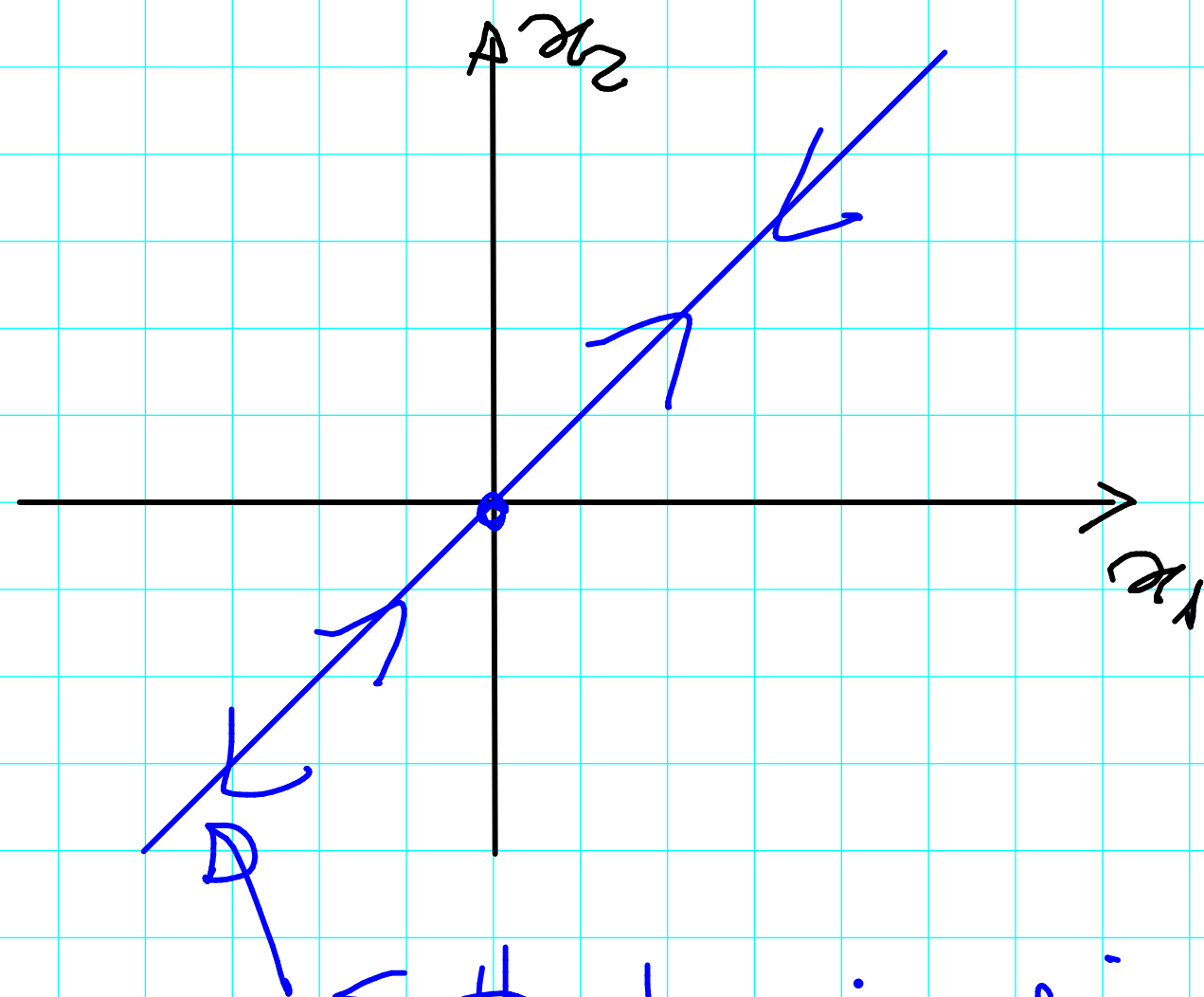
Ovviamente se $x(0) = 0$ si otterrà $x_1(t) = x_2(t) \forall u(t)$

$\Rightarrow \forall$ stato con $x_1 \neq x_2$ non è R

Verifico col criterio:

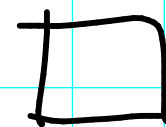
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

singolare



Spazio di stato:
piano (x_1, x_2)

Sottospazio di raggiungi bilite: retta $x_1 = x_2$



OSSERVABILITÀ' (SD LTI ATC SISO)

Uno stato \hat{x} è NON OSSERVABILE se

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = \hat{x} \\ u(t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t) = 0 \quad t \geq 0$$

Sistemi [completamente] osservabili :
nessuno stato è non osservabile

Criterio di osservabilità

$$M_o = \begin{bmatrix} c' & A'c' & \dots & (A^{n-1})'c' \end{bmatrix}$$

\uparrow m. di osservabilità ($n \times n$)

Sistema Osservabile (o) $\Leftrightarrow M_o$ non singolare

ES2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

è relazione $u \rightarrow y$ (ingresso/uscita, FOT)
e tutto qui

Criterio oss.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = A'$$

$$A'c' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} c' & A'c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ singolare}$$

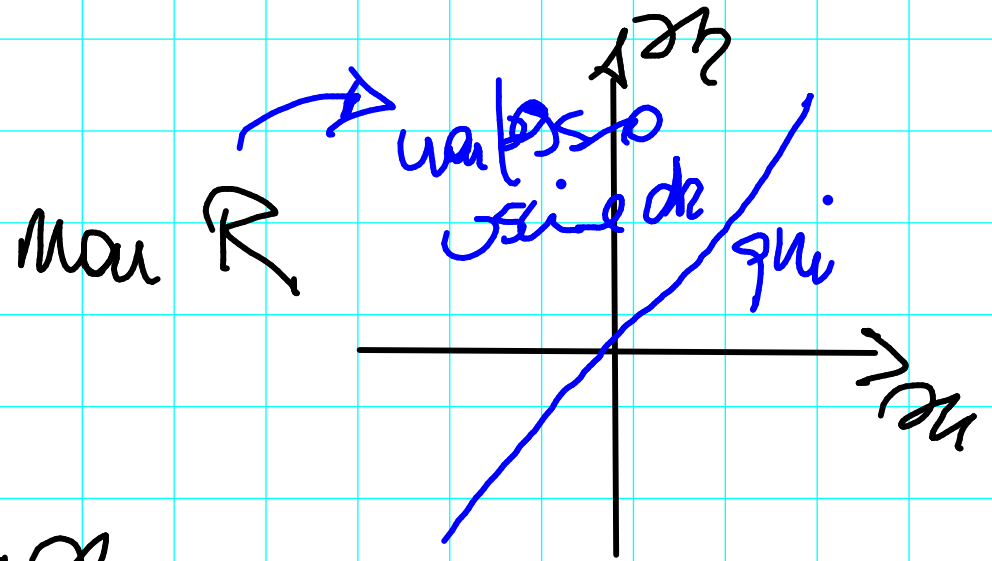
□

Osservazioni

1) Un sistema può avere parti NR e/o NO

ES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$



Cambio variabili:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 - x_2 \\ q_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -x_1 + u + x_2 - u = -q_1 \\ \dot{q}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -q_2 + 2u \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = -q_1 \\ \dot{q}_2 = -q_2 + 2u \end{cases}$$

u non influenza una parte dello stato \leftarrow non R \square

2) Queste parti nella FdT non si vedono:
↳ FdT rappresenta la sola parte RAO del sistema

3) Gli autovalori delle parti NR p/o NO del sistema
nel calcolo della FdT sono cancellati

⇒ vedi schemi sul libro

DEF: una cancellazione è CRITICA se avviene al di fuori della regione di asintotica stabilità ($\geq T_c$, se l'autovettore cancellato non ha $\text{Re} < 0$)

Conseguenze

- ① (A, b, c, d) e $G(s)$ sono rappresentazioni equivalenti di un SD, a meno di una trasformazione di similarità, se nel calcolo di $G(s)$ non si usano cancellazioni o equivalentemente se il sistema è RAO.

② Poiché i poli di $G(s)$ sono gli autovalori della parte R&O del sistema, perché si possa studiare la stabilità (asintotica) del sistema usando $G(s)$ non vi devono essere cancellazioni critiche.

REALIZZAZIONE

$$G(s) \rightarrow \infty (A, b, c, d)$$

realizzazione
MINIMA

Limitandosi al caso in cui
la dimensione di A coincide col grado del den. di $G(s)$

esistono modi "comodi"
per trovare UNA platema (A, b, c, d) corrispondente
a $G(s)$?

Ne realizza una

Premessa

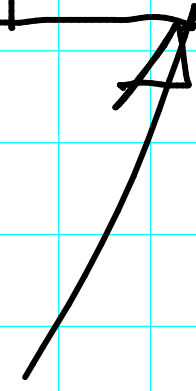
Se in $G(s)$ grado num = grado den

$$G(s) = \textcircled{d} + \frac{N(s)}{D(s)}$$

$\hookrightarrow A, b, c$

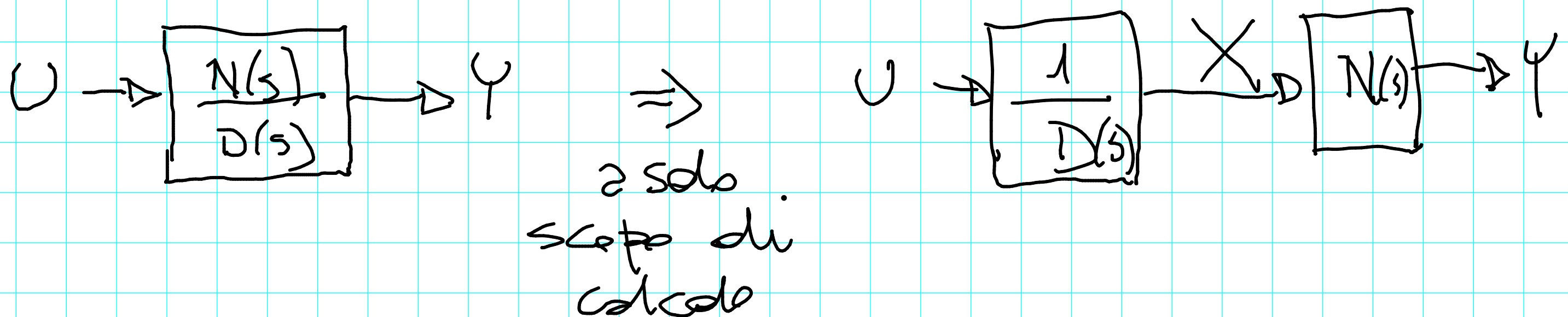
Ci basta perciò trattare il caso

grado $N <$ grado D



Come detto, realizzare UN possibile modo di fare

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} \dots + a_n} \Rightarrow X(s) D(s) = U(s)$$

$$s^n X + a_1 s^{n-1} X \dots + a_n X = U$$

$$FdT \rightarrow \text{sdof MTF} \rightarrow x(0) = 0$$

$$S^u X$$

↓

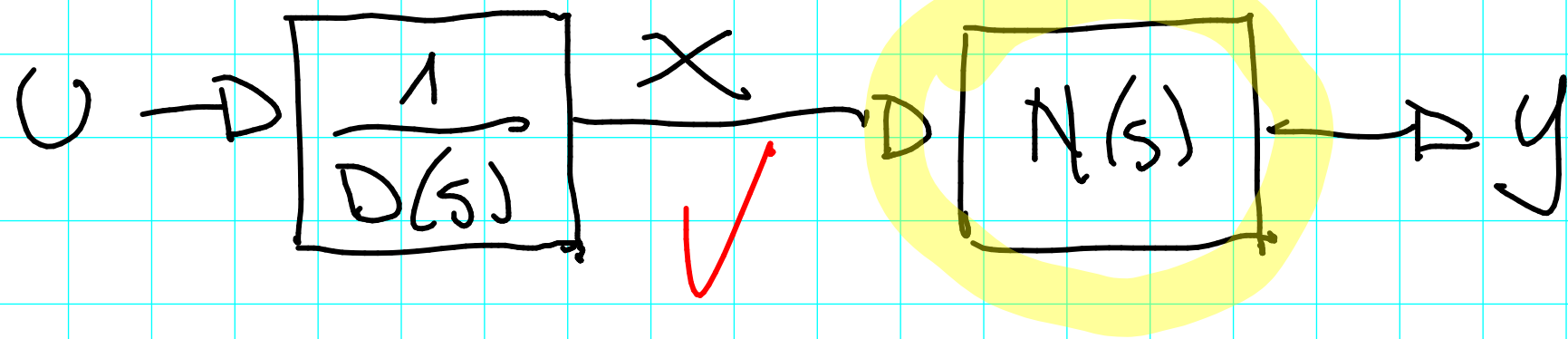
$$\underbrace{\frac{d^n x(t)}{dt^n}}_{\dot{x}_n} + a_1 \underbrace{\frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}}_{x_n} \dots + a_{n-1} \underbrace{\dot{x}(t)}_{x_2} + a_n \underbrace{x(t)}_{x_1} = v(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} \dots - a_n x_1 + v$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -x_n - x_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -x_1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b$$

The matrix A is an $n \times n$ matrix. The first $n-1$ rows form the identity matrix I_{n-1} shifted one column to the right. The last row contains the negative of the state variables $-x_n, -x_{n-1}, \dots, -x_1$. The vector b is an $n \times 1$ vector with a 1 in the last row and 0s elsewhere.



$$Y(s) = N(s) X(s) = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n) X(s)$$

termiini:

$$\begin{array}{ccc}
 b_1 s^{n-1} X(s) & \rightarrow & b_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{t^{n-1}} = b_1 x_n(t) \\
 b_2 s^{n-2} X(s) & \rightarrow & b_2 x_{n-1}(t) \\
 \vdots & & \\
 b_n X(s) & \rightarrow & b_n x_1(t)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{[b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1]}_C x(t)$$

□