24/03/2020

E7) Dato il SD NL TI a TC

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 - 2u^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \\ y = x_1^4 + x_2 + u^2 \end{cases}$$

Basta che una equazione non sia lineare e il sistema diventa non lineare.

1) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per $u(t) = \bar{u} = 1$? Determinare i vari stati e le uscite di equilibrio per un determinato u(t) =\bar{u}= 1

2) Stabilità equilibri ? Discutere la stabilità degli equilibri eventualmente trovati

3) Sist. linearizzati ? Determinare i sistemi linearizzati nell'intorno degli equilibri eventualmente trovati

1) calcolo stati equilibrio

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1^{\,2} + \bar{x}_2 - 2\bar{u}^3 \\ 0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \quad \text{(ricavato dalla seconda equazione)} \\ \text{sostituisco nella prima equazione} \\ \bar{x}_1^{\,2} + \bar{x}_1 - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{-1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \end{cases}$$

$\bar{u} = 1$

Quindi vi sono 2 stati di equilibrio:

$$\bar{x}_a = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} x\_1a \\ x\_2a \end{array} \end{array} \qquad \bar{x}_b = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} x\_1b \\ x\_2b \end{array} \end{array}$$

(come convenzione i vari stati di equilibrio li distinguiamo con delle lettere ai pedici (_a e_b), così
non facciamo confusione fra i pedici che denotano la variabile di stato (numeri) e i pedici che denotano gli stati
di equilibrio (lettere))

e in corrispondenza l'uscita agli stati di equilibrio valgono:

$$\bar{y}_a = (-2)^4 - 2 + 1^2 = 15$$

$$\bar{y}_b = (1)^4 + 1 + 1^2 = 3$$

2) calcolo matrice A del generico sist. linearizzato

$$f_x = \begin{array}{cc} \text{(derivata di x\_1\^{}2)} & \text{derivata di x\_2} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \\ \text{derivata di x\_1} & \text{derivata di -x\_2} \end{array}$$

Piccolo ricordo sulla teoria (meglio comunque controllare nella parte di teoria): Il sistema linearizzato è fatto sviluppando l'equazione di stato in serie fermandosi al primo ordine, e al primo ordine il termine noto è 0 (per definizione di equilibrio) e poi abbiamo la matrice delle deriivate parziali delle funzioni f rispetto alle variabili x

Equilibrio a:

Mettiamo ora dentro la matrice appena trovata i valori di equilibrio che sono:

$$\bar{x}_1 = -2 \quad \bar{x}_2 = -2 \quad \bar{u} = 1$$

$$f_x \Big|_{\text{equilibrio a}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A_a$$ matrice A nello stato di equilibrio a

non riesco a trarre conclusioni a priori su questa matrice, quindi guardiamo il polinomio caratteristico

$$\det(sI - A_a) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = 0 \qquad s^2 + 5s + 3 = 0$$

coeff. concordi e 2° grado $\Rightarrow$ 2 radici con Re < 0 $\Rightarrow$ sist. lin. AS $\Rightarrow$ Ep. AS

Equilibrio b: (stessa cosa che abbiamo fatto per l'equilibrio a)

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{u} = 1$$

$$f_x \Big|_{\text{equilibrio b}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A_b$$

In questo caso senza fare conti aggiuntivi notiamo che la traccia è negativa, quindi:

traccia $> 0 \Rightarrow$ almeno un autovalore con $Re > 0 \Rightarrow$ Eq. I

$\square$

Ricordiamo il meccanismo di studio della stabilità degli equilibri:
Se il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio è asintoticamente stabile, l'equilibrio è asintoticamente stabile.
Se il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio ha almeno un autovalore con parte reale positiva (che non significa dire che il sistema linearizzato è instabile), allora l'equilibrio è instabile.
In tutti gli altri casi non si può dire nulla (dipendono da termini di sviluppo in serie maggiori del primo, quindi non si può dire nulla guardando il sistema linearizzato), non ci sarà mai richiesto.

3) Sistemi linearizzati

Sistema linearizzato generico:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = f_x\big|_{\bar{x},\bar{u}}\,\delta x + f_u\big|_{\bar{x},\bar{u}}\,\delta u \\ \delta y = g_x\big|_{\bar{x},\bar{u}}\,\delta x + g_u\big|_{\bar{x},\bar{u}}\,\delta u \end{cases}$$

delta f delta f delta

delta g delta g delta

ricordando che:

$$\delta u = u - \bar{u}$$
$$\delta x = x - \bar{x}$$
$$\delta y = y - \bar{y}$$

Stimo f_u, g_x e g_u e anche f_x (ma lo abbiamo già calcolato al punto precendente)

derivata rispetto a u di x_1^2 + x_2 -2u^3

derivata rispetto a x_1 dell'uscita y

$$f_u = \begin{bmatrix} -6u^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_x = \begin{bmatrix} 4x_1^3 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_u = 2u$$

f_x=[...]
derivate delle funzioni di stato rispetto a x, l'abbiamo calcolata qualche slide indietro

derivata delle funzioni di stato rispetto a u

derivata rispetto a u di x_1 - x_2

derivata dell'uscita rispetto a x

derivata rispetto a x_2 dell'uscita y

derivata rispetto a u dell'uscita y

- Sist. lin. attorno a eq. a

Compilo inserendo i valori all'equilibrio a

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = \begin{bmatrix} -32 & 1 \end{bmatrix} \delta x + 2 \delta u \end{cases}$$

$$\delta u = u - 1$$

$$\delta x = x - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\delta y = y - 15$$

fare la stessa cosa per l'equilibrio b ...

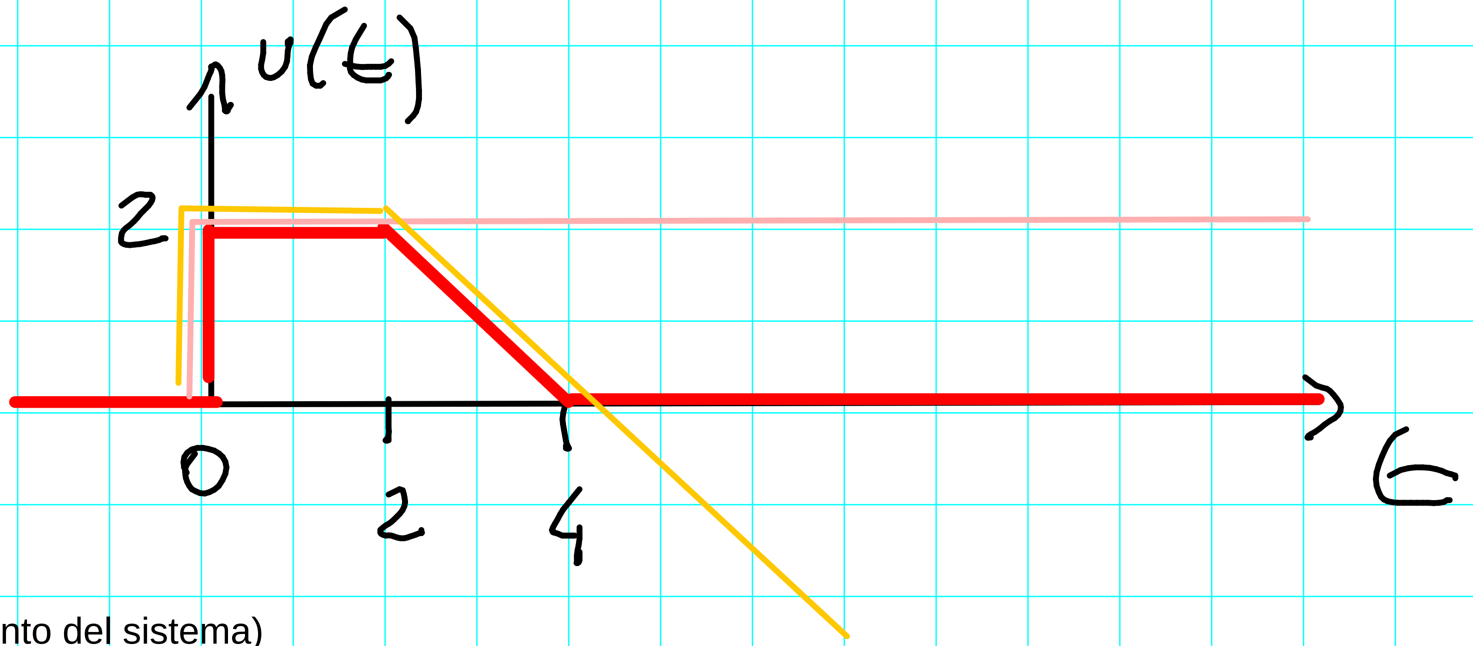
eq. b ...

E8

$$\begin{cases}\dot{x} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} x\end{cases}$$

SD LTI a TC,
Notiamo subito che è asintoticamente stabile, la matrice A è triangolare inferiore e i suoi autovalori sono nella diagonale principale (-1 e -2) hanno parte reale negativa.
E' strettamente proprio, cioè non compare u nell'equazione d'uscita.

dati x(0) ------> $x(0) = 0$ e u(t) ------------------>



domanda: $y(t) \quad t \geq 0$? (calcolare il movimento del sistema)

Sappiamo già che il movimento del sistema tende a 0 per t che tende all'infinito (lo si vede dal grafico di u(t))

- Esprimo u(t) come somma di segnali canonici

$$u(t) = 2\,sca(t) - ram(t-2) + ram(t-4)$$

Quindi

Trasformata di Laplace

$$U(s) = \frac{2}{s} - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{ram(t)} e^{-2s}}_{ram(t-2)} + \frac{1}{s^2} e^{-4s}$$

- Calcolo la FdT del sistema

$$G(s) = c(sI-A)^{-1}b + d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

gli zeri nelle righe e nelle colonne tolgono interi pezzi dalle matrici.

• Esprimo $Y(s)$ (c'è sotto TF)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{4}{s(s+1)(s+2)}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}}_{Y_2(s)}\left(e^{-4s} - e^{-2s}\right)$$

Dobbiamo in generale raggiungere una forma come questa:

in generale (N, D polinomi)

$$\sum_i \underbrace{\frac{N_i(s)}{D_i(s)}}_{\text{somma di termini razionali}} \sum_j e^{-T_i s}$$

somma di termini esponenziali

Heaviside → $y_i(t)$

ritardi con cui appaiono le $y_i(t)$

quindi abbiamo una somma di termini razionali ciascuno dei quali è moltiplicato per una somma di termini esponenziali

Questo primo termine non ha la forma esponenziale, semplicemente vale 0

Questo secondo termine, invece si vede chiaramente che è moltiplicato per una sommatoria di esponenziali

→ ... Heaviside

Il meccanismo con cui si procede ora è che si utilizza l'antitrasformazione di Heaviside per i termini razionali trasformandoli quindi da Y(s) a y(t), mentre le varie sommatorie di termini esponenziali ci mostrano (tramite il coefficiene con cui è moltiplicata la s nell'esponente) i ritardi con cui appaiono le y(t)

Antitrasformiamo quindi i termini razionali Y_1(s) e Y_2(s): (saltiamo i conti)

$$y_1(t) = \left(2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

$$y_2(t) = \left(-\frac{3}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

Componendo aggiungiamo ora i ritardi degli esponenziali: i ritardi sono i coefficienti con cui sono moltiplicate le s negli esponenti.

(y_1 ha ritardo nullo, non ci sono esponenziali)

(y_2 ha due ritardi: -2 e -4)

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t-2) + y_2(t-4) \longrightarrow$$

$$\left[\ \mathcal{L}^{-1}\left[\boxed{\frac{N(s)}{D(s)}}\, e^{-s\tau}\right] = y(t-\tau)\ \right]$$

HEAVISIDE

$y(t)$

N, D polinomi

$$y(t) = \underline{y_1(t)} - \underline{y_2(t-2)} + y_2(t-4)$$

$$= \left(2 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}\right)\sigma(t)$$

$$- \left(-\frac{3}{2} + (t-2) - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} + 2e^{-(t-2)}\right)\sigma(t-2)$$

$$+ \left(-\frac{3}{2} + (t-4) - \frac{1}{2}e^{-2(t-4)} + 2e^{-(t-4)}\right)\sigma(t-4)$$

$\square$

$\boxed{E9}$

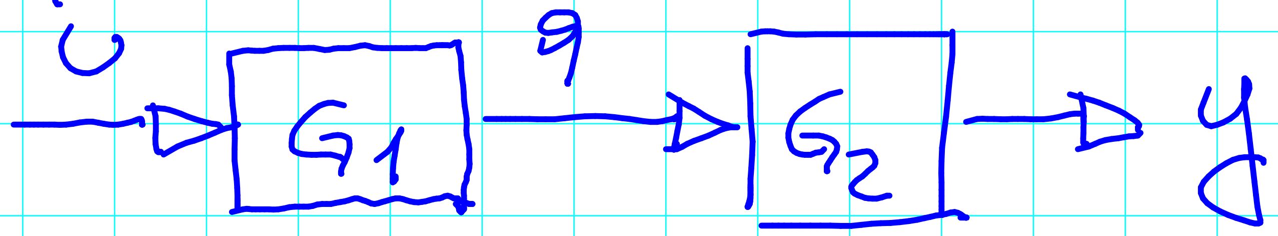
Consideriamo una FdT $G(s)$ già scomposta in somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

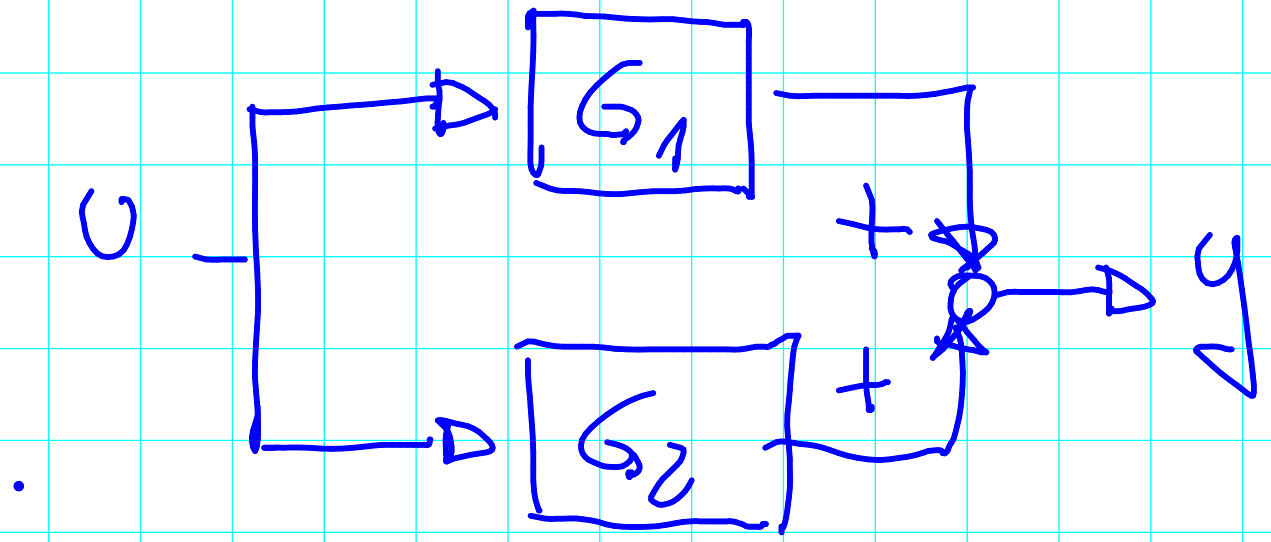
Somma di ~~prodotti~~ potenze di F. semplici con den. di 1° grado

Anticipazione



$$Q = G_1 \cdot U$$

$$Y = G_2 Q = G_2 G_1 U$$



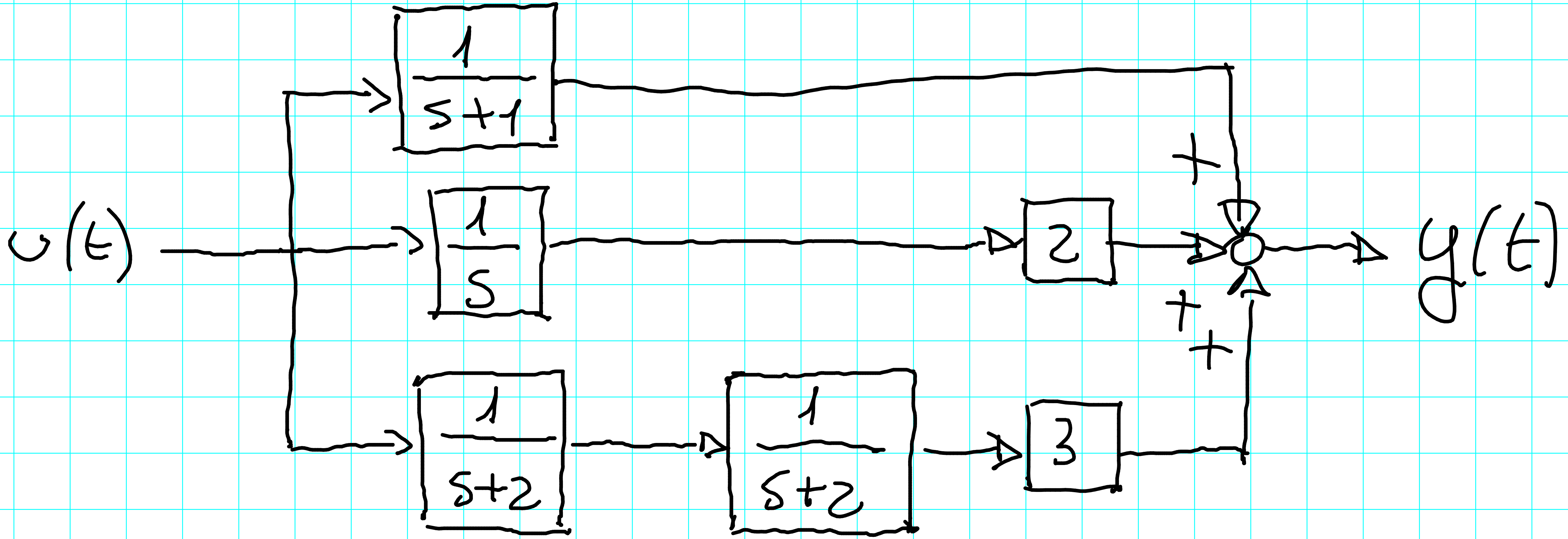
$$Y = G_1 U + G_2 U$$

$$= (G_1 + G_2) U$$

$$y(t) = G(s)\, u(t)$$ scrittura "operatoriale"

Laplace $\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\, \mathcal{L}[u(t)]$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$



Intermezzo:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

ordine 1, $(a\,b\,c)$ scalari
s. proprio

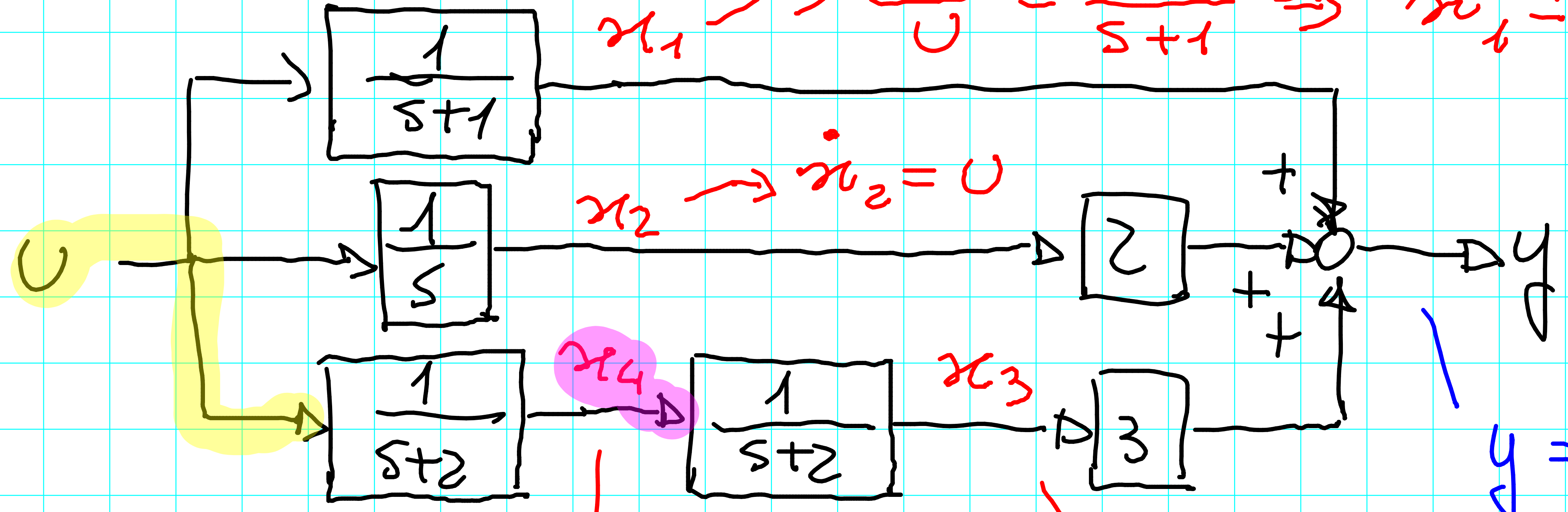
$$G(s) = c(s-a)^{-1}b = \frac{bc}{s-a}$$

Quindi

$$G(s) = \frac{r}{s-p} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = px + ru \\ y = x \end{cases}$$

Applico questo concetto al sistema in questione

$x_1 \rightarrow \frac{X_1}{U} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + u$



$x_2 \rightarrow \dot{x}_2 = u$

$\dot{x}_4 = -2x_4 + u$

$\dot{x}_3 = -2x_3 + x_4$

$y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

Quindi

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} x
$$

autovalori

autovalori multipli $\Rightarrow$ blocco sulla diagonale

Forma di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & 0 \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_p & \bullet & 0 \\ & \lambda_p & \bullet \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \lambda_q & \bullet & & 0 \\ & \lambda_q & \bullet & \\ & & \lambda_q & \bullet \\ 0 & & & \lambda_q \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLOCCO DI JORDAN

$\bullet$ 1 oppure 0

MINIBLOCCO DI JORDAN

generico blocco

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_u & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_u \end{matrix}} & 0 & & & \\ & \ddots & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots \; 1 \\ & & & & \lambda_u \end{bmatrix}$$

Il + piccolo mini blocco di Jordan (di dim. > 1) possibile è

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

studiamolo

Studiamo cioè $e^{\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}t}$

1 miniblocco di dim. 2 o 2 di dim. 1

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}}_{M} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{N}$$

dipende solo da 1 o 0 in pos. (1,2) nel BLOCCO di J

$$e^{\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}t} = e^{(M+N)t} = e^{Mt}e^{Nt} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix} e^{Nt}$$

M ed N commutano ($MN = NM$)

Osservo che N è nilpotente: $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \quad e^{Nt} = I + Nt \text{ E BASTA } = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} = Q$$

In questo caso

miniblocco di dim 2

$Re(\lambda) < 0 \Leftrightarrow Q \to 0$ per $t \to \infty$

$Re(\lambda) > 0 \Rightarrow Q$ diverge " " " " in modo EXP

$Re(\lambda) = 0 \Rightarrow Q$ diverge " " " " " " LIN

Quindi detti λ_i gli autovalori di A

- $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff$ sistema AS
- $\exists i \mid \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \implies$ sistema I
- $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$
  $\exists i \mid \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$,
  ma in tal caso il + grande miniblocco di Jordan ha dim. 1 $\implies$ sistema S
- Altrimenti $\implies$ sistema I

$\square$