26/03/2020

Questa realizzazione è sempre raggiungibile infatti con essa

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & * \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ tale real. si dice

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ

($\exists$ anche quella di osservabilità, vedi libro)

## ES) FdT con cancellazione

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{\overset{b_1}{1}\, s^2 + \overset{b_2}{3} s + \overset{b_3}{2}}{s^3 + \underset{a_1}{8} s^2 + \underset{a_2}{19} s + \underset{a_3}{12}}$$

FCR

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} G(s) \text{ ha cancellazioni} \\ \text{Ho usato la FCR} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (A,b,c,d) \text{ sarà R} \\ \text{e quindi non O} \end{array}$$

(R&O non può essere perché $\exists$ canc.) $\square$

Riassumendo

$(A, b, c, d) \rightarrow \exists !\, G(s)$

$\exists !\, M_R \quad \exists !\, M_O \Rightarrow$ so se il SD è R, O, ...

---

$G(s) \rightarrow \exists\, \infty\, (A, b, c, d)$

(senza cancellazioni)

MINIME (dim $A$ = grado den $G$) R&O ($\nexists$ canc)

NON MINIME ($\exists$ canc)

NR

NO

NRNO

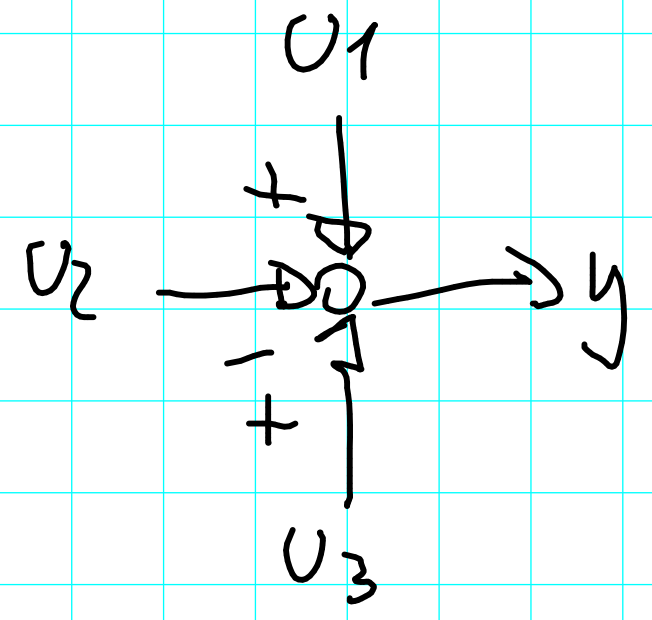
$\square$

# SISTEMI INTERCONNESSI (LTI a TC)

Li rappresentiamo con SCHEMI A BLOCCHI (SB)

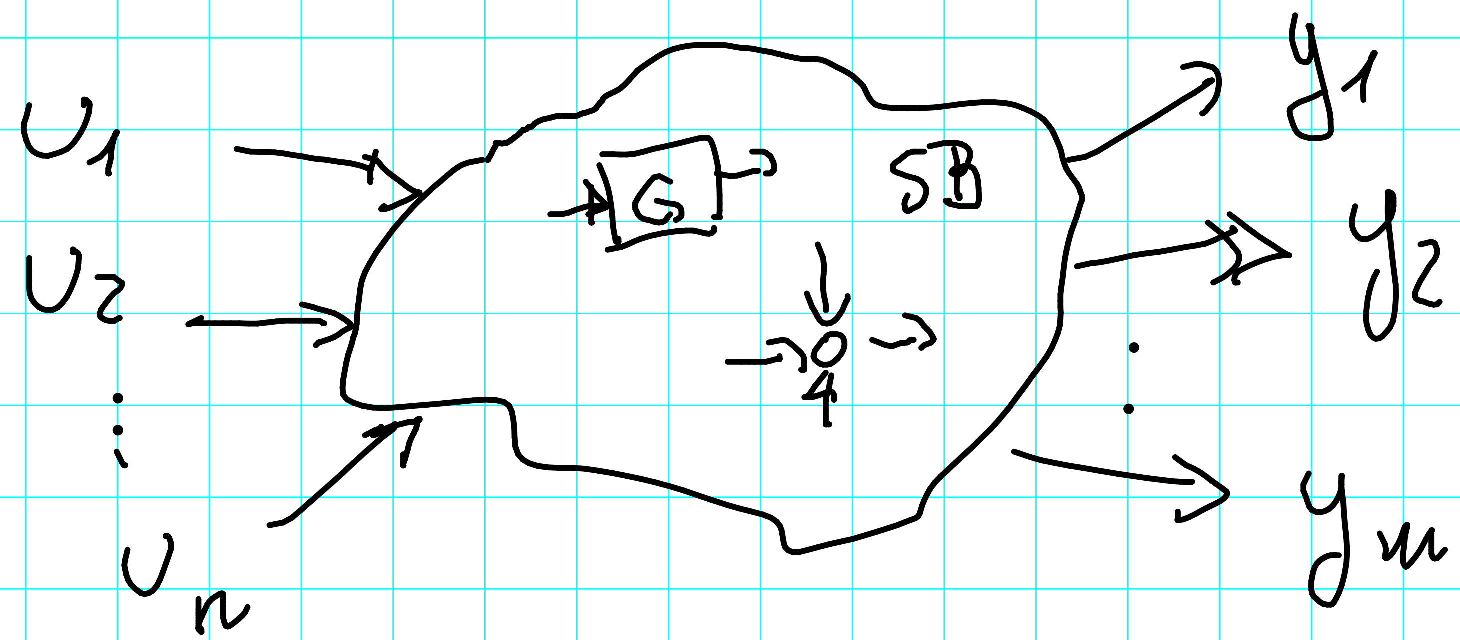
$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$




$$y = u_1 - u_2 + u_3$$

Problema




Ipotesi: tutti i blocchi sono privi di parti nascoste, ovvero tutte le loro FdT hanno num e den COPRIMI

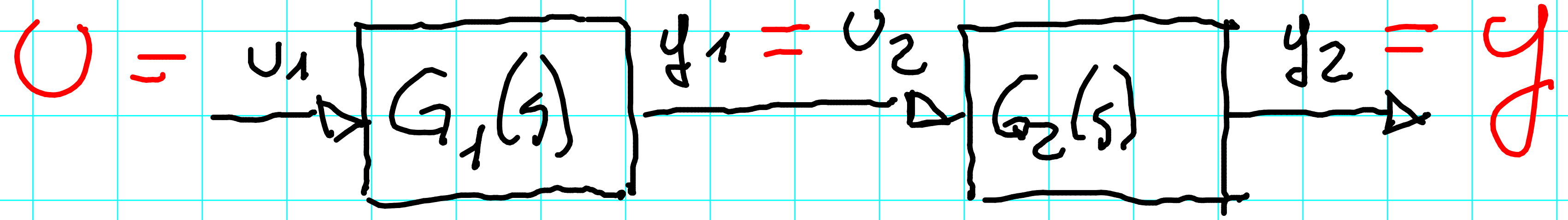
Domande: 1) Come calcolo la generica FdT $Y_i(s)/U_j(s)$?

2) Che relazione c'è tra la stabilità delle singole FdT e quella del sistema complessivo?

3) Posto che i singoli blocchi non hanno p. nascoste, il sistema complessivo può averne?

# ELABORAZIONE degli schemi a blocchi

1) Blocchi in SERIE o cascata:




$$\frac{Y(s)}{U(s)} \; ?$$

$$Y = Y_2 = G_2 U_2 = G_2 Y_1 = G_2 G_1 U_1 = G_2 G_1 U$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = G_2 G_1$$

Scriviamo ora $G_1 = \frac{N_1}{D_1}$ , $G_2 = \frac{N_2}{D_2}$ .

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = G_2 G_1 = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}$$

$N_i$ e $D_i$ sono per ip. coprimi

$N_i$ e $D_j$ non è detto

Quindi

gli AUTOVALORI del sist. complessivo sono

$$\{\text{poli di } G_1\} \cup \{\text{poli di } G_2\}$$

MA possono esserci cancellazioni tra $N_1$ e $D_2$ e/o tra $N_2$ e $D_1$

$\Rightarrow$
- $G_1$ e $G_2$ AS $\Longleftrightarrow$ sist. complessivo AS
- il sist. complessivo può avere p. nascoste

Nello spazio di stato (real. minime quindi R&O)

$$G_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u_1 \end{cases} \qquad G_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u_2 \end{cases}$$

EQ COSTITUTIVE dei blocchi

$$u = u_1 \qquad y_1 = u_2 \qquad y = y_2$$

EQ di connessione

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 + b_2 d_1 u_1$$

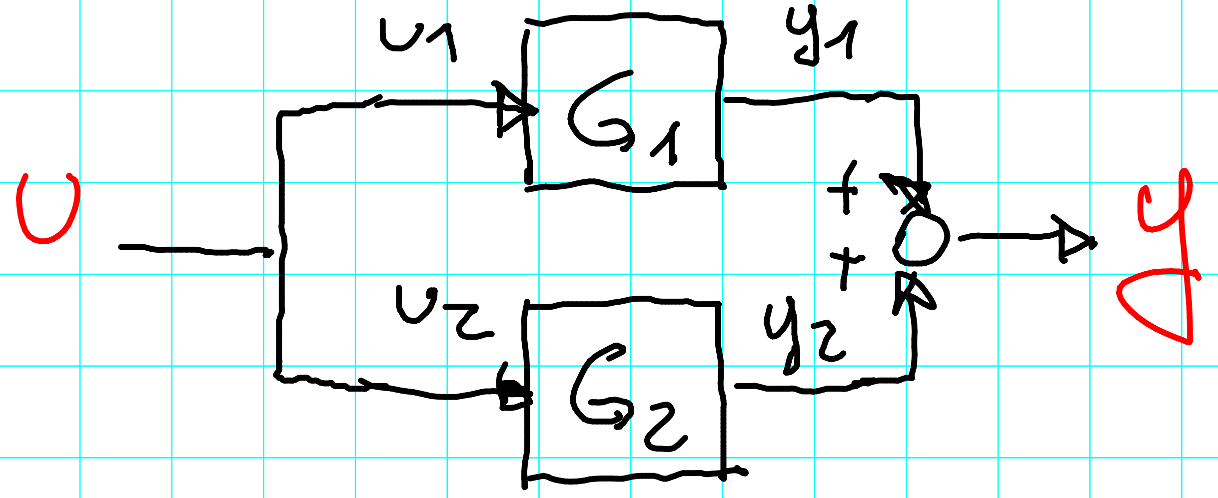
$$y = c_2 x_2 + d_2 y_1 = c_2 x_2 + d_2 c_1 x_1 + d_2 d_1 u$$

Complessivo:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} d_2 c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_1 d_2 u \end{cases}$$

$\square$

## 2) Blocchi in PARALLELO




$$Y = Y_1 + Y_2 = G_1 U_1 + G_2 U_2 = (G_1 + G_2)\, U$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = G_1 + G_2$$

Scrivendo $G_i = \frac{N_i}{D_i} \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_2 D_1 + N_1 D_2}{D_1 D_2}$

Aut. del complessivo $= \{$poli di $G_1\} \cup \{$poli di $G_2\}$

- AS di $G_1$ e $G_2 \Longleftrightarrow$ AS del complessivo
- possono esserci cancellazioni, cioè p. nascoste

NB ce ne sono di sicuro se $D_1$ e $D_2$ non sono coprimi

Nello sp. di stato

$G_1 : (A_1, b_1, c_1, d_1)$ $\quad$ $G_2 : (A_2, b_2, c_2, d_2)$

eq. connessione $\quad u_1 = u \quad u_2 = u \quad y = y_1 + y_2$

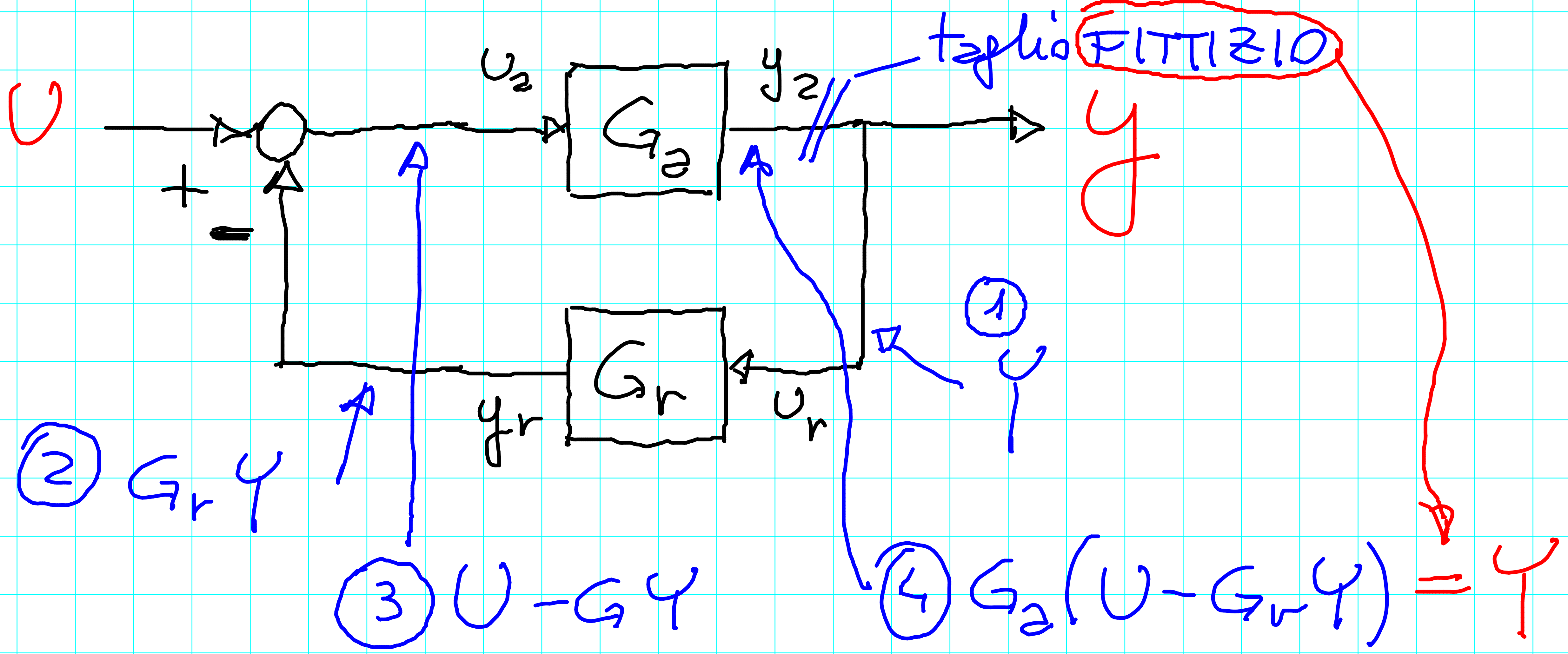
$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u$$
$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u$$
$$y = y_1 + y_2 = c_1 x_1 + d_1 u + c_2 x_2 + d_2 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) u$$

$\square$

# 3) Blocchi in RETROAZIONE o Feedback




a : andata

r : retroazione

Quindi $G_a U = (1 + G_a G_r) Y \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{G_a}{1 + G_a G_r}$

$$\frac{\text{"andata"}}{\text{"}1 + \text{anello"}}$$

Posto $G_a = \frac{N_a}{D_a}$ e $G_r = \frac{N_r}{D_r}$

$$\frac{Y}{U} = \frac{N_a/D_a}{1+\frac{N_a N_r}{D_a D_r}} = \frac{\cancel{D_a} D_r \frac{N_a}{\cancel{D_a}}}{D_a D_r + N_a N_r}$$

$$= \frac{N_a D_r}{D_a D_r + N_a N_r}$$

NON È UNA CANCELLAZIONE
è solo lo stesso polinomio che compare due volte e si elide nel calcolo

- Poli di $G_a$ e $G_r$ $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ Autovalori del complessivo

$\Rightarrow$ AS di $G_a G_r$ né occorre né basta per AS complessivo

- Possono uscire parti nascoste

Nello sp. di stato

$$G_a : (A_a, b_a, c_a, d_a) \qquad G_r : (A_r, b_r, c_r, 0)$$

Almeno uno dei due sistemi strett. proprio è cond SUFF perché l'anello sia ben posto, cioè le eq. che conducono al sistema complessivo ammettano soluzione

eq. connessione $\qquad y = y_a \qquad u_r = y_a \qquad u_a = u - y_r$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 \underset{\overset{\uparrow}{u - y_r}}{u_2} = A_2 x_2 + b_2 u - b_2 \underset{\overset{\uparrow}{c_r x_r}}{y_r}$$

$$= A_2 x_2 + b_2 u - b_2 c_r x_r$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r + b_r \underset{\overset{\uparrow}{y_2}}{u_r} = A_r x_r + b_r (c_2 x_2 + d_2 \overset{\overset{u - y_r}{\downarrow}}{u_2})$$

$$= A_r x_r + b_r c_2 x_2 + b_r d_2 (u - c_r x_r)$$

$$= A_r x_r + b_r c_2 x_2 + b_r d_2 u - b_r d_2 c_r x_r$$

$$y = y_2 = c_2 x_2 + d_2 u_2 = c_2 x_2 + d_2 (u - c_r x_r)$$

$$= c_2 x_2 + d_2 u - d_2 c_r x_r$$

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & -b_2 C_r \\ b_r C_2 & A_r - b_r d_2 C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_r d_2 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} C_2 & -d_2 C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_r \end{bmatrix} + d_2 u
\end{cases}
$$

$\square$