

Fisica Tecnica

Concetti base

Conversioni	
1 atm	101 325 Pa
1 ata	98 066.5 Pa
1 bar	100 000 Pa
1 psi	6895 Pa
<hr/>	
1 kcal	4186 J
<hr/>	
x °C	$x + 273.15$ K
x °F	$\frac{5}{9}(x + 459.67)$ K

Costanti	
Costante dei gas ideali	$R = 8314$ J/kmol K
Entalpia solidif. H ₂ O	$h_{lst,H_2O} = -333$ kJ/kg
Entalpia evaporazione H ₂ O	$h_{lvt,H_2O} = 2501.6$ kJ/kg
Entalpia sublimazione H ₂ O	$h_{svt,H_2O} = 2834.6$ kJ/kg
Pressione punto triplo H ₂ O	$P_0 = 611.2$ Pa
Temperatura punto triplo H ₂ O	$T_0 = 0.01$ °C = 273.16 K
Pressione stato critico H ₂ O	$P_{cr} = 22.09$ MPa
Temperatura stato critico H ₂ O	$T_{cr} = 647.3$ K
Calore specifico ghiaccio	$c_s = 2093$ J/kg K
Volume specifico ghiaccio	$v_s = 0.00109$ m ³ /kg
Calore specifico acqua	$c_s = 4186$ J/kg K
Volume specifico acqua	$v_s = 0.001$ m ³ /kg
Calore specifico medio vapore	$c_p = 2009$ J/kg K

Masse atomiche (kg/kmol):			
H = 1,008	He = 4,003	C = 12,011	N = 14,007
O = 15,999	Ne = 20,18	Ar = 39,95	Kr = 83,798
Masse molecolari:			
H ₂ O = 18,015	aria(79/21) = 28,85	CH ₄ = 16,043	

Sistema termodinamico	Calore	Lavoro	Massa
Adiabatico	no		
Diatermano	sì		
Rigido		no	
Deformabile		sì	
Chiuso (impermeabile)			no
Aperto (permeabile)			sì
Isolato	no	no	no

- Grandezze**
- **Intensive:** non dipendono dall'estensione del sistema (temperatura, pressione, densità);
 - **Extensive:** dipendono dall'estensione del sistema (massa, volume);
 - **Extensive specifiche:** estensiva/estensiva ($v = \frac{V}{M}$).

Legge di Duhem
In un sistema semplice monocomponente il numero di parametri intensivi o estensivi specifici necessari per descriverlo all'equilibrio è 2.

Regola di Gibbs

$$V = C + 2 - F$$

V numero di variabili intensive indipendenti
 C numero di componenti
 F numero di fasi

Ne deriva l'esistenza di una legge di stato:

$$f(P, v, T) = 0$$

Trasformazione	Caratteristiche
Quasi-statica o internamente reversibile	Costituita da una successione di stati di equilibrio; può non essere reversibile
Reversibile	Se percorsa in senso inverso, riporta sistema e ambiente nello stato iniziale
Irreversibile	Non è rappresentabile su un diagramma di stato
Chiusa o ciclica	Gli estremi della trasformazione coincidono
Elementare	Se una delle grandezze di stato si mantiene costante durante la trasformazione

Gas ideali
Un gas può essere considerato ideale per pressioni minori di 10bar.

$PV = nRT = MR^*T$ $Pv = R^*T$	
P	pressione [Pa]
V	volume [m ³]
n	numero di moli [mol]
R	costante universale dei gas ideali 8314 J/kmol K
R^*	$= \frac{R}{M_m} = \frac{nR}{M}$, costante del gas [J/Kg K]
T	temperatura [K]
M_m	massa molecolare

Gas reali
Modello per gas in condizioni di temperatura e pressioni elevate.
Equazione di van der Waals:

$$\left(P + \frac{a}{v_m^2}\right)(v_m - b) = RT$$

Liquidi e solidi

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$$
$$dv = \beta v dT - K_T v dP$$

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad \text{coeff. di dilatazione termica isobaro}$$
$$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \quad \text{coeff. di comprimibilità isoterma}$$

β e K_T possono essere considerati costanti per ampi intervalli di temperatura e di pressione. La precedente relazione differenziale è quindi integrabile e lo stato calcolabile. Un modello semplificato consiste nel considerare liquidi e solidi incompressibili ($v = \text{costante}$).

Principi della termodinamica
Principi di conservazione

- Conservazione della **massa**;
- Conservazione della **energia** (I principio);
- Conservazione della **entropia** (II principio);

Primo principio della termodinamica per sistemi chiusi
Per un sistema semplice all'equilibrio è definita una proprietà intrinseca (funzione di stato) detta energia interna U la cui variazione è il risultato di interazioni del sistema con l'ambiente esterno.
L'energia che è immagazinata in un sistema e che non va a cambiare né l'energia cinetica del centro di massa, né quella potenziale (e neanche l'energia elastica o chimica o elettrica) è chiamata energia interna.

$$\Delta U = Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow}$$

U energia interna del sistema
 Q^{\leftarrow} calore entrante nel sistema
 L^{\rightarrow} lavoro uscente dal sistema

L'energia interna è una grandezza estensiva (additiva):

$$U_z = U_1 + U_2 + \dots$$

Per una trasformazione ciclica:

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$$

Per un sistema isolato:

$$\Delta U_{\text{isolato}} = 0$$

Primo principio in forma differenziale:

$$du = \delta q^{\leftarrow} - \delta l^{\rightarrow}$$

Secondo principio della termodinamica per sistemi chiusi
Per un sistema all'equilibrio esiste una funzione di stato detta **entropia** S la cui variazione per una trasformazione *reversibile* è data da:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q_{rev}^{\leftarrow}}{T}$$

L'entropia è una grandezza estensiva (additiva):

$$S_z = S_1 + S_2 + \dots \quad \Delta S_z = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots$$

La variazione di entropia totale di un sistema isolato è sempre maggiore di zero e tende a zero con il tendere dei processi alla reversibilità:

$$\Delta S_{\text{isolato}} \geq 0$$

In un sistema chiuso il **bilancio entropico** è dato da:

$$\Delta S = S_Q^{\leftarrow} + S_{irr}^{\leftarrow} \quad S_Q^{\leftarrow} \text{ dovuta dallo scambio di calore } Q$$
$$S_{irr}^{\leftarrow} \geq 0 \quad \text{segno } S_Q^{\leftarrow} = \text{segno } Q^{\leftarrow}$$

Trasformazioni

Lavoro termodinamico

$$\delta L^{\rightarrow} = P A \, ds = P \, dV \quad (\text{ sistema cilindro-pistone})$$

$$\delta l^{\rightarrow} = P \, dv \quad (\text{ grandezze specifiche})$$

$$l^{\rightarrow} = \int_i^f P \, dv \quad (\text{ calcolabile conoscendo } P = P(v))$$

Il lavoro (specifico) è pari all'area sottesa (integrale) dal grafico della trasformazione nel piano P-v.

Il lavoro reversibile è maggiore del lavoro irreversibile.

Il lavoro dipende dal percorso: **non** è funzione di stato.

Calori specifici

$$\text{Capacità termica} \quad C_x = \left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_x$$

$$\text{Calore specifico} \quad c_x = \frac{1}{M} \left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_x$$

$$\text{A pressione cost.} \quad c_P = \frac{1}{M} \left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_P = \left(\frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT} \right)_P$$

$$\text{A volume cost.} \quad c_v = \frac{1}{M} \left(\frac{\delta Q^{\leftarrow}}{dT} \right)_v = \left(\frac{\delta q^{\leftarrow}}{dT} \right)_v$$

Inoltre si ha che

$$\text{A pressione cost.} \quad c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$$

$$\text{A volume cost.} \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

Entalpia

L'entalpia è una funzione di stato.

$$h = u + Pv$$

$$dh = du + v \, dP + P \, dv = \delta q^{\leftarrow} + v \, dP$$

$$\delta q^{\leftarrow} = dh - v \, dP$$

Gas ideali ed energia interna

Nei gas ideali, a seguito di evidenze sperimentali, si ha che $u = u(T)$, ovvero l'**energia interna dipende solo dalla temperatura**. Quindi anche l'entalpia, c_v e c_P sono dipendenti solo dalla temperatura e si ha che

$$\text{A pressione cost.} \quad c_P = \left(\frac{dh}{dT} \right)$$

$$\text{A volume cost.} \quad c_v = \left(\frac{du}{dT} \right)$$

Relazione di Mayer

$$c_P = \frac{dh}{dT} = \frac{du + d(Pv)}{dT} = \left(\frac{du}{dT} \right) + \frac{dR^*T}{dT} = c_v + R^*$$

Per i gas **perfetti** (gas ideali per variazioni di temperatura non troppo elevate) vale che:

	c_v	c_p
Gas Monoatomico	$\frac{3}{2}R^*$	$\frac{5}{2}R^*$
Gas Biatomico o Poliatomico lineare	$\frac{5}{2}R^*$	$\frac{7}{2}R^*$
Gas Poliatomico non lineare	$\frac{6}{2}R^*$	$\frac{8}{2}R^*$

Monoatomico	He, Ar, ...
Lineare	O ₂ , N ₂ , H ₂ , CO ₂ , ...
Non lineare	CH ₄ , H ₂ O, ...

Liquido incompressibile ideale $C_v = C_P = c(T)$.

Liquido incompressibile perfetto $C_v = C_P = \text{cost.}$

Politropiche

Data una trasformazione quasi statica per un sistema con un **gas ideale** dove $c_x = \text{cost.}$

$$Pv^n = \text{cost} \quad Tv^{n-1} = \text{cost} \quad \frac{T^n}{P^{n-1}} = \text{cost} \quad PT^{\frac{n}{1-n}} = \text{cost}$$

Trasformazione	c_x	$n = \frac{c_x - c_P}{c_x - c_v}$
Isoterma	$\pm\infty$	1
Isocora	c_v	$\pm\infty$
Isobara	c_P	0
Adiabatica	0	$k = \frac{c_P}{c_v}$

Per $n \neq 1$ (quindi non isoterma) l'integrale del lavoro diventa:

$$l^{\rightarrow} = \int_1^2 P \, dv = \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Per $n = 1$ l'integrale del lavoro diventa:

$$l^{\rightarrow} = \int_1^2 P \, dv = P_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Diagramma T-s

L'area sottesa dalla curva in una trasformazione *internamente reversibile* è uguale al calore scambiato:

$$dS_{rev} = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad Q_{rev} = \int_i^f dQ_{rev} = \int_i^f T(S) \, dS$$

Nel piano T-s tutte le trasformazioni politropiche sono esponenziali:

	$T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_x}}$	
Isoterme	$c_x = \infty$	rette orizzontali
Adiabatiche reversibili	$c_x = 0$	rette verticale
Isocore	$c_v < c_P$	più ripide delle isobare

Per i gas perfetti

Trasformazione	$l = \int P \, dv$	$q = \int dq$
$P = \text{cost}$	$P \Delta v$	$c_P \Delta T$
$v = \text{cost}$	0	$c_v \Delta T$
$T = \text{cost}$	$R^* T \ln \frac{v_2}{v_1} = -R^* T \ln \frac{P_2}{P_1}$	$R^* T \ln \frac{v_2}{v_1} = -R^* T \ln \frac{P_2}{P_1}$
$dQ = 0$	$-c_v \Delta T$	0
$c_x = \text{cost}$	$(c_x - c_v) \Delta T$	$c_x \Delta T$

Per i gas perfetti

$$\Delta u = c_v \Delta T \quad \Delta h = c_P \Delta T$$

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$= c_P \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$= c_P \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Per i liquidi incompressibili

Se perfetti:

$$\Delta u = c \Delta T \quad \Delta s = c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Se ideali $c_P = c(T)$, $\beta = 0$ e $K_T = 0$:

$$dh = c(T) \, dT + v \, dP \quad ds = c(T) \frac{dT}{T}$$

Se perfetti:

$$\Delta h = c \Delta T + v \Delta P$$

Miscelamenti

In caso di miscelazione **adiabatica** di più gas:

- Isobara: $\Delta H = 0$
- Isocora: $\Delta U = 0$

Legge di **Dalton**: il volume di una miscela di gas è uguale alla somma dei volumi che ognuno dei gas avrebbe se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e pressione della miscela.

Legge di **Dalton**: la pressione di una miscela di gas è uguale alla somma delle pressioni che ognuno dei gas avrebbe se fosse da solo nelle stesse condizioni di temperatura e volume della miscela.

Macchina termodinamica

La macchina termodinamica è un sistema termodinamico composto ed isolato che nel caso più semplice è realizzato da

- due serbatoi di calore
- un serbatoio di lavoro
- una macchina ciclica che è in grado di interagire con continuità con i serbatoi di calore e lavoro

Serbatoio di calore sistema termodinamico che scambia solo calore con l'esterno senza alterare il suo stato interno; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche internamente reversibili.

Serbatoio di lavoro sistema termodinamico che scambia solo lavoro con l'esterno senza alterare il suo stato interno; gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche internamente reversibili.

Risoluzione problemi macchine termiche

Bisogna impostare e risolvere il sistema contenente le equazioni di bilancio

$$\begin{cases} \Delta U_Z = 0 \\ \Delta S_Z = S_{irr} \end{cases}$$

Per macchina motrice con masse infinite:

$$\begin{cases} -Q_C + Q_F + L = 0 \\ -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

Per macchina operatrice con masse infinite:

$$\begin{cases} Q_C - Q_F - L = 0 \\ \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr} \end{cases}$$

Rendimenti macchine termiche

Macchina motrice	$\eta = \frac{L}{Q_C}$	$\eta_{II} = \frac{\eta}{\eta_{rev}} = \frac{L}{L_{rev}}$
→ serbatoi a massa infinita	$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F}{Q_C} S_{irr}$	
↳ reversibile ($S_{irr} = 0$)	$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$	

Macchina operatrice	(serbatoi a temp. cost.)
→ frigorifera	$\varepsilon_f = \frac{Q_F}{L} \quad \eta_{II} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rev}} = \frac{L_{rev}}{L}$
↳ reversibile	$\varepsilon_{f,rev} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$
→ pompa di calore	$\varepsilon_{pdc} = \frac{Q_C}{L}$
↳ reversibile	$\varepsilon_{pdc,rev} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$

Sistemi aperti

Bilancio di massa

$$\frac{dm}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow}$$

Equazione di continuità

$$\dot{m} = \rho w \Omega$$

Bilancio di energia

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{E}_i^{\leftarrow}$$

dove E rappresenta l'energia associata al trasporto di massa e al lavoro e calore scambiato

Lavoro di pulsione

$$L_P^{\leftarrow} = - \int_{V+V_m}^V P dV = PV_m = m_i P v_i$$

Energia associata al trasporto di massa

$$E_m = \sum_i m_i^{\leftarrow} \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right)$$

Bilancio energetico

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right) + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow}$$

Bilancio di entropia

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow} s_i + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr}$$

Regime stazionario

$$\dot{m}_{ingresso}^{\leftarrow} = -\dot{m}_{uscita}^{\leftarrow}$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} \left[(h_i - h_u) + g(z_i - z_u) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2} \right] + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

Macchina aperta

Turbina, compressore e pompa

$$\dot{m}^{\leftarrow} (h_i - h_u) - \dot{L}_e^{\rightarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

Scambiatore di calore

$$\dot{m}^{\leftarrow} (h_i - h_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{Q^{\leftarrow}} + \dot{S}_{irr} = 0$$

Diffusore (w↓) e ugello (w↑)

$$(h_i - h_u) + \frac{(w_i^2 - w_u^2)}{2} = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

Valvola di laminazione

$$(h_i - h_u) = 0$$

$$\dot{m}^{\leftarrow} (s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

Rendimento isoentropico

Turbina

$$\eta_{is,turbina} = \frac{\dot{L}_{reale}^{\rightarrow}}{\dot{L}_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{h_1 - h_{2,reale}}{h_1 - h_{2,ideale}}$$

Compressore

$$\eta_{is,compressore} = \frac{\dot{L}_{ideale}^{\rightarrow}}{\dot{L}_{reale}^{\rightarrow}} = \frac{h_1 - h_{2,ideale}}{h_1 - h_{2,reale}}$$

Lavoro specifico per unità di massa fluente

Dopo vari passaggi si ottiene che

$$-\delta l_e^{\rightarrow} = v dP + T ds_{irr}$$

Integrando fra la sezione di ingresso e quella di uscita:

$$l_e^{\rightarrow} = - \int_i^u v dP - \int_i^u T ds_{irr}$$

dove il secondo termine è l'energia dissipata per irreversibilità interna.

Sistemi bifase

Le grandezze estensive specifiche sono la media pesata sulle masse:

$$m = m_{\alpha} + m_{\beta} \quad E = E_{\alpha} + E_{\beta}$$

$$e = \frac{m_{\alpha}}{m} e_{\alpha} + \frac{m_{\beta}}{m} e_{\beta}$$

$$\text{frazione massica: } x_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{m} \quad x_{\beta} = \frac{m_{\beta}}{m}$$

Dalla regola di Gibbs il numero di variabili intensive indipendenti per bifase monocomponente è 1, pressione e temperatura non sono indipendenti.

La transizione di fase è a P costante: $dh = \delta q$.

Stati di aggregazione

Liq. sottoraffreddato	Non in procinto di evaporare
Liq. saturo	In procinto di evaporare
Vapore umido	Stato di transizione
Vapore saturo	In procinto di condensazione
Vapore surriscaldato	Non in procinto di condensazione

Entalpia di transizione

$$h_{solido} < h_{liquido} < h_{vapore}$$

Per l'acqua allo stato triplo:

$$\text{Solidificazione} \quad h_{lst,H_2O} = -333 \text{ kJ/Kg}$$

$$\text{Evaporazione} \quad h_{lvt,H_2O} = 2501.6 \text{ kJ/Kg}$$

Titolo di vapore, liquido e solido

$$x = x_v = \frac{m_v}{m} \quad x_l = \frac{m_l}{m} \quad x_s = \frac{m_s}{m}$$

$$x_v + x_l + x_s = 1$$

Per interpolare nelle tabelle:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$Y = Y_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1)$$

Approssimazioni per entropia e entalpie di solidi e liquidi

Formule valide per l'acqua, partendo da uno stato di riferimento, per esempio il punto triplo.

Allo stato solido:

$$h = h_0 + h_{lst} + c_s (T - T_0) + v(P - P_0)$$

$$s = s_0 + s_{lst} + c_s \ln \frac{T}{T_0} = s_0 + \frac{h_{lst}}{T_0} + c_s \ln \frac{T}{T_0}$$

Allo stato liquido:

$$h = h_0 + c_l(T - T_0) + v(P - P_0)$$

$$s = s_0 + c_l \ln \frac{T}{T_0}$$

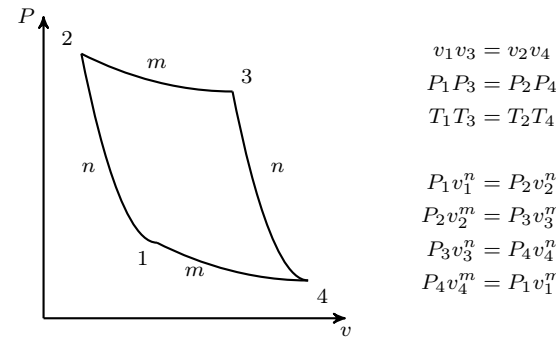
Con le tabelle è possibile trovare h per l'acqua sottoraffreddata:

$$h = h_{ls}(P_{sat}(T)) + v(P - P_{sat}(T))$$

dove $v = v_{ls}(P_{sat}(T))$. Di solito il termine $v\Delta P$ è trascurabile.

Cicli simmetrici

Un ciclo formato da 4 politropiche, uguali a due a due.

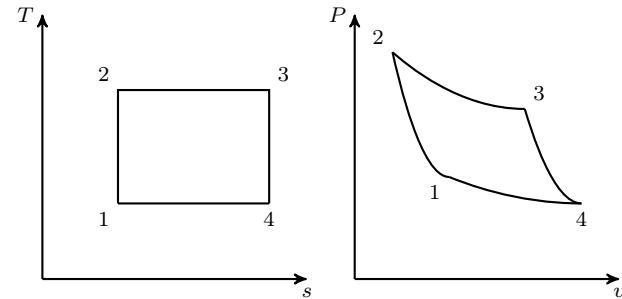


Ciclo Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo simmetrico composto da due isoentropiche (adiabatiche reversibili) e due isoterme.

Il rendimento ciclo di Carnot vale:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$



Irreversibilità

Se **irreversibilità esterna** ($T_1 > T_F$ e $T_2 < T_C$):

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C} > \eta_{ciclo} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Bilancio entropico su tutta macchina termica:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$$

Bilancio entropico su macchina ciclica (ciclo di Carnot):

$$\frac{Q_C}{T_3} = \frac{Q_F}{T_1} = \Delta S$$

Da cui si ricava:

$$Q_C \left(\frac{T_1}{T_F T_3} - \frac{1}{T_C} \right) = S_{irr}$$

Se **irreversibilità interna** ($s_1 < s_2$ e $s_3 < s_4$):

Bilancio entropico su tutta macchina termica:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{irr}$$

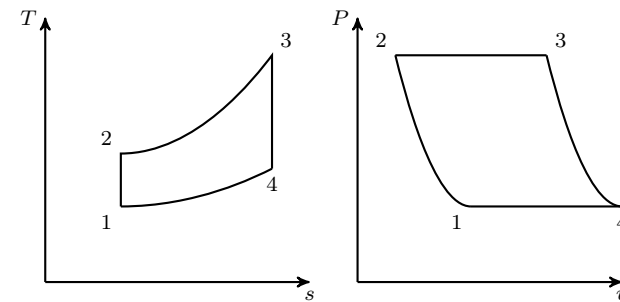
Bilancio entropico su macchina ciclica:

$$\frac{Q_C}{T_C} = S_3 - S_2 \quad \text{e} \quad \frac{Q_F}{T_F} = S_4 - S_1$$

Da cui deriva: $S_2 - S_3 + S_4 - S_1 = S_{irr} > 0$

Ciclo Joule-Brayton

Ciclo simmetrico costituito da due *isoentropiche* e due *isobare*. Applicazioni: impianti a turbina a gas con ciclo chiuso o aperto.



Nell'ipotesi di *gas perfetto* e *ciclo ideale simmetrico*:

$$\dot{Q}_c = \dot{m}(h_3 - h_2)$$

$$\dot{Q}_f = \dot{m}(h_4 - h_1)$$

$$\dot{Q}_c = \dot{m}c_p(T_3 - T_2)$$

$$\dot{Q}_f = \dot{m}c_p(T_4 - T_1)$$

Il rendimento termodinamico del ciclo vale:

$$\eta_{JB} = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Definendo il rapporto di compressione: $r_p = \frac{P_2}{P_1}$

$$\eta_{JB} = 1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\min \eta \text{ per } r_p = 1 \quad \max \eta \text{ per } T_2 \rightarrow T_3 \Rightarrow r_p^{\max} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

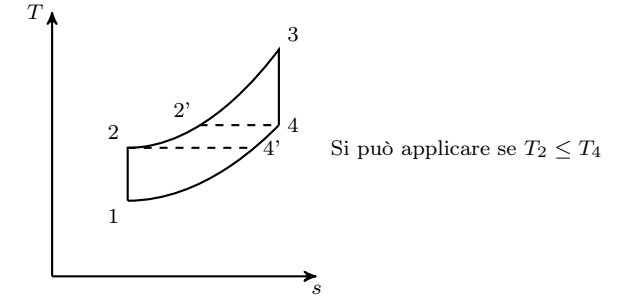
Lavoro specifico per ciclo Joule-Brayton

$$l = l_T - l_c = c_p(T_3 - T_4) - c_p(T_2 - T_1)$$

Il lavoro massimo si ha in corrispondenza di:

$$r_p^{\text{opt}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = \sqrt{r_p^{\max}} \quad \text{e} \quad T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

Ciclo Joule-Brayton con rigenerazione

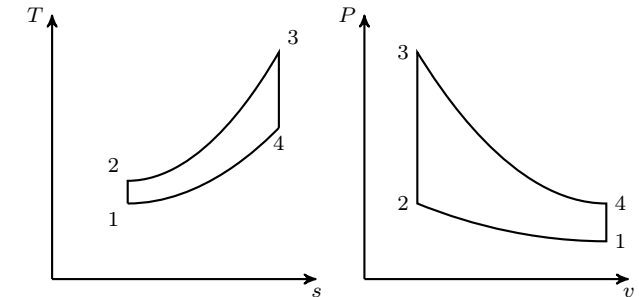


Il rendimento nel caso $T_{2'} = T_4$ è:

$$\eta_{\text{rig}} = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_c} = \frac{\dot{L}_T - \dot{L}_c}{\dot{Q}_c} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{T_2 T_1}{T_3 T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

Ciclo Otto

Ciclo simmetrico costituito da due *isoentropiche* e due *isocore*. Applicazioni: prevalentemente in campo automobilistico. r_v tra 6 e 10 per evitare autocombustione della miscela in 1-2.



Il rendimento del ciclo Otto nel caso di *gas perfetto*:

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{q_f}{q_c} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Dal bilancio entropico tra 1 e 2 vale: $\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{c_v} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{R^*}$

Chiamando rapporto di compressione volumetrico $r_v = \frac{V_1}{V_2}$

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - r_v^{1-k}$$

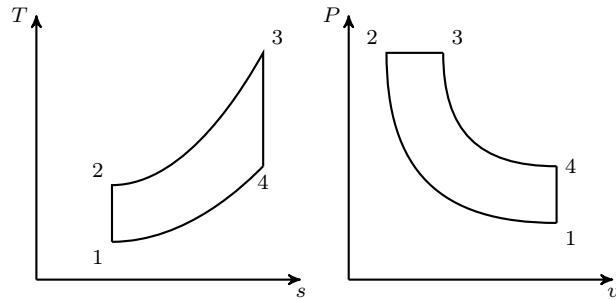
Lavoro specifico per il ciclo Otto

$$l = c_v(T_3 - T_4) - c_v(T_2 - T_1) = c_v T_3 \left(1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \right) - c_v T_1 (r_v^{k-1} - 1)$$

$$r_v^{\text{opt}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2(k-1)}}$$

Ciclo Diesel

Ciclo **NON simmetrico** costituito da due *isoentropiche*, una *isobara* e una *isocora*. Applicazioni: motore endotermico.



Nell'ipotesi di *gas perfetto* e *ciclo ideale*:

$$\eta_{diesel} = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{c_v T_1 (\frac{T_4}{T_1} - 1)}{c_p T_2 (\frac{T_3}{T_2} - 1)}$$

Rapporto compressione volumetrico: $r = \frac{V_1}{V_2}$

Rapporto di combustione: $z = \frac{V_3}{V_2}$

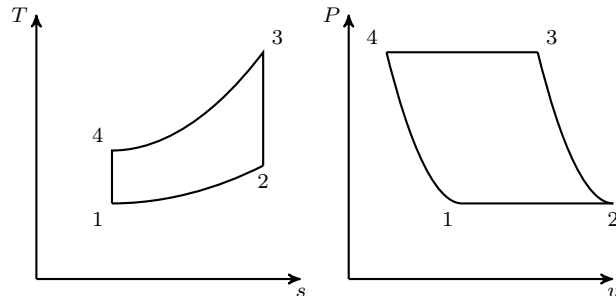
$$\eta_{diesel} = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \frac{1}{k} \frac{z^k - 1}{z - 1}$$

Confronto ciclo Otto - ciclo Diesel

- Motore Otto è più leggero a parità di potenza
- Motore Otto ha frequenza di rotazione maggiore
- Motore Otto ha minore rumorosità
- Motore Diesel ha miglior rendimento a causa del maggior rapporto di compressione (circa il doppio rispetto a motore Otto)
- Motore Diesel ha miglior rendimento al diminuire del carico (più facilmente regolabile in potenza)
- Motore Diesel utilizza un combustibile meno pregiato del motore Otto

Ciclo Joule-Brayton inverso

Ciclo frigorifero inverso costituito da due *isoentropiche* e due *isobare*.



Se il ciclo è simmetrico:

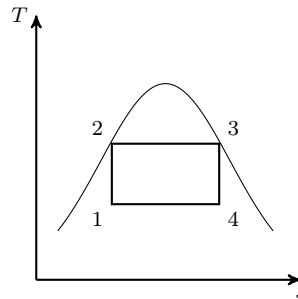
$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c - \dot{Q}_f} = \frac{T_2}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_4 - T_1} = \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1}$$

Alta efficienza per $r_p \rightarrow 1$.

Altri cicli

- Ciclo Stirling: due *isoterme* e due *isocore*;
- Ciclo Ericsson: due *isoterme* e due *isobare*;

Ciclo Carnot a vapore



Vantaggi:

- L'isobara nel bifase è anche isoterma (meno irreversibilità);
- La transizione di fase aumenta l'energia specifica scambiata lungo le isoterme;

Svantaggi:

- Compressione 1 - 2 di un bifase difficile da realizzare e soggetta a molte irreversibilità;
- L'espansione 3 - 4 conviene se $x_4 < 0.9$.

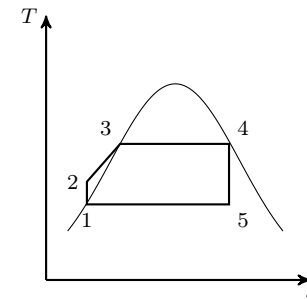
Fluidi di lavoro in cicli a vapore

- Elevata massa volumica e entalpia di transizione di fase \Rightarrow ridurre la portata di fluido;
- Elevata temperatura critica \Rightarrow al punto critico $h_{lvt} = 0$;
- Temperatura del punto triplo inferiore a quella minima del ciclo \Rightarrow evitare fase solida;
- Fluido non corrosivo \Rightarrow ridurre i costi e manutenzione;
- Fluido non tossico \Rightarrow ridurre i rischi ambientali;
- Chimicamente stabile \Rightarrow aumentare sicurezza impianto;
- Facilmente reperibile e di basso costo;
- Elevata pendenza della curva limite superiore in $T - s \Rightarrow$ vapore in uscita con elevato titolo;
- Pressione di condensazione > 1 atm \Rightarrow evitare infiltrazioni di gas incondensabili;

Esempi di fluidi adatti:

- Ciclo motore: acqua
- Ciclo frigorifero:
 - Ammoniaca $\text{NH}_3 \Rightarrow$ tossico;
 - Clorofluorocarburi (CFC o freon) \Rightarrow dannosi per l'ozono;
 - Clorofluoroidrocarburi (HCFC) o fluoroidrocarburi (HFC) \Rightarrow meno dannosi per l'ozono ($R134a$);

Ciclo Rankine a vapore saturo



- Trasformazione 1-2: compressione isoentropica (pompa)
 Trasformazione 2-4: riscaldamento isobaro (bruciatore)
 Trasformazione 4-5: espansione isoentropica (turbina)
 Trasformazione 5-1: raffreddamento isobaro (condensatore)

Rendimento ciclo Rankine a vapore saturo:

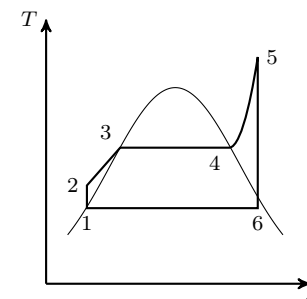
$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{m}(h_5 - h_1)}{\dot{m}(h_4 - h_2)} = 1 - \frac{h_5 - h_1}{h_4 - h_2}$$

Per il calcolo del salto entalpico in pompa essendo $dh = T ds + v dP$ ma $ds = 0$ e fluido incompressibile:

$$h_2 - h_1 = v(P_2 - P_1)$$

Il ciclo Rankine a vapore saturo non viene utilizzato perché all'uscita dalla turbina il titolo non è sufficientemente alto (si vorrebbe avere titolo superiore a 0.9).

Ciclo Rankine con surriscaldamento



- Trasformazione 1-2: compressione isoentropica (pompa)
 Trasformazione 2-3: riscaldamento isobaro (bruciatore)
 Trasformazione 3-4: espansione isoentropica (turbina)
 Trasformazione 4-5: surriscaldamento isobaro (bruciatore)
 Trasformazione 5-6: espansione isoentropica (turbina)
 Trasformazione 6-1: raffreddamento isobaro (condensatore)

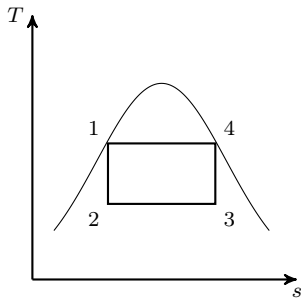
Rendimento ciclo Rankine:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{m}(h_6 - h_1)}{\dot{m}(h_5 - h_2)} = 1 - \frac{h_6 - h_1}{h_5 - h_2}$$

Soluzioni per aumento rendimento ciclo Rankine

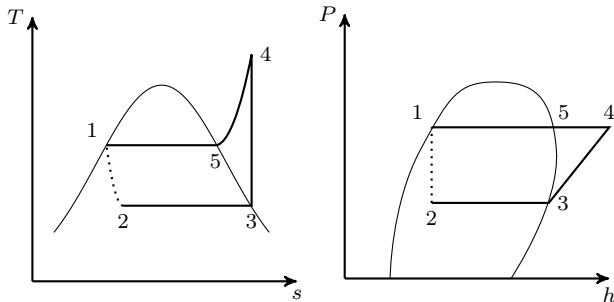
- Abbassamento della pressione di condensazione \Rightarrow maggior lavoro prodotto (ma anche più calore richiesto all'uscita della pompa, titolo minore in uscita dalla turbina e rischio di infiltrazioni se pressione di condensazione minore pressione atmosferica)
- Aumento della temperatura finale di surriscaldamento \Rightarrow aumento di lavoro prodotto (ma anche aumento calore richiesto) e titolo in uscita dalla turbina più alto.
- Aumento della pressione di vaporizzazione (a parità di temperatura massima) \Rightarrow stesso lavoro e meno calore in uscita durante condensazione (ma anche titolo minore in uscita da turbina)
- Surriscaldamenti ripetuti con espansioni in più stadi \Rightarrow permettono di aumentare lavoro e titolo in uscita da turbina
- Rigenerazione \Rightarrow si estrae vapore dalla turbina e si mette a contatto con il liquido a bassa temperatura
- Cogenerazione \Rightarrow si utilizza vapore in uscita da turbina per teleriscaldamento o per altri scopi

Ciclo Carnot inverso a vapore



- L'espansione 1 - 2 non è problematica;
- La compressione 3 - 4 può condurre ad una elevata erosione del compressore;

Ciclo frigorifero a vapore



L'espansione 1 - 2 isentropica è sostituita da un'espansione adiabatica isoentalpica (valvola di laminazione).

Ripasso analisi

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} T = \text{grad } T = \hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v}$$

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = \text{laplaciano di } T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Conduzione

Trasferimento di energia per effetto dell'interazione delle particelle di una sostanza dotata di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia. Può avvenire nei solidi, liquidi e gas.

Postulato di Fourier

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$$

Equazione di Fourier

$$\frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$

\vec{q} vettore flusso di calore areico

k conduttività termica

σ potenza generata nell'unità di volume

$\rho = \frac{1}{v}$ massa volumica

Casi particolari equazione di Fourier

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Assenza generazione potenza}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0 \quad \text{Regime stazionario (eq. Poisson)}$$

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{Assenza generazione e regime stazionario}$$

Coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(x, y, z, t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Parete piana infinita in $y - z$ in regime stazionario

$$T = -\frac{\sigma}{2k} x^2 + Ax + B \quad \dot{q} = \sigma x - Ak$$

Lastra piana senza generazione di potenza

Avendo $T = T_1$ in $x = 0$ e $T = T_2$ in $x = s$ (con s lo spessore della lastra piana) si ha che:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{s} x + T_1 \quad \dot{q} = -k \left(\frac{T_2 - T_1}{s} \right)$$

$$\text{Ponendo } R_c = \frac{s}{A \cdot k} \quad \text{si ha che } \dot{Q}_{cond} = -\frac{\Delta T}{R_c}$$

Coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(r, \varphi, z, t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cilindro pieno o cavo di altezza infinita

Supponendo $T = T(r)$ si ha che, in regime stazionario:

$$T = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + A \ln\left(\frac{r}{B}\right) = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + A \ln(r) + C$$

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2} r - \frac{k}{r} A$$

Barra cilindrica piena con generazione di potenza

Ponendo come condizione $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ per $r = 0$ e $T = T_2$ per $r = R$ si ha che:

$$T = \frac{\sigma}{4k} (R^2 - r^2) + T_2 \quad \dot{q}_{areico} = \frac{\sigma}{2} r$$

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \pi r^2 \sigma$$

Cilindro cavo senza generazione di potenza

Ponendo $T = T_i$ per $r = R_i$ e $T = T_e$ per $r = R_e$ si ottiene

$$T = T_i + \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) \quad \dot{q}_{areico} = k \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{r}$$

$$\dot{q}_{\text{per unità di lunghezza}} = \frac{2\pi k}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} (T_i - T_e)$$

$$\text{Ponendo } R_{cil} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi L k} \quad \text{si ha che } \dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{cil}}$$

Coordinate sferiche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\sigma}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sfera piena o cava

Supponendo $T = T(r)$ e regime stazionario si ha che

$$T = -\frac{\sigma}{6k} r^2 + \frac{A}{r} + B$$

Analogamente al caso cilindrico si ha che:

$$R_{sfera} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2 k} \quad \dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{R_{sfera}}$$

Convezione

Trasferimento di energia tra una superficie solida e un fluido adiacente in movimento.

Convezione forzata Avviene quando il fluido è forzato a scorrere su una superficie da mezzi esterni

Convezione naturale Avviene quando il moto del fluido è causato da forze ascensionali che sono indotte dalle differenze di densità dovute alla variazione di temperatura del fluido in un campo gravitazionale

Equazione generale

$$\dot{q} = h \cdot (T_s - T_f)$$

h	coefficiente convettivo
T_s	temperatura superficie
T_f	temperatura fluido

$$\text{Ponendo } R_{conv} = \frac{1}{h \cdot A} \quad \text{si ha che} \quad \dot{Q}_{conv} = - \frac{\Delta T}{R_{conv}}$$

Raggio critico di isolamento

Considerando gusci cilindrici aventi come utimo strato uno strato di isolante soggetto a fenomeni convettivi.

$$R_{tot} = R_{isol} + R_{conv} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi Lk} + \frac{1}{2\pi R_e Lh}$$

R_e	raggio esterno isolante
R_i	raggio interno isolante

Si ha che inizialmente R_{tot} decresce all'aumentare dello spessore di isolante. Si ha R_{tot} minimo quando $R_e = R_{critico} = \frac{k}{h}$.

Coefficiente convettivo

Fluido	$h \quad \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$
gas stagnante	5–50
acqua stagnante	100
gas in moto	50–1000
olio minerale	50–3000
acqua in moto	200–10 000
acqua ebollizione/condensazione	1000–100 000
metalli liquidi	10 000–100 000

Il coefficiente convettivo non è una proprietà della materia e dipende da:

ρ	densità
μ	viscosità
c_p	cal. spec. pressione cost.
k	conduttività
w	velocità
D	diametro equivalente

Numero di Nusselt

$$Nu = \frac{hD}{k} \left(= \frac{h\Delta T}{\frac{k}{D}\Delta T} \right)$$

Può essere interpretato come rapporto tra potenza termica scambiata per convezione e potenza termica scambiata per conduzione nello strato limite.

Numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} \left(= \frac{F_{inerzia}}{F_{viscose}} \right)$$

Può essere interpretato come rapporto tra la risultante delle forze di inerzia e la risultante delle forze viscose.

Valori tipici di Reynolds

Moto in un condotto:

↳ laminare se $Re < 2000$, turbolento se $Re > 2500$

Moto lungo lastra piana:

↳ laminare se $Re < 5 \cdot 10^5$, turbolento se $Re > 5 \cdot 10^5$

Moto attorno ad un cilindro:

↳ laminare se $Re < 2 \cdot 10^5$, turbolento se $Re > 2 \cdot 10^5$

Numero di Prandtl

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

Si ottiene dividendo $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (viscosità cinematica, ν) per $a = \frac{k}{\rho c_p}$ (diffusività termica, a).

Valori tipici di Prandtl

gas ideali	0.7
acqua	2–10
metalli liquidi	0.005–0.03

Temperature di valutazione dei parametri

Corpo immerso

$$T_{film} = \frac{T_p + T_\infty}{2} \quad \text{oppure} \quad T_{asintotica} = T_\infty$$

Convezione forzata in condotto

$$\text{Temp. di miscelamento adiabatico} \quad T_f = \frac{\int_A \rho w c_p T \, dA}{\int_A \rho w c_p \, dA}$$

Flusso all'interno di tubi

In ogni sezione w varia da un valore pari a zero sulla parete fino ad un valore massimo sull'asse del tubo. In ogni sezione T varia da un valore sulla parete fino ad un valore maggiore (o inferiore) sull'asse del tubo, a seconda se il processo sia di riscaldamento o raffreddamento.

Velocità media

La velocità media si ricava dal principio di conservazione della massa.

$$w_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_t} \quad \text{con} \quad A_t = \pi \frac{D^2}{4}$$

Temperatura media

La temperatura media si ricava dal principio di conservazione dell'energia.

$$\dot{E} = \dot{m} c_p T_m = \int_{\dot{m}} c_p T \partial \dot{m} = \int_{A_t} c_p T (\rho w \, dA_t)$$

Condizioni al contorno

Siano T_s la temperatura superficiale del tubo, A_s l'area superficiale del tubo, T_m temperatura media del fluido di una certa sezione del tubo.

$$T_s = \text{cost} \quad \text{oppure} \quad \dot{q} = \text{cost}$$

Le due condizioni non possono essere contemporaneamente presenti.

Flusso di calore costante

$$\dot{q}_s = \text{cost} \rightarrow \dot{Q}_s = \dot{q}_s \cdot A_s = \dot{m} c_p (T_u - T_i)$$

Da cui deriva

$$T_u = T_i + \frac{\dot{q}_s A_s}{\dot{m} c_p}$$

Ma essendo $\dot{q}_s = h(T_s - T_m)$

$$T_s = T_m + \frac{\dot{q}_s}{h}$$

Nota come T_m non è costante ma dipende dalla distanza dall'ingresso del tubo e si può calcolare usando l'equazione precedente che lega T_u a T_i , considerando solo parte del tubo. La differenza $(T_s - T_m)$ resta invece costante.

Temperatura superficiale costante

$$\ln\left(\frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}\right) = - \frac{h A_s}{\dot{m} c_p}$$

Ma anche

$$\dot{Q} = h \cdot A_s \cdot \Delta T_{ml} \quad \text{con} \quad \Delta T_{ml} = - \frac{T_u - T_i}{\ln\left(\frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}\right)}$$

Caduta di pressione

$$\Delta P = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho w_m^2}{2}$$

Dove f è il *fattore d'attrito*.

$$\text{Potenza pompaggio} \quad \dot{L}_p = \frac{\dot{m} \Delta P}{\rho} = w_m A_t \Delta P$$

Convezione forzata

$$Nu = A \cdot Re^\alpha \cdot Pr^\beta$$

I parametri Re e Pr vanno valutati alla giusta temperatura (che può essere di parete, asintotica, di film, di miscelamento adiabatico).

Moto all'interno di un condotto circolare

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{se laminare}$$

$$f = 0.184 Re^{-0.2} \quad \text{se turbolento}$$

$\text{Nu}_D = 3.66$	laminare con $T_p = \text{cost}$
$\text{Nu}_D = 4.36$	laminare con $\dot{q} = \text{cost}$
$\text{Nu}_D = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.3}$	turbolento con $\text{Re} > 10^4$ $0.7 < \text{Pr} < 160$ (raffr.)
$\text{Nu}_D = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4}$	turbolento con $\text{Re} > 10^4$ $0.7 < \text{Pr} < 160$ (risc.)
$\text{Nu}_D = 0.027 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.333} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$	turbolento con $\text{Re} > 10^4$ $0.7 < \text{Pr} < 16700$

Le proprietà termofisiche sono valutate alla temperatura di miscelamento adiabatico.

Moto attorno ad un cilindro

Relazione di Hilpert

$$\text{Nu}_D = C \text{Re}^m \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Re	C	m
0.4–4	0.989	0.330
4–40	0.911	0.385
40–4000	0.683	0.466
4000–40 000	0.193	0.618
40 000–400 000	0.027	0.805

Le proprietà termofisiche sono valutate alla temperatura di film.

Flusso su lastra piana interamente riscaldata

Si suppone temperatura costante su tutta la piastra

$$\begin{aligned} \text{Nu}_L &= 0.664 \text{Re}^{0.5} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} && \text{laminare } \text{Re} < 5 \cdot 10^5 \\ \text{Nu}_L &= 0.037 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} && \text{turbolento } 0.6 < \text{Pr} < 60 \\ &&& 5 \cdot 10^5 < \text{Re} < 10^7 \end{aligned}$$

Convezione naturale

Numero di Grashof

$$\text{Gr} = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T D^3}{\mu^2}$$

Può essere interpretato come il rapporto fra le forze di galleggiamento ed il quadrato della risultante delle forze viscos.

Moto lungo superficie verticale

$$\begin{aligned} \text{Gr}_L < 10^9 &&& \text{moto laminare} \\ \text{Gr}_L > 10^9 &&& \text{moto turbolento} \end{aligned}$$

Numero di Peclet

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{wD}{a}$$

Numero di Rayleigh

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g \beta \Delta T D^3}{a \nu}$$

Alcune correlazioni

Geometria	D	Ra	Nu
Piastra			
Vert. altezza L	L	$10^4\text{--}10^9$ $10^9\text{--}10^{13}$	$0.59 \text{Ra}^{1/4}$ $0.1 \text{Ra}^{1/3}$
Oriz. sopra calda	$\frac{A}{p}$	$10^4\text{--}10^7$ $10^7\text{--}10^{11}$	$0.54 \text{Ra}^{1/4}$ $0.15 \text{Ra}^{1/3}$
Oriz. sotto calda	$\frac{A}{p}$	$10^5\text{--}10^{11}$	$0.27 \text{Ra}^{1/4}$
Cilindro			
Vert. alto L, diam D	L	Come piast. vert. quando $D \geq \frac{35L}{\text{Gr}^{1/4}}$	
Oriz. diam D	D	$10^5\text{--}10^{12}$	X

Dove p è il perimetro della piastra, **tutte le temperature** si

referiscono a T_{film} e $X = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 \text{Ra}^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{\text{Pr}}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2$.

Irraggiamento

Un **corpo nero** è un perfetto emettitore di radiazioni poiché emette la massima radiazione ad ogni temperatura e lunghezza d'onda e assorbe tutta la radiazione incidente indipendentemente da direzione e lunghezza d'onda.

$$\text{Potenza radiante del corpo nero} \quad E^n = \sigma_0 T^4 [W/m^2]$$

Dove $\sigma_0 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ è la costante di Stefan-Boltzmann.

Legge della distribuzione di Planck

Il potere emissivo monocromatico di un corpo nero rispetto la frequenza d'onda λ segue la legge della distribuzione di Planck:

$$E_\lambda^n = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}$$

Con $C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4/\text{m}^2$ e $C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{mK}$.

Legge dello spostamento o di Wien

La legge che regola i picchi del potere emissivo di un corpo nero è la legge di Wien:

$$(\lambda T)_{\text{max pow}} = 2897.8 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Emissività

L'emissività è il rapporto tra la radiazione emessa e la radiazione emessa da un corpo nero alla stessa temperatura:

$$\epsilon(T) = \frac{E(T)}{E^n(T)} = \frac{E(T)}{\sigma_0 T^4}$$

Da cui $E(T) = \epsilon(T) \sigma_0 T^4$. Per un corpo nero $\epsilon = 1$.

Radiazione incidente

Quando della radiazione colpisce una superficie questa si divide in:

$$\begin{aligned} \text{Assorbita} \quad \alpha &= \frac{I_{\text{assorb}}}{I_{\text{incid}}} \\ \text{Riflessa} \quad \rho &= \frac{I_{\text{riflessa}}}{I_{\text{incid}}} \\ \text{Trasmessa} \quad \tau &= \frac{I_{\text{trasmessa}}}{I_{\text{incid}}} \end{aligned}$$

Vale che $\alpha + \rho + \tau = 1$. Un corpo è *opaco* se $\tau = 0$, *trasparente* se $\tau = 1$, *speculare* se $\rho = 1$. Il coefficiente di assorbimento dipende dalla temperatura della sorgente.

La **legge di Kirchhoff** afferma che coefficienti di assorbimento e emissività tendono ad uguagliarsi quando la temperatura dell'emettitore è circa uguale a quella del ricevente (meno di 100 K).

Fattore di vista

Il fattore di vista tra la superficie i e la superficie j si indica $F_{i \rightarrow j}$ ed è la frazione della radiazione emessa da i che incide direttamente su j .

$$\begin{aligned} F_{i \rightarrow j} &= 0 && i \text{ e } j \text{ non sono in vista tra loro.} \\ F_{i \rightarrow j} &= 1 && j \text{ circonda completamente } i. \end{aligned}$$

Regola di reciprocità

$F_{i \rightarrow j} = F_{j \rightarrow i}$ solo se le aree delle superfici sono uguali:

$$A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$$

Regola della somma

Tutta la radiazione emessa da i in una cavità deve essere intercettata dalle superfici di j .

$$\sum_{j=1}^n F_{i \rightarrow j} = 1$$

Convenzioni adottate

$$\begin{aligned} J_1 &&& \text{potenza termica areica emessa da 1.} \\ J_{1 \rightarrow 2} &&& \text{potenza termica areica emessa da 1 intercettata da 2.} \\ \dot{Q}_{1,2} &&& \text{potenza termica netta scambiata tra 1 e 2.} \end{aligned}$$

$$J_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} J_1$$

$$\dot{Q}_{1,2} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = -\dot{Q}_{2,1}$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A_1 J_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} J_1$$

Scambio termico tra superfici

Superfici nere

$$J_1 = E_1^n = \sigma_0 T_1^4 \quad J_2 = E_2^n = \sigma_0 T_2^4$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1,2} &= A_1 F_{1 \rightarrow 2} E_1^n - A_2 F_{2 \rightarrow 1} E_2^n && [A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1}] \\ &= A_1 F_{1 \rightarrow 2} (E_1^n - E_2^n) = A_1 F_{1 \rightarrow 2} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \end{aligned}$$

Resistenza spaziale alla radiazione: $\frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}}$.

Superfici piane parallele, indefinite, nere

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_{1,2} = A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

Corpo nero in una cavità con superfici nere
Il corpo interno è 1, il corpo attorno è 2.

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_{1,2} = A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

Nota che $F_{2 \rightarrow 1} \neq 1$ perché parte della radiazione incide sulla cavità essendo concava.

Bilancio termico superficie grigia opaca

$$J_i = E_i + \rho_i I_i = \epsilon_i E_i^n + (1 - \epsilon_i) I_i$$

Deve I_i è la radiazione incidente su i , $\rho_i I_i$ è la radiazione riflessa.

La potenza termica netta uscente è $\dot{Q} = A_i (J_i - I_i)$.

Superfici grigie

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{1,2} = A_1(J_1 - I_1) = A_1 \left(J_1 - \frac{J_1 - \epsilon_1 E_1^n}{1 - \epsilon_1} \right)$$

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - J_1}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}}$$

Da cui la resistenza superficiale all'irraggiamento è $\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}$.

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 F_{1 \rightarrow 2} J_1 - A_2 F_{2 \rightarrow 1} J_2 = A_1 F_{1 \rightarrow 2} (J_1 - J_2)$$

$$= \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}}}$$

Combinando le varie resistenze (ma **non** quelle di tipo conduttivo/convettivo!):

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$

Superfici piane parallele indefinite nera-grigia

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{0 + \frac{1}{A} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A}} = A \epsilon_2 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

Superfici piane parallele indefinite grigia-grigia

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{E_1^n - E_2^n}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A} + \frac{1}{A} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A}} = \frac{A \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Corpo grigio in una cavità con superfici grigie

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}$$