18/03/2020

Teorema del valore iniziale

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \rightarrow v(0) = \lim_{s \to \infty} s\,V(s)$$

0^+ se discontinua

ES)

$$v(t) = \text{sca}(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

$$v(0^+) = 1$$

$$\lim_{s \to \infty} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 1$$

$\square$

Teorema del valore finale

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \to \text{se } \exists \lim_{t\to\infty} v(t)$$

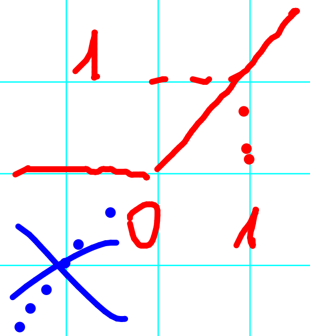
$$\text{allora } \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} sV(s)$$

TDL notevoli

$v(t)$	$V(s)$
$imp(t)$	1
$sca(t)$	$1/s$
$ram(t) = t\, sca(t)$	$1/s^2$
e^{at} $sca(t)$ o $t \geq 0$	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}\, sca(t)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

segnali CANONICI

TDL $\dfrac{1}{s^n}$



$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \ldots$$

ANTITRASFORMAZIONE ($\mathcal{L}^{-1}$) secondo HEAVISIDE

Vale per TDL razionali fratte

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N, D polinomi in s

$(\# N \leq \# D)$

Idea: scomporre $V(s)$ in una SOMMA di fratti semplici la cui $\mathcal{L}^{-1}$ è nota

ES]

$$V(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

Scrivo $V(s) = \dfrac{\alpha}{s} + \dfrac{\beta}{s+1} + \dfrac{\gamma}{s+3}$

Faccio den. commune ed eguaglio i numeratori

$$\alpha(s+1)(s+3) + \beta s(s+3) + \gamma s(s+1) = s+2$$

$s=0 \Rightarrow 3\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 2/3$

$s=-1 \Rightarrow -2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1/2$

$s=-3 \Rightarrow 6\gamma = -1 \Rightarrow \gamma = -1/6$

Quindi

$$V(s) = \frac{2/3}{s} - \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/6}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{2}{3}\,\text{sca}(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\,\text{sca}(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}\,\text{sca}(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)\text{sca}(t)$$

$\square$

In generale

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$ N, D polinomi in s

Radici di $N(s)$: ZERI della TDL
" " $D(s)$: POLI " "

- Si fattorizza $D(s)$ che risulterà così espresso come prodotto di termini del tipo

$s - p$ polo $\mathbb{R}$ semplice

$(s-p)^m$ " " multiplo

+ casi $\mathbb{C}$

1. polo $\mathbb{R}$ semplice

$$\frac{N(s)}{\cdots(s-p)\cdots} = \cdots + \frac{\alpha}{s-p} + \cdots$$

2. polo $\mathbb{R}$ multiplo

$$\frac{N(s)}{\cdots(s-p)^m\cdots} = \cdots \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} \cdots + \frac{\alpha_m}{(s-p)^m} + \cdots$$

+ casi ~~4~~ che non trattiamo (vedi libro se serve)

ES 1

$$V(s) = \frac{2}{(s-1)^2(s+2)} \quad : \quad v(t)\ ?$$

$$V(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{s+2}$$

Eguaglio num : $\alpha(s-1)(s+2) + \beta(s+2) + \gamma(s-1)^2 = 2$

$s = 1 \Rightarrow 3\beta = 2 \Rightarrow \beta = 2/3$

$s = -2 \Rightarrow 9\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 2/9$

$$\begin{cases} s = 0 \\ \beta = 2/3 \\ \gamma = 2/9 \end{cases} \Rightarrow -2\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = -2/9$$

Quindi $V(s) = \frac{-2/9}{s-1} + \frac{2/3}{(s-1)^2} + \frac{2/9}{s+2}$

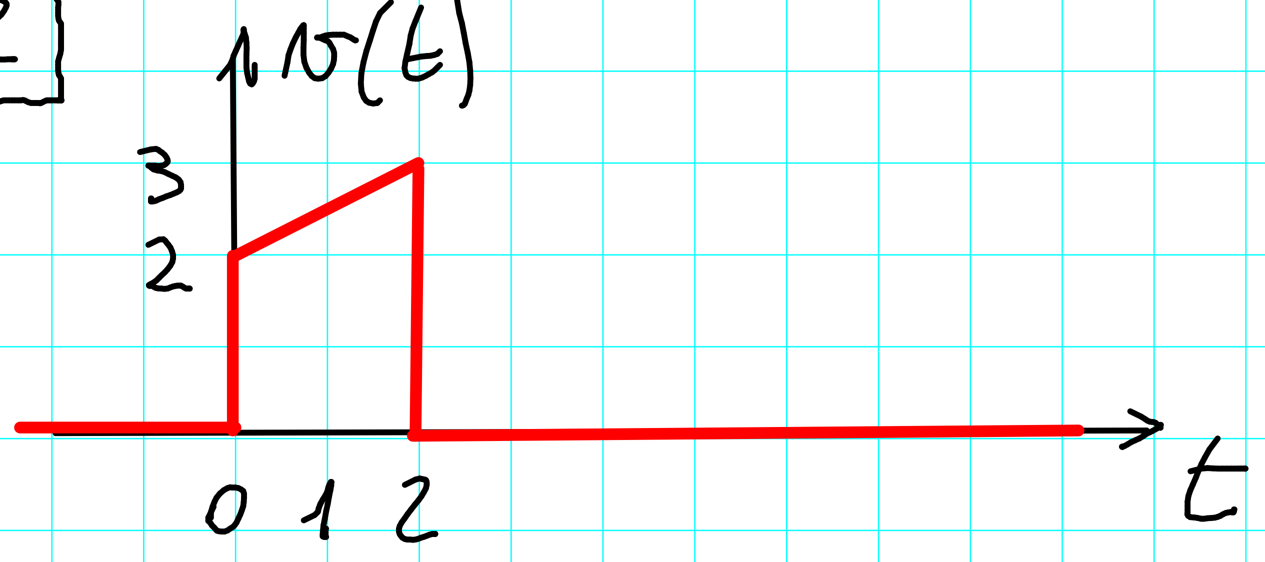
$\mathcal{L}^{-1}$

$$-\frac{2}{9} e^{t} \operatorname{sca}(t) + \frac{2}{3} t e^{t} \operatorname{sca}(t) + \frac{2}{9} e^{-2t} \operatorname{sca}(t)$$

$$v(t) = \left(-\frac{2}{9} e^{t} + \frac{2}{3} t e^{t} + \frac{2}{9} e^{-2t} \right) \operatorname{sca}(t)$$

$\square$

ES2



$V(s)$?

Esprimo $v(t)$ come SOMMA di segnali canonici eventualmente ritardati

$$v(t) = 2\,\mathrm{sca}(t) + 0{,}5\,\mathrm{ram}(t) - 3\,\mathrm{sca}(t-2) - 0{,}5\,\mathrm{ram}(t-2)$$

$\Downarrow$

$$V(s) = \frac{2}{s} + \frac{0{,}5}{s^2} - \frac{3}{s}e^{-2s} - \frac{0{,}5}{s^2}e^{-2s} \quad \square$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (SD LTI a TC SISO)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

Rappr. di stato

Trasformo secondo Laplace l'eq. di stato

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + bu(t)]$$

$\mathcal{L}[x] = X$

prop. der. $\downarrow$ $\downarrow$ linearità

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + bU(s)$$

Allora $\forall s \notin \{\text{autovalori di } A\}$

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1} x(0)}_{\text{TDL del ML di } x} + \underbrace{(sI-A)^{-1} b\, U(s)}_{\text{TDL del MF di } x}$$

Ora trasformo l'eq. d'uscita e vi sostituisco $X(s)$

$$Y(s) \underset{\text{LIN}}{=} c\,X(s) + d\,U(s)$$

$$= \underbrace{c(sI-A)^{-1} x(0)}_{\text{TDL del ML di } y} + \underbrace{[\overbrace{c(sI-A)^{-1} b + d}^{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO}}]\, U(s)}_{\text{TDL del MF di } y}$$

SD LTI a TC SISO

Descrizione nello spazio di stato : (A, b, c, d)

Descrizione ingresso/uscita :

Funzione di trasferimento (FdT)

$$G(s) = c(sI - A)^{-1} b + d$$

Interpretazione:

$$\mathcal{L}[\text{uscita forzata da } u(t)] = G(s)\,\mathcal{L}[u(t)]$$

$\square$

CALCOLO E ASPETTO DI UNA FdT

$$G(s) = c\,(sI - A)^{-1}\,b + d$$

Come è fatta?

- $$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \cdots & \Delta_{1n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1}(s) & \cdots & \Delta_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

pol. caratt. di A $\Rightarrow$ grado n

det. di matrice $(n-1) \times (n-1)$ $\Rightarrow$ grado $n-1$

- $c(sI-A)^{-1}b$

$$= \frac{1}{\det(sI-A)} \underbrace{\underset{1 \times n}{[c_1 \cdots c_n]} \quad \underset{n \times n}{\{\Delta_{ij}(s)\}} \quad \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}}_{\text{POLINOMIO di grado al più } n-1}$$

- $G(s) = \underbrace{c(sI-A)^{-1}b}_{} + d$

$$= \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)} + d$$

$D(s)$: p.c. di A
$\Rightarrow$ grado n

$\tilde{N}(s)$: polinomio di grado al più $n-1$

Se e solo se $d=0$ (sistema strettamente proprio)

$$G(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)}$$

grado num $<$ grado den

Altrimenti (se e solo se $d \neq 0$)

$$G(s) = \frac{\tilde{N}(s) + d\,D(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

grado num $=$ grado den

Quindi

1) $G(s)$ è razionale fratta

2) I suoi poli (radici del den) sono autovalori di A

3) grado num = grado den $\Leftrightarrow d \neq 0$

altrimenti grado num < grado den

ES 1) Dato il SD LTI a TC SISO descritto nello spazio di stato da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

Calcolarne la FdT $G(s)$

$$G(s) = c(sI - A)^{-1} b + d$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)+3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2-5s+7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2s-5}{s^2-5s+7}$$

$\square$