16/03/2020

LINEARIZZAZIONE di SD NL (SISO, TC) nell'intorno di un equilibrio

Consideriamo un SD NL (T1)

$$S: \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

e un suo equilibrio $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$

Vogliamo determinare un SD LTI che approssimi il comportamento di S nell'intorno dell'equilibrio, cioè finché $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ non si discostano "troppo" dai valori $\bar{u}$, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ di equilibrio

Consideriamo l'eq. di stato e sviluppiamola in serie Fernandoloci al 1° ordine

$$f(\bar{x}+\delta x, \bar{u}+\delta u) = \cancel{f(\bar{x},\bar{u})} + f_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + f_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u \quad (+\dots)$$

scostamenti di x e di u rispetto all'equilibrio

0

perché $\bar{x}$ è stato di eq. per $u=\bar{u}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

termini di ordine superiore

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}+\delta x) = \frac{d}{dt}(\delta x) = \delta \dot{x}$$

derivata temporale dello scostamento di x rispetto all'equilibrio

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad x = \bar{x} + \delta x$$

$$\dot{x} = \delta \dot{x} \qquad u = \bar{u} + \delta u$$

$$\delta \dot{x} = f_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + f_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u \quad (+ \cdots)$$

Eq. di stato lineare alle variazioni

$\Rightarrow$ Eq. di stato del sistema linearizzato

Consideriamo ora l'eq. d'uscita $y = g(x, u)$

$$\underbrace{g(\bar{x}+\delta x, \bar{u}+\delta u)}_{g(x,u) \text{ cioè } y} = \underbrace{g(\bar{x}, \bar{u})}_{\bar{y}} + g_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + g_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u \quad (+ \ldots)$$

$$y - \bar{y} = g_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + g_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u$$

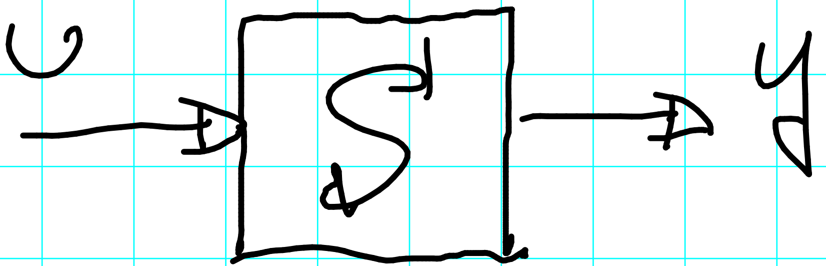
$$\Rightarrow \quad \delta y = g_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + g_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u$$

Sistema linearizzato nell'intorno dell'eq. $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$

$$S^{\delta} \begin{cases} \delta \dot{x} = f_x\big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + f_u\big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u \\ \delta y = g_x\big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta x + g_u\big|_{\bar{x},\bar{u}} \delta u \end{cases}$$

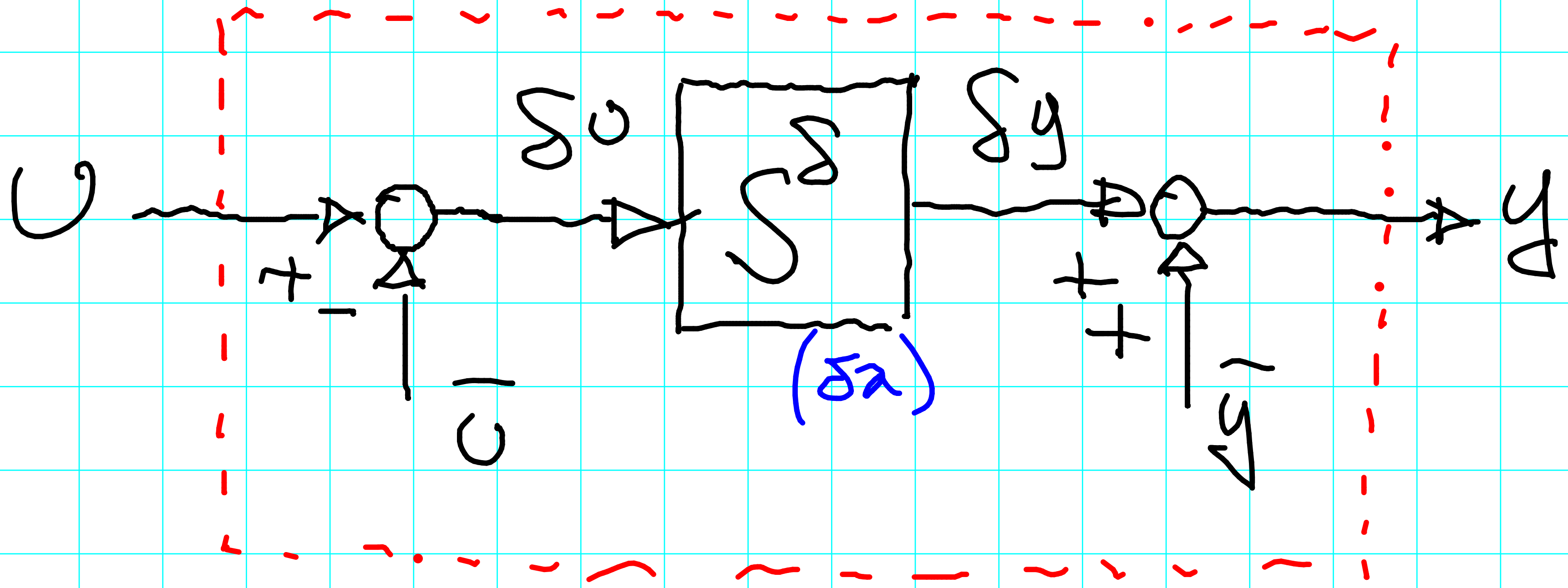
con
$$\delta u = u - \bar{u}$$
$$\delta x = x - \bar{x}$$
$$\delta y = y - \bar{y}$$

Interpretazione



NL

$\Downarrow$ Linearizzazione nell'intorno dell'eq. $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$



QUESTO approssima S
nell'intorno dell'equilibrio

STABILITÀ

Si può applicare il concetto a
equilibri
(movimenti).
e qualche volta a sistemi

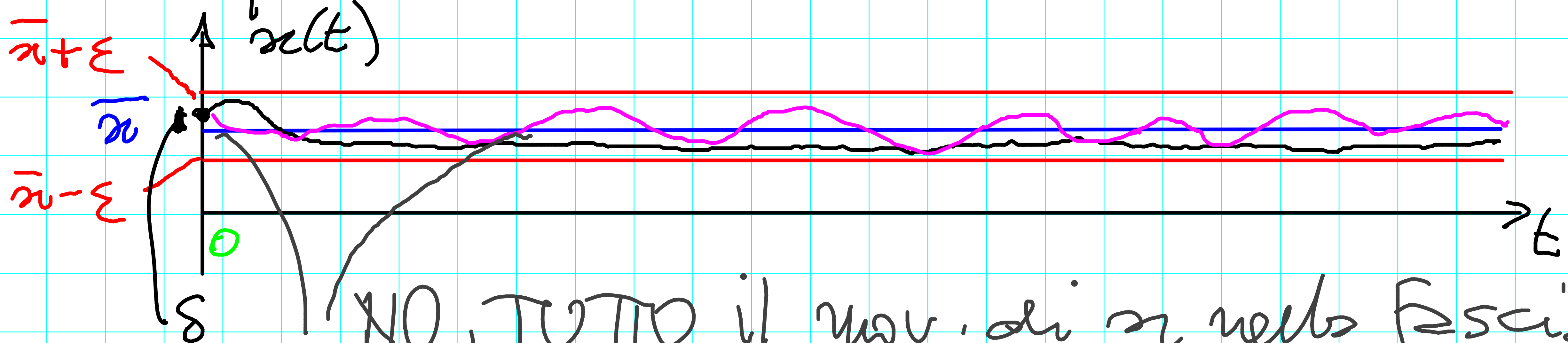
- STABILITÀ di un equilibrio (TC)

Sia $\bar{x}$ uno stato di ep. del SD generico $\dot{x} = f(x, u)$ per $u = \bar{u}$ costante

- Equilibrio STABILE

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \big| \ \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$$

Interpretazione con x scalare



NO, TUTTO il mov. di x nella fascia $\bar{x} \mp \varepsilon$

- Equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE (AS)
  1) l'eq. è stabile
  2) INOLTRE $\|x(t) - \bar{x}\| \to 0$ per $t \to \infty$
- Equilibrio INSTABILE
  Altrimenti

$\square$

STABILITÀ NEI SD LTI a TC

$$\dot{x} = Ax + bu$$

Sia $\bar{x}$ uno stato di eq. per $u = \bar{u}$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \bar{x} \\ u(t) = \bar{u} \quad t \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow x(t) = \bar{x} \quad t \geq 0$$

Quindi

$$x(t) = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\,\bar{u}\, d\tau = \bar{x}$$

Consideriamo ora il movimento perturbato $x_\Delta(t)$ prodotto da $u(t)=\bar{u}$ e $x(0)=\bar{x}+\Delta\bar{x}$

$$x_\Delta(t) = e^{At}(\bar{x}+\Delta\bar{x}) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} b\,\bar{u}\,d\tau}_{\text{come prima}}$$

Quindi

$$\underbrace{x_\Delta(t)-\bar{x}}_{\text{la maniera in cui } x_\Delta \text{ si muove rispetto a } \bar{x}} = e^{At}\Delta\bar{x}$$

$\Rightarrow$ non dipende dal particolare $\bar{x}$ che al 2° membro non compare

$\Rightarrow$ Tutti gli equilibri (se ve ne sono) hanno le stesse caratteristiche di stabilità

Quindi nei sistemi L(TI) la stabilità è
una proprietà del sistema
In tal caso la stabilità del sistema dipende
soltanto dal comportamento di e^{At}
cioè dalla matrice A

ES] Sistema LTI a TC di ordine 1

$\dot{x} = a x$ $\qquad$ a scalare

equilibrio $\bar{x} = 0$

$x(0) = \Delta \bar{x}$

$x(t) = e^{at} \Delta \bar{x}$

- $a < 0$ $\quad x(t) \to 0 = \bar{x}$ ep AS
- $a = 0$ $\quad x(t) = \Delta \bar{x}$ ep S
- $a > 0$ $\quad x(t)$ diverge ep I

$\square$

Riassunto $x_\Delta(t) - \bar{x} = e^{At}\Delta\bar{x}$

Quindi

- $e^{At} \to 0_{n\times n}$ per $t \to \infty$ $\Rightarrow$ sistema AS
  (ML di $x \to 0$)
- e^{At} diverge per $t \to \infty$ $\Rightarrow$ sistema I
  (ML di x diverge salvo eccezioni)
- e^{At} non $\to 0$ né diverge per $t \to \infty$ $\Rightarrow$ sistema S

Proprietà dei SD LTI AS (a TC)

1) I ML di x e di y tendono a zero per $t \to \infty$
Quindi tali SD "dimenticano lo stato iniziale"

2) Se

$$u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi segnale} & t < \bar{t} \\ 0 & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

allora per $t \geq \bar{t}$ c'è solo ML e quindi
$x, y \to 0$ per $t \to \infty$

STABILITÀ di un SD LTI e matrice A (TC)

- Caso in cui A è diagonalizzabile (se no vedi + avanti)

$$x_L(t) = e^{At}x(0) = e^{T\,\mathrm{diag}\{\lambda_i\}T^{-1}t}x(0)$$

ML di x

autovalori di A

$$= \underset{\text{matrice che diagonalizza A}}{T}\,\mathrm{diag}\{\underbrace{e^{\lambda_i t}}_{\text{MODI del sistema}}\}T^{-1}x(0)$$

A reale $\Rightarrow \lambda_i$ reali o coppie $\mathbb{C}$ coniugate

$ML \to 0 \ \forall x(0)$ vuol dire che tutti i modi devono tendere a 0 per $t \to \infty$

- λ_i reale

$\lambda_i > 0$ modo diverge

$\lambda_i = 0$ modo costante

$\lambda_i < 0$ modo $\to 0$

- $\lambda_{h,k} = \alpha \mp j\beta$ coppia di coniugate

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t}\cancel{\left(\sin(\beta t) + j\cos(\beta t)\right)}$$

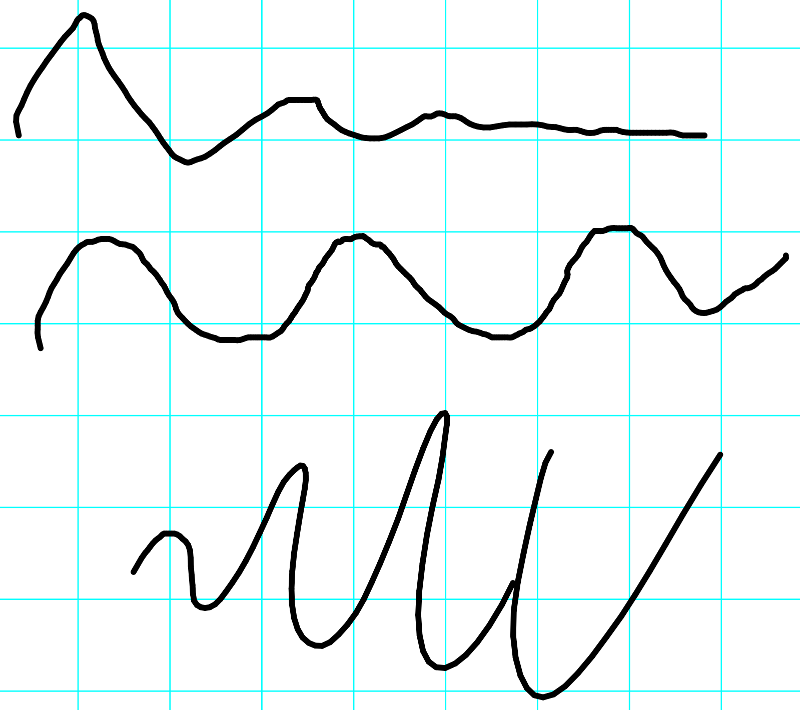
LIMITATA

$Re(\lambda) < 0$ modo converge

$Re(\lambda) = 0$ modo limitato

⇒ non → 0

$Re(\lambda) > 0$ modo diverge



Stabilità e autovalori di A

Tutti gli autovalori di A hanno $\mathrm{Re} < 0$ $\Longleftrightarrow$ sistema AS

Almeno un autovalore di A ha $\mathrm{Re} > 0$ $\Longrightarrow$ sistema I

Tutti gli autovalori di A hanno $\mathrm{Re} \leq 0$ e ne esiste almeno uno con $\mathrm{Re} = 0$ $\Longrightarrow$ sistema S ma non AS

Caso a TD (A diagonalizzabile)

$$x_L(k) = A^k x(0)$$

$$A^k = \left(T \operatorname{diag}\{\lambda_i\} T^{-1}\right)^k$$

$$= T \operatorname{diag}\{\lambda_i\} \cancel{T^{-1}} \cancel{T} \operatorname{diag}\{\lambda_i\} T^{-1} \dots \text{(K volte)}$$

$$= T \operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_i^k}_{\text{MODI del sistema}}\} T^{-1}$$

Quindi

$$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \iff \text{sistema AS}$$

$$\exists\, i \mid |\lambda_i| > 1 \implies \text{sistema I}$$

$$\begin{cases} |\lambda_i| \leq 1 \ \forall i \\ \exists\, i \mid |\lambda_i| = 1 \end{cases} \implies \text{sistema S}$$

ma non AS

$\square$

CRITERI DI STABILITÀ (asintotica) per SD LTI a TC

Domanda: data la matrice A, posso dire se tutti i suoi autovalori hanno o meno $Re < 0$ senza calcolarli?

Sì, vi sono criteri per dirlo basati sull'ispezione di A o del suo polinomio caratteristico (PC)

$$\pi(s) = \det(sI - A)$$

1) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} s_i \Rightarrow$ se $\det(A) = 0$ $\exists\, s_i = 0$

$\uparrow$ autovalori

$\Rightarrow$ sistema non AS

2) $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} s_i \Rightarrow$ se $\mathrm{tr}(A) > 0$ $\exists\, s_i \mid \mathrm{Re}(s_i) > 0$

$\Rightarrow$ sistema I

$\sum \mathrm{Re}(s_i)$

...

3) Se $Re(s_i) < 0 \quad \forall i$ (cioè se il sistema è AS)

allora i coefficienti di $\pi(s)$ sono tutti concordi (e non nulli)

...