ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

28 ottobre 2019

[mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019;
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1);
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3);
- manca la lezione di giovedì 17/10/19 (LECTURE 5);

6-LEZIONE

28/10/19

Modalità prova in itinere

- invece di 6, ci saranno 4 domande a risposta multipla, senza soglia, ma con penalità
- 19 punti di esercizi, la soglia è di 9 punti
- 10 punti di teoria
- vengono amessi alla seconda prova tutti coloro che prendono 15 punti, non più 18

Il programma va fino a tutte le informazioni che possiamo trarre dalle funzioni, non chiede l'applicazione dello studio di funzioni (no studio del segno), chiede limiti, dominio, asintotici. Prima si fa la teoria, poi la pratica.

Teoria

Oggi vediamo tutte le dimostrazioni che abbiamo lasciato indietro.
Per le definizioni e le dimostrazioni, sono necessarie formule formali supportate da del testo.

Terorema di Regolarità delle successioni monotone

Quando le successioni sono **regolari**? Le successioni possono essere convergenti(1), divergenti(2) a $\pm\infty$ o irregolari(3). Solo le (1) e (2) sono successioni regolari, cioè che hanno un limite.
Vediamo i casi particolari:

- una saccessione monotona e limitata **converge**
- una successione monotona e non limitata **diverge**:
  - se a_n (illimitata) è crescente, allora diverge a $+\infty$
  - se invece a_n (illimitata) è descrescente, allora diverge a $-\infty$

Quindi le successioni monotone sono regolari, perchè o convergono o divergono, e ciò dipende dal fatto che siano limitate o illimitate.

iniziamo dimostrando il primo caso:
una saccessione monotona e limitata converge
a_n è monotona crescente:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

a_n è limitata:

$$a_n \in B_r(0) \quad con \quad r > 0\, fissato$$

Se queste due ipotesi valgono:

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

dim. Se a_n è limitata c'è un suo maggiorante (r) e dunque c'è il sup (il più piccolo dei maggioranti).
Dimostro che il limite $L = sup\{a_n\}$.
Chiamiamo $sup\{a_n\} = S$, $\forall\, \epsilon > 0 \quad S - \epsilon$ non è più maggiorante, quindi esiste un $a_{n^*} \quad : \quad S - \epsilon < a_{n^*} \leq S$
$\forall\, n > n^*$, $S - \epsilon < a_{n^*} \leq S \qquad a_n \in B_\epsilon(S)$
[imagine: mancante]
Per esercizio dimostrare il caso in cui la successione fosse monotona decrescente.

Dimostriamo ora il secondo caso:
una successione monotona e non limitata diverge

- se a_n (illimitata) è crescente, allora diverge a $+\infty$.
  Abbiamo ancora due ipotesi: illimitata e crescente:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n$$

$$\nexists\ B_r(0) subsetrigirato\{a_n\}\ \forall\, n$$

$\forall\ B_r(0)\ \ \exists\ \ a_{n^*}$ che non sta in $B_r(0)$, $\quad a_{n^*} \notin B_r(0)\ \ a_{n^*} \geq r$ e $\ \forall\ n > n^* a_{n^*} \leq a_n$ (sto dicendo che definitivamente, da n^* in poi, $a_n \in B_r(+\infty)$).
Quindi per definizione di limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
[immagine: mancante]

- se invece a_n (illimitata) è descrescente, allora diverge a $-\infty$.
  Per esercizio dimostrare anche questo caso.

Carattere della successione che definisce il numero di Nepero

Applico l'ultimo teorema visto a $a_n = (1\frac{1}{n})^n$.
Vogliamo dimostrare che a_n è monotona crescetne e limitata, quindi (per il teorema fondamentale delle successioni monotone) converge.
dim. La dimostrazione si divide in due passi:

- Verifica della monotonia crescente:
  $\forall\, n\ ,\ a_n \leq a_{n+1}$ ovvero $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n - 1} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(\frac{n-1+1}{n-1})^{n-1}} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1} =$$

$$= (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^{-1} = (1-\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^-1$$

Ora usiamo la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+n)^n \geq 1+nx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x > -1$$

Se prendo $x = -\frac{1}{n^2}$ ottengo:

$$(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1 + n(-\frac{1}{n^2})$$

E tornando alla dimostrazione posso sostituire quest'ultimo risultato dove eravamo rimasti:

$$(1-\frac{1}{n})^n \cdot (1-\frac{1}{n})^-1 \geq (1-\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{1}{n})^{-1} = 1$$

Per qui abbiamo dimostrato che è monotona crescente.

- Verifica della limitatezza:
  la successione a_n è inoltre limitata e per dimostrarlo introduciamo una successione ausiliaria:

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} =$$

Questa successione b_n è decrescente:

$$= (1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n}) = a_n \cdot (1+\frac{1}{n})$$

Dove $(1+\frac{1}{n}) > 1$.
Quindi $a_n < b_n \quad \forall\, n$. Dimostro che b_n decresce, automaticamente segue la limitatezza di a_n.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \ldots \quad < \quad \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1$$

Come si vede $a_n < b_1$, dove $b_1 = (1+\frac{1}{1})^2 = 4$.
Per dimostrare che b_n decresce uso la stessa metodo di prima, cioè dimostrare che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(\frac{n-1+1}{n-1})^n} = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \cdot (\frac{n-1}{n})^n =$$

$$= (1+\frac{1}{n})^{n+1} \cdot (1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^1 =$$

$$= (\frac{n^2-1}{n^2})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^1 = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(\frac{n^2}{n^2-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}$$

Ora usiamo la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall\, x > -1 \quad \forall\, n$$

Con $x = \frac{1}{n^x-1}$.

$$(1+\frac{1}{n^2-1}) \geq 1 + n \cdot (\frac{1}{n^2-1}) > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Quindi grazie alla disuguaglianza di Bernoulli ho ottenuto che:

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 + \frac{1}{n} \quad quindi \quad (1+\frac{1}{n^2-1})^{-n} \leq (1+\frac{1}{n})^{-1}$$

Quindi tornando alla dimsotrazione:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{(1+\frac{1}{n})^1}{(1+\frac{1}{n})^1} = 1$$

Teorema di unicità del limite (per successioni)

Se una succesione converge, il valore cui converge è unico.
dim. dimostriamo per assurdo:
Sia $\{a_n\}$ una successione ocnvergente e

$$\lim a_n = L_1 \quad \wedge \quad \lim a_n = L_2$$

con $L_1 \neq L_2$.
Formaliziamo:

$$\forall\, B_r(L_1) \;\exists\; M_1 \,\forall\, n > M_1 \;\; a_n \in B_r(L_1)$$

$$\forall\, B_r(L_2) \;\exists\; M_2 \,\forall\, n > M_2 \;\; a_n \in B_r(L_2)$$

[immagine: mancante]
scelgo $r = \frac{dist(L_1,L_2)}{2} < \frac{|L_1-L_2|}{2}$, così $b_r(L_1) \cap B_r(L_2) = \emptyset$
$\forall\; n > max\{M_1, M_2\}$ la successione non può stare contemporaneamente nelle due strisce, perchè? per definizione di successione, si ha una sola immagine per ogni valore del dominio, quindi o è in una o nell'altra.

teorema della permanenza del segno (per successioni)

Se a_n è definitivamente positiva e convergente allora il suo limite sarà **non negativo**.
dim.
$\exists\; M \,\forall\, n > M \quad a_n > 0$ e $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e volgio dimostrare che $L \geq 0$.
Procedo per assurdo supponendo $L < 0$.
La definizione di limite dice che

$$\forall\, B_r(L) \;\exists\; M^* \qquad \forall\, n > M^* \qquad a_n \in B_r(L)$$

se $r < \frac{|L|}{2}$ sto dicendo che la successione è definitivamente negativa (da M^* in poi), e questo è assurdo, perchè una successione non può essere contemporaneamente definitivamente positiva e definitivamente negativa.
[immagine:mancante]

Teorema del confronto (per successioni)

Conosciuto anche come teorema dei carabinieri.
Siano a_n, b_n, c_n tali che definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$. Inoltre a_n e c_n convergono ad L. Allora $L = \lim_{n \to +\infty} b_n$.
dim. traduciamo formalmente queste tre ipotesi:

- $a_n \leq b_n \leq c_n$: $\quad \exists\ M_1\ \forall\ n > M_1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- $a_n \to L$: $\quad \forall\ B_r(L) \ \ \exists\ \ M_2\ \forall\ n > M_2 \quad a_n \in B_r(L)$, questa può essere riscritta come: $L - r < a_n < L + r$
- $c_n \to L$: $\quad \forall\ B_r(L) \ \ \exists\ \ M_3\ \forall\ n > M_3 \quad c_n \in B_r(L)$, questa può essere riscritta come: $L - r < c_n < L + r$

chiamo $M^* = max\{M_1, M_2, M_3\}$, cioè il punto oltre il quale valgono tutte e tre le ipotesi iniziali.
Possiamo quindi unire tutte tre le ipotesi e dire:

$$L - r < a_n \leq b_n \leq c_n < L + r \qquad \forall\ n > M^*$$

perciò $b_n \in B_r(L)$ definitivamente, quindi $\lim_{n \to +\infty} b_n = L$