

Invernizzi Stefano

Appunti di
Fisica Tecnica

Corso del prof. Alberto Salioni



Politecnico di Milano
Ingegneria Informatica

A.A. 2009/2010

Capitolo 1: Sistemi termodinamici

1. Fisica tecnica e Termodinamica

La fisica tecnica

La fisica tecnica è una disciplina il cui obiettivo è studiare le trasformazioni dell'energia e le sue interazioni con la materia, e ha come risultato le più svariate applicazioni, che possono spaziare dall'ingegneria meccanica all'ingegneria civile. Comprende discipline come la termodinamica applicata, la trasmissione del calore e la termofluidodinamica.

L'aggettivo "tecnica" deriva dal fatto che, all'epoca dei primi sviluppi di questa materia, la termodinamica era l'ambito di studio più strettamente legato ad applicazioni tecnologiche di carattere pratico, mentre altri settori della fisica come elettromagnetismo e ottica erano più comuni nell'ambito accademico o puramente di laboratorio. Questa distinzione tuttavia oggi non sussiste più: applicazioni tecnologiche derivate da ottica ed elettromagnetismo sono molto comuni e diffuse su larga scala.

La Termodinamica: definizione n. 1

- ♦ *Definizione*

La termodinamica è la disciplina che studia le grandezze macroscopiche che caratterizzano i modi di essere dei sistemi termodinamici e le modifiche che tali grandezze subiscono quando intervengono scambi di massa e/o di energia del sistema con l'ambiente.

- ♦ *Osservazione*

Questa definizione mette in evidenza che i sistemi termodinamici vengono studiati analizzando solamente le caratteristiche macroscopiche, e ciò consente di avere un approccio molto elegante allo studio in questione.

La Termodinamica: definizione n. 2

- ♦ *Definizione*

La termodinamica è la scienza che studia l'energia, la materia e le leggi che governano le loro interazioni.

- ♦ *Energia*

L'energia può essere definita come la capacità di produrre cambiamenti.

2. Il sistema termodinamico

Sistema termodinamico

- ♦ **Definizione**

Si definisce sistema termodinamico una quantità di materia o porzione di spazio separata dal resto dell'universo mediante un determinato *contorno*, costituito da una superficie reale o immaginaria, rigida o deformabile.

- ♦ **Esempi**

1. L'area contenuta in una certa stanza è un sistema termodinamico con un contorno reale.
2. L'area contenuta in un decimetro cubo attorno al naso di una persona è un sistema termodinamico con un contorno immaginario.

Mondo esterno, ambiente e sistema accoppiato

- ♦ **Mondo esterno**

Chiamiamo *mondo esterno* tutto ciò che è esterno al sistema termodinamico.

- ♦ **Ambiente**

Il mondo esterno viene detto *ambiente* se è di massa infinita.

- ♦ **Sistema accoppiato**

Il mondo esterno viene detto *sistema accoppiato* se è di massa finita.

Gli scambi tra il sistema termodinamico e l'esterno

Un sistema termodinamico può scambiare con l'esterno energia o materia. Gli scambi di energia avvengono come lavoro (se il contorno è deformabile) e/o come calore.

Possiamo distinguere:

- ♦ **Sistemi chiusi**

Sono sistemi che scambiano con l'esterno solo energia, e non possono scambiare materia con l'esterno;

- ♦ **Sistemi aperti**

Sono sistemi che scambiano con l'esterno sia energia che materia.

Il contorno del sistema

Il contorno di un sistema può essere:

- ♦ **Adiabatico**

Contorno che non permette lo scambio di calore.

- ♦ **Diatermano**

Contorno che permette lo scambio di calore.

- ♦ **Rigido**

Contorno che non permette lo scambio di lavoro.

- ♦ **Mobile**

Contorno che permette lo scambio di lavoro. Ha almeno una parte mobile, cioè può essere deformato.

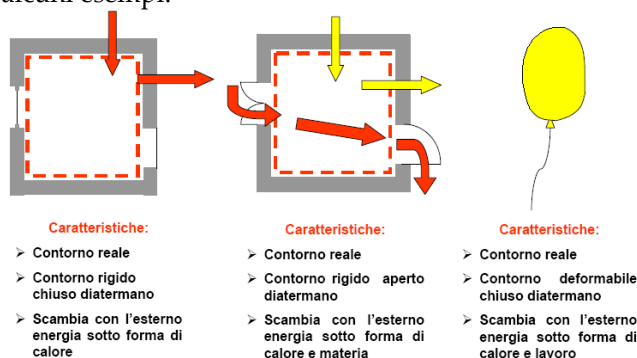
- ♦ **Impermeabile (o chiuso)**

Contorno che non permette lo scambio di massa.

- ♦ **Poroso (o permeabile o aperto)**

Contorno che permette lo scambio di massa.

La figura seguente mostra alcuni esempi:



Sistema semplice

In parole semplici, un sistema termodinamico è detto semplice se possono essere trascurati, come accade per la maggior parte dei problemi ingegneristici, i vari fenomeni esterni e interagenti con esso. Più nel dettaglio, un sistema semplice ha le seguenti caratteristiche:

1. È chimicamente e fisicamente omogeneo ed isotropo (in una sostanza isotropa le proprietà fisiche non dipendono dalla direzione in cui si analizza la sostanza stessa).
2. Non è soggetto a campi gravitazionali, elettrici o magnetici.
3. È chimicamente inerte.
4. È esente da effetti di superficie.

Questi sistemi quindi interagiscono con l'esterno solamente mediante scambi di energia e di materia.

Sistema composto

Un sistema composto è un sistema costituito da più sistemi semplici separati tra loro da pareti.

3. Stato di equilibrio e trasformazioni

Lo stato di equilibrio

Lo stato di equilibrio è il particolare stato, perviene spontaneamente il sistema isolato (cioè il sistema che non scambia calore, lavoro o materia con l'esterno).

Più nel dettaglio, è uno stato interno particolare, cioè riproducibile e descrivibile attraverso il valore assunto da poche proprietà del sistema stesso, che godono della caratteristica di avere un unico ed uguale valore in ogni punto del sistema. Questo significa che le sue variabili termodinamiche sono ben definite e non variano nel tempo.

Grandezze

Le proprietà che vengono usate per descrivere lo stato di equilibrio di un sistema possono essere di diverso tipo: estensive oppure intensive.

♦ *Grandezze estensive*

Dipendono dall'estensione del sistema. Di conseguenza, se dimezziamo l'estensione del sistema (lo "tagliamo a metà"), le grandezze estensive vengono dimezzate.

Ne sono esempi la massa m e il volume V .

♦ *Grandezze intensive*

Non dipendono dall'estensione del sistema. Di conseguenza, se dimezziamo l'estensione del sistema (lo "tagliamo a metà"), le grandezze estensive rimangono invariate.

Ne sono esempi la temperatura T e la pressione p .

Osservazione: unità di misura

La pressione nel SI è misurata in Pascal (Pa). Altre unità di misura sono:

- L'atmosfera: $1 \text{ atm} = 101'325 \text{ Pa}$
- Il bar: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- L'atmosfera tecnica: $1 \text{ ata} = 98'066,5 \text{ Pa}$

La temperatura è invece misurata in Kelvin: $T_{\text{kelvin}} = T_{\text{C}} + 273,15$.

La legge di Duhem

♦ *Enunciato della legge di Duhem*

Nel caso di sistema monocomponente il numero di parametri termodinamici intensivi o estensivi specifici indipendenti atti a descrivere compiutamente lo stato interno di equilibrio è due.

♦ *La regola di Gibbs*

La regola di Gibbs stabilisce una relazione fra il numero di componenti C (cioè il numero di diverse "sostanze pure", ovvero sostanze con una composizione chimica uniforme, anche se in realtà potrebbero essere miscele), il numero di fasi F (cioè di diversi stati di aggregazione) e il numero di variabili intensive indipendenti V . La regola di Gibbs è:

$$V = C + 2 - F$$

Di conseguenza, per un sistema monocomponente ($C = 1$) e monofase ($F = 1$), si ha $V = 2$ (il sistema può essere descritto ad esempio da P e T). Per un sistema monocomponente e bifase, si ha invece $V = 1$ (il sistema dovrà essere descritto da una grandezza intensiva e da una grandezza estensiva).

Le equazioni di stato

Dalla legge di Duhem, discende anche l'esistenza dell'equazione di stato: se infatti possiamo determinare univocamente il punto di equilibrio a partire da due sole grandezze, allora potremo esprimere una terza grandezza come funzione delle due precedenti. Ad esempio:

$$T = f(p, V)$$

Portando poi tutto al primo membro, otteniamo un'equazione del tipo:

$$f(p, V, T) = 0$$

che rappresenta appunto l'equazione di stato. Molto spesso l'equazione di stato è ignota, però la sola consapevolezza della sua esistenza è talvolta molto importante, come vedremo in seguito.

Le trasformazioni

In un sistema chiuso lo stato di equilibrio vincolato viene a cessare quando, per rimozione dei vincoli al contorno, il sistema scambia con l'ambiente calore e/o lavoro.

Il sistema perverrà a una nuova situazione di equilibrio avendo attraversato una serie di stati intermedi successivi detti nel loro insieme trasformazione termodinamica.

Tipi di trasformazioni

- ♦ **Trasformazione reversibile**

Una trasformazione reversibile è una trasformazione che porta da uno stato A ad uno stato B e può essere percorsa in senso inverso (cioè dallo stato B allo stato A) in modo tale da riportare sia il sistema, sia l'ambiente esterno, allo stato di partenza. Nella realtà le trasformazioni reversibili non esistono.

- ♦ **Trasformazione irreversibile**

Una trasformazione irreversibile è una trasformazione totalmente o in parte non reversibile. Queste trasformazioni non possono essere rappresentate su un diagramma di stato.

- ♦ **Trasformazione quasi statica o internamente reversibile**

È una trasformazione costituita da una successione di stati di equilibrio. Può non essere reversibile.

- ♦ **Trasformazione ciclica**

Una trasformazione ciclica è una trasformazione nella quale i due estremi della trasformazione stessa coincidono (si passa da uno stato allo stato stesso).

- ♦ **Trasformazione elementare**

Una trasformazione è elementare se una delle grandezze di stato si mantiene costante durante la trasformazione.

Esempi di trasformazioni elementari sono:

- Trasformazione isobara: la pressione si mantiene costante.
- Trasformazione isoterma: la temperatura si mantiene costante.
- Trasformazione isoentropica: l'entropia si mantiene costante.
- Trasformazione isocora: il volume si mantiene costante.

4. Lavoro e calore

Fino ad ora si è parlato di lavoro e di calore senza però precisare qual è la loro differenza. Due possibili definizioni sono le seguenti:

Il lavoro

Chiamiamo lavoro l'energia fornita ad un sistema termodinamico semplice che sia riconducibile alla caduta di un grave.

Il calore

Chiamiamo calore l'energia fornita ad un sistema termodinamico semplice che non sia riconducibile alla caduta di un grave.

Tali definizioni, pur essendo corrette, risultano in realtà poco esaustive, perciò è opportuno far riferimento al concetto intuitivo di *calore* e di *lavoro*, che ognuno di noi possiede. Si noti inoltre che sia il calore che il lavoro sono forme di energia, misurate quindi nella stessa unità di misura (il Joule: $[J] = [N] [m]$).

La natura del calore

Per lungo tempo Calore e Temperatura furono confusi. Ora noi sappiamo che il calore è una forma di energia, dovuta all'incessante movimento degli atomi e delle molecole di cui sono composti i vari oggetti. Essendo una particolare forma di energia, non ci deve sorprendere che non si conservi, così come non si conservano altre forme di energia.

L'idea che il calore e il lavoro fossero interconvertibili si sviluppò pian piano nel corso dei secoli, ma con un cammino ben lungi dall'essere lineare e semplice come spesso viene presentato sui libri di testo.

Vediamo alcune tappe di questo cammino.

- ♦ **Sir Francis Bacon e il calore**

Nel 1620 Bacon ebbe l'intuizione che il calore non era altro che "movimento, rapida e vigorosa agitazione delle particelle di cui è composta la materia". Tuttavia, Sir Francis Bacon Morì di bronchite sperimentando l'idea che il freddo potesse prevenire la putrefazione della carne e permetterne la sua conservazione. La sua teoria del calore venne così dimenticata.

- ♦ **La teoria del calorico**

L'opinione prevalente (sostenuta ad esempio da Lavoisier, Fourier, Laplace e Poisson), era che il calore fosse una sorta di fluido misterioso, il *calorico*, che fluiva in ogni sostanza e spontaneamente passava da un corpo caldo ad un corpo freddo.

La teoria del calorico assegnava a questo fluido strane proprietà. Prima di tutto non aveva peso: scaldare un etto di ferro non portava ad un aumento del suo peso; però occupava spazio. I corpi, infatti, aumentavano di volume se riscaldati.

Sempre secondo la teoria del calorico, i corpi caldi contengono più calorico dei corpi freddi e mettendo a contatto un corpo caldo con un corpo freddo, il calorico fluisce dal corpo caldo a quello freddo.

Nonostante i numerosi tentativi, il calorico sfuggiva ad ogni sforzo per essere isolato e investigato direttamente. Pian piano aumentava l'evidenza sperimentale e teorica che la teoria del calorico fosse errata.

- ♦ **La dimostrazione dell'infondatezza della Teoria del Calorico**

Benjamin Thompson, Conte Rumford, supervisionava la fabbricazione di cannoni. Il corpo di un cannone veniva fabbricato a partire da un cilindro di metallo, in cui veniva prodotto meccanicamente un foro del diametro desiderato. Il Conte Rumford osservò che l'attrito meccanico generava moltissimo calore.

La teoria del calorico sosteneva che la polvere di metallo poteva "contenere" meno calorico del blocco di metallo originale. Durante la lavorazione del cannone, il calorico non poteva più essere immagazzinato nella polvere metallica, e veniva disperso sotto forma di calore.

Thompson allora immerse un blocco metallico in acqua, e dimostrò che era necessaria la stessa quantità di calore per innalzare di un grado la polvere metallica generata, oppure un blocco di metallo dello stesso peso. La polvere metallica quindi non era meno capace di immagazzinare calore rispetto al pezzo di metallo non polverizzato. Si dimostrò così che il calore prodotto proveniva semplicemente dal lavoro meccanico compiuto per forare il cannone.

Il calore quindi non era una sostanza. Le idee sbagliate però sono dure a morire, e la teoria del calorico sopravvisse ancora un poco. Ancora oggi, nel linguaggio comune, sono presenti dei "resti linguistici" di quella teoria. Parliamo infatti di calore che "entra" ed "esce" dai corpi, o dalle finestre aperte.

L'uso della *caloria* (cal) come unità di energia è una vestigia di quel passato.

- ♦ **L'esperimento di Joule**

Il riconoscimento e l'enunciazione del principio universale della conservazione dell'energia è dovuto principalmente a James Prescott Joules (1818-1889), birraio e appassionato di scienza.

In suo onore oggi usiamo il joule come unità di misura del lavoro e dell'energia del Sistema Internazionale (SI). Tuttavia in alcuni campi sono ancora utilizzate le calorie.

L'esperimento di Joule verrà meglio descritto in seguito. Il primo a enunciare esplicitamente il Principio di Conservazione dell'Energia fu poi Julius Robert von Mayer.

5. L'equazione di stato dei gas perfetti

L'equazione di stato dei gas perfetti

Un gas ideale è un modello ideale di gas per il quale valgono le tre leggi dei gas perfetti, ovvero per il quale vale l'equazione di stato dei gas perfetti.

L'equazione di stato dei gas perfetti è un caso particolare: rappresenta infatti una delle rare situazioni nelle quali è possibile scrivere esplicitamente l'equazione di stato di un sistema termodinamico (coincidente con il gas stesso).

Tale equazione è la seguente:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Dove n è il numero di moli e R è la costante universale dei gas:

$$R \cong 8314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}}$$

La legge di Avogadro ci assicura che una chilomole di un qualsiasi gas nelle stesse condizioni di pressione e temperatura occupa sempre lo stesso volume.

Indicando con \mathcal{V} il volume molare:

$$\mathcal{V} = \frac{V}{N}$$

La legge dei gas perfetti può anche essere scritta come:

$$p \cdot \mathcal{V} = R \cdot T$$

Se invece indichiamo con v il volume specifico:

$$v = \frac{V}{m}$$

Allora la formula che otteniamo è:

$$p \cdot v = R^* \cdot T$$

Con:

$$R^* = \frac{R}{M_m}$$

E dove M_m è la *massa molare*, che è un parametro caratteristico del singolo gas, dato da:

$$M_m = \frac{m}{N}$$

Osservazioni

1. In generale noi considereremo solamente gas ideali. Naturalmente, si tratta in realtà di una approssimazione della realtà, che ci consente di semplificare la nostra trattazione.
2. Considereremo come gas perfetti anche le miscele di gas, come ad esempio l'aria. In particolare, l'aria verrà considerata come un gas perfetto con massa molare circa pari a 28 (come l'azoto, che è il suo principale componente).

6. I liquidi e i solidi incompressibili

Osservazioni a partire dall'esistenza dell'equazione di stato

Nel caso di liquidi e solidi non esistono equazioni atte a approssimarne il comportamento termodinamico. La sola consapevolezza dell'esistenza dell'equazione di stato però permette utili deduzioni.

Infatti, come abbiamo già visto, sapere che esiste l'equazione di stato ci consente di dire che possiamo esprimere il volume come funzione della temperatura e della pressione:

$$v = v(T, p)$$

Possiamo quindi calcolare il differenziale:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp$$

A questo punto, possiamo introdurre due coefficienti:

- ♦ **Coefficiente di dilatazione isobaro**

Si tratta del coefficiente definito come:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

- ♦ **Coefficiente di comprimibilità isoterma**

Si tratta del coefficiente definito come:

$$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

Tali coefficienti dipendono debolmente dalla pressione e dalla temperatura e possono essere sperimentalmente misurati. Di conseguenza, possiamo in prima approssimazione considerarli costanti per intervalli anche piuttosto ampi di temperatura e pressione, e ciò rende possibile l'integrazione della relazione differenziale e il calcolo dello stato finale a partire da condizioni iniziali note.

Il coefficiente di dilatazione isobaro e quello di comprimibilità isoterma ci consentono di scrivere la precedente relazione come:

$$dv = \beta \cdot v \cdot dT - K_T \cdot v \cdot dp$$

Capitolo 2: Equazioni del bilancio del sistema termodinamico

1. Le equazioni del bilancio di un sistema termodinamico

Quali sono?

In questo capitolo vedremo quali sono le equazioni del bilancio di un sistema termodinamico. Tali equazioni sono 3:

1. Il principio di conservazione della massa.
2. Il principio di conservazione dell'energia (ovvero il Primo Principio della Termodinamica).
3. Il bilancio entropico (Secondo Principio della Termodinamica).

Tali principi sono di fatto i pilastri sui quali si basano tutte le procedure di calcolo che noi adotteremo nel nostro corso.

2. Il caso dei sistemi chiusi

Il caso in analisi

Da questo momento in poi ci occuperemo solamente di sistemi chiusi (solo più avanti analizzeremo anche sistemi di altro tipo). Si ricorda che i sistemi chiusi sono tutti quei sistemi che non scambiano massa con l'ambiente esterno.

Il principio di conservazione della massa

Nella situazione in analisi, il principio di conservazione della massa risulta di fatto scontato. In ogni caso, questo principio (che si rivelerà utile più avanti, quando passeremo a considerare anche sistemi aperti) afferma che *la massa non si crea e non si distrugge*.

3. Il Primo Principio della Termodinamica

Introduzione

Maggiore attenzione merita invece il Primo Principio della Termodinamica. Prima di enunciare questo principio è però necessario introdurre un importante concetto:

- ♦ **Energia interna**

Dato un sistema semplice all'equilibrio, possiamo definire una proprietà del sistema detta *energia interna* e indicata con U . Si tratta di una funzione di stato (ovvero è una proprietà intrinseca).

In particolare, una funzione di stato è una proprietà del sistema che dipende solamente dallo stato in considerazione, e non dalla natura del processo (cammino) attraverso il quale il sistema è arrivato allo stato attuale. Un banale esempio di funzione di stato è l'altezza.

L'energia interna è una grandezza estensiva (dipende cioè dalla massa).

- ♦ **Energia specifica**

L'energia interna specifica u è l'energia interna per unità di massa:

$$u = \frac{U}{m}$$

Enunciato

L'energia non può essere né creata, né distrutta, ma può solo cambiare forma.

In altri termini, la variazione dell'energia interna del sistema non può che essere dovuta a scambi con l'ambiente esterno. Tali scambi possono essere di tipo termico (calore) oppure meccanico (lavoro).

Diciamo perciò che la variazione di U è il risultato di interazioni con l'esterno:

$$\Delta U = Q^+ - L^+$$

Dove Q^+ è il calore entrante nel sistema (o meglio, è considerato positivo entrante) e L^+ è il lavoro uscente dal sistema (cioè il lavoro considerato con segno positivo se è uscente dal sistema, negativo in caso contrario). Si noti che l'utilizzo del calore entrante e del lavoro uscente anziché, ad esempio, il viceversa (con opportuno cambiamento di segni) è solamente una convenzione legata a ragioni storiche (le prime macchine "facevano uscire lavoro").

Enunciato in forma differenziale

Il Primo Principio della Termodinamica può anche essere scritto in forma differenziale. In questo caso, esso assume la seguente forma:

$$du = \partial q^+ - \partial l^+$$

Si noti che ∂q^+ e ∂l^+ non sono differenziali esatti, ma sono dei differenziali di linea.

Formulazione classica

L'energia che è immagazzinata in un sistema e non va a cambiare né l'energia cinetica del centro di massa, né quella potenziale (e neanche l'energia chimica, o elastica, o elettrica) è chiamata energia interna.

Questa formulazione mette in evidenza che la più importante conseguenza del Primo Principio è l'esistenza di un concetto di "energia interna". Si noti anche che all'energia interna può essere assegnato un qualsiasi valore: ciò che è importante sono solamente le variazioni di tale grandezza.

Conclusioni ricavabili dal Primo Principio della Termodinamica

Dal Primo Principio della Termodinamica possiamo ricavare le seguenti conclusioni:

1. Siccome U è una grandezza estensiva, possiamo dire anche che si tratta di una grandezza additiva, ovvero che se un sistema Z è composto da due o più sottosistemi, l'energia interna del sistema Z è data dalla somma delle energie interne dei singoli sottosistemi. Nel caso in cui si abbiano due soli sottosistemi A e B , possiamo scrivere:

$$U_Z = U_A + U_B$$

2. Se un sistema qualsiasi è isolato, la sua energia interna rimane costante, ovvero:

$$\Delta U = 0$$

3. Allo stesso modo, per un sistema che subisce una trasformazione ciclica, si ha:

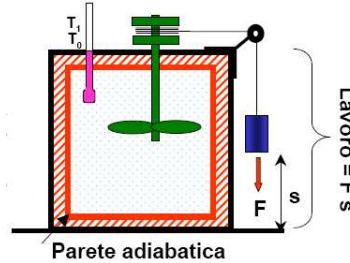
$$\Delta U_{\text{trasf.ciclica}} = 0$$

4. Se un sottosistema Z è composto da due (o più) sottosistemi, allora possiamo ancora scrivere l'equazione:

$$\Delta U_Z = Q_Z^+ - L_Z^+$$

L'esperienza di Joule

L'esperienza di Joule è un semplice ma importante esperimento realizzato dal fisico Joule. Questo esperimento consentì di dimostrare che il calore e l'energia sono grandezze tra loro "equivalenti": solo dopo questo esperimento le due grandezze hanno iniziato ad avere la stessa unità di misura (il Joule, appunto). L'esperimento prevedeva l'utilizzo di un recipiente adiabatico (cioè non in grado di scambiare calore con l'esterno), contenente un liquido. All'interno del recipiente era inoltre presente una pala, messa in moto da un grave, come mostrato in figura. Il recipiente conteneva inoltre un termometro.



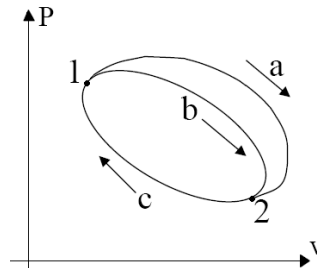
Joule osservò che il liquido, dopo un'iniziale agitazione, ritornava in stato di quiete. Di conseguenza, il lavoro fornito mediante il moto della pala non ha avuto alcuna influenza sull'energia cinetica del liquido (né tanto meno sulla sua energia potenziale):

$$dE_k + dE_p - \delta l \neq 0$$

Il sistema ha però aumentato la propria temperatura: di conseguenza, possiamo dire che il sistema ha immagazzinato come energia interna il lavoro "ricevuto" (si noti infatti che la temperatura può essere considerata un indicatore del livello di energia interna del sistema).

Dimostrazione del fatto che U è una funzione di stato

Consideriamo le trasformazioni rappresentate all'interno del seguente piano P-v (pressione - volume specifico, detto anche *piano del lavoro*):



Stiamo cioè supponendo di partire da un punto di equilibrio 1 e di muoverci verso un nuovo punto di equilibrio 2, per poi tornare al punto 1. Tale trasformazione avviene una volta mediante il percorso ac, e una seconda volta mediante il percorso bc.

Essendo in entrambi i casi una trasformazione ciclica, avremo $\Delta U = 0$, da cui:

$$Q_{ac}^{\leftarrow} - L_{ac}^{\rightarrow} = 0$$

$$Q_{bc}^{\leftarrow} - L_{bc}^{\rightarrow} = 0$$

Siccome il calore entrante nel cammino ac può essere considerato come la somma del calore entrante lungo la curva a e quello entrante lungo la curva c, avremo:

$$Q_{ac}^{\leftarrow} = Q_a^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow}$$

E potremo fare lo stesso anche per quanto riguarda il lavoro. Di conseguenza, possiamo scrivere:

$$Q_{ac}^{\leftarrow} - L_{ac}^{\rightarrow} = 0 \rightarrow Q_a^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} - (L_a^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}) = 0 \rightarrow Q_a^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} = L_a^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}$$

Con passaggi del tutto analoghi, ricaviamo poi:

$$Q_{bc}^{\leftarrow} - L_{bc}^{\rightarrow} = 0 \rightarrow Q_b^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} - (L_b^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}) = 0 \rightarrow Q_b^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} = L_b^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}$$

Sottraendo ora l'equazione $Q_b^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} = L_b^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}$ da $Q_a^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} = L_a^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}$, otteniamo:

$$Q_a^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow} - (Q_b^{\leftarrow} + Q_c^{\leftarrow}) = L_a^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow} - (L_b^{\rightarrow} + L_c^{\rightarrow}) \rightarrow Q_a^{\leftarrow} - Q_b^{\leftarrow} = L_a^{\rightarrow} - L_b^{\rightarrow} \rightarrow Q_a^{\leftarrow} - L_a^{\rightarrow} = Q_b^{\leftarrow} - L_b^{\rightarrow}$$

Ovvero:

$$\Delta U_a = \Delta U_b$$

Quindi la variazione di energia interna del tratto a è uguale a quella che si ha nel tratto b; in altri termini, la variazione dipende solo dallo stato di equilibrio di partenza e dallo stato di equilibrio di arrivo, non dal percorso. Da questo consegue anche che il differenziale dell'energia interna è un differenziale esatto.

4. Il Bilancio Entropico

Enunciato

Passiamo ora a parlare del bilancio entropico, noto anche come Secondo Principio della Termodinamica. Questo principio afferma che:

1. In un sistema all'equilibrio termodinamico esiste una funzione intrinseca del sistema (ovvero una funzione di stato), detta entropia e indicata con S , la cui variazione per una trasformazione reversibile è data da:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$$

Dove T è la temperatura assoluta e Q_{rev} è il calore assorbito durante la trasformazione reversibile.

2. L'entropia è una grandezza estensiva. Possiamo anche introdurre l'entropia riferita all'unità di massa, indicata con s , che è legata ad S dalla relazione:

$$S = s \cdot m$$

3. La variazione di entropia totale di un sistema isolato (che non scambia lavoro o calore o materia con l'esterno) sede di trasformazioni termodinamiche è sempre maggiore di zero e tende a zero al tendere dei processi alla reversibilità:

$$\Delta S_{\text{isolato}} \geq 0$$

Che cos'è l'entropia?

Finora abbiamo detto solo che l'entropia è una grandezza fisica estensiva intrinseca del sistema (una funzione di stato), senza però averne chiarito il significato.

Possiamo ora aggiungere che tale grandezza viene interpretata come una misura del caos del sistema termodinamico in analisi: si può dire, in forma non rigorosa ma esplicativa, che quando un sistema passa da uno stato *ordinato* ad uno *disordinato* la sua entropia aumenta; questo fatto fornisce indicazioni sulla direzione in cui evolve spontaneamente un sistema.

La sua unità di misura nel SI è $[J] \cdot [K]^{-1}$.

Osservazioni

Si noti che, siccome T è la temperatura assoluta (e perciò è sempre non negativa), nel caso di un sistema qualsiasi (come discende in maniera ovvia dal primo assioma) possiamo avere 3 situazioni:

1. Se $\Delta S < 0$, allora il sistema sta cedendo calore all'esterno.
2. Se $\Delta S = 0$, allora il sistema non sta scambiando calore con l'esterno.
3. Se $\Delta S > 0$, allora il sistema sta assorbendo calore dall'esterno.

Conclusioni relative al bilancio entropico

1. L'entropia è una quantità estensiva, e di conseguenza è additiva. Possiamo perciò dire che in un sistema composto Z costituito da due sottosistemi A e B , la variazione di entropia è pari alla somma delle variazioni di entropia dei singoli sottosistemi:

$$\Delta S_Z = \Delta S_A + \Delta S_B$$

E, analogamente, l'entropia totale di Z è la somma tra l'entropia di A e l'entropia di B :

$$S_Z = S_A + S_B$$

2. A questo punto possiamo affermare che, dato un generico sistema chiuso sottoposto ad una trasformazione termodinamica qualsiasi, la sua variazione di entropia è data da:

$$\Delta S = \Delta S_{Q^+} + \Delta S_{\text{irreversibilità}}$$

Dove il termine ΔS_{Q^+} è l'entropia entrante attraverso i confini del sistema come conseguenza dello scambio di calore Q (primo assioma), mentre $\Delta S_{\text{irreversibilità}}$ è il termine di generazione entropica per irreversibilità (che, in base al terzo assioma, è sempre maggiore o uguale a zero). Nelle trasformazioni reversibili o internamente reversibili, si ha:

$$\Delta S_{\text{irreversibilità}} = 0$$

5. Il lavoro termodinamico

Calcolo del lavoro termodinamico

Il lavoro termodinamico può essere calcolato mediante la formula:

$$\partial l \rightarrow = P \cdot dv \quad \rightarrow \quad l \rightarrow = \int_i^f P \cdot dv$$

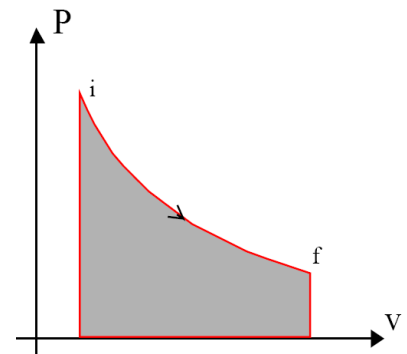
Possiamo quindi dire che il lavoro termodinamico è l'area sottesa dal grafico che rappresenta la trasformazione termodinamica nel piano P-v (che, come abbiamo già detto, è chiamato, proprio per questo motivo, *piano del lavoro*).

Naturalmente però per applicare questa formula è necessario conoscere esattamente il modo in cui varia la pressione in funzione del volume specifico v: dobbiamo conoscere la funzione

$$P = P(v)$$

Detta *equazione della trasformazione*.

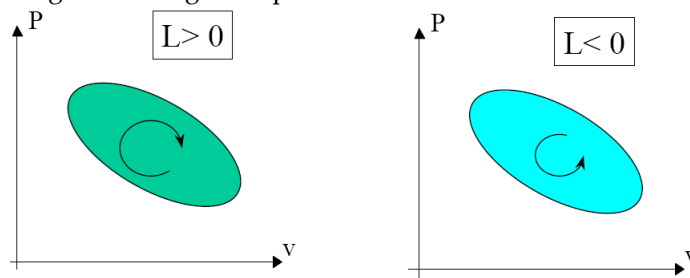
Si osservi che si tratta di un integrale di linea: il risultato dipende non solo dal punto iniziale e dal punto finale, ma anche dal percorso che viene seguito.



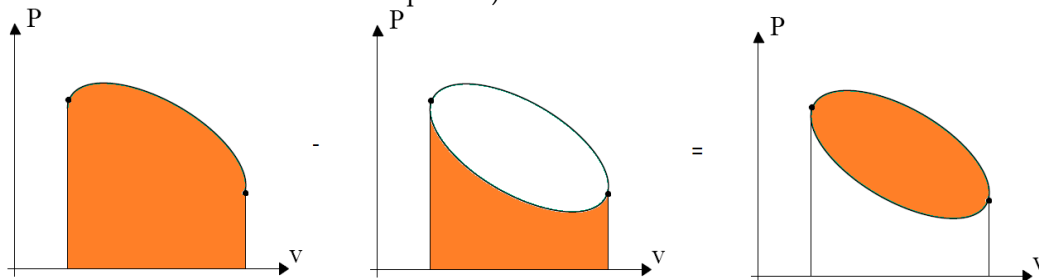
Il lavoro termodinamico in un ciclo

In base all'ultima osservazione che abbiamo fatto, possiamo facilmente concludere che il lavoro termodinamico di un ciclo non è nullo, e che dipende dal modo in cui il ciclo stesso viene percorso.

Consideriamo ad esempio i grafici di seguito riportati:



Nel primo caso, il lavoro è dato esattamente dall'area interna al ciclo (basti pensare che si percorre prima la semicurva superiore, e poi la semicurva inferiore, perciò si deve sottrarre l'area sottesa dalla semiellisse inferiore all'area sottesa dalla semiellisse superiore):



Con un procedimento del tutto analogo, ricaviamo invece che nel secondo caso il lavoro è negativo, anche se uguale in modulo, perciò dobbiamo sottrarre l'area sottesa dalla semiellisse superiore all'area sottesa dalla semiellisse inferiore.

Possiamo quindi concludere che il lavoro *non è una funzione di stato*.

Capitolo 3: Trasformazioni politropiche

1. Definizione di alcune grandezze

La capacità termica

La capacità termica di un sistema è il rapporto tra il calore fornito al sistema e la variazione di temperatura del sistema stesso:

$$C_x = \left(\frac{\partial Q^+}{\partial T} \right)_x$$

Il calore specifico

Il calore specifico di un sistema è il rapporto tra la capacità termica del sistema stesso e la sua massa:

$$c_x = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q^+}{\partial T} \right)_x$$

Il calore specifico a volume costante

Il calore specifico a volume costante di un sistema è definito dalla relazione:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

Si noti che c_v può essere espresso come funzione della temperatura e del volume specifico.

♦ Dimostrazione

Sappiamo che possiamo scrivere:

$$u = u(T, v)$$

Sappiamo inoltre che il Primo Principio della Termodinamica, in forma differenziale, è:

$$du = \partial q^+ - \partial l^+$$

Siccome poi:

$$\partial l^+ = P \cdot dv$$

Scriveremo:

$$du = \partial q^+ - P \cdot dv \quad \rightarrow \quad \partial q^+ = du + P \cdot dv$$

A questo punto, possiamo scrivere il differenziale di u :

$$u = u(T, v) \quad \rightarrow \quad du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

E quindi, sostituendo nella precedente formula:

$$\partial q^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + P \cdot dv$$

Siccome stiamo considerando il volume costante, avremo $dv = 0$, e quindi:

$$\partial q^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial q^+}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_v$$

L'entalpia

L'entalpia è la grandezza definita dalla formula:

$$h = u + P \cdot v$$

Si tratta di una grandezza intensiva. La sua unità di misura è il $\frac{J}{kg}$. Possiamo inoltre scrivere:

$$H = m \cdot h$$

Dove H si misura in Joule ed è una grandezza estensiva.

Il calore specifico a pressione costante

Il calore specifico a pressione costante di un sistema è definito dalla relazione:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

Si noti che c_p può essere espresso come funzione della temperatura e della pressione.

♦ Dimostrazione

Sappiamo dalla definizione di entalpia che:

$$h = u + P \cdot v$$

Da cui ricaviamo:

$$dh = du + dP \cdot v + P \cdot dv$$

Siccome poi sappiamo che (come dimostrato poco fa):

$$\partial q^+ = du + P \cdot dv$$

Allora scriveremo:

$$dh = \partial q^+ + dP \cdot v \quad \rightarrow \quad \partial q^+ = dh - v \cdot dP$$

Possiamo poi calcolare il differenziale dell'entalpia h :

$$h = h(T, P) \quad \rightarrow \quad dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP$$

Quindi, sostituendo nella precedente formula:

$$\partial q^+ = dh - v \cdot dP = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP - v \cdot dP$$

Siccome stiamo considerando la pressione costante, avremo $dP = 0$, e quindi:

$$\partial q^+ = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial q^+}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_p$$

2. Gas ideali

Calore specifico a pressione e a volume costante

Come abbiamo visto e dimostrato, nel caso generale vale:

$$c_p = c_p(T, v)$$

$$c_v = c_v(T, P)$$

Tuttavia, nel caso dei gas ideali, essendo:

$$u = u(T)$$

Possiamo scrivere anche:

$$c_p = c_p(T)$$

$$c_v = c_v(T)$$

La relazione di Mayer

La relazione di Mayer afferma che:

$$c_p = c_v + R^*$$

Calcolo del calore specifico a volume e pressione costante

Nel caso dei gas ideali, valgono le seguenti formule:

♦ Gas monoatomico

Se il gas è monoatomico, si ha:

$$c_v = \frac{3}{2} R^*$$

$$c_p = \frac{5}{2} R^*$$

♦ Gas biatomico o poliatomico lineare

Se il gas è biatomico oppure poliatomico lineare, si ha:

$$c_v = \frac{5}{2} R^*$$

$$c_p = \frac{7}{2} R^*$$

♦ Gas poliatomico non lineare

Se il gas è poliatomico non lineare, si ha:

$$c_v = \frac{6}{2} R^*$$

$$c_p = \frac{8}{2} R^*$$

3. Trasformazione politropica

Definizione

Una trasformazione politropica è una trasformazione nella quale il calore specifico c_x rimane costante.

Indice della politropica

Chiamiamo *indice della politropica* n il rapporto:

$$n = \frac{c_x - c_p}{c_x - c_v}$$

Il caso del gas ideale

Dal Primo Principio della Termodinamica in forma differenziale e dalla formula del lavoro termodinamico segue che:

$$du = \partial q^{\leftarrow} - \partial l^{\rightarrow} = \partial q^{\leftarrow} - P \cdot dv \quad \rightarrow \quad \partial q^{\leftarrow} = du + P \cdot dv$$

Inoltre, sappiamo dalla definizione di entalpia che:

$$h = u + P \cdot v$$

Da cui ricaviamo:

$$dh = du + dP \cdot v + P \cdot dv = \partial q^{\leftarrow} + v \cdot dP \quad \rightarrow \quad \partial q^{\leftarrow} = dh - v \cdot dP$$

Inoltre, dalla definizione di calore specifico:

$$c_x = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q^{\leftarrow}}{\partial T} \right)_x = \frac{\partial q^{\leftarrow}}{dT} \quad \rightarrow \quad \partial q^{\leftarrow} = c_x \cdot dT$$

E, analogamente:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad \rightarrow \quad \partial u = c_v \cdot dT \qquad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad \rightarrow \quad \partial h = c_p \cdot dT$$

Da cui, sostituendo nelle precedenti formule:

$$\begin{aligned} \partial q^{\leftarrow} &= c_v \cdot dT + P \cdot dv \\ \partial q^{\leftarrow} &= c_p \cdot dT - v \cdot dP \end{aligned}$$

Sottraendo all'equazione $\partial q^{\leftarrow} = c_x \cdot dT$ la prima di queste due equazioni, otteniamo:

$$(c_x - c_v) \cdot dT = P \cdot dv$$

Mentre sottraendo all'equazione $\partial q^{\leftarrow} = c_x \cdot dT$ la seconda delle precedenti equazioni, otteniamo:

$$(c_x - c_p) \cdot dT = -v \cdot dP$$

Di conseguenza, nel caso di gas ideali abbiamo:

$$n = \frac{c_x - c_p}{c_x - c_v} = - \frac{v \cdot dP}{P \cdot dv}$$

Da cui, separando le due variabili:

$$n \cdot \frac{dv}{v} = - \frac{dP}{P}$$

E, integrando:

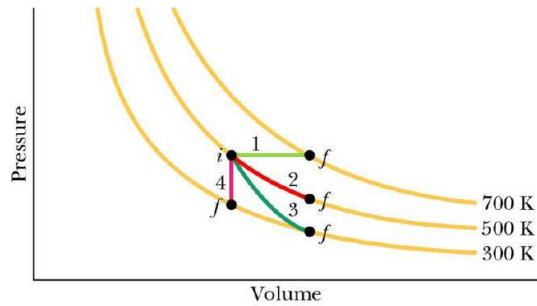
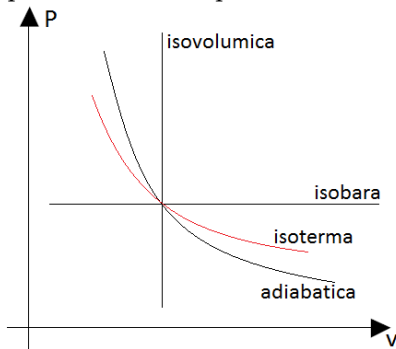
$$n \cdot \ln v = - \ln P + \text{cost} \quad \rightarrow \quad \ln v^n = \ln \frac{\text{cost}_1}{P} \quad \rightarrow \quad v^n P = \text{cost}_1$$

E quindi si ottiene che per una trasformazione politropica di un gas ideale, vale:

$$v^n P = \text{cost}_1$$

Trasformazioni politropiche di gas ideali

Come conseguenza della formula appena ricavata, il grafico di una trasformazione politropica di un gas ideale potrà essere dei tipi mostrati in figura:



1:Isobaro 2:Isoterma 3:Adiabatico 4:Isocoro

Si ricorda che la trasformazione isovolumica (o isocora) è a volume costante, la isobara avviene a pressione costante, la isoterma a temperatura costante e la trasformazione adiabatrica avviene a calore costante.

In particolare, si ha la seguente corrispondenza tra i valori di n , quelli di c_x e le trasformazioni nei grafici sopra riportati:

Trasformazione	c_x	n
Isoterma	$\pm\infty$	1
Isocora	c_v	$\pm\infty$
Isobara	c_p	0
Adiabatica	0	$K = \frac{c_p}{c_v}$

Lavoro scambiato lungo una politropica

Data una trasformazione politropica di un gas ideale che ci porta da un punto di equilibrio 1 ad un punto di equilibrio 2, si può facilmente calcolare il lavoro come integrale:

$$l \rightarrow = \int_1^2 P \cdot dv = \int_1^2 \frac{\text{cost}}{v^n} \cdot dv = \int_1^2 \frac{P_1 v_1^n}{v^n} \cdot dv$$

Quindi si hanno le due seguenti situazioni:

1. Se $n = 1$, allora:

$$l \rightarrow = \int_1^2 \frac{P_1 v_1^n}{v^n} \cdot dv = \int_1^2 \frac{P_1 v_1}{v} \cdot dv = P_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = P_1 v_1 \ln \left(\frac{\frac{P_1 v_1}{P_2}}{\frac{P_1 v_1}{P_1}} \right) = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

2. Se $n \neq 1$, allora:

$$\begin{aligned} l \rightarrow &= \int_1^2 \frac{P_1 v_1^n}{v^n} \cdot dv = P_1 v_1 \int_1^2 v^{-n} \cdot dv = P_1 v_1 \left[\frac{v^{1-n}}{1-n} \right]_1^2 = \frac{P_1 v_1^n}{1-n} (v_2^{1-n} - v_1^{1-n}) = \frac{P_1 v_1^n}{1-n} \frac{1}{v_2^{\frac{n-1}{n}}} - \frac{P_1 v_1}{1-n} = \\ &= \frac{P_1 v_1}{1-n} \left(\frac{v_1^{n-1}}{v_2^{\frac{n-1}{n}}} - 1 \right) = \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \end{aligned}$$

Siccome poi:

$$P_2 v_2^n = P_1 v_1^n \rightarrow \frac{v_1^n}{v_2^n} = \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Abbiamo:

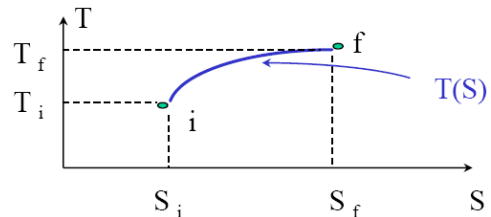
$$l \rightarrow = \frac{P_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Il diagramma temperatura-entropia

Gli stati termodinamici e le trasformazioni termodinamiche possono anche essere rappresentati in un "diagramma T-S".

In un diagramma T-S, l'area sottesa dalla curva rappresentativa di una trasformazione reversibile è uguale al calore scambiato dal sistema nella trasformazione:

$$Q = \int_i^f T(S) dS$$



In caso di trasformazioni cicliche reversibili, siccome abbiamo (Primo principio):

$$Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow} = \Delta U = 0 \rightarrow Q^{\leftarrow} = L^{\rightarrow}$$

Allora l'area inclusa nella curva del ciclo nel diagramma p-V è uguale all'area inclusa nel ciclo nel diagramma T-S.

Siccome:

$$c_x = \frac{1}{m} \frac{dQ^{\leftarrow}}{dT} = \frac{1}{m} \frac{T(S)dS}{dT} = \frac{T(s)ds}{dT}$$

Allora abbiamo:

$$Tds = c_x dT$$

Separando le variabili e integrando otteniamo:

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds}{c_x} \rightarrow \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{c_x} \rightarrow \ln T - \ln T_0 = \frac{s - s_0}{c_x} \rightarrow T = T_0 \cdot e^{\frac{s-s_0}{c_x}}$$

Di conseguenza, tutte le politropiche sono rappresentate, nel piano T-s, da una curva esponenziale. Nel caso particolare in cui la trasformazione sia una isoterma, essendo $c_x = \infty$, si ha una retta orizzontale, mentre nel caso di trasformazione isoentropica, si ha una retta orizzontale ($s = s_0$). Infine, le isocore sono più rapide delle isobare, perché $c_v < c_p$.

Formule per le trasformazioni politropiche di un gas perfetto

Possiamo così riassumere le formule valide per le trasformazioni politropiche di un gas perfetto:

Trasformaz.	Lavoro per unità di massa (l)	Calore per unità di massa (q)	Variazione di en. interna (Δu)	Variazione di entalpia (Δh)	Variazione di entropia (Δs)
Isobara $P = \text{costante}$	$l^{\rightarrow} = p \cdot \Delta v$	$q^{\leftarrow} = c_p \cdot \Delta T$	$\Delta u = c_v \cdot \Delta T$	$\Delta h = c_p \cdot \Delta T$	$\Delta s = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$
Isocora $V = \text{costante}$	$l^{\rightarrow} = 0$	$q^{\leftarrow} = c_v \cdot \Delta T$	$\Delta u = c_v \cdot \Delta T$	$\Delta h = c_p \cdot \Delta T$	$\Delta s = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$
Isoterma $T = \text{costante}$	$l^{\rightarrow} = R^* \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$ $l^{\rightarrow} = R^* \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$	$q^{\leftarrow} = R^* \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$ $q^{\leftarrow} = R^* \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\Delta u = 0$	$\Delta h = 0$	$\Delta s = R^* \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$ $\Delta s = R^* \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$
Adiabatica $Q = \text{costante}$	$l^{\rightarrow} = \frac{R^* T_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$ $l^{\rightarrow} = -c_v \cdot \Delta T$	$q^{\leftarrow} = 0$	$\Delta u = c_v \cdot \Delta T$	$\Delta h = c_p \cdot \Delta T$	$\Delta s = 0$
Generale $c_x = \text{costante}$	$l^{\rightarrow} = (c_x - c_v) \cdot \Delta T$ $l^{\rightarrow} = \frac{R^* T_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$	$q^{\leftarrow} = c_x \cdot \Delta T$	$\Delta u = c_v \cdot \Delta T$	$\Delta h = c_p \cdot \Delta T$	$\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R^* \ln \frac{p_2}{p_1}$ $\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{v_2}{v_1}$

Si osserva che la variazione di entropia (funzione di stato) è indipendente dal cammino che porta il sistema tra lo stato iniziale e lo stato finale.

Inoltre, le formule sull'ultima riga sono quelle generali, che possono essere applicate ad una generica politropica, sostituendo i corretti valori di c_x ed n , a seconda della specifica trasformazione in analisi.

Capitolo 4: Macchine termodinamiche

1. Le macchine termodinamiche

Introduzione

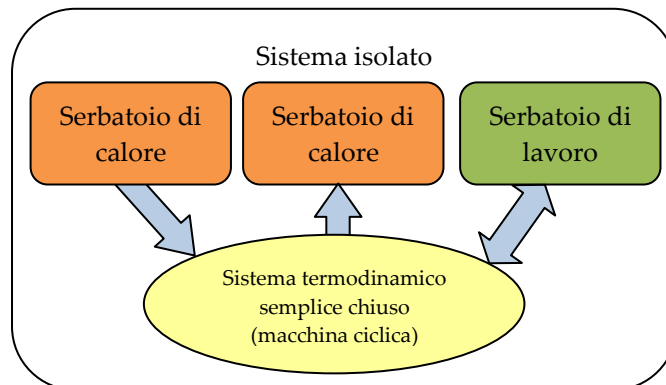
Fino ad ora ci siamo occupati dello studio dei gas ideali. Vogliamo ora allontanarci da tale argomento, restando però nell'ambito dei sistemi chiusi, e vedere come possiamo comporre una *macchina termodinamica* "combinando tra loro" vari tipi di sistemi chiusi.

Da un punto di vista storico, le macchine termodinamiche sono nate prima dell'elaborazione della teoria della termodinamica (si può perciò affermare che la tecnologia ha preceduto la scienza). Tuttavia, partiremo fornendo la definizione termodinamica del concetto di *macchina termodinamica*.

Definizione di macchina termodinamica

♦ Definizione

Una macchina termodinamica è un sistema termodinamico *composto ed isolato* che, nella sua forma più semplice, è realizzato da: due serbatoi di calore, un serbatoio di lavoro, e da una macchina ciclica che è in grado di produrre o assorbire con continuità lavoro interagendo con il serbatoio di lavoro ed i serbatoi di calore.



♦ Osservazioni

1. In particolare, la macchina ciclica è un sistema termodinamico semplice, chiuso agli scambi di massa (anche se questa limitazione è legata solo a ragioni di semplicità espositiva). Il contorno di tale sistema è diatermano e deformabile (a seguito delle interazioni con i serbatoi, non può essere adiabatico, né rigido).
2. Ipotizziamo che il sistema sia sottoposto ad una trasformazione ciclica perché in questo modo è possibile sottoporlo (idealmente) a trasformazioni continue, all'infinito (possiamo con continuità scambiare calore con l'esterno).
3. La presenza di due serbatoi di calore e un solo serbatoio di lavoro è legata al fatto che non è possibile realizzare una macchina che trasformi in lavoro tutto il calore ricevuto (Secondo Principio della Termodinamica), perciò abbiamo bisogno di un serbatoio al quale cedere il calore a bassa temperatura.

Il serbatoio di calore

Un serbatoio di calore è un sistema termodinamico che scambia solo calore con l'esterno, senza alterare il suo stato termodinamico. La massa di questo sistema è quindi considerata infinita rispetto agli altri sistemi con i quali interagisce. Gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche, ovvero internamente reversibili (questa è in realtà una "forzatura teorica").

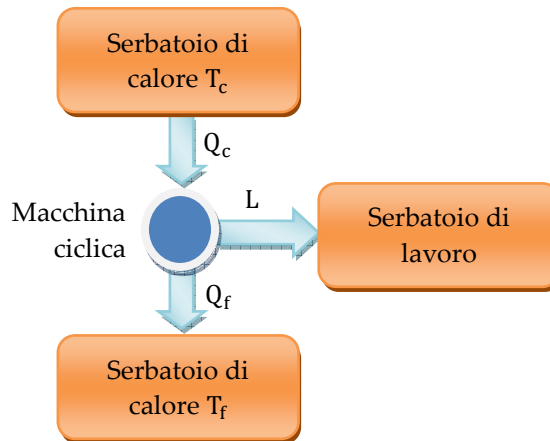
Serbatoio di lavoro

Un serbatoio di lavoro è un sistema termodinamico che scambia solo lavoro con l'esterno senza alterare il suo stato termodinamico. Gli scambi avvengono con trasformazioni quasi-statiche, ovvero internamente reversibili (questa è in realtà una "forzatura teorica").

2. Macchina motrice e macchina operatrice

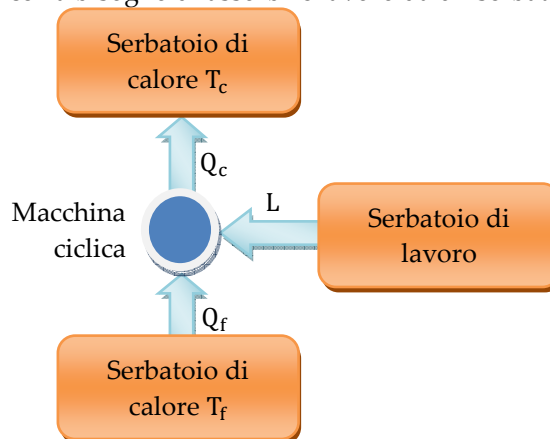
Definizione di macchina motrice

Una macchina motrice è una macchina termodinamica che assorbe calore da un serbatoio di calore a temperatura superiore T_c , cede calore a un serbatoio a temperatura fredda T_f e cede lavoro ad un serbatoio di lavoro.



Definizione di macchina operatrice

Una macchina operatrice è una macchina termodinamica che assorbe calore da un serbatoio di calore a temperatura fredda T_f e cede calore a un serbatoio a temperatura calda T_c . Naturalmente, per compiere tale operazione la macchina operatrice ha bisogno di assorbire lavoro da un serbatoio di lavoro.



3. Rendimento di una macchina motrice

Definizione di rendimento di una macchina motrice

Il rendimento di una macchina motrice è definito come il rapporto tra il risultato energetico che la macchina fornisce e la spesa energetica necessaria per raggiungere tale obiettivo. In termini semplici quindi possiamo dire che è il rapporto tra “quello che si vuole ottenere e quello che deve essere speso per averlo”:

$$\eta = \frac{L}{Q_C}$$

Formule per il calcolo del rendimento di una macchina motrice

Nella macchina motrice, vale la formula seguente:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F}{Q_C} S_{irr}$$

Se poi il processo è reversibile, possiamo scrivere:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Si osserva quindi che, anche se il processo è reversibile, il rendimento non può essere unitario (la temperatura T_F non può essere zero, né la temperatura T_C può essere infinita). Di norma, rendimenti del 50% sono considerati già eccellenti.

Si osserva inoltre che, nel caso di macchina reversibile il rendimento dipende solo dalle temperature dei 2 serbatoi di calore.

Dimostrazione della formula

Come sappiamo, in un sistema chiuso (come la nostra macchina termodinamica) vale la formula:

$$\Delta S = S_Q + S_{irr}$$

Siccome il sistema è anche isolato, abbiamo inoltre:

$$S_Q = 0$$

E di conseguenza:

$$\Delta S = S_{irr}$$

La variazione totale di entropia della macchina operatrice può poi essere scomposta nella somma delle variazioni di energia entropia dei singoli componenti del sistema:

$$\Delta S_Z = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F$$

Dove il pedice Z è riferito all'intera macchina operatrice, C al serbatoio di calore a temperatura calda, F al serbatoio di calore a temperatura fredda, sl al serbatoio di lavoro e M fa riferimento alla macchina ciclica.

Riprendendo la formula precedente ($\Delta S = S_{irr}$) possiamo anche dire:

$$S_{irr} = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F$$

Analogamente, la variazione di energia interna può essere scomposta nella somma delle variazioni di energia interna dei singoli componenti del sistema:

$$\Delta U_Z = \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F$$

Siccome il sistema è isolato, la variazione totale di energia è nulla ($\Delta U_Z = 0$), quindi:

$$\Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F = 0$$

Abbiamo così ottenuto il seguente sistema di equazione:

$$\begin{cases} \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F = 0 \\ S_{irr} = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F \end{cases}$$

A questo punto, possiamo osservare che:

1. Il serbatoio di calore a temperatura calda non scambia lavoro con la macchina ciclica, perciò:

$$\Delta U_C = Q_C^-$$

Siccome tale trasformazione è reversibile, abbiamo $S_{irr} = 0$, e quindi

$$\Delta S_C = S_Q + S_{irr} = S_Q = \int \frac{\delta Q}{T}$$

Siccome poi la temperatura T è costante e pari a T_C , abbiamo:

$$\Delta S_C = \int \frac{\delta Q}{T_C} = \frac{1}{T_C} \int \delta Q = \frac{Q_C^-}{T_C}$$

2. Il serbatoio di calore a temperatura fredda non scambia lavoro con la macchina ciclica, perciò:

$$\Delta U_F = Q_F^-$$

Siccome tale trasformazione è reversibile, abbiamo $S_{irr} = 0$, e quindi

$$\Delta S_F = S_Q + S_{irr} = S_Q = \int \frac{\delta Q}{T}$$

Siccome poi la temperatura T è costante e pari a T_F , abbiamo:

$$\Delta S_F = \int \frac{\delta Q}{T_F} = \frac{1}{T_F} \int \delta Q = \frac{Q_F^-}{T_F}$$

3. In maniera molto intuitiva, ricaviamo poi che:

$$\Delta U_{sl} = -L_{sl}^{\rightarrow}$$

Siccome tale trasformazione è reversibile, abbiamo $S_{irr} = 0$, e quindi

$$\Delta S_{sl} = S_Q + S_{irr} = S_Q = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Perché non c'è scambio di calore.

4. Infine, siccome M è ciclica e sia U che S sono funzioni di stato::

$$\Delta U_M = 0$$

$$\Delta S_M = 0$$

Di conseguenza, se sostituiamo nelle precedenti formule, otteniamo:

$$\begin{cases} Q_C^- - L_{sl}^{\rightarrow} + Q_F^- = 0 \\ S_{irr} = \frac{Q_C^-}{T_C} + \frac{Q_F^-}{T_F} \end{cases}$$

Ma il calore entrante nel serbatoio di calore a temperatura calda è $Q_C^- = -Q_C$. Analogamente, $L_{sl}^{\rightarrow} = -L$ e $Q_F^- = Q_F$. Di conseguenza:

$$\begin{cases} -Q_C + L + Q_F = 0 \\ S_{irr} = -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} Q_F = Q_C - L \\ S_{irr} = -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_C - L}{T_F} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_F = Q_C - L \\ L = Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) - T_F S_{irr} \end{cases}$$

E quindi:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F}{Q_C} S_{irr}$$

Il rendimento di secondo principio

Nel caso in cui ci si trovi in presenza di serbatoi a temperatura non costante, oppure se si hanno delle irreversibilità, il rendimento è chiaramente diverso dal rendimento ideale. In questi casi, si può introdurre il concetto di *rendimento di Secondo Principio*, che è così definito:

$$\eta_{II \text{ principio}} = \frac{\eta_r}{\eta_{id}} = \frac{\text{Rendimento reale}}{\text{Rendimento ideale (reversibilità e serbatoi a temp. costante)}}$$

4. Coefficiente di prestazione di una macchina operatrice

Definizione di coefficiente di prestazione di una macchina operatrice

Il COP (*Coefficient Of Performance*, coefficiente di prestazione), di una macchina operatrice è definito in maniera diversa se la macchina operatrice è un frigorifero oppure una pompa di calore:

1. Se la macchina è un frigorifero, il COP è il rapporto tra il calore a bassa temperatura e il lavoro, ovvero:

$$\varepsilon_f = \frac{Q_F}{L}$$

2. Se la macchina è una pompa di calore, il COP è il rapporto tra il calore ad alta temperatura e il lavoro:

$$\varepsilon_p = \frac{Q_C}{L}$$

Si osserva che il COP non può essere considerato un rendimento, perché può anche essere maggiore di 1.

Formule per il calcolo del COP

♦ Macchina frigorifera

Nel caso di una macchina frigorifera, il COP si calcola mediante la formula:

$$\varepsilon_f = \frac{T_F}{T_C - T_F + \frac{T_C T_F S_{irr}}{Q_F}}$$

Nel caso in cui il sistema sia reversibile, la formula diventa:

$$\varepsilon_f = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

♦ Pompa di calore

Nel caso di una pompa di calore, il COP si calcola mediante la formula:

$$\varepsilon_{pdc} = \frac{T_C}{T_C - T_F + \frac{T_C T_F S_{irr}}{Q_C}}$$

Nel caso in cui il sistema sia reversibile, la formula diventa:

$$\varepsilon_f = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Si osserva che nel caso di macchina reversibile il COP dipende solo dalle temperature dei 2 serbatoi di calore. Si nota inoltre che, nel caso di pompa di calore, il COP è sempre maggiore di 1.

Dimostrazione delle formule

La dimostrazione è molto simile a quella relativa alle macchine motrici. Fino a quando non viene eliminata la notazione vettoriale, in particolare, il procedimento è esattamente lo stesso e perciò, con passaggi che non ripetiamo, si arriva a dimostrare:

$$\begin{cases} Q_C^- - L_{sl}^+ + Q_F^- = 0 \\ S_{irr} = \frac{Q_C^-}{T_C} + \frac{Q_F^-}{T_F} \end{cases}$$

A questo punto, togliendo la notazione vettoriale, si ottiene:

$$\begin{cases} Q_C - L - Q_F = 0 \\ S_{irr} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_F = Q_C - L \\ S_{irr} = Q_C \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F} \right) + \frac{L}{T_F} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_F = Q_C - L \\ L = S_{irr} T_F + Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right) \end{cases}$$

Analogamente, il lavoro può essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{cases} Q_C - L - Q_F = 0 \\ S_{irr} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_C = Q_F + L \\ S_{irr} = Q_F \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F} \right) + \frac{L}{T_C} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_C = Q_F + L \\ L = S_{irr} T_C + Q_F \left(\frac{T_C}{T_F} - 1 \right) \end{cases}$$

A questo punto, per il calcolo del COP di una pompa di calore, possiamo sostituire nella definizione, al posto di L, la prima delle formule appena determinate:

$$\varepsilon_{pdc} = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_C}{S_{irr} T_F + Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right)} = \frac{Q_C}{S_{irr} T_F + \frac{Q_C}{T_C} (T_C - T_F)} = \frac{Q_C T_C}{S_{irr} T_F T_C + Q_C (T_C - T_F)} = \frac{T_C}{\frac{S_{irr} T_F T_C}{Q_C} + T_C - T_F}$$

Per calcolare il COP di una macchina refrigeratrice, usiamo la seconda delle formule prima dimostrate:

$$\varepsilon_f = \frac{Q_F}{L} = \frac{Q_F}{S_{irr} T_C + Q_F \left(\frac{T_C}{T_F} - 1 \right)} = \frac{Q_F}{S_{irr} T_C + \frac{Q_F}{T_F} (T_C - T_F)} = \frac{Q_F T_F}{S_{irr} T_C T_F + Q_F (T_C - T_F)} = \frac{T_F}{\frac{S_{irr} T_F T_C}{Q_F} + T_C - T_F}$$

5. Macchine termiche con serbatoi a massa finita

Introduzione

Fino ad ora abbiamo analizzato solamente macchine termiche dotate di serbatoi di calore e di lavoro con massa infinita. Consideriamo ora cosa accade se il serbatoio caldo è di massa finita e contiene un liquido ideale (negli altri casi i passaggi sono molto simili anche se, ovviamente, le formule finali sono diverse).

Macchina motrice con serbatoio caldo di massa finita contenente liquido ideale

Possiamo ripercorrere da capo le considerazioni viste in precedenza: il sistema è chiuso e isolato, perciò:

$$\Delta S = S_{irr}$$

La variazione totale di entropia della macchina operatrice può poi essere scomposta nella somma delle variazioni di energia entropia dei singoli componenti del sistema:

$$\Delta S_Z = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F$$

Riprendendo la formula precedente:

$$S_{irr} = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F$$

Analogamente, la variazione di energia interna può essere scomposta nella somma delle variazioni di energia interna dei singoli componenti del sistema:

$$\Delta U_Z = \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F$$

Siccome il sistema è isolato, la variazione totale di energia è nulla ($\Delta U_Z = 0$), quindi:

$$\Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F = 0$$

Abbiamo così ottenuto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \Delta U_C + \Delta U_M + \Delta U_{sl} + \Delta U_F = 0 \\ S_{irr} = \Delta S_C + \Delta S_M + \Delta S_{sl} + \Delta S_F \end{cases}$$

A questo punto, possiamo osservare che:

1. Per quanto riguarda il serbatoio caldo, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta U_C &= Q_C^- = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1), & T_2 > T_1 \\ \Delta S_C &= m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{aligned}$$

2. Per quanto riguarda il serbatoio freddo, valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza, quindi:

$$\begin{aligned} \Delta U_F &= Q_F^- \\ \Delta S_F &= \int \frac{\delta Q}{T_F} = \frac{1}{T_F} \int \delta Q = \frac{Q_F^-}{T_F} \end{aligned}$$

3. Anche per il serbatoio di lavoro non è cambiato nulla:

$$\begin{aligned} \Delta U_{sl} &= -L_{sl}^+ \\ \Delta S_{sl} &= 0 \end{aligned}$$

4. Infine, siccome M è ciclica e sia U che S sono funzioni di stato:

$$\begin{aligned} \Delta U_M &= 0 \\ \Delta S_M &= 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza, se sostituiamo nelle precedenti formule, otteniamo:

$$\begin{cases} m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) - L_{sl}^+ + Q_F^- = 0 \\ S_{irr} = m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{Q_F^-}{T_F} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) - L_{sl} + Q_F = 0 \\ S_{irr} = m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{Q_F}{T_F} \end{cases}$$

Da cui ricaviamo, supponendo $S_{irr} = 0$:

$$Q_F = -m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = T_F \cdot m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

E:

$$L = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) - T_F \cdot m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

E infine:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) - m \cdot c_v \cdot T_F \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 - T_F \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{T_2 - T_1}$$

La formula così ricavata è l'espressione del rendimento termodinamico di una macchina motrice che opera reversibilmente con il serbatoio superiore a massa finita.

6. Enunciazioni classiche del 2° principio della td.

Introduzione

Con i concetti appena introdotti, possiamo rivedere l'enunciato del 2° principio della termodinamica (che abbiamo già matematicamente enunciato), analizzando quelle che sono state le sue enunciazioni classiche.

Enunciato 1

Il calore passa spontaneamente da un corpo caldo ad uno freddo.

♦ Dimostrazione

Consideriamo il sistema mostrato a lato e dimostriamo che, siccome il calore passa dal serbatoio 1 al 2, si ha necessariamente $T_1 > T_2$. Abbiamo:

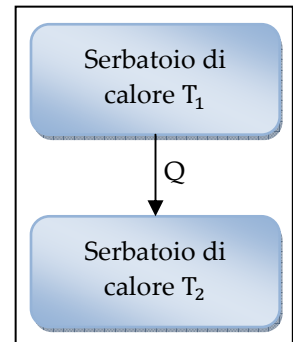
$$\Delta S_Z = S_{irr} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q_1^-}{T_1} + \frac{Q_2^-}{T_2} = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2}$$

Da cui:

$$S_{irr} = Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Ma siccome $S_{irr} > 0$:

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} > 0 \rightarrow \frac{1}{T_2} > \frac{1}{T_1} \rightarrow T_1 > T_2$$

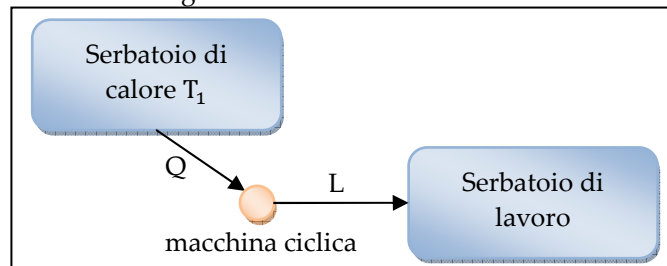


Enunciato di Lord Kelvin

Non esiste una macchina ciclica il cui unico effetto sia l'assorbimento di calore da una sorgente calda e la produzione di una equivalente quantità di lavoro.

♦ Dimostrazione

Consideriamo il sistema mostrato in figura:



Il sistema è isolato, perciò:

$$\Delta U_Z = 0$$

Inoltre, possiamo scrivere:

$$\Delta U_Z = \Delta U_{sc} + \Delta U_M + \Delta U_{sl}$$

Da cui:

$$\Delta U_{sc} + \Delta U_M + \Delta U_{sl} = 0$$

Possiamo poi scrivere:

$$\Delta S_Z = S_{irr}$$

Inoltre, scomponendo la variazione di entropia:

$$\Delta S_Z = \Delta S_{sc} + \Delta S_M + \Delta S_{sl}$$

Da cui:

$$S_{irr} = \Delta U_{sc} + \Delta U_M + \Delta U_{sl}$$

Siccome poi:

$$\Delta U_{sc} = Q_{sc}^- = -Q$$

$$\Delta U_M = 0 \text{ (perché ciclica)}$$

$$\Delta U_{sl} = -L_{sl} = -L$$

$$\Delta S_{sc} = \frac{Q_{sc}^-}{T_{sc}} = -\frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_{sc} = 0 \text{ (perché ciclica)}$$

$$\Delta S_{sc} = 0$$

E quindi:

$$S_{irr} = -\frac{Q}{T_1}$$

Ma siccome si è supposto $Q > 0$ e la temperatura, in Kelvin, è necessariamente positiva, dovremmo avere $S_{irr} < 0$ (impossibile). Di conseguenza, il calore deve essere ceduto dalla macchina ciclica al serbatoio di calore, e non viceversa.

Enunciato di Clausius

Non esiste una macchina ciclica che non produca altro effetto che il trasferimento di calore da una sorgente fredda ad una sorgente calda.

7. Interpretazione fisica del concetto di entropia

L'interpretazione fisica di "entropia"

È evidente ai nostri sensi che l'energia di un sistema termodinamico isolato può essere espressa come somma di due termini: l'energia disponibile ad essere convertita in lavoro (E_{disp}) e l'energia che non è possibile convertire in lavoro ($E_{\text{non disp}}$):

$$E = E_{\text{disp}} + E_{\text{non disp}}$$

Definiamo l'entropia come proprietà di un sistema termodinamico la cui variazione dS a seguito di una trasformazione sia proporzionale alla differenza fra la variazione di energia totale dE e la variazione dell'energia disponibile per produrre lavoro E_{disp} :

$$dS = C(dE - dE_{\text{disp}})$$

Per un sistema isolato che evolva verso una diversa situazione di equilibrio a seguito della rimozione di vincoli il principio di conservazione dell'energia consente di affermare che $dE = 0$ mentre il principio di degradazione dell'energia consente di affermare che $dE_{\text{disp}} < 0$ e quindi che $dS_{\text{is}} \geq 0$.

Secondo questa interpretazione l'entropia risulta essere una misura dell'energia non disponibile.

Capitolo 5: Sistemi aperti

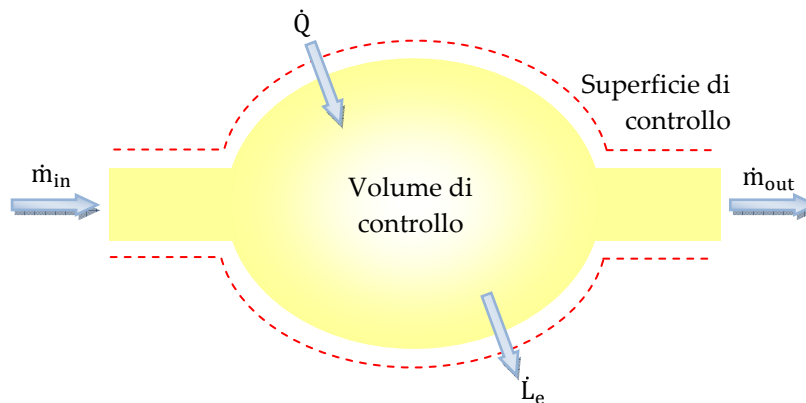
1. Introduzione ai sistemi aperti

Sistemi aperti

I sistemi aperti sono sistemi nei quali al contorno si scambia non solo calore e lavoro, ma anche massa.

Per definire il sistema aperto, dobbiamo innanzitutto definire un volume di controllo entro il quale analizzare le variazioni di massa e delle altre grandezze. Il volume di controllo è definito da una superficie di controllo attraverso la quale vengono scambiate, nell'unità di tempo, calore, lavoro e massa.

Naturalmente, la portata in ingresso e quella in uscita non sempre sono uguali e quindi è possibile, ad esempio, che si assista ad un accumulo di massa.



Siccome all'interno fluisce una certa massa, in questo caso si considereranno come grandezze non più le energie, bensì le potenze.

2. Equazioni di bilancio

Il bilancio di massa

Oltre i bilanci di energia e di entropia, nel caso di sistemi aperti occorre scrivere il bilancio di massa. L'equazione del bilancio di massa impone che la variazione di massa nell'unità di tempo sia data dalla somma delle portate massiche (con segno positivo se si tratta di portate in ingresso, e con segno negativo se sono uscenti dal sistema). In formula, scriviamo quindi:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_i \dot{m}_i^{\leftarrow}$$

♦ L'equazione di continuità

Per esprimere una portata massica, possiamo usare l'equazione di continuità:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot \Omega$$

La portata massica è quindi data dal prodotto tra la massa volumica ρ , la velocità w e l'area della sezione attraverso la quale avviene lo scambio di massa, indicata con Ω .

Il bilancio di energia

L'energia accumulata nel sistema nell'unità di tempo è pari alla differenza tra la somma delle potenze entranti e la somma delle potenze uscenti. In altri termini:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}^{\leftarrow}$$

Dove \dot{E}^{\leftarrow} ha come componenti l'energia associata al trasporto di massa, il calore scambiato, il lavoro scambiato e l'energia dovuta a una sorgente.

- ♦ **Calore scambiato**

Il calore scambiato con l'esterno viene semplicemente indicato con \dot{Q}^{\leftarrow} .

- ♦ **Lavoro scambiato**

Il lavoro scambiato ha due voci fondamentali:

1. Il lavoro d'elica

Viene indicato con L_e^{\leftarrow} .

2. Il lavoro di pulsione

Consideriamo di voler far entrare nel volume di controllo V un certo fluido che occupa, prima di entrare nel volume di controllo, un certo volume V_m e che ha una massa m . Il lavoro che compiamo per farlo entrare nel volume di controllo è detto *lavoro di pulsione*, e viene considerato positivo entrante.

Per calcolare il lavoro di pulsione, consideriamo il sistema $V + V_m$ con massa totale m_i immettendo nel volume di controllo la massa m , il volume totale diminuisce (diventa solo V), ma la massa rimane m_i . Siccome il sistema considerato è chiuso, avremo:

$$L_{pk}^{\leftarrow} = - \int_{V+V_m}^V P \cdot dv = P \cdot V_m = m_i \cdot P \cdot v_i$$

Dobbiamo poi sommare i contributi relativi a tutte le portate:

$$L_p^{\leftarrow} = \sum_k (m_k \cdot P_k \cdot v_k)$$

- ♦ **Energia associata al trasporto di massa**

L'energia associata al trasporto di massa è data dall'equazione:

$$E_m = \sum_i \left[m_i^{\leftarrow} \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right)_i \right]$$

Dove la somma è riferita ad ogni sezione di ingresso e di uscita. L'energia associata al trasporto di massa ha quindi un contributo di energia interna ($m_i^{\leftarrow} u$), un contributo di energia potenziale gravitazionale ($m_i^{\leftarrow} gz$, dove g è l'accelerazione di gravità e z è la quota) e un contributo di energia cinetica ($0.5 m_i^{\leftarrow} w^2$, dove w è la velocità).

- ♦ **Energia dovuta ad una sorgente**

Quest'ultima voce, che verrà generalmente trascurata, comprende l'energia dovuta all'effetto Joule, a reazioni chimiche o nucleari, ...

Possiamo quindi così riscrivere il bilancio di energia (considerando solo due flussi di massa, uno in ingresso ed uno in uscita):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \dot{E}^{\leftarrow} &= \dot{m}_i \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right) - \dot{m}_u \left(u + gz + \frac{w^2}{2} \right) + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_E^{\rightarrow} + \dot{m}_i(Pv)_i - \dot{m}_u(Pv)_u \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{m}_i \left[u + gz + \frac{w^2}{2} + (Pv)_i \right] - \dot{m}_u \left[u + gz + \frac{w^2}{2} + (Pv)_u \right] + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_E^{\rightarrow} \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{m}_i \left[h + gz + \frac{w^2}{2} \right]_i - \dot{m}_u \left[h + gz + \frac{w^2}{2} \right]_u + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_E^{\rightarrow} \\ \frac{dE}{dt} &= \sum_k \dot{m}_k^{\leftarrow} \left[h + gz + \frac{w^2}{2} \right]_k + \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}_E^{\rightarrow} \end{aligned}$$

Bilancio di entropia

La variazione di entropia è molto simile a quella che si ha nel caso di sistemi chiusi, ma in questo caso è presente anche un termine legato alla variazione di massa:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \dot{m}_k s_k + \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr}$$

Regime stazionario

Ipotizziamo di trovarci in regime stazionario (supponiamo cioè che la massa in ingresso sia uguale a quella in uscita, e analogamente per l'entropia e l'energia). In questo caso, per definizione, la portata massica è nulla; analogamente, il termine di accumulo di energia nell'unità di tempo è nullo, e il termine di accumulo di entropia è nullo:

$$\begin{aligned} \dot{m}_i^+ = -\dot{m}_u^- \\ \dot{m}_i \left[h + gz + \frac{w^2}{2} \right]_i - \dot{m}_u \left[h + gz + \frac{w^2}{2} \right]_u + \dot{Q} - \dot{L}_E = 0 \\ \sum_k \dot{m}_k s_k + \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr} = 0 \end{aligned}$$

Se immaginiamo di poter trascurare la variazione di energia potenziale e quella di energia cinetica (come spesso accade), possiamo scrivere:

$$\dot{m}(h_i - h_u) + \dot{Q} - \dot{L}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{m}(h_u - h_i) = \dot{Q} - \dot{L}_e \quad \rightarrow \quad \dot{m}\Delta h = \dot{Q} - \dot{L}_e$$

L'equazione così ottenuta è abbastanza simile all'equazione di bilancio per i sistemi chiusi. Analogamente, per l'entropia abbiamo un'equazione simile a quella dei sistemi chiusi.

3. Macchina aperta

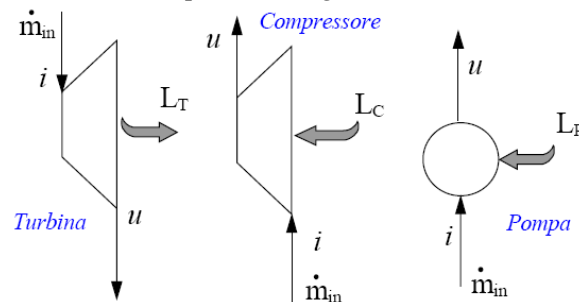
Cos'è una macchina aperta?

Una macchina aperta è una macchina termica che prevede che si abbia uno scambio di massa con l'esterno, a differenza di quanto accadeva nelle macchine fino ad ora analizzate.

Esistono moltissimi dispositivi che sono caratterizzati dall'avere una sezione d'ingresso e una d'uscita attraverso le quali evolvono dei fluidi. Quelli che analizzeremo meglio sono la turbina, il compressore (attraverso i quali evolvono dei gas) e la pompa (all'interno della quale evolve un liquido).

♦ *Turbina, compressore e pompa*

Queste macchine aperte sono dispositivi adiabatici atti a scambiare lavoro, per i quali si considerano trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale tra le sezioni di ingresso e di uscita. Per queste macchine possiamo inoltre considerare di operare in regime stazionario.



La turbina è un esempio di macchina che rende disponibile lavoro, mentre il compressore e la pompa sono macchine atte ad assorbire lavoro.

- Turbina

Una turbina è una macchina che converte l'energia cinetica e/o potenziale di un fluido, ad esempio acqua o vapore acqueo, e la trasforma in lavoro.

La tipologia più semplice di turbina prevede un complesso chiamato stadio, formato da una parte fissa, detta distributore o statore, ed una parte mobile, girante o rotore. Il fluido in movimento agisce sulla palettatura della parte rotorica, mettendola in rotazione e quindi cedendo energia meccanica al rotore. I primi esempi di turbina furono i mulini a vento e le ruote idrauliche.

- Compressore e pompa

Il compressore è una macchina operatrice che innalza la pressione di un gas mediante l'impiego di energia meccanica.

Una pompa è analoga ad un compressore, ma si distingue da quest'ultimo per il semplice fatto che opera con un fluido incompressibile (un liquido).

Le equazioni di bilancio per queste macchine sono:

1. Bilancio di energia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_i - h_u) - \dot{L}_e = 0$$

2. Bilancio di entropia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

♦ *Scambiatore di calore*

Lo scambiatore di calore è un componente in cui si realizza uno scambio di energia termica tra due fluidi a temperature diverse. In generale gli scambiatori sono sistemi aperti che operano senza scambio di lavoro, ovvero presentano un flusso costante di fluido e una distribuzione di temperatura a regime costante. Anche in questo caso si trascurano le variazioni di energia potenziale e cinetica.

Le equazioni di bilancio sono:

1. Bilancio di energia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_i - h_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

2. Bilancio di entropia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr} = 0$$

♦ **Diffusore**

Il diffusore è un dispositivo adiabatico che sfrutta la variazione di entropia per far variare la velocità tra l'ingresso e l'uscita.

Un diffusore quindi è un condotto che consente di realizzare una diminuzione della velocità del fluido (se la velocità aumenta si parla invece di ugello) a vantaggio di un aumento di pressione e di densità.

In questo caso non si può trascurare la variazione di energia cinetica, ma si continua a trascurare la variazione di energia potenziale.

Le equazioni di bilancio sono in questo caso:

1. Bilancio di energia

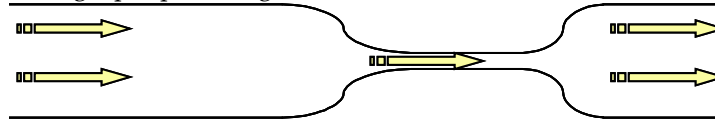
$$(h_i - h_u) + \frac{w_i^2 - w_u^2}{2} = 0$$

2. Bilancio di entropia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

♦ **Valvola di laminazione**

La valvola di laminazione è un organo di strozzamento, usato all'interno delle macchine frigorifere, che degrada l'energia di pressione in attrito. La sua conformazione più semplice è quella costituita da un tubo capillare che si restringe, per poi allargarsi nuovamente:



Il suo scopo è quello di far diminuire di molto la temperatura del refrigerante, grazie alla diminuzione di pressione che si ha in uscita dallo strozzamento della valvola di laminazione stessa.

Solitamente, la macchina frigorifera a compressione è costituita da:

1. Un compressore, che fa aumentare la pressione del refrigerante (sottoforma di gas).
2. Uno scambiatore di calore (condensatore) che assorbe calore trasformando in liquido il refrigerante.
3. Una valvola di laminazione, che abbassa drasticamente la pressione del fluido e, di conseguenza, anche la sua temperatura.
4. Un secondo scambiatore di calore (evaporatore), che assorbe calore dal fluido facendolo trasformare nuovamente in gas.

La valvola di laminazione è un organo statico nel quale avvengono trasformazioni che non prevedono lo scambio di calore, né di lavoro. Attraverso un semplice bilancio di energia, si dimostra che da ciò consegue che le trasformazioni che avvengono nella valvola di laminazione sono isoentalpiche. Inoltre, si può dimostrare che un dispositivo isoentalpico stazionario non può essere isentropico: per definizione quindi le trasformazioni che avvengono nella valvola di laminazione sono irreversibili.

1. Bilancio di energia

$$h_i - h_u = 0$$

2. Bilancio di entropia

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

Si noti che in tutti i dispositivi finora presentati, non è stato considerato il bilancio di massa, perché tale bilancio è stato considerato implicito. Infatti, siccome si ha una sola sezione di ingresso e una sola sezione d'uscita ci si trova in condizioni stazionarie, il bilancio è semplicemente:

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow} = \dot{m}_{out}^{\leftarrow}$$

Turbine

La turbina è una macchina aperta, attraversata da un gas, nella quale avviene una trasformazione adiabatica finalizzata a fornire del lavoro: il gas entra ad una certa temperatura e con una certa pressione, e ne esce a temperatura e pressione diverse (con pressione più bassa).

Come abbiamo detto, nel caso di turbina trascuriamo le variazioni di energia cinetica e potenziale tra le sezioni di ingresso e di uscita e supponiamo di operare in regime stazionario.

♦ Rendimento isentropico

Vogliamo ora calcolare il *rendimento isentropico della turbina* (η_{is}) ovvero il rapporto tra la potenza realmente ottenuta e la potenza massima ottenibile in condizioni ideali, a parità di condizioni di ingresso e a parità di pressione di fine espansione.

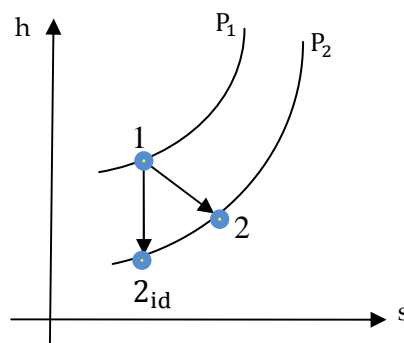
La condizione ideale è rappresentata dalla condizione di reversibilità. In questo caso, il bilancio di entropia, che era inizialmente:

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) + \dot{S}_{irr} = 0$$

Diventa:

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(s_i - s_u) = 0 \quad \rightarrow \quad s_i = s_u$$

Abbiamo quindi ricavato che la situazione ideale è rappresentata da una trasformazione adiabatica isentropica. A questo punto possiamo rappresentare la situazione nel piano h-s: in questo piano, le isobare sono delle esponenziali; la temperatura e la pressione iniziali ci consentono di identificare il punto 1 in tale piano. Per individuare il punto 2, nel caso reale si avrà un punto a entropia maggiore di 1, e questo punto si troverà sull'isobara corrispondente alla pressione d'uscita, in un punto che dipende anche dalla temperatura d'uscita; nel caso ideale è sufficiente ricordare che la variazione di entropia è nulla (quindi 2 è sulla stessa verticale su cui si trova 1), e che ci troviamo sulla stessa isobara del caso reale. Nel grafico seguente, la trasformazione reale è rappresentata dalla freccia 1 → 2, mentre quella ideale è evidenziata mediante la freccia 1 → 2_{id} (la rappresentazione nel piano T-s è qualitativamente uguale).



Dall'equazione di bilancio di energia, abbiamo:

$$\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_i - h_u) - \dot{L}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L}_e = \dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_i - h_u)$$

Di conseguenza, avremo:

$$\eta_{isturbina} = \frac{\dot{L}_{reale}}{\dot{L}_{ideale}} = \frac{\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_1 - h_2)}{\dot{m}_{in}^{\leftarrow}(h_1 - h_{2id})} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2id}}$$

Compressore

Il compressore è una macchina aperta, attraversata da un gas, nella quale avviene una trasformazione adiabatica che assorbe del lavoro. Il gas entra ad una certa temperatura e con una certa pressione, e ne esce a temperatura e pressione diverse. Anche per i compressori, trascuriamo le variazioni di energia cinetica e potenziale tra le sezioni di ingresso e di uscita e supponiamo di operare in regime stazionario.

♦ Rendimento isentropico

In questo caso, il *rendimento isentropico del compressore* (η_{is}) è definito come il rapporto tra la potenza minima spesa in condizioni ideali (trasformazione del fluido reversibile, ovvero, così come nel caso della turbina, adiabatica isentropica) e la potenza realmente spesa a parità di condizioni di ingresso e a parità di pressione di fine compressione.

Si nota quindi che in questo caso si ha a numeratore la potenza ideale e a denominatore la potenza reale: questo è dovuto al fatto che la potenza reale è inferiore rispetto a quella ideale, e il rendimento deve essere minore di uno.

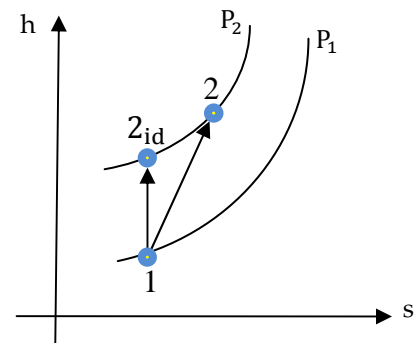
La trasformazione nel piano h-s è rappresentata nel grafico a lato.

Dall'equazione di bilancio di energia, abbiamo:

$$\dot{m}_{in}^-(h_i - h_u) - \dot{L}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L}_e = \dot{m}_{in}^-(h_i - h_u)$$

Di conseguenza, avremo:

$$\eta_{iscompressore} = \frac{\dot{L}_{ideale}}{\dot{L}_{reale}} = \frac{\dot{m}_{in}^-(h_1 - h_{2id})}{\dot{m}_{in}^-(h_1 - h_2)} = \frac{h_1 - h_{2id}}{h_1 - h_2}$$



♦ Lavoro specifico per unità di massa fluente

È possibile dimostrare che il lavoro per unità di massa è dato dalla formula:

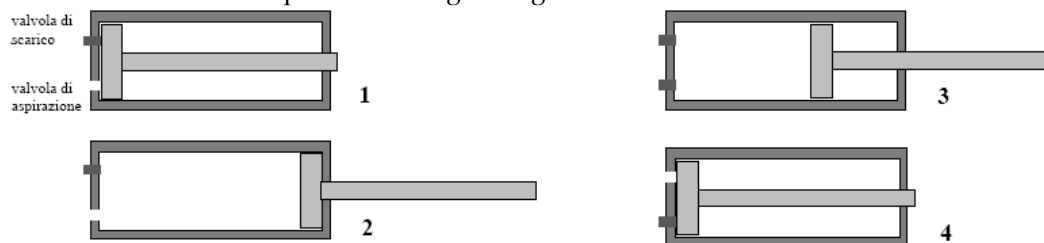
$$l_e = \int_i^u v \, dP - \int_i^u T \, ds_{irr}$$

Dove la componente reversibile è:

$$l_{rev} = \int_i^u v \, dP$$

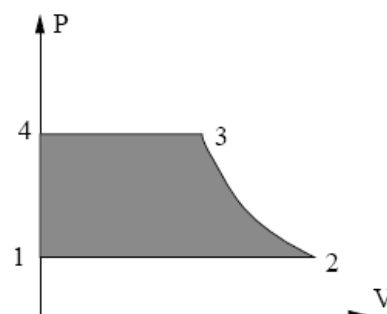
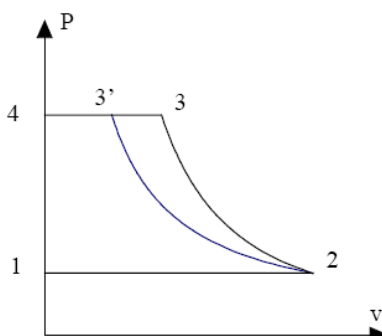
♦ Calcolo del lavoro nel caso di compressore alternativo ideale

Sfruttando la formula appena introdotta, possiamo calcolare il lavoro del compressore alternativo ideale, il cui funzionamento è espresso nelle figure seguenti:



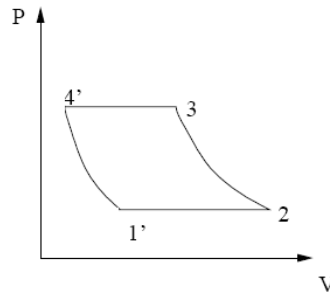
Prima si fa entrare il gas attraverso la valvola di aspirazione, quindi lo si comprime e infine si apre la valvola di scarico per far fuoriuscire il gas. La compressione può essere adiabatica oppure isoterma, come mostrato nel grafico di sinistra. Nel grafico a destra si mette invece in evidenza che il lavoro è l'area colorata, e che quindi viene calcolata con la formula:

$$l^+ = - \int_1^3 v \, dP$$



♦ **Compressore alternativo reale**

Il ciclo che rappresenta un compressore alternativo reale è però diverso da quello ideale appena descritto, ed è del tipo mostrato in figura (quando si apre la valvola di scarico, non si ha una trasformazione isovolumica, come accadeva nel caso ideale):



Si introducono perciò i concetti di *rendimento volumetrico* e di *rapporto di compressione*:

1. Rendimento volumetrico

Il rendimento volumetrico è:

$$\eta = \frac{V_2 - V_{1'}}{V_2 - V_{4'}}$$

Naturalmente, nel caso ideale si ha $V_{4'} = V_{1'}$ e quindi $\eta = 1$.

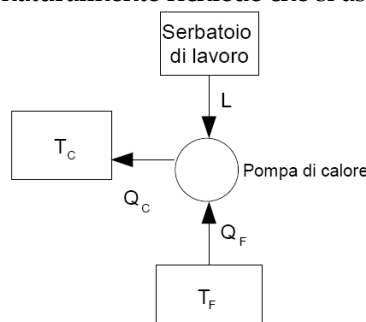
2. Rapporto di compressione

Il rapporto di compressione è:

$$\rho = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{P_3}{P_2}$$

Pompa di calore ideale

La pompa di calore ideale è una macchina aperta, attraversata da un fluido (a differenza di turbina e compressore), nella quale avviene una trasformazione adiabatica che assorbe del lavoro. Lo scopo della pompa di calore è quello di estrarre del calore da una sorgente a bassa temperatura, per cederlo ad un sistema ad alta temperatura (e questo naturalmente richiede che si assorba del lavoro).



♦ **Trasformazione ideale e lavoro nel caso ideale**

A lato è riportato il grafico relativo alla trasformazione ideale. Ricordando che il lavoro è dato da:

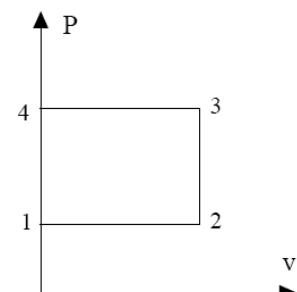
$$l_e = \int_i^u v \, dP - \int_i^u T \, ds_{\text{irr}}$$

Dove la componente reversibile è:

$$l_{\text{rev}} = \int_i^u v \, dP$$

Avremo:

$$l^* = v \cdot (P_4 - P_1)$$



♦ **Coefficiente di prestazione**

Inoltre è possibile calcolare il coefficiente di prestazione mediante la formula:

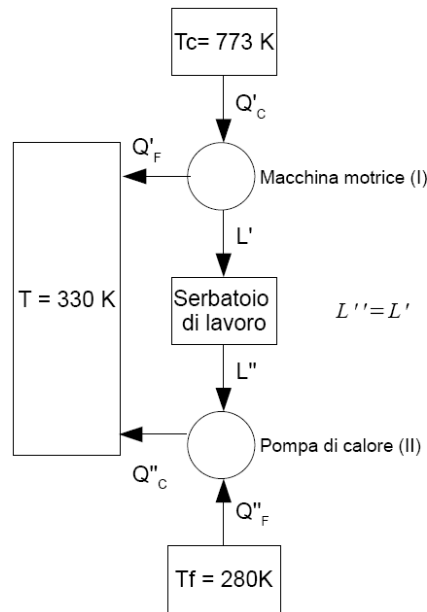
$$\text{COP}_{\text{pompa}} = \frac{T_c}{T_c + T_f}$$

Si noti però che le temperature in gioco non sono costanti, perciò il coefficiente di prestazione non è un parametro fisso. Si noti inoltre che il COP risulta basso soprattutto nel caso in cui si ha maggiormente bisogno di avere buone prestazioni, ovvero quando la differenza tra le due temperature è bassa.

4. Pompa di calore a termocompressione

Principio di funzionamento

La pompa di calore a termocompressione prevede l'uso di una macchina motrice, che prelevi calore ad alta temperatura producendo un certo lavoro e cedendo calore ad una sorgente a bassa temperatura (l'ambiente che si desidera riscaldare); il lavoro così prodotto viene fornito ad una pompa di calore, che preleva altro calore da una nuova sorgente di calore, che si trovi a bassa temperatura, cedendolo all'ambiente che si vuole riscaldare.



Calcolo del coefficiente di prestazione

♦ La formula

La formula da applicare per il calcolo del COP (indicato anche con ϵ) è:

$$\text{COP} = \frac{Q}{Q'_c} = \frac{T_c - T_f}{T - T_f} \cdot \frac{T}{T_c}$$

♦ Dimostrazione

Per prima cosa, calcoliamo il bilancio di energia relativo alla pompa a termocompressione:

$$Q'_c + Q''_f = Q$$

Dove $Q = Q'_c + Q''_f$. Inoltre, il bilancio di entalpia è:

$$-\frac{Q'_c}{T_c} - \frac{Q''_f}{T_f} + \frac{Q}{T} = S_Q + S_{\text{irr}}$$

Siccome nel complesso la macchina è adiabatica, avremo $S_Q = 0$; inoltre, stiamo considerando una situazione ideale, perciò poniamo $S_{\text{irr}} = 0$. Di conseguenza:

$$-\frac{Q'_c}{T_c} - \frac{Q''_f}{T_f} + \frac{Q}{T} = 0 \quad \rightarrow \quad Q''_f = T_f \left(\frac{Q}{T} - \frac{Q'_c}{T_c} \right)$$

Abbiamo così:

$$Q'_c + T_f \left(\frac{Q}{T} - \frac{Q'_c}{T_c} \right) = Q \quad \rightarrow \quad Q \left(1 - \frac{T_f}{T} \right) = Q'_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{T - T_f}{T} Q = \frac{T_c - T_f}{T_c} Q'_c$$

Quindi:

$$Q = \frac{T_c - T_f}{T - T_f} \cdot \frac{T}{T_c} Q'_c$$

E infine:

$$\text{COP} = \frac{Q}{Q'_c} = \frac{T_c - T_f}{T - T_f} \cdot \frac{T}{T_c}$$

Capitolo 6: Sistemi bifase

1. Introduzione ai sistemi bifase

Inquadramento nel discorso finora affrontato

Prima di studiare i sistemi bifase, è bene riepilogare il percorso che abbiamo fino ad ora svolto.

1. Per prima cosa, abbiamo dato le definizioni che costituissero un glossario comune, al fine di poter usare una terminologia adeguata che consentisse di evitare equivoci o ambiguità.
2. Siamo poi passati a definire i sistemi termodinamici. Dapprima ci siamo concentrati su una loro sottocategoria piuttosto semplice, rappresentata dai *sistemi chiusi*. Per questi sistemi, abbiamo definito tutta una serie di strumenti (prevalentemente matematici) che ci consentissero di individuare gli stati di equilibrio del sistema (le equazioni di stato e di bilancio, ...).
Siccome la legge di stato è nota solo nel caso di gas ideali, abbiamo deciso di concentrarci solo su questi ultimi (e in particolare sui gas perfetti).
3. Le situazioni descrivibili mediante sistemi chiusi risultavano tuttavia piuttosto limitate, perciò abbiamo allargato il nostro campo di studio, introducendo i sistemi aperti, con i relativi elementi di complessità aggiuntivi.

A questo punto, vogliamo introdurre gli strumenti per analizzare sistemi che siano costituiti non più da gas ideali: ci concentreremo così sui sistemi bifase, ovvero sui sistemi nei quali è in atto un cambiamento di stato.

Classificazione dei sistemi

Un sistema può essere:

- ♦ **Sistema omogeneo**

Un sistema omogeneo è un sistema termodinamico che si presenta sotto un unico stato di aggregazione.

- ♦ **Sistema eterogeneo**

Un sistema termodinamico è eterogeneo se si presenta sotto più di uno stato di aggregazione

Dal punto di vista della terminologia, in fisica tecnica non si parla di *stati di aggregazione*, ma (anche se impropriamente) si usa il termine *fase*. Considereremo perciò il termine *fase* come sinonimo di *stato di aggregazione*, anche se originariamente una fase è la “possibilità di un materiale di presentarsi all'esterno con una diversa struttura atomica all'interno del proprio reticolo cristallino”.

Si ricorda inoltre che esiste la seguente distinzione:

- ♦ **Sistema monocomponente**

Un sistema monocomponente è un sistema che contiene una sola sostanza.

- ♦ **Sistema multicomponente**

Un sistema multicomponente è un sistema che contiene una miscela di sostanze diverse.

Questa distinzione risulterà però poco utile nel nostro corso, perché analizzeremo solamente sistemi monocomponente (l'unica miscela che studiamo è l'aria, che però consideriamo come un gas ideale).

Da questo momento in poi quindi ci concentreremo su sistemi eterogenei monocomponente.

2. I sistemi eterogenei

Classificazione

I sistemi monocomponente possono essere classificati in:

- ♦ **Stati monofasi**

Il sistema si trova interamente in uno stato tra:

1. Lo stato liquido;
2. Lo stato solido;
3. Lo stato gassoso (aeriforme).

- ♦ **Stati bifasi**

Si hanno tre ulteriori possibilità:

1. Coesistenza di stato solido e stato liquido;
2. Coesistenza di stato liquido e stato aeriforme;
3. Coesistenza di stato solido e stato aeriforme.

- ♦ **Stati trifasi**

In alcune particolari condizioni di temperatura e pressione è possibile che la sostanza si presenti sotto tre fasi (solido, liquido e vapore quindi coesistono nello stesso sistema).

Noi ci concentreremo d'ora in poi sui sistemi bifasi, e in particolare sui passaggi da liquido a vapore o viceversa (quindi studieremo sistemi bifase con coesistenza tra stato liquido ed aeriforme).

Grandezze estensive e grandezze estensive specifiche del sistema

Vediamo adesso quali sono i legami tra le grandezze estensive dell'intero sistema (o quelle estensive specifiche) e le corrispondenti grandezze estensive (o estensive specifiche) relative alle singole fasi. A questo scopo, indichiamo con α e β le due fasi che costituiscono il sistema complessivo.

- ♦ **Grandezze estensive**

In generale, indicando con E una generica grandezza estensiva, per ottenere il valore relativo all'intero sistema è sufficiente sommare i valori della stessa grandezza relativi alle singole fasi:

$$E = E_{\alpha} + E_{\beta}$$

Ad esempio, in un sistema bifase, la massa totale è data dalla somma delle masse delle 2 fasi:

$$M = M_{\alpha} + M_{\beta}$$

A questo punto, introduciamo un concetto che ci servirà a breve: quello di frazione massica di fase.

- ♦ **Frazione massica di fase (o titolo)**

La frazione massica x_{α} di una fase α è il rapporto tra la massa della fase α e la massa totale del sistema:

$$x_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{M}$$

Naturalmente, le frazioni massiche delle due fasi sono in relazione tra loro mediante l'equazione:

$$x_{\alpha} + x_{\beta} = 1$$

Solitamente indicheremo con x la frazione massica della fase vapore, e la frazione massica relativa alla fase del liquido sarà data da $(1 - x)$: questo perché, come accennato, considereremo prevalentemente sistemi del tipo liquido-vapore.

Possiamo ora parlare delle grandezze estensive specifiche.

- ♦ **Grandezze estensive specifiche**

Per quanto riguarda invece le grandezze estensive specifiche del sistema (detta e la generica grandezza di questa tipologia), la grandezza e è data dalla media pesata dei valori della stessa grandezza relativi alle singole fasi, dove il peso usato nel calcolo della media è dato dalla massa delle fasi stesse.

Più semplicemente, in formula scriviamo:

$$e = \frac{M_{\alpha} \cdot e_{\alpha} + M_{\beta} \cdot e_{\beta}}{M}$$

Riprendendo il concetto di *frazione massica di fase* e la formula che lega tra loro le due frazioni massiche, possiamo scrivere anche:

$$e = x_{\alpha} \cdot e_{\alpha} + x_{\beta} \cdot e_{\beta} \quad \rightarrow \quad e = (1 - x_{\beta})e_{\alpha} + x_{\beta}e_{\beta}$$

Ovvero, se abbiamo una trasformazione liquido-vapore e usiamo la simbologia prima introdotta:

$$e = (1 - x)e_l + xe_v$$

Dove e_l è la grandezza estensiva specifica riferita alla fase liquida ed e_v è la grandezza estensiva specifica relativa alla fase gassosa.

Osservazione derivante dalla regola di Gibbs

Come abbiamo visto nel nostro capitolo introduttivo, in un generico sistema vale la regola di Gibbs:

$$V = C + 2 - F$$

Come abbiamo detto, nel nostro corso non consideriamo mai miscele, perciò avremo sempre $C = 1$; inoltre, ci stiamo ora concentrando su sistemi bifase ($F = 2$), e perciò avremo:

$$V = 1 + 2 - 2 = 1$$

Questo significa che per determinare lo stato del sistema è sufficiente individuare una sola grandezza intensiva. Da questo consegue che pressione e temperatura non sono variabili indipendenti durante la *transizione di fase* (ovvero durante il passaggio di stato).

In particolare, durante la transizione di fase, temperatura e pressione rimangono costanti. Avremo perciò:

$$dh = dq + v \cdot dp = dq + v \cdot 0 = dq$$

Terminologia

Introduciamo ora alcuni termini che ci serviranno in seguito:

- ♦ **Liquido sottoraffreddato**

Un liquido sottoraffreddato è un liquido non in procinto di evaporare (es.: l'acqua a 90° e ad 1 atm).

- ♦ **Liquido saturo**

Un liquido saturo è un liquido in procinto di evaporare.

- ♦ **Miscela saturo liquido-vapore**

Una miscela saturo liquido-vapore è un sistema a 2 fasi (liquido e vapore, ovviamente).

- ♦ **Vapore saturo**

Il valore saturo è del vapore in procinto di condensazione.

- ♦ **Vapore surriscaldato**

Chiamiamo vapore surriscaldato il vapore non in procinto di condensazione.

- ♦ **Temperatura di saturazione**

Chiamiamo temperatura di saturazione la temperatura alla quale, fissata una pressione, una sostanza pura inizia ad evaporare. La temperatura di saturazione quindi non è un valore unico, ma varia in funzione della pressione.

3. Diagrammi relativi a sostanze monocomponente

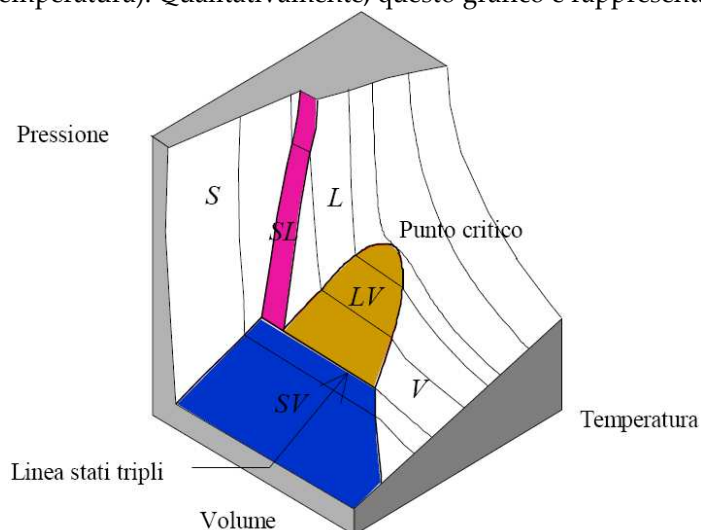
Il diagramma PVT

- ♦ **Introduzione**

Come sappiamo, potremmo cercare di determinare la legge di stato relativa ai sistemi in analisi; tuttavia, tale legge non è matematicamente nota, perciò si è scelto di ricavare in maniera sperimentale (per campionamento) i punti della legge di stato, e di rappresentare graficamente tali dati.

- ♦ **Il grafico qualitativo**

Otteniamo così una superficie, detta *superficie di stato*, all'interno dello spazio a 3 dimensioni PVT (pressione, volume e temperatura). Qualitativamente, questo grafico è rappresentato in figura:



♦ **Osservazioni e terminologia**

1. Curva di saturazione

La curva in cui è racchiuso il passaggio di stato liquido-vapore è detta curva di saturazione.

2. Punto critico

Il punto critico è il limite superiore della curva di saturazione: al di sopra di questo punto, il passaggio da liquido a vapore avviene senza la contemporanea presenza di liquido e vapore. In altri termini, si passa direttamente da una situazione in cui si ha solamente sostanza allo liquido, ad una situazione in cui si ha solamente lo stato gassoso (anche se il passaggio può non essere istantaneo).

3. Linea degli stati tripli

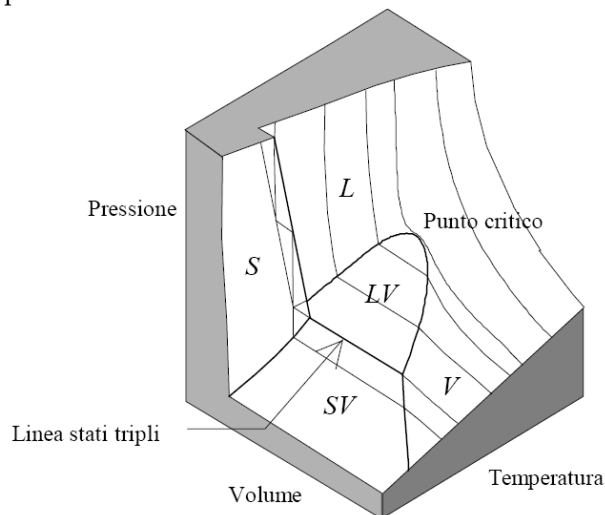
Nel diagramma è stata inoltre messa in evidenza la *linea degli stati tripli*, che è la linea in cui si hanno le condizioni per le quali coesistono le tre diverse fasi (liquida, solida, aeriforme).

4. Le isoterme

La figura precedente mette in evidenza le curve isoterme (che in realtà sono curve *isotermobariche*, perché fissata la temperatura è fissata anche la pressione).

♦ **Caso particolare**

In natura esistono alcune sostanze (per la verità in numero molto ridotto, ma tra queste troviamo l'acqua) che si comportano in maniera leggermente diversa rispetto a quanto mostrato dal precedente diagramma: tali sostanze infatti, durante la solidificazione, aumentano di volume. Il relativo diagramma PVT è così rappresentabile:



Diagrammi PT

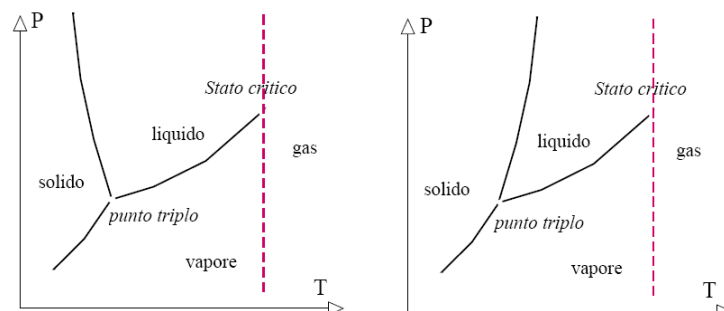
♦ **Introduzione**

Naturalmente, lavorare nello spazio a 3 dimensioni risulta scomodo e complesso, perciò si preferisce operare sulle proiezioni della superficie di stato su uno dei tre piani, oppure si usa la rappresentazione della superficie nel piano del calore.

Analizziamo adesso la proiezione di questa superficie sul piano pressione temperatura (PT).

♦ **Andamento qualitativo**

I diagrammi seguenti rappresentano l'andamento qualitativo del diagramma PT nel caso di sostanze che aumentano di volume durante la solidificazione (a sinistra) e nel caso di sostanze che, solidificando, diminuiscono di volume (a destra).



♦ Osservazioni

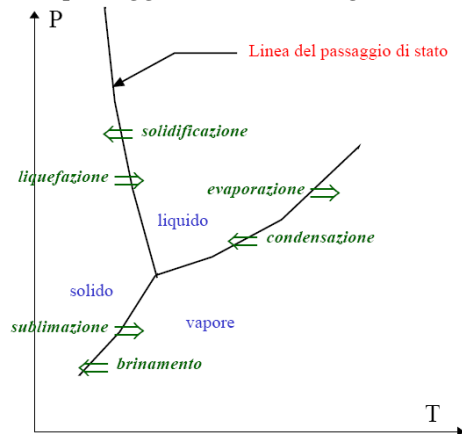
In pratica, per ottenere questi diagrammi abbiamo fissato un certo volume specifico. Si nota dal diagramma PT che il punto critico è ben definito da una coppia di pressione e temperatura. Un'analoga considerazione vale anche per il punto triplo.

Si noti però che, mentre il punto triplo è indipendente dal volume specifico, il punto critico dipende dal volume specifico che stiamo considerando (quindi non è effettivamente un punto nello spazio PVT).

Si noti inoltre che le linee che costituiscono il grafico PT rappresentano sempre un passaggio di stato.

I passaggi di stato e l'entalpia nella transizione di fase

Il grafico seguente mette in evidenza i passaggi di stato nel diagramma PT.



Riprendiamo ora il significato dei nomi di tali passaggi, descrivendo anche, per ogni transizione di fase, il segno relativo alla variazione di entalpia che si verifica nel passaggio stesso. A tale scopo, è bene sapere che vale la proprietà:

$$h_{\text{solido}} < h_{\text{liquido}} < h_{\text{vapore}}$$

♦ Solidificazione

La solidificazione è il passaggio da stato liquido a stato solido. L'entalpia di solidificazione è:

$$h_{\text{solido}} - h_{\text{liquido}} < 0$$

Questo significa che dobbiamo assorbire calore per ottenere la solidificazione.

♦ Liquefazione

La liquefazione è il passaggio da stato solido a stato liquido. L'entalpia di liquefazione è:

$$h_{\text{liquido}} - h_{\text{solido}} > 0$$

Questo significa che dobbiamo fornire calore per ottenere la liquefazione.

♦ Evaporazione

L'evaporazione è il passaggio da stato liquido a vapore. L'entalpia di evaporazione è:

$$h_{\text{vapore}} - h_{\text{liquido}} > 0$$

Questo significa che dobbiamo fornire calore per ottenere l'evaporazione.

♦ Condensazione

La condensazione è il passaggio da vapore a stato liquido. L'entalpia di condensazione è:

$$h_{\text{liquido}} - h_{\text{vapore}} < 0$$

Questo significa che dobbiamo assorbire calore per ottenere la condensazione.

♦ Sublimazione

La sublimazione è il passaggio da stato solido a vapore. L'entalpia di sublimazione è:

$$h_{\text{vapore}} - h_{\text{solido}} > 0$$

Questo significa che dobbiamo fornire calore per ottenere la sublimazione.

♦ Brinamento

Il brinamento è il passaggio da vapore a stato solido. L'entalpia di brinamento è:

$$h_{\text{solido}} - h_{\text{vapore}} < 0$$

Questo significa che dobbiamo assorbire calore per ottenere il brinamento.

Si noti che sublimazione e brinamento si osservano raramente, nel caso dell'acqua, perché il range di temperatura e pressione in cui ci troviamo rende difficile il verificarsi di tali eventi.

4. Proprietà termodinamiche dei sistemi bifase

Titoli

Come abbiamo visto, chiamiamo *titolo* la frazione massica. Nei sistemi bifase che noi studieremo (liquido-vapore), avremo perciò i seguenti titoli:

- ♦ **Titolo di vapore**

Il titolo di vapore è:

$$x = x_v = \frac{M_v}{M} = \frac{M_v}{M_l + M_v}$$

- ♦ **Titolo di liquido**

Il titolo di liquido è:

$$x_l = \frac{M_l}{M} = \frac{M_l}{M_l + M_v} = 1 - x_v = 1 - x$$

Calcolo delle proprietà termodinamiche del sistema complessivo

Come sappiamo, una generica grandezza intensiva per il sistema complessivo può essere calcolata come:

$$e = (1 - x_v)e_l + x_v e_v$$

Possiamo allora applicare questa formula alle varie grandezze estensive specifiche di interesse: e , u , s e h , ottenendo quanto esposto di seguito.

- ♦ **Volume specifico**

Il volume specifico del sistema è dato da:

$$v = (1 - x) \cdot v_l + x_v \cdot v_v = v_l + x \cdot (v_v - v_l) = v_l + x \cdot v_{lv}$$

Dove v_{lv} è la differenza tra il volume specifico della fase vapore e il volume specifico della fase liquida.

- ♦ **Energia interna specifica**

L'energia interna specifica del sistema è data da:

$$u = (1 - x) \cdot u_l + x_v \cdot u_v = u_l + x \cdot (u_v - u_l) = u_l + x \cdot u_{lv}$$

Dove u_{lv} è la differenza tra l'energia interna specifica della fase vapore e quella della fase liquida.

- ♦ **Entropia specifica**

L'entropia specifica del sistema è data da:

$$s = (1 - x) \cdot s_l + x_v \cdot s_v = s_l + x \cdot (s_v - s_l) = s_l + x \cdot s_{lv}$$

Dove s_{lv} è la differenza tra l'entropia specifica della fase vapore e quella della fase liquida.

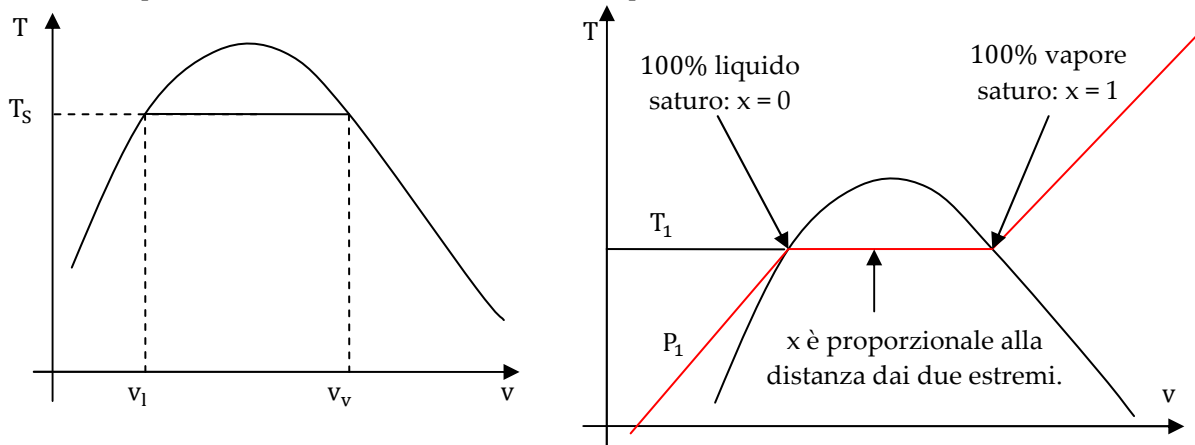
- ♦ **Entalpia specifica**

L'entalpia specifica del sistema è data da:

$$h = (1 - x) \cdot h_l + x_v \cdot h_v = h_l + x \cdot (h_v - h_l) = h_l + x \cdot h_{lv}$$

Dove h_{lv} è la differenza tra l'entalpia specifica della fase vapore e quella della fase liquida.

Rimane però da vedere come si procede concretamente per eseguire tali calcoli. A questo scopo, concentriamoci solo sul caso di volume specifico (le altre situazioni sono del tutto analoghe) e consideriamo la proiezione della curva di saturazione sul piano T-v:



Se ci si trova in uno dei due punti limite (cioè sulla curva di saturazione), non c'è problema: i valori di volume specifico vengono determinati dalle tabelle (sperimentalmente ricavate). Se invece ci si trova in un punto "a metà" del segmento sopra evidenziato, si ottengono dalle tabelle sperimentali il valore v_{lv} e il valore v_l e (conoscendo il titolo) è sufficiente applicare la formula sopra riportata.

Diagramma T-s

Il diagramma T-s, mostrato nella seguente figura, ha un andamento molto simile ad una gaussiana. Questo diagramma è il più comodo per la rappresentazione delle trasformazioni, perché nel piano T-s sappiamo che le isobare sono delle esponenziali. È però importante ricordare che, quando ci si trova allo stato gassoso, non è possibile ipotizzare che il gas si comporti come un gas perfetto

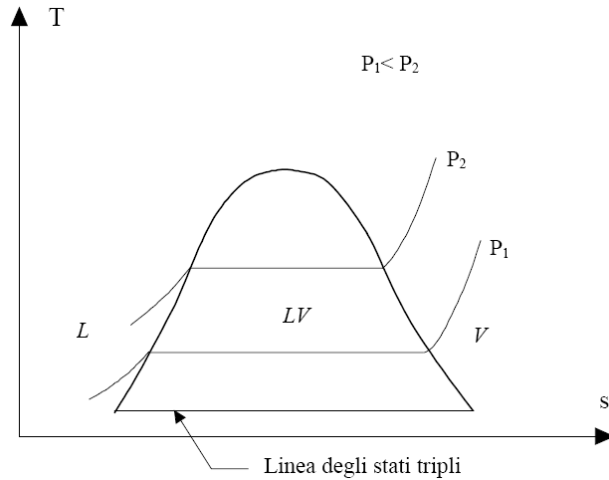
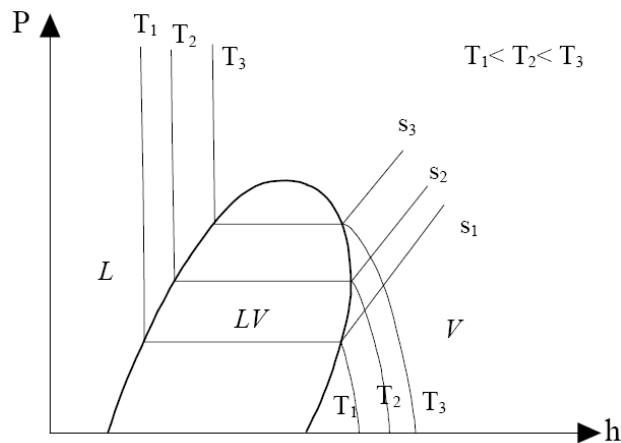


Diagramma P-h

Infine, la seguente figura rappresenta il diagramma che si ottiene nel piano P-h. Questo diagramma però non verrà in seguito utilizzato.



6. Uso delle tabelle

Uso della tabella di saturazione dell'acqua

La seguente figura mostra un estratto dalla tabella di saturazione dell'acqua.

Temp. T °C	Press. sat. p_{sat} kPa	Volume specifico m ³ /kg		Energia interna kJ/kg			Entalpia kJ/kg			Entropia kJ/(kg · K)		
		Liquido sat. u_l	Vapore sat. u_v	Liquido sat. u_l	Evap. u_{lv}	Vapore sat. u_v	Liquido sat. h_l	Evap. h_{lv}	Vapore sat. h_v	Liquido sat. s_l	Evap. s_{lv}	Vapore sat. s_v
0.01	0.6113	0.001000	206.14	0.0	2375.3	2375.3	0.01	2501.3	2501.4	0.000	9.1562	9.1562
5	0.8721	0.001000	147.12	20.97	2361.3	2382.3	20.98	2489.6	2510.6	0.0761	8.9496	9.0257
10	1.2276	0.001000	106.38	42.00	2347.2	2389.2	42.01	2477.7	2519.8	0.1510	8.7498	8.9008
15	1.7051	0.001001	77.93	62.99	2333.1	2396.1	62.99	2465.9	2528.9	0.2245	8.5569	8.7814
20	2.339	0.001002	57.79	83.95	2319.0	2402.9	83.96	2454.1	2538.1	0.2966	8.3706	8.6672
25	3.169	0.001003	43.36	104.88	2304.9	2409.8	104.89	2442.3	2547.2	0.3674	8.1905	8.5580
30	4.246	0.001004	32.89	125.78	2290.8	2416.6	125.79	2430.5	2556.3	0.4369	8.0164	8.4533
35	5.628	0.001006	25.22	146.67	2276.7	2423.4	146.68	2418.6	2565.3	0.5053	7.8478	8.3531
40	7.384	0.001008	19.52	167.56	2262.6	2430.1	167.57	2406.7	2574.3	0.5725	7.6845	8.2570
45	9.593	0.001010	15.26	188.44	2248.4	2436.8	188.45	2394.8	2583.2	0.6387	7.5261	8.1648
50	12.349	0.001012	12.03	209.32	2234.2	2443.5	209.33	2382.7	2592.1	0.7038	7.3725	8.0763
55	15.758	0.001015	9.568	230.21	2219.9	2450.1	230.23	2370.7	2600.9	0.7679	7.2234	7.9913
60	19.940	0.001017	7.671	251.11	2205.5	2456.6	251.13	2358.5	2609.6	0.8312	7.0784	7.9096
65	25.03	0.001020	6.197	272.02	2191.1	2463.1	272.06	2346.2	2618.3	0.8935	6.9375	7.8310
70	31.19	0.001023	5.042	292.95	2176.6	2469.6	292.98	2333.8	2626.8	0.9549	6.8004	7.7553
75	38.58	0.001026	4.131	313.90	2162.0	2475.9	313.93	2321.4	2635.3	1.0155	6.6669	7.6824
80	47.39	0.001029	3.407	334.86	2147.4	2482.2	334.91	2308.8	2643.7	1.0753	6.5369	7.6122
85	57.83	0.001033	2.828	355.84	2132.6	2488.4	355.90	2296.0	2651.9	1.1343	6.4102	7.5445
90	70.14	0.001036	2.361	376.85	2117.7	2494.5	376.92	2283.2	2660.1	1.1925	6.2866	7.4791
95	84.55	0.001040	1.982	397.88	2102.7	2500.6	397.96	2270.2	2668.1	1.2500	6.1659	7.4159

La tabella riporta i dati dei punti della curva di saturazione, campionati in intervalli ritenuti opportuni.

Si può decidere se effettuare il campionamento in funzione della temperatura oppure della pressione (nella precedente tabella, si prende come riferimento la temperatura, ricavando i punti ad intervalli di 5 °C; la tabella sotto riportata è invece in pressione). Chiaramente, se si sceglie la temperatura, in corrispondenza a tale valore si avrà un valore di pressione non particolarmente comodo. In ogni caso, è indifferente scegliere se “entrare” con T o con P. Si noti che queste tabelle sono sperimentali, e perciò possono esserci delle variazioni tra l’una e l’altra.

In tabella sono poi riportati tutti i dati relativi al liquido saturo e al vapor saturo alla temperatura indicata:

1. Volume specifico del liquido saturo v_l ;
2. Volume specifico del vapor saturo v_v ;
3. Differenza $v_{lv} = v_v - v_l$;
4. Energia interna specifica del liquido saturo h_l ;
5. Energia interna specifica del vapor saturo h_v ;
6. Differenza tra le due energie interne specifiche $h_{lv} = h_v - h_l$;
7. Entalpia specifica del liquido saturo h_l ;
8. Entalpia specifica del vapor saturo h_v ;
9. Differenza tra le due entalpie specifiche $h_{lv} = h_v - h_l$;
10. Entropia specifica del liquido saturo s_l ;
11. Entropia specifica del vapor saturo s_v ;
12. Differenza tra le due entropie specifiche $s_{lv} = s_v - s_l$.

Press. p kPa	Temp. sat. T_{sat} °C	Volume specifico m ³ /kg		Energia interna kJ/kg			Entalpia kJ/kg			Entropia kJ/(kg · K)		
		Liquido sat. u_l	Vapore sat. u_v	Liquido sat. u_l	Evap. u_{lv}	Vapore sat. u_v	Liquido sat. h_l	Evap. h_{lv}	Vapore sat. h_v	Liquido sat. s_l	Evap. s_{lv}	Vapore sat. s_v
0.6113	0.01	0.001000	206.14	0.00	2375.3	2375.3	0.01	2501.3	2501.4	0.0000	9.1562	9.1562
1.0	6.98	0.001000	129.21	29.30	2355.7	2385.0	29.30	2484.9	2514.2	0.1059	8.8697	8.9756
1.5	13.03	0.001001	87.98	54.71	2338.6	2393.3	54.71	2470.6	2525.3	0.1957	8.6322	8.8279
2.0	17.50	0.001001	67.00	73.48	2326.0	2399.5	73.48	2460.0	2533.5	0.2607	8.4629	8.7237
2.5	21.08	0.001002	54.25	88.48	2315.9	2404.4	88.49	2451.6	2540.0	0.3120	8.3311	8.6432
3.0	24.08	0.001003	45.67	101.04	2307.5	2408.5	101.05	2444.5	2545.5	0.3545	8.2231	8.5776
4.0	28.96	0.001004	34.80	121.45	2293.7	2415.2	121.46	2432.9	2554.4	0.4226	8.0520	8.4746
5.0	32.88	0.001005	28.19	137.81	2282.7	2420.5	137.82	2423.7	2561.5	0.4764	7.9187	8.3951
7.5	40.29	0.001008	19.24	168.78	2261.7	2430.5	168.79	2406.0	2574.8	0.5764	7.6750	8.2515
10	45.81	0.001010	14.67	191.82	2246.1	2437.9	191.83	2392.8	2584.7	0.6493	7.5009	8.1502
15	53.97	0.001014	10.02	225.92	2222.8	2448.7	225.94	2373.1	2599.1	0.7549	7.2536	8.0085
20	60.06	0.001017	7.649	251.38	2205.4	2456.7	251.40	2358.3	2609.7	0.8320	7.0766	7.9085
25	64.97	0.001020	6.204	271.90	2191.2	2463.1	271.93	2346.3	2618.2	0.8931	6.9383	7.8314
30	69.10	0.001022	5.229	289.20	2179.2	2468.4	289.23	2336.1	2625.3	0.9439	6.8247	7.7686
40	75.87	0.001027	3.993	317.53	2159.5	2477.0	317.58	2319.2	2636.8	1.0259	6.6441	7.6700
50	81.33	0.001030	3.240	340.44	2143.4	2483.9	340.49	2305.4	2645.9	1.0910	6.5029	7.5939
75	91.78	0.001037	2.217	384.31	2112.4	2496.7	384.39	2278.6	2663.0	1.2130	6.2434	7.4564

Tabelle del vapore surriscaldato

Come abbiamo detto, il vapore non può essere assimilato a gas ideale, e perciò non possiamo usare le formule che abbiamo visto per i gas ideali. Per risolvere questo problema, si usano delle tabelle per il vapore surriscaldato, nelle quali si “entra” con i dati di temperatura e pressione (ovviamente poi possiamo anche trovare la temperatura, conoscendo ad esempio pressione e entropia, leggendole “al contrario”).

T °C	v m ³ /kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg · K)	v m ³ /kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg · K)	v m ³ /kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg · K)		
$p = 0.01 \text{ MPa (45.81°C)*}$					$p = 0.05 \text{ MPa (81.33°C)}$					$p = 0.10 \text{ MPa (99.63°C)}$				
Sat. [†]	14.674	2437.9	2584.7	8.1502	3.240	2483.9	2645.9	7.5939	1.6940	2506.1	2675.5	7.3594		
50	14.869	2443.9	2592.6	8.1749										
100	17.196	2515.5	2687.5	8.4479	3.418	2511.6	2682.5	7.6947	1.6958	2506.7	2676.2	7.3614		
150	19.512	2587.9	2783.0	8.6882	3.889	2585.6	2780.1	7.9401	1.9364	2582.8	2776.4	7.6134		
200	21.825	2661.3	2879.5	8.9038	4.356	2659.9	2877.7	8.1580	2.172	2658.1	2875.3	7.8343		
250	24.136	2736.0	2977.3	9.1002	4.820	2735.0	2976.0	8.3556	2.406	2733.7	2974.3	8.0333		
300	26.445	2812.1	3076.5	9.2813	5.284	2811.3	3075.5	8.5373	2.639	2810.4	3074.3	8.2158		
400	31.063	2968.9	3279.6	9.6077	6.209	2968.5	3278.9	8.8642	3.103	2967.9	3278.2	8.5435		
500	35.679	3132.3	3489.1	9.8978	7.134	3132.0	3488.7	9.1546	3.565	3131.6	3488.1	8.8342		
600	40.295	3302.5	3705.4	10.1608	8.057	3302.2	3705.1	9.4178	4.028	3301.9	3704.4	9.0976		
700	44.911	3479.6	3928.7	10.4028	8.981	3479.4	3928.5	9.6599	4.490	3479.2	3928.2	9.3398		
800	49.526	3663.8	4159.0	10.6281	9.904	3663.6	4158.9	9.8852	4.952	3663.5	4158.6	9.5652		
900	54.141	3855.0	4396.4	10.8396	10.828	3854.9	4396.3	10.0967	5.414	3854.8	4396.1	9.7767		
1000	58.757	4053.0	4640.6	11.0393	11.751	4052.9	4640.5	10.2964	5.875	4052.8	4640.3	9.9764		
1100	63.372	4257.5	4891.2	11.2287	12.674	4257.4	4891.1	10.4859	6.337	4257.3	4891.0	10.1659		
1200	67.987	4467.9	5147.8	11.4091	13.597	4467.8	5147.7	10.6662	6.799	4467.7	5147.6	10.3463		
1300	72.602	4683.7	5409.7	11.5811	14.521	4683.6	5409.6	10.8382	7.260	4683.5	5409.5	10.5183		

Incrociando temperatura e pressione, si individuano i valori di v , u , h ed s .

Uso dell'interpolazione lineare

Siccome le tabelle sono campionate, se viene dato un esercizio in cui è richiesto di avere dati per temperature intermedie, è possibile usare l'interpolazione lineare:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

Dove X è l'incognita, T è la temperatura richiesta e T_1 e T_2 sono le temperature di cui si conoscono i dati (perché sono in tabella), che sono rispettivamente X_1 e X_2 . Lo stesso si può fare per la pressione, al posto della temperatura.

Formule approssimate

Se non si hanno a disposizione le tabelle, possiamo usare delle formule approssimate:

- Per quanto riguarda lo stato liquido

- Per l'entalpia

$$h = h_0 + c_l(T - T_0) + v(P - P_0)$$

Solitamente, si usa come valore di h_0 l'entalpia del punto alla stessa temperatura del punto relativamente al quale vogliamo calcolare h (che chiameremo punto A), ma posizionato sulla curva di saturazione. Il valore di h_0 può quindi essere letto dalle tabelle, conoscendo la temperatura del punto A:

$$h_0 = h_{l@T_A}$$

In questo caso inoltre la formula si semplifica in:

$$h = h_0 + v(P - P_0)$$

Si noti poi che il contributo dato dalla differenza di pressione può essere trascurato, e assumiamo:

$$h \cong h_{l@T_A}$$

- Per l'entropia

$$s = s_0 + c_l \cdot \ln \frac{T}{T_0}$$

Con considerazioni analoghe alle precedenti:

$$s \cong s_{l@T_A}$$

- Per quanto riguarda lo stato solido

- Per l'entalpia

$$h = h_0 + h_{lst} + c_s(T - T_0) + v(P - P_0)$$

- Per l'entropia

$$s = s_0 + s_{lst} + c_s \ln \frac{T}{T_0} = s_0 + \frac{h_{lst}}{T_0} + c_s \ln \frac{T}{T_0}$$

In queste formule, h_{lst} e s_{lst} sono l'entalpia e l'entropia di solidificazione allo stato triplo.

Capitolo 7: Cicli termodinamici

1. Introduzione ai cicli termodinamici

Principali cicli termodinamici

In questo capitolo vogliamo concentrarci su ciò che accade all'interno della macchina ciclica di una certa macchina termodinamica motrice (e non operatrice). Le trasformazioni cicliche che avvengono al suo interno (per definizione di macchina ciclica) sono dei cicli termodinamici; in particolare, un *ciclo termodinamico* è una successione finita di trasformazioni termodinamiche al termine delle quali il sistema torna al suo stato iniziale.

I principali cicli termodinamici che possono essere sfruttati sono:

- ♦ **Cicli termodinamici a gas**

I cicli termodinamici a gas sono cicli nei quali la sostanza usata rimane sempre allo stato gassoso. I principali cicli a gas sono:

1. Ciclo di Carnot

Questo ciclo in realtà non viene usato dal punto di vista tecnologico per la realizzazione di macchine termodinamiche, anche se teoricamente ciò sarebbe possibile.

La sua importanza è però soprattutto teorica.

2. Ciclo di Joule-Brayton

Il ciclo di Joule Brayton è alla base di tutti gli impianti che “producono” energia elettrica.

3. Ciclo Otto e ciclo Diesel

Questi due cicli sono quelli su cui si basano i motori a combustione interna utilizzati dai nostri comuni mezzi di trasporto.

4. Ciclo Stirling

Fino ad ora questo ciclo ha trovato poche applicazioni, ma è caratterizzato da un rendimento molto elevato. Si tratta di un ciclo a combustione esterna: questo significa che viene fornito calore dall'esterno (proveniente non necessariamente da combustibile, ma anche, ad esempio, dal sole).

Questo ciclo è costituito da due isoterme e due isocore.

5. Ciclo Ericsson

Anche questo ciclo è caratterizzato da un alto rendimento, ma fino ad ora ha trovato scarse applicazioni pratiche.

Il ciclo di Ericsson è costituito da 2 isoterme e 2 isobare.

Tra questi, analizzeremo soprattutto il ciclo di Joule-Brayton, che è realizzato per mezzo di dispositivi che possono essere visti come sistemi aperti. Il ciclo Otto e il ciclo Diesel sono invece realizzati per mezzo di sistemi chiusi.

- ♦ **Cicli termodinamici a vapore**

I cicli termodinamici a vapore prevedono invece che la sostanza si trovi in alcuni istanti allo stato liquido, e in altri istanti allo stato gassoso. I principali sono:

1. Ciclo Rankine

Può essere realizzato come ciclo semplice oppure con surriscaldamento. Viene usato nelle centrali termoelettriche e nel trasporto ferroviario (ma in questo campo sta cadendo in disuso perché sostituito dai cicli Diesel e Otto).

2. Ciclo frigorifero a vapore

Tra questi, vedremo soprattutto il ciclo Rankine.

2. Cicli termodinamici a gas: i cicli simmetrici

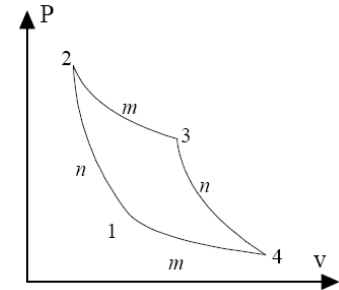
Cicli simmetrici

Un ciclo termodinamico a gas simmetrico è un ciclo costituito da 4 trasformazioni che siano "uguali a 2 a 2": ad esempio, un ciclo costituito da 4 trasformazioni politropiche aventi uguali indici a 2 a 2 è un ciclo simmetrico.

Proprietà dei cicli simmetrici

In un ciclo simmetrico costituito da 4 trasformazioni politropiche valgono sempre le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}v_1 v_3 &= v_2 v_4 \\ P_1 P_3 &= P_2 P_4 \\ T_1 T_3 &= T_2 T_4\end{aligned}$$



♦ Dimostrazione

Queste relazioni si ottengono con dei semplici passaggi a partire dalle equazioni delle politropiche (riportati alla slide 3) e applicando l'equazione dei gas perfetti.

Le equazioni delle politropiche sono infatti:

$$\begin{aligned}P_1 v_1^n &= P_2 v_2^n \\ P_2 v_2^m &= P_3 v_3^m \\ P_3 v_3^n &= P_4 v_4^n \\ P_4 v_4^m &= P_1 v_1^m\end{aligned}$$

Se moltiplichiamo la seconda equazione per la quarta e la prima per la terza, abbiamo:

$$\begin{aligned}(P_2 v_2^m) \cdot (P_4 v_4^m) &= (P_3 v_3^m) \cdot (P_1 v_1^m) \quad \rightarrow \quad P_2 P_4 (v_2 v_4)^m = P_1 P_3 (v_1 v_3)^m \quad \rightarrow \quad \frac{P_2 P_4}{P_1 P_3} = \left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^m \\ (P_1 v_1^n) \cdot (P_3 v_3^n) &= (P_2 v_2^n) \cdot (P_4 v_4^n) \quad \rightarrow \quad P_1 P_3 (v_1 v_3)^n = P_2 P_4 (v_2 v_4)^n \quad \rightarrow \quad \frac{P_2 P_4}{P_1 P_3} = \left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^n\end{aligned}$$

Quindi:

$$\left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^m = \left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^n$$

Siccome $\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}$ non può essere nullo, dividiamo entrambi i membri per $\left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^n$:

$$\left(\frac{v_1 v_3}{v_2 v_4}\right)^{m-n} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_1 v_3}{v_2 v_4} = 1 \quad \rightarrow \quad v_1 v_3 = v_2 v_4$$

A questo punto possiamo inserire questo risultato nell'equazione precedentemente ricavata:

$$P_2 P_4 (v_2 v_4)^m = P_1 P_3 (v_1 v_3)^m$$

Ottenendo:

$$P_2 P_4 (v_2 v_4)^m = P_1 P_3 (v_2 v_4)^m \quad \rightarrow \quad P_2 P_4 = P_1 P_3$$

Infine, ricordando l'equazione dei gas perfetti:

$$P_1 v_1 = R^* T_1 \quad P_2 v_2 = R^* T_2 \quad P_3 v_3 = R^* T_3 \quad P_4 v_4 = R^* T_4$$

Otteniamo (con i che è un numero tra 1 e 4):

$$T_i = \frac{P_i v_i}{R^*}$$

Quindi, riprendendo i risultati appena ottenuti:

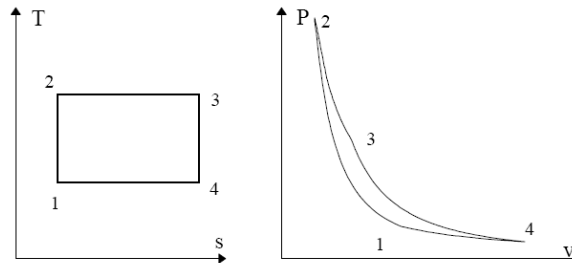
$$T_1 T_3 = \left(\frac{P_1 v_1}{R^*}\right) \cdot \left(\frac{P_3 v_3}{R^*}\right) = \frac{(P_1 P_3) \cdot (v_1 v_3)}{R^{*2}} = \frac{(P_2 P_4) \cdot (v_2 v_4)}{R^{*2}} = \left(\frac{P_2 v_2}{R^*}\right) \cdot \left(\frac{P_4 v_4}{R^*}\right) = T_2 T_4$$

3. Cicli termodinamici a gas: il ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è un ciclo termodinamico a gas simmetrico, costituito da 2 trasformazioni isoentropiche e 2 trasformazioni isoterme.

Nel piano T-s, il suo grafico è perciò un rettangolo, mentre nel piano P-v l'andamento del ciclo è rappresentato nel grafico a destra:



Nel caso in cui si abbia $T_3 \cong T_c$ e $T_2 \cong T_f$ (supponendo però che le temperature siano vicine e non uguali, perché altrimenti non si verificherebbe alcuno scambio di calore), allora si è anche in assenza di irreversibilità.

Rendimento del ciclo di Carnot

Per quanto riguarda il calcolo del rendimento, abbiamo:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

Siccome nelle trasformazioni isoentropiche non abbiamo scambio di calore, tutti gli scambi di calore avvengono per mezzo di trasformazioni isoterme: nella trasformazione da 2 a 3 si assorbe calore, mentre nella trasformazione da 4 a 1 si cede calore al serbatoio freddo. Di conseguenza (ricordando che il calore scambiato è l'area sottesa dalla trasformazione nel grafo T-S), abbiamo semplicemente:

$$Q_C = T_3(S_3 - S_2)$$

$$Q_F = T_1(S_4 - S_1)$$

Da cui:

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_1(S_4 - S_1)}{T_3(S_3 - S_2)}$$

Come è chiaro dal grafico T-s, abbiamo $S_3 = S_4$ e $S_1 = S_2$ (le trasformazioni 3-4 e 1-2 sono isoentropiche):

$$\eta = 1 - \frac{T_1(S_4 - S_1)}{T_3(S_3 - S_2)} = 1 - \frac{T_1(S_3 - S_2)}{T_3(S_3 - S_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Si noti che spesso questa formula viene scritta come:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

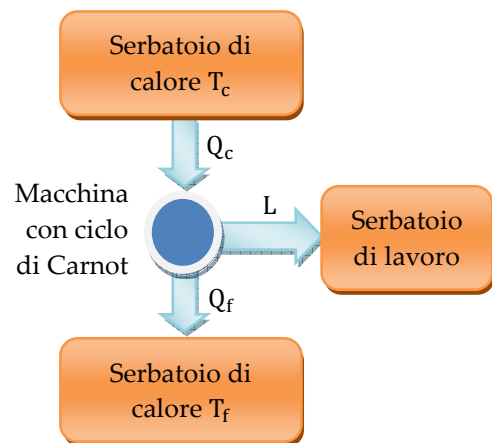
Naturalmente, essendo $T_3 = T_2$, le due formule sono equivalenti, però preferiremo usare la formula:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Osservazioni

I motivi per i quali il ciclo di Carnot non viene usato nella pratica sono fondamentalmente 2:

1. Come si osserva dalla rappresentazione nel grafico P-v, il lavoro (che è l'area sottesa da tale grafico) è "poco", anche in presenza di considerevoli variazioni di pressione e temperatura.
2. Questo ciclo richiede che si realizzino due trasformazioni isoterme e due isoentropiche, ma tali trasformazioni hanno esigenze contrapposte: da un lato, per avere trasformazioni isoentropiche, dovremo avere tempi molto lenti e grandi superfici di scambio; dall'altro lato, si ha bisogno di non disperdere calore, e questo richiede superfici di contatto piccole e tempi molto brevi.



Possibili fonti di irreversibilità

In una macchina termica, le fonti di irreversibilità principali sono di 2 tipi:

- ♦ **Irreversibilità esterna**

L'irreversibilità esterna è legata alle trasformazioni isoterme. Se infatti si ha:

$$T_1 > T_F \quad \text{e} \quad T_3 = T_2 < T_C$$

Allora si avrà certamente $S_{\text{irr}} > 0$.

Possiamo dimostrare questo risultato applicando il bilancio di entropia a tutta la macchina termica:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{\text{irr}}$$

Per il ciclo di Carnot vale invece, come abbiamo dimostrato nel calcolo del rendimento:

$$\Delta S = S_3 - S_2 = \frac{Q_C}{T_2} = \frac{Q_F}{T_1} \quad \rightarrow \quad Q_F = \frac{T_1}{T_2} Q_C$$

E perciò, sostituendo nella precedente formula:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_C T_1}{T_F T_2} = S_{\text{irr}} \quad \rightarrow \quad S_{\text{irr}} = \frac{T_1 T_C - T_F T_2}{T_F T_C T_2} Q_C$$

Ma, per le ipotesi iniziali, ciò significa che si ha necessariamente:

$$S_{\text{irr}} > 0$$

E perciò, sotto queste ipotesi, si hanno delle irreversibilità. A questo punto possiamo osservare che il rendimento sarà di conseguenza inferiore rispetto a quello che si ha nel caso reversibile. Infatti, il rendimento della macchina reversibile è:

$$\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

E, con le condizioni inizialmente imposte, avremo:

$$\frac{T_F}{T_C} < \frac{T_1}{T_3} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{T_F}{T_C} > 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad \rightarrow \quad \eta_{\text{rev}} > \eta_{\text{ciclo}}$$

- ♦ **Irreversibilità interna:**

L'irreversibilità interna è legata invece alle trasformazioni isentropiche. Essa infatti si ha nel caso in cui valga la condizione:

$$s_1 < s_2 \quad \text{e} \quad s_3 < s_4$$

Supponiamo che non si abbia irreversibilità interna ($T_C \cong T_3, T_3 \cong T_2$), ma che valga la condizione appena riportata. In tale situazione, all'interno del ciclo la variazione di entropia è nulla, ma il resto della macchina termodinamica non ritorna allo stato di partenza.

Per dimostrarlo, calcoliamo il bilancio entropico della macchina:

$$-\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = S_{\text{irr}}$$

Come abbiamo già dimostrato:

$$\frac{Q_C}{T_3} = S_3 - S_2 \quad \quad \frac{Q_F}{T_1} = S_4 - S_1$$

Applicando la condizione riguardante le temperature, possiamo anche scrivere:

$$\frac{Q_C}{T_C} = S_3 - S_2 \quad \quad \frac{Q_F}{T_F} = S_4 - S_1$$

Dall'equazione del bilancio, abbiamo quindi:

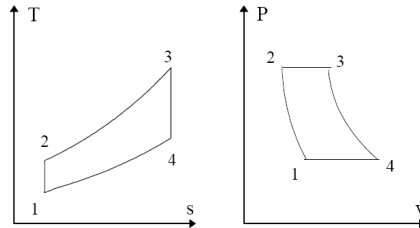
$$S_{\text{irr}} = -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = -(S_3 - S_2) + (S_4 - S_1) = S_4 - S_3 + S_2 - S_1$$

Ed è ovvio che tale espressione, sulla base della condizione riguardante le entropie specifiche (e che vale anche per le entropie non riferite all'unità di massa, naturalmente) risulta essere maggiore di zero, perciò si hanno delle irreversibilità.

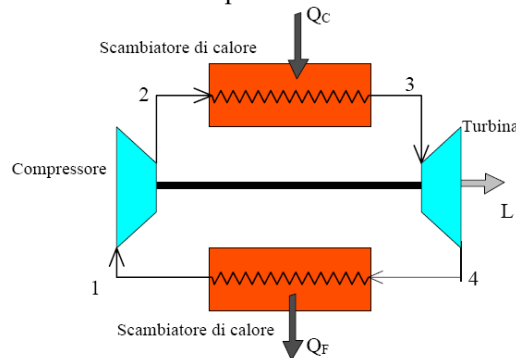
4. Cicli termodinamici a gas: il ciclo di Joule-Brayton

Il ciclo di Joule-Brayton

Il ciclo di Joule-Brayton è un ciclo simmetrico costituito da due trasformazioni isentropiche e 2 trasformazioni isobare. Anche per il ciclo di Brayton valgono quindi le relazioni ricavate per un generico ciclo simmetrico. La figura seguente mostra i grafici del ciclo di Brayton nel piano T-s e nel piano P-v:



La trasformazione 1-2 è una isentropica in cui la pressione aumenta (una compressione), perciò viene realizzata per mezzo di un compressore; la trasformazione 3-4 è un'isoentropica in cui la pressione diminuisce (un'espansione) e perciò viene realizzata mediante una turbina. Le due isobare (ovvero la trasformazione 2-3 e la trasformazione 4-1) vengono invece realizzate mediante degli scambiatori di calore. Si osserva che i dispositivi usati sono dei sistemi aperti.



Rendimento

- **Confronto con il ciclo di Carnot**

In questo paragrafo calcoleremo il rendimento del ciclo di Joule-Brayton e lo confronteremo con quello del ciclo di Carnot mostrato in rosso nella figura a lato.

Il ciclo di Carnot considerato ha perciò come temperatura minima e come temperatura massima le temperature T_1 e la T_3 del ciclo di Joule-Brayton.

- **Formula del rendimento del ciclo di Joule-Brayton**

Il rendimento di Joule-Brayton, siccome si è in presenza di sistemi aperti, viene espresso in termini di potenza. Come dimostreremo a breve, la formula finale è la seguente:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

- **Dimostrazione**

Dalla definizione di rendimento in potenza, abbiamo:

$$\eta = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_C}$$

Da cui, ricordando il bilancio di energia della macchina termodinamica motrice:

$$\eta = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C}$$

Inoltre, siccome la potenza termica \dot{Q}_F viene ceduta durante l'isobara 4-1, avremo:

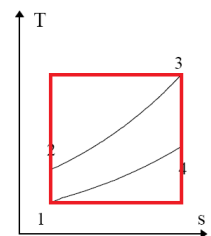
$$\dot{Q}_F = \dot{m}c_p(T_4 - T_1)$$

Mentre la potenza termica \dot{Q}_C viene assorbita durante l'isobara 2-3, perciò:

$$\dot{Q}_C = \dot{m}c_p(T_3 - T_2)$$

Da cui:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{m}c_p(T_4 - T_1)}{\dot{m}c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$



Siccome il ciclo è simmetrico, vale la formula:

$$T_2 T_4 = T_3 T_1 \quad \rightarrow \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

E quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Inoltre, sappiamo che in una trasformazione isentropica, si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{R^*}{c_p}}$$

E perciò possiamo usare, in alternativa alla precedente, la formula seguente:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}}$$

Dove r_p è il rapporto di compressione:

$$r_p = \frac{P_2}{P_1}$$

Mentre k (che è già stato introdotto nel capitolo riguardante le politropiche) è definito come:

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

♦ Confronto con il ciclo di Carnot

Le formule ricavate per i due cicli sono praticamente uguali; tuttavia, nel ciclo di Joule-Brayton non si ha $T_2 = T_3$, perciò il rendimento del ciclo di Joule-Brayton è inferiore rispetto a quello del ciclo di Carnot. Nonostante questo, i dispositivi che eseguono il ciclo di Joule-Brayton sono più facilmente realizzabili, e per questa ragione il ciclo di Joule-Brayton è usato nella pratica, mentre quello di Carnot non lo è.

♦ Rendimento massimo e minimo

Con un semplice studio della funzione $\eta(r_p)$ si ricava facilmente che:

1. Il rendimento è massimo quando T_2 tende a T_3 , ovvero quando si ha:

$$r_{p_{\max}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

2. Il rendimento è minimo quando P_2 tende a P_1 , ovvero:

$$r_{p_{\min}} = 1$$

In entrambe le situazioni il ciclo perde di significato perché l'area si annulla.

Lavoro netto

Anche il lavoro netto, come il rendimento, può essere espresso come sola funzione del rapporto di compressione. In particolare, abbiamo:

$$l = l_T - l_C$$

Dove l_T è il lavoro compiuto dalla turbina e l_C è quello assorbito dal compressore. Abbiamo quindi, siccome in entrambi i casi stiamo trattando trasformazioni isentropiche:

$$l_T = c_p(T_3 - T_4) \quad l_C = c_p(T_2 - T_1)$$

E quindi:

$$l = c_p(T_3 - T_4) - c_p(T_2 - T_1) = c_p \left[T_3 \left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right) - T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \right] = c_p \left[T_3 \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - T_1 \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right]$$

Il massimo lavoro netto si ha quando si ha $r_p = \sqrt{r_{p_{\max}}}$:

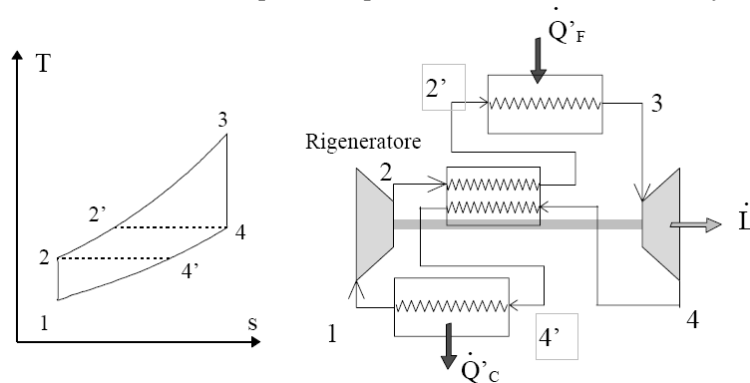
$$r_{p_{\text{opt}}} = \sqrt{r_{p_{\max}}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}}$$

In particolare, il massimo lavoro netto si ottiene quando la temperatura di fine espansione coincide con quella di fine compressione, ovvero:

$$T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

Ciclo di Joule-Brayton con rigenerazione

Nel caso in cui si abbia $T_4 > T_2$, si può pensare di sfruttare il calore perso nel passaggio dallo stato 4 allo stato 4' al fine di preriscaldare il fluido, in modo tale da evitare di usare altro calore per compiere la trasformazione dallo stato 2 allo stato 2'. Si parla in questo caso di *ciclo di Joule-Brayton con rigenerazione*.



Come abbiamo visto poco fa, se si è in condizioni di lavoro massimo si ha necessariamente $T_2 = T_4$, e perciò in tal caso non è possibile applicare la rigenerazione.

A livello impiantistico, il rigeneratore è un altro scambiatore termico, come mostrato nello schema precedente.

♦ Rendimento del ciclo di Joule-Brayton con rigenerazione

In questo caso, abbiamo:

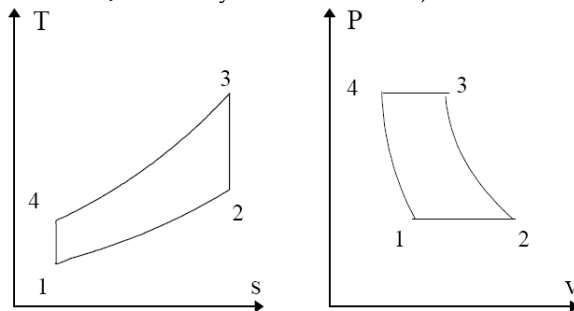
$$\eta = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}} = \frac{\dot{m}c_p(T_3 - T_4) - \dot{m}c_p(T_2 - T_1)}{\dot{m}c_p(T_3 - T_4)} = \frac{T_3 - T_4 - T_2 + T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}$$

Ovvero:

$$\eta_{\text{rig}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

Ciclo di Joule-Brayton inverso

È anche possibile realizzare il ciclo di Joule-Brayton inverso (cioè facendo eseguire le trasformazioni nell'ordine opposto rispetto al ciclo di Joule-Brayton tradizionale):



Questo ciclo è un ciclo frigorifero. Calcoliamo allora il coefficiente di prestazione:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C - \dot{Q}_F} = \frac{\dot{m}c_p(T_2 - T_1)}{\dot{m}c_p(T_3 - T_4) - \dot{m}c_p(T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4 - T_2 + T_1}$$

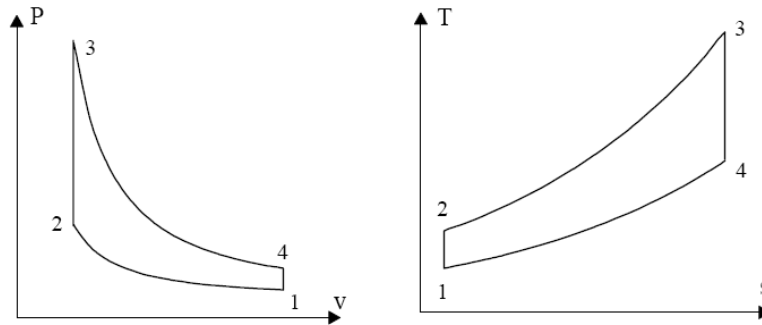
Siccome il ciclo è simmetrico, attraverso opportuni passaggi possiamo ottenere:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_3 - T_2} = \frac{T_4}{T_4 - T_1} = \frac{1}{r^{\frac{k-1}{k}} - 1}$$

5. Cicli termodinamici a gas: il ciclo Otto

Il ciclo Otto

Il ciclo Otto è un ciclo simmetrico costituito da due isentropiche e due isocore. La figura seguente mostra il ciclo Otto nel piano P-v e nel piano T-s.



Rendimento del ciclo Otto

Proviamo ora a calcolare il rendimento del ciclo Otto. Naturalmente, abbiamo:

$$\eta = \frac{L}{Q_C}$$

Da cui ricaviamo, ricordando l'equazione del bilancio di energia:

$$\eta = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

Il calore viene scambiato nelle due trasformazioni isocore (assorbito nella trasformazione 2-3 e ceduto nella trasformazione 4-1), e perciò:

$$\dot{Q}_F = \dot{m}c_v(T_4 - T_1)$$

$$\dot{Q}_C = \dot{m}c_v(T_3 - T_2)$$

E quindi:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{m}c_v(T_4 - T_1)}{\dot{m}c_v(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$

Siccome il ciclo è simmetrico, vale la formula:

$$T_2 T_4 = T_3 T_1 \quad \rightarrow \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

Perciò:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Possiamo anche introdurre la grandezza r_v , detta *rapporto di compressione volumetrico*, data da:

$$r_v = \frac{V_1}{V_2}$$

E possiamo quindi scrivere:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}}$$

Lavoro specifico prodotto

Il lavoro specifico prodotto dal ciclo Diesel può essere così calcolato:

$$l = c_v T_3 \left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right) - c_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = c_v T_3 \left(1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \right) - c_v T_1 (r_v^{k-1} - 1)$$

Rapporto di compressione volumetrico ottimo

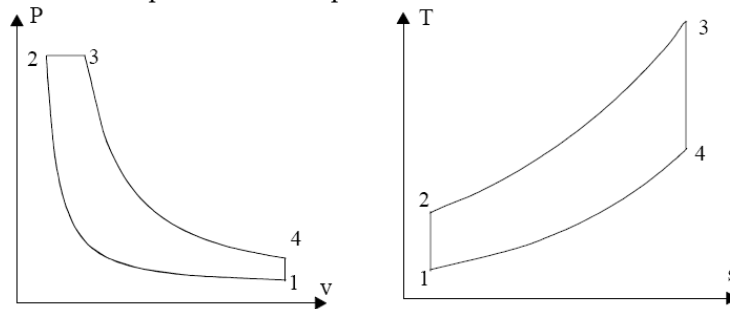
Il rapporto di compressione volumetrico ottimo è dato da:

$$r_{v_{opt}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2(k-1)}}$$

6. Cicli termodinamici a gas: il ciclo Diesel

Il ciclo Diesel

Il ciclo Otto è un ciclo non simmetrico costituito da due isentropiche, una isocora ed una isobara. La figura seguente mostra il ciclo Diesel nel piano P-v e nel piano T-s.



Rendimento

Per il calcolo del rendimento del ciclo Diesel si seguono passaggi analoghi a quelli usati per i precedenti cicli:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

Il calore viene assorbito nella trasformazione isobara (la 2-3) e ceduto nella trasformazione isocora (4-1), quindi possiamo scrivere:

$$\dot{Q}_F = \dot{m}c_v(T_4 - T_1)$$

$$\dot{Q}_C = \dot{m}c_p(T_3 - T_2)$$

E quindi:

$$\eta = 1 - \frac{\dot{m}c_v(T_4 - T_1)}{\dot{m}c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{z^k - 1}{z - 1}$$

Dove r è il rapporto di compressione volumetrico:

$$r = \frac{V_1}{V_2}$$

Mentre z è il rapporto di combustione:

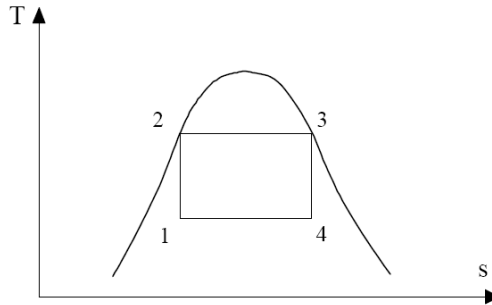
$$z = \frac{V_3}{V_2}$$

7. Cicli termodinamici a vapore: ciclo di Carnot

Il ciclo motore a vapore di Carnot

Il ciclo di Carnot analizzato in precedenza prevedeva che si operasse con un gas, facendogli subire due trasformazioni isentropiche e due trasformazioni isoterme.

Possiamo però pensare di eseguire lo stesso ciclo ma operando in condizioni che ci consentano di stare “al di sotto della curva di saturazione”: in questo modo, non opereremo più con un gas, ma con un sistema bifase liquido-vapore.



Realizzabilità del ciclo di Carnot

Il fluido che occorrerebbe usare per la realizzazione di tale ciclo deve avere le seguenti caratteristiche:

1. Elevata massa volumica;
2. Elevata entalpia di transizione di fase;
3. Elevata temperatura critica
4. Temperatura dello stato triplo inferiore alla temperatura minima del ciclo;
5. Fluido non corrosivo e non tossico;
6. Fluido chimicamente stabile;
7. Fluido facilmente reperibile e di basso costo
8. Elevata pendenza nel piano T-s della curva limite superiore;
9. Pressione di condensazione superiore alla pressione atmosferica.

L'unico fluido che possieda tutte queste caratteristiche (con buona approssimazione) è l'acqua.

Tuttavia, un ciclo di Carnot al di sotto della curva di saturazione non può essere realizzato, perché non esiste un compressore (o una pompa) che operi in bifase, e le turbine possono farlo solo con un titolo non inferiore a 0,9 (si deve cioè avere meno del 10% di sostanza allo stato liquido).

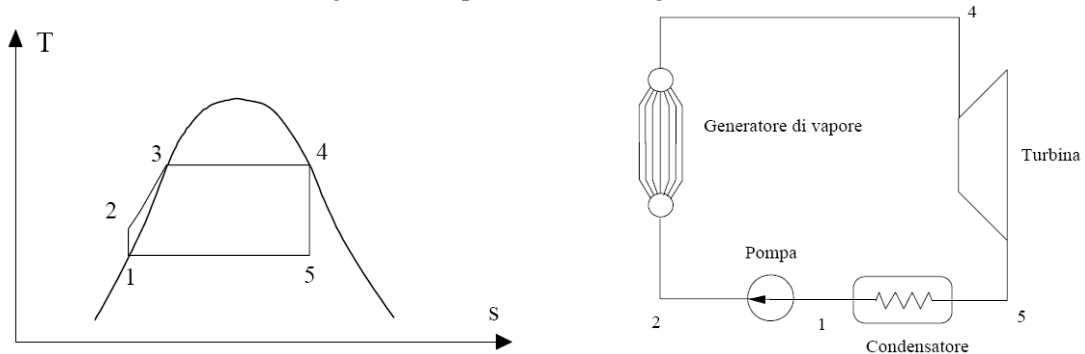
8. Cicli termodinamici a vapore: ciclo Rankine

Il ciclo Rankine

Il ciclo Rankine è il ciclo utilizzato nella realizzazione di impianti motori a vapore. Questo ciclo cerca di superare i limiti costruttivi del ciclo di Carnot. Possiamo avere:

- ♦ **Ciclo Rankine semplice**

Questo ciclo in realtà non viene mai usato, ma si preferisce usare il ciclo Rankine surriscaldato, che andremo ad analizzare a breve. Il grafico nel pianto T-s è il seguente:

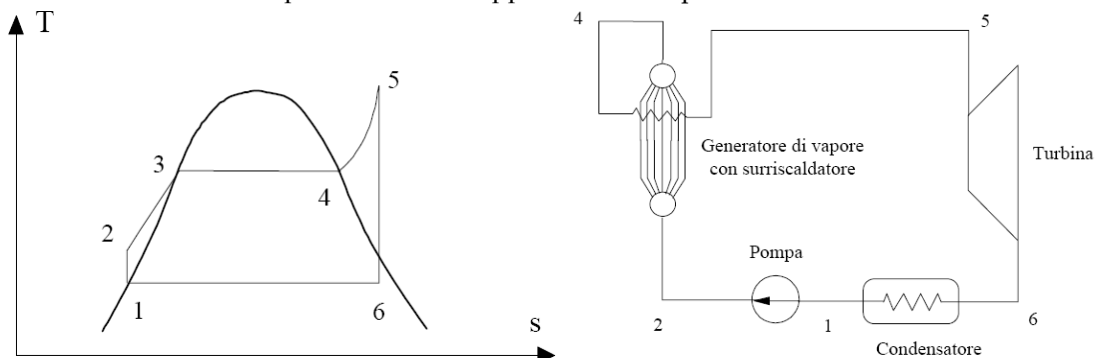


Questo ciclo viene realizzato mediante:

1. Una pompa che opera una trasformazione 1-2 isoentropica (che riscalda il liquido);
2. Un generatore di vapore che opera trasformazione 2-3-4 isobara (trasforma il liquido in vapore);
3. Una turbina, che opera la trasformazione isentropica 4-5: al termine della trasformazione ci troveremo in presenza di un sistema bifase;
4. Un condensatore, che opera la trasformazione isoterma 5-1 (tutta la sostanza diventa liquida).

- ♦ **Ciclo Rankine surriscaldato**

Il ciclo Rankine surriscaldato può essere così rappresentato nel piano T-s:

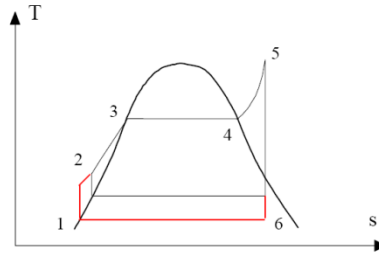


Le trasformazioni che costituiscono il ciclo Rankine surriscaldato sono molto simili a quelle del ciclo Rankine semplice, con l'unica differenza che la trasformazione isobara (in questo caso la trasformazione 2-3-4-5) prevede l'utilizzo di un surriscaldatore: non ci si accontenta cioè di portare tutto il liquido allo stato di vapore saturo, ma lo si rende vapore surriscaldato.

Come migliorare il ciclo Rankine

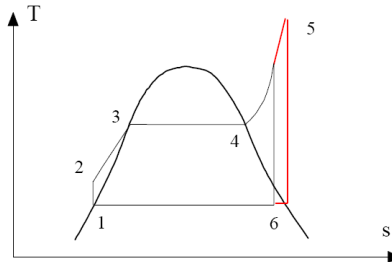
Possiamo migliorare le prestazioni del ciclo Rankine mediante opportuni accorgimenti:

1. Riduzione della pressione di condensazione:



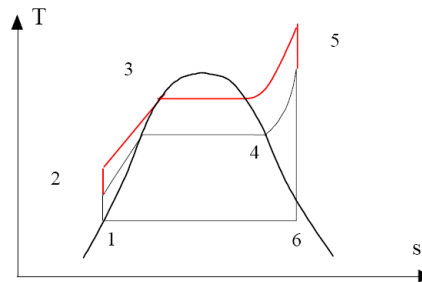
Tuttavia, se si dovesse abbassare troppo la pressione, si correrebbe il rischio di andare al di sotto della pressione ambientale, con la conseguente necessità di sottoporre i dispositivi a pressione stagna.

2. Aumento della temperatura finale di surriscaldamento

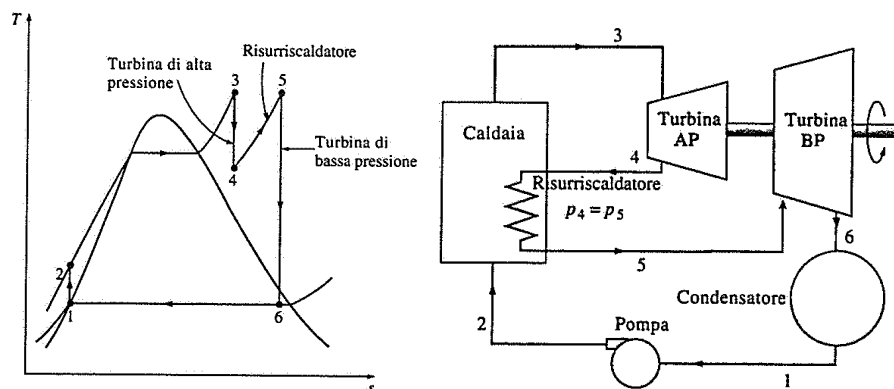


Naturalmente, un eccessivo aumento della temperatura può comportare il rischio di fusione dei materiali che costituiscono i dispositivi impiegati.

3. Aumento della pressione di vaporizzazione



4. Ciclo di Rankine con rigenerazione (surriscaldamenti ripetuti):



Questa soluzione prevede che l'espansione in turbina del vapore venga suddivisa in due stadi, tra i quali viene effettuato un surriscaldamento del vapore. In questo modo, aumenta anche la temperatura media alla quale il calore viene fornito al fluido evolvente, e quindi si ha un ulteriore aumento del rendimento termico del ciclo.

Nel dettaglio, la turbina di alta pressione espande isentropicamente il vapore fino ad una pressione intermedia; il vapore viene poi nuovamente mandato in caldaia, dove viene surriscaldato nuovamente a pressione costante, solitamente fino ad arrivare alla temperatura che il vapore aveva all'ingresso nella turbina di alta pressione. A questo punto, il vapore si espande isentropicamente nella turbina di bassa pressione, fino ad arrivare alla pressione di condensazione.

Questa soluzione è quella che viene normalmente adottata nella realtà.

9. Cicli termodinamici frigoriferi a vapore

Le macchine frigorifere

Le macchine frigorifere sono quelle che vengono utilizzate per trasferire del calore da una sorgente a bassa temperatura ad una sorgente ad alta temperatura (tale procedimento infatti non avviene in maniera spontanea, ma necessita un certo dispendio di lavoro).

Queste macchine operano secondo un ciclo termodinamico inverso, all'interno delle quali evolve un fluido detto *refrigerante*.

Si noti che anche le pompe di calore sono in grado di trasferire calore da una sorgente a bassa temperatura ad una sorgente ad alta temperatura; l'unica differenza è che lo scopo di queste ultime è quello di mantenere riscaldato un certo ambiente, mentre le macchine frigorifere hanno lo scopo di mantenere refrigerato un certo ambiente.

Il coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera si calcola perciò come:

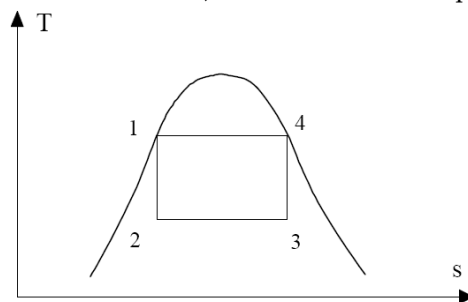
$$\text{COP}_F = \frac{Q_F}{L}$$

Mentre quello di una pompa di calore è dato da:

$$\text{COP}_{\text{pdc}} = \frac{Q_C}{L}$$

Il ciclo frigorifero di Carnot

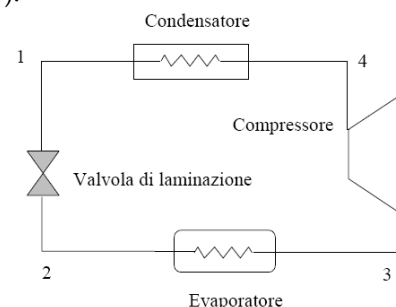
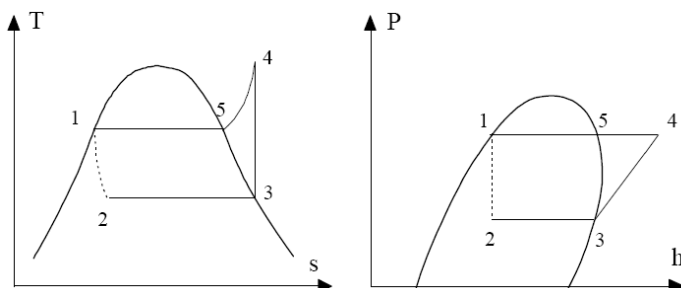
Siccome il ciclo di Carnot è completamente reversibile, tutte e 4 le trasformazioni che lo costituiscono possono essere invertite, e di conseguenza anche gli scambi di lavoro e di calore avvengono con i versi opposti. Il ciclo che si ottiene (*ciclo inverso di Carnot*) è un ciclo che viene percorso in verso antiorario:



Ciclo inverso di compressione a vapore ideale

Siccome il ciclo di Carnot inverso non può essere realizzato nella pratica, viene utilizzato il ciclo mostrato nelle figure seguenti, che prevede le seguenti trasformazioni (*ciclo inverso di compressione a vapore ideale*):

1. Una compressione isentropica in un compressore (3-4)
2. Cessione di calore a pressione costante in un condensatore (4-5-1)
3. Laminazione in una valvola o in un tubo capillare (1-2)
4. Assorbimento di calore a pressione costante in un evaporatore (2-3).



Siccome il processo di laminazione è irreversibile, questo ciclo non è internamente reversibile.

I coefficienti di prestazione delle macchine frigorifere e delle pompe di calore che usano questo ciclo termodinamico sono espressi dalle formule:

$$\text{COF}_F = \frac{h_3 - h_2}{h_4 - h_3}$$

$$\text{COF}_{\text{pdc}} = \frac{h_4 - h_1}{h_4 - h_3}$$

Capitolo 8: Trasmissione del calore e conduzione

1. Introduzione: la trasmissione del calore

Riepilogo

Dalla termodinamica abbiamo appreso che:

1. Il calore Q (come del resto il lavoro) non è una proprietà del sistema, ma una forma di energia in transito. Si può quindi dire che un sistema possiede energia (ad esempio energia interna U , energia cinetica E_c o energia potenziale E_p), ma si deve dire che un sistema scambia energia sotto forma di calore con un altro sistema.
2. La quantità di calore scambiata può essere quantificata.
3. Il passaggio di calore da un sistema ad un altro può avvenire se sono soddisfatte le condizioni:
 - a) I due sistemi si devono trovare a temperature diverse.
 - b) Non devono essere separati da una parete adiabatica
4. Per il primo principio, la quantità di calore trasferito ad un sistema (se $L = 0$) eguaglia l'entità dell'incremento di energia del sistema stesso.
5. Per il secondo principio il calore si propaga nella direzione delle temperature decrescenti, da una regione ad alta temperatura ad una regione a bassa temperatura.

Lo studio della trasmissione del calore

- ♦ **Introduzione alla trasmissione del calore**

Tuttavia, con l'analisi termodinamica si può determinare solo la quantità di calore trasferito per un qualunque processo, ma non è possibile ricavare alcuna informazione sulla durata del processo stesso.

Nei problemi pratici quello che interessa maggiormente è la rapidità con cui avviene lo scambio, piuttosto che la quantità di calore scambiata. Per questo occorre introdurre lo studio della trasmissione del calore, che focalizza l'indagine sugli scambi sotto forma di calore, trascurando gli effetti degli scambi energetici in lavoro.

Consideriamo ad esempio cosa accade se abbiamo un thermos contenente del caffè alla temperatura iniziale di $90\text{ }^{\circ}\text{C}$: sarebbe interessante poter determinare quanto tempo è necessario perché il caffè raggiunga la temperatura di $80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Con l'analisi termodinamica possiamo valutare la quantità di calore, scambiato ma non siamo in grado di rispondere a questa domanda. La trasmissione del calore ci consente invece di valutare anche il tempo dello scambio di calore. Possiamo quindi dire che:

La determinazione della velocità di propagazione del calore verso o da un sistema (e quindi i tempi di raffreddamento e di riscaldamento), così come la variazione di temperatura, costituiscono l'oggetto della trasmissione del calore.

A questo proposito però occorre puntualizzare che in realtà nel nostro studio ci soffermeremo soprattutto su sistemi stazionari (mentre il thermos del precedente esempio non ricade in questa categoria di sistemi, perché la sua temperatura diminuisce nel tempo).

Ad esempio, lo studio della trasmissione del calore in un sistema stazionario ci consente di analizzare una stanza che, in inverno, viene mantenuta alla temperatura costante di 20°C mediante una sorgente interna di energia termica (calorifero): consideriamo infatti costante la temperatura esterna e quindi, in queste condizioni, il sistema trasmette con continuità calore verso l'esterno, e perciò è stazionario.

- ♦ **Definizione di trasmissione del calore**

La trasmissione del calore si occupa dello studio dell'insieme di leggi che governano il passaggio di calore da un sistema ad un altro o da un punto ad un altro di uno stesso sistema, dei dispositivi coinvolti negli scambi di calore e delle leggi che danno la distribuzione di temperatura all'interno di un sistema in funzione dello spazio e del tempo.

- ♦ **Obiettivi**

Gli obiettivi di questa parte del corso sono quindi:

1. Determinare il calore scambiato tra un punto ed un altro;
2. Determinare la distribuzione di temperatura e eventualmente la sua variazione nel tempo.

2. I meccanismi di trasmissione del calore

I meccanismi di trasmissione del calore

In natura, esistono 3 diversi meccanismi di trasmissione del calore. Solitamente, tali meccanismi si presentano in maniera congiunta; nonostante questo, nel nostro studio considereremo di volta in volta solo uno dei meccanismi di trasmissione del calore (o al massimo 2), perché in ogni situazione si può individuare un “meccanismo prevalente” sugli altri, e quindi questi ultimi possono essere trascurati.

I tre meccanismi di cui stiamo parlando sono detti conduzione, convezione e irraggiamento. Si osserva che:

1. Tutti e tre i meccanismi richiedono l'esistenza di una differenza di temperatura;
2. Si verifica spontaneamente la trasmissione del calore da un sistema a temperatura più alta ad un sistema a temperatura più bassa, e questo vale per ognuno dei 3 meccanismi sopra elencati.
3. La conduzione e l'irraggiamento danno luogo esclusivamente a trasferimento di calore, mentre la convezione comporta sempre anche trasporto di massa;

Potenza termica e flusso areico

- ♦ **La potenza termica**

La potenza termica \dot{Q} (o flusso termico o flusso di calore) è il calore scambiato nell'unità di tempo. Di conseguenza, possiamo affermare che il calore scambiato in un certo intervallo di tempo $\Delta\tau$ è dato dalla formula:

$$Q = \int_0^{\tau} \dot{Q}(\tau) d\tau$$

Nel caso stazionario, la potenza termica \dot{Q} è costante, perciò possiamo usare la formula:

$$Q = \dot{Q} \cdot \Delta\tau$$

Ovvero, il calore scambiato in un intervallo di tempo $\Delta\tau$ è dato dalla potenza termica moltiplicata per l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ stesso.

- ♦ **Flusso termico areico**

Chiamiamo flusso termico areico (o flusso di calore areico) la potenza termica riferita ad una superficie di area unitaria:

$$\phi = \frac{\dot{Q}}{A}$$

Il flusso termico areico si misura in Watt al metro quadrato:

$$[\phi] = \frac{[W]}{[m^2]}$$

Il flusso di calore può essere definito dalla relazione:

$$\phi = f(\text{parametro}, \Delta T)$$

Dove ΔT è la differenza di temperatura, mentre il parametro è un coefficiente che tiene conto della maggiore o minore facilità con la quale, a parità di ΔT , ha luogo il trasferimento di calore.

Il flusso termico areico si indica talvolta anche con \dot{q} oppure, per evidenziare che si tratta di un flusso termico uscente, lo si può indicare con la notazione \vec{q} .

Differenze tra conduzione, convezione e irraggiamento

♦ Conduzione

La conduzione è il trasferimento di energia che si verifica per effetto dell'interazione delle particelle di una sostanza dotata di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia.

La conduzione può avvenire sia nei liquidi, sia nei gas, sia nei solidi. In particolare, nei liquidi e nei gas è dovuta alla collisione delle molecole nel loro moto caotico, mentre nei solidi è dovuta alla vibrazione delle molecole all'interno del reticolo e al trasporto di energia da parte degli elettroni liberi.

♦ Convezione

La convezione è il trasferimento di energia tra una superficie solida e un fluido adiacente in movimento. Di conseguenza, la convezione implica gli effetti combinati di conduzione e di trasporto di massa. Si osserva che il calore trasmesso per convezione aumenta con la velocità del fluido.

La convezione può essere:

- Forzata

La convezione forzata avviene quando il fluido è forzato a scorrere su una superficie da mezzi esterni (come ad esempio un ventilatore).

- Libera (o naturale)

La convezione libera avviene quando il moto del fluido è causato da forze ascensionali che sono indotte dalle differenze di densità dovute alla variazione di temperatura del fluido in un campo gravitazionale.

♦ Irraggiamento

L'irraggiamento è il trasferimento di energia che avviene attraverso le onde elettromagnetiche (o fotoni) prodotte da variazioni nelle configurazioni elettroniche degli atomi e delle molecole. Ad esempio, il sole trasferisce l'energia alla terra per irraggiamento.

L'irraggiamento, a differenza dei due meccanismi precedentemente illustrati, non richiede la presenza di un mezzo interposto (quindi avviene anche nel vuoto). Inoltre, esso avviene alla velocità della luce.

Si osserva infine che tutti i corpi a temperatura superiore allo zero termico emettono radiazione termica.

3. La conduzione

Definizione di grandezze utili

Per prima cosa, diamo le definizioni di alcune grandezze che useremo in seguito:

λ = Conduttività termica del materiale

(è un parametro che dipende dal materiale e si trova sulle tabelle)

$$\left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

σ = Potenza generata nell'unità di volume.

$$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$$

Ripasso sul gradiente

Si ricorda che in matematica il *gradiente* di un campo scalare è una funzione a valori reali di più variabili reali, quindi definita in una regione di uno spazio a due, tre o più dimensioni. Nel dettaglio, il gradiente di una funzione f è definito come il vettore che ha per componenti cartesiane le derivate parziali della funzione. Il gradiente rappresenta quindi la direzione di massimo incremento di una funzione di n variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Possiamo perciò affermare che il gradiente è una grandezza vettoriale che indica come una grandezza fisica vari in funzione dei suoi diversi parametri.

Quindi:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

L'equazione di Fourier

♦ *Postulato di Fourier*

Il flusso termico areico uscente per conduzione è dato dalla formula:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T$$

Come già accennato, λ è la conduttività termica del materiale. Nella realtà, questo parametro varia con la temperatura, ma noi lo considereremo costante.

♦ *L'equazione di Fourier*

Consideriamo un certo volume; l'energia interna che si accumula nel volume in considerazione è data dall'energia netta entrante, sommata alla potenza generata all'interno del volume stesso (nel caso in cui all'interno del volume sia presente un elemento che generi energia termica):

$$\frac{d}{dt} \int_V u \cdot dm = \dot{Q}_{\text{gen}} + \sum \dot{Q}^{\leftarrow}$$

Da cui:

$$\frac{d}{dt} \int_V c_v \cdot T \cdot \rho \cdot dV = \int_V \sigma \cdot dV - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Dove ρ è la massa volumica (cioè l'inverso del volume specifico) e il vettore \vec{n} è il vettore normale alla superficie dS . Grazie al teorema della divergenza, che non andremo a studiare, possiamo trasformare l'integrale di superficie in integrale di volume e, per mezzo di successivi passaggi matematici (e facendo uso del postulato di Fourier), si arriva a dimostrare l'equazione di Fourier:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{\lambda}$$

L'equazione di Fourier è l'equazione di bilancio energetico ed è una equazione differenziale alle derivate parziali, lineare in $T = f(x, y, z, t)$, del 2° ordine rispetto a x, y, z e del 1° ordine rispetto a t .

♦ *Semplificazioni e condizioni al contorno*

Se fossimo in grado di integrare l'equazione di Fourier, potremmo definire sia il profilo di temperature, sia il flusso termico che viene ad instaurarsi.

Siccome però non siamo in grado di integrare tale equazione, imponiamo alcune semplificazioni:

1. Se supponiamo che non ci sia generazione di potenza, abbiamo:

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T$$

2. Se supponiamo di trovarci in regime stazionario, otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{\lambda}$$

Questa equazione è detta anche *equazione di Poisson*.

3. Se supponiamo di trovarci in regime stazionario e in assenza di generazione di potenza:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \wedge \sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 T = 0$$

Sappiamo però che l'integrazione delle equazioni ci lascia delle costanti, che devono essere definite mediante la definizione di opportune condizioni al contorno, che possono essere spaziali o temporali.

♦ *Risoluzione*

Per risolvere l'equazione differenziale, occorre usare, a seconda della tipologia di geometria con la quale ci si trova a dover lavorare, un opportuno sistema di coordinate. Di seguito vengono analizzate singolarmente le situazioni più frequenti.

4. Conduzione: calcolo della distribuzione di T e della Q

Coordinate cartesiane: lastra piana indefinita

♦ Determinazione della distribuzione di temperatura

Se adottiamo coordinate cartesiane, la generica equazione di Fourier si presenterà nella forma:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} \sigma$$

Consideriamo ora un caso particolare: quello in cui la conduzione riguardi una lastra piana infinita nelle direzioni y e z. In tale situazione, il calore si propaga solo nella direzione x e la temperatura dipende naturalmente solo da x:

$$T = T(x)$$

Perciò:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} \sigma$$

Supponendo poi di trovarci in regime stazionario:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda} \sigma$$

Questa equazione può essere facilmente integrata, e ci dà come risultato:

$$T = -\frac{\sigma}{2\lambda} x^2 + Ax + B$$

Dove A e B sono due opportune costanti dipendenti dalle condizioni al contorno. Otteniamo così un profilo di temperature lineare.

Consideriamo ora il caso particolare in cui non si abbia generazione di potenze, ovvero $\sigma = 0$:

$$T = Ax + B$$

♦ Condizioni al contorno

Per stabilire i valori delle costanti A e B presenti nella precedente formula, possiamo definire la temperatura superficiale interna T_1 e quella della superficie esterna, T_2 . Indicando poi con s lo spessore della lastra piana, le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} T = T_1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T = T_2 \\ x = s \end{cases}$$

Abbiamo allora:

$$T_1 = A \cdot 0 + B \rightarrow B = T_1 \quad T_2 = A \cdot s + B = A \cdot s + T_1 \rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

Ovvero:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{s} x + T_1$$

Si osserva perciò che il profilo di temperatura ottenuto è un profilo lineare.

♦ Flusso termico areico

Per il postulato di Fourier, il flusso termico areico è dato dalla formula:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ricordando poi:

$$T = -\frac{\sigma}{2\lambda} x^2 + Ax + B$$

Otteniamo:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \left(-\frac{\sigma}{\lambda} x + A \right)$$

Nell'ipotesi di assenza di generazione di potenza e con le condizioni al contorno precedentemente riportate, possiamo scrivere anche:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{s} = \frac{\Delta T}{R}$$

Dove:

$\frac{\lambda}{s}$ = Conduttanza della parete.

$\frac{s}{\lambda}$ = Resistenza termica specifica della parete (o *resistenza termica*, R).

$$\left[\frac{W}{m^2 K} \right] \quad \left[\frac{m^2 K}{W} \right]$$

Naturalmente, possiamo anche scrivere che la potenza termica generata per conduzione è:

$$\dot{Q}_{COND} = \dot{q} \cdot A = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_2}{s}$$

Coordinate cilindriche: cilindro pieno o cavo di altezza infinita

♦ *Determinazione della distribuzione di temperatura*

Proviamo ora ad adottare coordinate cilindriche, ovvero del tipo (r, φ, z) , dove r è il raggio, φ è l'angolo e z è la quota. Allora, nell'equazione di Fourier:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{\lambda}$$

Come è noto dall'Analisi Matematica, l'espressione del laplaciano in coordinate cilindriche è:

$$\nabla^2 T(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T(r, \varphi, z)}{\partial z^2}$$

Prendiamo come riferimento un cilindro pieno o cavo di altezza infinita. In questo caso, la temperatura non dipende né dall'angolo, né dalla quota, perciò avremo:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \right] + \frac{1}{\lambda} \sigma$$

Se siamo in regime stazionario:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \right] = -\frac{1}{\lambda} \sigma$$

Da cui:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \right] = -\frac{\sigma}{\lambda} r$$

Integrando una prima volta:

$$r \cdot \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\lambda} r^2 + C \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\lambda} r + \frac{C}{r}$$

Integrando nuovamente:

$$T = -\frac{\sigma}{4\lambda} r^2 + C \ln r + D$$

Osserviamo quindi che il profilo ottenuto è parabolico.

♦ *Condizioni al contorno: caso di cilindro pieno con generazione di potenza*

Consideriamo ora la condizioni al contorno relative ad un cilindro pieno con generazione di potenza. Le condizioni da imporre sono quella riguardante la temperatura sul raggio esterno R del cilindro pieno, e l'annullamento del flusso termico areico sull'asse del cilindro stesso:

$$\begin{cases} T = T_2 \\ r = R \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r = 0 \end{cases}$$

Applichiamo la seconda condizione a partire dall'equazione:

$$\frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\lambda} r + \frac{C}{r}$$

Che diventa:

$$0 = 0 + \frac{C}{r} \quad \rightarrow \quad C = 0$$

Dobbiamo infatti annullare il termine con r a denominatore, altrimenti andrebbe all'infinito. Dalla prima condizione:

$$T_2 = -\frac{\sigma}{4\lambda} R^2 + D \quad \rightarrow \quad D = T_2 + \frac{\sigma}{4\lambda} R^2$$

E perciò otteniamo infine:

$$T = \frac{\sigma}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_2$$

- *Flusso termico areico*

In questa situazione, il flusso termico areico è:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2} r$$

Da cui:

$$\dot{Q} = \dot{q} A = A \frac{\sigma}{2} r = \pi r^2 \sigma L$$

E il flusso termico areico per unità di lunghezza è:

$$\dot{q}_{\text{unità lunghezza}} = \pi r^2 \sigma$$

♦ **Condizioni al contorno: caso di cilindro cavo (tubo) senza generazione di potenza**

Consideriamo adesso la condizioni al contorno relative ad un tubo privo di generazione di potenza. Le condizioni da imporre sono quelle riguardanti la temperatura sul raggio esterno R_i e quella sul raggio esterno R_e :

$$\begin{cases} T = T_i \\ r = R_i \end{cases} \quad \begin{cases} T = T_e \\ r = R_e \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} T_i = C \ln R_i + D \\ T_e = C \ln R_e + D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_e - T_i = C \ln \frac{R_e}{R_i} \\ D = T_i - C \ln R_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \\ D = T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \ln R_i \end{cases}$$

E infine:

$$T = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \ln r + T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \ln R_i = \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \ln \frac{r}{R_i} + T_i$$

- Flusso termico areico

Il flusso termico areico è dato dall'espressione:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r} \frac{T_e - T_i}{\ln \frac{R_e}{R_i}} = \frac{\lambda}{r} \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}}$$

La potenza termica è perciò:

$$\dot{Q} = \dot{q}A = \dot{q}2\pi rL = 2\pi\lambda L \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}} = \frac{T_i - T_e}{R}$$

Dove la resistenza termica R è in questo caso definita come:

$$R = \frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{2\pi\lambda L} \quad \left[\frac{K}{W} \right]$$

Si noti che dimensionalmente la resistenza termica è diversa da quella definita nel caso di parete piana. La potenza termica per unità di lunghezza è data da:

$$\dot{q}_{\text{unità lunghezza}} = \frac{\dot{Q}}{L} = 2\pi\lambda \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}}$$

Coordinate sferiche: sfera piena o cava

♦ **Determinazione della distribuzione di temperatura**

Se adottiamo le coordinate sferiche, il laplaciano è del tipo:

$$\nabla^2 T(r, \varphi, z) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

Quindi l'equazione di Fourier diventa:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\sigma}{\lambda}$$

Nel caso particolare in cui si consideri una sfera cava o piena, la temperatura, data la simmetria, dipende solamente dal raggio r , perciò:

$$\frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma}{\lambda}$$

Se supponiamo inoltre che il regime sia stazionario, abbiamo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma}{\lambda} = 0$$

Integrando questa equazione, otteniamo il risultato seguente:

$$T = -\frac{\sigma}{6\lambda} r^2 + \frac{A}{r} + B$$

Osserviamo che il profilo ottenuto è iperbolico.

♦ **Potenza termica**

La potenza termica generata dalla sfera cava è data dalla formula:

$$\dot{Q} = 4\pi R_1 R_2 \lambda \frac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1}$$

Capitolo 9: Trasmissione del calore per convezione

1. Convezione

La convezione

♦ Definizione

La convezione è il meccanismo di trasmissione del calore che si verifica in presenza di un fluido soggetto al trasporto di massa al suo interno. Si ha quindi un moto macroscopico del sistema.

La convezione si verifica tra la superficie di un corpo ed un fluido in moto relativo.

La convezione è un fenomeno simile a quello di conduzione: come la conduzione, richiede la presenza di un mezzo materiale, che però nel caso della convezione è costituito da un fluido in movimento. Mentre la trasmissione del calore in un solido avviene sempre per conduzione, perché le molecole di un solido rimangono relativamente fisse, la trasmissione del calore in un fluido avviene per convezione se si ha movimento di massa nel fluido, e per conduzione in caso contrario.

La potenza termica trasmessa per convezione è molto maggiore rispetto a quella trasmessa per conduzione, perché il moto del fluido innesca flussi conduttivi più intensi in un maggior numero di punti del fluido.

La convezione è il più complesso tra i meccanismi di trasmissione del calore.

♦ Classificazione

Esistono due diverse tipologie di convezione:

1. Convezione forzata

Il moto del fluido è imposto da un agente esterno.

2. Convezione naturale (o libera)

Il moto del fluido è causato dal processo di trasmissione del calore.

La convezione forzata, essendo provocata in maniera artificiale, è quella che riveste per noi il maggior interesse, e quindi ci soffermeremo soprattutto su questo tipo di convezione.

♦ Esempi

1. Nel sistema di riscaldamento di un ambiente, il termosifone agisce per irraggiamento, ma anche per convezione, innescando movimenti di aria all'interno della stanza.
2. Si ha convezione quando si ha trasmissione di calore tra dei liquidi in movimento e le pareti lambite da tali liquidi.

Legge di Newton

♦ Enunciato della legge di Newton

La potenza termica trasmessa per convezione è data dalla legge di Newton, che afferma che:

$$\dot{Q}_{\text{CONV}} = h \cdot A \cdot (T_s - T_f)$$

Dove:

Coefficiente di scambio termico convettivo (o conduttanza convettiva).

h Non è una proprietà del materiale, e risente di molti parametri (rugosità della superficie, velocità con cui il fluido lambisce la superficie, ...), perciò deve essere di volta in volta calcolato.

$$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$$

A Superficie normale al flusso.

$$[\text{m}^2]$$

T_s Temperatura del solido sulla sua superficie.

$$[\text{K}]$$

T_f Temperatura del fluido (a distanza infinita dalla superficie).

$$[\text{K}]$$

La legge di Newton può anche essere enunciata nella forma (\dot{q} e J sono solo simboli diversi per il flusso termico areico):

$$\dot{q} = J = h \cdot (T_s - T_f)$$

♦ **Osservazione**

Come abbiamo già osservato, i meccanismi di trasmissione del calore in natura non si presentano quasi mai isolati. Ad esempio, la convezione si presenterà spesso unita alla conduzione. A livello pratico, nei nostri problemi considereremo la conduzione quando il problema fornisce tra i dati la temperatura interna ed esterna rispetto alla parete; se invece si conosce la temperatura della parete, è possibile trascurare il meccanismo di conduzione.

Ad esempio, in una parete edilizia è necessario eseguire un'analisi completa della trasmissione del calore, tenendo conto di:

1. Il calore trasmesso per convezione tra l'aria all'interno del locale e la superficie interna della parete;
2. Il calore trasmesso per conduzione attraverso la parete (costituita da uno o più strati);
3. Il calore trasmesso per conduzione tra superficie esterna della parete e l'aria all'esterno del locale.

Di conseguenza, avremo una resistenza termica totale così calcolabile:

$$R_{TOT} = R_{CONV_1} + R_{COND} + R_{CONV_2} = \frac{1}{h_{interno}} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{h_{esterno}}$$

E quindi avremo una potenza termica totale:

$$\dot{Q}_{tot} = \frac{A(T_{interno} - T_{esterno})}{R_{TOT}}$$

Importanza del coefficiente di scambio convettivo

Si nota dalle precedenti osservazioni che l'analisi del fenomeno convettivo si limita all'individuazione dei coefficienti di scambio convettivi: una volta che sono stati determinati tali parametri, è possibile calcolare in maniera immediata la potenza termica.

Il parametro h non è riportato in letteratura in opportune tabelle, ma deve essere di volta in volta calcolato.

2. Moto turbolento e moto laminare

Differenza tra moto turbolento e moto laminare

Un'importante distinzione che occorre fare, oltre a quella tra convezione forzata e naturale, è quella tra moto laminare e moto turbolento. Il fluido infatti può avere un moto di diverso tipo:

♦ **Regime laminare**

In caso di flusso laminare, non si ha rimescolamento del fluido, e quindi lo scambio di calore avviene per conduzione.

♦ **Regime turbolento**

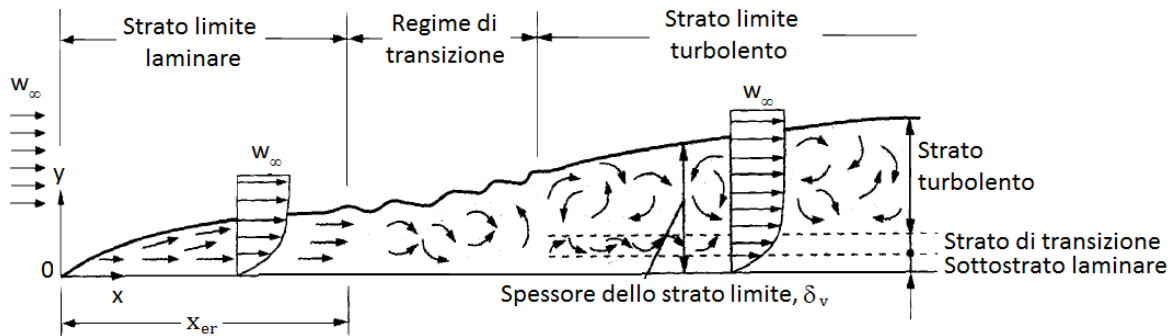
In caso invece di flusso turbolento, si incontra in prossimità della parete, uno strato di flusso in moto laminare, attraverso il quale avviene trasmissione di calore per conduzione; allontanandosi dalla parete si trova invece il fluido in moto turbolento, e quindi si ha un forte rimescolamento del fluido, con conseguente elevato scambio di calore.

Quindi, un flusso turbolento differisce da un flusso laminare in quanto al suo interno sono presenti strutture vorticosi di grandezza e velocità differenti che rendono il flusso non predicibile nel tempo, anche se il moto rimane deterministico (questo significa che se conoscessimo il campo in un certo istante con una piccolissima imprecisione, questa dopo un certo tempo renderebbe la soluzione trovata completamente differente da quella reale).

Facendo riferimento

Regimi di flusso nel caso di lastra piana

Nella realtà, un flusso che scambia calore con un solido evolve su tale solido in maniera abbastanza complessa: non è corretto affermare che evolve solo con moto turbolento o solo con moto laminare. La situazione che si verifica, considerando come esempio una lastra piana, è quella mostrata in figura:



Il fluido investe la lastra piana con una velocità uniforme w_∞ nella direzione x . Possiamo considerare il fluido come composto da strati adiacenti, sovrapposti uno all'altro. La velocità delle particelle del primo strato di fluido (quello adiacente alla piastra) sarà nulla, per la condizione di scorrimento nullo. Si avrà quindi uno scambio di calore per conduzione.

Negli strati adiacenti invece le particelle di fluido tenderanno progressivamente a raggiungere la velocità indisturbata w_∞ . Diciamo quindi che la presenza della piastra viene avvertita solo ad una certa distanza δ_v dalla piastra stessa: la porzione di fluido compresa entro tale distanza viene detta **strato limite** (o regione di strato limite); nella porzione di fluido al di fuori dallo strato limite (detta **regione di moto non viscoso**), il fluido si muove con velocità costante w_∞ . Solitamente, si considera δ_v come la distanza alla quale il fluido si muove con una velocità pari a $0,99 \cdot w_\infty$.

In particolare, per un certo strato il moto rimarrà ordinato e si avrà moto laminare (**sottostrato laminare**); poi si avrà uno **strato di transizione** e infine, raggiunta una certa distanza dalla superficie (ma sempre all'interno dello strato limite), si ha uno **strato turbolento**.

Si nota anche che, nei pressi del punto d'attacco si ha solo moto laminare (**strato limite laminare**), mentre man mano che ci si allontana dal punto d'attacco prevale il moto turbolento. Tra le due regioni, si ha uno strato di **regime di transizione**. Tuttavia, nei nostri problemi considereremo nulla la regione di transizione e useremo, a seconda dei casi, una delle due approssimazioni seguenti:

1. Consideriamo superfici la cui lunghezza è sufficientemente piccola da avere solo lo strato laminare.
2. Consideriamo superfici la cui lunghezza è talmente grande da poter trascurare lo strato laminare e considerare solo quello turbolento.

Forza d'attrito e sforzo di taglio superficiale

Consideriamo ora due strati di fluido adiacenti, all'interno dello strato limite. Lo strato più veloce cercherà di trascinare quello più lento, a causa dell'attrito tra i due strati, esercitando su di esso una **forza di trascinamento** (o forza di attrito). Chiamiamo **sforzo di taglio** τ la forza di trascinamento per unità di area. Nel caso di flussi esterni, lo sforzo di taglio superficiale si determina con la relazione:

$$\tau_s = C_f \cdot \frac{\rho w_\infty^2}{2}$$

Dove C_f è il coefficiente di attrito, il cui valore è solitamente determinato in modo sperimentale, e ρ è la densità del fluido. Lo sforzo di taglio si misura in $[N \cdot m^{-2}]$.

Noto il coefficiente d'attrito medio, possiamo calcolare la forza d'attrito o di trascinamento dell'intera superficie, mediante la formula:

$$F_T = A \cdot \tau_s = A \cdot C_f \cdot \frac{\rho w_\infty^2}{2}$$

Dove A è l'area della superficie.

3. La convezione forzata

Parametri per il calcolo della conduttanza convettiva

I parametri che entrano in gioco per il calcolo della conduttanza convettiva h sono diversi a seconda del tipo di convezione (forzata o naturale). Iniziamo quindi analizzando la convezione forzata. In questo caso, possiamo scrivere:

$$h = h(\rho, \mu, c_p, \lambda, v, D)$$

Dove:

- ρ è la densità del fluido.
- μ è la viscosità del fluido.
- c_p è il calore specifico a pressione costante.
- λ è la conduttività del fluido.
- v è la velocità di moto del fluido.
- D è il *diametro equivalente*, o *dimensione caratteristica*.

L'uso dei gruppi adimensionali

Siccome la gestione di 6 parametri risulta abbastanza complessa, possiamo raggruppare questi parametri in 3 **gruppi adimensionali**, ovvero in 3 indici numerici (privi di unità di misura) che si determinano in funzione di parametri sopra elencati. I gruppi adimensionali che si devono calcolare per lo studio della convezione forzata sono:

1. Il numero Nusselt;
2. Il numero di Reynolds;
3. Il numero di Prandtl.

A partire dai 3 gruppi adimensionali, potremo valutare h . In particolare, si procederà individuando dapprima gli indici di Reynolds e di Prandtl; a partire da tali valori, per mezzo di un'opportuna relazione sperimentale, saremo in grado di valutare il valore dell'indice di Nusselt e, a partire da quest'ultimo, potremo infine calcolare il valore di h .

Come vedremo in seguito, in caso di convezione naturale, il procedimento è simile, ma si usano diversi gruppi adimensionali.

A quale temperatura valutare i parametri?

Tutti i parametri fino ad ora introdotti dipendono dalla temperatura: a quale temperatura andiamo quindi a calcolarli? La parete lambita dal fluido si troverà ad una certa temperatura T_p , mentre il fluido, a distanza dalla parete, si troverà a temperatura T_∞ ; tuttavia, vicino alla parete il fluido avrà un certo profilo di temperatura che non possiamo determinare in maniera esatta, ma al più in modo qualitativo.

Di conseguenza, la temperatura che andiamo a considerare è, solitamente, la cosiddetta **temperatura di film**, che è semplicemente la media aritmetica tra la temperatura del fluido a distanza dalla parete e la temperatura della parete stessa:

$$T_{\text{film}} = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Più raramente, i parametri vengono semplicemente valutati alla temperatura asintotica T_∞ ; altre volte ancora si considera la temperatura adiabatica che, nel caso in cui si abbia un flusso che scorre all'interno di una tubazione, è data dalla formula seguente:

$$T_f = \frac{\int_A \rho w c_p T dA}{\int_A \rho w c_p dA}$$

Tuttavia, negli esercizi, la temperatura di miscelamento adiabatica non deve essere calcolata, ma al più viene fornita dal testo.

Definizione e significato dei gruppi adimensionali

Cerchiamo ora di dare le definizioni dei gruppi adimensionali e di comprenderne il significato fisico.

♦ Numero di Nusselt

Il numero di Nusselt è definito dalla seguente relazione:

$$Nu = \frac{h \cdot D}{\lambda}$$

Esso può essere interpretato come il rapporto tra la potenza termica scambiata per convezione (ovvero, attraverso moti macroscopici) e la potenza termica scambiata per conduzione nello strato limite:

$$Nu = \frac{\dot{q}_{\text{convezione}}}{\dot{q}_{\text{conduzione}}} = \frac{h \cdot \Delta T}{\frac{\lambda}{D} \cdot \Delta T}$$

♦ Numero di Prandtl

Il numero di Prandtl è definito dalla relazione:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

Per quanto riguarda il suo significato fisico, può essere interpretato come il rapporto tra la viscosità cinematica ν (nu) e la diffusività termica del fluido, indicata con a :

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\rho c_p \mu}{\rho \lambda}$$

La viscosità cinematica è, misurata in metri quadrati al secondo, ed è data da:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

In sostanza, il numero di Prandtl può essere considerato un fattore di scala che porta il numero di Reynolds a diventare significativo nell'ambito dei problemi di trasmissione del calore.

Questo valore è funzione solo di caratteristiche del fluido, perciò spesso viene direttamente indicato nelle tabelle relative al fluido stesso.

♦ Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds è definito dalla relazione:

$$Re = \frac{\rho w_{\infty} D}{\mu}$$

In alternativa, la formula può anche essere scritta come:

$$Re = \frac{w_{\infty} D}{\nu}$$

Il numero Re può essere interpretato come il rapporto tra la risultante delle forze di inerzia e la risultante delle forze viscosi. Se prevalgono le forze di inerzia, il fluido si comporta in maniera disordinata; più è alto Re , più le forze di inerzia sono prevalenti rispetto a quelle viscosi, quindi prevalgono le "spinte al disordine". Di conseguenza, il numero di Reynolds ci consente di stabilire se il moto di un fluido è laminare oppure turbolento. Per prendere tale decisione, ci si basa sulla seguente tabella del numero di Reynolds critico:

Tipo di moto	Condizione di regime laminare	Condizione di regime turbolento
Moto in un condotto	$Re < 2000$	$Re > 2500$
Moto lungo una lastra piana	$Re < 5 \cdot 10^5$	$Re > 5 \cdot 10^5$
Moto attorno ad un cilindro	$Re < 2 \cdot 10^5$	$Re > 2 \cdot 10^5$

Si noti che nel caso di moto in un condotto, il numero di Reynolds critico è in realtà 2300, ma nella precedente tabella è stato lasciato un range intermedio tra il regime laminare e il regime turbolento.

A seconda del tipo di moto, che determiniamo sulla base del numero di Reynolds, avremo una diversa relazione per la determinazione del numero di Nusselt.

♦ Numero di Peclet

Il numero di Peclet è un quarto indice, definito semplicemente come:

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{w_{\infty} D}{a}$$

Flusso su lastra piana

Consideriamo inizialmente il flusso di un fluido che lambisce una lastra piana. In questo caso, i coefficiente di attrito e di scambio termico variano lungo la superficie della piastra, in conseguenza della variazione degli strati limite di velocità e di temperatura nella direzione del moto. Poiché di solito si è interessati alla forza di trascinamento e alla potenza termica scambiata sull'intera superficie, queste si possono determinare usando i valori medi dei coefficienti di attrito e di scambio termico.

Di seguito sono riportate le relazioni sperimentali per il calcolo del coefficiente di attrito medio e del numero di Nusselt medio nei vari casi d'interesse.

	Coefficiente d'attrito medio	Numero di Nusselt medio
Flusso laminare	$C_f = 1,328 \cdot Re_L^{-\frac{1}{2}}$	$Nu = 0,664 \cdot Re_L^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ (condizione: $Pr \geq 0,6$)
Flusso turbolento	$C_f = 0,074 \cdot Re_L^{-\frac{1}{5}}$ (condizione: $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$)	$Nu = 0,037 \cdot Re_L^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ (condizione: $0,6 \leq Pr \leq 60$ e $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$)
Flusso combinato	$C_f = 0,074 \cdot Re_L^{-\frac{1}{5}} - 1742 \cdot Re_L^{-1}$ (condizione: $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$)	$Nu = \left(0,037 \cdot Re_L^{\frac{4}{5}} - 871 \right) \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$ (condizione: $0,6 \leq Pr \leq 60$ e $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$)

Dove Re_L è il numero di Reynolds valutato usando come dimensione caratteristica la lunghezza della lastra piana, L :

$$Re_L = \frac{\rho w_\infty L}{\mu} = \frac{w_\infty L}{\nu}$$

Tutte le relazioni sopra elencate sono state ricavate per superfici isoterme, ma possono anche essere usate per superfici non isoterme, assumendo la temperatura della superficie costante e pari ad un opportuno valore medio.

Una volta noto il numero di Nusselt, calcoliamo h a partire dalla definizione di Nu :

$$Nu = \frac{h \cdot D}{\lambda} \rightarrow h = \frac{Nu \cdot \lambda}{D} = \frac{Nu \cdot \lambda}{L}$$

Per il calcolo della forza d'attrito e della potenza termica si useranno le già note formule:

$$F_T = A \cdot C_f \cdot \frac{\rho w_\infty^2}{2} \qquad \dot{Q} = h \cdot A \cdot (T_s - T_f)$$

Nelle quali A è l'area della superficie della lastra piana lambita dal fluido, ovvero:

$$A = b \cdot L$$



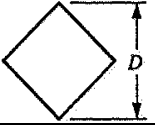

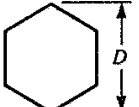
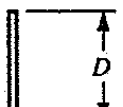

Dove b è la larghezza della lastra e L , come già affermato, è la sua lunghezza.

Flusso all'esterno di un cilindro liscio

Passiamo ora ad analizzare cosa accade se si ha un flusso che lambisce dall'esterno un cilindro. La dimensione caratteristica (che nella situazione precedentemente analizzata era la lunghezza della piastra) è data dal diametro esterno D del cilindro. Il numero di Reynolds sarà perciò in questo caso:

$$Re = \frac{\rho w_{\infty} E}{\mu} = \frac{w_{\infty} D}{\nu}$$

Per la determinazione del numero di Nusselt, si possono utilizzare le formule sperimentali riassunte nella seguente tabella, che riguardano non solo per tubazioni cilindriche, ma anche tubazioni con sezioni di forme diverse.

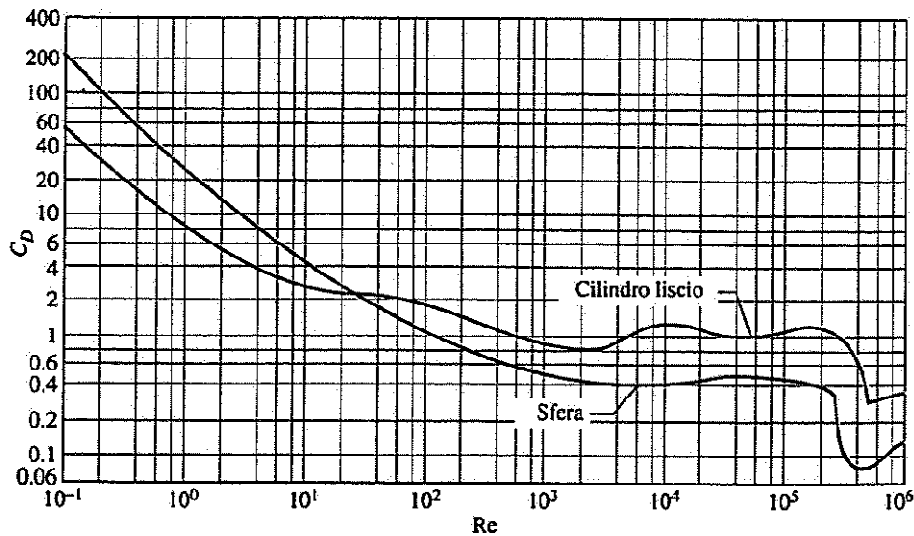
Sezione trasversale del cilindro	Fluido	Campo di Re	Numero di Nusselt
Cerchio 	Gas o liquido	tra 0,4 e 4	$Nu = 0,989 \cdot Re^{0,330} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		tra 4 e 40	$Nu = 0,911 \cdot Re^{0,385} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		tra 40 e 4000	$Nu = 0,683 \cdot Re^{0,466} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		tra 4000 e 40 000	$Nu = 0,193 \cdot Re^{0,618} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		tra 40 000 e 400 000	$Nu = 0,027 \cdot Re^{0,805} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Quadrato 	Gas	tra 5000 e 100 000	$Nu = 0,102 \cdot Re^{0,675} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Quadrato ruotato di 45° 	Gas	tra 5000 e 100 000	$Nu = 0,246 \cdot Re^{0,588} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Esagono 	Gas	tra 5000 e 100 000	$Nu = 0,153 \cdot Re^{0,638} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Esagono ruotato di 90° 	Gas	tra 5000 e 19 500	$Nu = 0,160 \cdot Re^{0,638} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
		tra 19 500 e 100 000	$Nu = 0,0385 \cdot Re^{0,782} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Lastra verticale 	Gas	tra 4000 e 15 000	$Nu = 0,228 \cdot Re^{0,731} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$
Ellisse 	Gas	Tra 2500 e 15 000	$Nu = 0,248 \cdot Re^{0,612} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$

In alternativa alle formule riportate in tabella, si può utilizzare la correlazione di Churchill e Bernstein:

$$Nu = 0,3 + 0,62 \frac{Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \left(\frac{Re}{28\,200}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}} \quad (\text{valida se } Pr \cdot Re > 0,2)$$

Sia le relazioni in tabella, sia quella appena riportata, valgono per cilindri singoli, oppure per cilindri disposti in modo tale che il flusso su ciascuno di essi non sia influenzato dagli altri. Inoltre, si possono applicare solo se la superficie del cilindro è liscia, e non rugosa. In tutte le relazioni, tutti i parametri vengono determinati alla temperatura di film.

Per quanto riguarda il coefficiente d'attrito C_D , esso è rappresentato nel seguente grafico, che mette in relazione tra loro C_D ed il numero di Reynolds. Il grafico riporta anche i valori relativi alla sfera (che analizzeremo a breve).



Una volta noti il numero di Nusselt ed il coefficiente di attrito, possiamo calcolare h :

$$h = \frac{Nu \cdot \lambda}{D}$$

e quindi possiamo determinare la forza d'attrito e la potenza termica, usando le solite formule:

$$F_T = A \cdot C_D \cdot \frac{\rho w_\infty^2}{2} \quad \dot{Q} = h \cdot A \cdot (T_s - T_f)$$

In questo caso, A è l'area frontale (ovvero normale alla direzione del fluido), che è data da:

$$A = L \cdot D$$

Dove D è il diametro della sezione del cilindro ed L è la sua lunghezza.

Flusso all'esterno di una sfera

Nel caso in cui il flusso lambisca dall'esterno una sfera, la dimensione caratteristica è il diametro esterno D della sfera stessa. Il numero di Reynolds sarà perciò in questo caso:

$$Re = \frac{\rho w_\infty D}{\mu} = \frac{w_\infty D}{\nu}$$

Per la determinazione del numero di Nusselt, si può usare la correlazione di Whitaker:

$$Nu = 2 + \left[0,4 \cdot Re^{\frac{1}{2}} + 0,06 \cdot Re^{\frac{2}{3}} \right] Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{valida se } 3,5 \leq Re \leq 80\,000 \text{ e } 0,7 \leq Pr \leq 380)$$

Dove tutti i parametri sono determinati alla temperatura della corrente libera T_∞ , tranne μ_s , che viene determinata alla temperatura della superficie, T_s .

Il coefficiente di attrito viene determinato partendo dal grafico riportato in precedenza (che contiene anche i valori relativi al cilindro). Una volta noti Nusselt e C_D , calcoliamo h :

$$h = \frac{Nu \cdot \lambda}{D}$$

e determiniamo la forza d'attrito e la potenza termica:

$$F_T = A \cdot C_D \cdot \frac{\rho w_\infty^2}{2} \quad \dot{Q} = h \cdot A \cdot (T_s - T_f)$$

In questo caso, A è l'area frontale (ovvero normale alla direzione del fluido), che è data da:

$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

Dove D è il diametro della sfera.

Flusso all'interno di un tubo

♦ Introduzione

In molte applicazioni pratiche di riscaldamento o di raffreddamento, si utilizza il flusso di un liquido o di un gas all'interno di tubi o condotti. In tali applicazioni, il fluido è mosso da un ventilatore o da una pompa all'interno di un tubo di lunghezza adeguata a realizzare lo scambio termico desiderato. Di seguito analizzeremo i coefficiente d'attrito e di scambio termico (numero di Nusselt) direttamente correlati alla caduta di pressione e alla potenza termica scambiata nel flusso all'interno di tubi. Tali grandezze saranno poi usate per calcolare la potenza richiesta per far muovere il fluido e la lunghezza di tubo necessaria.

In questo caso, la dimensione caratteristica D è il diametro interno del tubo.

♦ Calcolo della velocità media all'interno della sezione

Poiché in un tubo la velocità del fluido varia da 0 sulla parete, fino al valore massimo sull'asse del tubo, nel caso in cui il flusso di fluidi avvenga all'interno di un tubo, occorre far riferimento ad una velocità media w_m , che si determina imponendo il principio di conservazione della massa: la portata di massa ricavata usando la velocità media deve coincidere con la portata di massa reale (che deve essere già nota):

$$\dot{m} = \rho \cdot w_m \cdot A_t \quad \rightarrow \quad w_m = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_t}$$

Dove A_t è l'area della sezione che, in caso di tubo cilindrico, è data da:

$$A_t = \frac{\pi D^2}{4}$$

♦ Calcolo della temperatura media

Anche la temperatura del fluido non è costante all'interno di una sezione del tubo: nei punti della sezione a contatto con la superficie interna del tubo, la temperatura sarà T_s , mentre al centro il valore sarà ben diverso (massimo nel caso in cui si stia assistendo ad un raffreddamento, minimo se il fluido si sta riscaldando). Si considera allora una temperatura media all'interno della sezione (si noti però che questa temperatura varia di sezione in sezione: è diversa la T_m valutata nella sezione di ingresso del tubo da quella valutata nella sezione d'uscita del tubo).

Il valore di T_m viene determinato imponendo il soddisfacimento del principio di conservazione dell'energia: l'energia trasportata dal fluido attraverso la sezione trasversale nel flusso reale deve uguagliare quella trasportata attraverso la stessa sezione trasversale del fluido, ma a temperatura costante T_m :

$$\dot{E}_{\text{fluido}} = \dot{m} c_p T_m = \int_{\dot{m}} c_p T d\dot{m} = \int_{A_t} c_p T (\rho \cdot w \cdot dA_t)$$

Nei problemi, solitamente la temperatura media è data dal testo.

♦ Potenza termica e flusso termico

La potenza termica, in assenza di scambi di lavoro, è data da:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_u - T_i)$$

Dove T_u e T_i sono le temperature medie del fluido nella sezione d'uscita (T_u) e nella sezione d'ingresso (T_i) del tubo.

Il flusso termico areico in un certo punto del tubo è invece dato da:

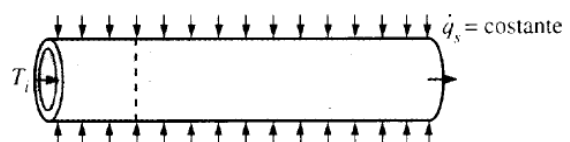
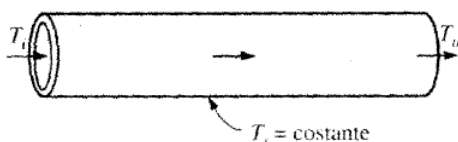
$$\dot{q} = h(T_s - T_m)$$

Dove T_s è la temperatura della superficie interna del tubo nel punto considerato, mentre T_m è la temperatura media della sezione in analisi.

♦ Ipotesi semplificative

Possiamo fare diverse ipotesi semplificativa, che sono tra loro alternative (non possiamo assumerle vere entrambe contemporaneamente!). Possiamo:

1. Considerare costante la temperatura superficiale, ovvero supporre che in ogni sezione del tubo la temperatura superficiale sia sempre la stessa.
2. Considerare costante il flusso termico areico, in ogni sezione del tubo.



♦ **Ipotesi di temperatura superficiale costante**

Proviamo ora ad ipotizzare che lungo tutto il tubo la temperatura superficiale sia costante. In questo caso, la potenza termica scambiata sarà:

$$\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T_{\text{media}} = h \cdot A \cdot (T_s - T_m)_{\text{media}}$$

Dove h è il coefficiente medio di scambio termico per convezione, A è l'area della superficie di scambio termico (πDL) e ΔT_{media} è la differenza media di temperatura tra il fluido e la superficie. ΔT_{media} può essere approssimata uguale alla differenza media aritmetica di temperatura, che è la media tra:

1. La differenza tra la temperatura superficiale costante T_s e la temperatura del fluido in ingresso, T_i e
2. La differenza tra la temperatura superficiale costante T_s e la temperatura del fluido in uscita, T_u .

Quindi:

$$\Delta T_{\text{media}} = \frac{\Delta T_i + \Delta T_u}{2} = \frac{(T_s - T_i) + (T_s - T_u)}{2} = T_s - \frac{T_i + T_u}{2}$$

La media $\frac{T_i + T_u}{2}$ viene anche detta *temperatura media della massa fluida*.

Il bilancio di energia riferito al volume di controllo infinitesimo (si considera come volume di controllo il volume cilindrico con la stessa sezione della sezione del tubo, ma con altezza infinitesima) è:

$$\dot{m} \cdot c_p \cdot dT_m = h \cdot (T_s - T_m) \cdot dA$$

Siccome l'area dA della superficie infinitesima è $p \cdot dx$ (dove p è il perimetro della sezione del tubo che, se il tubo è cilindrico, è $p = \pi \cdot D$) e siccome $dT_m = -d(T_s - T_m)$, abbiamo:

$$-\dot{m} \cdot c_p \cdot d(T_s - T_m) = h \cdot (T_s - T_m) \cdot p \cdot dx$$

Da cui:

$$\frac{d(T_s - T_m)}{(T_s - T_m)} = -\frac{h \cdot p}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot dx$$

Integrando l'equazione da $x = 0$, in cui si ha $T_m = T_i$, a $x = L$, in cui si ha $T_m = T_u$, otteniamo:

$$[\ln(T_s - T_m)]_{T_i}^{T_u} = \left[-\frac{h \cdot p}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot x \right]_0^L$$

Ovvero:

$$\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = -\frac{h \cdot p}{\dot{m} \cdot c_p} \cdot L$$

Siccome pL è l'area A :

$$\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = -\frac{h \cdot A}{\dot{m} \cdot c_p}$$

Da cui:

$$\frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = e^{-\frac{h \cdot A}{\dot{m} \cdot c_p}} \quad \rightarrow \quad T_s - T_u = (T_s - T_i) e^{-\frac{h \cdot A}{\dot{m} \cdot c_p}} \quad \rightarrow \quad T_u = T_s - (T_s - T_i) e^{-\frac{h \cdot A}{\dot{m} \cdot c_p}}$$

La precedente equazione, anziché essere risolta in T_u , può anche essere risolta in $\dot{m} \cdot c_p$, in modo da ottenere (???):

$$\dot{m} \cdot c_p = \frac{h \cdot A}{\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}}$$

Da cui:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_u - T_i) = \frac{h \cdot A}{\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}} (T_u - T_i) = h \cdot A \cdot \Delta T_{\text{ln}}$$

Dove:

$$\Delta T_{\text{ln}} = \frac{T_u - T_i}{\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}}$$

♦ ***Ipotesi di flusso termico costante***

Se supponiamo che il flusso termico sia costante lungo tutte le sezioni del tubo, la potenza termica è data dalla formula seguente:

$$\dot{Q} = \dot{q}_s A = \dot{m} c_p (T_u - T_i)$$

Quindi la temperatura media all'uscita del tubo T_u è:

$$T_u = T_i + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p} = T_i + \frac{\dot{q}_s A}{\dot{m} c_p}$$

Nel caso in cui la sezione sia circolare:

$$T_u = T_i + \frac{\dot{q}_s \pi \frac{D^2}{4} L}{\dot{m} c_p}$$

Osserviamo quindi che la temperatura media d'uscita dipende linearmente dalla lunghezza L del tubo.

La temperatura superficiale si calcola a partire dalla relazione:

$$\dot{q}_s = h(T_s - T_m) \quad \rightarrow \quad T_s = \frac{\dot{q}_s}{h} + T_m$$

Ovviamente, la temperatura superficiale non è costante, ma dipende dalla distanza x dall'ingresso del tubo:

$$T_s(x) = \frac{\dot{q}_s}{h} + T_m(x) = \frac{\dot{q}_s}{h} + T_i + \frac{\dot{q}_s \pi \frac{D^2}{4} x}{\dot{m} c_p}$$

♦ ***Caduta di pressione***

Lungo il percorso si ha una caduta di pressione, legata alla potenza richiesta dal ventilatore o dalla pompa per sostenere il flusso. La caduta di pressione nel flusso in un tubo di lunghezza L è data da:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho w_m^2}{2}$$

Dove f è il **fattore di attrito**. La potenza di pompaggio necessaria per vincere la Δp è:

$$\dot{L}_p = \frac{\dot{m} \Delta p}{\rho} = w_m A_t \Delta p$$

♦ ***Flusso laminare all'interno di un tubo di sezione cilindrica***

1. Profilo di velocità

Il profilo di velocità è dato dalla formula:

$$w(r) = 2w_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

2. Sforzo di taglio in corrispondenza della parete

Lo sforzo di taglio in corrispondenza della parete del tubo è:

$$\tau_s = \frac{8\mu w_m}{D} = C_f \frac{\rho w_m^2}{2}$$

3. Coefficiente di attrito

Il coefficiente d'attrito è invece dato dalla relazione:

$$C_f = \frac{16}{Re}$$

4. Fattore di attrito

Il fattore d'attrito risulta invece pari a:

$$f = \frac{64}{Re}$$

5. Numero di Nusselt

Il numero di Nusselt è dato da:

$$\text{se } T_s = \text{costante e il flusso è laminare} \quad \rightarrow \quad Nu = 3,66$$

$$\text{se } \dot{q}_s = \text{costante e il flusso è laminare} \quad \rightarrow \quad Nu = 4,36$$

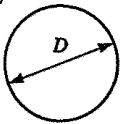
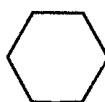
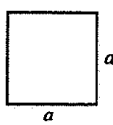
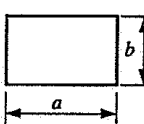
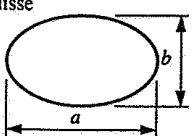
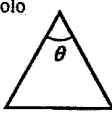
Oppure lo si può determinare con la relazione di Sieder e Tate:

$$Nu = 1,86 \left(\frac{Re Pr D}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_s} \right)^{0,14} \quad (\text{valida se } Pr > 0,5)$$

Tutte le proprietà del fluido vengono valutate alla temperatura media della massa fluida, eccetto per μ_s che viene valutata alla temperatura della superficie.

♦ *Flusso laminare all'interno di un tubo di sezione qualsiasi*

La tabella seguente riporta le formule relative al flusso laminare in un tubo di sezione qualsiasi (comprese quelle relative al tubo di sezione cilindrica, già esposte nel precedente punto).

Sezione trasversale di tubo	a/b o θ°	Numero di Nusselt		Fattore di attrito f
		$T_s = \text{cost}$	$\dot{q}_s = \text{cost}$	
Cerchio 	—	3.66	4.36	64.00/Re
Esagono 	—	3.35	4.00	60.20/Re
Quadrato 	—	2.98	3.61	56.92/Re
Rettangolo 	a/b			
	1	2.98	3.61	56.92/Re
	2	3.39	4.12	62.20/Re
	3	3.96	4.79	68.36/Re
	4	4.44	5.33	72.92/Re
	6	5.14	6.05	78.80/Re
	8	5.60	6.49	82.32/Re
	∞	7.54	8.24	96.00/Re
Ellisse 	a/b			
	1	3.66	4.36	64.00/Re
	2	3.74	4.56	67.28/Re
	4	3.79	4.88	72.96/Re
	8	3.72	5.09	76.60/Re
	16	3.65	5.18	78.16/Re
Triangolo 	θ			
	10°	1.61	2.45	50.80/Re
	30°	2.26	2.91	52.28/Re
	60°	2.47	3.11	53.32/Re
	90°	2.34	2.98	52.60/Re
	120°	2.00	2.68	50.96/Re

Tutti questi valori vengono calcolati usando come dimensione caratteristica il diametro idraulico:

$$D_h = \frac{4A_t}{p}$$

Dove A_t è l'area trasversale del tubo e p è il suo perimetro.

Si noti che l'influenza della rugosità superficiale sul fattore d'attrito e sul coefficiente di scambio nel flusso laminare risulta trascurabile.

♦ **Flusso turbolento all'interno di tubi lisci**

1. Fattore d'attrito

$$f = 0,184 \operatorname{Re}^{-0,2}$$

2. Numero di Nusselt

$$\operatorname{Nu} = 0,125 \cdot f \cdot \operatorname{Re} \cdot \operatorname{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Oppure (ed è preferibile usare questa seconda relazione):

$$\operatorname{Nu} = 0,023 \cdot \operatorname{Re}^{0,8} \operatorname{Pr}^n \quad \text{valida se } 0,7 \leq \operatorname{Pr} \leq 160 \text{ e } \operatorname{Re} > 10\,000$$

Con:

1. $n = 0,4$ se il fluido all'interno del tubo si riscalda ($T_u > T_i$)
2. $n = 0,3$ se il fluido all'interno del tubo si raffredda ($T_u < T_i$)

Tutte le proprietà del fluido sono valutate alla temperatura media della massa fluida:

$$T_{mf} = \frac{T_i + T_u}{2}$$

Queste relazioni si possono usare anche per tubi con sezione non circolare, usando come dimensione caratteristica il diametro idraulico:

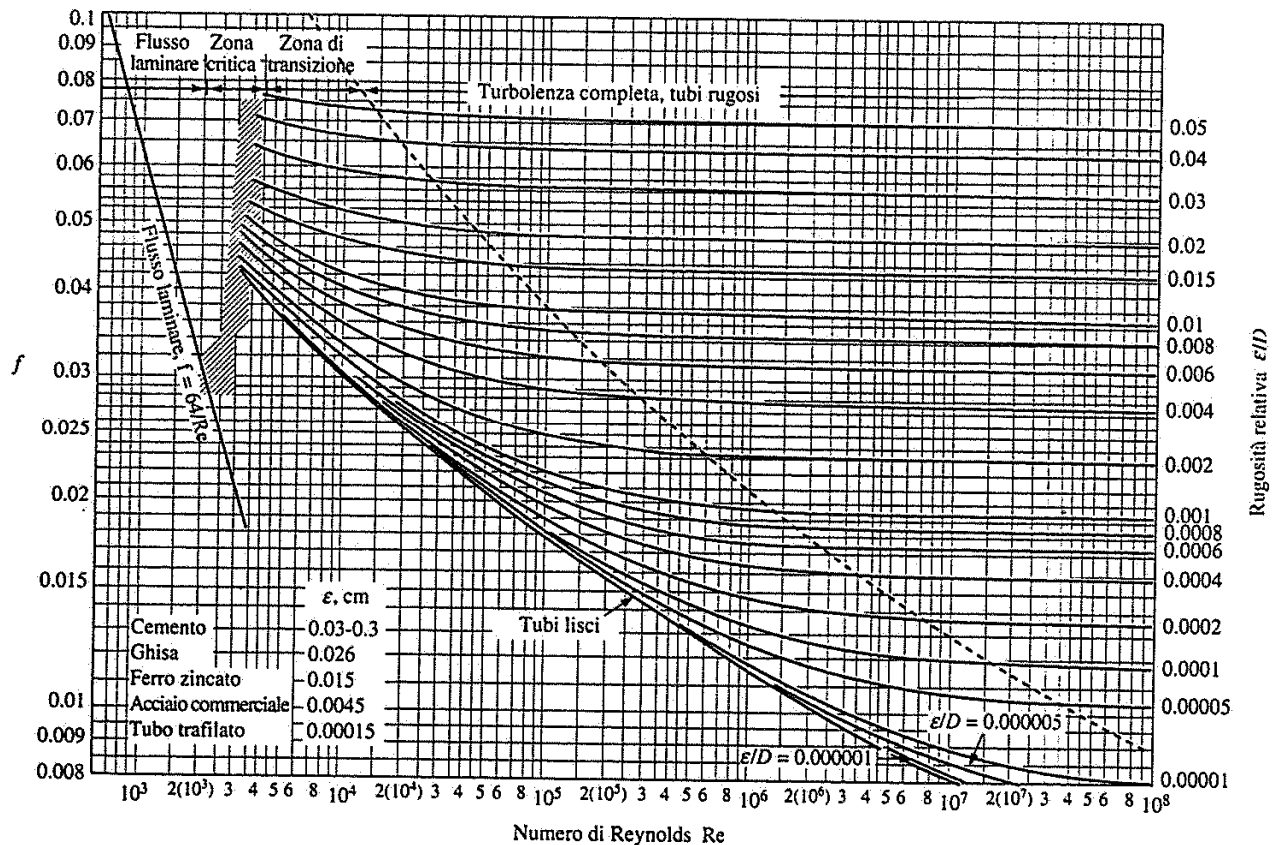
$$D_h = \frac{4A_t}{p}$$

♦ **Flusso turbolento all'interno di tubi ruvidi**

In questo caso, si usa la relazione:

$$\operatorname{Nu} = 0,125 \cdot f \cdot \operatorname{Re} \cdot \operatorname{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Dove il valore di f viene determinato dal diagramma di Moody:



4. La convezione naturale

Parametri per il calcolo della conduttanza convettiva

I parametri che entrano in gioco per il calcolo della conduttanza convettiva h , nel caso di convezione naturale, sono:

$$h = h(D, \rho, g\beta\Delta T, \mu, c_p, \lambda)$$

Dove:

- D è il *diametro equivalente* (dimensione caratteristica).
- ρ è la densità del fluido.
- β è il coefficiente di dilatazione cubica.
- c_p è il calore specifico a pressione costante.
- $\Delta T = T_s - T_\infty$
- λ è la conduttività del fluido.
- v è la velocità di moto del fluido.
- μ è la viscosità del fluido.
- g è l'accelerazione di gravità.

L'uso dei gruppi adimensionali

Anche in questo caso, per ridurre il numero di parametri, si usano 3 *gruppi adimensionali*, che però sono leggermente diversi da quelli visti per la convezione forzata:

1. Il numero Nusselt;
2. Il numero di Grashof;
3. Il numero di Prandtl.

A partire dai 3 gruppi adimensionali, potremo valutare h . In particolare, si procederà individuando dapprima gli indici di Grashof e di Prandtl; a partire da tali valori, per mezzo di un'opportuna relazione sperimentale, saremo in grado di valutare il valore dell'indice di Nusselt e, a partire da quest'ultimo, potremo infine calcolare il valore di h .

Definizione e significato dei gruppi adimensionali

♦ Numero di Grashof

Il numero di Grashof è definito dalla relazione:

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T D^3}{\mu^2}$$

Tale indice può essere interpretato come il prodotto tra le forze di galleggiamento e la forza di inerzia (a numeratore) e il quadrato della risultante delle forze viscosi (a denominatore):

$$Gr = \frac{(\rho g \beta \Delta T) \left(\rho w \frac{dw}{dx} \right)}{\left(\mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2} = \frac{f_{\text{galleggiamento}} f_{\text{inerzia}}}{(f_{\text{viscosi}})^2}$$

Il numero di Grashof ha una funzione analoga a quella del numero di Reynolds: ci consente di distinguere tra moto laminare e moto viscoso. In particolare, in caso di moto lungo una superficie verticale che ha dimensione caratteristica (lunghezza) L , abbiamo:

1. Se $Gr_L < 10^9$, abbiamo moto laminare.
2. Se $Gr_L > 10^9$, abbiamo moto turbolento.

♦ Numero di Rayleigh

Il numero di Rayleigh è definito nel modo seguente:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T D^3}{\alpha \nu}$$

Capitolo 10: Trasmissione del calore per irraggiamento

1. L'irraggiamento

La trasmissione del calore per irraggiamento

- ♦ **Definizione di irraggiamento**

L'irraggiamento è il trasferimento di energia che avviene attraverso onde elettromagnetiche (o fotoni) prodotte da variazioni nelle configurazioni elettroniche degli atomi e delle molecole.

Tali radiazioni si propagano nel vuoto oppure in un mezzo di trasmissione trasparente alla radiazione. Possiamo quindi dire che l'irraggiamento differisce da conduzione e convezione perché non richiede la presenza di un mezzo tra i due corpi tra i quali avviene lo scambio di calore. L'irraggiamento può anche avvenire nel caso in cui fra i due corpi tra i quali avviene lo scambio di calore sia presente un mezzo ad una temperatura inferiore rispetto ai due corpi in analisi.

- ♦ **Fenomeno volumetrico e fenomeno superficiale**

L'irraggiamento può essere un fenomeno volumetrico (nel caso in cui coinvolga dei gas, il vetro o comunque altri mezzi trasparenti), oppure un fenomeno superficiale (se coinvolge dei solidi o dei mezzi non trasparenti).

- ♦ **Interpretazioni delle radiazioni elettromagnetiche**

La radiazione può essere interpretata in due maniere diverse: come propagazione di onde elettromagnetiche oppure come propagazione di quanti di energia (fotoni)

- Onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche viaggiano alla velocità della luce e sono caratterizzate dalla frequenza ν (nu) e dalla lunghezza d'onda λ . Queste proprietà sono legate dalla relazione:

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{\nu}$$

dove \bar{c} è la velocità della luce nel mezzo di trasmissione in analisi:

$$\bar{c} = \frac{c}{n}$$

Dove n è l'indice di rifrazione del mezzo in analisi, mentre c è la velocità di trasmissione della luce nel vuoto:

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'unità di misura della lunghezza d'onda è il micrometro (μm) dove:

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

Al contrario della lunghezza d'onda e della velocità di propagazione, la frequenza di un'onda elettromagnetica dipende solo dalla sorgente ed è indipendente dal mezzo attraverso cui si propaga. La frequenza infatti è definita come il numero di oscillazioni al secondo.

- Fotoni

La radiazione elettromagnetica può essere interpretata come propagazione di un insieme di pacchetti discreti di energia, detti fotoni o quanti, ciascuno caratterizzato dalla frequenza ν e dall'energia e , così calcolata:

$$e = h \cdot \nu = \frac{hc}{\lambda}$$

La radiazione termica

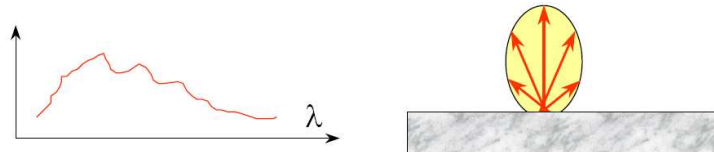
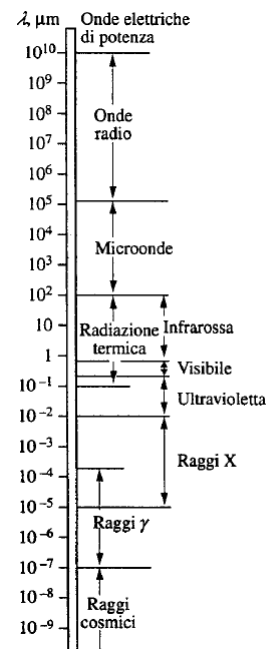
Le onde elettromagnetiche, sebbene abbiano tutte la stessa natura, differiscono molto tra loro in base alla lunghezza d'onda, che è estremamente variabile. Lo spettro elettromagnetico comprende quindi una serie di radiazioni di tipi diversi, come mostrato nella figura a lato.

Tra tutte le radiazioni dello spettro elettromagnetico, quelle che corrispondono alla trasmissione del calore sono le radiazioni termiche, comprese tra $0,1 \mu\text{m}$ e $100 \mu\text{m}$. La radiazione termica include quindi l'intera radiazione visibile ed infrarossa (IR) e parte della radiazione ultravioletta (UV).

Le radiazioni termiche sono emesse dai moti rotatori e vibratori di atomi, molecole ed elettroni. Siccome la temperatura è una misura dell'intensità dei moti microscopici delle particelle che costituiscono la materia, all'aumentare della temperatura aumenta l'intensità della radiazione termica emessa da un corpo. Si noti inoltre che tutti i corpi che si trovano a temperatura superiore allo zero assoluto emettono delle radiazioni termiche.

La radiazione termica è detta anche irraggiamento ed è l'unico tipo di onda elettromagnetica che andremo ad analizzare.

La radiazione termica emessa da un corpo è caratterizzata da una certa distribuzione spettrale e da una certa distribuzione direzionale.



2. Corpo nero

Che cos'è un corpo nero?

♦ Introduzione

Siccome l'energia radiante emessa da una superficie ad una certa lunghezza d'onda dipende dal materiale del corpo e dalla condizione e temperatura della sua superficie, corpi diversi alla stessa temperatura possono emettere quantità diverse di radiazioni per unità di area. Per questo è opportuno definire un corpo ideale, detto *corpo nero*, da usare come elemento di confronto tra le proprietà radiative di superfici reali.

♦ Definizione

Un corpo nero è un corpo ideale (nella realtà non esiste!) che rappresenta un perfetto emettitore di radiazione, poiché emette la massima radiazione ad ogni temperatura e lunghezza d'onda e assorbe tutta la radiazione incidente, indipendentemente da direzione e lunghezza d'onda.

Potenza radiante emessa dal corpo nero: la legge di Stefan-Boltzmann

La potenza radiante totale emessa da un corpo nero per unità di area superficiale, detta *potere emissivo del corpo nero*, è espressa dalla relazione di Stefan-Boltzmann:

$$E_n = \sigma \cdot T_s^4$$

Dove:

$$\sigma = \text{Costante di Stefan-Boltzmann, pari a } 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^2}$$

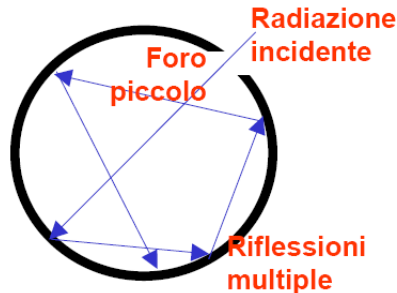
$$T_s = \text{Temperatura della superficie [K]}.$$

Osserviamo quindi che il potere emissivo del corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta alla quale si trova la superficie del corpo nero stesso.

Approssimazione di un corpo nero mediante un oggetto reale

Poiché la radiazione visibile occupa una banda molto stretta dello spettro, da 0,4 a 0,76 mm, non si può giudicare se una superficie approssima il comportamento del corpo nero sulla base della sola osservazione visiva.

Un corpo che approssima il comportamento del nero è una grande cavità con una piccola apertura (il corpo nero è approssimato in realtà solo dal foro su tale cavità). Infatti, l'energia che giunge sull'apertura entra nella cavità. Se le pareti di questa non sono nere, un raggio incidente verrà in parte assorbito e in parte riflesso. Attraverso riflessioni multiple, la frazione riflessa si attenuerà, sicché tutta l'energia verrà assorbita, salvo una quantità inapprezzabile.



Potere emissivo monocromatico o spettrale

♦ Che cos'è?

Tramite la legge di Stefan-Boltzmann siamo in grado di determinare il potere emissivo totale del corpo nero, che indichiamo con E_n . Tuttavia, in alcuni casi siamo interessati a conoscere il *potere emissivo monocromatico* (o spettrale) del corpo nero, che è la potenza radiante emessa dal corpo nero alla temperatura assoluta T , per unità di area superficiale e per unità di lunghezza d'onda, nell'interno della lunghezza d'onda λ . Il termine *monocromatico* indica proprio la dipendenza dalla lunghezza d'onda.

♦ Come si calcola? Legge della distribuzione di Planck

Il potere emissivo monocromatico $E_{n,\lambda}$ si calcola con la legge della distribuzione di Planck:

$$E_{n,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

Dove:

$$C_1 = 3,742 \frac{\text{W}\mu\text{m}^4}{\text{m}^2}$$

$$C_2 = 1,439 \mu\text{m K}$$

T = temperatura assoluta [K]

λ = lunghezza d'onda della radiazione emessa [μm]

♦ Relazione con la legge di Stefan-Boltzmann

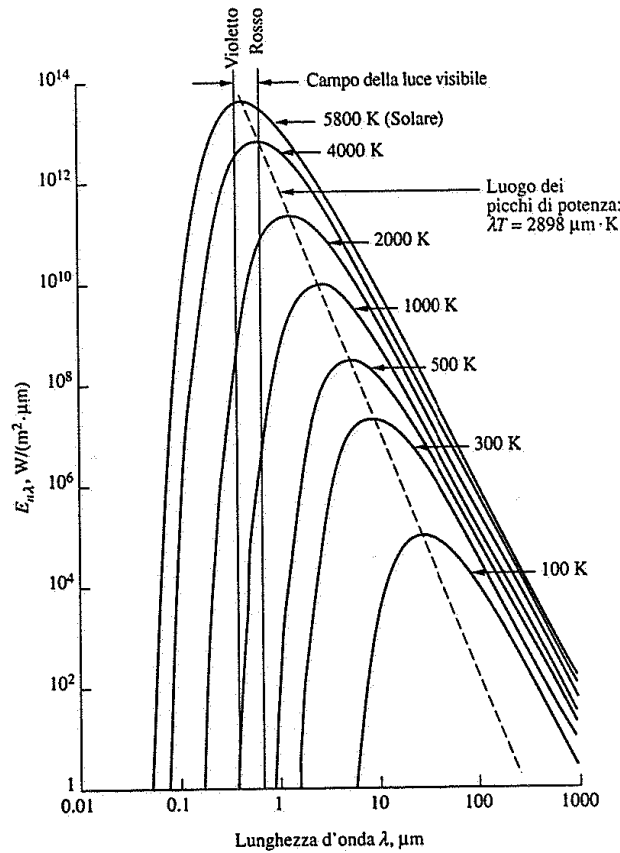
Il potere emissivo totale del corpo nero sarà dato dall'integrale $E_{n,\lambda}$ per λ che varia da zero ad infinito:

$$E_n = \int_0^{+\infty} E_{n,\lambda}(T) d\lambda = \sigma \cdot T^4$$

Legge dello spostamento di Wien

♦ Introduzione

La radiazione emessa è funzione continua della lunghezza d'onda. Fissata la lunghezza d'onda, la radiazione emessa aumenta all'aumentare della temperatura. All'aumentare della temperatura le curve diventano più ripide e si spostano a sinistra nella zona delle lunghezze d'onda più corte.



♦ La legge di Wien

Come si osserva dal grafico in figura, i picchi corrispondenti al massimo valore di $E_{n,\lambda}$ delle diverse temperature giacciono in una curva (tratteggiata). La lunghezza d'onda alla quale si verificano i picchi delle curve è data dalla legge dello spostamento o legge di Wien:

$$(\lambda T)_{\text{massima potenza}} = 2897,8 \mu\text{m K}$$

3. Superfici reali

Emissività

- ♦ **Emissività di una superficie**

Si definisce emissività ε di una superficie il rapporto tra la radiazione emessa dalla superficie stessa e la radiazione del corpo nero alla medesima temperatura. In particolare, possiamo definire:

1. Emissività emisferica totale

L'emissività emisferica totale ε di una superficie è l'emissività media in tutte le direzioni e per tutte le lunghezze d'onda e si esprime con la relazione:

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{E(T)}{\sigma T^4}$$

Dove $E(T)$ è il potere emissivo totale della superficie, che può anche essere espresso dalla relazione (ricavata dalla precedente):

$$E(T) = \varepsilon(T) \cdot \sigma T^4$$

2. Emissività monocromatica

L'emissività monocromatica, in maniera analoga, è data da:

$$\varepsilon(T) = \frac{E_\lambda(T)}{E_{n\lambda}(T)}$$

Dove $E_\lambda(T)$ è il potere emissivo monocromatico della superficie reale.

- ♦ **Osservazioni**

1. L'emissività ε di una superficie reale è sempre tra 0 e 1: $0 < \varepsilon < 1$.
2. L'emissività di corpo nero è sempre unitaria: $\varepsilon_{\text{corpo nero}} = 1$.
3. L'emissività di una superficie reale varia con la temperatura della superficie, la lunghezza d'onda e la direzione della radiazione emessa.

Superficie diffondente e superficie grigia

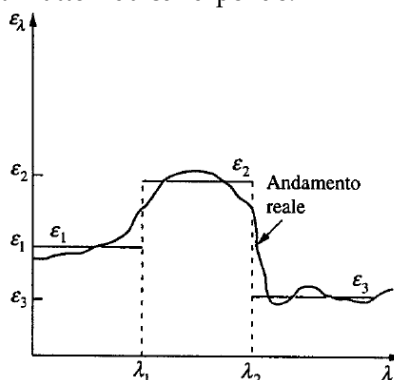
- ♦ **Superficie diffondente**

Chiamiamo *superficie diffondente* una superficie le cui proprietà (emissività) risultano indipendenti dalla direzione.

- ♦ **Superficie grigia**

Chiamiamo *superficie grigia* una superficie le cui proprietà (emissività) risultano indipendenti dalla lunghezza d'onda.

In questo caso, possiamo considerare costante l'emissività (almeno per opportuni intervalli di lunghezza d'onda) a parità degli altri fattori da cui dipende:

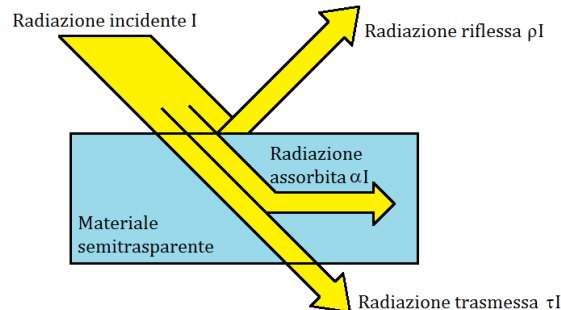


Nel seguito considereremo solo corpi neri oppure corpi grigi.

4. Coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione

I coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione

Come abbiamo detto, tutti i corpi emettono continuamente radiazione in relazione alla loro emissività. Quando la radiazione colpisce una superficie, parte di essa viene assorbita, parte viene riflessa e la restante parte, se c'è, viene trasmessa, come mostrato in figura.



Possiamo quindi definire i seguenti coefficienti:

- ♦ **Coefficiente di assorbimento**

È il rapporto tra la radiazione assorbita e la radiazione incidente:

$$\alpha = \frac{I_{\text{assorbita}}}{I_{\text{incidente}}}$$

- ♦ **Coefficiente di riflessione**

È il rapporto tra la radiazione riflessa e la radiazione incidente:

$$\rho = \frac{I_{\text{riflessa}}}{I_{\text{incidente}}}$$

- ♦ **Coefficiente di trasmissione**

È il rapporto tra la radiazione trasmessa e la radiazione incidente:

$$\tau = \frac{I_{\text{trasmessa}}}{I_{\text{incidente}}}$$

Se la superficie è opaca:

$$\tau = 0$$

Possiamo osservare che ciascuno dei precedenti coefficienti è sempre compreso tra 0 e 1 e che vale:

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Si noti inoltre che le radiazioni vengono indicate talvolta con la lettera G anziché con la lettera I.

Le definizioni precedenti valgono per proprietà totali emisferiche della superficie, perché le radiazioni incidenti considerate sono quelle provenienti da qualsiasi direzione e con qualsiasi lunghezza d'onda. Possiamo anche considerare le radiazioni per una specifica lunghezza d'onda, e definire così i coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione *monocromatici*:

$$\alpha_\lambda = \frac{G_{\lambda_{\text{ass}}}}{G}$$

$$\rho_\lambda = \frac{G_{\lambda_{\text{rifl}}}}{G}$$

$$\tau_\lambda = \frac{G_{\lambda_{\text{trasm}}}}{G}$$

E varranno le relazioni:

$$G_\lambda = G_{\lambda_{\text{ass}}} + G_{\lambda_{\text{rifl}}} + G_{\lambda_{\text{trasm}}}$$

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

- ♦ **Valori particolari dei coefficienti**

1. Corpo opaco: $\tau_\lambda = 0$
2. Corpo trasparente: $\tau_\lambda = 1, \alpha_\lambda = 0, \rho_\lambda = 0$
3. Superficie speculare: $\rho_\lambda = 1, \alpha_\lambda = 0, \tau_\lambda = 0$

La legge di Kirchhoff

L'emissività emisferica totale ϵ di una superficie alla temperatura T è uguale al coefficiente di assorbimento emisferico totale α per radiazioni provenienti da un corpo nero alla stessa temperatura.

$$\epsilon(T) = \alpha(T)$$

Questa relazione vale se la temperatura della superficie è uguale alla temperatura della sorgente di radiazione, o comunque la differenza tra tali temperature non supera il centinaio di gradi.

Analogamente, questa relazione vale per una singola lunghezza d'onda, e quindi possiamo così esprimere la forma monocromatica della legge di Kirchhoff:

$$\epsilon_\lambda(T) = \alpha_\lambda(T)$$

Questa seconda relazione vale quando l'irradiazione è indipendente dalla direzione.

5. Fattore di vista

Che cos'è il fattore di vista?

La trasmissione di calore per irraggiamento tra superfici dipende dall'orientazione relativa delle superfici, dalle loro proprietà radiative, dalle loro temperature.

Per tenere conto dell'orientamento, si definisce un nuovo parametro, detto *fattore di vista* (o di *forma*, o di *configurazione* o di *angolo*). Il fattore di vista tra una superficie i e una superficie j si indica $F_{i \rightarrow j}$ ed è definito come la "frazione della radiazione emessa dalla superficie i che incide direttamente sulla superficie j ".

Si osserva che:

1. $F_{i \rightarrow j} = 0$ se le superfici i e j non sono in vista tra loro;
2. $F_{i \rightarrow j} = 1$ se la superficie j circonda completamente la superficie i , quindi tutta la radiazione emessa da i viene assorbita da j .

Proprietà del fattore di vista

♦ Regola di reciprocità

I fattori di vista $F_{i \rightarrow j}$ e $F_{j \rightarrow i}$ sono uguali se e solo se le aree delle superfici cui si riferiscono sono uguali:

$$\begin{aligned} F_{i \rightarrow j} &= F_{j \rightarrow i} & \text{se } A_i &= A_j \\ F_{i \rightarrow j} &\neq F_{j \rightarrow i} & \text{se } A_i &\neq A_j \end{aligned}$$

In particolare, vale la relazione:

$$A_i \cdot F_{i \rightarrow j} = A_j \cdot F_{j \rightarrow i}$$

♦ Regola della somma

Per il principio di conservazione dell'energia, poiché tutta la radiazione emessa dalla superficie i di una cavità deve essere intercettata dalle superfici della cavità stessa, si ha che la somma dei fattori di vista della superficie i di una cavità verso tutte le superfici della cavità è uguale a 1.

$$\sum_{j=1}^n F_{i \rightarrow j} = 1$$

6. Lo scambio termico per irraggiamento

Simbologia

Nel seguito useremo la seguente simbologia:

1. $q_{1 \rightarrow 2}$ è la potenza termica per unità di superficie emessa dalla superficie 1 che incide sulla superficie 2.
2. q_{1-2} è la potenza termica per unità di superficie emessa dalla superficie 1 che viene assorbita dalla superficie 2.
3. $q_{1,2}$ è la potenza termica netta per unità di superficie scambiata tra la superficie 1 e la superficie 2.

Abbiamo quindi:

$$q_{1-2} = \alpha \cdot q_{1 \rightarrow 2}$$

$$q_{1,2} = -q_{2,1} = q_{1-2} - q_{2-1}$$

Superfici piane parallele indefinite

♦ Caso 1: superfici nere

Se abbiamo due superfici piane parallele indefinite, entrambe approssimabili come corpo nero, la potenza termica netta per unità di superficie scambiata tra la superficie 1 (che si trova a temperatura T_1) e la superficie 2 (a temperatura T_2) è:

$$q_{1,2} = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

♦ Caso 2: una superficie nera e una superficie grigia

Se abbiamo due superfici piane parallele indefinite, di cui una superficie 1 a temperatura T_1 approssimabile come corpo nero, ed una superficie 2 a temperatura T_2 approssimabile come corpo grigio con emissività ε_2 , la potenza termica netta per unità di superficie scambiata tra la superficie 1 e la superficie 2 è data da:

$$q_{1,2} = \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

♦ Caso 3: superfici grigie

Se abbiamo due superfici piane parallele indefinite, di cui una superficie 1 a temperatura T_1 approssimabile come corpo grigio con emissività ε_1 , ed una superficie 2 a temperatura T_2 approssimabile come corpo grigio con emissività ε_2 , la potenza termica netta per unità di superficie scambiata tra la superficie 1 e la superficie 2 è data da:

$$q_{1,2} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Superfici nere

Se sono date due superfici nere di forma arbitraria, mantenute alle temperature costanti T_1 e T_2 , la situazione risulta particolarmente semplice. Infatti, la potenza termica scambiata dalla superficie 1 alla superficie 2, è data semplicemente dalla differenza tra la radiazione emessa dalla superficie 1 che incide sulla superficie 2, e la radiazione emessa dalla superficie 2 che incide sulla superficie 1:

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot E_{n_1} - A_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot E_{n_2}$$

Per la legge di Stefan-Boltzmann, la radiazione emessa dalle superfici 1 e 2 è esprimibile come:

$$E_{n_1} = \sigma \cdot T_1^4$$

$$E_{n_2} = \sigma \cdot T_2^4$$

Quindi:

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \sigma \cdot T_1^4 - A_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \cdot \sigma \cdot T_2^4$$

Inoltre, per la regola di reciprocità:

$$A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} = A_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1}$$

E perciò, in conclusione:

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \sigma \cdot T_1^4 - A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \sigma \cdot T_2^4 = A_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Naturalmente, se $\dot{Q}_{1,2}$ è negativo, significa che la potenza termica viene trasmessa dalla sorgente 2 alla sorgente 1.

Superfici grigie

♦ Radiosità

Le superfici emettono e riflettono radiazioni, per cui la radiazione uscente da una superficie comprende sia la parte emessa che quella riflessa. Il calcolo dell'energia scambiata per irraggiamento tra superfici coinvolge l'energia totale che abbandona una superficie, indipendentemente dalla sua origine, per cui bisogna definire una nuova grandezza che rappresenti la radiazione totale che abbandona una superficie per unità di tempo e di area: tale grandezza è detta *radiosità* e viene indicata con la lettera J :

$$J_i = E_i + \rho \cdot G_i$$

Dove E_i è la radiazione emessa dalla superficie i e G_i è l'energia radiante incidente sulla superficie i , perciò $\rho \cdot G_i$ è la radiazione riflessa dalla superficie i .

♦ Superficie grigia e opaca

Se la superficie è grigia ed opaca, abbiamo:

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \alpha_i \\ \alpha_i + \rho_i = 1 \end{cases}$$

E quindi la radiosità è:

$$J_i = E_i + \rho \cdot G_i = \alpha_i \cdot E_{i\text{corpo nero}} + \rho_i \cdot G_i = \alpha_i \cdot E_{i\text{corpo nero}} + (1 - \alpha_i) \cdot G_i = \varepsilon_i \cdot E_{i\text{corpo nero}} + (1 - \varepsilon_i) \cdot G_i$$

♦ Potenza termica netta uscente

In uno scambio termico per irraggiamento, una superficie perde energia emettendola per irraggiamento e guadagna energia assorbendo la radiazione emessa da altre superfici, per cui essa registrerà un guadagno netto o una perdita netta di energia. La potenza termica netta scambiata per irraggiamento da una superficie i di area A_i è indicata con \dot{Q}_i ed è espressa come la differenza tra la radiazione che abbandona la superficie i e la radiazione incidente sulla superficie i :

$$\dot{Q}_i = A_i(J_i - G_i)$$

♦ Bilancio termico di una superficie grigia

Come abbiamo visto, abbiamo:

$$J_i = \varepsilon_i \cdot E_{i_n} + (1 - \varepsilon_i) \cdot G_i \quad \rightarrow \quad G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i \cdot E_{i_n}}{1 - \varepsilon_i}$$

Sostituendo nella formula di \dot{Q}_i ricavata poco fa:

$$\dot{Q}_i = A_i(J_i - G_i) = \dot{Q}_i = A_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i \cdot E_{i_n}}{1 - \varepsilon_i} \right) = A_i \left(\frac{J_i - \varepsilon_i \cdot J_i - J_i + \varepsilon_i \cdot E_{i_n}}{1 - \varepsilon_i} \right) = \frac{\varepsilon_i \cdot A_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{i_n} - J_i)$$

Per analogia con la legge di Ohm per l'energia elettrica, questa equazione può essere riscritta come:

$$\dot{Q}_i = \frac{E_{i_n} - J_i}{R_i}$$

Dove R_i è detta *resistenza superficiale all'irraggiamento* ed è data da:

$$R_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i \cdot A_i}$$

♦ Resistenza spaziale all'irraggiamento

Oltre alla resistenza superficiale all'irraggiamento, bisogna considerare la cosiddetta *resistenza spaziale all'irraggiamento*.

Si considerino due superfici opache, grigie e diffondenti, di forma arbitraria, mantenute a temperatura costante. Ricordando che la radiosità J rappresenta la potenza termica radiante che abbandona una superficie per unità di area della superficie stessa e che il fattore di vista $F_{i \rightarrow j}$ rappresenta la frazione della radiazione emessa dalla superficie i incidente sulla superficie j , la potenza netta trasmessa per irraggiamento dalla superficie i alla superficie j è data dalla differenza tra la radiazione che abbandona la superficie i e incide su j , e la radiazione che abbandona j e incide su i :

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = A_i J_i F_{i \rightarrow j} - A_j J_j F_{j \rightarrow i}$$

Per la regola di reciprocità, otteniamo:

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = A_i F_{i \rightarrow j} (J_i - J_j)$$

Da cui:

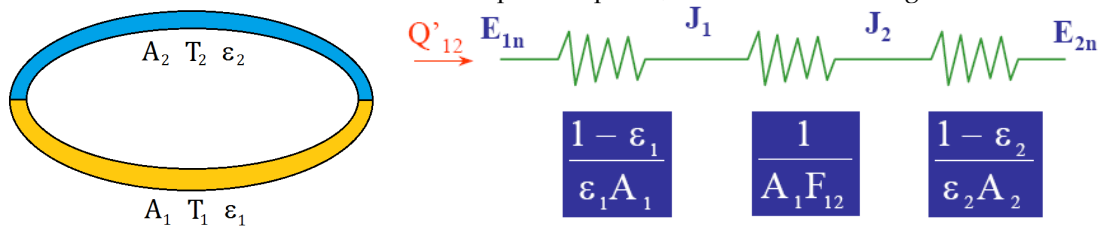
$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = \frac{J_i - J_j}{R_{i \rightarrow j}}$$

Dove $R_{i \rightarrow j}$ è appunto la resistenza spaziale all'irraggiamento:

$$R_{i \rightarrow j} = \frac{1}{A_i F_{i \rightarrow j}}$$

Risoluzione di problemi sull'irraggiamento: cavità con 2 superfici

Consideriamo ora una cavità costituita da due superfici opache, come mostrato in figura:

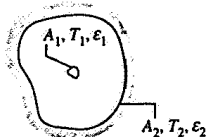
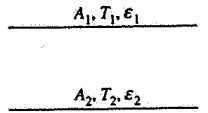
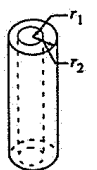
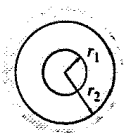


E vogliamo determinare la potenza termica netta scambiata per irraggiamento tra le due superfici. Il metodo che useremo è detto reticolare e si basa sull'analogia con i circuiti elettrici.

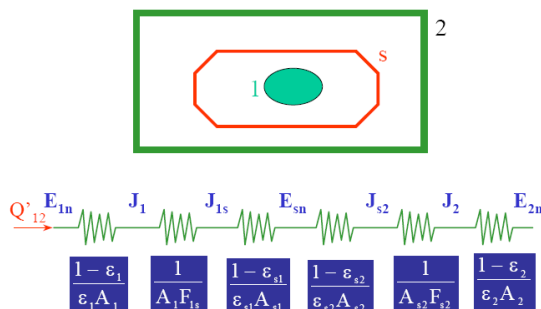
In sostanza questo metodo consiste semplicemente nel valutare la potenza netta termica scambiata tra la superficie 1 e la superficie 2 (che è uguale alla potenza netta termica trasmessa dalla superficie 1, e anche a quella trasmessa alla superficie 2), come:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_{\text{superficiale}_1} + R_{\text{spaziale}_{12}} + R_{\text{superficiale}_2}} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 \cdot A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot A_2}}$$

L'analogia elettrica è messa in evidenza nella figura precedentemente riportata. Applicando questa formula, si ottengono i risultati riportati nella tabella seguente:

Oggetto piccolo in una cavità grande 		
$\frac{A_1}{A_2} \approx 0$	$F_{12} = 1$	$\dot{Q}_{12} = A_1 \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$
Piastre parallele infinite 		
$A_1 = A_2 = A$	$F_{12} = 1$	$\dot{Q}_{12} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$
Cilindri concentrici infinitamente lunghi 		
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}$	$F_{12} = 1$	$\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$
Sfere concentriche 		
$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$	$F_{12} = 1$	$\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$

Se si hanno più superfici una dentro l'altra, la formula rimane simile, ma leggermente più complessa. Si ha infatti:



$$\dot{Q}_{12} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_{\text{su}_1} + R_{\text{sp}_{1s}} + R_{\text{su}_{2\text{int}}} + R_{\text{su}_{2\text{est}}} + R_{\text{sp}_{s2}} + R_{\text{su}_2}} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 \cdot A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow s}} + \frac{1-\epsilon_s}{\epsilon_s \cdot A_s} + \frac{1-\epsilon_{s2}}{\epsilon_{s2} \cdot A_{s2}} + \frac{1}{A_s F_{s2 \rightarrow 2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 \cdot A_2}}$$