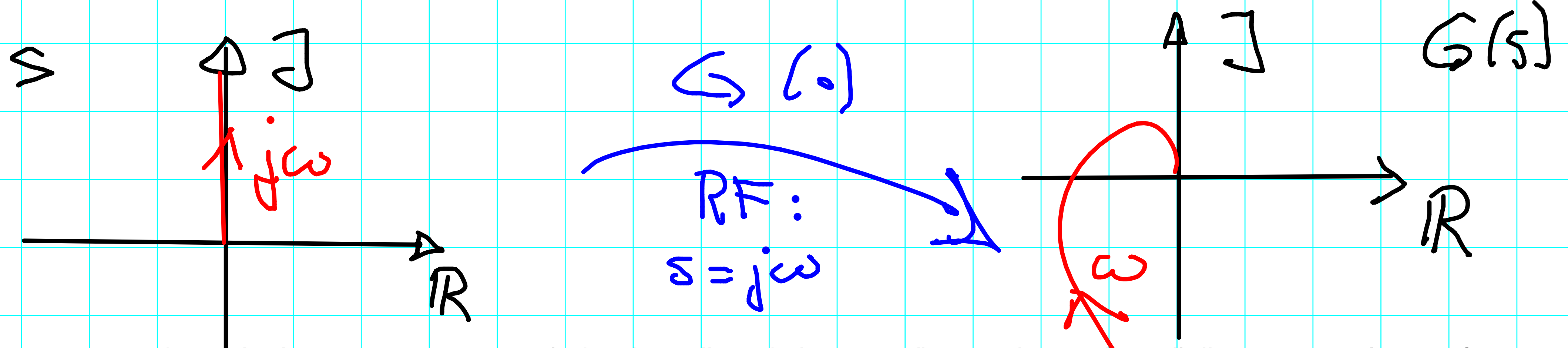
08/04/2020

In esame non ci chiederà di tracciare diagrammi polari, al massimo, data una funzione di trasferimento quale sia il diagramma polare corrispondente fra alcuni presentati, oppure il viceversa, cioè dato un diagramma polare, a quale funzione di trasferimento fa riferimento fra alcune presentate

DIAGRAMMA POLARE



trasformado "j omega" attraverso la funzione di trasferimento G(j omega) otteniamo il diagramma polare così

A differenza dei diagrammi di bode, non ci sono metodi comodi per tracciare diagrammi polari a mano. Possiamo però fare queste due analizi:

Analizziamo

- comportamento asintotico per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$
- aspetto qualitativo

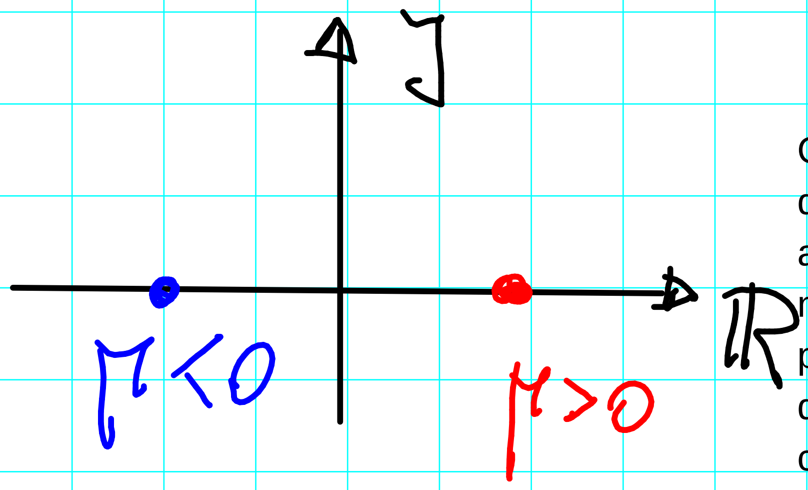
NB $G(s) = \frac{\Pi}{s^g} \frac{1+\dots}{1+\dots}$ come Bode

Usiamo la stessa struttura di G(s) che usiamo per Bode

- Comportamento per $\omega = 0$ (se G è definita) o per $\omega \to 0^+$

$g = 0$: $G(0) = \mu$

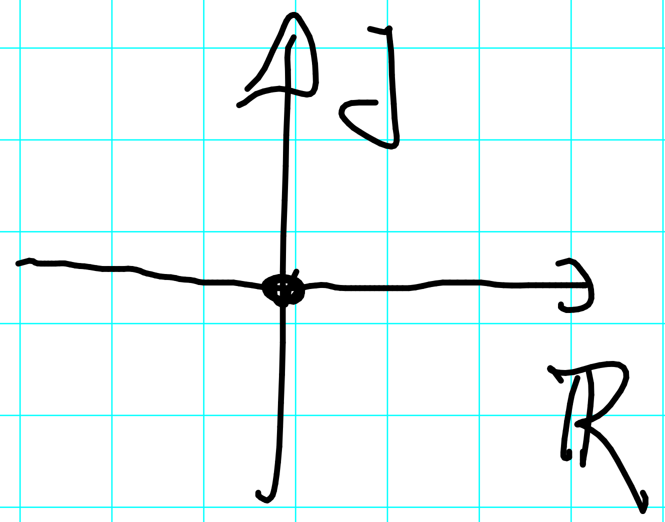
Se g=0 non ci sono nè poli nè zeri nell'origine omega=0, allora G(0) = mu



Quindi il diagramma polare parte o dal puntino rosso o dal puntino blu a seconda che mu sia positivo o negativo. Non importa il punto preciso, stiamo facendo un'analisi qualitativa, il concetto da capire è che parte dall'asse reale.

$g < 0$: $G(0) = 0$

Se g<0, ci sono zeri nell'origine, allora G(0) = 0

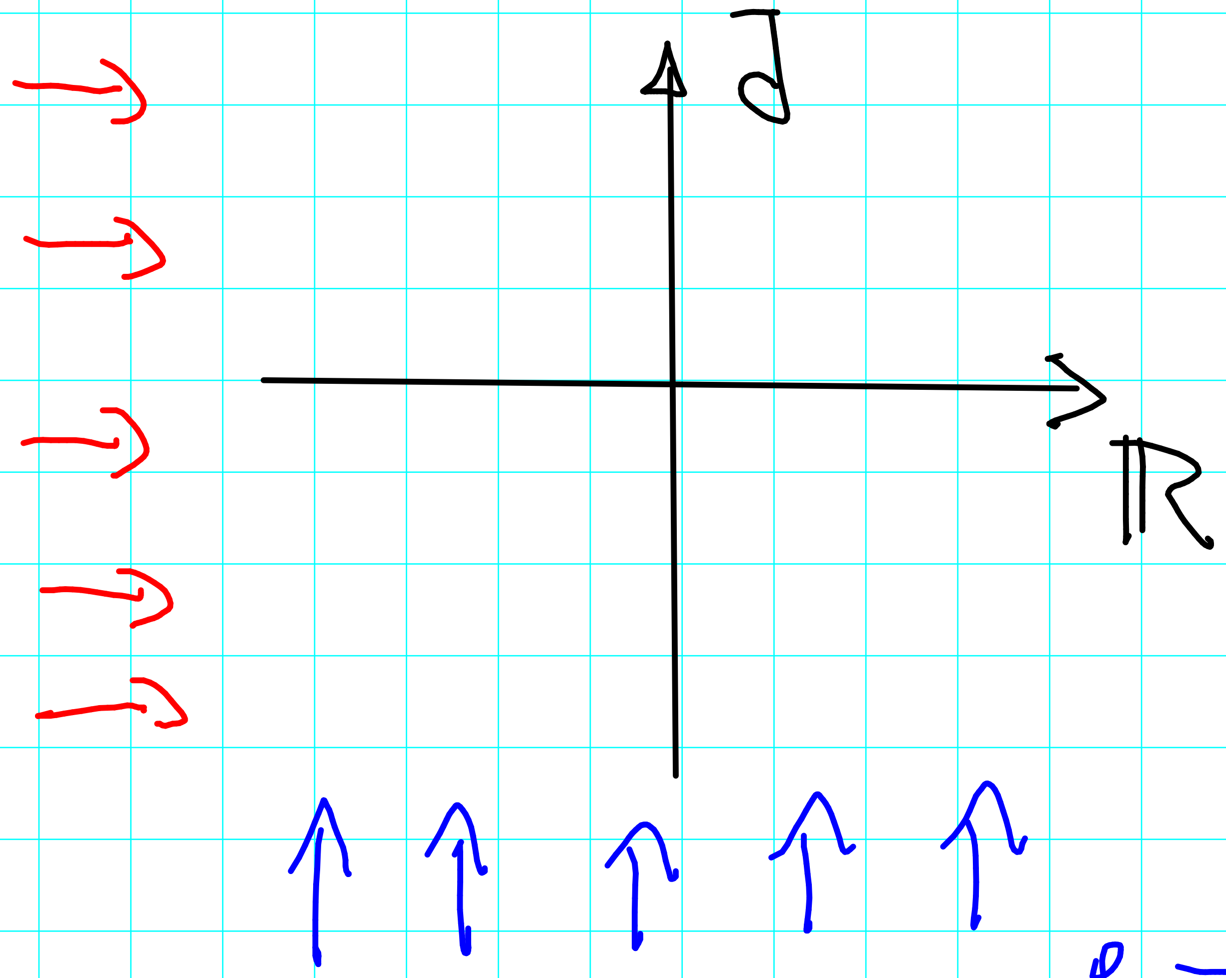


In questo caso il punto di partenza sarà l'origine degli assi

Se g>0 si dice che G "parte all'infinito"

$g > 0$: G "parte all'infinito" con fase $-g\,90°$

$g = 2$



$g = 1$

Se g=1 la fase è -90 gradi, e quindi il diagramma polare parte dall'infinito in basso (frecce blu),

se g=2, la fase è -180 gradi, e quindi il diagramma polare parte dall'infinito a sinistra (frecce rosse), etc.

Notiamo che se per esempio la fase è -90 gradi (g=1), si diciamo che quindi "parte all'infinito" in basso, ma ciò non significa che parta dall'asse, può partire da qualunque punto a meno infinito in basso... (questo è il significato delle tante frecce blu e tante frecce rosse, non sappiamo da dove parte, sappiamo solo da che direzione all'infinito venga)

NB <u>NON</u> inizia necessariamente appoggiato su un asse

E 9

Per mostrare che una volta calcolata la fase, cioè la direzione all'infinito da cui parte, non per forza il diagramma polare arriva dall'asse, facciamo questo esempio:

$$G(s) = \frac{1+s}{s} \qquad g = 1$$

diagramma polare

(quindi sappiamo che viene dal basso)

D. polare (DP) parte all'infinito con fase -90°

Ora vediamo il grafico in dettaglio

$$G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{j\omega} = 1 - \frac{j}{\omega}$$

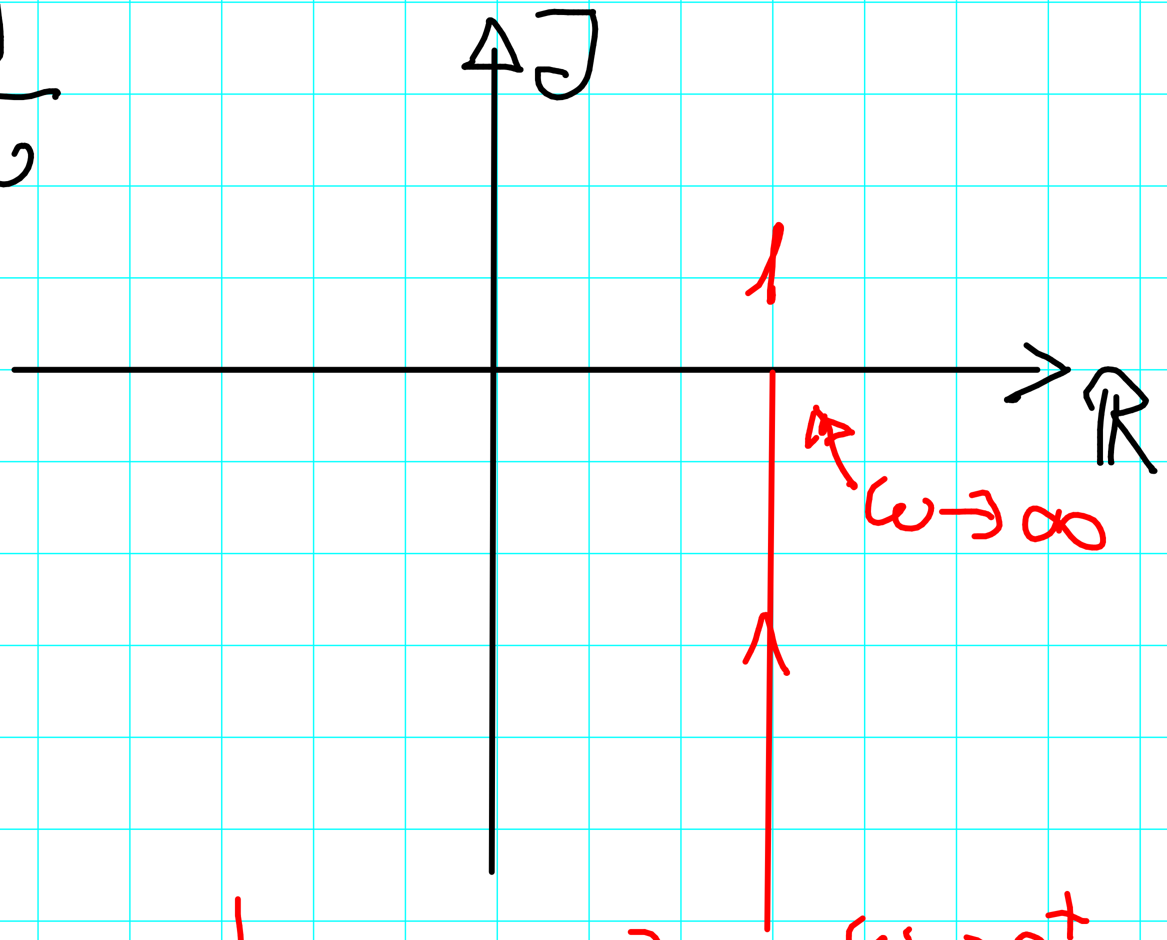
Per disegnarlo, separiamo parte reale e parte immaginaria

la parte reale è costante

$$Re(G(j\omega)) = 1$$

la parte immaginaria dipende da omega, e per disegnarla dobbiamo mappare -1/omega per omega che va da zero a infinito sull'asse immaginario.

$$Im(G(j\omega)) = -\frac{1}{\omega}$$



Non è appoggiato sull'asse!

(come abbiamo specificato nella slide precedente)

$\square$

Abbiamo fino ad ora analizzato il comportamento per omega=0 o per omega->0^+, vediamo ora quello all'infinito

- Comportamento per $\omega \to +\infty$

Distinguiamo due casi:

\# zeri = \# poli :

Se il numero di zeri è uguale al numero di poli, allora:

Perchè si ha un rapporto fra inifiniti di pari grado, che quindi è una costante

$|G(j\omega)| \to$ costante (per omega -> infinito)

$\angle^\circ G(j\omega) \to$ multiplo intero di 180° (opp. 0°)

(\# poli + \# zeri PARI)

Ricordando che ogni polo e ogni zero da un contributo di 90 gradi e che se il numero di poli e di zeri è uguale, allora abbiamo una quantità pari di sfasamenti di 90 gradi.

\# poli > \# zeri :

Se il numero di poli è maggiore del numero di zeri, allora:

Perchè il denominatore è un infinito di grado maggiore del denominatore

$|G(j\omega)| \to 0$

$\angle^\circ G(j\omega) \to$ multiplo intero di 90° (opp 0°)

In questo caso non sappiamo quanti poli o zeri abbiamo, quindi, sempre ricordando che ogni polo o zero ha un contributo di 90 gradi sulla fase, otteniamo che la fase totale è un multiplo di 90 gradi (oppure zero)

Vediamo ora l'aspetto qualitativo dei diagrammi polari:

- Aspetto qualitativo

Lo si può dedurre dai d. di Bode

andamento modulo → distanza dall'origine

andamento modulo

u Fase → argomento

Dall'andamento del modulo deduciamo la distanza dall'origine, dall'andamento della fase deduciamo l'argomento (cioè l'angolo con cui individuare il punto)

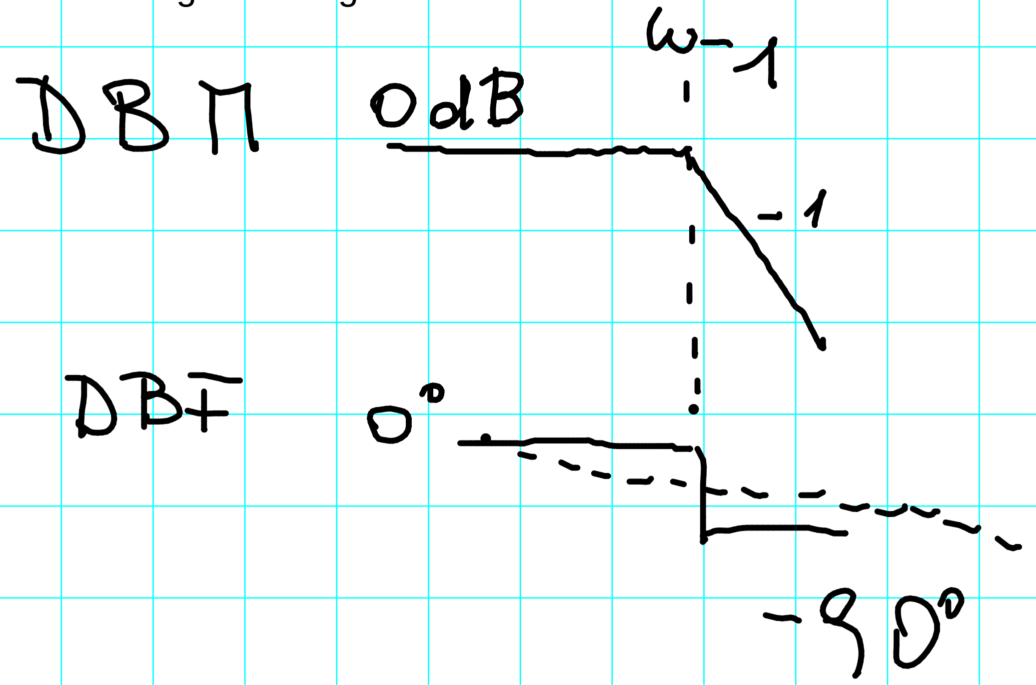
ES

Questo genere di esercizi non ci sono in esame, non ci fa disegnare i diagrammi polari, però ci possono essere esercizi in cui dobbiamo associare a una funzione di trasferimento un diagramma polare fra varie scelte possibili o viceversa.

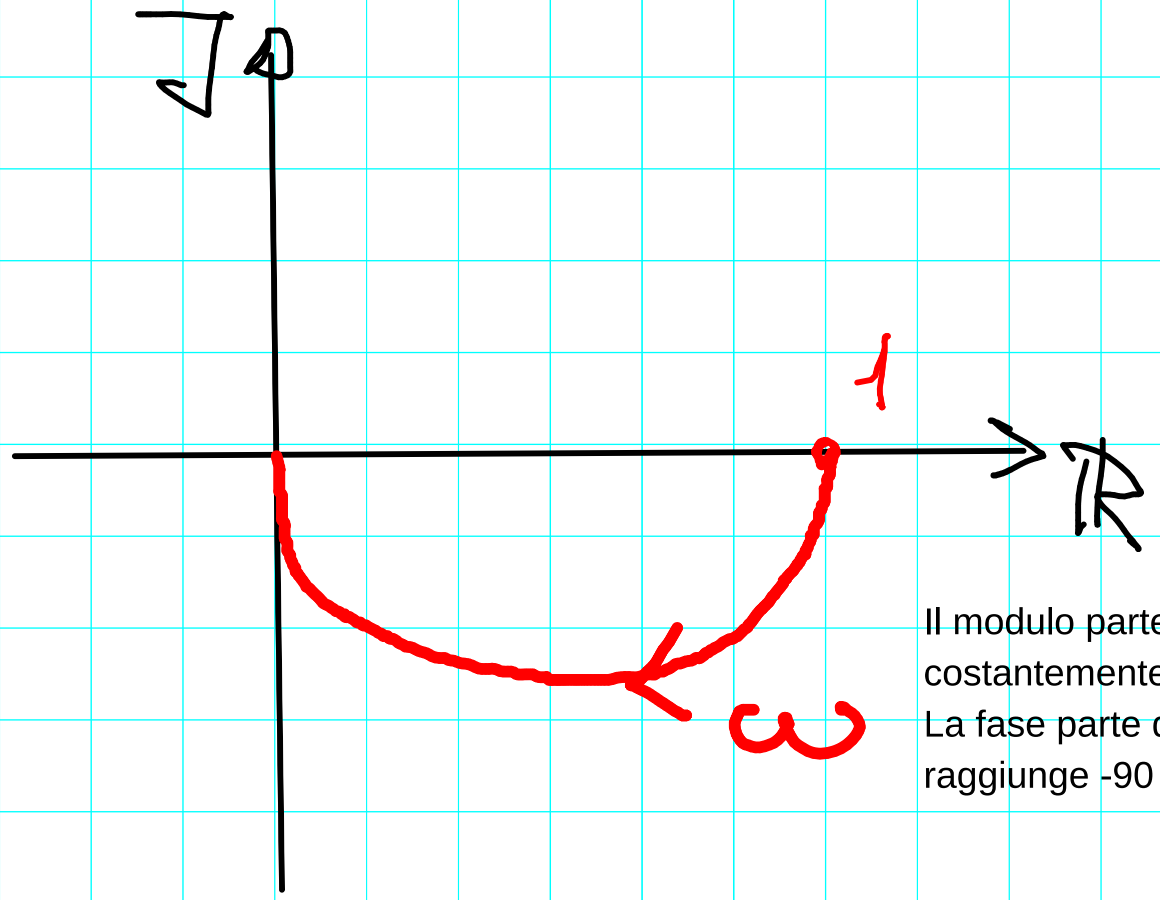
Data questa funzione di trasferimento

- $$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Che ha i seguenti diagrammi di bode della fase e del modulo



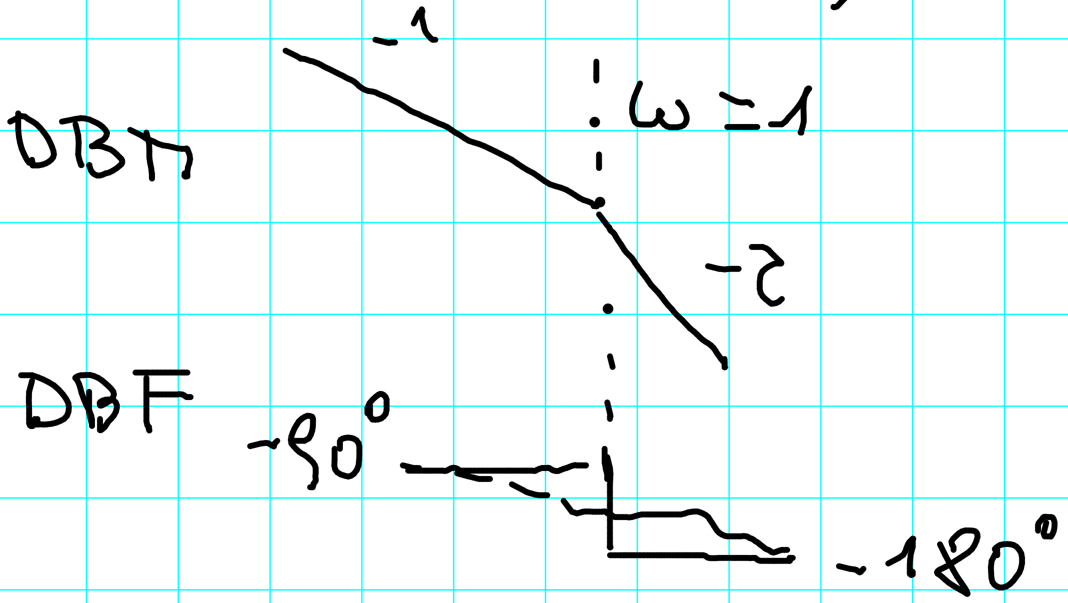
Possiamo ricavare il diagramma polare: $\Rightarrow$



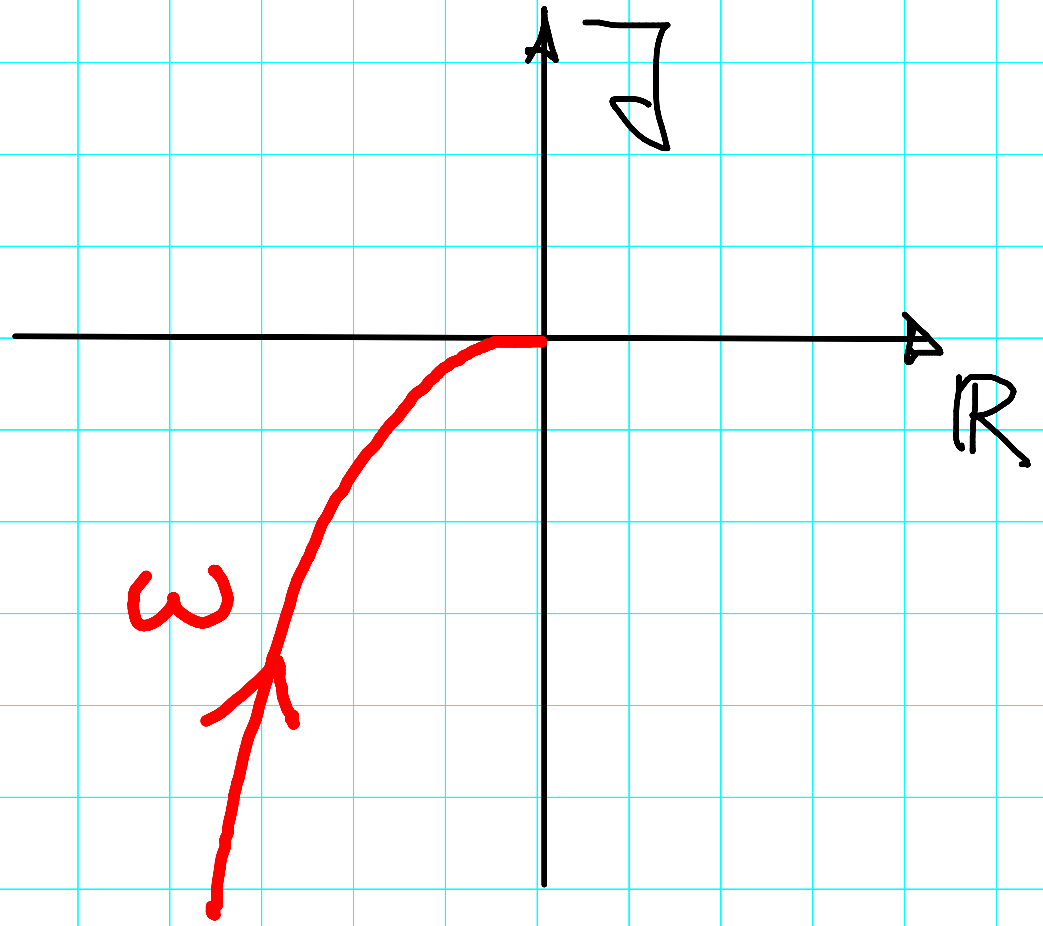
Il modulo parte da 1 e diminuisce costantemente,
La fase parte da 0 gradi e raggiunge -90 gradi

Vediamo un altro esercizio identico a quello della slide precedente

- $G(s) = \dfrac{1}{s(1+s)}$



$\Longrightarrow$



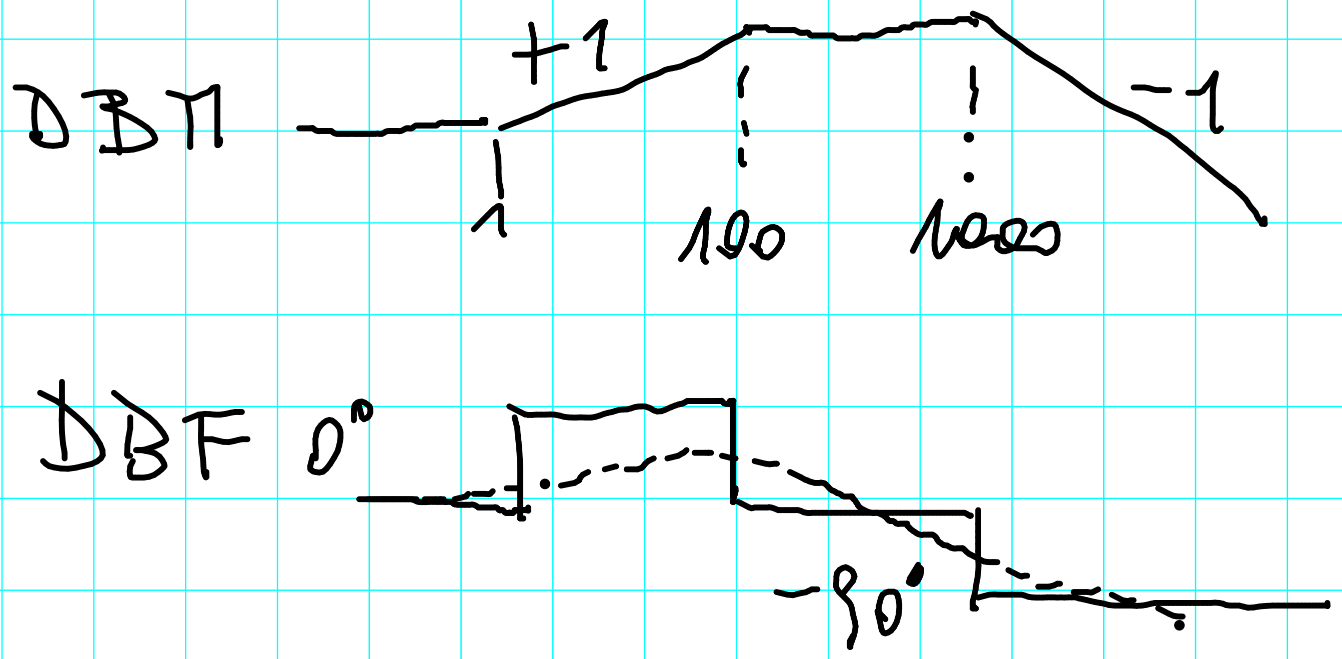
Il modulo parte da infinito e diminuisce costantemente

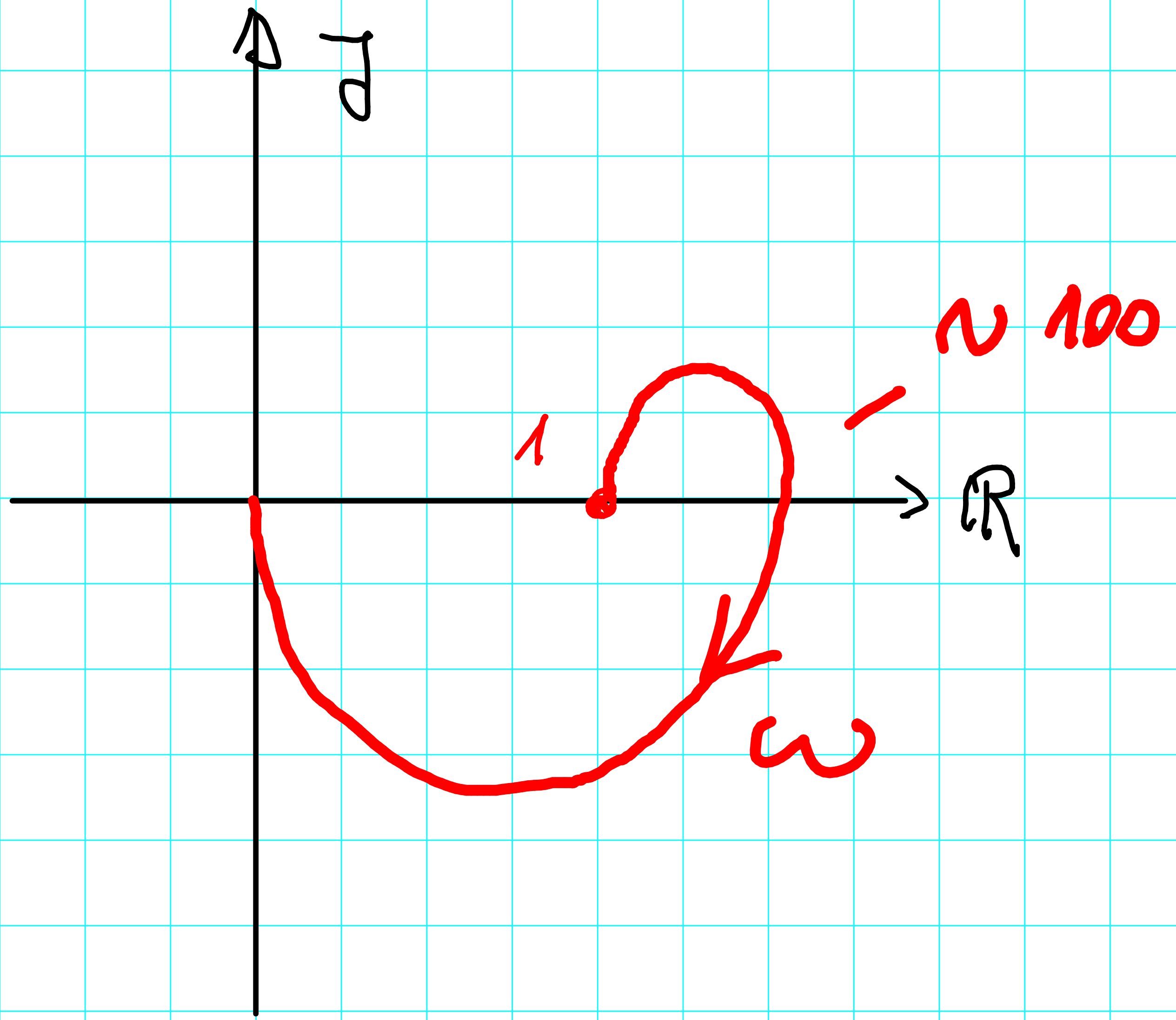
la fase parte da -90 e arriva a -180

Ovviamente non è un grafico preciso, ma qualitativamente assomiglia a come dovrebbe essere !

Terzo esercizio uguale ai precedenti... ti ci metti e li capisci...

$$G(s) = \frac{1+s}{(1+s/100)(1+s/1000)}$$





Complemento: effetto di un ritardo sulla RF e sulle sue rappresentazioni

complemento: un ritardo risposta in frequenza rappresentazioni

Siccome la trasfromata di laplace di v(t-tau) è

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)] = e^{-s\tau}\,\mathcal{L}[v(t)]$$

ne consegue che se ho un sistema così:

cioè un sistema in cui G(s) applica semplicemente un ritardo

$$\Rightarrow \quad u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = u(t-\tau) \qquad \tau > 0$$

Allora G(s) varrà:

$$G(s) = e^{-s\tau}$$

trascendente

trascendente (?)

Sistemi con ritardo in serie (FdT per noi + generale)

ritardo in serie noi più generale

Se abbiamo una funzione di trasferimento fatta dai seguenti due termini:

$$G(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{\text{DINAMICA RAZIONALE}} \underbrace{e^{-sT}}_{\text{RITARDO}} = G_R(s)\, e^{-sT}$$

Cosa succede a una risposta in frequenza di una funzione di trasferimento con una dinamica razionale (cioè una G(s) tipica) con un ritardo in serie (e^{-stau})?

RF di $G(s)$

$$G(j\omega) = G_R(j\omega)\, e^{-j\omega\tau}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = |G_R(j\omega)|$

perchè il modulo di e^{-j omega tau} è nullo...

Fase: $\angle G(j\omega) = \angle G_R(j\omega) \underbrace{-\omega\tau}_{RAD}$

Se un ritardo è lineare nel tempo, è costante nella fase (- omega tau)!

radianti/secondo $\cancel{r/s}$ $\cancel{s}$ secondo

Quindi in totale sono radianti

Il risultato ottenuto ha senso: l'influenza di e^{-j omega tau}, che è il ritardo, non influenza il modulo, ma solo la fase

N.B. un errore tipico è scordarsi di trasformare le radianti in gradi

Vediamo gli effetti del ritardo sui diagrammi di Bode:

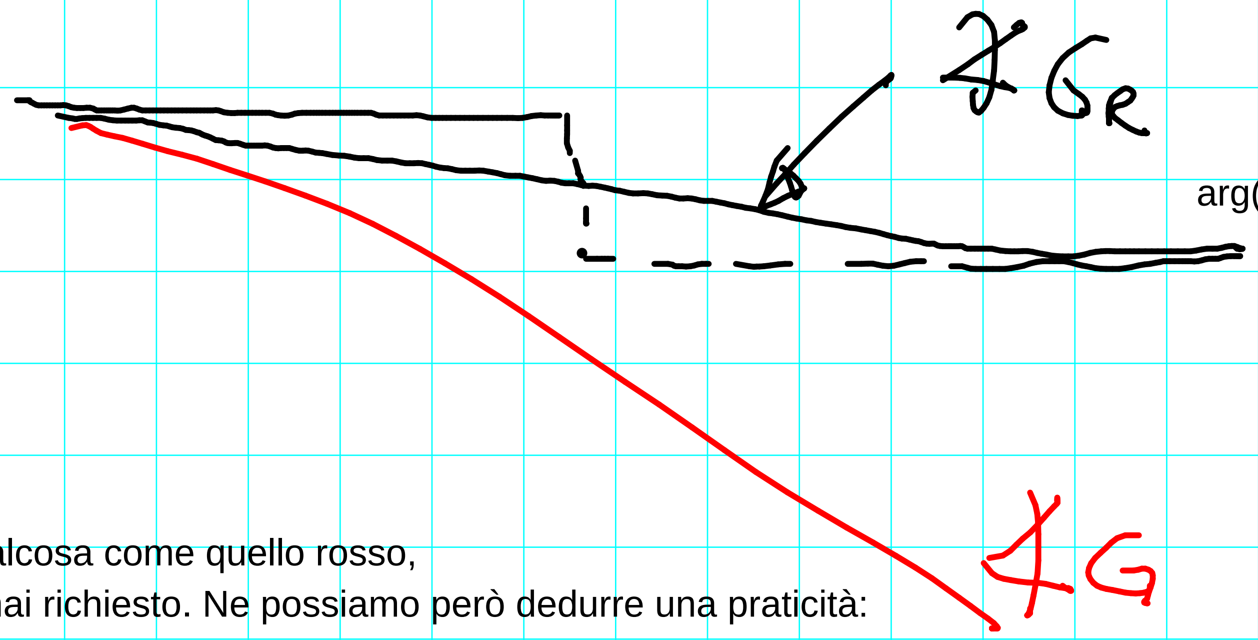
- Effetto del ritardo sul DBM: nessuno, $|G| = |G_R|$

ritardo

- " " " " DBF:

Il ritardo nella fase ha un contributo lineare "- omega tau", che in scala logaritmica è rappresentato da un esponenziale

$\left.\begin{array}{l}\text{contributo lineare in } \omega \\ \text{scala } \omega \text{ logaritmica}\end{array}\right\} \rightarrow$ aspetto esponenziale



arg(G_r) (senza ritardo) è questo in nero.

L'argomento arg(G) (con ritardo) sarebbe qualcosa come quello rosso,
ma non è possibile tracciarlo e non ci verrà mai richiesto. Ne possiamo però dedurre una praticità:

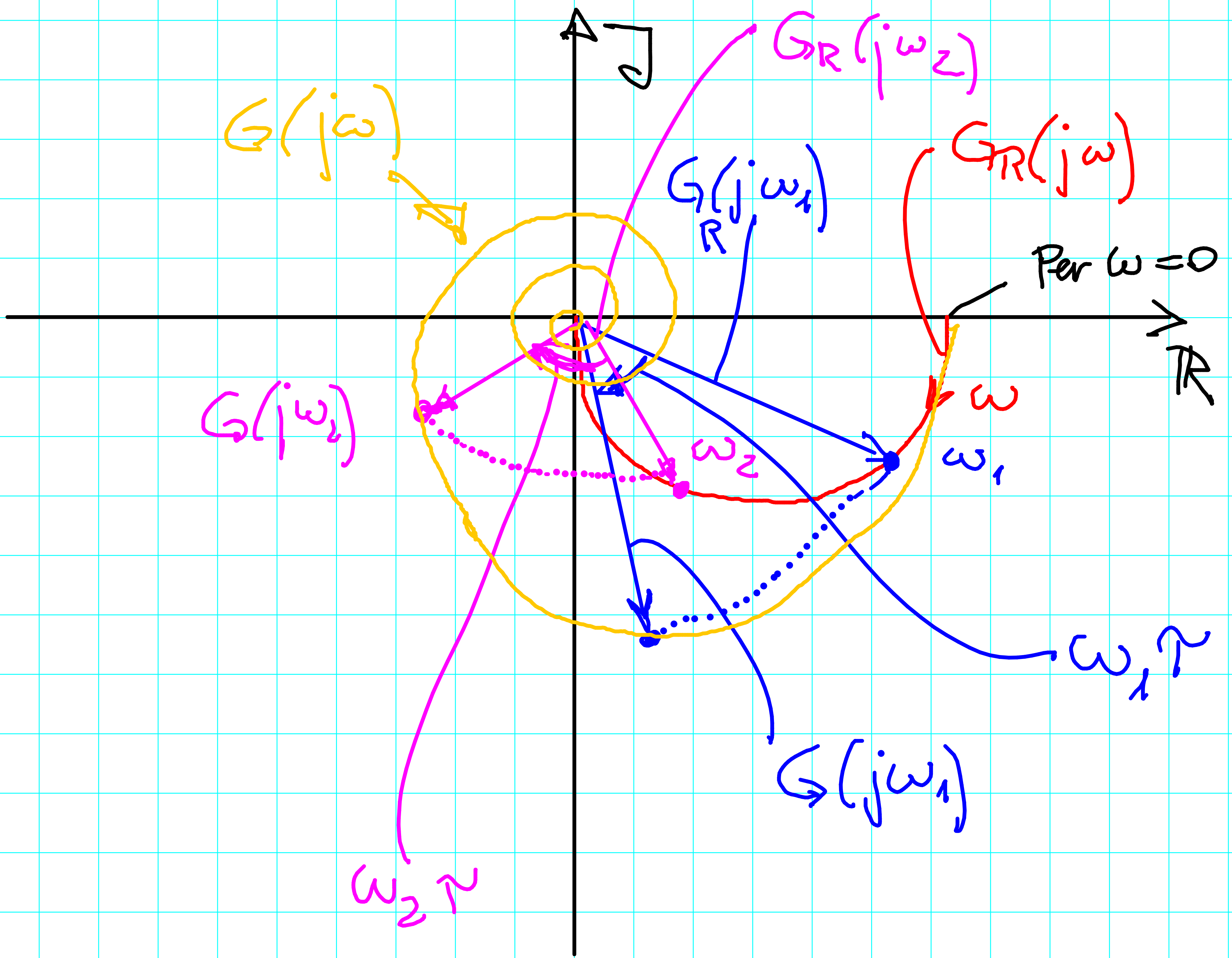
- Ai fini pratici bisogna calcolare $\measuredangle G_R(j\bar{\omega})$ col regolo e per avere $\measuredangle G(j\bar{\omega})$ bisogna sottrarre $\bar{\omega}\tau$ RADIANTI

ai fini pratici — bisogna — regolo — bisogna — sottrarre — \bar{omega} tau — radianti

N.B. RADIANTI !!! da trasformare in gradi !!!

ritardo sull

- Effetto del ritardo sul di. polare



$\omega_2 > \omega_1$

Interpretazione disegno:

prima curva disegnata è G_R(j omega) in rosso: una qualunque funzione di trasferimento generica.

Prende due punti omega_1 (blu) e omega_2 (rosa) uno maggiore dell'altro, lungo il diagramma rosso appena disegnato.

Disegna e vettore G_R(j omega_1) (in blu) e mostra cosa gli succede se gli applichiamo il ritardo: G(j omega_1) (sempre in blu) rappresenta il punto in cui omega_1 si ritrova se gli applichiamo il ritardo. Il modulo è lo stesso, la fase è cambiata di una quantità omega_1 tau.

Lo stesso discorso si può fare per omega_2 (in rosa).

Per omega=0 il ritardo " omega tau" è nullo, più omega cresce verso l'infinito e più il ritardo è maggiore (senza limite)!

La linea gialla rappresenta il segnale G(j omega) che è G_R ritardata.

Dall'effetto totale deduciamo che il modulo massimo rimane lo stesso, e che l'intero diagramma polare viene "arrottolato" su sè stesso

Domande:

Vediamo i due casi possibili:

1) grado D > grado N $G = \frac{N}{D} e^{-j\omega\tau}$

grado D > grado N

con grado D > grado N

diagramma polare finisce nell'origine con

$\Rightarrow$ DP di G finisce nell'origine con fase tendente a $-\infty$

fase tendente a - infinito

2) grado D = grado N

Se invece grado D = grado N che succede?

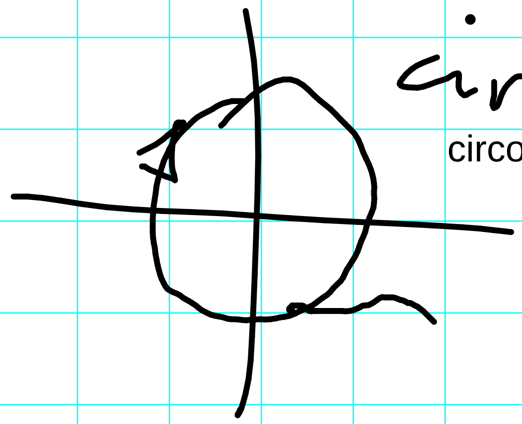
grado che succede?

in questo caso

modulo $\rightarrow$ costante

fase $\rightarrow -\infty$

la fase tende a -infinito

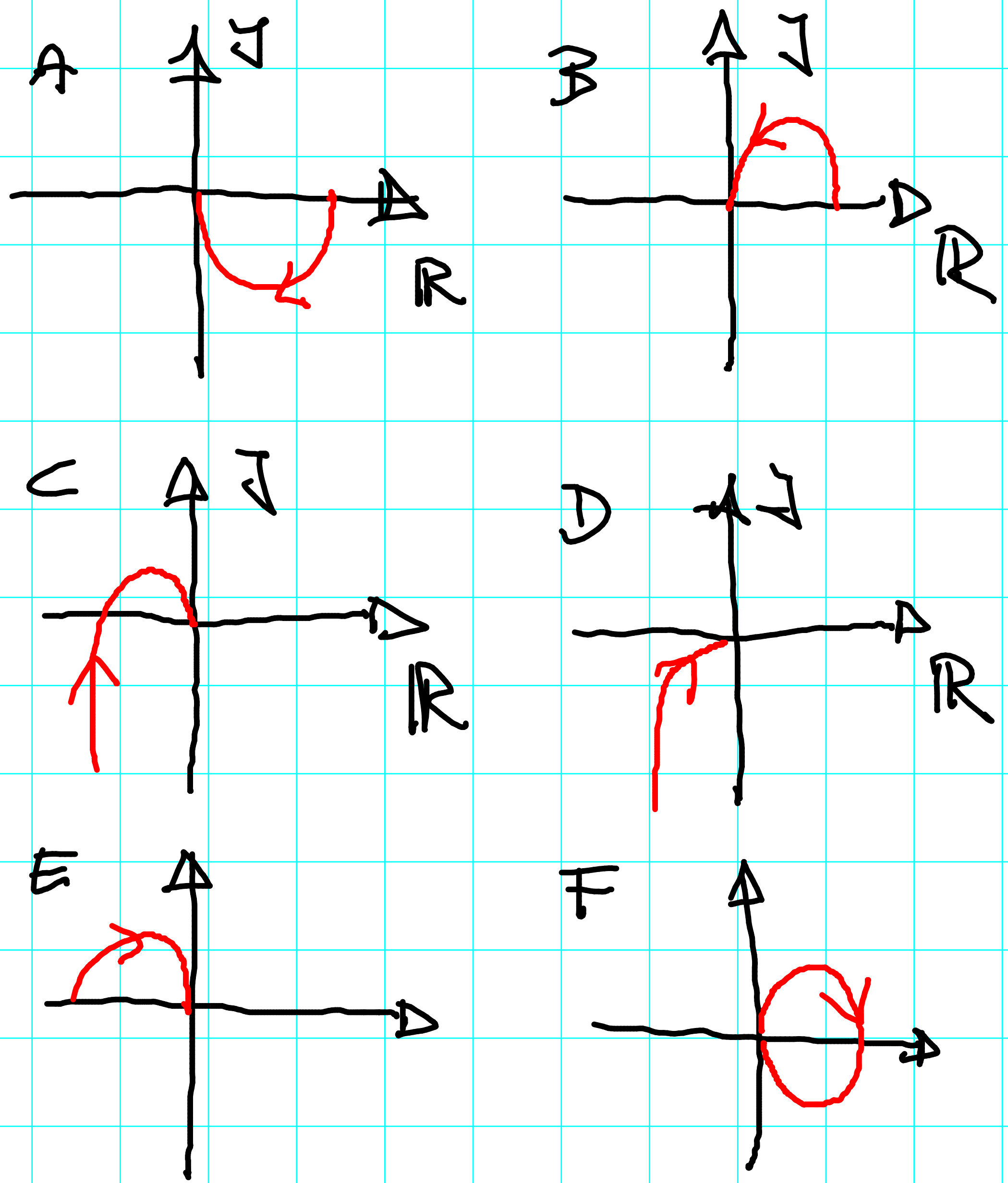


circ. percorsa ∞ volte

circonferenza percorsa infinite volte

E10

Tipico esercizio che potrebbe esserci in esame: bisogna popolare la tebella a lato.



$$G_1 = \frac{2}{s(1+5s)}$$

$$G_2 = \frac{5}{1-s}$$

$$G_3 = \frac{10}{1+2s}$$

$$G_4 = -\frac{1}{1+s}$$

$$G_5 = \frac{5}{(1+4s)^2}$$

$$G_6 = \frac{1}{s(1+s)^2}$$

DP	G?
A	3
B	2
C	6
D	1
E	4
F	5

$g=0$ $G(0)>0$ $G(\infty)=0$ $\angle 0 \to -90$

polo DX $\angle$ $+90$

$g=1$ $\angle G(\infty) = -270$

" " " -180

$g=0$ $G(0)<0$

$G(0)=0$

Segnali Dom. tempo, TDL

Slide di sunto della prima parte del corso e tutto ciò che abbiamo fatto fino ad ora..... ignora questa slide...

sistemi dinamici (. ... 300)

↳ LTI a TC

↳ A b c d

↳ G(s)

↳ composizione sottosistemi (schemi a blocchi

proprietà

...

⇒ sistemi di controllo