ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

14 ottobre 2019

[mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1)
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3)
-

3-LEZIONE

10/10/19

[perso i primi 20 minuti]

Sta parlando di limiti. . .

$$\forall B_s(l)\ \exists\ B_q(x_0)\quad :\quad \forall x \in A \cap B_q(x_0) - \{x_0\}\ \ ,\ \ f(x) \in B_s(l)$$

"per ogni intorno del valore limite l" definitivamente vicino a x_0 la funzione sta nell'intorno del valore limite.

Algebra dei limiti

Per poter fare dei confronti rigorosi fra limiti, ovvero fra funzioni, ho bisogno di introdurre due simboli:

- asintotico: $\sim$
- o-piccolo: o

o-piccolo

def. $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se f è trascurabile rispetto g. Cioè se, confrontando f e g, f perde.

def. Definizione formale:

$$f = o(g)\ \ se\ \ f(x) = g(x)h(x)\ \ e\ \ h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

oss. conseguenza è che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

es. Per $x \longrightarrow 0$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to vera$$

$$x = o(x^2) \to falsa$$

es. Per $x \longrightarrow +\infty$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to falsa$$

$$x = o(x^2) \to vera$$

regola. Nell'intorno dell'origine (tendendo a $\to 0$) potenze alte della variabili sono trascurabili, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più basse.
regola. allontanandosi dall'origine (tendendo a $\to \pm\infty$) potenze basse sono trascurabili rispetto a potenze più alte, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più alte.

Proprietà di o-piccolo

- Costanti in o-piccolo.
  Con $k \in \mathbb{R}$ e costante:

  $$o(k \cdot g) = o(g) = k \cdot o(g)$$

  dim.

  $$f = o(k \cdot g) \to f = o(g)$$

  $$f = k \cdot g \cdot h$$

  ma $h \to 0$, quindi $k \cdot h \to 0$

  $$f = o(g)$$

- Somma di o-piccoli.
$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$
dim. conseguenza della proprietà precedente.
oss. errore tipico: $o(g) - o(g) = 0$. SBAGLIATISSIMO.
es. per $z \longrightarrow +\infty$
$$f_1 = x^3 - 2x + 4 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_2 = x^3 + x^2 - 7 = x^3 + o(x^3)$$
$$f_1 - f_2 = x^3 + o(x^3) - (x^3 + o(x^3)) = o(x^3) - o(x^3) \neq 0$$
$$f_1 - f_2 = -2x + 4 - x^2 + 7$$

- Prodotto di funzioni e o-piccolo.
Con f una funzione
$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

dim.
$$F = o(g) = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$
moltiplico entrambe le parti per f
$$f \cdot F = f \cdot g \cdot h$$

- Potenze di o-piccolo.
Con $k \in \mathbb{R}^+$
$$[o(g)]^k = o(g^k)$$
dim.
$$G = o(g)$$
$$G = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$
elevo tutto alla k
$$G^k = g^k \cdot h^k \qquad H = h^k \to 0$$

Asintotico

def. f è **asintotico** a g se tendono allo stesso valore e inoltre ci tendono allo stesso modo.
$$f \sim g \quad x \to x_0$$
formalemente:
$$f \sim g \quad se \quad f = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 1$$
oss. conseguenza:
$$\frac{f}{g} \to 1$$

teor. teorema fondamentale che lega $\sim$ e $o()$
per $x \to x_0$
$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$
Due funzioni sono asintotiche se hanno lo stesso termine dominante.

dim. dimostrazione da sinistra a destra ($\Rightarrow$):
ipotesi: $f = g \cdot h$ e $h \to 1$. Sottraggo g da entrambi i membri:
$$f - g = g \cdot h - g = g(h-1) \quad H = h - 1 \longrightarrow 0$$
$$f - g = o(g)$$
$$f = g + o(g)$$
dim. dimostrazione da destra a sinistra ($\Leftarrow$)
ipotesi: $f - g = o(g)$
$$f - g = g \cdot h \quad h \to 0$$
$$f = g + g \cdot h = g(1+h) \quad H = h + 1 \to 1$$
$$f \sim g$$

Proprietà di asintotico

- Potenza di funzioni asintotiche:
$$f \sim g \Longleftrightarrow f^k \sim g^k$$

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f = g \cdot h \quad \ldots$$

- Prodotti e rapporti di funzioni asintotiche.
  $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora
$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$
$$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$$
  prodotti e rapporti di funzioni asintotiche sono asintotici fra loro.

  dim. [manca la dimostrazione]
$$f_1 \sim g_1$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$f_2 \sim g_2$$
$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
$$\ldots$$
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot H \quad H = \frac{h_1}{h_2} \to 1$$

oss. Notare che non c'è una proprietà per la somma di asintotici, che invece nell'o-piccolo c'è.

Limiti notevoli

[Stiamo guardando simulazioni su MATLAB. Osserviamo che il seno nell'intorno dell origine è approssimabile con la bisettrice, il cosendo con la parabola, la funzione esponenziale traslata in giù di un unità con la bisettrice, il logaritmo traslato a sinistra di un unità con la bisettrice,etc.]
Vediamo ora in formule questi risultati:

- **Seno**
  per $x \to 0$
$$sin(x) = x + o(x)$$
  questa uguaglianza si può riscrivere come $sin(x) - x = o(x)$, cioè o(x) è l'errore che sto facendo nell'approssimare $sin(x)$ come x.
  img1
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$sin(x) \sim x$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- **Coseno**
  per $x \to 0$
$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
  img2
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
$$cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$

- **Esponenziale**
  per $x \to 0$
  $$e^x - 1 = x + o(x)$$
  img3
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$e^x - 1 \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- **Logaritmo**
  per $x \to 0$
  $$ln(1+x) = x + o(x)$$
  img4
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$ln(1+x) \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

Per ognuno di questi limiti notevoli sono state fornite tre versioni che rappresentano la stessa cosa, la più importante e più ricca di significato è sempre la prima, quella con o-piccolo.

es. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \qquad x \to +\infty$$

numeratore:

$$3x^4 - x = 3x^4 + o(3x^4) = 3x^4 + o(x^4)$$
$$3x^4 - x \sim 3x^4$$
$$(3x^4 - x)^{\frac{1}{2}} \sim (3x^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} \sim \sqrt{3x^4}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} = \sqrt{3x^4} + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 \sim x^2$$

usiamo ora la proprietà dei rapporti di funzioni asintotiche:

$$\frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{3x^4}}{x^2} = \sqrt{3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} = \sqrt{3}$$

Limite notevole della pontenza α-esima con $0 < \alpha < 1$

$$y = x^\alpha \quad con\ 0 < \alpha < 1$$

$per \ \ x \to 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$$

img5
Questo limite notevole viene usato per risolvere le radici.
Forniamo, come per gli altri limiti notevoli visti, le altre due forme notevoli:

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x\to 0}\ \ldots[manca]$$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)}$$

per studiare il limite analiziamo l'andamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)}\quad per\ \ x\to 0$$

occupiamoci della radice con la proprietà appena vista:

$$(1+t)^\alpha-1=\alpha t+o(t)\quad per\ \ t\to 0$$

se prendo $t=2x^2-x^3$ e $\alpha=\frac{1}{2}$

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2x^2-x^3)+o(2x^2-x^3)$$

Analizzando $o(2x^2-x^3)$, noto che x^3 è trascurabile rispetto a $2x^2$ (ricorda che $x\to 0$), Inoltre la costatne 2 non conta nell'o-piccolo, quindi:

$$1+\frac{1}{2}(2x^2-x^3)+o(x^2)$$

Inoltre anche in $(2x^2-x^3)$ posso ignorare x^3 per lo stesso motivo, quindi:

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2x^2)+o(x^2)=1+x^2+o(x^2)$$

Quindi tornando alla funzione originale
Numeratore:

$$1+x^2+o(x^2)-[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

Denominatore:

$$x+o(x)$$

Numeratore/denominatore:

$$\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-cos(x)}{sin(x)}=\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x+o(x)}\sim\frac{\frac{3}{2}x^2}{x}\sim\frac{3}{2}x$$

Quindi la funzione tende a 0 con la pendenza di $\frac{3}{2}x$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{16x^2-2}}{\sqrt{x+1}}$$

Analiziamo $\sqrt[4]{16x^2-2}$, vorremmo usare il limite notevole della potenza α-esima con $0<\alpha<1$, in questo caso $\alpha=\frac{1}{4}$:

$$(1+t)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}t+o(t)\quad t\to 0$$

ma noi nell'espressione della consegna abbiamo $x\to+\infty$ e non possiamo quindi usare il limite notevole, perciò:

$$=\sqrt[4]{16x^2-2}=\sqrt[4]{16x^2(1-\frac{2}{16x^2})}=2\sqrt{|x|}(1-\frac{1}{8x^2})^{\frac{1}{4}}=$$

Ora possiamo usiamo il limite notevole con $t=-\frac{1}{8x^2}$, perchè ora $\frac{1}{x^2}$ tende a 0 per $x\to+\infty$

$$=2\sqrt{x}(1+\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{8x^2}))+o(\frac{1}{x^2})=$$

$$=2\sqrt{x}-\frac{1}{16}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

Analiziamo ora $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x(1-\frac{1}{x})} = \sqrt{x}(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{x}[1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{x}) + o(-\frac{1}{x})] =$$

essendo il $-$ dentro all'o-piccolo, lo considero come una costante (-1) e quindi lo posso togliere:

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Ora, quindi, ottengo:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Fra i due o-piccolo, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ è più grande di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

4-LEZIONE

14/10/19