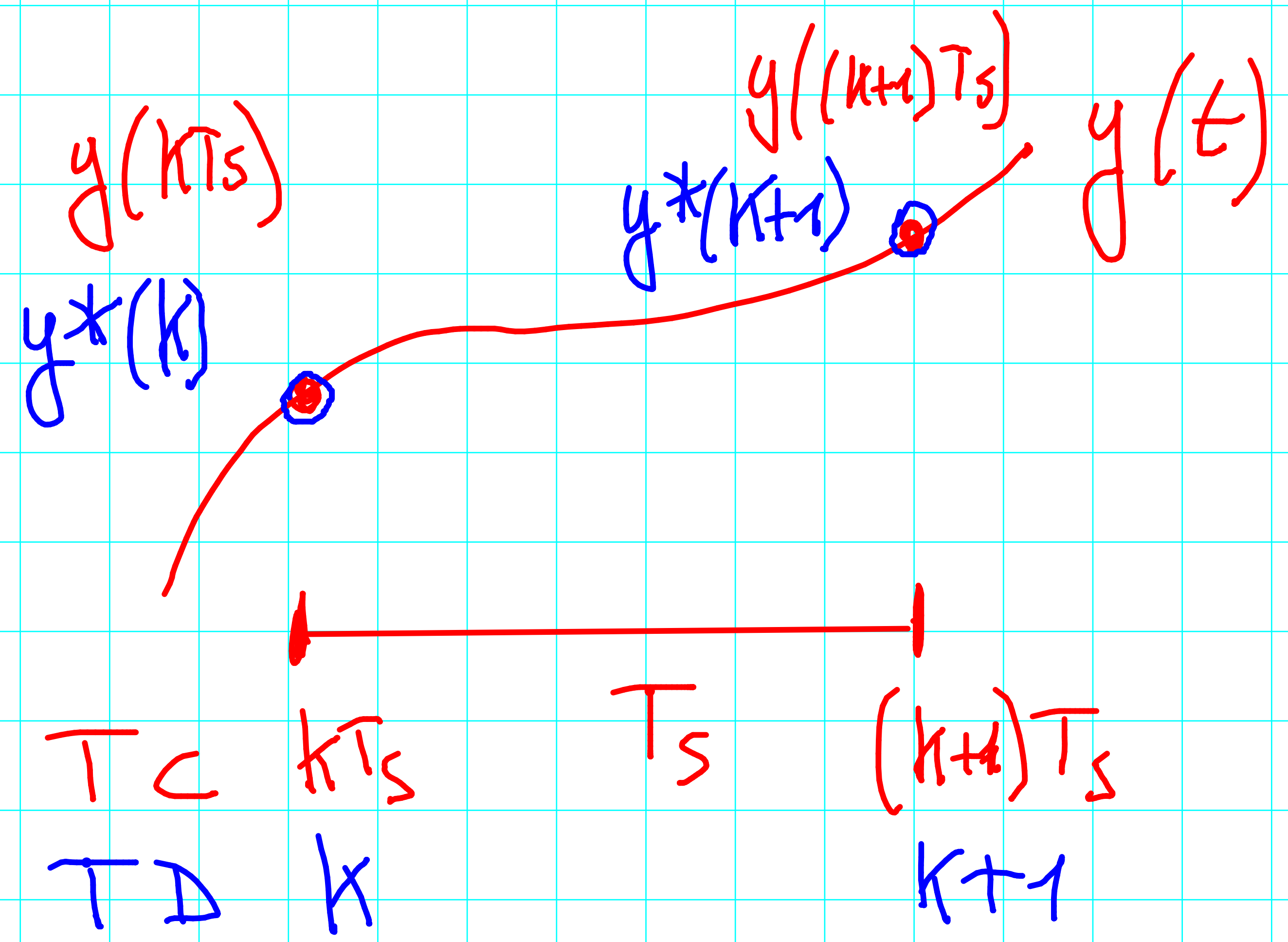
06/05/2020



se $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ sono continue

$$\exists\, \tilde{t} \in [kT_s, (k+1)T_s]$$

$$\text{t.c. } \dot{y}(\tilde{t}) = \frac{y^*(k+1) - y^*(k)}{T_s}$$

Però non so dove è $\tilde{t}$ se ho soltanto le y^*.

• APPROX 1

$$\frac{y^*(k+1) - y^*(k)}{T_s} = \dot{y}(t)\Big|_{t=kT_s}$$

DICO IO CHE

cioè R. inc. = derivata all'INIZIO del passo

NB operazione con FdT $\Rightarrow$ solo TdF, CI nulle

TC: $y(t) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow \dot{y}(t)$

TD: $y^*(k) \longrightarrow \boxed{\dfrac{z-1}{T_s}} \longrightarrow \dfrac{y^*(k+1) - y^*(k)}{T_s}$

Metodo di Eulero Esplicito (EE) o delle differenze in avanti:

$$R^*(z) = R\left(\frac{z-1}{T_s}\right)$$

• APPROX 2

$$\frac{y^*\overset{k}{(k+1)} - y^*\overset{k-1}{(k)}}{T_s} \underset{\text{DICO IO CHE}}{=} \dot{y}(t)\Big|_{t=(k+1)T_s}$$

cioè R.I. = derivata alla FINE del passo

$$\underset{k}{y^*(k)} \rightarrow \boxed{\frac{1-z^{-1}}{T_s}} \rightarrow \frac{y^*(k)-y^*(k-1)}{T_s}$$

Metodo di Eulero Implicito (EI) o delle differenze all'indietro:

$$R^*(z) = R\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right) = R\left(\frac{z-1}{zT_s}\right)$$

ES 1

$$G(s) = \frac{1}{1+2s} \qquad T_s = 0,1$$

- Discretizzazione esatta

$$G(s) = \frac{0,5}{s+0,5} = \frac{c\,b}{s-a} \Rightarrow$$

$a = -0,5 \quad b = 1 \; (0.5)$

$c = 0,5 \; (1) \quad d = 0$

$$\hookrightarrow \frac{Y}{U} = \frac{1}{1+2s} \Rightarrow (1+2s)Y = U$$

$$y + 2\dot{y} = u \qquad \dot{y} = -0,5y + 0,5u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -0,5x + 0,5u \\ y = x \end{cases}$$

$$a^* = e^{aT_s} = e^{-0,5 \cdot 0,1} = e^{-0,05} \simeq 0,951$$

$$b^* = \int_0^{T_s} e^{a(T_s-\tau)}\, b\, d\tau = \int_0^{0,1} e^{-0,5(0,1-\tau)}\, 0,5\, d\tau \simeq 0,049$$

$$G^*_{DE}(z) = \frac{c\, b^*}{z - a^*} = \frac{0,049}{z - 0,951}$$

$\left.\begin{array}{l} G(0) = 1 \\ G^*(1) = 1 \end{array}\right\}$ ok fino ai decimali se troncate

NB A TD il guadagno di una FdT $G^*(z)$ è $G^*(1)$

perché se $u = \bar{u}$ e c'è un equilibrio $\bar{x}$

$$\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1} b \bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u} = \left(c(I-A)^{-1}b + d\right)\bar{u} = G^*(1)\,\bar{u}$$

- Eulero Esplicito

$$G^*_{EE}(z) = \frac{1}{1+2\,\underbrace{\frac{z-1}{0,1}}_{s}} = \frac{0,05}{z-0,95}$$

- Eulero Implicito

$$G^*_{EI}(z) = \frac{1}{1+2\,\frac{z-1}{0,1\,z}} = \frac{0,048\,z}{z-0,952}$$

DISCRETIZZAZIONE E STABILITÀ

Domande:

$$\left.\begin{matrix} G(s)\ AS \\ T_s \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{DISCR}} G^*(z)$$

Questa è AS?
Lo è $\forall\, T_s$?

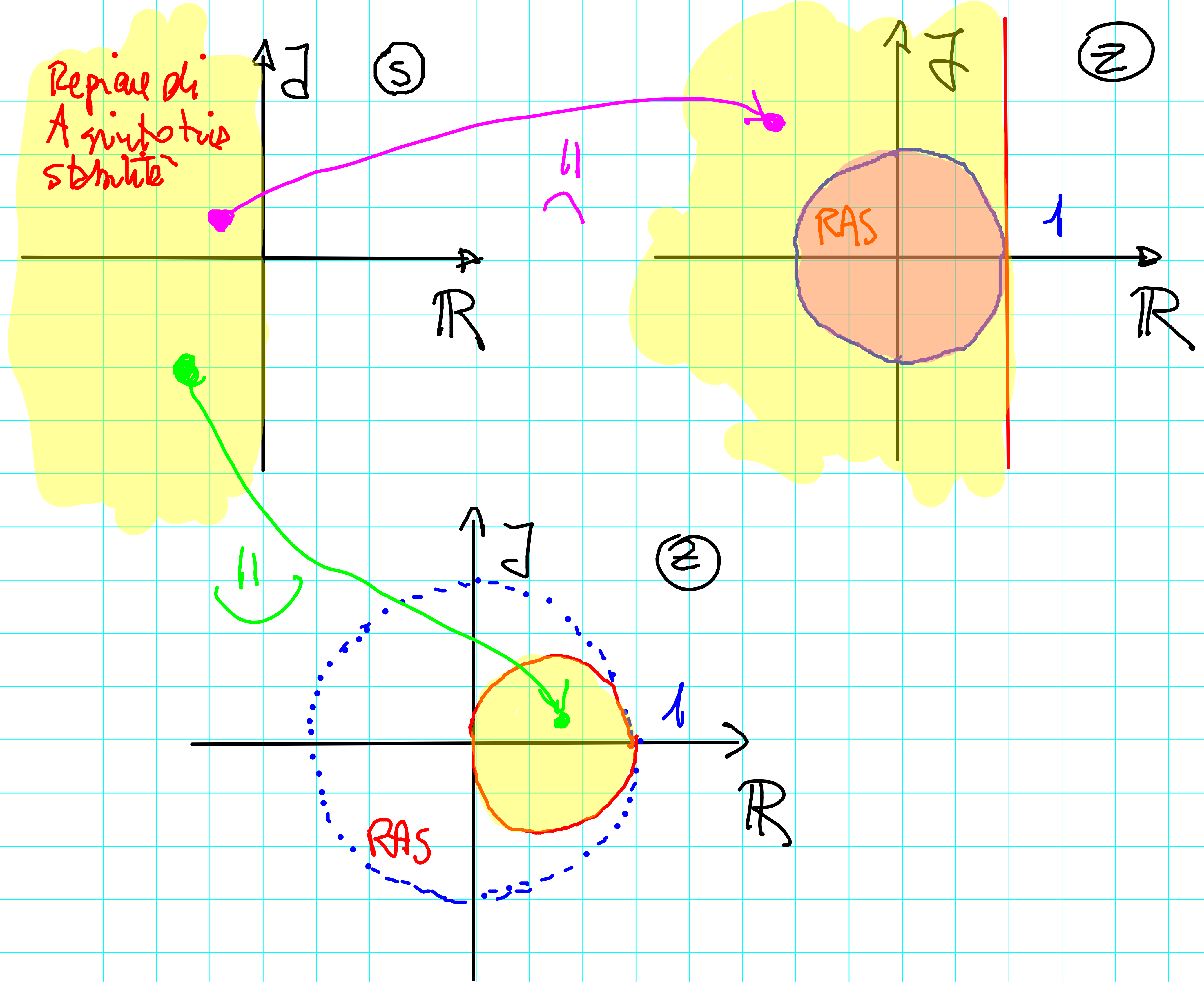
- Discr. esponenziale ("esatta")

Sì: λ aut. di $A \Rightarrow e^{\lambda T_s}$ aut. di $e^{AT_s} = A^*$

$$Re(\lambda) < 0 \iff |e^{\lambda T_s}| < 1$$

- Eulero Esplicito

$$s \to \frac{z-1}{T_s}$$



- Eulero Implicito

$$s \to \frac{z-1}{zT_s}$$

- Esiste una trasformazione razionale $s \to z$ tale per cui il SS del piano S corrisponde al cerchio unitario (aperto) del piano Z?

Sì:

$$s \to \frac{2}{T_s} \; \frac{z-1}{z+1}$$

Trasf. o metodo di TUSTIN

ES

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \qquad T>0 \quad AS$$

$$G^*_{EE} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{T_s}T} = \frac{T_s}{T_s+zT-T} = \frac{T_s/T}{z-\underbrace{\left(1-\frac{T_s}{T}\right)}_{\text{polo a TD} \Rightarrow p}}$$

se $T_s = 0^+ \quad p = 1^-$

$T_s = T \quad p = 0$

$T_s = 2T \quad p = -1$

$T_s > 2T \quad p < -1 \quad |p| > 1 \quad$ sist. a TD $\not\subset$

$$G^*_{E1} = \frac{1}{1 + \frac{z-1}{zT_s}T} = \frac{zT_s}{zT_s + zT - T} = \frac{z\,\frac{T_s}{T_s+T}}{z - \underbrace{\frac{T}{T_s+T}}_{p}}$$

$T_s \to 0^+ \quad p \to 1^-$

$T_s \to \infty \quad p \to 0^+$

Tustin $\to$ esercizio

$T_s \to 0^+ \quad p \to 1^-$

$T_s \to \infty \quad p \to -1^+$

$\square$

① Discretizzazione ✓

② Come passare da $R^*(z)$ alla legge di controllo a TD

<u>ES</u>

$$R^{\cancel{*}}(z) = \frac{2z^2 - 3z + 4}{z^2 - z}$$

$\# N \leq \# D$

$$e(k) \longrightarrow \boxed{R(z)} \longrightarrow u(k)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U(z)}{E(z)} = R(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{2z^2-3z+4}{z^2-z}$$

USCITA INGRESSO

tolgo i den $\quad (z^2-z)\,U(z) = (2z^2-3z+4)\,E(z)$

Distribuisco il prodotto $\quad z^2U(z)-z\,U(z) = 2z^2E(z)-3zE(z)+4E(z)$

Antitrasformo (c.i. nulle)

$$\downarrow$$

$$u(k+2)-u(k+1) = 2e(k+2)-3e(k+1)+4e(k)$$

Risolvo per uscita + recente e per comodità scalo i tempi (T1)

$$u(k) = u(k-1)+2e(k)-3e(k-1)+4e(k-2)$$

Convenzione: $x_n := x(k-n)$

Ogni T_s

```
ottieni e;
u = u_1 + 2*e - 3*e_1 + 4*e_2;
e_2 = e_1;
e_1 = e;
u_1 = u;
applica u;
```

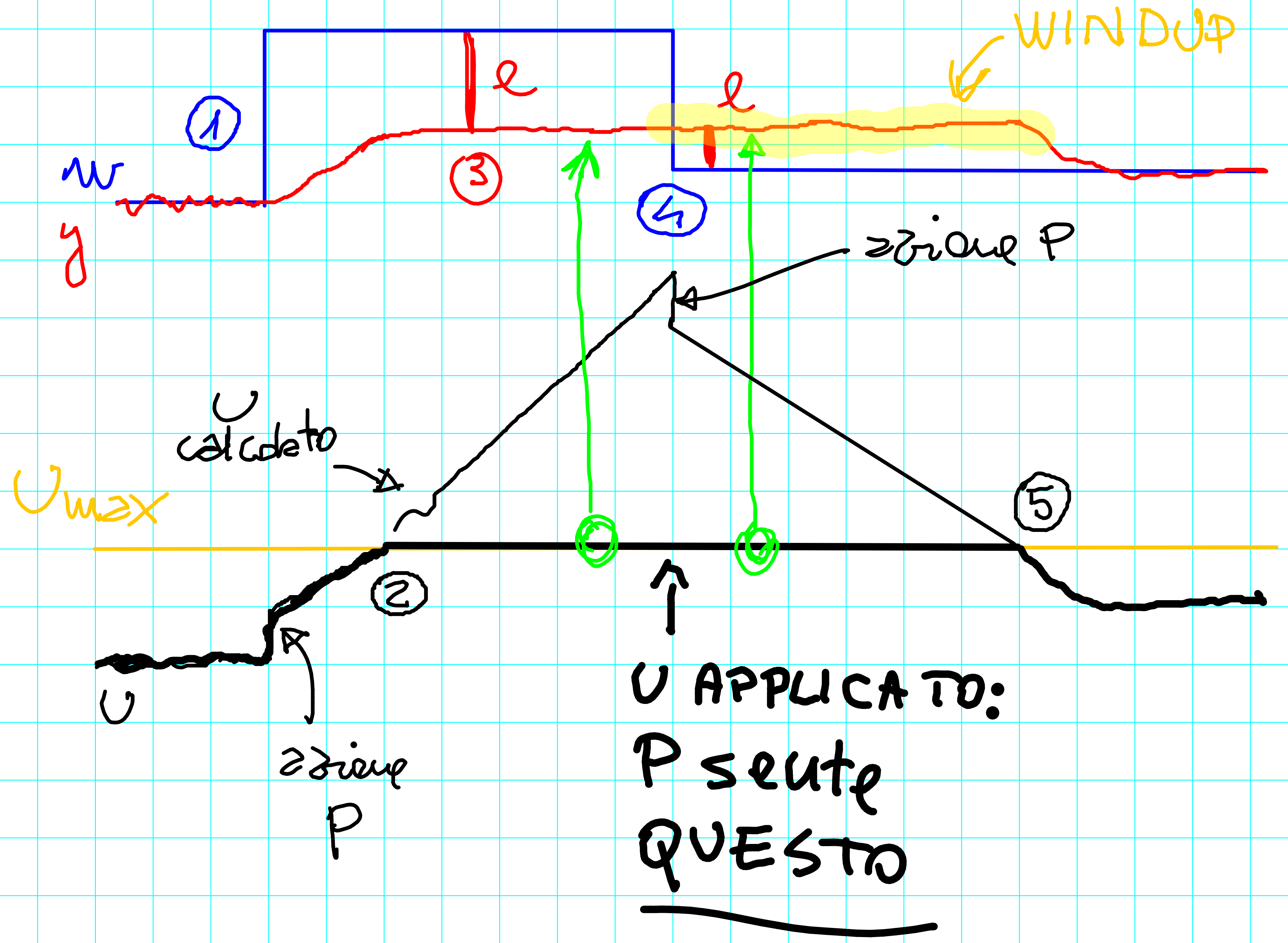
4 passi algoritmo di controllo

Per realizzare un reg. industriale occorre considerare aspetti NON rappresentabili col suo modello LTI $R^*(z)$ e in particolare di

1) limiti di saturazione del segnale di controllo $\Rightarrow$ WINDUP NON LIN

2) necessità di mettere il loop di controllo in modalità manuale (u deciso da operatore) $\Rightarrow$ TRACKING NON LTI

WINDUP e ANTIWINDUP – per exemplum (regolatore PI, processo AS)



① $w \to$ valore non ottenibile con l'attuazione disponibile

② u "SATURA"

③ $e \simeq$ costante

$\Rightarrow u_{calcolato} \simeq$ retta per l'azione I

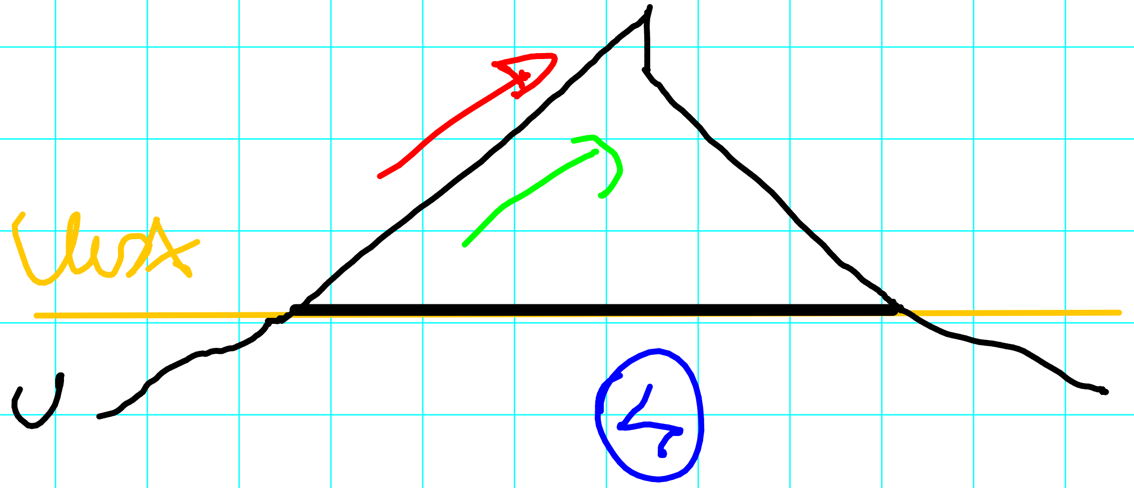
④ $w \to$ valore ottenibile (anche cambia segno)

⑤ u rientra nei limiti

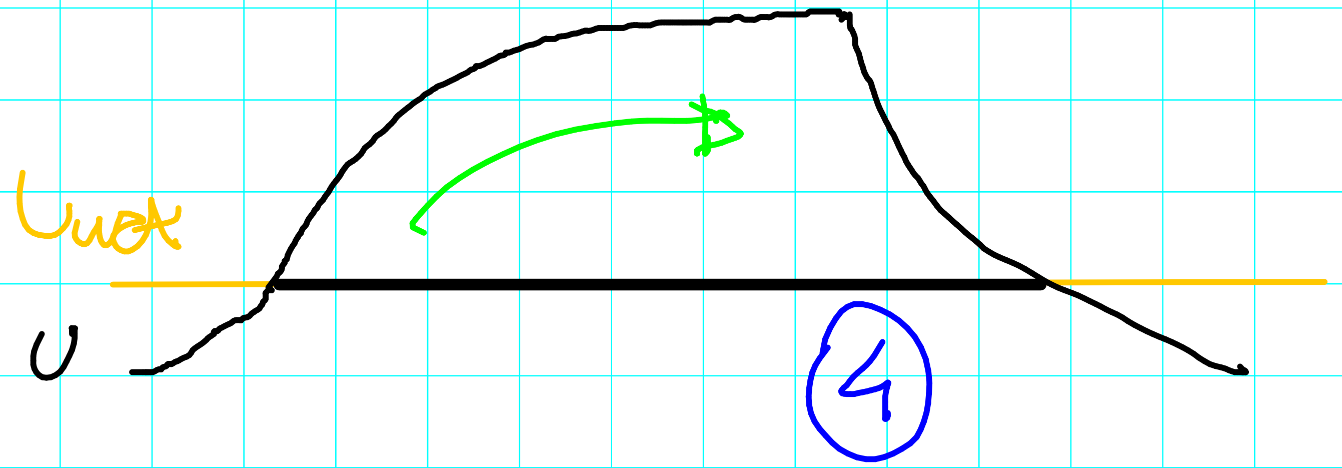
$\Rightarrow y$ reagisce

OSS Non occorre che R contenga azione I,
basta che sia dinamico:

WINDUP CON AZIONE I



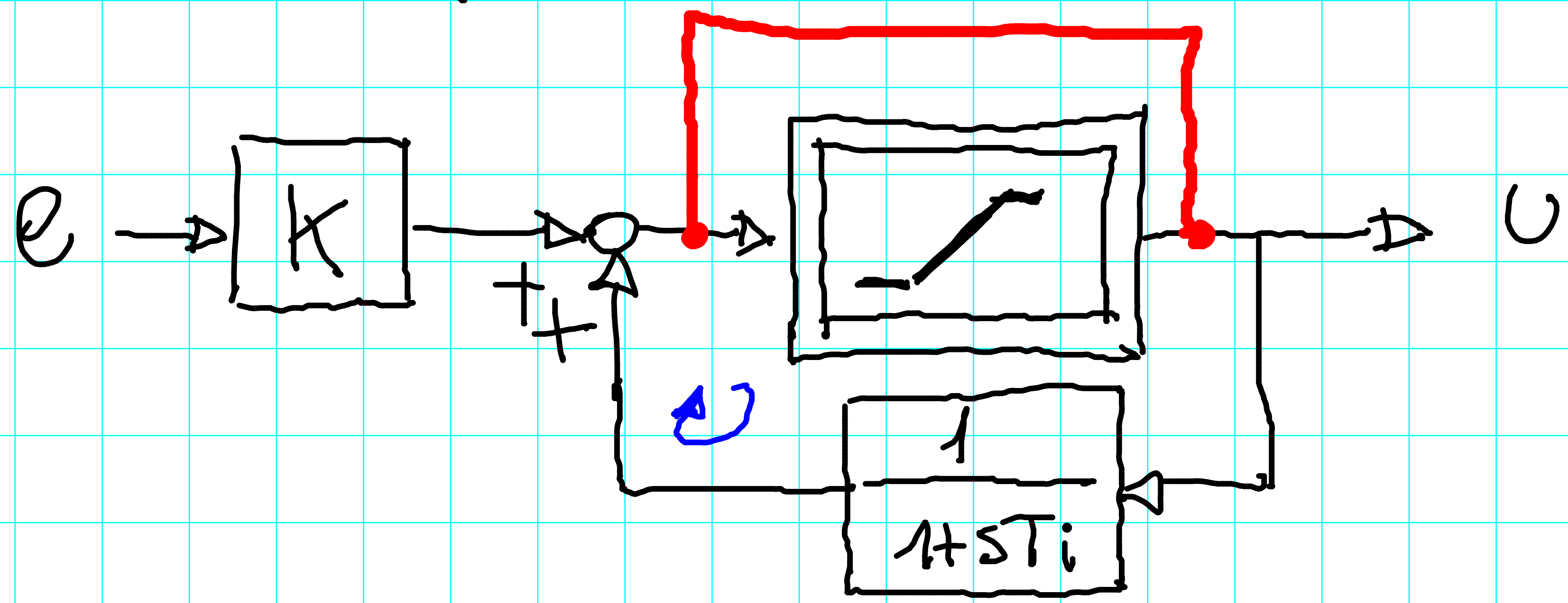
WINDUP SENZA AZIONE I



Soluzioni (Antiwindup)

k

1 PI a TC

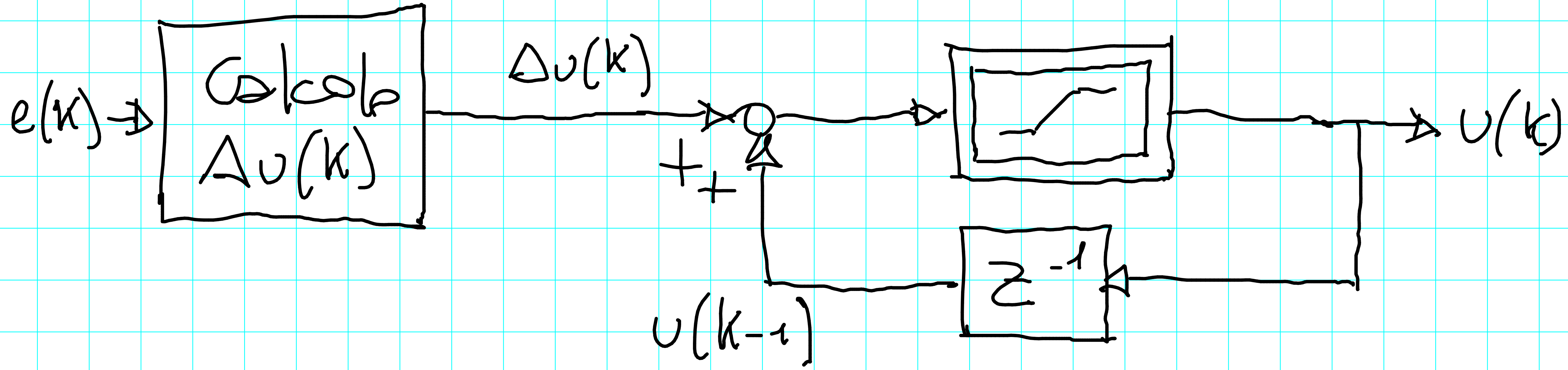


Se U non satura ——— $\Rightarrow \frac{U}{E} = K \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_i}} = K \frac{1+sT_i}{\cancel{1}+sT_i-\cancel{1}} = K \frac{1+sT_i}{sT_i}$ PI

Se U satura l'anello si apre $\Rightarrow \nexists$ integratore $\Rightarrow$ NO WINDUP

(2) Generico controllore a TD

Pongo $\Delta u(k) := u(k) - u(k-1)$



calcolo Δu e lo sommo al valore prec. di u

"Forma incrementale"