

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

26 marzo 2020

LEZIONE 1 9/03/2020

[link](#) clicca qui

## 1 SLIDE: Introduzione al corso

### 1.1 Informazioni generale

[0-10]

Prof. Alberto Leva

Il materiale didattico è distribuito su Beep e sulla pagina del corso.

Le slide e il materiale del corso non è sufficiente, bisogna prendere appunti e studiare dai testi.

Non ci sono prove in itinere.

### 1.2 Concetti preliminari

[11]

[12]

[13]

[14]

[15]

[16]

[17]

[18] Laboratorio: due transistor (marroni) non in contatto diretto, ma legati da una barretta di rame (azzurra), ci sono tre sensori di temperatura (blu), due sui transistor e uno sulla barretta (non si vede), c'è anche una ventola che può essere azionata o meno. Lo scopo è controllare la temperatura della barretta agendo su uno dei due transistor, mentre l'altro ha lo scopo di rappresentare un disturbo.

[19]

[20]

[21]

[22]

### 1.3 Prerequisiti, motivazione e collocamento del corso

[23]

[24]

[25]

[26]

[27] Struttura del corso. Nozioni base da sapere: derivate, integrali, invertire un matrice, autovalori e autovettori.

### 1.4 Relazione fra automatica e informatica

[28]

[29]

[30]

[31]

[32]

[33]

[34]

[35]

## 2 Il problema del controllo

[appunti del prof disponibili su Beep]

### 2.1 Concetti fondamentali

[immagine dagli appunti del prof]

$S$ : sistema da controllare.

$U$ : variabili di controllo o in generale variabili di ingresso. Da notare è che per esempio anche una pompa che possiamo comandare e che tira fuori acqua dal nostro sistema è una variabile di ingresso perchè la controlliamo, nonostante la massa fisica dell'acqua esca.  $y$ : variabili d'uscita.

$w$ : andamento desiderato di  $y$  o segnale di riferimento o set point.

$d$ : disturbi.

L'obiettivo è che  $y$  sia il più possibile uguale a  $w$  nonostante  $d$  e nonostante una conoscenza potenzialmente imperfetta di  $S$ .

### 2.2 Strategie di controllo

#### 2.2.1 Controllo in anello aperto (AA)

[immagine dagli appunti del prof]

$C$ : controllore.

Il controllore decide l'andamento di  $U$  sulla base di  $w$ . Il controllore non sa cosa succede in  $y$  e non conosce  $d$ .

Questo approccio funziona se il legame  $U \rightarrow y$  è esattamente noto e non ci sono disturbi  $d$ .

#### 2.2.2 Controllo in anello aperto (AA) con compensazione del disturbo misurabile

[immagine dagli appunti del prof]

$M_d$ : misuratore del disturbo.

$d_m$ : misura di  $d$ .

Il controllore in questo caso non vede  $y$ , ma vede  $d$ , o meglio  $d_m$ .

Questo approccio funziona se il legame  $(U, d) \rightarrow y$  è esattamente noto e se  $d_m = d$ , cioè se la misura del disturbo è corretta.

#### 2.2.3 Controllo in anello chiuso (AC) o in retroazione o Feedback

[immagine dagli appunti del prof]

$M_y$ : misuratore di  $y$ .

$y_m$ : misura di  $y$ .

Questo sistema può contrastare i disturbi ed errori di modello anche senza conoscerli, il controllore ne vede gli effetti tramite  $y_m$ .

Naturalmente occorre sempre che  $y_m = y$ , se la misurazione è sbagliata non si può fare nulla. Non lavoriamo con le grandezze vere e proprie, ma con le loro misurazioni.

#### 2.2.4 Controllo in anello chiuso (AC) con compensazione del disturbo

[immagine dagli appunti del prof]

Questo approccio è come il caso precedente ma più pronto nel reagire a  $d$ . Nel caso precedente in seguito a un disturbo si reagisce alle sue conseguenze, in questo caso si reagisce in maniera preventiva ai disturbi.

N.B. la precisione di  $M_d$  conta meno di quella di  $M_y$ .

#### 2.2.5 Esempio

[immagine dagli appunti del prof]

Abbiamo una guida su cui scorre una massa  $M$  attaccata con una molla di costante elastica  $k$ . La massa viene spinta da una forza  $F = U$  (è l'ingresso, lo imponiamo al sistema). La  $y$  (uscita) del sistema è la posizione della massa sulla guida.

$$F_{molla} = -ky$$

$$F_{attrito} = -h \frac{d}{dt} y = -h\dot{y}$$



## 3 Sistemi dinamici (SD)

### 3.1 Introduzione

[immagine dagli appunti del prof]

Premettendo che per questa trattazione la presenza del disturbo non è influente, ci poniamo la seguente domanda: se conosco  $u(t)$  sull'intervallo  $[t_0, t]$ , questo mi basta per conoscere  $y[t_0, t]$ , cioè l'andamento del segnale di  $y$  nell'intervallo  $[t_0, t]$ ?

Se la risposta a questa domanda è sì, significa che siamo in presenza di un sistema dinamico, se la risposta è no, il sistema non è dinamico.

Un sistema dinamico è un sistema in cui la conoscenza degli ingressi su un intervallo di tempo non è sufficiente per determinare l'andamento delle uscite sullo stesso intervallo di tempo.

### 3.2 Esempi

**es. sistema non dinamico:**

[immagine dagli appunti del prof]

La tensione  $u(t)$  è l'ingresso, la corrente sulla resistenza  $R$  è l'uscita  $y(t)$ . La legge che governa questo circuito è  $y(t) = \frac{1}{R}u(t)$ , quindi noto  $U(t)$  conosco  $y(t)$ . Siamo in presenza di un sistema non dinamico.

**es. sistema dinamico:**

[immagine dagli appunti del prof]

La tensione  $u(t)$  è l'ingresso, la corrente sulla capacità  $C$  è l'uscita  $y(t)$ . Per conoscere  $y[t_0, t]$  mi occorrono  $u[t_0, t]$  e  $y(t_0)$ , notiamo che ci serve un solo numero (l'equazione differenziale che governa questo sistema è del primo ordine, quindi necessita di una sola costante arbitraria). Siamo in presenza di un sistema dinamico.

**es. sistema dinamico:**

[immagine dagli appunti del prof]

E' lo stesso esempio visto alla lezione precedente. Per conoscere  $y[t_0, t]$  mi occorrono  $u[t_0, t]$  e la posizione e la velocità iniziali, notiamo che ci servono due numeri (l'equazione differenziale che governa questo sistema è del secondo ordine, quindi necessita di due costanti arbitrarie). Siamo in presenza di un sistema dinamico.

**es. sistema dinamico:**

Prendiamo come esempio un tram che fa delle fermate numerate da  $0, \dots, N$ . Abbiamo un indice  $k$  che indica la fermata corrente, definiamo con  $u(k)$  la differenza fra il numero di passeggeri saliti e il numero di passeggeri scesi alla fermata  $k$  e con  $y(k)$  il numero di passeggeri a bordo quando il tram lascia la fermata  $k$ . Siamo in presenza di un sistema dinamico, perchè per conoscere  $y[k_0, k]$  mi occorrono  $u[k_0, k]$  e  $y(k_0)$ , notiamo che ci serve un solo numero.

**es. sistema dinamico:**

[immagine dagli appunti del prof]

Supponiamo di avere un nastro trasportatore, sopra la quale c'è una tamoggia che fa cadere del granulato. Definiamo come  $u(t)$  la portata in ingresso in  $[kg/s]$ . Il granulato viene trasportato dal nastro finchè non cade e definiamo come  $y(t)$  questa portata in uscita. Diciamo che il tempo di transito sul nastro trasportatore  $\tau$  è costante.

Per conoscere  $y[t_0, t]$  mi occorrerà analizzare la portata  $u[t_0 - \tau, t - \tau]$  (notare i  $\tau$ ) e... in questo caso notiamo che ci servono informazioni su un intervallo di tempo diverso da quello desiderato ( $[t_0, t]$ ). Per proseguire nell'esempio in maniera più semplice non utilizziamo  $u[t_0 - \tau, t - \tau]$ , ma utilizziamo un approccio del tutto analogo: per conoscere  $y[t_0, t]$  mi occorrono  $u[t_0, t]$  e  $y[t_0 - \tau, t_0]$ , che rappresenta cosa c'era sul nastro. Comunque notiamo che, senza fissarci in maniera troppo pignola su questo esempio, diversamente dagli esempi precedenti, la condizione iniziale del sistema sono infiniti numeri, che è ciò che succede quando un sistema è ritardato.

Siamo in presenza di un sistema dinamico.

Quindi un sistema dinamico per conoscere l'andamento dell'uscita ha bisogno di conoscere l'andamento dell'ingresso e il valore iniziale di qualcos'altro, che solitamente è un numero finito di numeri, ma può anche essere un numero infinito se si è in presenza di un ritardo.

**es.** caso particolare:

Il sistema è costituito da un pulsante e una lampadina e il suo funzionamento segue il seguente meccanismo: quando si rilascia il pulsante la lampada cambia stato (si accende se era spenta e viceversa). Per conoscere l'andamento dell'accensione  $y$  nell'intervallo  $[t_0, t]$  occorre conoscere l'ingresso (istanti di rilascio entro  $[t_0, t]$ ) e lo stato iniziale della lampada, che non rappresenta un numero, ma una variabile booleana. Non sarebbe sbagliato dire che lo stato iniziale della lampada è un numero, ma lo indichiamo come variabile booleana, per mostrare in maniera marcata che non è una variabile di cui si può fare una derivata temporale, l'intero sistema non è governato da un'equazione differenziale.

**oss.** Se mi interessa soltanto lo stato della lampada all'istante  $t$ , l'informazione che mi occorre è lo stato della lampada a  $t_0$  e se il numero di volte in cui il pulsante è stato rilasciato è pari o dispari.

Tutti questi esempi mostrano i vari sistemi che esistono, noi ci specializzeremo in due classi di sistemi dinamici.

### 3.3 Sistema dinamico (SD) a tempo continuo (TC)

Le quantità di cui occorre il valore iniziale per conoscere l'uscita, noto l'ingresso, si dicono **variabili di stato** e si indicano tipicamente con  $x$ .

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u[t_0, t] \end{array} \right\} \rightarrow x(t), y(t) \text{ su } [t_0, t] \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo corso consideriamo (quasi) sempre SD con solo un ingresso e solo un'uscita, i quali si dicono **SISO** (Single Input, Single Output), quindi non lavoriamo con vettori, ma con numeri scalari.

Nel caso a TC abbiamo

- $t \in \mathbb{R}$  (scalare)
- $u, y \in \mathbb{R}$  (scalari)
- $x \in \mathbb{R}^n$  (non per forza uno scalare, può essere un vettore) (come esempio di caso vettoriale si può usare il terzo visto nella sezione precedente, che aveva bisogno di due variabili di stato: posizione e velocità)

dove con  $n$  si intende il numero di variabili di stato, (quasi) sempre finito, che prende il nome di **ordine**.

**oss.** Un SD è definito su un campo, per noi in  $\mathbb{R}$ .

#### 3.3.1 Espressione del sistema

Il valore assunto dalla prima variabile di stato  $x_1(t)$  all'istante  $t$  è una funzione  $\phi_1(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t)$ , quindi dipende da sé stessa e da tutte le altre variabili di stato, da  $u[t_0, t]$  e dal tempo  $t$  se il sistema è tempo variante. E così pure per le altre variabili di stato:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = \phi_1(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t) \\ \dots = \dots \\ x_n(t) = \phi_n(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u[t_0, t], t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{funzione di transizione dello stato}$$

Queste espressioni prendono il nome di **funzione di transizione dello stato**.

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = \gamma(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Questa espressione prende il nome di **equazione o trasformazione d'uscita**.

La differenza fra  $\phi$  e  $\gamma$  è che  $\gamma$  è una semplice funzione a cui noi diamo dei parametri e ci viene restituita la  $y$ , mentre le  $\phi$  sembrano "qualcosa di strano" che ci richiede la "storia" del sistema come parametri.



[immagine dagli appunti del prof]

Una cerniera a cui è attaccato un pendolo (un'asta lunga  $l$  (senza peso) con attaccato un peso  $m$ ).  $\theta$  è l'angolo di sfasamento del pendolo rispetto all'asse verticale. Diciamo che su questo oggetto c'è una coppia (sinonimo di momento) motrice, che chiamo  $\tau_m$ .

L'equazione che governa questo oggetto è  $j = \ddot{\theta} = \sum \text{coppie}$ , dove  $j$  è il momento di inerzia e  $\ddot{\theta}$  è l'accelerazione angolare. In questo ingresso ci sono diverse coppie:  $\tau_m$  = coppia motrice, il nostro ingresso =  $u$ ,  $\tau_f$  = coppia d'attrito =  $-h\dot{\theta}$  ( $h > 0$ ),  $\tau_g$  = coppia gravità =  $mg \cdot l \sin(\theta)$  ( $mg$  forza di gravità e  $l \sin(\theta)$  è il braccio).

Quindi  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$ .

Il momento di inerzia è  $ml^2$ .

Quindi riscrivendo l'equazione che governa il sistema otteniamo:  $ml^2 \dot{x}_2 = u - hx_2 - mg \cdot l \sin(x_1)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{ml^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Questo è un sistema dinamico, è tempo invariante, è non lineare (per via del termine  $\sin(x_1)$ ), è strettamente proprio, è del secondo ordine.

### 3.4 Sistema dinamico (SD) a tempo discreto (TD)

Per tempo discreto si intende che l'evoluzione temporale è "a passi", esiste infatti un indice temporale  $k$  intero che tiene traccia dei numeri di passi. In alcuni casi fra  $k$  e il tempo  $t$  esiste una relazione, nel senso che  $k$  rappresenta un intervallo temporale.

#### 3.4.1 Espressione del sistema

Come sarà fatto un sistema dinamico a tempo discreto?

$$\left. \begin{aligned} x_1(k) &= \phi_1(x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0), u[k_0, k], k) \\ \dots &= \dots \\ x_n(k) &= \phi_n(x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0), u[k_0, k], t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{funzione di transizione dello stato}$$

Queste espressioni prendono il nome di **funzione di transizione dello stato**.

$$y(k) = \gamma(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k), k) \left\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Queste espressioni prendono il nome di **equazione o trasformazione d'uscita**.

E' la stessa identica cosa scritta per i sistemi discreti a tempo continuo, solo che invece di  $t$  abbiamo  $k$ .

Anche qui ci domandiamo come effettivamente sostanzare queste formule a livello pratico. Nel caso di tempo continuo abbiamo usato le equazioni differenziali. Nel caso di tempo discreto invece usiamo le **equazioni (di stato) alle differenze** usando il "passo prima"  $k-1$  (capiremo perchè più avanti nel corso).

Negli SD a TD:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(k) &= f_1(x_1(k-1), x_2(k-1), \dots, x_n(k-1), u(k-1), k) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n(k) &= f_n(x_1(k-1), x_2(k-1), \dots, x_n(k-1), u(k-1), k) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{equazioni (di stato) alle differenze}$$

$$y(k) = g(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k), k) \left\} \rightarrow \text{equazione o trasformazione d'uscita}$$

Nel caso a tempo continuo usavamo l'integrazione per esprimere la dipendenza dagli stati passati, qui abbiamo un equivalente a tempo discreto, in cui lo stato attuale ( $k$ ) dipende dallo stato di prima ( $k-1$ ).

Le definizioni di **lineare**, **tempo invariante**, **strettamente proprio**, **ordine**, sono le stesse di quelle a tempo continuo (sostituendo  $t$  con  $k$ ).

Anche per TC rivediamo uno degli esempi analizzandolo con le definizioni e i concetti appena introdotti.

Vediamo la legge che governa questo sistema:

$$x(k) = x(k-1) + u(k)$$

Tutto questo mi evidenzia che il sistema è diamico, lineare tempo invariante, del primo ordine, e non strettamente proprio (compare  $u(k)$  nell'equazione d'uscita).

Questo ci fa capire che andando a lavorare sugli operatori che rendono dinamico un sistema, si può elaborare il sistema stesso in modo da far emergere la sua struttura in termini di equazioni di stato e d'uscita, che ci permette quindi di studiare il sistema in un modo non possibile se lo lasciassimo come era in origine.



### 3.5 Sistemi dinamici (SD) lineari tempo invarianti (LTI)

I sistemi dinamici lineari tempo invarianti sono sistemi in cui  $f$  e  $g$  sono lineari in  $x$  e in  $u$ , e per cui non c'è dipendenza esplicita da  $t$  (TC) o da  $k$  (TD).

Li vedremo solo SISO (single input, single output).

Cominciamo per il caso a **tempo continuo** (TC). L'unico modo per fare un sistema DC TC LTI è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) &= c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

In forma vettoriale:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1 \quad \dots \quad c_n]$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

I termini  $A, b, c, d$  prendono il nome di **descrizione di stato**.

Il caso a **tempo discreto** (TD) è analogo.

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1) \\ y(k) = cx(k) + du(k) \end{cases}$$

**oss.** Nei libri di testo si può trovare scritto così:  $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k+1) = cx(k+1) + du(k+1) \end{cases}$ , comunque la cosa importante è che nella prima equazione del sistema ci siano due valori successivi di  $k$  e nella seconda ci sia un solo valore di  $k$ .

#### 3.5.1 Equilibrio

Poniamoci una domanda: con  $u(t)$  (o  $u(k)$ )  $= \bar{u}$  costante, esiste un qualche valore  $\bar{x}$  costante tale che

$$\left. \begin{matrix} x(0) = \bar{x} \\ u(t) \text{ (o } u(k)) = \bar{u} \text{ per } t \text{ (o } k) \geq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow x(t) \text{ (o } x(k)) = \bar{x} \text{ per } t \text{ (o } k) \text{ maggiore di } 0$$

, cioè, con un ingresso costante deciso, esiste un qualche stato costante tale che, prendendo proprio questo stato come stato iniziale e applicando l'ingresso costante deciso, lo stato non cambia?

**oss.** Il concetto di equilibrio è che se io metto un sistema in uno stato di equilibrio, lui rimane lì. Da notare è che la stabilità è un'altra cosa (se muovo dallo stato d'equilibrio, il sistema ritorna lì).

Per rispondere a questa domanda dobbiamo distinguere i casi a tempo continuo e a tempo discreto:

Vediamo il caso a **tempo continuo** (TC). Se  $x$  deve rimanere costante, significa che  $\dot{x} = 0$  la derivata deve essere nulla. Quindi in generale con  $\dot{x} = f(x, u)$ , noto il valore  $\bar{u}$  segnato che applico, gli eventuali  $\bar{x}$  sono le soluzioni di  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

Vediamo il caso a **tempo discreto** (TD). Se  $x$  deve rimanere costante, significa che  $x(k+1) = x(k)$  per ogni  $k$ , cioè che  $x(k+1)$  deve rimanere costante. Quindi in tal caso dovrò risolvere per  $\bar{x}$  l'equazione  $f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$ .

Vediamo ora il caso **tempo continuo (TC) lineare tempo invariante (LTI)**. In questo caso l'equazione da risolvere diventa  $0 = A\bar{x} + b\bar{u}$ . Se  $A$  non è singolare, allora esiste uno e uno solo  $\bar{x} = -A^{-1}bu$ , altrimenti o non esiste  $\bar{x}$  o esistono infiniti  $\bar{x}$ .

Vediamo ora il caso **tempo discreto (TD) lineare tempo invariante (LTI)**. In questo caso l'equazione da risolvere diventa  $\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$ . Questa equazione si scrive anche  $(I - A)\bar{x} = b\bar{u}$  e se  $I - A$  non è singolare, cioè se  $A$  non ha autovalori in 1, allora esiste uno e uno solo  $\bar{x} = (I - A)^{-1}b\bar{u}$ , altrimenti o non esiste  $\bar{x}$  o esistono infiniti valori  $\bar{x}$ .

Se esiste un  $\bar{x}$  (cioè se un sistema ammette un certo stato di equilibrio) per certo  $u = \bar{u}$ , in generale esiste un **uscita di equilibrio**  $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$ .

**oss.** Nel caso non lineare  $g(\bar{x}, \bar{u})$  potrebbe anche non avere significato, quindi non esiste un'uscita d'equilibrio. Invece nel caso lineare (sia TC sia TD) se esiste  $\bar{x}$ , allora esiste sempre  $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$

## Esempi

**es.** Esempio della massa-molla visto la lezione scorsa:

L'equazione che governa il sistema è  $m\ddot{y} = F - ky - h\dot{y}$ , con  $u = F$ , ed eravamo arrivati a dire che

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases} \quad , \text{ con } x_1 \text{ posizione e } x_2 \text{ velocità.}$$

Riscriviamo il tutto in forma matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ponendo  $u = \bar{u}$  esiste un equilibrio  $\bar{x}$ ?

Pongo  $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$ , ovvio perchè la velocità è nulla all'equilibrio.

Pongo  $\dot{x}_2 = 0$ , quindi  $-\frac{k}{m}\bar{x}_1 - \frac{h}{m}\bar{x}_2 + \frac{1}{m}\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k}$ .

**es.** Esempio del pendolo visto la lezione scorsa:

[immagine dagli appunti del prof]

Avevamo posto  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ . Andando a rivedere le equazioni che governano questo sistema

che abbiamo scritto la volta scorsa si arriva ad avere  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{h}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u \end{cases}$  Ponendo

$u = \bar{u}$  esiste un equilibrio  $\bar{x}$ ?

Pongo  $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$ , ovvio perchè la velocità angolare è nulla all'equilibrio.

Pongo  $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) + \frac{1}{ml^2}\bar{u}$ .

Il risultato è che  $\begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin(\frac{\bar{u}}{mgl}) \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$  e quindi:

- se  $|\bar{u}| > mgl$ , non esiste equilibrio  $\bar{x}$ , e il pendolo continua a girare.
- se  $\bar{u} = 0$ , allora abbiamo due soluzioni:  $\bar{x}_1 = 0$  o  $\bar{x}_1 = \pi$  (sono due equilibri).

## 3.5.2 Movimento

Dato uno stato iniziale  $x(0)$  e dato un ingresso  $u(t)$  o  $u(k)$ , per  $t$  o  $k > 0$ :

dato uno stato iniziale  $x(0)$   
dato un ingresso  $u(t)$  (o  $u(k)$ ) per  $t$  (o  $k$ )  $\geq 0$  }  $\rightarrow$  si produce un  $x(t)$  (o  $x(k)$ ) e un  $y(t)$  (o  $y(k)$ )

Questi  $x(t)$  (o  $x(k)$ ) e un  $y(t)$  (o  $y(k)$ ) prendono il nome di **movimenti di stato e uscita**.

## Formule di Lagrange

Vediamo il caso **tempo discreto (TD) lineare tempo invariante (LTI)**. Questo sistema, come sappiamo, è fatto così:

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1) \\ y(k) = cx(k) + dx(k) \end{cases}$$

11

$$\begin{aligned}
&= TT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{TDT^{-1}TDT^{-1}}{2!} + \frac{TDT^{-1}TDT^{-1}TDT^{-1}}{3!} + \dots = \\
&= TT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{TD^2T^{-1}}{2!} + \frac{TD^3T^{-1}}{3!} + \dots =
\end{aligned}$$

[dove  $TT^{-1} = I$ . Ora raccogliendo ottengo]

$$= T(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots)T^{-1} = Te^DT^{-1}$$

ma siccome  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ , allora elevando  $D$  a un generico indice  $k$ , otteniamo  $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ .

Di conseguenza  $Te^DT^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} T^{-1}$ .

Tornando alla nostra matrice  $A$  (diagonalizzabile),

$$e^{At} = e^{T D_A T^{-1} t} =$$

[con  $D_A = T^{-1}AT$  diagonale (cioè la matrice  $A$  diagonalizzata). Porre molta **attenzione** alla posizione dei  $T$  e  $T^{-1}$ , è un errore molto gettonato all'esame.]

$$= T(I t + D_A t + \frac{(D_A t)^2}{2!} + \dots)T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

con  $\lambda_i$  autovalore  $i$ -esimo di  $A$ , gli autovalori di  $e^{\lambda_i t}$  prendono il nome di **modi del sistema**.

### Esempi

**es.** Movimento a TC:

siano

$\dot{x} = -2x$  (solo ML dello stato) e  $x(0) = 4$

Che cosa è  $x(t)$  per  $t \geq 0$ ?

Applicando la formula otteniamo:  $x(t) = e^{At}x(0) = e^{-2t}4$

**es.** Da risolvere a casa!

Siano  $\dot{x} = Ax$ , con  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ , allora come è  $x(t)$  per  $t \geq 0$ ?

[il professore lo risolve con Maxima]

LEZIONE // 2020

**link** [clicca qui](#)

4