Trigonometria

$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$
$sin(x)cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$
$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$
$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$
$sin(cos^{-1}(x)) = cos(sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
$Ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$ e $Sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$
$Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1$
$Sh(2x) = 2Sh(x)Ch(x)$
$Ch(2x) = Sh(x)^2 + Ch^2(x)$
$Sh(SettCh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$
$Ch(SettSh(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$
$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$
$sin(a - b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$
$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$

θ	$sin(\theta)$	$cos(\theta)$	$tan(\theta)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	∞
π	0	-1	0

Asintotici

$sin(x) \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$1 - cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$	$arctan(x) \sim x$
$ln(1 + x) \sim x$	$a^x - 1 \sim ln(a)x$
$tan(x) \sim x$	$Sh(x) \sim x$
$Th(x) \sim x$	$log_a(1 + x) \sim \frac{f}{ln(a)}$
$(1 + x)^c - 1 \sim cx$	$arcsin(x) \sim x$
$Ch(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$	

Derivate

$tan(x) \to \frac{1}{cos^2(x)}$
$cotan(x) \to -\frac{1}{sin^2(x)}$
$arcsin(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x) \to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x) \to \frac{1}{1+x^2}$
$arccot(x) \to -\frac{1}{1+x^2}$

Integrali (A1)

Integrali fondamentali
$\int tan(x)dx = -log|cos(x)| + c$
$\int log(x)dx = xlog(x) - x + c$
$\int arctg(x)dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1 + x^2) + c$
$\int cotg(x)dx = log|sin(x)| + c$
$\int (1 + tg^2(x))dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + c$
$\int (1 + ctg^2(x))dx = \int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cotg(x) + c$
$\int Th(x)dx = log(Ch(x)) + c$
$\int Coth(x)dx = log|Sh(x)| + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c$
Integrali notevoli $\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - sin(x)cos(x)) + c$
$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + sin(x)cos(x)) + c$
$\int tan^2(x)dx = tan(x) - x + c$
$\int cotan^2(x)dx = -x - cot(x) + c$
$\int Sh^2(x)dx = \frac{1}{4}(Sh(2x) - 2x) + c$
$\int Ch^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + Sh(x)Ch(x)) + c$
$\int Th^2(x)dx = x - Th(x) + c$
$\int Coth^2(x)dx = x - Coth(x) + c$
$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = \int 1 + tan^2(x)dx = -cotan(x) + c$
$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = \int 1 + cotan^2(x)dx = tan(x) + c$
$\int \frac{1}{tan^2(x)}dx = \int cotan^2(x)dx$
$\int \frac{1}{cotan^2(x)}dx = \int tan^2(x)dx$
$\int \frac{1}{Ch^2(x)}dx = \int (1 - Th^2(x))dx = Th(x) + c$
$\int \frac{1}{Sh^2(x)} = \int (-1Coth^2(x))dx = -Coth(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$
$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = arcSh(x) + c = log(x + \sqrt{1 + x^2}) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{\pm a^2+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 arcsin(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c$
$\int e^{ax}cos(bx)dx = Re(\int e^{a+ib}xdx)$
$\int e^{ax}sin(bx)dx = Im(\int e^{a+ib}xdx)$
$\int e^{(a+ib)x}dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a - ib)(cos(bx) + isin(bx))$
$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + c$
Integrali generalizzati
$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$
Per essere integrabile deve avere limite finito.

Serie (A1)

Serie geometrica:
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \text{irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$
Serie armonica:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to +\infty$
Serie armonica generalizzata:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge } \alpha \leq 1 \\ \text{converge } \alpha > 1 \end{cases}$
Serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \to 1$
Numero e: $\lim_{n \to inf}(1 + \frac{1}{n})^n = e$
Criterio della radice e del rapporto: se esiste $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ o $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora se $l > 1$ la serie diverge, se $l < 1$ la serie converge, se $l = 1$ nulla si può concludere.

Serie (A2)

Serie di potenza:
Criterio del rapporto e della radice: il raggio di convergenza vale $R = \lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, oppure $R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. La serie converge per $|x - x_0| < R$, non converge per $|x - x_0| > R$ e nulla si può dire per $x = \pm R$.
Integrazione: se la serie converge uniformemente allora si può far uscire la sommatoria dall'integrale e fare l'integrale solo di x^n.
Convergenza uniforme:

puntuale	uniforme ($\epsilon, \delta > 0$)
$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b)$	$[a, b - \epsilon]$
$(a, b]$	$[a + \epsilon, b]$
(a, b)	$[a + \delta, b - \epsilon]$
un punto	non ha senso
$\mathbb{R}$	$[\alpha, \beta], -\infty < \alpha < \beta < \infty$

Serie ti Taylor / MacLaurin:
def. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(R = \infty)$
$Ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(R = \infty)$
$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(R = \infty)$
$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(R = \infty)$
$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ $(R = \infty)$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(R = 1)$
$log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ $\begin{cases} R = 1 \\ x = 1 \text{ conv} \\ x = -1 \text{ div} \end{cases}$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -1^n \cdot x^{2n}$ $(R = 1)$
$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(R = 1)$
$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$ $(R = 1)$
Serie di Fourier:
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_I f(x)cos(nx)dx$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_I f(x)sin(nx)dx$
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_I f(x)dx$
dove I è un intervallo di ampiezza 2π(tipicamente da $-\pi$ a π).
Regolare a tratti: se si può scomporre in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali f è continua e derivabile, e inoltre, agli estremi, esistono finiti i limiti sia di f sia di f'. In poche parole se f è C^1 ma anche se ci sono punti angolosi o discontinuità a salto, purchè f e f' abbiano limiti finiti (no asintoti verticali o pt a tangenza verticale).
Serie di Fourier per funzioni con periodo T:
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(\frac{2\pi n}{T}x)dx$
$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(\frac{2\pi n}{T}x)dx$
Funzioni pari e dispari: se f è pari allora $b_n = 0$ e a_n è due volte l'integrale da 0 a π; se f è dispari, allora $a_n = 0$ e b_n è due volte l'integrale da 0 a π.
Criteri delle serie di Fourier:
(1) Se f è limitata e monotona a tratti su un periodo, oppure, se il quadrato di f è integrabile su un periodo, anche in senso generalizzato (vale meno di ∞).
(2) se $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$, allora $\sum F \to f$ totalmente e uniformemente.
(3) Se f non è continua, $\sum F$ non può convergere uniformemente.
(4) Se $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$ e cioè $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty \leftrightarrow \sum F \to f$ in media quadratica.
(5) Se $a_n, b_n \downarrow 0$ allora c'è convergenza puntuale su $(0, 2\pi)$.
(6) Se f è regolare a tratti, allora $\sum F \to (f(x)^+ + f(x)^-)/2$ puntualmente su $[0, 2\pi]$. **Forma esponenziale complessa**:
$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}$
$f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}$
$a_n = f_n + f_{-n}$
$b_n = i(f_n)$
$f(x)$ = Fourier = $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$

Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Proprietà:
Continua: se le componenti sono continue.
Chiusa: se gli estremi hanno lo stesso valore.
Asintoti: se i limiti all'infinito hanno un valore finito per una delle due componenti.
Semplice: Si verifica per logica, spesso si guarda se una delle componenti è strettamente monotona o per le funzioni trigonometriche si cerca di ragionare sulla loro periodicità.
Regolare: se è C^1 e $|r'(t)| \neq 0$ in tutti i punti eccetto gli estremi.
Piana: [due metodi] (1) versore binormale costante, il versore binormale si calcola normalizzando il prodotto vettoriale $r'(t)xr''(t)$; (2) sostituire le componenti di $r(t)$ in $ax + by + cz + d = 0$ e vedere se ci sono valori di a, b, c, d che soddisfano l'equazione. **Lunghezza**:
Modulo della derivata: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, allora $|r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$, per funzioni $|r'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, per forme polari $|r'(t)| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$.
Versore tangente: per le curve regolari è ben definito $T = r'(t)/|r'(t)|$
Lunghezza: se r è regolare allora è rettificabile e la sua lunghezza vale $l(\gamma) = \int_a^b |r'(t)|dt$.
Parametro arco: si calcola $s(t) = \int_{t_0}^t |r'(t)|dt$ e si esprime il risultato in funzione de s. Inoltre $ds = |r'(t)|dt$.
Integrali di prima specie:
$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(r(t))|r'(t)|dt$, se $f = 1$ ritroviamo la lunghezza.
Baricentro di una linea:
$\delta(x, y, z)$ = densità lineare.
$m = \int_\gamma \delta ds$.
$x_B = \frac{1}{m}\int_\gamma x\delta ds = \frac{1}{m}\int_a^b x(t)\delta(r(t))|r'(t)|dt$
Momento d'inerzia:
Cercare di ridefinire la curva in modo che l'asse di riferimento sia uno degli assi cartesiani.
$\delta(x, y, z)$ = densità lineare.
$d(x, y, z)$ = distnaza.
$I = \int_\gamma d^2\delta ds = \int_a^b d^2(r(t))\delta(r(t))|r'(t)|dt$.

Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Limiti:
Si semplifica la funzione, si passa in coordiante polari e si semplifica ulteriorermente e si usano maggiorazioni, solitamente si cerca di suddividere la fuznione in tante somme di funzioni più semplici. Maggiorazioni tipiche:
$|a + b| \leq |a| + |b|$
$\frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{b}$
$|cos(\theta)| \leq 1$ e $|sin(\theta)| \leq 1$
Continuità:
se $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, spesso è sufficiente dedurre dal fatto che sia costituita da funzioni elementari continue.
Derivabilità:
Derivabile se esistono finiti
$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x0,y_0)}{x - x_0}$
$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$
Gradiente: vettore delle derivate parziali $\nabla f(x, y)$.
Calcolo delle derivate in tutti i punti in cui esistono: si calcolano le derivate parziali generiche e per i punti esclusi dal dominio si calcolano le derivate secondo la definizione. **Piano tangente**:
$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
Differenziablità:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$
cioè se
$\lim_{(h,k) \to (0,0)}[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - hf_x(x_0, y_0) - kf_y(x_0, y_0)]/\sqrt{h^2 + k^2} = 0$
Differenziale: $df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, , y_0)dy$
Linearizzazione: approssimazione di f con il suo differenziale.
Proprietà: $f \in C^1 \to$differenziabile $\to$ continua, derivabile, con derivate direzionali, vale formula del gradiente.
Derivate direzionali:
Sia il versore (N.B. versore) $v_\theta = (cos(\theta), sin(\theta))$, allora $f_\theta(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0}[f(x_0 + tcos(\theta), y_0 + tsin(\theta)) - f(x_0, y_0)]/t$, per calcolarlo prima si trova la funzione $g(t) = f(x_0 + tcos(\theta), y_0 + tsin(\theta))$ e la si semplifica per $t \to 0$ (con asintotici), poi si studia $g'(0)$.
Formula del gradiente: sia il versore (N.B. versore) $v_\theta = (cos(\theta), sin(\theta))$, allora $f_\theta(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)cos(\theta) + f_y(x_0, y_0)sin(\theta)$, la formula del gradiente non vale se la generica derivata direzionale non è combinazione lineare di $cos(\theta)$, $sin(\theta)$.
$\nabla f(x_0, y_0)$ è la direzione di massima crescita, l'opposto è di minima crescita, la direzione ortogonale è di pendenza nulla.
Formula di Taylor (Peano):
Per $f \in C^2$ e $(x, y) \to (x_0, y_0)$, allora $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \binom{x - x_0}{y - y_0} + \frac{1}{2}H_f(x_0, y_0)\binom{x - x_0}{y - y_0} \cdot \binom{x - x_0}{y - y_0} + o[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$
Per esteso: $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2$
$+2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + o[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$
Posizione di superficie e piano:
Se gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ sono (1) positivi: superficie sopra piano ($det(H_f) > 0$ e $f_{xx} > 0$); (2) negativi: superficie

sotto piano ($det(H_f) > 0$ e $f_{xx} < 0$); (3) uno positivo e uno negativo: superficie e piano si intersecano ($det(H_f) < 0$); (4) autovalore nullo: nulla si può dire ($det(H_f) = 0$).
Caso in tre o più variabili: o si studiano direttamente gli autovalori o si usa Cartesio sul polinomio caratteristico (cambio di segno è radice positiva, permanenza di segno è radice negativa).
Ottimizzazione libera:
Massimi e minimi: (1) si isolano i punti non regolari (non derivabili una o due volte), (2) si trovano i punti critici guardando dove si annulla il gradiente, (3) si calcola l'hessiano per tutti i punti critici, (4) si analizzano i punti particolari studiando il segno di $f(x,y) - f(x_0,y_0)$.
Massimi e minimi per domini chiusi e limitati: per Weierstrass c'è massimo e minimo assoluti, (1) si studiano i punti come prima e si escludono quelli esterni al dominio, (2) si studia il comportamento della frontiera esprimendola come $y = g(x)$ o $x = g(y)$ e sostituendo nella funzione $f(x,y)$.
Massimi e minimi per domini illimitati: se si trova una direzione lungo la quale f tende a $\pm\infty$, allora non c'è massimo (o minimo) assoluto.
Ottimizzazione vincolata:
Due strategie:
(1) se il vincolo è esprimibile con una delle due variabili in funzione dell'altra, allora si sostituisce e si studia la funzione ottenuta;
(2) Moltiplicatori di Lagrange: si pone il vincolo nella forma $g(x,y) = 0$ e si scrive la lagrangiana $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ e si trovano i punti in cui il gradiente si annulla. Per capire i punti di massimo o minimo è sufficiente calcolare i valori della funzione di partenza per quei valori e prendere il più grande e il più piccolo. Si può usare Weierstrass se il vincolo è chiuso e limitato (allora esiste per forma un massimo e un minimo). Inoltre se il gradiente della funzione si annulla siamo in presenza di un vincolo libero e lo aggiungiamo ai candidati. Se invece il gradiente del vincolo si annulla il metodo di Lagrange non funziona e dovremo valutare a parte questi punti.

Iintegrali doppi e tripli

Coordinate polari:
$x = \rho cos(\theta)$, $y = \rho sin(\theta)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $dxdy \to \rho \cdot d\rho d\theta$
Coordinate cilindriche:
$x = \rho cos(\theta)$, $y = \rho sin(\theta)$, $z = z$, $dxdydz \to \rho \cdot d\rho d\theta dz$
Coordinate sferiche:
$x = \rho sin(\phi)cos(\theta)$, $y = \rho sin(\phi)sin(\theta)$, $z = \rho cos(\phi)$ con $\rho \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,2\pi]$ e ϕ parte dall'asse positivo delle z e scende verso l'asse positivo delle x, $dxdydz \to \rho^2 sin(\phi)d\phi d\rho d\theta$. Altrimenti, se si prende $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ diventa $x = \rho cos(\phi)cos(\theta)$, $y = \rho cos(\phi)sin(\theta)$, $z = \rho sin(\phi)$, $dxdydz \to \rho^2 cos(\phi)d\phi d\rho d\theta$
Simmetrie:
f dispari rispetto a x (se $f(-x,y) = -f(x,y)$) e superficie simmetrica rispetto a y, allora vale 0.
f pari rispetto a x (se $f(-x,y) = f(x,y)$) e superficie simmetrica rispetto a y, allora due volte metà integrale
f dispari rispetto a y (se $f(x,-y) = -f(x,y)$) e superficie simmetrica rispetto a x, allora vale 0.
f pari rispetto a y (se $f(x,-y) = f(x,y)$) e superficie simmetrica rispetto a x, allora due volte metà integrale.
Calcolo di volumi:
Sia T dominio di due dimensioni (una superficie) e $f(x,y) \geq 0$ (ricordarsi di separare gli integrali se si cambia di segno), l'integrale doppio di f esteso a T rappresenta il volume fra il piano xy e la superficie della funzione f.
Se si pone $f = 1$ si ritrova l'are a di T.
Dato un dominio T in tre dimensioni (un solido), il suo volume si può calcolare come l'integrale triplo di $f = 1$ su T.
Baricentro di una superficie:
$\delta(x,y)$ =densità superficiale.
T = regione piana.
$m = \int\int_T \delta(x,y)dxdy$
$x_B = \frac{1}{M}\int\int_T x\delta(x,y)dxdy$
Momento d'inerzia di una superficie:
rispetto a a un asse r perpendicolare al piano passante per il punto (x_0,y_0) e detta $d(x,y)$ la distanza di ogni punto dall'asse
$I = \int\int_T d^2(x,y)\delta(x,y)dxdy = \int\int_T((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)\delta(x,y)dxdy$
Baricentro di un volume:
$\delta(x,y,z)$ = densità di massa.
T = solido.
$m = \int\int\int_T \delta(x,y,z)dxdydz$.
$x_B = \frac{1}{m}\int\int\int_T x\delta(x,y,z)dxdydz$
Momento d'inerzia di un volume:
rispetto all'asse z, detta $d(x,y,z)$ la distsanza di un generico punto dall'asse z
$I = \int\int\int_T d^2(x,y,z)\delta(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_T(x^2+y^2)\delta(x,y,z)dxdydz$

Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Linee di campo:
Si ottengono integrando $\int\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \int\frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \int\frac{dz}{F_3(x,y,z)}$
Conservativo:
se o (1) il lavoro è esprimibile come differenza di potenziali, o (2) il lavoro di due curve con estremi coincidenti è uguale, o (3) il lavoro lungo una linea chiusa è nullo.
Semplicemente connesso:
In $\mathbb{R}^2$ non ci devono essere buchi, in $\mathbb{R}^3$ non ci devono essere buchi della fomra simile a quella di un segmento.
Verifica della conservatività:
si controlla se è irrotazionale:
(1) se non lo è, il campo non è conservativo, e per calcolarne il lavoro dobbiamo per forza usare la definizione.
(2) se lo è, dobbiamo vedere se il dominio dove è definito è semplicemente connesso:
(2.1) se lo è, il campo è conservativo (vedi metodi sotto per il calcolo del lavoro).
(2.2) se non lo è, non possiamo concludere nulla a priori e quindi siamo costretti a provare uno dei seguenti metodi:
(2.2.1) si cerca un potenziale e se esiste ed è differenziabile (ricordiamo che è condizione sufficiente che il potenziale sia C^1 per essere differenziabile) in tutto il dominio di F, allora F è conservativo.
(2.2.2)Si verifica se il lavoro di F lungo un sostegno di una qualunque linea chiusa è nullo.
Calcolo di un potenziale:
$U(x,y,z) = \int F_1(x,y,z)dx + \phi(y,z)$
$U(x,y,z) = \int F_2(x,y,z)dy + \phi(x,z)$
$U(x,y,z) = \int F_3(x,y,z)dz + \phi(x,y)$
oppure secondo la definizione:
Sia $r(t) = (x(t),y(t))$ una curva, il lavoro lungo il suo sostegno γ di un campo $F(X(x,y),Y(x,y))$ è
$L_\gamma(F) = \int_\gamma F\cdot dr = \int_I F(r(t))\cdot r'(t)dt$
che si calcola come $L_{AB} = \int_a^b[(x(t),y(t))x'(t) + Y(x(t),y(t))y'(t)]dt$.
N.B. se il dominio non è un insieme semplicemente connesso, bisogna suddividerlo in tanti intervalli semplicemente connessi e specificare che il potenziale vale per ognno di questi separatamente.
Flusso:
(1) un campo vettoriale F, (2) una superficie $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ espressa in forma parametrica $r(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ con il dominio S in cui u e v spaziano, (3) vettore normale alla superficie $n = \frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}$.
$\Phi = \int\int_\Sigma F\cdot n\, d\Sigma = \int\int_S F(r(u,v))\cdot\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}dudv$
Se la superficie è il grafico di una funzione $z = f(x,y)$, allora $\Phi = \int\int_S F(x,y,f(x,y))\cdot\left[-\frac{\delta f}{\delta x}, -\frac{\delta f}{\delta y}, 1\right]dxdy$.
Teorema della divergenza:
Se la superficie Σ è chiusa, per calcolare il flusso di F uscente da Σ, possiamo indicare con V il solido descritto da Σ e $\Phi = \int\int\int_V div(F)dxdydz$.

Equazioni differenziali

Esistenza: Se f è continua esiste una soluzione del problema $y' = f(ty)$, $y(t_0) = y_0$.
Unicità: Se f e f' sono continua, allora esiste un'unica soluzione del problema $y' = f(ty)$, $y(t_0) = y_0$.
Variabili separabili:
$y' = f(t)g(y)$
Se g è continua in un intorno di y_0, allora il problema di Cauchy ammetta una soluzione.
Se g è C^1 in un intorno di y_0, allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.
Se esiste un valore di y^* tale che $g(y^*) = 0$ e se il problema di Cauchy è $y(t_0) = y^*$, allora $y(t) = y^*$ è una soluzione.
Se il problema di Cauchy associato è $y(t_0) = y_0$ con $g(y_0) \neq 0$, allora $y' = \frac{dy}{dt}$ e $\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt$ e esprimendo y in funzione di tutto il resto troviamo la soluzione.
Derivata di un prodotto:
$y' = a(t)y + b(t)$
Sia $A(t) = \int a(t)dt$, allora $e^{-A(t)}y'(t) - e^{-A(t)}a(t)y(t) = e^{-A(t)}b(t)$ e $e^{-A(t)}y(t) = \int e^{-A(t)}b(t) + C$, da cui ricaviamo la soluzione.
Sovrapposizione e variazione delle costanti arbitrarie:
$y' = a(t)y + b(t)$
Equazione omogenea: si pone $b(t) = 0$ e $y' = a(t)y$, notiamo che $y = 0$ è soluzione, per $y \neq 0$ è una eq a variabili separabili (la cui soluzione è $y = Ce^{A(t)}$).
Integrale particolare: Ora si usa il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie. Partendo da $y = Ce^{A(t)}$ considerando $C = C(t)$ una funzione cerchiamo di soddisfare l'equazione completa $C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = C(t)a(t)e^{A(t)} + b(t)$, da cui $C(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt$, e lo sotituiamo in $y = C(t)e^{A(t)}$. Il risultato finale è $y(t) = e^{A(t)}\int e^{-A(t)}b(t)dt + C$
Insieme di definizione per eq lineari del prim'ordine:
$y' = a(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$
Se $a(t)$ e $b(t)$ sono continua in un intervallo contenente t_0 allora esiste una sola soluzione.
Una volta risolto il problema di Cauchy (dopo aver determinato il valore di C) la soluzione vale nell'intervallo aperto più grande contenente t_0 e in cui la soluzione $y(t)$ è definita, continua e derivabile e in cui l'equazione di partenza $y' = a(t)y + b(t)$ è definita e continua.
Equazioni omogenee:
$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$
se f è C^1 in un intorno $\frac{y_0}{t_0}$, allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ ammette una e una sola soluzione.
Equazione di Bernoulli:
$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$
Equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti:
$y''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$
Equazione omogenea: $y'' + by' + cy = 0$, si sostituisce $y(t) = e^{\lambda t}$ e si risolve $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ e (1) due radici $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$, (2) due radici complesse $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $y_1(t) = e^{\alpha t}cos(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}sin(\beta t)$, (3) due radici uguali $y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = te^{\lambda t}$.
L'integrale generale è $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.
Integrale particolare: Metodo di somiglianza:
(1) se f è un polinomio di grado n, si cerca una soluzione polinomiale di grado n se $c \neq 0$, di grado n moltiplicato per t se $c = 0$ e $b \neq 0$, di grado n se $c = b = 0$.
(2) se $f = k\cdot e^{\lambda t}$ è esponenziale, si cerca soluzione esponenziale $y(t) = ce^{\lambda t}$ se λ non risolve l'equazione caratteristica, $y(t) = cte^{\lambda t}$ altrimenti.
(3) se $f = Ae^{\alpha t}cos(\beta t) + Be^{\alpha t}sin(\beta t)$ è esponenziale complessa, cerchiamo $y(t) = c_1e^{\alpha t}cos(\beta t) + c_2e^{\alpha t}sin(\beta t)$ se $\alpha \pm i\beta$ non risolvono l'eq caratteristica, altrimenti $y(t) = c_1te^{\alpha t}cos(\beta t) + c_2te^{\alpha t}sin(\beta t)$.
Oppure, metodo della variazione delle costanti arbitrarie:
Una volta trovato l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, facciamo variare le costanti c_1 e c_2 come fossero funzioni. Se c_1 e c_2 soddisfano le condizioni: $c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0$ e $c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = f(t)$ allora ci basta sostiuirle e abbiamo trovato la soluzione. Ricaviamo che $c_1' = \frac{-fy_2}{y_1y_2' - y_2y_1'}$ e $c_2' = \frac{fy_1}{y_1y_2' - y_2y_1'}$ e integrando si ricavano i valori cercati.
Equazione di Eulero:
$t^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = f(t)$

Sistemi differenziali lineari

Corrispondenza equazioni lineari del second'ordine e sistemi lineari:
Equazioni diff lin di ordine n possono essere ricondotte a sistemi dif lin della forma $y' = A(t)y + b(t)$.
$ay'' + by' + cy = f(t) \to y' = Ay + f(t)$, poniamo $y_1 = y_2$ e $ay_2' + by_2 + cy_1 = f(t)$, che in forma normale diventano $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{c}{a}y_1 - \frac{b}{a}y_2 + \frac{1}{a}f(t)\end{cases}$ e cioè $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix}$,$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}f(t)\end{bmatrix}$.
Sistemi lineari omogenei:
Se $b(t) = 0$ abbiamo $y' = A(t)y$, se A è conitnua in un intorno di t_0, allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Per un sistema di ordine n, cerchiamo n soluzioni linearmente indipendenti $\phi_1, \ldots, \phi_n$, ovvero se esiste un t per cui il determinante Wronskiano ($det(W(t)) = det(\phi_1(t)|\ldots|\phi_n)$) è diverso da 0.
Sistemi omogenei a coefficienti costanti:
se $A(t)$ è costante abbiamo $y' = Ay$.
Se $n = 1$, $y(t) = Ce^{At}$.
Se $n = 2$, $y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$ e $y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$, che si riconduce a un'equazione di second'ordine derivando la prima equazione e sostituendo la seconda si ottiene $y_1'' = (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y_1$. Cerchiamo quindi soluzioni del tipo Ce^{At} (esponenziale di matrice), e le colonne di e^{At} formano un sistema fondamentale di soluzioni, e cioè il vettore Ce^{At} è soluzione.
Sistemi completi:
variazioni delle costanti arbitrarie: dato $y(t) = CW(t)$ soluzione del sistema omogeneo, cerchiamo soluzioni in cui $C = C(t)$ è una funzione, allora imponendo di risolvere l'equazione di partenza $y' = A(t)y + b(t)$ otteniamo $W'(t)C(t) + W(t)C'(t) = A(t)W(t)C(t) + b(t)$ da cui $C(t) = \int[W(t)]^{-1}b(t)dt$ (N.B. $[W(t)]^{-1}b(t)$ è un vettore e l'integrale si calcola componente per componente). Infine la soluzione si ricava sostituendo $C(t)$ trovato nella soluzione dell'omogenea $y(t) = W(t)C(t)$.
Esponenziale di matrice:
(1) calcolare autovalori di A, calcolare autovettori di A;
(2) T = matrice degli autovalori accostati, calcolare T^{-1};
(3) $T^{-1}AT = D$ = matrice con gli autovalori di A nella diagonale;
(4) $e^{At} = e^{TDT^{-1}t} = Te^{Dt}T^{-1}$, fare i conti.
Autovettori e autovalori:
Autovalori sono le soluzioni di $det(A - \lambda I)$, gli autovettori rispetto a un autovalore λ^* si calcolano come $(A - \lambda^* I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Extra

Retta per due punti:
$y = mx + q$, $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ e $q = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$
Retta tangente a una curva in un punto:
$r(t) = (x(t), y(t))$
$y = mx + q$, $m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$, q si trova sostituendo nell'equazione il valore di m, di $y(t_0)$ e di $x(t_0)$.
Oppure il vettore tangente è $r'(t)$ e quindi $r(t) = r(t_0) + t\cdot r'(t_0)$.
Circonferenza:
$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ oppure
$\begin{cases} x = x_0 + rcos(\theta) \\ y = y_0 + rsin(\theta)\end{cases}$
Pinao per tre punti:
dati $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ scriviamo:
$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = d \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = d \\ ax_3 + by_3 + cz_3 = d\end{cases}$ da cui ricaviamo i valori di a,b,c,d da sostituire.
Toro:
con raggi α e β ($\alpha > \beta$):
$e(u,v) = [(\alpha + \beta cos(u))cos(v)]\vec{i} + [(\alpha + \beta cos(u))sin(v)]\vec{j} + [\beta sin(u)]\vec{k}$ con $u,v \in [0,2\pi]$.