FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

18 aprile 2020

Indice

Parte I
Lezioni

LEZIONE 12 30/03/2020
link clicca qui

1 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)

1.1 Domanda

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ sottoposto all'ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$ con $t \geq 0$ (o equivalentemente $e^{\lambda t} sca(t)$), esiste uno stato iniziale $x(0)$ tale che $x(0)$ e $u(t)$ producono un'uscita $y(t) = Ye^{\lambda t}$, con Y un numero qualunque (non la trasformata) e $t \geq 0$?

In altri termini:
Sottoponiamo un sistema dinamico (di cui non sono note le proprietà sulla sua stabilità) a un ingresso esponenziale ($u(t) = e^{\lambda t}$, che può anche essere amplificato come $u(t) = Ue^{\lambda t}$, ovviamente il ragionamento non cambia). Detto questo sappiamo che un ingresso $x(0)$ produce un movimento libero di y fatto da modi, invece un uscita del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ produce un movimento forzato fatto da modi + un termine $Ye^{\lambda t}$ (con $t \geq 0$ e con Y un numero, non la trasformata). La domanda è se esiste uno $x(0)$ tale che questi modi si elidano e resti solo il termine $Ye^{\lambda t}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow \; u(t) = e^{\lambda t} \; \longrightarrow \; \exists \; x(0) \; \text{ tale che } \; \longrightarrow \; y(t) = Ye^{\lambda t} \; (t \geq 0) \; ?$$

1.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Rispondiamo a questa domanda:
Primo passaggio:
Se voglio che $y(t) = Ye^{\lambda t}$, allora anche $x(t)$ dovrà avere la forma $Xe^{\lambda t}$ (con X un numero, non la trasformata), perchè $y(t) = cx(t) + de^{\lambda t}$ e qualunque forma di $x(t)$ che non sia del tipo $e^{\lambda t}$ si "vedrebbe" su y.

Secondo passaggio:
Quindi $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ (di cui noi stiamo proprio cercando $x(0)$) e di conseguenza $\dot{x}(t) = \lambda x(0)e^{\lambda t}$.

Terzo passaggio:
Sostituisco $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ appena espressi nell'equazione di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\lambda x(0)e^{\lambda t} = Ax(0)e^{\lambda t} + be^{\lambda t}$$

considerando che $e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0)\cancel{e^{\lambda t}} = Ax(0)\cancel{e^{\lambda t}} + b\cancel{e^{\lambda t}}$$
$$\lambda x(0) = Ax(0) + b$$

per cui otteniamo che

$$(\lambda I - A)x(0) = b$$

1.3 Generalizzazione della risposta

Quindi **in generale** con $u(t) = Ue^{\lambda t}$ (con U un numero qualunque che semplicemente amplifica l'esponenziale), se λ non è autovalore di A, allora esiste uno e uno solo

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$$

tale che

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda I - A)^{-1}bUe^{\lambda t} \\ y(t) = cx(t) + du(t) = [c(\lambda I - A)^{-1}b + d]Ue^{\lambda t} = G(\lambda)u(t) \end{cases}$$

1.4 Riassunto e proprietà

- Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ in cui $u(t) = Ue^{\lambda t}$, dove $t \geq 0$ e λ non è autovalore di A $\implies$ con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1} bU$ si ottiene $y(t) = G(\lambda)u(t)$, con $t \geq 0$.
- Proprietà bloccante degli zeri: se $G(\lambda) = 0 \implies$ con lo stesso stato iniziale $x(0)$, l'uscita diventa $y(t) = 0$, con $t \geq 0$.
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$, l'uscita tenderà a $y(t) \to G(\lambda)u(t)$ per $t \to \infty$.

2 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)

Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ e l'ingresso $u(t) = Usin(\omega t)$ per $t \geq 0$ (o equivalentemente $u(t) = Usin(\omega t)sca(t)$), esiste un qualche stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = Ysin(\omega t + \phi)$ per $t \geq 0$?

In altri termini:
[La domanda è molto simile a quella data per la risposta esponenziale] Applicato un ingresso sinusoidale, esiste uno stato di iniziale che faccia elidere fra loro i modi del moto libero e i modi del moto forzato in modo che io veda in uscita solo una sinusoide?

Per rispondere ci basta ricordare che

$$sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il principi odi sovrapposizione degli effetti. Quindi applichiamo due volte il risultato ottenuto per la risposta esponenziale e combiniamo i risultati.

Parte II

Esercitazioni