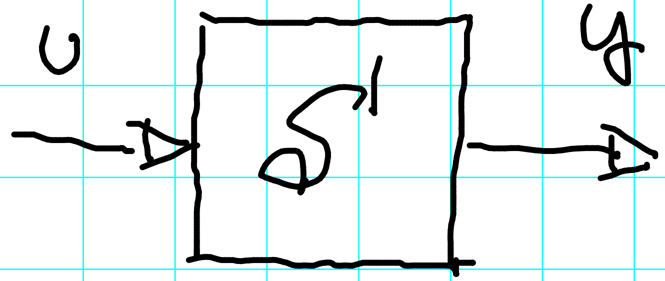
11/03/2020

SISTEMI DINAMICI



Domanda:

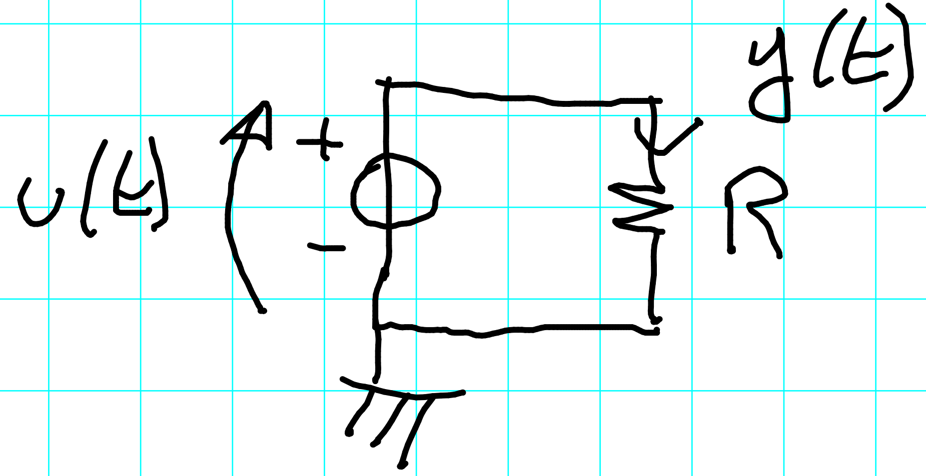
tempo

se conosco $u(t)$ sull'intervallo $[t_0, t]$, questo mi basta per conoscere $y[t_0, t]$?

Sì → Sistema NON DINAMICO

NO → Sistema DINAMICO

ES1:

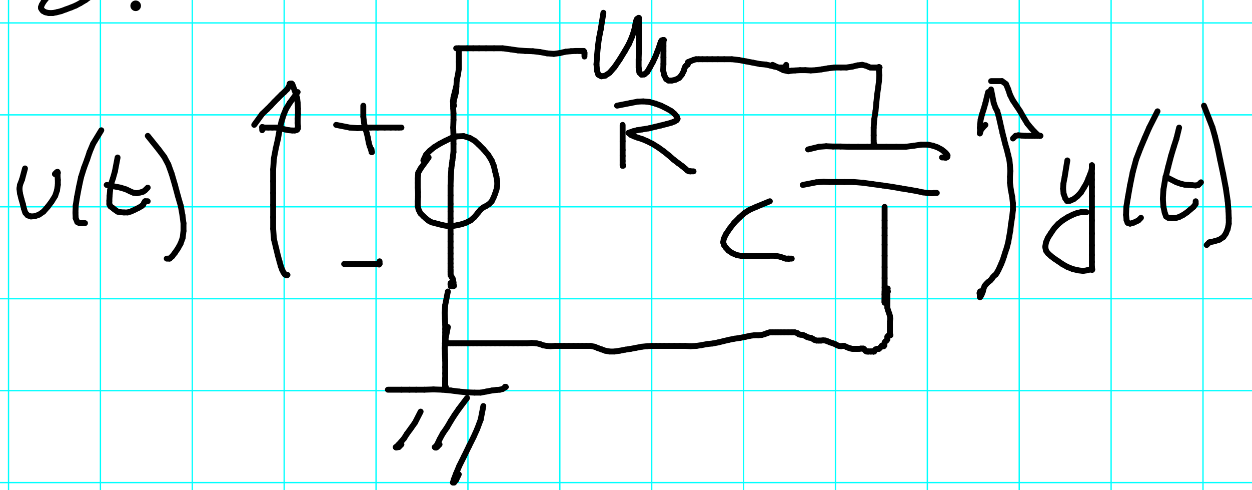


Legge di Ohm: $y(t) = \frac{1}{R} u(t)$

noto $u(t) \Rightarrow$ noto $y(t)$

$\Rightarrow$ sistema NON DINAMICO

ES2:



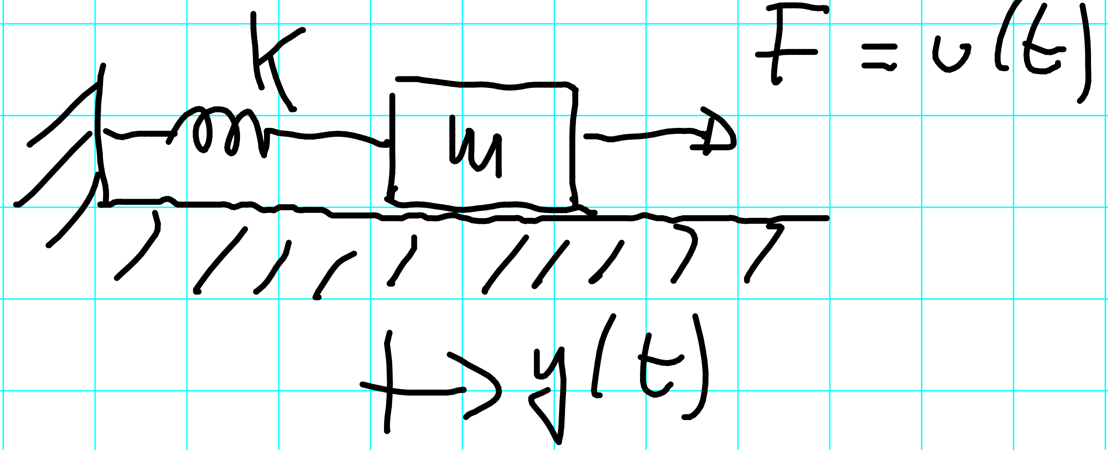
Per conoscere $y[t_0, t]$

mi occorrono $u[t_0, t]$

e $y(t_0)$ 1 numero

$\Rightarrow$ sistema DINAMICO

ES 3:

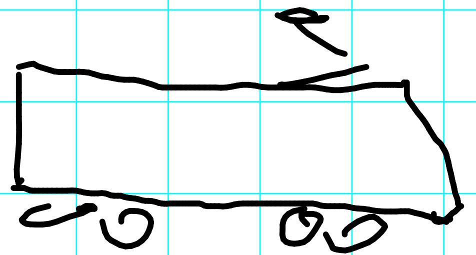


Per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrono $u[t_0, t]$ e posizione e velocità iniziali

2 numeri

$\Rightarrow$ sistema DINAMICO

ES 4:



TRAM Fermate $0 \dots N$

l'indice k conta le fermate

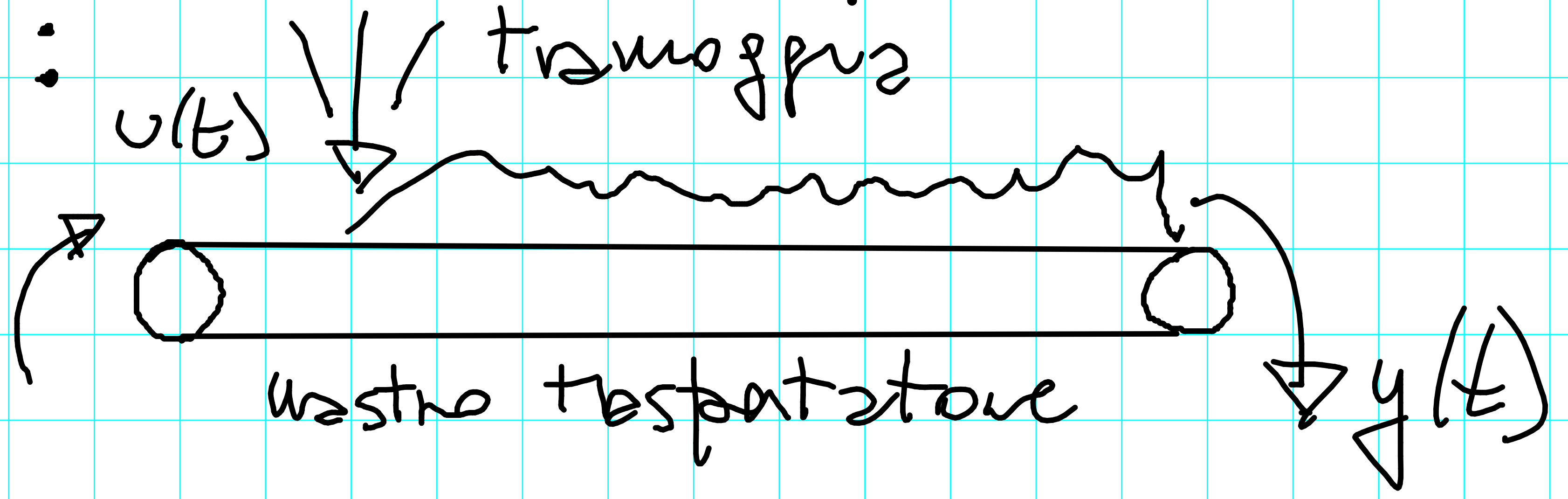
$u(k)$ = # passeggeri saliti − # passeggeri scesi alla Fermata k

$y(k)$ = # passeggeri a bordo quando si lascia la Fermata k

per conoscere $y[k_0, k]$ occorrono $u[k_0, k]$ e $y(k_0)$ $\Rightarrow$ sistema DINAMICO

1 numero

ES 5 :



$u(t)$ portata in ingresso $[kg/s]$

$y(t)$ portata in uscita

tempo di transito τ costante

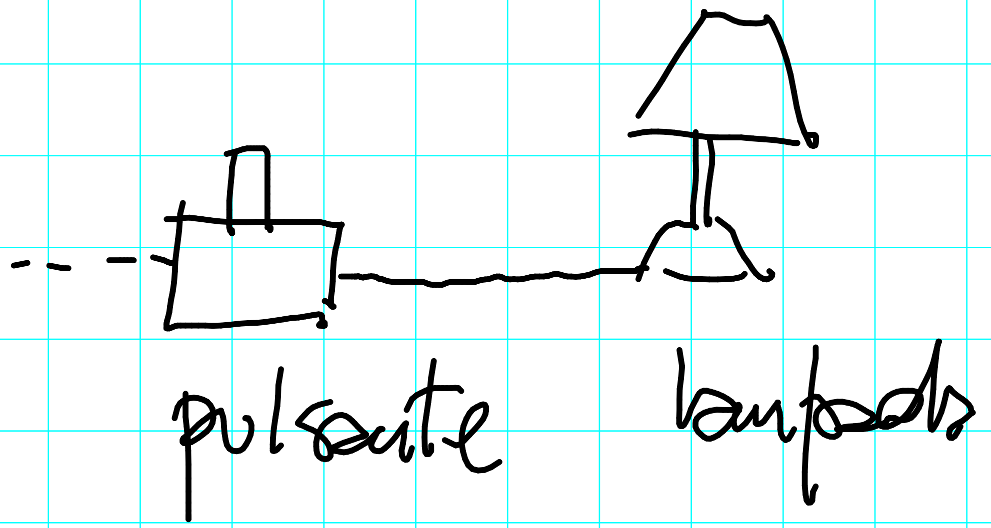
Per conoscere $y[t_0, t]$ mi occorrono

$\cancel{u[t_0-\tau, t-\tau]}$ $\qquad$ $u[t_0, t]$

cosa c'era sul nastro $\longrightarrow$ $y[t_0-\tau, t_0)$ $\quad$ ∞ numer.

$\Rightarrow$ sistema DINAMICO

Es 6:



Quando si rilascia il pulsante la lampada cambia stato (si accende se era spenta e viceversa)

Per conoscere l'andamento dell'accensione (y) nell'intervallo $[t_0, t]$ occorre conoscere l'ingresso (istanti di rilascio entro $[t_0, t]$) e lo stato iniziale della lampada

1 v. booleana

Oss: se mi interessa soltanto lo stato della lampada all'istante t

l'info che serve è

- stato lampada a t_0
- l'essere pari o dispari il # di rilasci del pulsante entro $[t_0, t)$

Ora ci specializzeremo a due classi di sistemi dinamici ma l'idea è molto più generale.

SISTEMA DINAMICO (SD) A TEMPO CONTINUO (TC)

Le quantità di cui occorre il valore iniziale per conoscere l'uscita noto l'ingresso si dicono VARIABILI DI STATO e si indicano con x

$$\left.\begin{matrix} x(t_0) \\ u[t_0,t] \end{matrix}\right\} \longrightarrow x(t),\ y(t) \text{ su } [t_0,t]$$

$t \in \mathbb{R}$

In questo corso consideriamo (quasi) sempre SD con un ingresso e un'uscita, i quali si dicono SISO (Single Input, Single Output)

Nel caso a TC $\quad t \in \mathbb{R}$

$u, y \in \mathbb{R}$ (scalari)

$x \in \mathbb{R}^n$

n è il n° di variabili di stato e si dice ORDINE del sistema

NB un SD è definito su un campo, per noi $\mathbb{R}$

Espressione del sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \varphi_1\left(x_1(t_0), x_2(t_0) \dots x_n(t_0), u[t_0, t], t\right) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \varphi_n\left(x_1(t_0), x_2(t_0) \dots x_n(t_0), u[t_0, t], t\right) \end{aligned}\right] \text{Funzione di transizione dello stato}$$

$$y(t) = g\left(x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t), u(t), t\right) \;\Big]\; \text{Equazione o trasformazione d'uscita}$$

Questo può sostanziarsi matematicamente in diversi modi. Vediamo quello principale e il solo di nostro interesse

SD a TC: $x(t)$ è la soluzione di un'eq. differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t), u(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t), u(t), t) \end{aligned}$$

] Equazione di stato

$$y(t) = g(x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t), u(t), t)$$

Con espressione vettoriale (SD a TC SISO)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

$u, y \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^n$

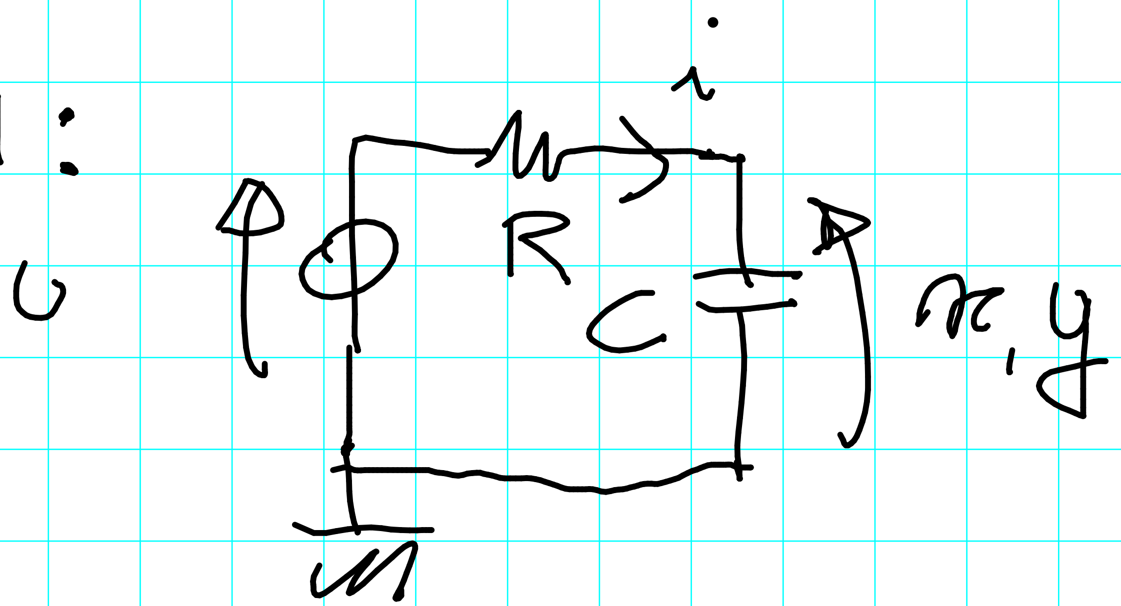
Definizioni

1) f e g lineari in x e u $\Rightarrow$ SD LINEARE

2) $f = f(x,u)$ e $g = g(x,u)$ $\Rightarrow$ SD tempo-invariante o STAZIONARIO

3) $g = g(x,t)$ $\Rightarrow$ SD strettamente proprio

ES 1:



$$\begin{cases} x + Ri = u \\ i = C\dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + RC\dot{x} = u \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u}_{f(x,u)} \\ y = \underbrace{x}_{g(x,u)} \end{cases}$$

DIN
LIN } LTI
TI

1° ordine (1 v. di stato)
SP

ES2: Massa - molla

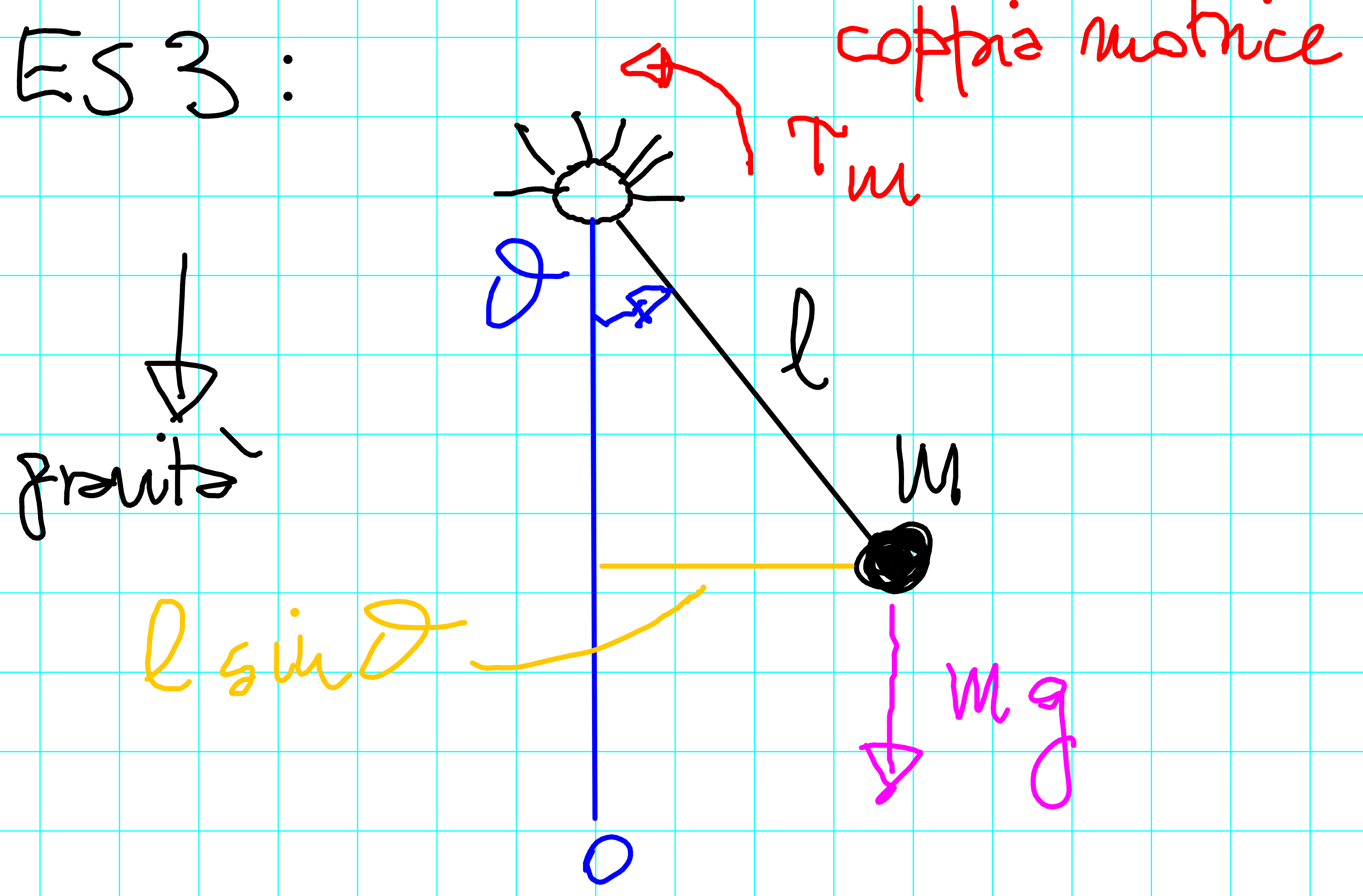
$$m\ddot{y} = \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{F} - ky - h\dot{y}$$

x_1 = posizione = y
x_2 = velocità = $\dot{y}$ $\Big| \longrightarrow$ $m\dot{x}_2 = u - kx_1 - hx_2$
$\dot{x}_1 = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

DIN
LTI
SP
2° ordine

ES 3:



momento d'inerzia

$$J\ddot{\vartheta} = \sum \text{coppie}$$

accel. angolare

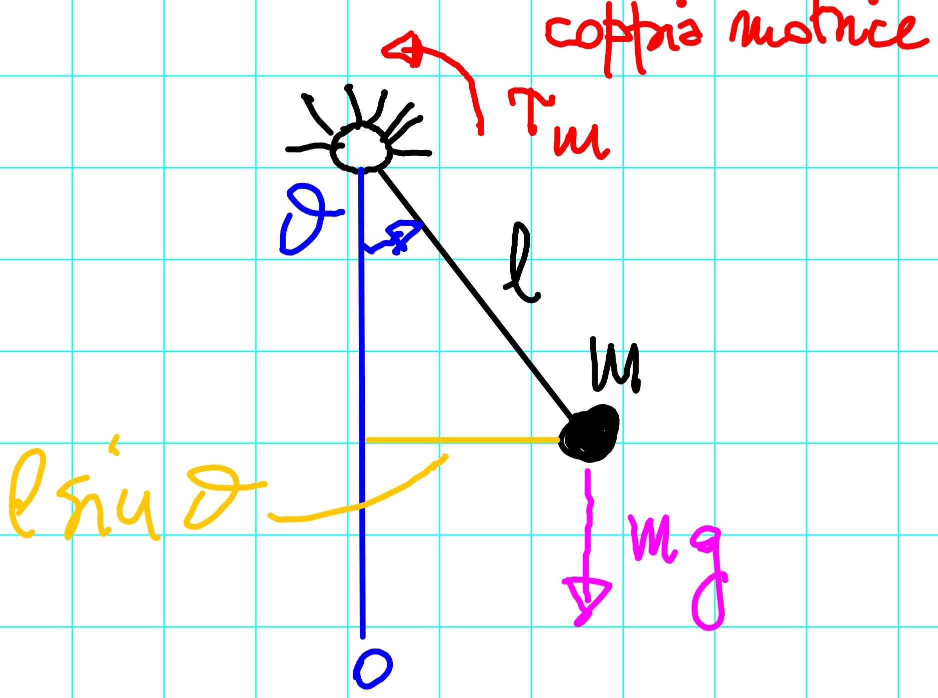
$\tau_m = 0$

$\tau_F = \text{coppia d'attrito} = -h\dot{\vartheta} \quad h>0$

$\tau_g = \text{coppia gravità} = mg\,\ell\sin\vartheta$

$x_1 = \vartheta$

$x_2 = \dot{\vartheta} = \dot{x}_1$



$$\underbrace{ml^2}_{J}\,\underbrace{\dot{x}_2}_{\ddot{\vartheta}} = u - h x_2 - mgl \sin x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l} \sin x_1 - \dfrac{h}{ml^2} x_2 + \dfrac{1}{ml^2} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

DIN
TI
NL
SP
2° ordine

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO (TD)

Indice "temporale" k INTERO

$$\left.\begin{aligned} x_1(k) &= \varphi_1(x_1(k_0), \dots x_n(k_0), u[k_0,k], k) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= \varphi_n(x_1(k_0), \dots x_n(k_0), u[k_0,k], k) \end{aligned}\right\} \text{F. di tr. dello stato}$$

$$y(k) = g(x_1(k), \dots x_n(k), u(k), k)$$

Tutto analogo al caso a TC

Un modo di sostituire il legame è tramite equazioni (di stato) alle differenze

$$x_1(k) = f_1\left(x_1(k-1), \dots x_n(k-1), u(k-1), k\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k) = f_n\left(x_1(k-1), \dots x_n(k-1), u(k-1), k\right)$$
$$y(k) = g\left(x_1(k), \dots x_n(k), u(k), k\right)$$

Def di LIN, TI, SP, ordine come a TC

ES: TRAM

$y(k) = x(k)$ = n° passeggeri alla partenza dalla Fermata k

$u(k)$ = n° saliti - n° scesi alla Fermata k

$$x(k) = x(k-1) + u(k)$$

NB questa non è un'eq. di stato ben posta

perché al 2° membro c'è $u(k)$

- "Educational game"

DEFINISCO un operatore "anticipo di un passo" e lo chiamo z

$\Rightarrow$ DEF $\qquad z\,v(k) = v(k+1)$

NB $\quad$ z è un op. lineare

$$z\left(\alpha v_1(k) + \beta v_2(k)\right) = \alpha v_1(k+1) + \beta v_2(k+1)$$

$$= \alpha\left(z\,v_1(k)\right) + \beta\left(z\,v_2(k)\right)$$

Torniamo al sistema:

$$y(k) = x(k) = x(k-1) + u(k)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x(k+1)} = x(k) + \underbrace{u(k+1)}$$

$$z\,x(k) = x(k) + z\,u(k)$$

$$(z-1)\,x(k) = z\,u(k)$$

$$y(k) = \frac{z}{z-1} u(k) = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) u(k)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z-1} u(k)}_{\xi(k)} + u(k)$$

$$\begin{cases} \xi(k) = \dfrac{1}{z-1} u(k) \\ y(k) = \xi(k) + u(k) \end{cases} \Rightarrow (z-1)\,\xi(k) = u(k)$$

$$\xi(k+1) - \xi(k) = u(k)$$

$$\begin{cases} \xi(k) = \xi(k-1) + u(k-1) \\ y(k) = \xi(k) + u(k) \end{cases}$$

EQ. DI STATO BEN POSTA

DIN

LTI

1° ordine

non SP

$\square$