TRIGONOMETRIA

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

$$sin(x)cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$$

$$cos(2x) = \begin{cases} cos^2(x) - sin^2(x) \\ 1 - 2sin^2(x) \\ 2cos^2(x) - 1 \end{cases}$$

$$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$$

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$$

$$sin(arccos(x)) = ?$$

$$cos(arcsin(x)) = ?$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1$$

$$Sh(2x) = ?$$

$$Ch(2x) = ?$$

$$SettSh(x) = log(?)$$

$$SettCh(x) = log(?)$$

$$Sh(SettCh(a)) = \sqrt{a^2 - 1} \quad \textit{ottenuta da } [Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Sh(x) = \sqrt{Ch^2(x) - 1}] \rightarrow [x = SettCh(a)]$$

$$Ch(SettSh(a)) = \sqrt{a^2 + 1} \quad \textit{ottenuta da } [Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Ch(x) = \sqrt{1 + Sh^2(x)}] \rightarrow [x = SettSh(a)]$$

$$sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}sin(a+b) + sin(a-b)$$

$$cos(a)sin(b) = \frac{1}{2}sin(a+b) - sin(a-b)$$

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}cos(a+b) + cos(a-b)$$

$$sin(a)sin(b) = -\frac{1}{2}cos(a+b) - cos(a-b)$$

$$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

$$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

DISEQUAZIONI

STUDI DI FUNZIONE

ASINTOTICI

DERIVATE

SVILUPPI

INTEGRALI

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Integrali fondamentali:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a\ dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + c$$

$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

$$\int tan(x)dx = -log|cos(x)| + c$$

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + c$$

$$\int cotg(x)dx = log|sin(x)| + c$$

$$\int (1 + tg^2(x))dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + c$$

$$\int (1 + ctg^2(x))dx = \int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cotg(x) + c$$

$$\int Sh(x)dx = Ch(x) + c$$

$$\int Ch(x)dx = Sh(x) + c$$

$$\int Th(x)dx = log(Ch(x)) + c$$

$$\int Coth(x)dx = log|Sh(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c$$

Integrali notevoli:

$$\int sin^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x){+}sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{-}sin(x)cos(x)){+}c$$

$$\int cos^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x){+}sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{+}sin(x)cos(x)){+}c$$

$$\int Sh^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x){-}Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{4}(Sh(2x){-}2x){+}c$$

$$\int Ch^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x){-}Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{+}Sh(x)Ch(x)){+}c$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + tan^2(x)dx =$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + cotan^2(x)dx =$$

$$\int \frac{1}{Ch^2(x)}dx = \int (1 - Th^2(x))dx = Th(x) + c$$

$$\int \frac{1}{Sh^2(x)} = -Coth(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = arcSh(x) + c = log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pm a^2+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 arcsin(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2-x^2}) + c$$

Integrali riconducibili:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot cos(f(x))dx = sin(f(x)) + c$$

$$\int f'(x) \cdot sin(f(x))dx = -cos(f(x)) + c$$

$$\int e^{(f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + c$$

Integrazione per sostituzione:

Sostituire alla variabile x una funzione di un'altra variabile t, purchè tale funzione sia derivabile e invertibile.
Ponendo $x = g(t)$ da cui deriva $dx = g'(t)dt$ si ha che:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

Da ricordare è che se si è in presenza di un integrale definito bisogna aggiornare anche gli estremi di integrazione. Se non si volesse cambiare l'intervall odi integrazione si può risostituire il vecchio valore di t.

Integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$$

Per prima cosa se il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, si esegue la divisione di polinomi:

- Si dispongono i polinomi dal termine di grado maggiore a quello minore nella seguente maniera:

  $$P(x) \ \mid \ Q(x)$$

  badando al fatto che se nel polinomio $P(x)$ mancasse qualche termine bisognerebbe scrivere 0 nella sua posizione.

- Si dividono il termine di grado massimo di $P(x)$ con quello di grado massimo di $Q(x)$, riportando il risultato al di sotto di $Q(x)$.

- Moltiplichiamo il termine appena scritto per ogni termine di $Q(x)$, ne invertiamo il segno e lo trascriviamo al di sotto dei termini con lo stesso grado di $P(x)$

- Sommiamo termine per termine $P(x)$ con i valore appena scritti e li riportiamo sotto.

- Ripetiamo questo procedimento finchè il grado più alto fra i termini dell'ultima riga scritta a sinistra è minore (non minore uguale) del termine di grado massimo di $Q(x)$

- Il polinomio a destra è il risultato della divisione $S(x)$, mentre ciò che rimane sulla sinistra è il resto $R(x)$. Possiamo ora riscrivere il numeratore:

  $$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Vediamo ora i vari casi possibili:

- **denominatore di primo grado:** integrale immediato tramite il logaritmo
- **denominatore di secondo grado:** si calcola il segno del discriminante:
  - **due radici distinte:** si scompone in fratti semplici

    $$\frac{N(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} = \frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$$

    $$\frac{a \cdot D_2(x) + b \cdot D_1(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} = \frac{N(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)}$$

    $$a \cdot D_2(x) + b \cdot D_1(x) = N(x)$$

    Una volta determinate a e b si riscrive l'integrale come $\frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$ e si integra come somma di logaritmi
  - **denominatore quadrato perfetto:** (due soluzioni coincidenti), si procede per sostituzione:

    $$\int \frac{N(x)}{D(x)^2} dx = [D(x) = t, \ \ldots] = \ \ldots$$

    L'utilità della sostituzione è quella di spezzare la frazione in una somma di frazion ida integrare una ad una.
  - **denominatore non si annulla mai:**
    Casi semplici:

    $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + c$$

    $$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$$

    $$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x+b}{a} + c$$

    Caso generico: Si cerca di dividere l'integrale in una somma di integrali, il primo deve contenere al numeratore la derivata del denominatore, il secondo non deve contenere la x al numeratore, cioè deve essere una costante e quindi riconducibile ai casi semplici sopra riportati. Il denominatore non cambia. Ci si arriva a logica.
- **denominatore di grado maggiore di due:** è sempre possibile scomporlo in prodotti di fattori di primo grado o di secondo grado irriducibili, per farlo si usa Ruffini (o altrimenti si va a tentoni ricordando che PROBABILMENTE una radice della funzione è un dividendo (positivi e negativi) del numero che si ricava moltiplicando il coefficiente del termine massimo e il termine noto).
  Fatto questo si scompone la frazione in fratti semplici con la stessa logica del caso di due radici distinte, ricordando che il numeratore deve essere un espressione di un grado minore del denominatore, per esempio se il denominatore è di grado 2, allora si userà $ax + b$ che è di grado 1.

Funzioni razionali di e^x

Si pone $e^x = t$, $x = log(t)$, $dx = \frac{dt}{t}$ e ci si riconduce a una funzione razionale classica.

Integrazione per parti:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

La formula deriva dalla formula di derivazione della moltiplicazioni di due funzioni:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Si può vedere la formula di integrazione per parti più facilmente così:

$$\int integranda \cdot derivanda \ dx = primitiva \cdot derivanda - \int primitiva \cdot derivata \ dx$$

L'integrazione per parti si usa:

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^n \cdot f(x)dx \quad f(x) = \begin{cases} cos(x) \\ sin(x) \\ e^x \\ Sh(x) \\ Ch(x) \end{cases}$$

si integra per parti derivando x^n e integrando $f(x)$. Per $n = 1$ l'integrale si riduce a uno immediato, per $n > 1$ si itera il procedimento fino al caso $n = 1$. Si possono svolgere allo stesso modo anche integrali del tipo:

$$\int P_n(x)f(x)dx$$

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int f(x)g(x)dx \qquad \begin{cases} f(x) = e^{\alpha x}, Sh(\alpha x), Ch(\alpha x), a^{bx} \\ g(x) = cos(\beta x), sin(\beta x) \end{cases}$$

si eseguono due integrazioni per parti consecutive, nella prima la scelta della funzione da integrare o derivare è indifferente, nella seconda però la scelte deve essere coerente alla prima. Chiamando I l'integrale di partenza si ottiene una funzione della forma

$$I = h(x) - \frac{\beta}{\alpha}^2 I$$

da cui si ricava I.
Se entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono del tipo $cos(x)$ o $sin(x)$ si usano le formule di duplicazione o prostaferesi (vedi più avanti).

- L'integrale del logaritmo, derivando $log(x)$ e integrando 1

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

Più in generale, dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^m log^n(x)dx$$

e ponendo $g' = x^m$ e $f = log^n(x)$ ed eseguendo iterativamente n integrazioni per parti si riesce a calcolare l'integrale del logaritmo. Ancora più in generale si possono risolvere integrali della forma:

$$\int P_m(x) \cdot Q_n(log(x))dx$$

- l'integrale dell'arcotangente, derivando $arctg(x)$ e integrando 1

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + c$$

Più in generale

$$\int x^n arctg(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}arctg(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{1+x^2}$$

integrazione delle funzioni trigonometriche

- dovendo calcolare

$$\int f(sin(x)) \cdot cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad sin(x) = t, cos(x)dx = dt$$

$$\int f(cos(x)) \cdot sin(x)dx \quad \Rightarrow \quad cos(x))t, -sin(x)dx = dt$$

In particolare per calcolare

$$\int sin^n(x)cos^m(x)$$

se almeno uno degli esponenti è dispari si riesce a riscrivere l'integrale in una delle forme viste sopra utilizzando: $sin^2(x)+cos^2(x)=1$. Se entrambi gli esponenti sono pari si usano le formule trigonometriche per abbassarne il grado: $cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+cos(2x))$ e $sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-cos(2x))$

- per integrali del tipo

$$\int cos(\alpha x)sin(\beta x)dx, \quad \int cos(\alpha x)cos(\beta x)dx, \quad \int sin(\alpha x)sin(\beta x)dx,$$

si usano le regole di prostaferesi che riconducono a somme di integrali immediati

- integrali di funzioni razionali di $sin(x)$ e $cos(x)$ possono sempre essere ricondotti a integrali di funzioni razionali generiche tramite la sostituzione:

$$t=tg\left(\frac{x}{2}\right), \quad x=2arctg(t), \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

ne derivano le seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ sin(x)=\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

- integrali definiti notevoli:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} cos^2(kx)dx=\int_0^{n\frac{\pi}{2}} sin^2(kx)dx=n\frac{\pi}{4}$$

- per calcolare integrali razionali con $Sh(x)$ e $Ch(x)$ o si trovano scorciatoie con trasformazioni oppure si usa la sostituzione $e^x=t, x=log(t), dx=\frac{dt}{t}$

Integrazione delle funzioni irrazzionali

- se l'integranda è una funzione razionale di x moltiplicata per solo una delle seguenti

$$\int R(x)\sqrt{a^2-x^2}dx=[x=a{\cdot}sin(t), dx=a{\cdot}cos(t)dt]=\int \sqrt{a^2(1-sin^2(t))}dx=\int |a{\cdot}cos(t)|dx$$

$$\int R(x)\sqrt{a^2+x^2}=[x=a\cdot Sh(t), dx=a\cdot Ch(t)dt]=\int \sqrt{a^2(1-Sh^2(t))}dx=\int a\cdot Ch(t)dx$$

$$\int R(x)\sqrt{x^2-a^2}=[x=a{\cdot}Ch(t), dx=a{\cdot}Sh(t)dt]=\int \sqrt{a^2(Ch^2(t)-1)}dx=\int |a{\cdot}Sh(t)|dx$$

Negli ultimi due casi per tornare alla variabile x occorre usare le funzioni iperobliche inverse:

$$\begin{cases} x=a\cdot Ch(t)\Rightarrow t=SettCh(\frac{x}{a})=log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) \\ x=a\cdot Sh(t)\Rightarrow t=SettSh\left(\frac{x}{a}\right)=log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) \end{cases}$$

è utile anche ricordare che $Sh(SettCh(a))=\sqrt{a^2-1}$ e $Ch(SettSh(a))=\sqrt{a^2+1}$

- integrale di una funzione razionale di $x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}$, etc.
  Si pone $x=t^n$ con $n=$ minimo comune multiplo di m_1, m_2, etc. Si ha quindi $dx=n\cdot t^{n-1}dt$ e si ottiene una funzione razionale di t.

- Se l'integranda è una funzione del tipo $R(x^{2n+1}, \sqrt{x^2\pm a^2})$

$$\int x^{2n+1}R(\sqrt{x^2\pm a^2})dx=[\sqrt{x^2\pm a^2}=t, xdx=tdt, x^{2n+1}\cdot dx=(t^2\mp a^2)^n t\cdot dt]$$

Simmetrie e valori assoluti nel calcolo di integrali definiti

- se $f(x)$ è **pari**:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$$

- se $f(x)$ è **dispari**:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$$