TRIGONOMETRIA

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

$$sin(x)cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$$

$$cos(2x) = \begin{cases} cos^2(x) - sin^2(x) \\ 1 - 2sin^2(x) \\ 2cos^2(x) - 1 \end{cases}$$

$$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x)) \quad ottenuta\ da\ [cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)]$$

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x)) \quad ottenuta\ da\ [cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1]$$

$$sin(arccos(x)) = ?$$

$$cos(arcsin(x)) = ?$$

$$Ch^(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Sh^(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1$$

$$Sh(2x) = ?$$

$$Ch(2x) = ?$$

$$SettSh(x) = log(?)$$

$$SettCh(x) = log(?)$$

$$Sh(SettCh(a)) = \sqrt{a^2 - 1} \quad ottenuta\ da\ [Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Sh(x) = \sqrt{Ch^2(x) - 1}] \rightarrow [x = SettCh(a)]$$

$$Ch(SettSh(a)) = \sqrt{a^2 + 1} \quad ottenuta\ da\ [Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Ch(x) = \sqrt{1 + Sh^2(x)}] \rightarrow [x = SettSh(a)]$$

$$sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}sin(a + b) + sin(a - b)$$

$$cos(a)sin(b) = \frac{1}{2}sin(a + b) - sin(a - b)$$

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}cos(a + b) + cos(a - b)$$

$$sin(a)sin(b) = -\frac{1}{2}cos(a + b) - cos(a - b)$$

$$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

$$sin(a - b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

$$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

DISEQUAZIONI

STUDI DI FUNZIONE

ASINTOTICI

DERIVATE

SVILUPPI

SERIE

serie geometrica

per $q \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

per $q = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & se \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & se \quad q \geq 1 \\ irregolare & se \quad q \leq -1 \end{cases}$$

serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq log(n+1) \to +\infty$$

per $\alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to +\infty$$

per $\alpha > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = converge$$

per $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} (\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = serie \;\; di \;\; mengoli)$$

serie di mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Serie di potenza

Con a_k costanti reali (o complesse) e x variabile reale (o complessa)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$Sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$Ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad per \;\; |x| < 1$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad per \;\; |x| < 1$$

teor. Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che il termine generale a_n tenda a zero. (Cioè perchè la serie converga, il termine a_n deve tendere a zero, ma non per forza se il termine a_n tende a zero allora la serie converge)

teor.supponiamo che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga, allora per ogni k anche risulta convergente anche $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

Criterio serie a termini non negativi Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi è convergente o divergente a $+\infty$. Essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata.

Criterio del confronto Siano $\sum an$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi tali che $a_n < b_n$ definitivamente, allora:

- $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.
- $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente.

Criterio del confronto asintotico Se $a_n \sim b_n$, allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere (o entrambe divergenti o entrambe divergenti)

Criterio della radice Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- $l > 1$ la serie diverge $+\infty$
- $l < 1$ la serie converge
- $l = 1$ nulla si può concludere

Spesso utilizzato con termini che hanno come esponente n. **Criterio del rapporto** Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- $l < 1$ diverge $+\infty$
- $l < 1$ converge
- $l = 1$ nulla si può concludere

Spesso utilizzato quando si hanno termini come n^n e $n!$. **Criterio serie a termini di segno variabile** Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_n|$. Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge.

Criterio di Leibniz Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \;\; con \;\; a_n \geq 0 \; \forall \; n$$

Se la successione $\{a_n\}$ è decrescente e se $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, allora la serie è convergente.
Il criterio di Leibniz può essere applicato anche se i termini sono definitivamente di segno alterno e la successione a_n è definitivamente decrescente.
Per verificare la decrescenza bisogna dimostrare che $a_{n+1} < a_n$ oppure mediante il limite a $+\infty$ della derivata prima di a_n o studiano quando la derivata prima di $a_n < 0$.

Criterio della somma di serie convergenti Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converge.

Criterio della somma di serie convergenti e divergenti Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge.

Criterio serie a termini complessi Sia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con a_n complesso, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Criterio di Dirichlet Siano a_n e b_n due succesioni tali che:

- a_n è a valori complessi e la sua successione delle somme parziali è limitata.
- b_n è a valori reali positivi e tende monotonamente a zero

allora la serie $\sum a_n b_n$ è convergente.

INTEGRALI

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Integrali fondamentali:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a \; dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(|x|) + c$$

$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

$$\int tan(x)dx = -log|cos(x)| + c$$

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + c$$

$$\int cotg(x)dx = log|sin(x)| + c$$

$$\int (1 + tg^2(x))dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + c$$

$$\int (1 + ctg^2(x))dx = \int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cotg(x) + c$$

$$\int Sh(x)dx = Ch(x) + c$$

$$\int Ch(x)dx = Sh(x) + c$$

$$\int Th(x)dx = log(Ch(x)) + c$$

$$\int Coth(x)dx = log|Sh(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c$$

Integrali notevoli:

$$\int sin^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x){+}sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{-}sin(x)cos(x)){+}c$$

$$\int cos^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x){+}sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{+}sin(x)cos(x)){+}c$$

$$\int tan^2(x)dx = tan(x) - x + c$$

$$\int cotan^2(x)dx = -x - cot(x) + c$$

$$\int Sh^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x){-}Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{4}(Sh(2x){-}2x){+}c$$

$$\int Ch^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x){-}Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x{+}Sh(x)Ch(x)){+}c$$

$$\int Th^2(x)dx = x - Th(x) + c$$

$$\int Coth^2(x)dx = x - Coth(x) + c$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + tan^2(x)dx = -cotan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + cotan^2(x)dx = tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{tan^2(x)}dx = \int cotan^2(x)dx$$

$$\int \frac{1}{cotan^2(x)}dx = \int tan^2(x)dx$$

$$\int \frac{1}{Ch^2(x)}dx = \int (1 - Th^2(x))dx = Th(x) + c$$

$$\int \frac{1}{Sh^2(x)} = \int (-1Coth^2(x))dx = -Coth(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = arcSh(x) + c = log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pm a^2+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 arcsin(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2-x^2}) + c$$

Integrali riconducibili:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot cos(f(x))dx = sin(f(x)) + c$$

$$\int f'(x) \cdot sin(f(x))dx = -cos(f(x)) + c$$

$$\int e^{(f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + c$$

Integrazione per sostituzione:

Sostituire alla variabile x una funzione di un'altra variabile t, purchè tale funzione sia derivabile e invertibile.
Ponendo $x = g(t)$ da cui deriva $dx = g'(t)dt$ si ha che:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

Da ricordare è che se si è in presenza di un integrale definito bisogna aggiornare anche gli estremi di integrazione. Se non si volesse cambiare l'intervall odi integrazione si può risostituire il vecchio valore di t.

Integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$$

Per prima cosa se il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, si esegue la divisione di polinomi:

- Si dispongono i polinomi dal termine di grado maggiore a quello minore nella seguente maniera:

  $$P(x) \;\mid\; Q(x)$$

  badando al fatto che se nel polinomio $P(x)$ mancasse qualche termine bisognerebbe scrivere 0 nella sua posizione.

- Si dividono il termine di grado massimo di $P(x)$ con quello di grado massimo di $Q(x)$, riportando il risultato al di sotto di $Q(x)$.
- Moltiplichiamo il termine appena scritto per ogni termine di $Q(x)$, ne invertiamo il segno e lo trascriviamo al di sotto dei termini con lo stesso grado di $P(x)$
- Sommiamo termine per termine $P(x)$ con i valore appena scritti e li riportiamo sotto.
- Ripetiamo questo procedimento finchè il grado più alto fra i termini dell'ultima riga scritta a sinistra è minore (non minore uguale) del termine di grado massimo di $Q(x)$
- Il polinomio a destra è il risultato della divisione $S(x)$, mentre ciò che rimane sulla sinistra è il resto $R(x)$. Possiamo ora riscrivere il numeratore:

  $$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Vediamo ora i vari casi possibili:

- **denominatore di primo grado:** integrale immediato tramite il logaritmo
- **denominatore di secondo grado:** si calcola il segno del discriminante:
  - **due radici distinte:** si scompone in fratti semplici

    $$\frac{N(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} = \frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$$

    $$\frac{a \cdot D_2(x) + b \cdot D_1(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} = \frac{N(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)}$$

    $$a \cdot D_2(x) + b \cdot D_1(x) = N(x)$$

    Una volta determinate a e b si riscrive l'integrale come $\frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$ e si integra come somma di logaritmi
  - **denominatore quadrato perfetto:** (due soluzioni coincidenti), si procede per sostituzione:

    $$\int \frac{N(x)}{D(x)^2}dx = [D(x) = t, \ \dots] = \ \dots$$

    L'utilità della sostituzione è quella di spezzare la frazione in una somma di frazion ida integrare una ad una.
  - **denominatore non si annulla mai:**
    Casi semplici:

    $$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$$

    $$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$$

    $$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x+b}{a} + c$$

    Caso generico: Si cerca di dividere l'integrale in una somma di integrali, il primo deve contenere al numeratore la derivata del denominatore, il secondo non deve contenere la x al numeratore, cioè deve essere una costante e quindi riconducibile ai casi semplici sopra riportati. Il denominatore non cambia. Ci si arriva a logica.

- **denominatore di grado maggiore di due:** è sempre possibile scomporlo in prodotti di fattori di primo grado o di secondo grado irriducibili, per farlo si usa Ruffini (o altrimenti si va a tentoni ricordando che PROBABILMENTE una radice della funzione è un dividendo (positivi e negativi) del numero che si ricava moltiplicando il coefficiente del termine massimo e il termine noto).
Fatto questo si scompone la frazione in fratti semplici con la stessa logica del caso di due radici distinte, ricordando che il numeratore deve essere un espressione di un grado minore del denominatore, per esempio se il denominatore è di grado 2, allora si userà $ax + b$ che è di grado 1.

Funzioni razionali di e^x

Si pone $e^x = t$, $x = log(t)$, $dx = \frac{dt}{t}$ e ci si riconduce a una funzione razionale classica.

Integrazione per parti:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

La formula deriva dalla formula di derivazione della moltiplicazioni di due funzioni:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Si può vedere la formula di integrazione per parti più facilmente così:

$$\int integranda \cdot derivanda\ dx = primitiva \cdot derivanda - \int primitiva \cdot derivata\ dx$$

L'integrazione per parti si usa:

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^n \cdot f(x)dx \quad f(x) = \begin{cases} cos(x) \\ sin(x) \\ e^x \\ Sh(x) \\ Ch(x) \end{cases}$$

si integra per parti derivando x^n e integrando $f(x)$. Per $n = 1$ l'integrale si riduce a uno immediato, per $n > 1$ si itera il procedimento fino al caso $n = 1$. Si possono svolgere allo stesso modo anche integrali del tipo:

$$\int P_n(x)f(x)dx$$

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int f(x)g(x)dx \qquad \begin{cases} f(x) = e^{\alpha x}, Sh(\alpha x), Ch(\alpha x), a^{bx} \\ g(x) = cos(\beta x), sin(\beta x) \end{cases}$$

si eseguono due integrazioni per parti consecutive, nella prima la scelta della funzione da integrare o derivare è indifferente, nella seconda però la scelte deve essere coerente alla prima. Chiamando I l'integrale di partenza si ottiene una funzione della forma

$$I = h(x) - \frac{\beta}{\alpha}^2 I$$

da cui si ricava I.
Se entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono del tipo $cos(x)$ o $sin(x)$ si usano le formule di duplicazione o prostaferesi (vedi più avanti).

- L'integrale del logaritmo, derivando $log(x)$ e integrando 1

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

Più in generale, dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^m log^n(x)dx$$

e ponendo $g' = x^m$ e $f = log^n(x)$ ed eseguendo iterativamente n integrazioni per parti si riesce a calcolare l'integrale del logaritmo. Ancora più in generale si possono risolvere integrali della forma:

$$\int P_m(x) \cdot Q_n(log(x))dx$$

- l'integrale dell'arcotangente, derivando $arctg(x)$ e integrando 1

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xarctg(x) - \frac{1}{2} log(1+x^2) + c$$

Più in generale

$$\int x^n arctg(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} arctg(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{1+x^2}$$

integrazione delle funzioni trigonometriche

- dovendo calcolare

$$\int f(sin(x)) \cdot cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad sin(x) = t, cos(x)dx = dt$$

$$\int f(cos(x)) \cdot sin(x)dx \quad \Rightarrow \quad cos(x))t, -sin(x)dx = dt$$

In particolare per calcolare

$$\int sin^n(x) cos^m(x)$$

se almeno uno degli esponenti è dispari si riesce a riscrivere l'integrale in una delle forme viste sopra utilizzando: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$. Se entrambi gli esponenti sono pari si usano le formule trigonometriche per abbassarne il grado: $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$ e $sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$

- per integrali del tipo

$$\int cos(\alpha x) sin(\beta x)dx, \quad \int cos(\alpha x) cos(\beta x)dx, \quad \int sin(\alpha x) sin(\beta x)dx,$$

si usano le regole di prostaferesi che riconducono a somme di integrali immediati

- integrali di funzioni razionali di $sin(x)$ e $cos(x)$ possono sempre essere ricondotti a integrali di funzioni razionali generiche tramite la sostituzione:

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2arctg(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

ne derivano le seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

- integrali definiti notevoli:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} cos^2(kx)dx = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} sin^2(kx)dx = n\frac{\pi}{4}$$

- per calcolare integrali razionali con $Sh(x)$ e $Ch(x)$ o si trovano scorciatoie con trasformazioni oppure si usa la sostituzione $e^x = t, x = log(t), dx = \frac{dt}{t}$

Integrazione delle funzioni irrazzionali

- se l'integranda è una funzione razionale di x moltiplicata per solo una delle seguenti

$$\int R(x)\sqrt{a^2-x^2}dx = [x = a{\cdot}sin(t), dx = a{\cdot}cos(t)dt] = \int \sqrt{a^2(1-sin^2(t))}dx = \int |a{\cdot}cos(t)|dx$$

$$\int R(x)\sqrt{a^2+x^2} = [x = a{\cdot}Sh(t), dx = a{\cdot}Ch(t)dt] = \int \sqrt{a^2(1-Sh^2(t))}dx = \int a{\cdot}Ch(t)dx$$

$$\int R(x)\sqrt{x^2-a^2} = [x = a{\cdot}Ch(t), dx = a{\cdot}Sh(t)dt] = \int \sqrt{a^2(Ch^2(t)-1)}dx = \int |a{\cdot}Sh(t)|dx$$

Negli ultimi due casi per tornare alla variabile x occorre usare le funzioni iperobliche inverse:

$$\begin{cases} x = a \cdot Ch(t) \Rightarrow t = SettCh(\frac{x}{a}) = log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) \\ x = a \cdot Sh(t) \Rightarrow t = SettSh\left(\frac{x}{a}\right) = log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) \end{cases}$$

è utile anche ricordare che $Sh(SettCh(a)) = \sqrt{a^2-1}$ e $Ch(SettSh(a)) = \sqrt{a^2+1}$

- integrale di una funzione razionale di $x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}$, etc.
  Si pone $x = t^n$ con $n =$ minimo comune multiplo di m_1, m_2, etc. Si ha quindi $dx = n \cdot t^{n-1}dt$ e si ottiene una funzione razionale di t.

- Se l'integranda è una funzione del tipo $R(x^{2n+1}, \sqrt{x^2 \pm a^2})$

$$\int x^{2n+1}R(\sqrt{x^2 \pm a^2})dx = [\sqrt{x^2 \pm a^2} = t, xdx = tdt, x^{2n+1} \cdot dx = (t^2 \mp a^2)^n t \cdot dt]$$

Simmetrie e valori assoluti nel calcolo di integrali definiti

- se $f(x)$ è **pari**:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$$

- se $f(x)$ è **dispari**:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$$

Osservazione. Integrale generalizzato di una funzioen dispari su un intervallo simmetrico

Non è corretto affermare l'annullarsi di un integrale dispari per motivi di simmetria in un intervallo simmetrico senza prima verificare la convergenza dell'integrale stesso.

INTEGRALI GENERALIZZATI

Integrazione di funzioni non limitate

Metodo generale di risoluzione:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

Criteri di integrabilità al finito

Siano $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$:

- confronto: se $0 \le f(x) \le g(x)$, allora g integrabile $\Rightarrow f$ integrabile e f non integrabile $\Rightarrow g$ non integrabile.
- confronto asintotico: se $f > 0$ e $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to b^-$, allora f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile.
- **teor.** (da usare per studiare per esempio funzioni seno e coseno per $x \to \infty$)

$$\int_a^b |f(x)|dx \;\; convergente \;\; \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \;\; convergente$$

Integrazione su intervalli illimitati

Metodo generale di risoluzione:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

def. Se il limite dell'integrale di f esiste finito allora f si dice integrabile oppure che l'integrale è convergente.
def. Se il limite dell'integrale è $\pm\infty$, l'integrale si dice divergente.
def. Se il limite non esiste, l'integrale non esiste.
per essere integrabile deve avere limite finito.

Criteri di integrabilità all'infinito

- confronto: se $0 \le f(x) \le g(x)$ in $[a, +\infty)$, allora g integrabile $\Rightarrow f$ integrabile e f non integrabile $\Rightarrow g$ non integrabile.
- confronto asintotico: se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to +\infty$, allora f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile
- **teor.** (da usare per studiare per esempio funzioni seno e coseno per $x \to \infty$)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \;\; convergente \;\; \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \;\; convergente$$

Osservazione. Ordine di annullamento di una funzione derivabile.

Se f è una funzione derivabile in un intervallo I, la formula di Taylor ci dice che se f si annulla in un punto $\alpha \in I$, si annulla almeno del prim'ordine. Precisamente poichè

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + o(x-\alpha)$$

se $f'(\alpha) \ne 0$ allora f ha uno zero del prim'ordine in α. Se $f'(\alpha) = 0$ ma, ad esempio, $f''(\alpha) \ne 0$, si può concludere che f si annulla del 2^0 ordine, e così via. In ogni caso non può annullarsi di un ordine inore di 1.

Integrali generalizzati notevoli

Caso 1:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \to \begin{cases} converge & se \;\; p < 1 \\ diverge & se \;\; p \ge 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \to \begin{cases} converge & se \;\; p < 1 \\ diverge & se \;\; p \ge 1 \end{cases}$$

Caso 2:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \rightarrow \begin{cases} converge & se\ \ p > 1 \\ diverge & se\ \ p \leq 1 \end{cases}$$

Caso 3: con $0 < \alpha < 1$

$$\int_{0}^{\alpha} \frac{1}{x^a \cdot |ln(x)|^b} \rightarrow \begin{cases} converge\ \ se & \begin{cases} a < 1\ \ e\ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1\ \ e\ \ b > 1 \end{cases} \\ diverge\ \ se & \begin{cases} a > 1\ \ e\ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1\ \ e\ \ b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 4: con $\alpha > 1$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot ln^b(x)}dx \rightarrow \begin{cases} converge\ \ se & \begin{cases} a > 1\ \ e\ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1\ \ e\ \ b > 1 \end{cases} \\ diverge\ \ se & \begin{cases} a < 1\ \ e\ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1\ \ e\ \ b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 5: con $\alpha > 1$

$$\int_{1}^{\alpha} \frac{1}{ln^p(x)}dx \rightarrow \begin{cases} converge\ \ se & p < 1 \\ diverge\ \ se & p \geq 1 \end{cases}$$

FUNZIONI INTEGRALI

teor. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $x_0 \in [a, b]$ e sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Allora:

- La funzione F è continua in $[a, b]$
- Se inoltre f è continua in $[a, b]$, allora F è derivabile in $[a, b]$ e vale

  $$F'(x) = f(x)\ \ per\ ogni\ x \in [a, b]$$

  (Se $f(t)$ non è continua su tutto I, ma è integrabile in senso generalizzato, in tutti i punti in cui $f(t)$ è continua, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$)
  F ha punti di non derivabilità dove f è discontinua.

Conseguenze:

- se f è continua, F è derivabile con continuità
- se f è continua e derivabile con continuità, anche F' è derivabile con continuità, quindi F è due volte derivabile con continuità. Iterando: la funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda
- ogni fuzione continua su I ha una primitiva su I

Logica degli esercizi in cui bisogna trovare l'intervallo di definizione:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

- lo scopo è determinare dove la funzione integranda è integrabile.
- Vedere dove la funzione integranda è continua, una funzione continua è integrabile. Analizzare i punti di discontinuità:

- Se una funzione ha un numero finito di discontinuità limitate in un intervallo, allora è integrabile in quell'intervallo. In poche parole se è una discontinuità a salto è integrabile.
- Per gli altri punti di discontinuità la funzione integranda è illimitat, quindi bisogna studiarla (con i criteri del confronto, del confronto asintotico, col teorema del modulo, calcolando effettivamente la primitiva e il limite, o riducendosi al caso particolare delle funzioni non limitate con gli asintotici o gli sviluppi di Taylor).
- Se la funzione itegranda non è integrabile nel punto x_0 allora l'insieme di definizione di F è vuoto. Ma se x_0 fosse un punto di accumulazione bisogna studiare l'integrale della funione per $t \to x_0$ e vedere se è effettivamente integrabile o meno.

Logica degli esercizi sulla regolarità delle funzioni integrali:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

- si determina l'insieme di definizione. (vedi sopra)
- per determinare i punti di non derivabilità di $F(x)$ studiamo la sua derivata $F'(x) = f(x)$. I punti di non derivabilità sono quelli quelli dove $f(x)$ non è definita, e in $F(x)$ corrispondono a:
  - discontinuità a salto in f è un punto angoloso in F
  - punti di asintoto verticale di f sono cuspidi (verso l'alto o il basso) o flessi a tangente verticale (ascendente o discendente) di F
- Notiamo che tangenti verticali o discontinuità a salto o buchi nella funzione di F non possono essere presenti nel dominio di F, perchè essendo punti di discontinuità non sono derivabili e dunque non presenti nell'intervallo di integrazione di f.
  Dunque la funzione F è (sempre) continua nel suo intervallo di definizione.

Logica degli esercizi sui grafici qualitativi della funzione integrale $F(x)$ a partire dalla funzione integranda $g(x)$

- F è crescente sugli intervalli in cui g è positiva, F è decrescente sugli intervalli in cui g è negativa.
- punti in cui g incrocia l'asse delle x sono punti di massimo o minimo
- discontinuità a salto in g sono punti angolosi
- F è concava verso l'alto (il basso) negli intervalli in cui g è crescente (decrescente)
- punti di cambio massimo e minimo in g sono punti di cambio di concavità in F

Limite all'infinito di una funzione integrale:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ integrale \ \ generalizzato \ \ = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$$

se l'integrale generallizzato converge esiste limite finito (anche se non si riesce a calcolare), se non converge o è divergente o non esiste.
Caso particolare è quello in cui $f(t) \to m$, costante non nulla, per cui $F(x) \sim mx$. Quindi $F(x)$ tende a infinito con crescita lineare e potrebbe avere asintoto obliquo calcolabile come

$$\lim_{x\to\infty} [F(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} [f(t) - m]dt + mx_0$$

Ossia esiste asintoto obliquo se l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{\infty} [f(t) - m]dt$$

converge.

TEORIA

Teorema di Fermat

Enunciato:
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $x \in (a, b)$. Se x è punto di estremo locale allora

$$f'(x) = 0$$

Dimostrazione:
Sia x punto di massimo locale, allora per z abbastanza vicino a x si ha $f(z) < f(x)$.

$$z < x \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

e quindi, per il teorema della permanenza del segno

$$f'_{-}(x) = \lim_{z \to x^-} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

Allo stesso modo:

$$z > x \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq 0$$

e quindi

$$f'_{+}(x) = \lim_{z \to x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq 0$$

Essendo f derivabile in x, si ha $f'(x) = f'_{-}(x) = f'_{+}(x) = 0$.

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ che abbia le seguenti caratteristiche:

a. sia continua in $[a, b]$

b. sia derivabile in ogni punto interno di tale intervallo

c. assuma valori uguali agli estremi di questo intervallo, cioè sia $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a, b) nel quale la sua derivata si annulla, in cui cioè si ha che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione.

Il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione assume in $[a, b]$ il suo valore massimo M ed il suo valore minimo m. Allora esistono due punti c e d appartenenti ad $[a, b]$ tali che $M = f(c)$ e $m = f(d)$; inoltre ogni altro valore assunto dalla funzione al variare di x in $[a, b]$ è compreso fra questi due, cioè $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Premesso questo, distinguiamo il caso in cui è $m = M$ da quello in cui è $m < M$.

I caso.

Se $m = M$ la funzione è costante in tutto l'intervallo, ed ha derivata nulla in tutti i suoi punti; quindi anche in un punto c particolare. Il teorema è, in questo caso, dimostrato.

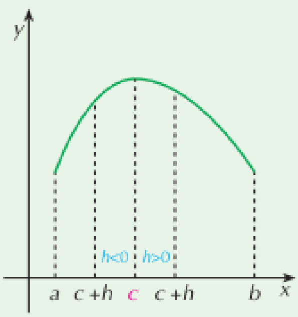
II caso.

Se $m < M$, poiché per ipotesi la funzione assume valori uguali agli estremi, essa deve assumere o il valore minimo o il valore massimo in un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che sia il punto c, cioè quello in cui assume valore massimo, ad essere interno.

Allora poiché in un punto di massimo la funzione assume il suo valore più grande, deve essere vero che $f(c+h) \leq f(c)$ (***figura a lato***); devono allora valere anche le seguenti disuguaglianze

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{se } h > 0$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{se } h < 0 \qquad \textbf{(A)}$$



L'espressione al primo membro di tali disuguaglianze è il rapporto incrementale della funzione relativo al punto $x = c$, rispettivamente dalla destra e dalla sinistra.

Poiché per ipotesi f è una funzione derivabile in (a, b), esistono finiti ed uguali i limiti dei rapporti incrementali per $h \to 0$ ed è

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$$

Le relazioni (**A**) ci dicono che la derivata nel punto c è contemporaneamente negativa o nulla e positiva o nulla; questo significa che essa deve valere zero, cioè deve essere $f'(c) = 0$.

Se invece è il punto d, in cui la funzione assume valore minimo, ad essere interno all'intervallo $[a, b]$, si procede ad un analogo ragionamento e si arriva alle stesse conclusioni. ◀

Teorema di Lagrange o del valor medio

Enunciato:
Sia f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Osserviamo che la retta AB ha equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e consideriamo la funzione

$$w(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

È facile verificare che: $w(a) = w(b) = 0$, w è continua in $[a, b]$ e w è derivabile in (a, b).

Poiché

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

la (4.1) equivale a dimostrare che esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$.

Essendo w continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass esistono due punti x_1 e x_2 in $[a, b]$ tali che

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \text{ massimo di } f \text{ in } [a, b] = M \\ f(x_2) &= \text{ minimo } \quad \text{di } f \text{ in } [a, b] = m \end{aligned}$$

Se $M = m$, allora $w(x)$ è costante in $[a, b]$, e quindi $w'(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.
Se $M > m$, almeno uno dei due punti x_1, x_2 non si trova agli estremi dell'intervallo, essendo $w(a) = w(b) = 0$.

Il teorema di Fermat implica allora che nel punto di massimo o minimo che risulta interno (eventualmente entrambi) la derivata di w si annulla e il teorema è così dimostrato.

Test di monotonia su un intervallo

Enunciato:
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile. Allora

$$f \;\; crescente \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f \;\; decrescente \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE. Infatti, considerata $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e due punti qualunque $x, z \in (a, b)$

$$f \;\text{ è }\; \begin{array}{c}\text{crescente}\\ \\ \text{decrescente}\end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;\text{ è }\; \begin{array}{c}\geq 0\\ \\ \leq 0\end{array}$$

Passando al limite per $z \to x$, per il teorema della permanenza del segno, dalle due precedenti relazioni si ottiene

$$\left.\begin{array}{lll} f \;\; \text{crescente} & \Longrightarrow & f'(x) \geq 0 \\ f \;\; \text{decrescente} & \Longrightarrow & f'(x) \leq 0 \end{array}\right. \quad \forall x \in (a, b)$$

Viceversa, sia, ad esempio, $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, e proviamo che allora f è crescente in (a, b). Prendiamo dunque due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, e mostriamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Infatti, applicando il teorema di Lagrange ad f sull'intervallo $[x_1, x_2]$ abbiamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Poiché $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, ne segue $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè la tesi.

Teorema di Cauchy

enunciato	
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni: • continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ • derivabili nei punti interni dell'intervallo (a, b) • e inoltre $g'(c) \neq 0$ in ogni punto interno dell'intervallo (a, b) **allora** esiste almeno un punto c interno all'intervallo (a, b) tale che: $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$	il teorema è detto degli **incrementi finiti** e si può enunciare anche dicendo: se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ verificano le ipotesi indicate, in un opportuno punto **c** dell'intervallo (a, b) il rapporto tra le rispettive derivate in c è uguale al rapporto tra gli **incrementi** delle funzioni calcolate agli estremi a e b dell'intervallo $[a, b]$

dimostrazione

Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x)$ tale che $\varphi(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$

Osserviamo che:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono per ipotesi funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili nei punti interni di (a, b)
- $[f(b) - f(a)]$ e $[g(b) - g(a)]$ sono costanti e quindi sono continue e derivabili in tutto $\mathcal{R}$

Verifichiamo che $\varphi(x)$ soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle:

1. $\varphi(x)$ è continua in $[a, b]$ perché è una combinazione lineare di funzioni continue in $[a, b]$
2. $\varphi(x)$ è derivabile nei punti interni di (a, b) perché è una combinazione lineare di funzioni derivabili in (a, b)
3. calcoliamo $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ cioè:

$\varphi(a) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b)$

$\varphi(b) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b)$

quindi $\varphi(a) = \varphi(b)$

Applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $\varphi(x)$ si ha che:	esiste almeno un punto c interno all'intervallo (a, b) tale che $\boldsymbol{\varphi'(c) = 0}$
Calcoliamo la derivata prima di $\varphi(x)$:	$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$
Calcoliamo la derivata di $\varphi(x)$ nel punto c e poniamola uguale a zero:	$\varphi'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$
Il che significa:	$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$
Portiamo il primo termine al secondo membro e cambiamo il segno ad entrambi i membri:	$[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$
Dividendo entrambi i membri per: $[g(b) - g(a)] \cdot g'(c)$ si ottiene la tesi del teorema.	$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Teorema di l'Hospital

Enunciato:
Siano f, g funzioni derivabili in un intervallo (a, b), con $g, g' \neq 0$ in (a, b). Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = 0 \ \ oppure \ \ \pm\infty$$

e

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Il teorema è applicabile anche se $a \to -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \to b^-$ (anzichè per $x \to a^+$), con $b \leq +\infty$. Dimostrazione:
Sia x_n una successione tendente ad a^+, prolunghiamo per continuità f e g in a ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Allora

$$\frac{f(x-n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)}$$

Se applichiamo a f, g separatamente il teorema di lagrange sull'intervallo $[a, x_n]$, otteniamo che l'ultimo quoziente scritto è uguale a:

$$\frac{f'(t_n)(x_n - a)}{g'(t_n^*)(x_n - a)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n^*)}$$

dove t_n, t_n^* sono fue punti opportuni che cadono nell'intervallo (a, x_n). Poichè quando $x_n \to 0$ anche t_n e $t_n^* \to 0$, sembra "ragionevole" che il limite del quoziente $\frac{f'}{g'}$ sia uguale al limite del quoziente $\frac{f}{g}$. Tuttavia questo non si può affermare rigorosamente, perchè le successioni t_n, t_n^* sono a priori diverse tra loro. Per aggirare il problema occorre modificare leggermente l'argomentazione seguita. Riprendiamo dunque la dimostrazione della $\frac{f(x-n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}$, e definiamo

$$h(x) = f(x_n)g(x) - g(x_n)f(x)$$

Notiamo che $h(a) = h(x_n) = 0$. La funzione h soddisfa le ipotesi del teorema di lagrange sull'intervallo $[a, x_n]$, dunque esiste $t_n \in (a, x_n)$ tale che

$$h'(t_n) = \frac{f(x_n) - h(a)}{x_n - a} = 0$$

ovvero, calcolando

$$h'(x) = f(x_n)g'(x) - g(x_n)f'(x), \qquad f(x_n)g'(t_n) - g(x_n)f'(t_n) = 0$$

Dunque per ogni x_n esiste un punto $t_n \in (a, x_n)$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

Per $n \to \infty$, $t_n \to a^+$, perciò $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to L$, e di conseguenza anche $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L$, che è quanto volevamo dimostrare.

Formula di Taylor con resto secondo Peano

Teorema di Taylor con resto di Peano

Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 che chiamo I e ed esiste $\exists f^{(n)}(x_0)$.

Allora risulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n,x_0}(x)$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad (1.1)$$

Dimostrazione

Partiamo dalla funzione $f(x)$ e la scriviamo nel modo seguente:

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = (\heartsuit)$$

Cosa ho fatto? Ho sommato e sottratto i termini

$$\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k k = 0, \dots, n$$

alla funzione $f(x)$. Ovviamente l'uguaglianza persiste proprio perché sommiamo e sottraiamo gli stessi termini, in pratica è come se sommassimo zeri alla funzione $f(x)$, il perché lo facciamo sarà subito chiaro.

$$(\heartsuit) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}^{\text{polinomio di Taylor}} +$$

$$+ \overbrace{\left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right]}^{R_{n,x_0}(x)}$$

Che cosa abbiamo fatto? Abbiamo evidenziato il fatto che una funzione sufficientemente buona è esprimibile come somma tra un polinomio e una certa funzione detta funzione resto, o funzione errore

Rimane da dimostrare che:

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

è un o piccolo di $(x-x_0)^n$ quando $x \to x_0$. Il che equivale a dimostrare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Dobbiamo quindi risolvere il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} \qquad (1.2)$$

Oddio penserai, ma questo è fuori come una campana stonata! E invece no! Utilizziamo il teorema di De l'Hopital, n-1-volte, ma sempre De l'Hopital è!

Oddio penserai, ma questo è fuori come una campana stonata! E invece no! Utilizziamo il teorema di De l'Hopital, n-1-volte, ma sempre De l'Hopital è!

Per ora concentriamoci sul numeratore $R_{n,x_0}(x)$

Derivata prima

$$R'_{n,x_0}(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Derivata Seconda

$$R''_{n,x_0}(x) = f''(x) - f''(x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

Procedendo in questo modo vediamo che cosa succede a ciascun termine:

$f(x)$ derivato n-1-volte diventa $f^{(n-1)}(x)$ e su questo non ci piove

$f(x_0)$ scompare quando deriviamo la prima volta è una costante, bye bye

$f'(x_0)(x - x_0)$ derivato la prima volta diventa $f'(x_0)$, derivato di nuovo si annulla... Au revoir

$\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ derivato la prima volta diventa semplicemente:

$\frac{2f''(x_0)}{2}(x - x_0) = f''(x_0)(x - x_0)$.

Derivandolo la seconda volta rimane solo $f''(x_0)$, alla terza derivazione sparisce.

Adesso analizziamo il caso generale:

$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, derivandolo esattamente k volte, quello che ti rimane è:

$f^{(k)}(x_0)$, derivandolo nuovamente scompare perché è una costante!!

Derivando n-1-volte $R_{n,x_0}(x)$, quello che ci rimane è:

$$R^{(n-1)}_{n,x_0}(x) = f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)] =$$

$$= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$$

Vediamo cosa succede al denominatore.

Denominatore

Il denominatore è:

$$D(x) := (x - x_0)^n$$

Derivando la prima volta:

$$D'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$$

derivando una seconda volta

$$D''(x) = n(n-1)(x - x_0)^{n-2}$$

$D''(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$

derivando n volte:

$D^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 1(x-x_0) = n!(x-x_0)$

Dunque dopo aver applicato $n-1$ volte De l'Hopital al limite (1.2) avremo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right]$$

Poiché la funzione $f(x)$ è derivabile n volte in x_0 allora per definizione di derivata si ha che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = f^{(n)}(x_0)$$

Possiamo quindi concludere che il limite

$$\frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] = 0$$

che è quello che volevamo dimostrare. Utilizzando la notazione degli o-piccolo:

$R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$

(1.1) $R_{n,x_0}(x)$ è detto resto, o errore. Esso dipende dall'ordine dello sviluppo n, da x_0 e da x of course. Attenzione che la scrittura

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Sta ad indicare che $R_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$ il resto è un infinitesimo di ordine superiore a n.

Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

Enunciato:

Teorema 4.19 (Formula di Taylor all'ordine n, con resto secondo Lagrange) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in $[a, b]$, e sia $x_0 \in [a, b]$. Allora esiste un punto c compreso tra x_0 e x tale che*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{7.9}$$

La formula precedente si dice "formula di Taylor (o di MacLaurin se $x_0 = 0$) di ordine n, con resto secondo Lagrange".

Dimostrazione:

Dimostrazione del teorema 4.19 Proviamo la (7.9) nel caso $n = 1$. Ponendo per comodità $x_0 = a, x = b$ l'enunciato diviene: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte in $[a, b]$, allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2. \tag{7.10}$$

Poniamo $f(b) - \{f(a) + f'(a)(b - a)\} = k(b - a)^2$ e cerchiamo di determinare la forma di k. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - k(b - x)^2$$

e applichiamo ad essa il teorema del valor medio. Poiché $g(b) = g(a) = 0$ (la seconda uguaglianza segue dalla definizione di k) si trova che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$0 = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

Ma $g'(x) = -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) + 2k(b-x) = (b-x)[2k - f''(x)]$ e quindi $g'(c) = 0$ implica, essendo $c \neq b$:

$$k = \frac{1}{2}f''(c)$$

Con lo stesso metodo si può dimostrare la (7.9) per n qualsiasi. Definiamo:

$$g(x) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)(b - x)^j}{j!} - k(b - x)^{n+1}$$

con k definito implicitamente dall'identità

$$f(b) - T_{n,a}(b) = k(b - a)^{n+1}. \tag{7.11}$$

Ora si procede così:

a) Si verifica che $g(b) = g(a) = 0$:

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$
$$g(a) = f(b) - T_{n,a}(b) - k(b - a)^{n+1} = 0 \text{ per definizione di } k.$$

b) Si applica il teorema di Lagrange a g in $[a, b]$, e si mostra che l'affermazione "esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$" è esattamente la (7.9). Cominciamo a calcolare g':

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)(b - x)^{j-1}}{(j - 1)!} + k(n + 1)(b - x)^n \\ &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + k(n + 1)(b - x)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)(b - x)^n}{n!} + k(n + 1)(b - x)^n \end{aligned}$$

(dove nel secondo passaggio abbiamo eseguito una traslazione di indici nella sommatoria).

Allora $g'(c) = 0$ significa:

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)(b - c)^n}{n!} + k(n + 1)(b - c)^n = 0$$

ossia

$$k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}$$

che, inserita nella (7.11), dà la tesi. ◆

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Enunciato:

TEOREMA 6.6 (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, e G è una sua primitiva su $[a,b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE. Siano $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ punti che suddividono l'intervallo $[a,b]$ in n intervallini di ugual ampiezza. Allora, aggiungendo e togliendo $G(x_j)$ per $j = 1, 2, \ldots, n-1$ si ha:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) &= [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + \cdots \\ &\cdots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] = \\ &= \sum_{j=1}^{n} [G(x_j) - G(x_{j-1})] \end{aligned}$$

Applichiamo ora il teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$. Esiste allora $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1})G'(\xi_j) = (x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$$

perché per ipotesi G è una primitiva di f e perciò $G'(\xi_j) = f(\xi_j)$. Ne segue che

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})f(\xi_j) = S_n$$

dove S_n è una somma n-esima di Cauchy-Riemann di f. L'identità scritta vale per ogni n; possiamo allora far tendere n a $+\infty$, trovando

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si osservi che questa dimostrazione prova che *una certa* successione di Cauchy-Riemann di f tende a $G(b) - G(a)$. Poiché però sappiamo già che f è integrabile, in quanto continua (per il Teorema 6.1, che proveremo in seguito), questo è sufficiente a concludere che ogni altra successione di Cauchy-Riemann converge allo stesso limite, e quindi vale la formula enunciata. ◆

Condizione necessaria per la convergenza delle serie

L'enunciato classico è il seguente:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie numerica (reale, complessa).

Se essa converge ad S allora si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione

Sia $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ la successione delle somme parziali. Per ipotesi sappiamo che la serie converge ad un numero S, e per definizione di serie convergente si ha che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \iff \lim_{k\to\infty} s_k = S$$

Si ha che:

$$a_k = s_k - s_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}$$

passando al limite membro a membro:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \overbrace{\lim_{k\to\infty} s_k}^{S} - \overbrace{\lim_{k\to\infty} s_{k-1}}^{S} = 0$$

Abbiamo dimostrato che SE la serie converge ALLORA il suo termine n-esimo tende a zero.

Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

Enunciato:

Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

e $l > 1$ la serie diverge, se $l < 1$ la serie converge; se $l = 1$ nulla si può concludere.

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DEL RAPPORTO

È simile alla precedente. Supponiamo prima che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

Ragionando come nella dimostrazione precedente, si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

definitivamente, per qualche $\varepsilon > 0$. Ciò implica, ragionando iterativamente, che:

$$a_{n+1} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{n-1} < \dots < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n a_1$$

Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n a_1$, la serie di partenza converge.

Se ora, invece, è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$$

con un ragionamento simile si deduce che

$$a_{n+1} > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n a_1$$

definitivamente, per un certo $\varepsilon > 0$. Dunque $a_n \to +\infty$, e la serie diverge.

Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi

Enunciato:

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che

$$a_n \leq b_n \qquad \text{definitivamente}$$

Allora valgono le seguenti implicazioni

i) $\sum b_n$ convergente $\implies$ $\sum a_n$ convergente

ii) $\sum a_n$ divergente $\implies$ $\sum b_n$ divergente.

La serie $\sum b_n$ viene detta *maggiorante*, la $\sum a_n$ *minorante*.

Questo e i prossimi criteri saranno dimostrati alla fine del paragrafo.

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DEL CONFRONTO

Con le stesse notazioni impiegate nell'enunciato, sia:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k; \qquad s_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Poiché $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k, sommando membro a membro le disuguaglianze per k da 1 a n, si ottiene $0 \leq s_n \leq s_n^*$. Sappiamo già che una serie a termini positivi è regolare, ossia o converge o diverge (non può oscillare). Dunque le affermazioni *i)* e *ii)* sono logicamente equivalenti, perciò basta dimostrare la seconda, che è immediata perché: dire che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge significa, per definizione di serie divergente, che $s_n \to +\infty$.

D'altro canto è $s_n \leq s_n^*$, perciò, per il criterio del confronto per le successioni, anche $s_n^* \to +\infty$, ossia $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Criterio della radice per la convergenza della serie a termini positivi

Enunciato:

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

e $l > 1$ la serie diverge, se $l < 1$ la serie converge; se $l = 1$ nulla si può concludere.

Dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DELLA RADICE

Supponiamo prima che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \to l$, allora fissato comunque un $\varepsilon > 0$, definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$.

D'altro canto $l < 1$, perciò è anche $l < 1 - \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ opportuno.

Per questo ε si ha dunque che, definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2} < (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi

$$a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, la serie di partenza converge.

Se ora, invece, è

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$$

con un ragionamento simile si deduce che

$$a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

definitivamente, per un certo $\varepsilon > 0$. Dunque $a_n \to +\infty$, e la serie diverge.

Giustificazione della formula di Eulero con l'esponenziale complesso

Enunciato:

La formula di Eulero afferma che, per ogni numero reale x si ha:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dimostrazione:

Dimostrazione alternativa [modifica | modifica wikitesto]

Sia:

$$f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}.$$

Questo è ammesso in quanto il modulo dell'esponenziale al denominatore è:

$$e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$$

il che implica che e^{ix} è sempre diverso da zero.

La derivata di f è, secondo la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x + i \cos x) \cdot e^{ix} - (\cos x + i \sin x) \cdot i \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} = \frac{-\sin x \cdot e^{ix} - i^2 \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} = 0$$

Pertanto f deve essere una funzione costante, quindi dalla seguente relazione:

$$f(0) = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{e^0} = 1,$$

si ottiene che tale costante deve essere uguale a 1. Ciò significa che il numeratore e il denominatore nella definizione di f devono essere uguali per ogni x, ovvero deve valere la formula di Eulero.