

Grazia Dassù

Fabio Inzoli

# **Lezioni di Fisica Tecnica**

## **Trasmissione del calore**

*Terza Edizione*



# INDICE

<b>1. La trasmissione del calore</b>	<b>1</b>
1.1. Il trasporto conduttivo	1
1.2. Il trasporto convettivo	2
1.3. Il trasporto radiante	3
1.4. Problemi di scambio termico	3
1.5. Il bilancio energetico	5
1.6. Esercizi	7
<b>2. Introduzione alla conduzione</b>	<b>9</b>
2.1. Il postulato di Fourier	9
2.2. La conduttività termica	11
2.2.1. La conduttività termica nei solidi	12
2.2.2. La conduttività termica nei liquidi	13
2.2.3. La conduttività termica nei gas	14
2.3. L'equazione generale della conduzione	15
2.4. Il problema differenziale	17
2.5. Linee di flusso in regime stazionario e senza generazione interna	20
<b>3. Conduzione termica in regime stazionario</b>	<b>23</b>
3.1. Conduzione monodimensionale senza generazione interna	23
3.1.1. Parete piana indefinita	24
3.1.2. Parete cilindrica indefinita	31
3.1.3. Raggio critico di isolamento	37
3.1.4. Parete sferica cava	39
3.2. Resistenza termica di contatto	42
3.3. Sistemi con generazione interna	43
3.3.1. Parete piana indefinita	43
3.3.2. Cilindro indefinito	46
3.4. Le alettature	47
3.5. Il problema della barra	47
3.5.1. Barra di lunghezza infinita	49
3.5.2. Barra di lunghezza finita con estremità adiabatica	49
3.5.3. Barra di lunghezza finita con scambio convettivo all'estremità	50
3.6. Le superfici alettate	51
3.7. Esercizi	53
<b>4. Regime Variabile</b>	<b>55</b>
4.1. Modello con resistenza interna trascurabile ( $Bi < 0.01$ )	59
4.2. Modello a resistenza interna non trascurabile ( $Bi > 0.01$ )	61
4.2.1. Problema di Dirichlet	62
4.2.2. Problema di Cauchy	64

4.3.	La parete seminfinita in regime variabile ( $Bi > 0.01$ )	69
4.4.	Esercizi	76
<b>5.</b>	<b>Metodi numerici per i problemi di conduzione</b>	<b>77</b>
5.1.	Formulazione alle differenze finite	78
5.2.	Differenze finite per il regime stazionario	81
5.3.	Differenze finite per il regime non stazionario	83
5.3.1.	Schema esplicito	85
5.3.2.	Condizioni di stabilità	86
5.3.3.	Schema implicito	86
5.4.	Conclusione	87
<b>6.</b>	<b>La convezione</b>	<b>89</b>
6.1.	Generalità sui meccanismi di trasporto	90
6.1.1.	Trasporto di massa	91
6.1.2.	Trasporto di calore	91
6.1.3.	Trasporto molecolare della quantità di moto	92
6.2.	La fluidodinamica su lastra piana	93
6.2.1.	Strato limite fluidodinamico	93
6.2.2.	Il numero di Reynolds	96
6.2.3.	Strato limite termico	98
6.2.4.	Il numero di Prandtl	99
6.3.	La determinazione del coefficiente convettivo: il numero di Nusselt	100
6.4.	Il teorema di Buckingham	101
6.5.	Esercizi	102
<b>7.</b>	<b>Convezione forzata</b>	<b>105</b>
7.1.	Coefficienti di attrito e convettivo su lastra piana in convezione forzata	105
7.1.1.	Le correlazioni sperimentali	109
7.2.	Flusso su cilindri	112
7.3.	Flusso all'interno di tubi	115
7.3.1.	Moto laminare	117
7.3.2.	Moto turbolento	121
7.4.	Scambio termico in un tubo	123
7.4.1.	Flusso termico areico costante	124
7.4.2.	Temperatura superficiale del condotto costante	125
7.5.	Esercizi	129
<b>8.</b>	<b>La convezione naturale</b>	<b>131</b>
8.1.	Caratteristiche fenomenologiche	131
8.2.	Il coefficiente convettivo in convezione naturale	134
8.2.1.	Il numero di Grashoff	136
8.3.	Le correlazioni per convezione naturale	136
8.4.	La convezione naturale all'interno di cavità	140
8.5.	Convezione mista	142
8.6.	Esercizi	143

<b>9. Scambiatori di calore</b>	<b>145</b>
1.1.	146
9.1.	Il coefficiente globale di scambio termico 148
9.2.	Il metodo della differenza di temperatura media logaritmica 150
9.2.1.	Scambiatore in equicorrente 151
9.2.2.	Scambiatore in controcorrente 156
9.3.	Scambiatori di calore a passaggi multipli 162
9.4.	Efficienza dello scambiatore di calore 164
9.5.	Il metodo NTU 165
9.5.1.	Analisi dimensionale 165
9.6.	Le perdite di carico 172
9.7.	Esercizi 173
<b>10. L'irraggiamento</b>	<b>175</b>
10.1.	La radiazione elettromagnetica 175
10.1.1.	Grandezze caratteristiche 177
10.2.	L'intensità della radiazione 178
10.3.	La radiazione emessa: il potere emissivo 181
10.4.	L'interazione tra radiazione e superficie: radiosità e irradiazione 183
10.5.	Interazioni tra radiazione e mezzo 185
10.6.	L'emissione del corpo nero 188
10.6.1.	La banda di emissione 191
10.7.	La legge di Kirckoff ed il radiatore integrale 192
10.8.	L'emissione del corpo grigio 196
10.9.	Esercizi 198
<b>11. Lo scambio termico per irraggiamento</b>	<b>199</b>
11.1.	Il fattore di forma (o di vista) 199
11.2.	Lo scambio termico tra corpi neri 205
11.3.	Lo scambio radiante tra corpi grigi 206
11.3.1.	Pareti piane parallele ed indefinite 210
11.3.2.	Superfici cilindriche coassiali ed indefinite 210
11.3.3.	Superfici sferiche concentriche 211
11.3.4.	Corpo in una cavità molto grande 211
11.3.5.	Schermi radianti 211
11.4.	Scambio termico in cavità con tre superfici 215
11.5.	Il sole 216
11.6.	Scambio termico sulla superficie terrestre 219
11.7.	Irraggiamento e misura della temperatura 222
11.8.	Esercizi 224



# 1. La trasmissione del calore

Nell'introdurre il primo principio della termodinamica è stato messo in evidenza come il calore costituisca uno dei modi di interazione di un sistema termodinamico con l'esterno.

In particolare, per un sistema chiuso agli scambi di massa, il bilancio energetico del sistema consente di scrivere:

$$\Delta U = Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow}$$

Si rammenta che l'energia interna  $U$  è funzione di stato, mentre il calore  $Q$  ed il lavoro  $L$  non sono proprietà termodinamiche.

Il secondo principio della termodinamica ha definito un legame tra il calore scambiato dal sistema e la proprietà entropia, proprietà che è rivelata utile per il calcolo delle irreversibilità.

Il concetto di calore introdotto in termodinamica resta comunque troppo astratto e non porta ad una interpretazione dei fenomeni di scambio termico. E' da osservare che sebbene la termodinamica incentri la sua attenzione sullo scambio termico non prende in considerazione né i meccanismi di scambio né i modi per determinare il calore scambiato. La termodinamica tratta inoltre di un sistema in condizioni di equilibrio, mentre la trasmissione del calore in un sistema presuppone un disequilibrio termico.

La descrizione fenomenologica dello scambio termico consente invece di definire il calore come il termine di trasporto energetico che trae origine da una differenza di temperatura. La trasmissione del calore è la disciplina che ha l'obiettivo di valutare entità e modi dello scambio termico, scomponendo a tal fine il fenomeno reale nei suoi meccanismi elementari di trasporto.

Lo scambio termico può essere classificato in base alla modalità con cui si realizza la trasmissione del calore. Tali modalità possono essere riassunte, secondo lo schema riportato in figura 1.1, in: diffusione dell'energia e irraggiamento.

## 1.1. Il trasporto conduttivo

In generale quando la diffusione di energia termica ha luogo in un sistema macroscopicamente in quiete si parla di conduzione. Tale scambio

ha luogo sempre nei solidi ma anche nei fluidi in quiete. Ad esempio il trasporto di calore nella parete di separazione tra due ambienti a temperature diverse è un tipico problema di conduzione. Si ha trasporto di energia senza avere movimento macroscopico di materia.

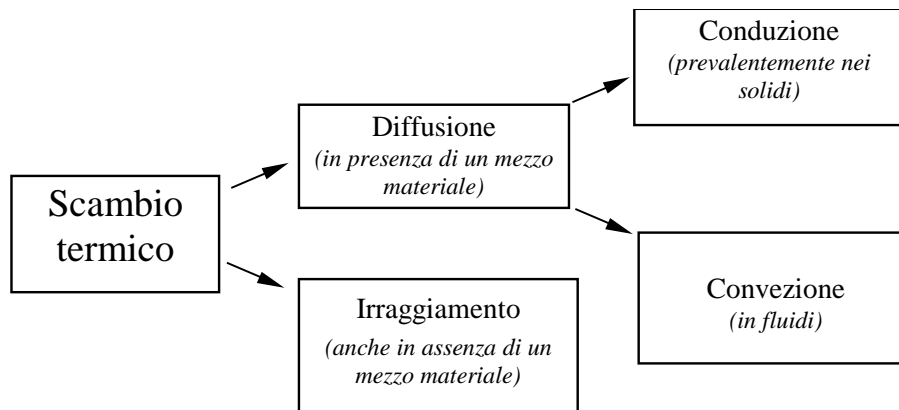


Figura 1.1 Modalità di scambio termico

Ciascuno dei meccanismi di trasporto citati si regge su una legge fenomenologica semplice. L'ipotesi fondamentale su cui è fondata la conduzione è la relazione tra il flusso termico areico e la differenza di temperatura; essa è detta postulato di Fourier:

$$\mathbf{J} = -k \text{ grad}T$$

ove la costante  $k$  è detta conduttività termica del mezzo. Questa relazione mette in evidenza un legame di semplice proporzionalità tra causa (gradiente di temperatura) ed effetto (flusso termico).

## 1.2. Il trasporto convettivo

Si parla di convezione quando si ha un sistema costituito da un fluido in movimento macroscopico rispetto ad un solido ed in presenza di una differenza di temperatura: tra i due sistemi si ha trasporto di energia (scambio termico) associato al trasporto di massa. Occorre precisare che la presenza di un processo di scambio termico per convezione implica la contemporanea presenza di uno scambio termico per conduzione. Nel mezzo in moto si ha infatti, in presenza di gradienti di temperatura, uno scambio termico per conduzione nello strato di fluido aderente al solido. Un esempio di scambio termico per convezione è il raffreddamento di un componente elettronico investito da un flusso di aria mossa da un ventilatore. Il trasporto di energia tra la superficie del componente e l'aria che lo lambisce è dovuto sia ad un fenomeno di tipo conduttivo nel gas sia al movimento macroscopico delle molecole di gas.



L'equazione base della convezione è la legge di Newton che definisce un legame tra flusso termico areico all'interfaccia solido-liquido e differenza di temperatura tra la superficie del solido ed il fluido:

$$J = h(T_p - T_\infty)$$

In essa il coefficiente di proporzionalità  $h$  è chiamato coefficiente convettivo o liminare.

### 1.3. Il trasporto radiante

L'irraggiamento è invece un meccanismo di scambio per onde elettromagnetiche che si verifica anche in assenza di materia. In questo caso è anzi l'unico meccanismo di scambio termico possibile. Un esempio di scambio termico per irraggiamento è rappresentato dall'esposizione alla radiazione solare di un satellite nello spazio cosmico: la superficie del satellite si porta ad una temperatura di equilibrio termodinamico che si stabilisce a seguito degli scambi esclusivamente radianti con il sole (serbatoio caldo) e con la volta celeste (serbatoio freddo).

Come sarà illustrato nel capitolo 10 la potenza termica radiante emessa da una superficie ideale (corpo nero) è funzione della sua temperatura termodinamica e valutabile con la legge di Stefan-Boltzmann:

$$\dot{Q} = S\sigma_0 T^4$$

ove  $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$  è la costante di Stefan-Boltzmann mentre la potenza termica scambiata risulta proporzionale alla differenza della quarta potenza delle temperature assolute.

### 1.4. Problemi di scambio termico

In presenza di materia i processi di scambio termico per diffusione e per irraggiamento possono verificarsi contemporaneamente. La distinzione fatta in precedenza è quindi dettata dall'esigenza di affrontare nel modo più semplice processi complessi: esistono infatti situazioni in cui alcuni contributi sono trascurabili rispetto ad altri e questo consente di semplificare la trattazione del problema.

Inoltre nello studio dei fenomeni di scambio termico, come già accennato, si analizzano sistemi in condizioni di non equilibrio termodinamico. La termodinamica del non equilibrio o termodinamica irreversibile è argomento complesso e non viene trattato in un corso di Fisica Tecnica.

Per questa ragione si riterrà valido il principio dell'equilibrio locale: si postula che il sistema termodinamico sede di scambio termico sia in condizioni di equilibrio locale. Con questa ipotesi se si considera un volume

elementare di continuo questo può subire trasformazioni quasi-statiche per le quali, localmente, sono definite tutte le proprietà termodinamiche. Con il termine di volume elementare di continuo è intesa una porzione infinitesima di materia, in senso fisico e non matematico, cioè di un ordine di grandezza inferiore alla nostra percezione diretta, ma più grande dei costituenti elementari della materia, molecole e/o atomi.

Prima di trattare in dettaglio i meccanismi elementari di scambio termico si ritiene opportuno illustrare, a titolo di esempio, alcuni tipici problemi ingegneristici che si affrontano con gli strumenti offerti dalla trasmissione del calore:

**Isolamento termico:** in questo tipo di problemi sono generalmente note le temperature ai due estremi di un mezzo e si deve determinare la potenza termica che attraversa il mezzo stesso; nella maggior parte dei casi si vuole raggiungere lo scopo di ridurre la potenza scambiata tenendo in considerazione aspetti economici, quali il costo dell'isolamento, e/o geometrici come ad esempio il volume complessivo del sistema. Il lavoro di progettazione consiste quindi nella scelta del sistema di isolamento (materiale, forma, etc.) in modo da ridurre la potenza dissipata rimanendo invariate le temperature.

**Efficacia dello scambio termico:** questo tipo di problemi riguardano l'aumento dell'efficacia dello scambio termico. Nella progettazione di alcuni componenti di impianti industriali è spesso necessario migliorare lo scambio termico al fine di minimizzare le dimensioni dei componenti. Un esempio tipico è quello degli scambiatori di calore che vengono utilizzati per il trasferimento di potenza termica tra due correnti fluide. Nella progettazione di questi dispositivi è generalmente nota la potenza termica che deve essere scambiata così come le portate dei fluidi. La ottimizzazione termodinamica prevede la riduzione delle irreversibilità del processo che sappiamo presenti quando si ha scambio termico con differenze finite di temperatura. L'obiettivo in questo caso è quello di individuare soluzioni tecnologiche e materiali che consentano, fissata la potenza termica da scambiare, di minimizzare la differenza di temperatura tra i due fluidi.

**Controllo della temperatura:** in questa classe di problematiche sono da considerare le esigenze di limitazione delle temperature di esercizio di componenti meccanici od elettronici di particolari dispositivi. Un semplice esempio è costituito dal funzionamento di un processore di un computer. Nel processore vengono dissipate potenze per effetto Joule che tendono ad innalzare la temperatura del componente stesso. Tale temperatura deve ovviamente essere controllata mediante un sistema di raffreddamento al fine di ottenere un funzionamento ottimale del dispositivo.

## 1.5. Il bilancio energetico

Il punto di partenza per la soluzione di un qualsiasi problema di scambio termico è rappresentato dall'equazione di bilancio energetico.

L'applicazione di questa equazione richiede, come primo passo, la identificazione di un volume di controllo, delimitato da una superficie di controllo attraverso cui si può avere flusso di energia e di massa. Si assume che il volume di controllo sia costante e fisso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. La traduzione del bilancio energetico in una equazione può essere effettuata in due differenti modi.

Si può scrivere l'equazione di bilancio energetico in termini di potenze. In tal caso si ha una relazione che eguaglia la potenza netta entrante nel sistema, espressa come somma di una potenza termica e meccanica che attraversa la superficie di controllo e di una potenza termica generata (o dissipata) nel volume di controllo, alla variazione di energia nell'unità di tempo del sistema:

$$\frac{dE_{VC}}{dt} = \dot{E}_{SC}^{\leftarrow} + \dot{\Sigma}_{gen}^{\leftarrow}$$

In questa relazione le diverse grandezze in gioco sono dimensionalmente potenze (flussi termici) espresse quindi nel Sistema Internazionale di unità di misura in [W]. Nel testo si utilizzerà anche la dizione flusso termico per indicare la potenza termica.

In alternativa si può usare la scrittura dell'equazione di bilancio in termini di energie scambiate in un intervallo finito di tempo: in questo caso si ha una relazione che eguaglia la energia netta entrante nel sistema, espressa come somma di energia termica e meccanica che attraversa la superficie di controllo e di una energia termica dissipata nel volume di controllo, con la variazione di energia del sistema:

$$\Delta E_{VC} = E_{SC}^{\leftarrow} + \Sigma_{gen}^{\leftarrow}$$

In questa seconda relazione le diverse grandezze in gioco sono dimensionalmente energie e misurate quindi nel Sistema Internazionale di unità di misura, in [J].

Il termine associato alla potenza o all'energia che attraversa la superficie di controllo del sistema ( $E_{SC}$ ) è generalmente proporzionale alla superficie del sistema stesso.

Nello studio dello scambio termico si ha spesso a che fare con sistemi chiusi in cui lavoro meccanico non è presente. In questo caso le equazioni di bilancio si scrivono nelle forme:

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \dot{Q}^{\leftarrow} + \dot{\Sigma}_{gen}^{\leftarrow} \\ \Delta U &= Q^{\leftarrow} + \Sigma_{gen}^{\leftarrow}\end{aligned}$$

In queste relazioni  $U$  è l'energia interna del sistema.

I meccanismi di scambio termico, come già detto, sono la conduzione, la convezione e l'irraggiamento. Quando si ha, attraverso la superficie di controllo, uno scambio di massa si hanno anche altre forme di energia che intervengono e che compaiono nella espressione del bilancio energetico per i sistemi aperti.

Il termine associato alla potenza o all'energia generata nel volume di controllo ( $\Sigma_{gen}$ ) è generalmente proporzionale al volume del sistema. Questo termine include altre forme di energia (chimica, elettrica, etc.) che possono far variare l'energia interna del sistema.

Se il sistema opera in regime stazionario (o permanente) il termine associato alla variazione di energia interna del volume di controllo è nullo.

Per la soluzione di alcuni problemi si applicherà l'equazione di conservazione dell'energia alla sola superficie di controllo del sistema. In tal caso, non essendo associata alla superficie una massa, non c'è possibilità né di variazione di energia interna né di dissipazione volumica e l'equazione di bilancio si riduce a:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

Questa relazione rimane valida sia in regime non stazionario che in regime stazionario.

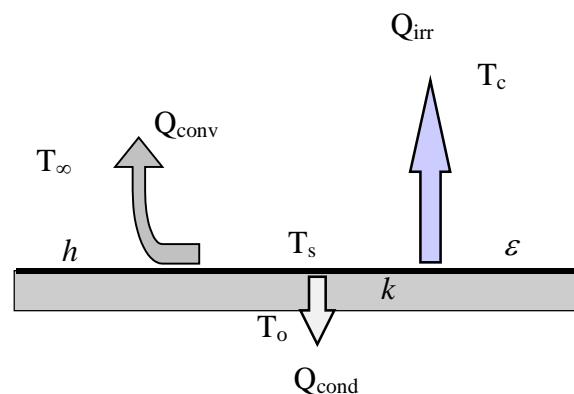


Figura 2.1 Schematizzazione di una soletta di un terrazzo con evidenziati gli scambi energetici

A titolo di esempio si può illustrare la determinazione della temperatura di equilibrio della superficie di un terrazzo non investito da una radiazione diretta, che viene appunto calcolata imponendo che sia nulla la potenza netta entrante somma della potenza termica scambiata per convezione ed irraggiamento verso l'esterno e per conduzione verso l'interno attraverso la soletta di spessore  $L$  e superficie  $S$  (fig. 2.1).

L'equazione di bilancio globale risultante è:

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = \dot{Q}_{\text{conv}} + \dot{Q}_{\text{irr}}$$

$$\frac{kS}{L}(T_o - T_s) = hS(T_s - T_\infty) + \varepsilon\sigma_o S(T_s^4 - T_c^4)$$

In questa relazione  $T_s$  è la temperatura di equilibrio della superficie del terrazzo,  $T_o$  la temperatura della superficie della soletta nell'ambiente interno,  $T_\infty$  la temperatura dell'aria,  $T_c$  la temperatura del cielo (che verrà definita nell'illustrare l'irraggiamento solare),  $k$  è la conduttività termica della soletta di spessore  $L$ ,  $h$  il coefficiente convettivo mentre  $\varepsilon$  è il coefficiente di emissione della soletta.

In pratica ogni caso fisico verrà schematizzato nel modo più semplice e per esso, o per ogni sua parte, verrà impostata l'equazione di bilancio, i cui termini saranno formulati in forma diversa a seconda dei meccanismi di trasporto coinvolti.

Il problema potrà poi essere risolto con mezzi diversi (analitici, analogici, numerici, etc.) ma potremo comunque pragmaticamente definire "soluzione" del problema termico la determinazione della distribuzione di temperatura, perché da questa potremo risalire a tutte le altre informazioni utili dal punto di vista progettuale.

In generale la distribuzione di temperatura in un mezzo ed il flusso termico attraverso di esso sono controllati dagli effetti combinati di diversi meccanismi di trasmissione del calore. Quando un meccanismo è dominante, gli effetti degli altri possono essere trascurati, e questo semplifica l'analisi del problema termico.

## 1.6. Esercizi

*La parete di un forno ha una spessore  $L = 10$  cm ed è realizzata con mattoni refrattari di conduttività termica  $k = 1.7$  W/mK. Durante il funzionamento del forno vengono misurate le temperature delle superfici del forno: la superficie interna ha una temperatura  $T_i = 1200$  °C mentre la superficie esterna ha una temperatura  $T_e = 250$  °C. Determinare il flusso termico areico che attraversa la parete.*

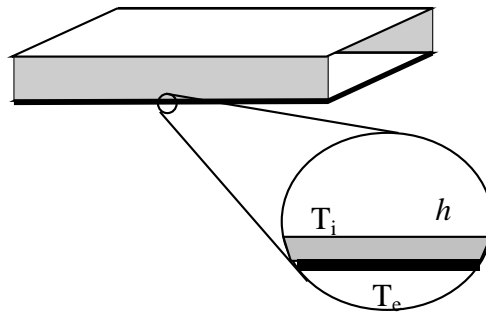
$$(J = 16150 \text{ W/m}^2)$$

*Un condotto per il trasporto di liquido con diametro  $D = 60$  mm ha una temperatura superficiale  $T_s = 250$  °C. Il condotto cede calore per convezione in aria a temperatura  $T_\infty = 25$  °C con un coefficiente convettivo  $h = 20$  W/m<sup>2</sup>K. Determinare la potenza termica dissipata per unità di lunghezza.*

$$(Q = 848 \text{ W/m})$$

*Una sottile resistenza elettrica viene utilizzata per dissipare un flusso termico areico costante sulla superficie esterna di un condotto all'interno del quale scorre aria. La parete del condotto ha uno spessore  $s = 10$  mm ed una*

conduttività termica  $k = 20 \text{ W/mK}$ . In una certa sezione del condotto la temperatura dell'aria è  $30^\circ\text{C}$  mentre il coefficiente convettivo è  $h = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Quale deve essere il flusso termico areico  $J$  per avere una temperatura superficiale  $T_i = 80^\circ\text{C}$ . In questo caso quale è la temperatura superficiale  $T_e$  a contatto con la resistenza.



$(J = 10000 \text{ W/m}^2; T_e = 85^\circ\text{C})$

Una sonda interplanetaria sferica con diametro  $D = 0.5 \text{ m}$  contiene componentistica elettronica che dissipa una potenza  $L = 200 \text{ W}$ . La superficie della sonda ha emissività  $\varepsilon = 0.8$  e non riceve radiazione da altri corpi. Determinare la temperatura superficiale della sonda.

$(T = 0^\circ\text{C})$

## 2. Introduzione alla conduzione

La conduzione è il processo di trasmissione del calore senza movimento macroscopico di materia che si realizza in un mezzo, solido, liquido o gassoso, dalle zone a maggiore temperatura verso le zone a minore temperatura. Il meccanismo che è alla base della propagazione del calore è diverso a seconda della struttura fisica del corpo. Come sarà illustrato più avanti, la conduzione termica nei metalli è un fenomeno attribuibile alla migrazione di elettroni liberi, nei solidi dielettrici e nei liquidi avviene per mezzo di onde elastiche mentre nei gas è dovuto alla diffusione atomica e molecolare. La teoria analitica della conduzione fa riferimento ad un mezzo continuo non tenendo conto della sua struttura molecolare e prescinde dal meccanismo fisico di propagazione.

Come già osservato la conduzione del calore si manifesta in presenza di differenze di temperatura tra diversi punti di un mezzo.

### 2.1. Il postulato di Fourier

Si consideri un mezzo materiale isotropo ed omogeneo sede di trasmissione del calore per conduzione. Dal punto di vista termico esso è compiutamente descritto quando sia noto il campo spaziale di temperatura all'istante generico  $t$ . L'ipotesi fatta di continuo permette di considerare la temperatura (e gli altri parametri che lo caratterizzano) funzione continua e regolare del punto  $\mathbf{x}$ . Si potrà pertanto scrivere:

$$T = T(\mathbf{x}, t)$$

Si definisce superficie isoterma il luogo dei punti aventi allo stesso istante la stessa temperatura: le superfici isoterme non possono intersecarsi non potendo esistere punti aventi allo stesso istante temperature diverse. Al campo scalare delle temperature si può associare il campo vettoriale del gradiente di temperatura, che ne esprime la variabilità all'intorno del punto. Anche il vettore gradiente sarà funzione del punto e del tempo:

$$\text{grad}T = f(\mathbf{x}, t)$$

Se la temperatura non è uniforme si instaurerà spontaneamente un flusso di calore  $J$  dalle zone più calde verso le zone più fredde, secondo le

indicazioni del secondo principio della termodinamica. Considerando la differenza di temperatura tra due punti infinitamente prossimi come la causa del trasporto, l'ipotesi più semplice (ipotesi di Fourier) consiste nell'ammettere una semplice proporzionalità tra tale causa e l'effetto prodotto (flusso termico areico  $\mathbf{J}$ ). In termini vettoriali si scriverà:

$$\mathbf{J} = -k \text{grad} T$$

ove  $k$  è una costante dimensionata detta conduttività termica del mezzo materiale in cui avviene il trasporto. Il segno meno precisa la direzione ed il verso secondo i quali è orientato il flusso. La definizione analitica di gradiente, chiarisce che esso è orientato secondo la direzione di massimo accrescimento della funzione: il segno meno sta allora ad indicare che l'energia si trasferisce in senso opposto, nel verso delle temperature decrescenti. Il vettore flusso termico areico  $\mathbf{J}$  fisicamente rappresenta il calore che fluisce nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria normale alla direzione di propagazione e si misura pertanto in  $[\text{W}/\text{m}^2]$ .

Il gradiente di uno scalare (in questo caso la temperatura  $T$ ) è un vettore. In coordinate cartesiane ortogonali:

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}$$

in cui  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sono i versori degli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Si dimostra che la massima variazione dello scalare si verifica nella direzione del vettore gradiente e che essa ha modulo pari a quello del vettore stesso: il vettore  $\text{grad} T$  esprime di conseguenza in direzione e modulo la variabilità della temperatura all'intorno del punto considerato.

L'ipotesi di Fourier, qui assunta come legge fisica, rappresenta l'equazione costitutiva del mezzo entro il quale si ha il trasporto di calore. Essa è ben confermata dall'esperienza, intendendosi con ciò dire che, nell'ambito delle situazioni normalmente sperimentate e degli strumenti impiegati, lo scostamento fra il comportamento di un conduttore "alla Fourier" e di un mezzo reale, è inferiore agli errori di misura normalmente commessi. Se il trasporto di calore ha luogo in una sola direzione, l'ipotesi di Fourier può essere scritta in forma scalare:

$$J = -k \frac{dT}{dn}$$

L'espressione in forma scalare è ammessa visto che il vettore flusso ha, in questo caso, come unica componente quella nella direzione dell'asse  $n$ . Anche in questo caso il segno meno è convenzionale e precisa che il flusso termico ha verso discorde con l'asse  $n$ .

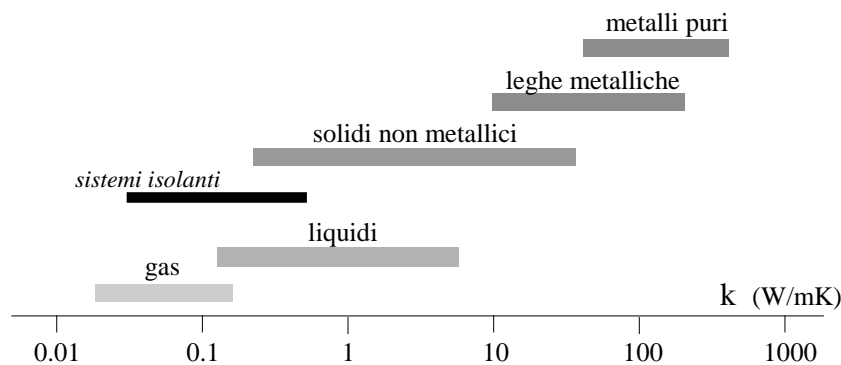


## 2.2. La conduttività termica

Introducendo il postulato di Fourier è stata definita una nuova grandezza denominata conduttività termica:

$$k = -\frac{J}{\text{grad}T}$$

Questa grandezza, che può essere determinata sperimentalmente con la misura del flusso termico areico e del gradiente di temperatura, è una proprietà del mezzo materiale che costituisce il sistema e dipende, come è logico intuire, dalla struttura fisica, atomica e molecolare della materia. Se ci si riconduce alla modalità secondo cui si ha scambio termico in un mezzo ed ai meccanismi fisici ad esso associati si può affermare che, in generale, la conduttività termica dei solidi è superiore alla conduttività termica dei liquidi che a sua volta è superiore alla conduttività termica dei gas come per altro è messo in evidenza in figura 2.1. Questo è dovuto principalmente, alla differente struttura atomica associata ai diversi stati di aggregazione.



*Figura 2.1 Valori indicativi della conduttività termica di materiali diversi in condizioni normali di temperatura e pressione*

Da un punto di vista generale la conduttività termica di un mezzo non dipende solo dallo stato termodinamico del mezzo  $k = k(T,P)$ , ma anche dalla direzione secondo cui si applica il gradiente di temperatura e dal punto materiale in cui si valuta la conduttività stessa. Un mezzo, dal punto di vista della conduzione, è generalmente anisotropo e non omogeneo.

In figura 2.2 è riportata la dipendenza della conduttività termica dalla temperatura per diversi materiali mentre nella tabella 2.I sono riportate le conduttività termiche a temperatura ambiente di alcuni materiali di comune impiego.

Materiale	Sostanza	Conduttività termica (W/mK)
cristallo	Diamante	2300
solidi metallici	Ag	429
	Cu	401
	Au	317
	Al	237
	Fe	80.2
	Bronzo (Cu 90% + Al 10%)	52
	Acciaio (C 1%)	43
	Costantina (Cu 55% + Ni 45%)	23
	Acciaio inox	15
isolanti	Porcellana	1.03
	Vetro	0.78
	Mattone	0.72
	Terra	0.59
	Cemento	0.3
	Plexiglass	0.184
	Legno	0.17
	Gomma	0.13
	Carta	0.12
	Fibra di vetro	0.043
	Lana	0.036
liquidi	Hg	8.54
	Acqua	0.613
gas	He	0.152
	Aria	0.026

Tabella 2.1 Conduttività termica a temperatura ambiente di alcune sostanze

### 2.2.1. La conduttività termica nei solidi

Un solido è costituito da un insieme di atomi disposti più o meno regolarmente all'interno di un reticolo. Nei solidi metallici sono presenti elettroni liberi ed il trasporto di energia termica è associato a due fenomeni: la vibrazione del reticolo che genera onde elastiche dette fononi e la migrazione di elettroni liberi. Questi effetti sono additivi per cui la conduttività termica è data dalla somma della componente elettronica  $k_e$  e della componente fononica  $k_f$ :

$$k = k_e + k_f$$

In prima approssimazione  $k_e$  è inversamente proporzionale alla resistività elettrica e pertanto un buon conduttore elettrico, come un metallo puro, è anche un ottimo conduttore termico. Per le leghe metalliche, invece, il

contributo fononico è dello stesso ordine di grandezza del contributo elettronico. I materiali non metallici hanno solo una conduttività termica fononica che dipende dalla frequenza di vibrazione del reticolo del mezzo. Si hanno i più elevati valori di conduttività termica fononica per i materiali con migliore organizzazione del reticolo. Il diamante, per esempio, ha una struttura cristallina che consente di avere conduttività termica migliore di quella di un ottimo metallo puro pur avendo una resistenza elettrica elevata. Questo giustifica il suo impiego, come quello del silicio, nella realizzazione di componenti elettronici.

Analizzando i dati riportati nella tabella 2.I si può osservare che la conduttività termica delle leghe metalliche è inferiore alla conduttività termica dei singoli costituenti la lega: sono leghe gli acciai, il bronzo e la costantana.

Un discorso a parte meritano i materiali utilizzati come isolanti che, nella maggior parte dei casi, sono materiali non omogenei. Infatti si ottengono accorpono fibre, polveri o fiocchi di materiale isolante realizzando così un mezzo poroso nel quale è incorporata aria. Poiché in questi materiali la propagazione del calore avviene per conduzione nel solido e per conduzione o convezione e irraggiamento nel gas si definisce una conduttività termica apparente che tiene conto del fenomeno della trasmissione del calore nel suo complesso. Isolanti con conduttività termica apparente estremamente bassa ( $10^{-5}$  W/mK), chiamati superisolanti, si ottengono usando pellicole estremamente riflettenti separate da fibre di vetro nel vuoto.

La conduttività termica di un solido non dipende dal valore di pressione ma solo dalla sua temperatura. Per alcuni solidi la conduttività termica aumenta considerevolmente a temperature prossime allo zero assoluto diventando quindi dei superconduttori. Come si può osservare dalla figura 2.2 il rame raggiunge una conduttività termica di 20000 W/mK. E' anche questa la ragione per cui i grossi supercomputer hanno i processori (CPU) raffreddati a temperature molto basse.

### **2.2.2. La conduttività termica nei liquidi**

A differenza di quanto avviene nei solidi, nei liquidi sono maggiori le distanze intermolecolari e non si ha un vero e proprio reticolo. Per questa ragione il trasporto di energia termica è meno efficiente e la conduttività termica dei liquidi è pertanto inferiore alla conduttività termica dei solidi. I meccanismi fisici che consentono di descrivere la conduttività nei liquidi non sono ancora ben noti; mediamente la conduttività termica dei liquidi diminuisce con la temperatura ad esclusione di alcuni liquidi tra cui l'acqua. La conduttività termica è inoltre indipendente dalla pressione a valori non prossimi alla pressione critica. Generalmente si può comunque affermare che la conduttività termica è inversamente proporzionale alla massa molare del fluido.

Conduttività termica (W/mK)

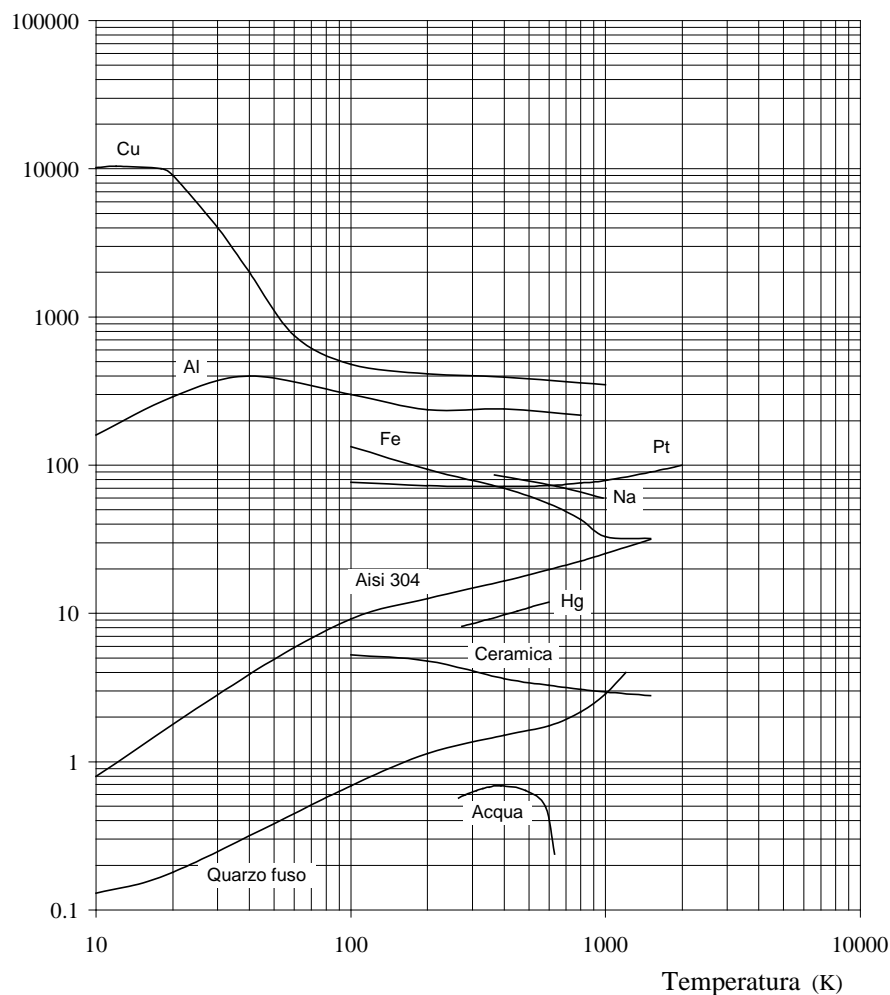


Figura 2.2 Conduttività termica in funzione della temperatura

Valori differenti di conduttività si hanno per i metalli liquidi (Na, K, Bi, Hg, etc.) che presentano valori di conduttività termica elevati e rendono interessante la loro applicazione in sistemi in cui sono presenti elevati flussi termici come negli impianti nucleari per la produzione di potenza.

### 2.2.3. La conduttività termica nei gas

La teoria cinetica dei gas consente di evidenziare il legame tra le proprietà termodinamiche e la conduttività termica. In base a questa teoria si può affermare che la conduttività termica è direttamente proporzionale al numero di molecole per unità di volume, alla velocità media molecolare e al

libero cammino medio delle molecole, che rappresenta la distanza media che percorre una generica molecola prima di urtare un'altra molecola.

Dato che la velocità media molecolare è proporzionale alla temperatura del gas ed inversamente proporzionale alla massa molare, il numero di molecole per unità di volume è proporzionale alla pressione ed il libero cammino medio è inversamente proporzionale alla pressione si ha che, per un gas, la conduttività termica è indipendente dalla pressione, direttamente proporzionale alla temperatura ed inversamente proporzionale alla massa molare del gas.

In questo testo si farà l'ipotesi che la conduttività termica di un mezzo sia una costante.

### 2.3. L'equazione generale della conduzione

Il postulato di Fourier è uno strumento incompleto ai fini della soluzione di un problema di conduzione. Da esso però si può dedurre un'equazione fenomenologica denominata equazione di Fourier o equazione generale della conduzione, la cui soluzione consente di determinare la distribuzione di temperatura in un mezzo. Questa equazione esprime il bilancio di energia di un sistema sede di trasmissione del calore per conduzione (fig 2.3).

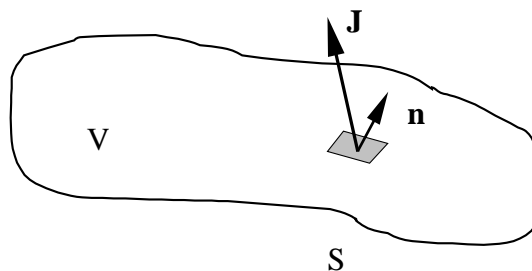


Figura 2.3 Sistema chiuso

Il bilancio energetico può essere applicato ad un generico volume di controllo oppure ad un volume infinitesimo individuato all'interno del mezzo. Si adottano alcune ipotesi semplificative per la scrittura dell'equazione di bilancio energetico: (1) il mezzo è costituito da un solido solidale con un sistema di riferimento inerziale e con proprietà termofisiche definite ed indipendenti dal tempo; (2) le variazioni di volume, a seguito delle variazioni di temperatura nel mezzo, sono nulle; (3) la potenza generata all'interno del mezzo, per unità di volume, è descrivibile con una funzione  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ .

Con tali ipotesi l'equazione di bilancio energetico è:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q}^{\leftarrow} + \dot{\Sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV = - \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \sigma dV$$

In questa relazione  $\mathbf{J}$  rappresenta il vettore flusso termico areico attraverso la superficie  $S$  che delimita il sistema di volume  $V$ . Il teorema della divergenza o teorema di Green stabilisce che l'integrale di superficie della componente normale di un vettore è uguale all'integrale della divergenza del vettore esteso al volume  $V$  racchiuso dalla superficie stessa. Pertanto l'equazione di bilancio energetico è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV = - \int_V \text{div} \mathbf{J} \cdot dV + \int_V \sigma dV$$

Con la ipotesi di proprietà termofisiche indipendenti dal tempo e volume costante si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV &= - \int_V \text{div} \mathbf{J} \cdot dV + \int_V \sigma dV \\ \int_V \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma + \text{div} \mathbf{J} \right] dV &= 0 \end{aligned}$$

Questa relazione è valida per qualunque corpo e quindi per qualunque volume. Affinché sia nulla per qualsivoglia dominio di integrazione è necessario che sia identicamente nulla la funzione integranda ottenendo così l'equazione differenziale globale di conservazione dell'energia:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma + \text{div} \mathbf{J} = 0$$

La divergenza del flusso è uno scalare che fisicamente rappresenta il flusso netto uscente per unità di volume.

La variazione di energia interna può essere correlata alle proprietà del mezzo attraverso la relazione  $du = c dT$ . Sfruttando inoltre il postulato di Fourier si ottiene:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} T) + \sigma$$

che è detta equazione generale della conduzione. Nell'ipotesi di avere un materiale omogeneo ed isotropo si può estrarre la conduttività termica dall'operatore di divergenza ed ottenere:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \sigma$$

in cui l'operatore  $\text{div grad}$  viene indicato con il simbolo  $\nabla^2$  e rappresenta il laplaciano. Questa equazione è nota con il termine di equazione generale della conduzione o equazione di Fourier.

Questa equazione viene anche scritta come:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$
$$a = \frac{k}{\rho c}$$

La grandezza  $a$  è chiamata diffusività termica e dimensionalmente si esprime, in unità SI, in  $[m^2/s]$ . Vedremo come il significato fisico di questa grandezza possa essere correlato alla rapidità con la quale una variazione di temperatura alla superficie di un mezzo si propaga all'interno del mezzo stesso.

L'equazione di Fourier consente di determinare, una volta integrata, la distribuzione di temperatura all'interno di un mezzo sede di conduzione in funzione della posizione geometrica e dell'istante temporale.

Se il problema è stazionario la temperatura non dipende dal tempo per cui si ricava:

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

Questa equazione, nel caso in cui  $\sigma$  e  $k$  non dipendono dalla posizione e dalla temperatura, viene chiamata equazione di Poisson.

Se il problema, oltre ad essere stazionario, non presenta generazione interna di potenza si ricava:

$$\nabla^2 T = 0$$

che è nota come equazione di Laplace.

La diffusività termica  $a$  è un parametro atto a descrivere le caratteristiche di un mezzo conduttore di calore in regime variabile e non compare nell'equazione per il regime permanente.

## 2.4. Il problema differenziale

L'equazione di Fourier è un'equazione differenziale alle derivate parziali, del secondo ordine. Non è lecito parlare di "risoluzione dell'equazione di Fourier" in senso generale, in quanto non si è solitamente in grado di scrivere la soluzione generale dell'equazione dalla quale, mediante imposizione delle condizioni al contorno, ricavare la soluzione del caso particolare considerato. Ogni volta occorrerà considerare un "problema differenziale" rappresentato dall'equazione di Fourier e dalle relative condizioni ai limiti e di questo cercare di ottenere una soluzione. La soluzione richiede quindi che del processo in studio sia noto: la geometria del mezzo in cui avviene il processo di conduzione, le proprietà termofisiche del mezzo ( $\rho$ ,  $c_v$ ,  $k$ ), le distribuzioni delle sorgenti termiche, la distribuzione della temperatura nel mezzo all'istante iniziale (condizione iniziale) e le

condizioni al contorno superficiale relative all'interazione tra il mezzo è ciò che lo delimita (condizioni al contorno).

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, vale la seguente terminologia:

**Problema di Dirichlet** (condizione di primo tipo): quando è assegnata la distribuzione della funzione  $T$  (temperatura) in ogni punto del contorno, eventualmente in funzione del tempo. Si presenta ogni volta che, noti i valori della temperatura al contorno (per ipotesi o per averli misurati), si voglia calcolare la distribuzione di temperatura all'interno del corpo:

$$T=T(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x} \in S$$

**Problema di Neumann** (condizione di secondo tipo): quando è assegnata al contorno la derivata normale della funzione  $T$ , eventualmente in funzione del tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in S$$

Questa condizione al contorno rappresenta, in senso fisico, la conoscenza del flusso termico areico alla superficie del sistema. Infatti la derivata normale della temperatura rappresenta, a meno del coefficiente  $-k$ , il flusso termico areico uscente dal contorno nel punto considerato.

**Problema di Cauchy** (condizione di terzo tipo): quando è assegnata al contorno una combinazione lineare della funzione  $T$  e della sua derivata normale, eventualmente in funzione del tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + A \cdot T = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in S$$

ove, di solito,  $A$  è una costante. Questa condizione è più generale delle precedenti e le comprende entrambe come caso limite. Questa condizione si verifica nella maggior parte dei casi quando vi è scambio termico per convezione alla superficie di controllo del sistema. Si ottiene, avendo indicato con  $h$  il coefficiente convettivo:

$$-k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = h(T - T_{\infty}) \quad \mathbf{x} \in S$$

essendo  $T_{\infty}$  la temperatura di un eventuale fluido esterno. Si è scritto così una relazione di raccordo al contorno che afferma che il flusso termico che per conduzione arriva dall'interno del corpo alla superficie di contorno, si trasmette all'esterno per convezione.

**Condizione di quarto tipo:** questa condizione corrisponde al caso in cui si ha scambio termico attraverso l'interfaccia di due mezzi in cui è presente un trasporto conduttivo ed aventi diversa conduttività termica ( $k_1$  e  $k_2$ ). Questa condizione si traduce nella relazione:

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}} \quad \mathbf{x} \in S$$



in cui  $T_1$  e  $T_2$  sono le funzioni che descrivono il campo di temperatura nei mezzi rispettivamente di conduttività  $k_1$  e  $k_2$ . Se il contatto tra i due mezzi materiali è perfetto, può allora essere specificata una ulteriore relazione tra le temperature superficiali dei mezzi:

$$T_1 = T_2 \quad \mathbf{x} \in S$$

Tale condizione è difficile da realizzarsi in pratica: esiste in genere sempre una resistenza termica di contatto che comporta una disuguaglianza nella temperatura superficiale dei due mezzi a contatto.

Prima di terminare il paragrafo è bene fare un'importante osservazione: assegnando arbitrariamente la condizione di Dirichlet su un contorno finito, il sistema differenziale ammette sempre una ed una sola soluzione. Non è invece lecito assegnare arbitrariamente la condizione di Neumann sullo stesso contorno in regime stazionario. In regime stazionario, tutto il calore che entra nel sistema deve contemporaneamente uscire (sono esclusi cioè fenomeni di accumulo, tipici di un regime variabile nel tempo): ciò significa che l'integrale del flusso uscente su tutto il contorno deve essere pari al calore eventualmente generato all'interno:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ndS} = \int_V \sigma dV$$

e pur così facendo la soluzione è determinata a meno di una costante arbitraria.

Nell'impostare il problema differenziale è inoltre importante scegliere opportunamente il sistema di coordinate nel quale esplicitare l'operatore di Laplace. Il criterio guida è quello di ottenere per le condizioni al contorno espressioni più semplici possibile. Ciò si realizza facendo coincidere (sin dove è possibile) le superfici di contorno con superfici coordinate. E' particolarmente pregiato il caso in cui un'opportuna scelta delle coordinate permette di eliminare una o più variabili indipendenti: in genere ciò avviene attraverso semplici considerazioni di simmetria spaziale. Consideriamo i più semplici sistemi di coordinate (fig. 2.4) e le corrispondenti espressioni dell'operatore di Laplace.

Coordinate cartesiane ortogonali  $T = T(x, y, z)$ :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche  $T = T(r, \theta, z)$ :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche  $T = T(r, \theta, \psi)$ :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right)$$

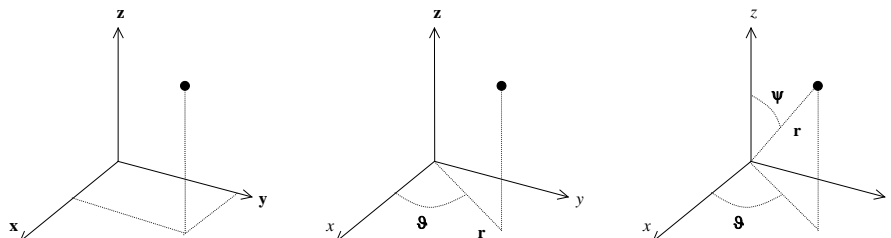


Figura 2.4 Sistemi di riferimento cartesiano ortogonale (a), cilindrico (b) e sferico (c)

Non esistono regole fisse e generali per la soluzione di un problema differenziale alle derivate parziali. Esistono invece parecchi metodi, più o meno difficili, con i quali si può aggredire il problema con la speranza di ricavare una soluzione esatta. Più sicuri sono invece i metodi approssimati (grafici, numerici, analitici, analogici).

## 2.5. Linee di flusso in regime stazionario e senza generazione interna

Una volta risolto il campo termico in regime stazionario è utile visualizzare due importanti famiglie di superfici: le superfici isoterme ed i tubi di flusso.

Si chiamano in generale linee di flusso o di forza di un vettore le linee di involuppo del vettore, il quale risulta pertanto sempre tangente alla linea stessa.

Le linee di forza del vettore  $\text{grad}(T)$  saranno perciò per definizione perpendicolari alle superfici a temperatura costante. Di conseguenza il vettore flusso termico  $\mathbf{J}$  avrà componente nulla nella direzione perpendicolare alla linea di forza.

Se si considerano le linee di flusso per i punti di una linea chiusa, esse determinano un tubo di flusso, la cui superficie limitante risulta, per le ragioni sopra vista, adiabatica.

Nel tracciare tali superfici, o linee nel caso piano, bisogna perciò ricordare che esse sono mutuamente perpendicolari e non si intersecano mai.

Il loro addensarsi sta a significare un aumento del flusso termico areico mentre se si diradano il flusso termico areico diminuisce come impone il principio di conservazione dell'energia entro un tubo di flusso in regime stazionario.

Riassumendo si può concludere che:

- le superfici (linee) isoterme non si intersecano mai;
- i tubi (linee) di flusso non si intersecano mai;
- le superfici isoterme ed i tubi di flusso si intersecano ortogonalmente;

- attraverso le linee di flusso non può aversi passaggio di calore;
- le superfici (linee) isoterme incontrano ortogonalmente il contorno adiabatico;
- le linee di flusso tagliano ortogonalmente il contorno isoterma.

Tenendo presente queste regole si possono tracciare linee isoterme e linee di flusso in campi bidimensionali a geometria complessa con parte del contorno isoterma e/o adiabatico, giungendo ad una soluzione grafica approssimata dell'equazione di Fourier in regime stazionario senza generazione interna.



### 3. Conduzione termica in regime stazionario

Al fine di classificare i problemi di trasmissione del calore per conduzione si è già detto che è opportuno distinguere i problemi in cui il parametro tempo non influisce sulla temperatura (regime stazionario) e problemi in cui invece tale parametro ha importanza (regime transitorio o regime variabile). Se il regime è stazionario scompare il secondo membro della equazione di Fourier, che diventa:

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

nota come equazione di Poisson.

Se il problema, oltre ad essere stazionario, non presenta generazione interna di potenza si ricava:

$$\nabla^2 T = 0$$

nota come equazione di Laplace.

Inoltre tra i problemi in regime stazionario i più semplici sono quelli monodimensionali, nei quali il flusso termico fluisce secondo un'unica direzione e la temperatura risulta funzione di una sola coordinata geometrica. Molti problemi pratici di conduzione rientrano in questa categoria, perché ad essa si possono ricondurre quasi tutti i casi di trasmissione di calore attraverso pareti piane e pareti cilindriche (tubi).

#### 3.1. Conduzione monodimensionale senza generazione interna

Il problema differenziale nel caso di sistemi a geometria piana indefinita, cilindrica indefinita o sferica con condizioni al contorno uniformi ammette una soluzione generale e la temperatura risulta funzione di una sola coordinata spaziale. In questo caso il campo di temperatura è monodimensionale. La distribuzione di temperatura si ottiene integrando l'equazione di Laplace con le opportune condizioni al contorno.

### 3.1.1. Parete piana indefinita

Si consideri il caso elementare di una parete piana, omogenea, indefinita nelle direzioni  $y, z$ , di spessore costante  $L$ . In questo caso la temperatura risulta dipendere solo dalla coordinata spaziale  $x$  (figura 3.1). L'equazione generale di Fourier in regime stazionario, senza generazione, monodimensionale in coordinate cartesiane ortogonali diviene:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine in  $x$  ammette come integrale la funzione

$$T = Ax + B$$

con  $A$  e  $B$  costanti di integrazione determinabili con le condizioni al contorno. Le possibili condizioni al contorno rientrano nelle classificazioni che sono state date con le possibili combinazioni che sono: due condizioni di prima specie, una condizione di prima specie ed una condizione di seconda specie, una condizione di prima specie ed una condizione di terza specie, una condizione di seconda specie ed una di terza, due condizioni di terza specie. La possibile combinazione da luogo ad una diversa espressione per quanto riguarda le costanti di integrazione  $A$  e  $B$ .

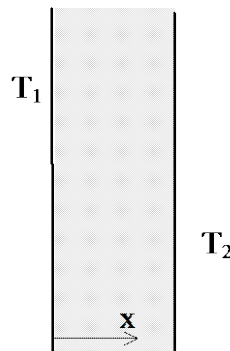


Figura 3.1 Parete piana indefinita

Si consideri ora il caso di due condizioni di prima specie, ovvero con riferimento alla figura 3.1 si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ T = T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = L \\ T = T_2 \end{cases}$$

Utilizzando l'integrale generale queste condizioni al contorno si traducono nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = AL + B \end{cases}$$

da cui si ricava, con semplici passaggi, la distribuzione lineare di

temperatura:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

nota la distribuzione di temperatura può essere determinato il flusso termico areico:

$$J = -k \frac{dT}{dx}$$
$$J = k \frac{T_1 - T_2}{L}$$

che risulta essere costante ovvero indipendente dalla coordinata  $x$ . Questo risultato era per altro intuibile in quanto il bilancio energetico, in condizione di regime stazionario, afferma che la potenza netta entrante in un volume di controllo deve essere nulla; nel caso di parete piana indefinita le superfici che delimitano il volume di controllo sono uguali e pertanto deve essere costante il flusso termico areico che complessivamente le attraversa. La potenza termica è proporzionale al flusso termico areico a meno di una costante che è la superficie di scambio  $S$ . Il flusso termico complessivo è, per una superficie  $S$ :

$$\dot{Q} = kS \frac{T_1 - T_2}{L}$$

ovvero:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_t}$$

Osservando il risultato risulta evidente l'analogia formale tra questa ultima relazione e la legge di Ohm ( $\Delta V = RI$ ). In base ad essa risultano infatti analoghi il flusso termico complessivo ed il flusso di corrente elettrica, la differenza di temperatura e la differenza di tensione ed il termine di proporzionalità tra differenza di temperatura e flusso termico totale (detto per analogia resistenza termica  $R_t$ ) con la resistenza elettrica. La resistenza termica, per una parete piana indefinita con condizione al contorno di prima specie è quindi:

$$R_t = \frac{L}{kS}$$

Questa analogia consente di applicare le metodologie classiche relative allo studio delle reti elettriche allo studio della conduzione in regime stazionario senza generazione interna.

Il caso di una parete composta costituita da strati aventi diverse caratteristiche e con condizioni al contorno di prima specie sulle superfici estreme, può essere trattato di conseguenza come un insieme di resistenze in serie (fig. 3.2). La resistenza termica totale  $R$  di una parete composta

multistrato è somma delle resistenze delle n pareti che compongono la parete multistrato:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$R = \frac{1}{S} \left( \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \dots + \frac{L_n}{k_n} \right)$$

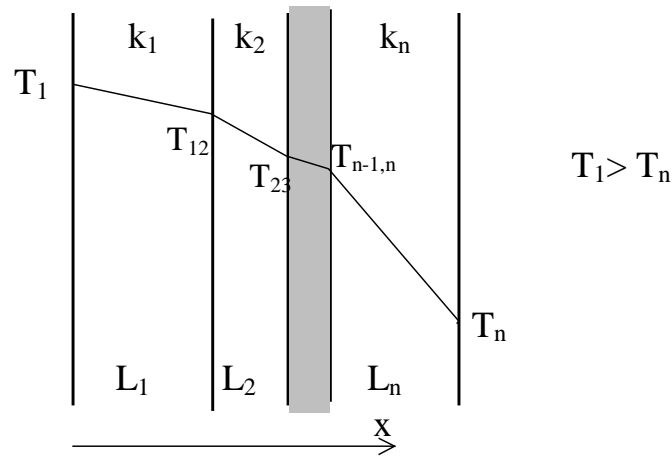


Figura 3.2 Parete piana indefinita

Il flusso totale risulta allora:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_n}{\frac{1}{S} \left( \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \dots + \frac{L_n}{k_n} \right)}$$

Dalla conoscenza del flusso termico complessivo è quindi possibile risalire alla temperatura alle interfacce attraverso le relazioni:

$$\dot{Q} = k_1 S \frac{T_1 - T_{12}}{L_1}$$

$$\dot{Q} = k_2 S \frac{T_{12} - T_{23}}{L_2}$$

.....

$$\dot{Q} = k_n S \frac{T_{n-1,n} - T_n}{L_n}$$

E' da notare, da queste ultime relazioni, che la caduta di temperatura nel singolo strato di parete è proporzionale alla resistenza termica dello strato considerato. Inoltre il gradiente di temperatura nella parete è inversamente



proporzionale alla conduttività termica del mezzo. Questo significa che nella rappresentazione delle distribuzioni di temperatura la pendenza di questa è inversamente proporzionale alla conduttività termica del mezzo. Pareti a maggiore conduttività termica hanno una distribuzione di temperatura con una pendenza inferiore (figura 3.2).

I problemi di conduzione in pareti sono molto frequentemente associati a condizioni al contorno di tipo convettivo sulle superfici che delimitano la parete stessa e quindi condizioni al contorno di terza specie (problema di Chauchy).

In questo caso non sono note le temperature di superficie, bensì altre due temperature, misurate nei due fluidi (supposti genericamente diversi) ad opportune distanze dalla parete stessa e sono noti i coefficienti convettivi  $h_1$  ed  $h_2$ .

Le condizioni al contorno in regime stazionario ed assenza di generazione interna, devono imporre la continuità del flusso termico che si propaga nella parete e da questa al fluido; esse rappresentano quindi un bilancio di energia al contorno che garantisce un raccordo rigoroso fra la parete e l'ambiente che la circonda. Il problema differenziale è ancora dato dalla equazione:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

ma le condizioni al contorno sono ora espresse dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ h_1(T_{\infty 1} - T) = -k \frac{dT}{dx} \end{cases} \quad \begin{cases} x = L \\ -k \frac{dT}{dx} = h_2(T - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

Queste condizioni al contorno si traducono nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} h_1(T_{\infty 1} - B) = -kA \\ -kA = h_2(AL + B - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

da cui si può ricavare il valore delle costanti A e B :

$$A = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}\right)} \frac{1}{k}$$

$$B = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}\right)} \frac{1}{h_1} + T_{\infty 1}$$

La distribuzione lineare di temperatura diviene:

$$T = -\frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}\right)} \left(\frac{x}{k} + \frac{1}{h_1}\right) + T_{\infty 1}$$

Nota la distribuzione di temperatura può essere determinato il flusso termico complessivo:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2} \right)}$$

da cui si ricava che la resistenza termica complessiva  $R$  è, in questo caso, pari a:

$$R = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2} \right)$$

E' immediato generalizzare questo risultato al caso di parete piana indefinita composta con  $n$  strati con condizioni al contorno di terza specie ottenendo una resistenza termica pari a:

$$R = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_2} \right)$$

L'andamento delle temperature all'esterno della parete è indicato in figura 3.3: si ha una rapida variazione in vicinanza della parete (attraverso lo stato limite adiacente) per portarsi quasi subito al valore corrispondente alla temperatura propria del fluido. All'interno della parete l'andamento della temperatura è ancora lineare tra le due temperature estreme che devono però essere calcolate.

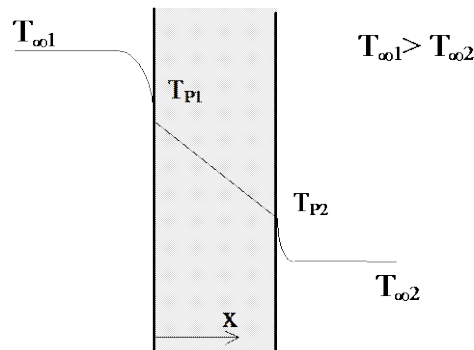


Figura 3.3 Parete piana indefinita con condizioni al contorno di terza specie

I risultati a cui si è giunti potevano essere ottenuti con un diverso approccio sfruttando il concetto di resistenza termica. Chiamiamo  $T_{P1}$  e  $T_{P2}$  le temperature superficiali della parete, per ora incognite, tenendo presente che entro la parete la temperatura ha andamento lineare e che il flusso e la resistenza termica sono definite come nel caso precedente. Il flusso termico che si trasmette dal fluido "esterno" a quello "interno" attraverso la parete, oltre alla resistenza termica offerta dalla parete vera e propria, deve superare

anche altre due resistenze localizzate nei due strati di fluido adiacenti la parete e la "forza" che a ciò lo spinge è il salto di temperatura fra parete e fluido (e viceversa). Complessivamente avremo quindi tre resistenze in serie, ma lo stesso flusso termico essendo il regime permanente. Il flusso è assunto positivo se diretto nel verso dell'asse x:

$$\dot{Q} = h_1 S (T_{\infty 1} - T_{p1})$$

$$\dot{Q} = k S \frac{T_{p1} - T_{p2}}{L}$$

$$\dot{Q} = h_2 S (T_{p2} - T_{\infty 2})$$

Risolvendo questo sistema di equazioni in funzione delle temperature dei due fluidi si ottiene la potenza termica scambiata:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2} \right)}$$

Nota la potenza termica scambiata è possibile determinare le temperature superficiali della parete con le relazioni valide per la convezione:

$$T_{p1} = T_{\infty 1} - \frac{\dot{Q}}{h_1}$$

$$T_{p2} = T_{\infty 2} + \frac{\dot{Q}}{h_2}$$

Nei casi pratici di trasmissione del calore si verifica di frequente la contemporanea presenza dei due meccanismi di scambio conduttivo e convettivo. Appare quindi giustificato l'uso di un coefficiente unico sperimentalmente misurabile che moltiplicato per il salto termico tra i fluidi fornisca direttamente il valore del flusso scambiato tra due fluidi. Esso viene chiamato coefficiente globale di scambio termico o trasmittanza ed indicato con la lettera K.

Il suo inverso si chiama resistenza termica globale e si indica con la lettera R.

---

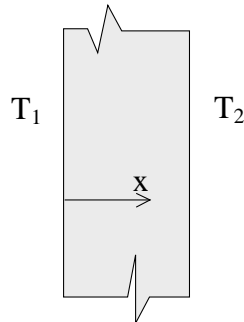
### **Esempio**

*La parete di un forno in mattoni isolanti di caolino ha le due superfici rispettivamente alla temperatura  $T_1 = 800^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 150^\circ\text{C}$ . La conduttività del caolino è  $k = 0.22 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  e lo spessore della parete è pari a  $s = 0.15 \text{ m}$ . Calcolare il flusso termico areico in regime stazionario e la temperatura nella mezzeria della parete.*

### **Soluzione**

*Si orienti un asse x avente origine sulla superficie a  $T_1 = \text{cost}$  e si imponi il problema differenziale costituito dall'equazione di Fourier per il regime permanente, monodimensionale, senza generazione di calore, in coordinate*

cartesiane ortogonali, completa di condizioni al contorno. La scelta delle coordinate ortogonali è dettata dalla geometria del sistema e permette di far coincidere le superfici isoterme ( $T = \text{cost}$ ) con due superfici coordinate ( $x = 0$  e  $x = 0.15$ ).



In questo caso l'equazione di Fourier ammette una soluzione generale:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = A$$

$$T = Ax + B$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ T = T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = s \\ T = T_2 \end{cases}$$

da cui si ricavano le costanti di integrazione:

$$\begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = AL + B \end{cases} \quad \begin{cases} B = T_1 \\ A = \frac{T_2 - T_1}{s} \end{cases}$$

Introducendo i valori numerici:

$$\begin{cases} T_1 = 800 \text{ } ^\circ\text{C} \\ T_2 = 150 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} B = 800 \text{ } \{^\circ\text{C}\} \\ A = \frac{(150 - 800)}{0.15} \left\{ \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} \right\} = -4333.3 \left\{ \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} \right\} \end{cases}$$

per cui la distribuzione di temperatura è data dalla funzione:

$$T = -4333.3x + 800$$

e in mezzzeria ( $x = 0.075\text{m}$ )

$$T_{0.075} = 800 - 4333.3 \cdot 0.075 = 475 \{^\circ\text{C}\}$$

Il flusso termico areico risulta

$$J = -k \frac{dT}{dx} = -kA = 0.22 \left\{ \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \right\} \cdot 4333.3 \left\{ \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} \right\} = 953.3 \left\{ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right\}$$

### **Esempio**

Sia una parete costituita da due strati di spessore  $s_1 = 5 \text{ cm}$  ed  $s_2 = 10 \text{ cm}$  e

realizzata con materiali diversi aventi conduttività termica rispettivamente  $k_1 = 1 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$  e  $k_2 = 8 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$ . Il regime termico è stazionario e si chiede di:

calcolare la temperatura dell'interfaccia ( $T_{int}$ ), sapendo che  $T_1 = 60^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 21^\circ\text{C}$ ;

calcolare inoltre la conduttività equivalente di una parete di pari dimensioni e pari resistenza termica;

calcolare la pendenza delle rette rappresentanti i profili di temperatura;

#### **Soluzione**

La temperatura all'interfaccia si determina dopo aver determinato il flusso termico:

$$J = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2}} = \frac{(60 - 21)\left\{\frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}\right\}}{\left(\frac{0.05}{1} + \frac{0.1}{8}\right)\left\{\frac{\text{m}^2\text{h}^\circ\text{C}}{\text{kcal}}\right\}} = 624\left\{\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2}\right\} = 725.7\left\{\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right\}$$

Il flusso termico areico può essere valutato con la relazione:

$$J = \frac{k_1}{s_1}(T_1 - T_{int})$$

da cui si ricava:

$$T_{int} = T_1 - J \frac{s_1}{k_1} = 28.8\left\{^\circ\text{C}\right\}$$

La conduttività termica equivalente è la conduttività di una parete omogenea isotropa di pari spessore e con la medesima potenza termica trasmessa a parità di salto di temperatura.

$$J = \frac{k_{equiv}(T_1 - T_2)}{s_1 + s_2} = 624\left\{\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2}\right\}$$

$$k_{equiv} = 2.4\left\{\frac{\text{kcal}}{\text{mh}^\circ\text{C}}\right\}$$

il valore trovato è intermedio tra le conduttività dei due materiali.

Si determinano ora le pendenze delle rette (il gradiente) rappresentanti la distribuzione di temperatura.

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_1 = \frac{(60 - 28.8)}{0.05} = 624\left\{\frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}\right\} \quad \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_1 = \frac{J}{k_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{8}{1}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_2 = \frac{(28.8 - 21)}{0.1} = 78\left\{\frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}\right\} \quad \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_2 = \frac{J}{k_2} = \frac{1}{8}$$

Ovvero il rapporto delle pendenze è inversamente proporzionale alle conduttività termiche.

### **3.1.2. Parete cilindrica indefinita**

Si consideri come caso elementare un cilindro cavo, omogeneo ed isotropo ed infinito nella direzione z, di raggio interno  $r_1$  e raggio esterno  $r_2$ . Quando sulle superfici interna ed esterna del cilindro sono applicate

condizioni al contorno indipendenti dalla posizione sulla superficie (indipendenti da  $z$  e  $\theta$ ) la temperatura risulta dipendere solo dalla coordinata radiale  $r$  (figura 3.4).

L'equazione generale di Fourier in regime stazionario, senza generazione, monodimensionale in coordinate cilindriche è:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

L'equazione di Fourier, per essere in questo caso alle derivate totali, ammette un integrale generale:

$$T = C \ln r + D$$

con  $C$  e  $D$  costanti di integrazione determinabili con le condizioni al contorno.

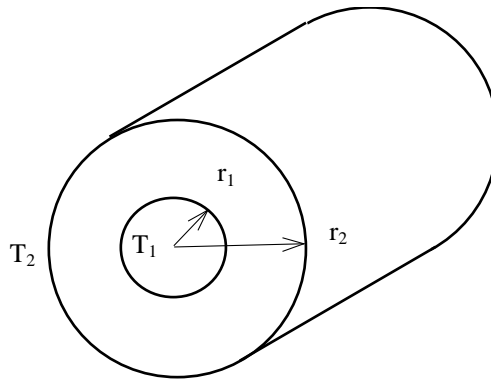


Figura 3.4 Sezione di un cilindro cavo indefinito

Si consideri ora il caso di condizioni al contorno di prima specie, ovvero con riferimento alla figura 3.4 si ha:

$$\begin{cases} r = r_1 \\ T = T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

Queste condizioni al contorno si traducono nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} T_1 = C \ln r_1 + D \\ T_2 = C \ln r_2 + D \end{cases}$$

da cui si ricava, con semplici passaggi, la distribuzione di temperatura che risulta essere logaritmica:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$

nota la distribuzione di temperatura può essere determinato il flusso termico areico:

$$J = -k \frac{dT}{dr}$$

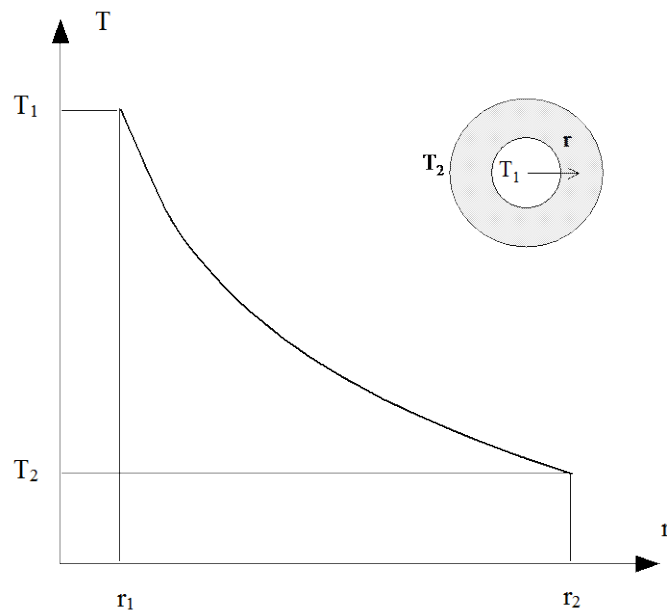
$$J = k \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}$$

che risulta essere inversamente proporzionale alla coordinata radiale  $r$ . Il flusso termico totale che attraversa una generica superficie cilindrica di lunghezza  $L$  in direzione  $z$  è invece, come è logico attendersi in regime stazionario, costante ed indipendente da  $r$ :

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi L k} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

ovvero:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_t}$$



*Figura 3.5 Andamento della temperatura nella parete di un cilindro cavo indefinito*

La resistenza termica, per un cilindro cavo indefinito con condizione al contorno di prima specie è quindi:

$$R_t = \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

In conclusione, in funzione del raggio, la temperatura ha andamento logaritmico (fig. 3.5), e non lineare come nel caso della parete piana, ed il flusso termico areico è inversamente proporzionale al raggio.

Per la parete cilindrica viene spesso definita la potenza termica per unità di lunghezza del cilindro. Questa potenza può essere calcolata indifferentemente su qualsiasi superficie isoterma, essendo indipendente dalla coordinata  $r$ .

Il caso di una parete cilindrica composta costituita da strati di diverse caratteristiche e sempre con condizioni al contorno di prima specie sulle superfici estreme può essere trattato per analogia come un insieme di resistenze in serie (fig. 3.6).

La resistenza termica totale  $R$  di una parete cilindrica composta multistrato è somma delle resistenze delle  $n$  pareti che compongono la parete multistrato:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \right)$$

Il flusso totale risulta allora:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_n}{\frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \right)}$$

Dalla conoscenza del flusso termico complessivo è quindi possibile risalire alla temperatura alle interfacce attraverso le relazioni:

$$\dot{Q} = 2\pi L k_1 \frac{T_1 - T_{12}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\dot{Q} = 2\pi L k_2 \frac{T_{12} - T_{23}}{\ln \frac{r_3}{r_2}}$$

.....

$$\dot{Q} = 2\pi L k_n \frac{T_{n-1,n} - T_n}{\ln \frac{r_{n+1}}{r_n}}$$

E' da notare, da queste ultime relazioni, che la caduta di temperatura nel



singolo strato di parete è proporzionale alla resistenza termica dello strato considerato e la distribuzione di temperatura è riportata in figura 3.6.

In modo analogo può essere risolto il problema con associate condizioni al contorno di terza specie (problema di Chauchy).

In questo caso sono note le temperature nei due fluidi (supposti genericamente diversi) e sono noti i coefficienti convettivi  $h_1$  ed  $h_2$ .

Il problema differenziale è ancora dato dalla equazione:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

ma le condizioni al contorno sono ora espresse dalle relazioni:

$$\begin{cases} r = r_1 \\ h_1(T_{\infty 1} - T) = -k \frac{dT}{dr} \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ -k \frac{dT}{dr} = h_2(T - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

Tralasciando i passaggi analitici che consentono di determinare la distribuzione logaritmica di temperatura può essere determinata la potenza termica:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_1 r_1} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2 r_2} \right)}$$

da cui si ricava che la resistenza termica complessiva  $R$  è, in questo caso, pari a:

$$R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_1 r_1} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2 r_2} \right)$$

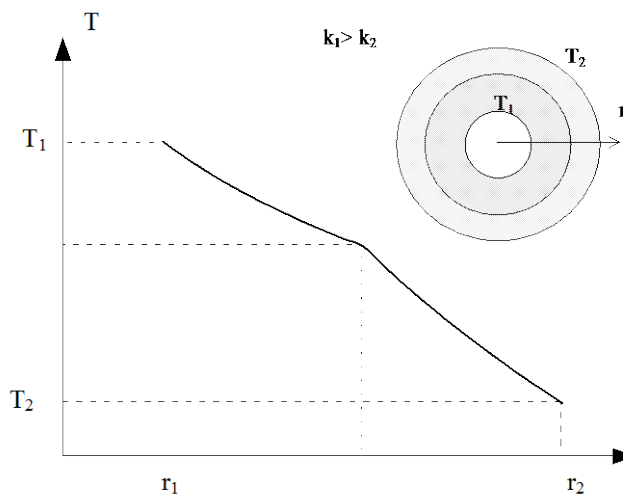


Figura 3.6 Parete cilindrica multistrato

E' immediato generalizzare questo risultato al caso di parete cilindrica indefinita composta con n strati con condizioni al contorno di terza specie ottenendo una resistenza termica pari a:

$$R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{h_n r_{n+1}} \right)$$

Un caso particolare è quello del cilindro pieno in regime stazionario senza generazione interna. In questo caso l'equazione differenziale è ancora:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

con condizioni al contorno che ora sono:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{dT}{dr} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

Queste condizioni al contorno, utilizzando l'integrale generale della equazione generale della conduzione in regime stazionario senza generazione interna ed espressa in coordinate cilindriche si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} \frac{C}{0} = 0 \\ C \ln r_2 + D = T_2 \end{cases}$$

La soluzione che si ottiene, per essere T limitata, è :

$$C = 0$$

$$D = T_2$$

ovvero la distribuzione di temperatura si riduce a:

$$T = T_2$$

La temperatura è costante nel cilindro, indipendente dalla posizione e pari alla temperatura superficiale. Nel caso di condizione al contorno di terza specie è semplice verificare che la soluzione è:

$$T = T_{\infty 2}$$

ovvero la temperatura è costante e pari alla temperatura del fluido che lambisce il cilindro pieno.

---

### **Esempio**

*Determinare le dispersioni termiche in regime stazionario di un tubo in ferro, attraverso cui viene trasportato vapore saturo a 150 °C. Sono noti: il diametro interno del tubo  $D_1 = 10$  cm, il diametro esterno del tubo  $D_2 = 11$  cm, la temperatura esterna dell'aria che lambisce il tubo  $T_{est} = 20$  °C, la conduttività termica del tubo  $k = 58$  W/mK, i coefficienti convettivi  $h_i = 10000$  W/m<sup>2</sup>K e  $h_{est} = 5$  W/m<sup>2</sup>K.*

**Soluzione**

Si utilizzi l'espressione del flusso termico desunta attraverso l'analogia tra fenomeni termici e fenomeni elettrici:

$$J_t = \frac{(T_i - T_{est})}{\frac{1}{2\pi L h_i r_1} + \frac{1}{2\pi L k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi L h_{est} r_2}} = \frac{2\pi L (T_i - T_{est})}{R'_{tot}}$$

dove la resistenza totale  $R'_{tot}$  risulta somma della resistenza convettiva all'interfaccia interna, della resistenza convettiva all'interfaccia esterna e della resistenza conduttiva del tubo.

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$R'_{tot} = \left( \frac{1}{10000 \cdot 0.05} + \frac{1}{58} \ln \frac{0.055}{0.05} + \frac{1}{5 \cdot 0.055} \right) = 3.64 \left\{ \frac{m^{\circ}C}{W} \right\}$$

$$\frac{J_t}{L} = \frac{2\pi(150 - 20)}{3.64} = 224.4 \left\{ \frac{W}{m} \right\}$$

Si noti che i primi due termini dell'espressione della resistenza totale sono numericamente trascurabili.

---

**3.1.3. Raggio critico di isolamento**

Quando si procede all'isolamento di fili o di tubi di piccolo diametro, può accadere che l'aggiunta di isolante provochi un aumento del flusso termico scambiato a parità di salto di temperatura a causa dell'aumento della superficie esterna di scambio.

Si analizzi il caso di un tubo, realizzato con materiale di conduttività termica  $k$ , percorso all'interno da un fluido a temperatura costante  $T_i$ , e lambito all'esterno da un altro fluido a temperatura  $T_e$  e rivestito di uno strato di materiale isolante di conduttività termica  $k_{is}$ . Siano  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_{is}$  rispettivamente il raggio interno, esterno del tubo ed il raggio del tubo rivestito con isolante (fig. 3.7).

La resistenza termica complessiva è:

$$R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_i r_1} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_{is}} \ln \frac{r_{is}}{r_2} + \frac{1}{h_e r_{is}} \right)$$

Analizzando questa relazione si può notare che la resistenza termica dello strato di isolante cresce logicamente mentre decresce linearmente la resistenza termica convettiva esterna.

Analizzando la funzione  $R = R(r_{is})$  si può osservare che questa presenta un minimo (fig. 3.7). Se infatti si deriva la funzione riportata si ottiene:

$$\frac{dR}{dr_{is}} = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{k_{is} r_{is}} - \frac{1}{h_e r_{is}^2} \right)$$

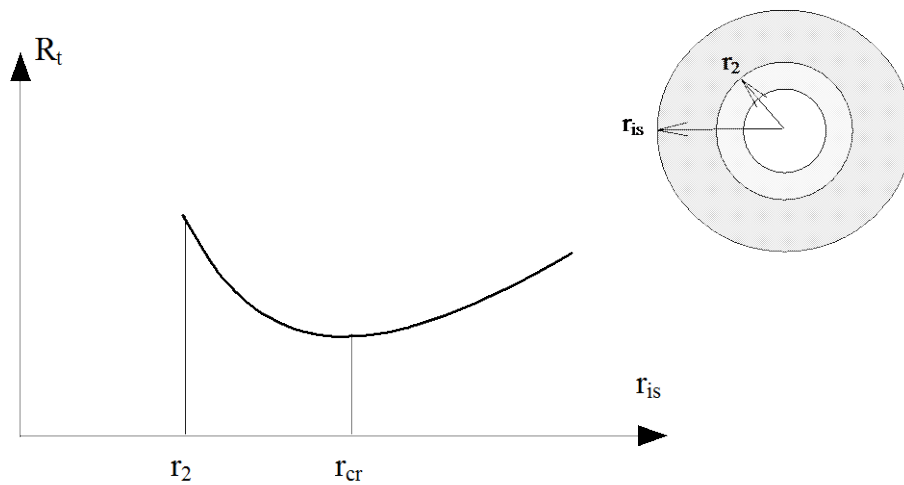


Figura 3.7 Spessore critico di isolamento. Andamento della resistenza termica al variare dello spessore dell'isolante

Eguagliando a zero la derivata si ottiene il valore del raggio  $r_{cr}$  (detto raggio critico) per il quale il denominatore presenta un punto di massimo o di minimo:

$$r_{cr} = \frac{k_{is}}{h_e}$$

La derivata seconda è positiva e pertanto la resistenza  $R$  presenta un minimo. Il flusso termico totale risulterà massimo per questo valore del raggio.

In conclusione se il raggio esterno è maggiore del raggio critico l'aggiunta di materiale isolante diminuisce il flusso termico disperso; se invece il raggio esterno è inferiore al raggio critico si verifica un aumento del flusso disperso all'aumentare dello spessore di isolante fino a raggiungere un raggio pari al raggio critico.

#### **Esempio**

Determinare il raggio critico di un tubo metallico (percorso da un vapore condensante) isolato con amianto e lo spessore minimo di isolamento. Si trascuri la resistenza termica convettiva interna e la resistenza termica conduttiva del tubo metallico mentre è noto: conduttività termica amianto ( $k_{is} = 0.208 \text{ W/mK}$ ), coefficiente di convezione esterno ( $h_{est} = 8.51 \text{ W/m}^2\text{K}$ ), la temperatura del vapore condensante ( $T_{in} = 250 \text{ }^\circ\text{C}$ ), la temperatura esterna ( $T_{est} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ), il raggio esterno del tubo metallico non isolato ( $r_1 = 2 \text{ cm}$ ).

#### **Soluzione**

Il raggio critico è dato dal rapporto tra la conduttività termica dell'isolante ed il coefficiente di convezione esterno:

$$r_{cr} = \frac{k_{is}}{h_{est}} = \frac{0.208}{8.51} = 0.0244 \text{ {m}} = 2.44 \text{ {cm}}$$

Il flusso termico riferito alla lunghezza unitaria vale:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi(T_{in} - T_{est})}{\frac{1}{h_{est} r_{is}} + \frac{1}{k_{is}} \ln \frac{r_{is}}{r_i}}$$

avendo trascurato, perché molto piccola, la resistenza termica convettiva all'interno e quella conduttiva della parete metallica. Valutando il flusso termico al variare del raggio di isolamento  $r_{is}$ , i risultati sono riportati nella che segue:

$r_{is}$ (cm)	$Q/L$ (W/m)
0.020	245.962
0.022	249.181
0.024	250.337
0.026	249.982
0.028	248.544
0.030	246.344
0.031	245.037

Si osserva che l'isolamento ha luogo per un  $r_{is} > 3 \text{ cm}$ .

### 3.1.4. Parete sferica cava

Si consideri ora una sfera cava di raggio interno  $r_1$  e raggio esterno  $r_2$ . Quando sulle superfici interna ed esterna della sfera sono applicate condizioni al contorno indipendenti dalla posizione sulla superficie (indipendenti da  $\theta$  e  $\psi$ ) la temperatura risulta dipendere solo dalla coordinata radiale  $r$  (figura 3.8). L'equazione generale di Fourier in regime stazionario, senza generazione, monodimensionale in coordinate cilindriche è

:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

L'equazione di Fourier, per essere in questo caso alle derivate totali, ammette un integrale generale:

$$T = \frac{E}{r} + F$$

con  $E$  e  $F$  costanti di integrazione determinabili con le condizioni al contorno.

Si considera il solo caso di condizioni al contorno di prima specie, ovvero con riferimento alla figura 3.8 si ha:

$$\begin{cases} r = r_1 \\ T = T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

Queste condizioni al contorno si traducono nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{E}{r_1} + F \\ T_2 = \frac{E}{r_2} + F \end{cases}$$

da cui si ricava, con semplici passaggi, la distribuzione di temperatura che risulta essere:

$$T = T_1 + (T_1 - T_2) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

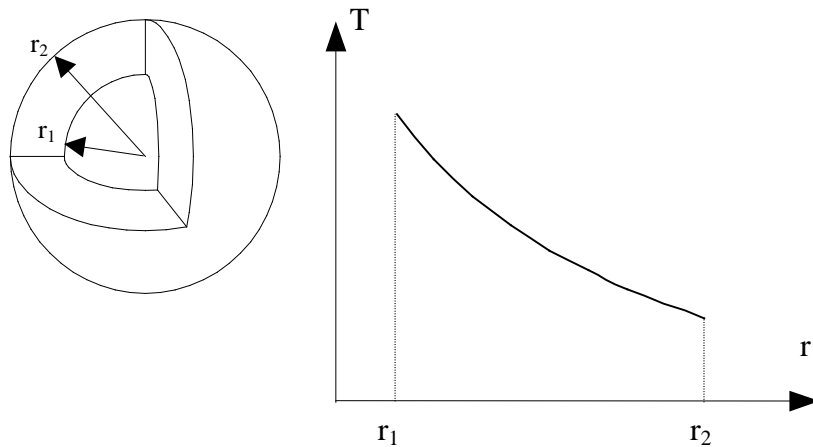


Figura 3.8 Distribuzione di temperatura in una sfera cava

Nota la distribuzione di temperatura può essere determinato il flusso termico areico:

$$J = -k \frac{dT}{dr} \quad J = k \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2}$$

che risulta essere inversamente proporzionale al quadrato della coordinata radiale  $r$ . Il flusso termico totale che attraversa una generica superficie concentrica della sfera invece, come è logico attendersi, è costante:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

ovvero:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_t}$$

La resistenza termica, per una sfera cava con condizione al contorno di prima specie è quindi:

$$R_t = \frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

I problemi relativi alla sfera cava multistrato e quello con condizione al contorno di terza specie sono trattati in modo analogo al caso della parete a simmetria piana e cilindrica.

### **Esempio**

*Per determinare sperimentalmente la conduttività termica di un materiale si realizza una sfera cava in questo materiale. Essa ha una superficie interna di raggio  $r_1 = 2\text{ cm}$ , attraverso la quale entra un flusso termico noto ed una seconda superficie di raggio  $r_2 = 10\text{ cm}$  dalla quale, in condizione di regime, esce la stessa potenza termica. Disponendo quindi di una sorgente di flusso termico costante quale una resistenza elettrica alimentata con una potenza  $P$  pari  $0.2\text{ kW}$  posta al centro, si è misurata sperimentalmente la differenza tra le temperature delle due superfici ( $T_1 - T_2 = 350\text{ }^\circ\text{C}$ ). In base ai dati ricavati, calcolare la conduttività termica del materiale.*

### **Soluzione**

*Il flusso totale che attraversa tale superficie in regime stazionario, positivo se diretto verso l'esterno, vale:*

$$\dot{Q} = -k \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

*ed è uguale alla potenza termica generata al centro. Si noti che in regime permanente è costante il flusso termico che attraversa ogni superficie sferica concentrica ( $r = \text{cost}$ ) e che tali superfici risultano anche isoterme. L'espressione precedente (conservazione dell'energia in un volume finito) rappresenta un integrale primo (equazione differenziale del 1° ordine) dell'equazione di Fourier (equazione differenziale del 2° ordine) e ad essa può vantaggiosamente sostituirsi nel caso sia richiesto o noto il flusso. Il problema differenziale si può allora scrivere:*

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}}{k4\pi r^2} \quad \begin{cases} r = r_1 \\ T = T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

*L'equazione alle derivate totali è a variabili separabili:*

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{k4\pi r^2} dr$$

ed integrando il primo membro tra  $T_1$  e  $T_2$  ed il secondo membro tra  $r_1$  ed  $r_2$  si ha:

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

da cui l'espressione della conduttività termica:

$$k = \frac{\dot{Q}}{4\pi(T_2 - T_1)} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Sostituendo ora i valori numerici:

$$k = \frac{0.2}{4\pi \cdot 350} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = 1.82 \cdot 10^{-5} \left\{ \frac{\text{kW}}{\text{cm}^\circ\text{C}} \right\} = 1.82 \left\{ \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \right\}$$

### 3.2. Resistenza termica di contatto

Nella determinazione della resistenza termica complessiva di una parete multistrato si è fatta l'ipotesi che i diversi strati fossero in perfetto contatto termico. In realtà le imprecisioni nella lavorazione superficiale del mezzo materiale rendono il contatto non perfetto e la superficie di contatto reale tra due mezzi è inferiore a quella apparente (fig. 3.9).

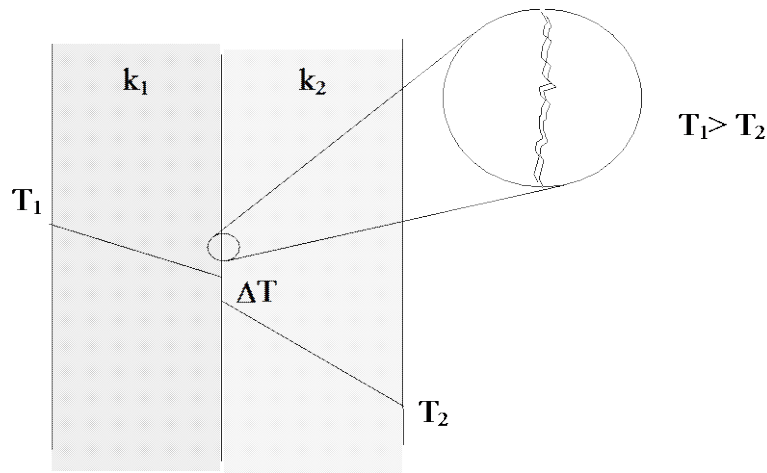


Figura 3.9 Interfaccia tra due solidi con distribuzione di temperatura

Di conseguenza si viene a creare una resistenza termica di contatto che causa una differenza finita di temperatura tra le due superfici in contatto. Tale resistenza dipende sia dalla finitura superficiale dei solidi in contatto, sia da eventuali impurezze interposte tra le due superfici (grasso, olio, etc.)



sia dalla pressione con cui vengono mantenuti in contatto i due strati di materiale. La resistenza di contatto è definita come:

$$R_{\text{cont}} = \frac{J}{\Delta T}$$

L'ordine di grandezza di questa resistenza è pari a  $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ m}^2\text{K/W}$ .

Nel caso della parete piana composta da due strati (fig. 3.9) la resistenza termica complessiva con l'ipotesi di condizioni al contorno di prima specie è quindi:

$$R = \frac{1}{S} \left( \frac{L_1}{k_1} + R_{\text{cont}} + \frac{L_2}{k_2} \right)$$

### 3.3. Sistemi con generazione interna

In alcuni casi di interesse ingegneristico il mezzo materiale è sede di sorgenti termiche descrivibili con una funzione  $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, T)$  che definisce la potenza generata (o assorbita) per unità di volume. Esempi di questo si hanno nei conduttori sede di dissipazione di potenza elettrica per effetto Joule, nei materiali utilizzati per schermare radiazioni nucleari, oppure nei reattori chimici catalitici. Verranno qui analizzati comunque i soli casi in cui il termine di generazione interna di calore sia uniforme nel volume ed indipendente dalla temperatura. L'equazione di Fourier in regime permanente diventa:

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

Di questa equazione viene di seguito data la soluzione analitica per i casi monodimensionali in geometria piana ( $T = T(x)$ ) ed in geometria cilindrica ( $T = T(r)$ ) con condizioni al contorno di prima specie.

#### 3.3.1. Parete piana indefinita

In tale caso l'equazione differenziale la cui soluzione fornisce la distribuzione di temperatura è:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\sigma}{k} = 0$$

Questa equazione ammette come integrale generale:

$$T = -\frac{\sigma}{2k} x^2 + Ax + B$$

Si considera il caso di condizioni al contorno di prima specie, ovvero con riferimento alla figura 3.10 si ha:

$$\begin{cases} x=0 \\ T=T_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=L \\ T=T_2 \end{cases}$$

Queste condizioni al contorno si traducono nel sistema di equazioni:

$$\begin{cases} T_1 = B \\ T_2 = -\frac{\sigma}{2k}L^2 + AL + B \end{cases}$$

da cui si ricava, con semplici passaggi, una distribuzione di temperatura quadratica:

$$T = -\frac{\sigma}{2k}x^2 + \left(-\frac{T_1 - T_2}{L} + \frac{\sigma L}{2k}\right)x + T_1$$

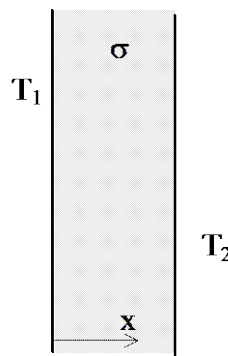


Figura 3.10 Parete piana indefinita

Si osservi che la distribuzione parabolica ha concavità rivolta verso il basso se  $\sigma$  è positivo mentre a concavità rivolta verso l'alto se  $\sigma$  è negativo. Questo ultimo caso è tipico di reattori sede di reazioni chimiche endotermiche. Nota la distribuzione di temperatura può essere determinato la coordinata  $x_{\max}$  per cui si ha il massimo (o il minimo) della temperatura. E' sufficiente annullare la derivata prima della funzione  $T = T(x)$ :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\sigma}{k}x + \left(\frac{\sigma L}{2k} - \frac{T_1 - T_2}{L}\right)$$

$$x_{\max} = \frac{L}{2} - \frac{T_1 - T_2}{L} \frac{k}{\sigma}$$

Nel caso in cui  $\sigma$  sia positivo si possono presentare i tre seguenti casi:

- per  $T_1 > T_2$  la temperatura massima nella parete si ha nell'intervallo  $0 \leq x < L/2$  ed è in  $x = 0$  se  $x_{\max} \leq 0$ .
- per  $T_1 = T_2$  la temperatura massima nella parete si ha in  $x = L/2$ .
- per  $T_1 < T_2$  la temperatura massima nella parete si ha nell'intervallo  $L/2 \leq x < L$  ed è in  $x = L$  se  $x_{\max} \geq L$ .

La figura 3.11 mostra tre diverse distribuzioni di temperatura che si hanno al variare della potenza termica generata nella parete.

Il flusso termico areico è, in presenza di generazione interna, funzione di  $x$  e pari a:

$$J = -k \frac{dT}{dx}$$

$$J = \sigma x - \left( \frac{\sigma L}{2} - k \frac{T_1 - T_2}{L} \right)$$

Se nelle relazioni precedenti si pone  $\sigma = 0$  si ottengono le espressioni già note per la parete piana senza generazione interna.

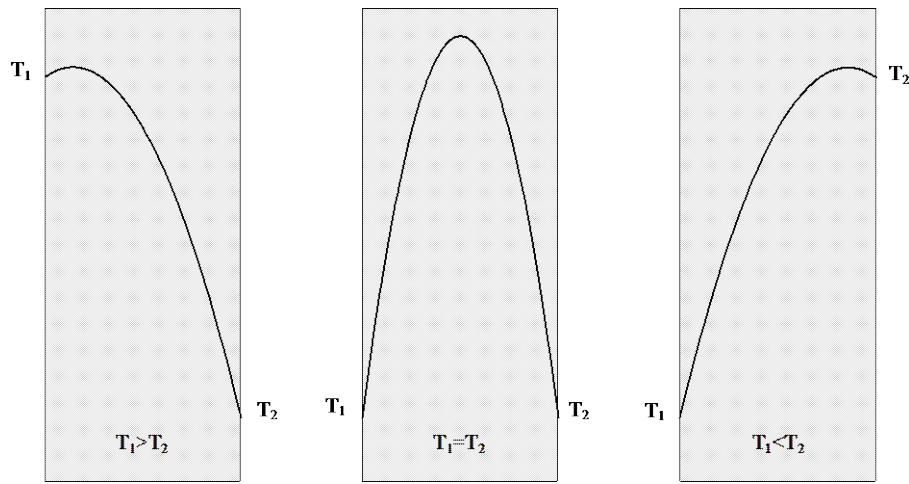


Fig. 3.11 Distribuzioni di temperatura in parete piana con generazione interna di potenza

Con metodo analogo si può risolvere il problema della parete piana con generazione interna e con condizioni al contorno di terza specie. Si tralascia la trattazione analitica completa del problema. Con le condizioni al contorno seguenti:

$$\begin{cases} x = 0 \\ h_1(T_{\infty 1} - T) = -k \frac{dT}{dx} \end{cases} \quad \begin{cases} x = L \\ -k \frac{dT}{dx} = h_2(T - T_{\infty 2}) \end{cases}$$

si ricava la distribuzione parabolica della temperatura:

$$T = -\frac{\sigma}{2k}x^2 + \left[ \frac{\sigma L}{2k} + \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left( \frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2} \right)} \frac{1}{k} \left( x + \frac{k}{h_2} \right) \right] + T_{\infty 2}$$

### 3.3.2. Cilindro indefinito

Nel caso di geometria cilindrica, se il problema è ancora monodimensionale ovvero  $T = T(r)$ , esiste una soluzione generale. Il problema differenziale e la sua soluzione sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\sigma}{k} = 0$$

$$T = -\frac{\sigma}{4k} r^2 + C \ln r + D$$

Le costanti di integrazione si determinano con le condizioni al contorno. Non si riportano i risultati che si ottengono con le diverse combinazioni di condizioni al contorno ma si illustra invece il solo caso di cilindro pieno con condizione al contorno di prima specie. La soluzione generale è evidentemente la medesima ed imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{dT}{dr} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_2 \\ T = T_2 \end{cases}$$

si ha

$$T = \frac{\sigma}{4k} (r_2^2 - r^2) + T_2$$

ovvero la temperatura ha andamento parabolico con un massimo in  $r=0$  ovvero in corrispondenza dell'asse del cilindro. La potenza termica che complessivamente lascia la superficie del cilindro pieno è ottenibile dalla relazione:

$$\dot{Q} = -2\pi r_2 L k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2}$$

$$\dot{Q} = \pi r_2^2 L \sigma$$

Si può notare che la potenza che complessivamente lascia la superficie del cilindro è pari alla potenza generata all'interno del cilindro ( $\dot{Q} = \sigma V$ ) essendo il volume  $V = \pi r_2^2 L$ .

---

#### **Esempio**

Un filo metallico avente diametro  $d = 2 \text{ mm}$  è percorso da una corrente elettrica di intensità  $I = 150 \text{ A}$ . È nota la resistività elettrica del materiale ( $\rho = 8 \cdot 10^{-7} \text{ Ohm} \cdot \text{m}$ ) e la sua conduttività termica  $k = 19 \text{ W/mK}$ . Determinare l'aumento della temperatura sull'asse del conduttore rispetto alla temperatura superficiale in condizioni di stazionarietà.

#### **Soluzione**

La resistenza elettrica del filo è:

$$R_{el} = \rho \frac{L}{\pi r^2}$$

La potenza dissipata è data dalla relazione:

$$P = R_{el} I^2$$

mentre la potenza dissipata per unità di volume è:

$$\sigma = \frac{P}{V} = \frac{\rho I^2}{(\pi r^2)^2} = 1.824 \cdot 10^9 \{W / m^3\}$$

La soluzione dell'equazione di Fourier per il cilindro pieno indefinito consente di determinare la sopraelevazione di temperatura sull'asse:

$$\Delta T = T_{asse} - T_{sup} = \frac{\sigma r^2}{4k} = 24 \{^{\circ}C\}$$


---

### 3.4. Le alettature

Si supponga di avere una superficie di scambio  $S$  a temperatura uniforme  $T_o$  che scambi potenza termica per convezione con un fluido a temperatura costante  $T_{\infty}$ . Se si indica con  $h$  il coefficiente convettivo la potenza termica scambiata tra la superficie ed il fluido è pari a:

$$\dot{Q} = hS(T_o - T_{\infty})$$

Se si vuole aumentare la potenza termica scambiata a parità di salto termico si deve aumentare il prodotto  $hS$ . E' possibile operare in due modi differenti: o aumentando il valore del coefficiente convettivo, operando secondo le indicazioni che saranno illustrate trattando la convezione, oppure aumentando la superficie di scambio. Questa ultima soluzione può essere realizzata mediante un sistema di alette. E' questa una soluzione estremamente frequente e la si utilizza ad esempio nei radiatori per auto, nei motori delle motociclette raffreddate ad aria o nei sistemi di raffreddamento dei componenti elettronici. Le alettature possono avere geometria varia (rettangolari, triangolari, trapezoidali, etc.), possono essere disposte su superfici piane e non e sono realizzate in materiali ad elevata conduttività. Si analizzerà il caso di alettature a sviluppo rettilineo e sezione costante.

### 3.5. Il problema della barra

Il caso più semplice è quello di una barra cilindrica a sezione costante (fig. 3.12), realizzata con materiale omogeneo, isotropo, di conduttività termica  $k$ , di sezione trasversale  $S$  e collegata per una estremità ad una sorgente a temperatura costante  $T = T_o$ . La barra è lambita da un fluido a temperatura costante  $T = T_{\infty}$ .

La distribuzione di temperatura nella barra è bidimensionale. Il flusso

termico si propaga prevalentemente lungo l'asse della barra ed anche in direzione radiale. L'esistenza di un flusso termico radiale comporta la presenza di un gradiente di temperatura in direzione radiale. Se la barra è di raggio modesto ed ha buona conduttività termica, il gradiente trasversale risulta piccolo e può essere considerato nullo. Ciò equivale ad avere una distribuzione di temperatura nella barra monodimensionale con  $T=T(x)$ , essendo  $x$  l'asse della barra stessa.

Con questa ipotesi semplificativa la distribuzione di temperatura può essere ottenuta per mezzo di un bilancio globale che tenga direttamente conto delle condizioni al contorno convettive.

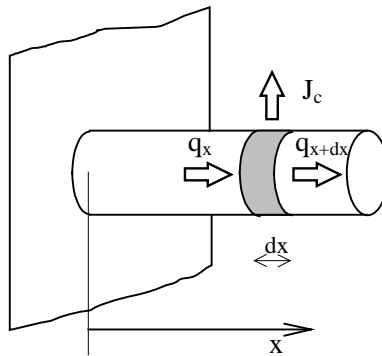


Fig. 3.12 Schema di una alettatura a sezione cilindrica

Facendo riferimento alla figura 3.12, l'applicazione dell'equazione di bilancio energetico, con l'ipotesi di regime permanente, e variazioni di volume nulle della barra, scritta per un elemento infinitesimo di volume  $Sdx$ , impone che il flusso entrante (per conduzione) eguagli il flusso uscente (per conduzione e convezione):

$$\dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} + J_c P dx$$

ove  $P$  è il perimetro della barra e con:

$$\dot{q}_x = -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_x$$

$$\dot{q}_{x+dx} = -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx} = -kS \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx + o(dx) \right)$$

$$J_c = h(T - T_\infty)$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e con alcuni semplici passaggi, si ottiene l'equazione differenziale di bilancio energetico:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kS}(T - T_\infty) = 0$$

Indicando con:

$$m^2 = \frac{hP}{kS}$$

$$\theta = T - T_\infty$$

si ottiene l'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea ed a coefficienti costanti di cui si riporta anche l'integrale generale:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

Per ottenere le costanti di integrazione si devono imporre due condizioni al contorno. Possono presentarsi generalmente tre casi che rappresentano un diverso grado di approssimazione del problema.

### 3.5.1. Barra di lunghezza infinita

In questo caso si fa l'ipotesi che la barra sia sufficientemente lunga da poter essere considerata infinita e che di conseguenza la sua temperatura per  $x \rightarrow \infty$  sia pari alla temperatura del fluido  $T_\infty$ .

Le condizioni al contorno sono quindi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \theta = \theta_o \end{cases} \quad \begin{cases} x = \infty \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Con semplici passaggi si ottiene il valore delle costanti:

$$C_1 = \theta_o \quad C_2 = 0$$

Sostituite nell'integrale generale danno la soluzione:

$$\theta = \theta_o e^{-mx}$$

ovvero una distribuzione di temperatura esponenziale decrescente:

$$T = T_\infty + (T_o - T_\infty) e^{-mx}$$

La potenza termica globalmente dissipata dalla barra si potrebbe valutare integrando il flusso termico convettivo sulla superficie della barra o, più agevolmente, determinando la potenza termica che per conduzione attraversa la sezione della barra in  $x=0$ :

$$\dot{Q}_\infty = -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_\infty = \sqrt{hPkS} (T_o - T_\infty)$$

### 3.5.2. Barra di lunghezza finita con estremità adiabatica

In questo caso le condizioni al contorno del problema differenziale sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \theta = \theta_o \end{cases} \quad \begin{cases} x = L \\ \frac{d\theta}{dx} = 0 \end{cases}$$

La sostituzione delle condizioni al contorno nella soluzione consente di ottenere il sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_o \\ -C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL} = 0 \end{cases}$$

da cui si può ottenere la soluzione nella forma:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}}$$

ovvero:

$$T = T_\infty + (T_o - T_\infty) \frac{\text{Ch}[m(L-x)]}{\text{Ch}(mL)}$$

La potenza globalmente dissipata dalla barra è:

$$\dot{Q}_{ad} = -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_{ad} = \sqrt{hPkS} (T_o - T_\infty) \text{Th}(mL) = \dot{Q}_\infty \text{Th}(mL)$$

Questo risultato mette in evidenza che la potenza complessivamente scambiata dalla barra è ben approssimata con il modello di barra di lunghezza infinita quando il prodotto  $mL > 2.7$ . In questo caso l'errore che si commette rispetto al modello con estremità adiabatica è  $< 1\%$  essendo  $\text{Th}(mL) > 0.99$ .

### 3.5.3. Barra di lunghezza finita con scambio convettivo all'estremità

In questo caso le condizioni al contorno del problema differenziale sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \theta = \theta_o \end{cases} \quad \begin{cases} x = L \\ -k \frac{d\theta}{dx} = h\theta \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale può anche essere scritto nella forma:

$$\theta = C'_1 \text{Ch}(mx) + C'_2 \text{Sh}(mx)$$

per cui le condizioni al contorno consentono di determinare:

$$\begin{cases} C'_1 = \theta_o \\ -k[mC'_1 \text{Sh}(mL) + mC'_2 \text{Ch}(mL)] = h[C'_1 \text{Ch}(mL) + C'_2 \text{Sh}(mL)] \end{cases}$$

da cui si può ottenere la soluzione nella forma:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{\text{Ch}[m(L-x)] + \frac{h}{km} \text{Sh}[m(L-x)]}{\text{Ch}(mL) + \frac{h}{km} \text{Sh}(mL)}$$

ovvero:



$$T = T_{\infty} + (T_o - T_{\infty}) \frac{\text{Ch}[m(L-x)] + \frac{h}{km} \text{Sh}[m(L-x)]}{\text{Ch}(mL) + \frac{h}{km} \text{Sh}(mL)}$$

La potenza globalmente dissipata dalla barra è:

$$\dot{Q}_h = -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_h = \sqrt{hPkS} (T_o - T_{\infty}) \frac{\text{Th}(mL) + \frac{h}{km}}{1 + \frac{h}{km} \text{Th}(mL)}$$

La distribuzione di temperatura nella barra per questo caso può essere scritta anche nella forma:

$$T = T_{\infty} + (T_o - T_{\infty}) \frac{\text{Ch}[m(L' - x)]}{\text{Ch}(mL')}$$

avendo posto  $L' = L + \varepsilon$  ove  $\varepsilon$  rappresenta una tratto aggiuntivo di barra a cui corrisponde una superficie laterale pari alla sezione trasversale della barra. Si ipotizza quindi di avere una barra più lunga con estremità adiabatica.

### 3.6. Le superfici alettate

I risultati ottenuti al caso di barra di sezione costante sono immediatamente applicabili al caso di aletta rettangolare.

Le alettature sono frequentemente impiegate allo scopo di aumentare la superficie di scambio termico tra il sistema ed il fluido che lo lambisce. Nella maggior parte dei casi sono adottate per risolvere problemi di raffreddamento, anche se talvolta sono utilizzate per aumentare lo scambio in casi di riscaldamento. Lo scambio radiante viene di solito assunto trascurabile oppure conglobato in un unico coefficiente che tiene conto di convezione ed irraggiamento (coefficiente di adduzione). Le condizioni termiche che consigliano di ricorrere a superfici alettate si verificano quando si è in presenza di una parete avente buona conduttività termica che separa due fluidi a diversa temperatura per i quali i due coefficienti convettivo siano significativamente diversi. In tal caso la resistenza convettiva da un lato sarà molto maggiore che dall'altro e diventerà il termine limitante lo scambio termico. In questo caso sarà bene alettare la superficie di scambio dalla parte del fluido a minor coefficiente convettivo.

Per caratterizzare il comportamento di una superficie alettata si introduce l'efficienza dell'aletta  $\eta$  che si definisce come rapporto tra la potenza termica complessivamente dissipata dall'aletta e la potenza termica che

scambierebbe una aletta di pari geometria ma con temperatura superficiale costante e pari a  $T_o$ :

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_o}$$

$$\dot{Q}_o = hPL(T_o - T_\infty)$$

Per le configurazioni geometriche più semplici e comuni (alette rettangolari, triangolari, anulari) sono in genere possibili soluzioni analitiche. Nel caso di aletta rettangolare, può essere utilizzata l'espressione del flusso ricavata per la barra di lunghezza finita, ottenendosi le seguenti espressioni dell'efficienza nei casi di alette con estremità adiabatica e non:

$$\eta_{ad} = \frac{Th(mL)}{mL}$$

$$\eta_h = \frac{Th(mL) + \frac{h}{km}}{mL + \frac{h}{km}Th(mL)}$$

In tutti i casi le alette sono caratterizzate da una dimensione trasversale piccola rispetto alla dimensione longitudinale nonché dell'avere conduttività termica elevata. Per queste ragioni il "modello termico" sarà simile a quello già utilizzato per la barra e, di conseguenza, temperatura e flusso risulteranno funzione della lunghezza  $L$  dell'aletta e del gruppo  $m$  che ne riassume le caratteristiche geometriche e termiche.

Nel diagramma di figura 3.13 l'efficienza  $\eta$  dell'aletta è infatti correlata (per le diverse geometrie) a queste quantità o meglio alla quantità adimensionale:

$$L_c^{3/2} \left( \frac{h}{kS_p} \right)^{0.5}$$

ove  $L_c$  e  $S_p$  sono quantità geometriche definite in modo opportuno.

Per l'intera superficie alettata, può infine definirsi una efficienza dell'alettatura  $\varepsilon_{al}$  in relazione alla superficie di base  $S_b$  ed alla superficie di aletta aggiunta  $S_a$ . Questa efficienza viene definita come rapporto tra il flusso effettivamente scambiato dalla superficie totale ( $S_a + S_b$ ) ed il flusso massimo che sarebbe possibile scambiare se tutta la superficie fosse a temperatura costante  $T_o$ :

$$\varepsilon_{al} = \frac{hS_b(T_o - T_\infty) + \eta_{al}hS_a(T_o - T_\infty)}{h(S_a + S_b)(T_o - T_\infty)} = \frac{1 + \eta_{al} \frac{S_a}{S_b}}{1 + \frac{S_a}{S_b}}$$

Mediante questa ultima espressione è possibile determinare il coefficiente globale di scambio termico per pareti a simmetria cilindrica alettata sulla superficie esterna. E' sufficiente considerare la superficie esterna totale corretta con il termine  $\epsilon_{al}$ .

La potenza termica complessivamente scambiata è:

$$\dot{Q} = \epsilon_{al} h S (T_o - T_{\infty})$$

dove  $S = (S_a + S_b)$  rappresenta la superficie totale dell'alettatura.

Efficienza dell'aletta

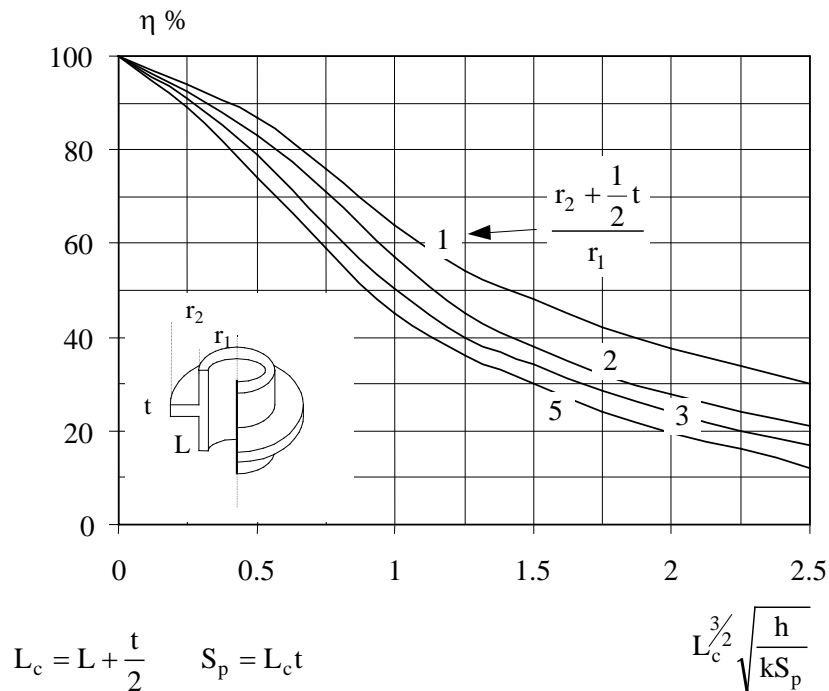


Fig. 3.13

Efficienza di una aletta rettangolare di un tubo

### 3.7. Esercizi

La parete esterna di un edificio è formata da due spessori di muratura ( $s_1 = 15$  cm e  $s_2 = 10$  cm) separati da una camera d'aria ( $L = 5$  cm); la conduttività termica della muratura è  $k = 0.5$  kcal/mh°C. La resistenza termica della camera d'aria è  $R_a = 0.05$  m²K/W. D'inverno le temperature esterna ed interna sono rispettivamente  $-5$  °C e  $20$  °C, mentre i coefficienti convettivi sono  $h_{int} = 15$  W/m²K ed  $h_{est} = 10$  W/m²K. Determinare il flusso termico areico attraverso la parete. ( $J = 38.7$  W/m²)

Calcolare la potenza termica per unità di lunghezza attraverso una parete cilindrica in rame di raggio interno  $r_1 = 10$  mm, raggio esterno  $r_2 = 18$  mm, temperature  $T_1 = 295$  °C e  $T_2 = 305$  °C. La conduttività termica del rame al variare della temperatura ( $T_0 = 150$  °C) è data dalla relazione:  $k_{Cu} = 371.9 [1 - 9.25 \cdot 10^{-5}(T - T_0)]$  W/mK.

$$(Q/L = -39203 \text{ W/m})$$

Una bacchetta di rame molto lunga e di diametro  $D = 1$  cm ha conduttività termica  $k = 377$  W/mK ed è lambita da aria alla temperatura  $T_a = 22$  °C con coefficiente convettivo ( $h = 11$  W/m<sup>2</sup>K). Una estremità si trova alla temperatura costante  $T_b = 150$  °C. Calcolare il flusso disperso dalla bacchetta.

$$(Q = 12.95 \text{ W})$$

Risolvere l'esercizio precedente con l'ipotesi di barra di lunghezza finita, assumendo successivamente  $L = 2$  cm,  $4$  cm,  $8$  cm e  $128$  cm.

$$(Q = 0.88 \text{ W}; 1.77 \text{ W}; 3.45 \text{ W}; 12.94 \text{ W})$$

## 4. Regime Variabile

Quando la distribuzione di temperatura entro un corpo varia nel tempo, il regime termico viene definito variabile o transitorio. In questo caso il campo termico è dipendente sia dalle condizioni iniziali che dalle condizioni al contorno. Per chiarire la differenza tra regime variabile e regime stazionario varrà il seguente esempio. Si immagini di riscaldare (per esempio con una fiamma) l'estremità di una bacchetta metallica. Si potranno mettere in evidenza due fasi successive: nella prima fase il metallo aumenta di temperatura (fase transitoria o transitorio), nella seconda fase la temperatura della barra cessa di crescere perché la potenza termica entrante eguaglia quella dispersa verso l'ambiente per convezione ed irraggiamento (fase stazionaria).

Lo studio di un processo di conduzione in regime non stazionario viene sviluppato mediante la soluzione dell'equazione generale della conduzione che consente di determinare la distribuzione di temperatura all'interno del corpo in ogni istante; con questa informazione è poi possibile determinare i flussi termici.

La soluzione dell'equazione della conduzione può essere ottenuta sia mediante metodi analitici, sia mediante metodi numerici approssimati che, con lo sviluppo dei sistemi di calcolo, sono ormai diventati l'approccio più diffuso.

Esistono comunque casi in cui la soluzione per via analitica è ottenibile e viene utilizzata per la capacità di sintesi che un risultato analitico è in grado di proporre rispetto ad una soluzione numerica.

In questo capitolo verrà analizzato il comportamento termico di una parete piana indefinita di spessore  $2L$  (fig. 4.1) che, inizialmente a temperatura costante ( $T_0$ ), viene immersa in un fluido a temperatura  $T_\infty$ . Verrà analizzato il transitorio termico in relazione alla soluzione del problema con approcci semplificativi differenti.

Il problema differenziale è rappresentato dalla equazione di Fourier nella forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \forall x, & t = 0 \\ T = T_0 \end{cases}$$

Ponendo l'origine dell'asse  $x$  sul piano di simmetria della parete, può essere analizzata la parete di spessore  $L$  con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = L, & t > 0 \\ -k_s \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \end{cases}$$

Con  $T_\infty$  si è indicata la temperatura del fluido e con  $k_s$  la conduttività termica della parete.

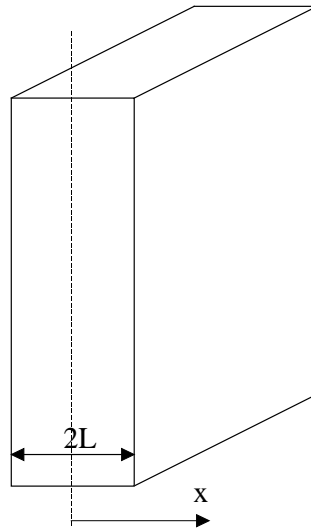


Figura 4.1 Parete piana indefinita

Per ottenere la soluzione analitica di questo problema è opportuno adimensionalizzare le precedenti equazioni allo scopo di ricavare i diversi gruppi di variabili coinvolti nel problema. Si può adimensionalizzare la temperatura  $T$  utilizzando entrambe le temperature note  $T_0$  e  $T_\infty$ .

Si potrà perciò:

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

Analogamente la variabile  $x$  sarà adimensionalizzata utilizzando il semispessore  $L$ . Si potrà perciò:

$$\xi = \frac{x}{L}$$

Non essendoci un tempo noto, si utilizzeranno per

l'adimensionalizzazione la variabile  $t$ , la lunghezza  $L$  e la diffusività termica  $a$ . Si porrà perciò:

$$Fou = \frac{at}{L^2}$$

che è noto come numero di Fourier.

Si vedrà che l'adimensionalizzazione della condizione al contorno di terza specie porta alla definizione di un ulteriore gruppo adimensionale noto come numero di Biot:

$$Bi = \frac{hL}{k_s}$$

Si noti che nella definizione del numero di Biot compare  $k_s$  conduttività termica del solido ed  $h$  coefficiente convettivo. Il numero di Biot compare in tutti i problemi adimensionalizzati di conduzione con condizione al contorno convettive.

La adimensionalizzazione del problema differenziale facilita la soluzione che acquista, come già detto, anche maggior generalità.

Per sostituzione l'equazione di Fourier assume la seguente forma adimensionalizzata:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial Fou}$$

con le condizioni ai limiti espresse da:

$$\begin{cases} Fou = 0 \\ \vartheta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 1 \\ -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = Bi \cdot \vartheta \end{cases}$$

Nel problema differenziale compaiono perciò soltanto variabili adimensionalizzate e la soluzione sarà del tipo:

$$\vartheta = \vartheta(\xi, Fou, Bi)$$

Il numero di Biot può essere interpretato come rapporto tra la resistenza termica conduttiva e la resistenza termica convettiva:

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$$

La resistenza interna del solido è infatti data dalla relazione:

$$R_{cond} = \frac{L}{k_s S}$$

mentre la resistenza convettiva localizzata all'interfaccia solido-fluido è data da:

$$R_{conv} = \frac{1}{hS}$$

ove  $h$  è il coefficiente convettivo.

I casi limite sono ovviamente:

$$R_{\text{cond}} = 0 \Rightarrow k_s = \infty$$

$$R_{\text{conv}} = 0 \Rightarrow h = \infty$$

Nei casi intermedi si hanno valori di conduttività termica e coefficiente convettivo finiti.

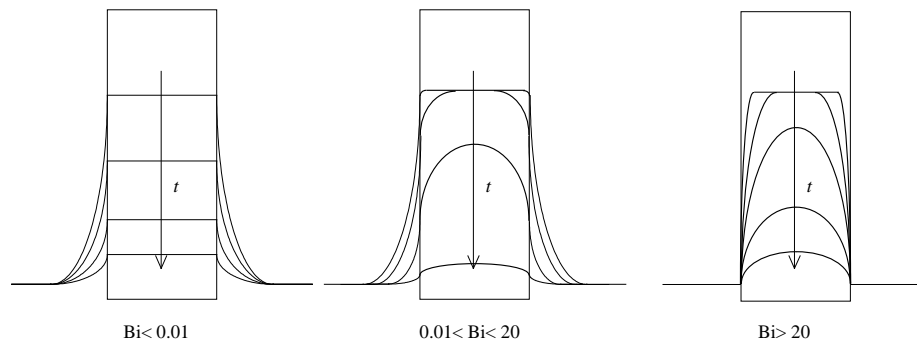


Figura 4.2 Distribuzione qualitativa delle isocrone di temperatura in una parete piana indefinita al variare del numero di Biot

Questo, come vedremo, consente di individuare classi di problemi la cui soluzione si ottiene con approcci matematici diversi. In figura 4.2 è riportata una schematica rappresentazione della distribuzione di temperatura (tempi diversi) nella parete durante il transitorio termico al variare del numero di Biot.

- Nei casi in cui il numero di Biot è molto piccolo ( $Bi < 0.01$ ) la temperatura del mezzo solido, variabile nel tempo, può essere considerata uniforme nella parete: la resistenza termica interna è trascurabile rispetto alla resistenza convettiva. Questa classe di problemi si risolve attraverso l'integrazione dell'equazione di bilancio complessivo nella quale l'unica variabile indipendente è il tempo e l'equazione differenziale che ne risulta è del primo ordine, alle derivate totali e quindi facilmente risolvibile. Si ha un approccio detto a parametri concentrati.
- Quando il numero di Biot è molto elevato ( $Bi > 20$ ) la temperatura del mezzo solido è variabile nel tempo e nello spazio: la resistenza termica interna è preponderante rispetto alla resistenza convettiva. Per la soluzione di questa classe di problemi occorre integrare l'equazione generale della conduzione con condizioni al contorno che possono essere ricondotte a condizioni di prima specie essendo la resistenza convettiva trascurabile.
- Per un numero di Biot intermedio ai due limiti citati ( $0.01 < Bi < 20$ ) la temperatura del mezzo solido è variabile nel tempo e nello spazio: la resistenza termica interna è dello stesso ordine di grandezza della



resistenza convettiva. Per la soluzione di questa classe di problemi occorre integrare l'equazione generale della conduzione con condizioni al contorno che, nell'esempio analizzato, sono condizioni di terza specie.

In generale si può affermare che accanto alla soluzione esatta del problema differenziale possono presentarsi soluzioni approssimate la cui accuratezza dipenderà dal valore del numero di Biot e del numero di Fourier. Di seguito si illustreranno le diverse soluzioni del problema originario.

#### 4.1. Modello con resistenza interna trascurabile ( $Bi < 0.01$ )

La maggior parte dei casi di transitorio termico che rientrano in questa categoria sono quelli relativi a corpi di conduttività termica molto elevata e superficie esterna per unità di volume assai elevata. Se essi vengono portati improvvisamente a contatto con un fluido a temperatura costante è lecito assumere che le perturbazioni termiche si diffondano nell'intero volume del solido con velocità infinita, con la conseguenza che la temperatura risulterà uguale allo stesso istante in ogni punto del solido. Il parametro che definisce la risposta di un corpo a fronte di una sollecitazione termica è, come si è visto, il numero di Biot. Esso può essere interpretato come il numero adimensionale che esprime il rapporto tra resistenza conduttiva e convettiva e di conseguenza se il numero di Biot è molto minore di uno, significa che la resistenza conduttiva interna è trascurabile a confronto di quella convettiva localizzata all'interfaccia fluido-parete. La variazione di temperatura è in questo caso localizzata sulla superficie ed è nulla all'interno del solido nel quale la temperatura risulta uniforme e costante ad ogni istante. Pertanto il fenomeno di scambio termico non comporta un aspetto conduttivo nel mezzo solido ed il problema si riconduce alla equazione di bilancio energetico. Questa equazione è una relazione di bilancio istantaneo, che impone l'eguaglianza tra calore entrante (o uscente) nel solido e calore ceduto (o assorbito) dal fluido, nell'intervallo infinitesimo di tempo  $dt$ . Si potrà scrivere:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}^{\leftarrow}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \rho c V \frac{dT}{dt} \\ \dot{Q}^{\leftarrow} &= hS(T_{\infty} - T) \end{aligned}$$

dove  $S$  è la superficie esterna limitante il volume  $V$  di solido, avente massa volumica  $\rho$  e calore specifico  $c$ , mentre con  $T_{\infty}$  si indica la temperatura del fluido supposta costante e con  $T$  la temperatura del solido all'istante  $t$ . L'equazione differenziale del primo ordine che traduce il bilancio energetico

è:

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_{\infty})$$

mentre la condizione ai limiti (condizione iniziale) del problema è:

$$\begin{cases} t = 0 \\ T = T_0 \end{cases}$$

Separando le variabili ed integrando si ha:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_{\infty}} = - \int_0^t \frac{hS}{\rho c V} dt$$

La soluzione fornisce l'andamento nel tempo della temperatura del solido. Infatti:

$$\ln \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = - \frac{hS}{\rho c V} t$$

da cui, con semplici passaggi si ottiene:

$$T = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) e^{-\frac{hS}{\rho c V} t}$$

Si definisce lunghezza caratteristica  $L_c$  il rapporto tra il volume del solido e la sua superficie di scambio:

$$L_c = \frac{V}{S}$$

Nel caso illustrato di parete piana indefinita tale lunghezza coincide con il semispessore della parete.

Il termine ad esponente è esprimibile come prodotto del numero di Fourier per il numero di Biot; questi sono infatti pari a:

$$Fou = \frac{k_s}{\rho c L_c^2} t \quad Bi = \frac{h L_c}{k_s}$$

$$Fou \cdot Bi = \frac{ht}{\rho c L_c}$$

La soluzione dell'equazione differenziale può quindi essere allora riscritta in termini adimensionali ponendo:

$$\vartheta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

da cui si ottiene:

$$\vartheta = e^{-Bi \cdot Fou}$$

In genere l'approssimazione di corpo con resistenza interna trascurabile risulta valida per un numero di Biot  $< 0.01$ . L'applicazione di tale modello a casi in cui  $Bi > 0.01$  porta a maggiori errori sia nella distribuzione di temperatura che nelle potenze termiche scambiate. E' stato dimostrato che

per  $Bi = 0.1$  l'errore commesso nella valutazione della distribuzione di temperatura è minore del 5 %.

---

**Esempio**

Un cubo realizzato in acciaio di lato  $H = 2$  cm, inizialmente alla temperatura  $T_o = 1000$  °C, viene immerso in un fluido alla temperatura costante ed uniforme  $T_\infty = 20$  °C. Determinare la temperatura raggiunta dal cubo dopo 3 minuti essendo noti il coefficiente convettivo  $h = 50$  W/m<sup>2</sup>K, la massa volumica  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, il calore specifico medio  $c = 0.6$  kJ/kgK e la conduttività termica dell'acciaio  $k = 59$  W/mK.

**Soluzione**

Il numero di Biot vale:

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

La lunghezza caratteristica del cubo è pari al rapporto tra il volume  $V$  e la superficie laterale  $S$ :

$$L = \frac{V}{S} = \frac{L^3}{6L^2} = 0.00333\{\text{m}\}$$

Il numero di Biot è quindi pari a:

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{50\{\text{W/m}^2\text{K}\} \cdot 0.00333\{\text{m}\}}{59\{\text{W/mK}\}} = 0.0028$$

E' applicabile il modello a resistenza termica trascurabile. Integrando quindi l'equazione di Bilancio energetico si ottiene:

$$T = T_\infty + (T_o - T_\infty) e^{-\frac{h}{\rho c L} t}$$

$$T = 20 + (1000 - 20) e^{-\frac{50 \cdot 180}{7850 \cdot 600 \cdot 0.00333}} = 572.4\{\text{°C}\}$$


---

## 4.2. Modello a resistenza interna non trascurabile ( $Bi > 0.01$ )

L'equazione generale della conduzione assume, nella trattazione di questo caso, la forma più completa, comprendendo anche la derivata della temperatura rispetto al tempo:

$$\nabla^2 T + \frac{\sigma}{k_s} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

In generale la risoluzione di problemi differenziali alle derivate parziali non è agevole anche se, per geometrie semplici, esistono soluzioni analitiche. A questa casistica appartiene anche il caso analizzato di parete piana indefinita; per questa geometria è ragionevole ipotizzare che la distribuzione di temperatura sia funzione, oltre che del tempo, anche di una sola coordinata geometrica  $x$  che rappresenta la distanza dall'asse di simmetria della parete. Nella trattazione si ipotizzerà inoltre assenza di

generazione interna.

Come osservato nella premessa l'analisi di questo problema è differente a seconda che possa essere trascurata o non trascurata la resistenza termica convettiva. Per semplicità si analizzerà dapprima il caso di resistenza convettiva trascurabile, ovvero  $Bi > 20$ , che consente di sostituire alle condizioni al contorno di Cauchy quella di Dirichlet ( $T_1 = T_\infty$ ).

#### 4.2.1. Problema di Dirichlet

Il problema differenziale è rappresentato dalla equazione di Fourier nella forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \forall x, & t = 0 \\ T = T_o \end{cases}$$

le condizioni al contorno, avendo posto l'origine degli assi sul piano di simmetria della parete, sono:

$$\begin{cases} x = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = L, & t > 0 \\ T = T_1 \end{cases}$$

La adimensionalizzazione del problema differenziale, come già osservato, facilita la soluzione che, in termini adimensionali, acquista anche maggior generalità.

Si creano a tal fine tre variabili adimensionalizzate  $\vartheta$ ,  $\xi$  e  $Fou$ :

$$\vartheta = \frac{T - T_1}{T_o - T_1} \quad dT = (T_o - T_1) d\vartheta$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad dx = L d\xi$$

$$Fou = \frac{at}{L^2} \quad dt = \frac{L^2}{a} dFou$$

Per sostituzione l'equazione di Fourier diventa:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial Fou}$$

con le condizioni ai limiti espresse da:

$$\begin{cases} Fou = 0 \\ \vartheta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 1 \\ \vartheta = 0 \end{cases}$$

In essa compaiono soltanto variabili adimensionalizzate e la soluzione

sarà del tipo:

$$\vartheta = \vartheta(\xi, Fou)$$

La soluzione di questo problema differenziale è possibile analiticamente con il metodo di separazione delle variabili. Si tralascia qui di illustrare tale metodo e si riporta, per completezza, la soluzione analitica che si ottiene costituita da uno sviluppo in serie:

$$\vartheta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 Fou} \sin\left(\frac{n\pi}{2} \xi\right) \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

La soluzione generale in termini adimensionali ha validità in tutti i casi geometricamente simili e termicamente simili, ovvero con lo stesso tipo di condizioni iniziali ed al contorno, e può essere riportata in un diagramma ad assi cartesiani ortogonali (Fig. 4.3). Tale diagramma prende il nome di diagramma di Heissler. Esso ha sulle ordinate  $\vartheta$  (temperatura adimensionalizzata), sulle ascisse  $Fou$  o tempo adimensionalizzato (in scala logaritmica), mentre la terza variabile è riportata sul diagramma attraverso curve a  $\xi$  costante.

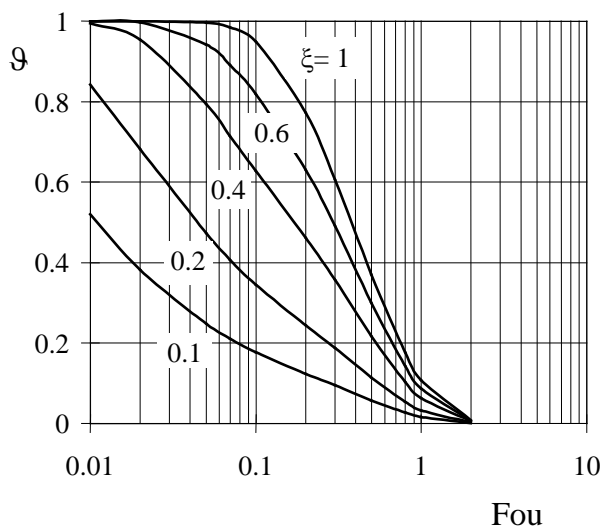


Figura 4.3 Diagramma di Heissler per parete piana con condizioni al contorno di Dirichelet: distribuzione di temperatura

Si noti che tutte le curve a  $\xi = \text{cost}$ , col tendere del tempo adimensionalizzato a zero, e quindi con il tendere alle condizioni iniziali, convergono in  $\vartheta = 1$  (ovvero per tempi bassi, prossimi al tempo iniziale, la temperatura  $T$  in ogni punto tende alla temperatura iniziale  $T_0$  e così deve essere).

Si noti inoltre che tutte le curve a  $\xi = \text{cost}$ , col tendere del tempo

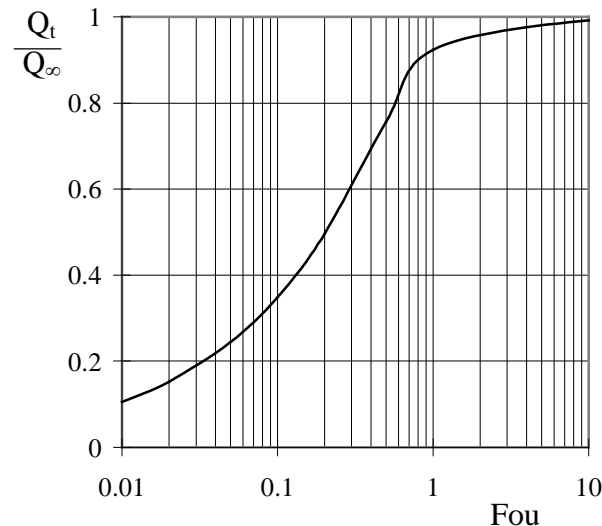
adimensionalizzato all'infinito tendono a convergere in  $\vartheta = 0$  (ovvero all'aumentare del tempo la temperatura  $T$  in ogni punto tende a portarsi alla temperatura imposta al contorno  $T_1$  e così deve essere).

E' riportato anche il diagramma che rappresenta il rapporto tra il calore totale scambiato fino al tempo  $t$  ( $Q_t$ ) ed il calore totale necessario per portare la parete in equilibrio con le condizioni al contorno ( $Q_\infty$ ) ( $t = \infty$ ), cioè alla temperatura  $T_1$  (Fig. 4.4). Le quantità  $Q_t$  e  $Q_\infty$  sono pari a:

$$Q_t = 4SLc\rho(T_o - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 Fou} \right] \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$Q_\infty = 2SLc\rho(T_o - T_1)$$

dove  $S$  è la superficie di scambio della parete,  $L$  il suo spessore,  $c$  il calore specifico del mezzo e  $\rho$  la massa volumica del mezzo materiale.



*Figura 4.4 Diagramma di Heissler per parete piana con condizioni al contorno di Dirichelet: calore entrante nella parete*

Si noti che il rapporto tra  $Q_t$  e  $Q_\infty$  tende ad 1 per numeri di Fourier elevati ( $t \rightarrow \infty$ ) mentre diventa nullo per  $t = 0$ .

#### **4.2.2. Problema di Cauchy**

Si consideri ora la situazione in cui la resistenza convettiva della parete non sia trascurabile rispetto alla resistenza conduttiva ( $Bi < 20$ ). Le condizioni al contorno che devono essere prese in considerazione riguardano lo scambio convettivo all'interfaccia solido-fluido. Il problema differenziale è ancora rappresentato dalla equazione di Fourier nella forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \forall x, & t = 0 \\ T = T_0 \end{cases}$$

le condizioni al contorno, avendo posto l'origine degli assi sul piano di simmetria della parete, sono:

$$\begin{cases} x = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = L, & t > 0 \\ -k_s \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \end{cases}$$

Con  $T_\infty$  si è indicata la temperatura del fluido. La soluzione analitica è reperibile sotto forma di diagrammi che portano sugli assi le variabili adimensionali. E' perciò opportuno adimensionalizzare le precedenti equazioni allo scopo di ricavare i diversi gruppi di variabili coinvolti nel problema. Si può adimensionalizzare la temperatura  $T$  utilizzando entrambe le temperature note  $T_0$  e  $T_\infty$ .

Si porrà perciò:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

Analogamente la variabile  $x$  sarà adimensionalizzata utilizzando il semispessore  $L$ . Si porrà perciò:

$$\xi = \frac{x}{L}$$

Non essendoci un tempo noto, si utilizzeranno per l'adimensionalizzazione la variabile  $t$ , la lunghezza  $L$  e la diffusività  $a$ . Si porrà perciò:

$$Fou = \frac{at}{L^2}$$

Ad esse si aggiungerà il gruppo adimensionale numero di Biot:

$$Bi = \frac{hL}{k_s}$$

Si ricorda che nella definizione del numero di Biot compare  $k_s$  conduttività termica del solido.

Per sostituzione l'equazione di Fourier assume la seguente forma adimensionalizzata:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fou}$$

con le condizioni ai limiti espresse da:

$$\begin{cases} \text{Fou} = 0 \\ \vartheta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 1 \\ -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \text{Bi} \cdot \vartheta \end{cases}$$

In essa compaiono soltanto variabili adimensionalizzate e la soluzione sarà del tipo:

$$\vartheta = \vartheta(\xi, \text{Fou}, \text{Bi})$$

La soluzione analitica dell'equazione differenziale è possibile adottando il metodo di separazione delle variabili. Il procedimento per la soluzione è riportato in testi specializzati. Il risultato a cui si giunge è ancora rappresentato da uno sviluppo in serie:

$$\vartheta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n^2 \text{Fou}} \frac{\sin(a_n)}{a_n + \sin(a_n)\cos(a_n)} \cos(a_n \xi)$$

i coefficienti  $a_n$  sono le radici dell'equazione trascendente:

$$a_n \text{tg}(a_n) - \text{Bi} = 0$$

Non sarà ovviamente possibile avere la soluzione in forma grafica utilizzando un solo diagramma piano. All'aumentare del numero di Fourier (del tempo) i termini dello sviluppo in serie convergono rapidamente tanto che per  $\text{Fou} > 0.2$  trascurando i termini superiori al primo si commette un errore inferiore al 2%.

La soluzione è rappresentabile in due diagrammi chiamati diagrammi di Heissler (Fig. 4.5, 4.6).

Sulle ordinate del primo diagramma è riportata la temperatura adimensionalizzata in una ben precisa posizione geometrica (in  $\xi = 0$ , cioè sul piano di simmetria adiabatico). Tale temperatura è indicata con il simbolo  $\vartheta_C$  ed è definita come:

$$\vartheta_C = \frac{T_C - T_{\infty}}{T_1 - T_{\infty}}$$

Essa risulta pertanto funzione solo dei numeri di Biot e di Fourier e non più della coordinata spaziale adimensionalizzata  $\xi$ :

$$\vartheta_C = \vartheta_C(\text{Bi}, \text{Fou})$$

Sulle ascisse del diagramma è riportato il numero di Fourier, mentre all'interno sono tracciate le famiglie di curve a  $1/\text{Bi}$  costante. Le discontinuità di queste ultime dipendono solo dall'adozione di scale diverse nelle diverse zone del diagramma.



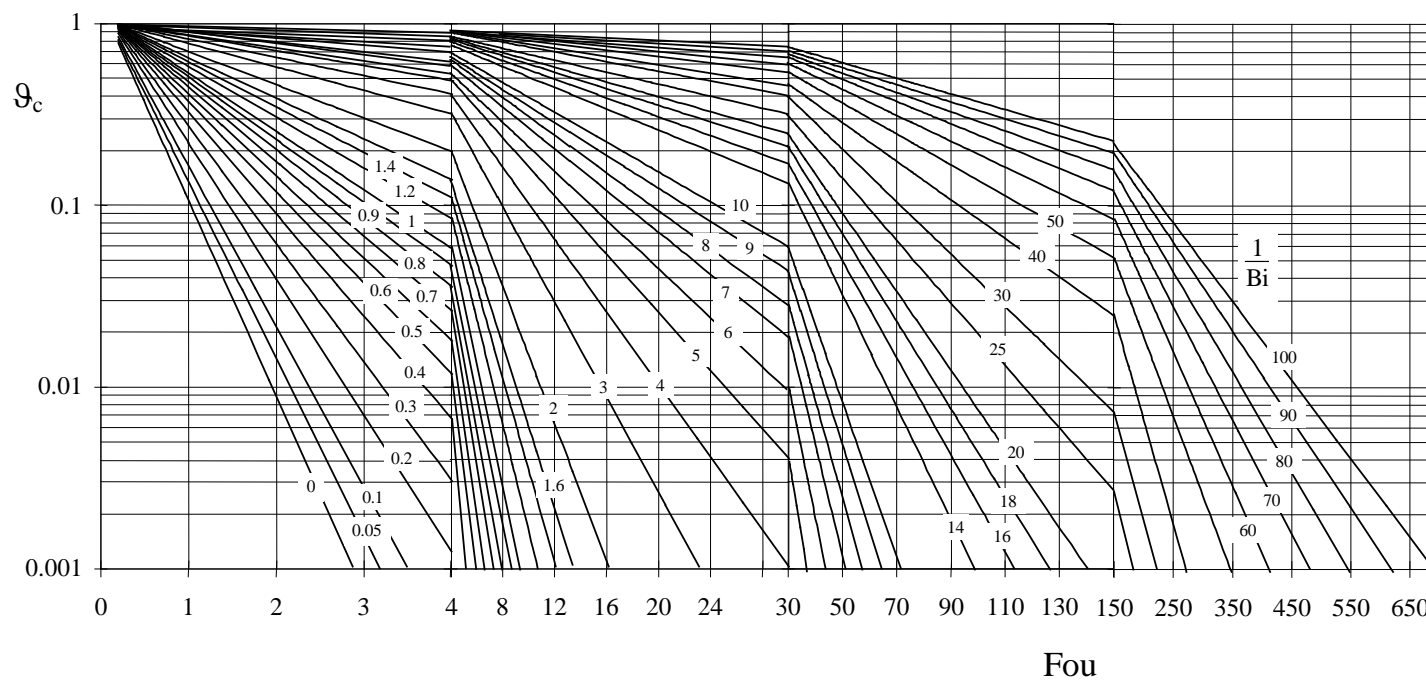


Figura 4.5 Diagramma di Heissler per parete piana con condizioni al contorno di Cauchy

Nel secondo diagramma (fig. 4.6) è riportato sulle ordinate il rapporto tra la temperatura adimensionalizzata e la temperatura adimensionalizzata al centro:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}$$

e sulle ascisse l'inverso del numero di Biot mentre all'interno sono riportate le famiglie di curve a  $\xi = \text{cost}$ : si opera in questo caso a parità di tempo e scompare pertanto la dipendenza dal numero di Fourier.

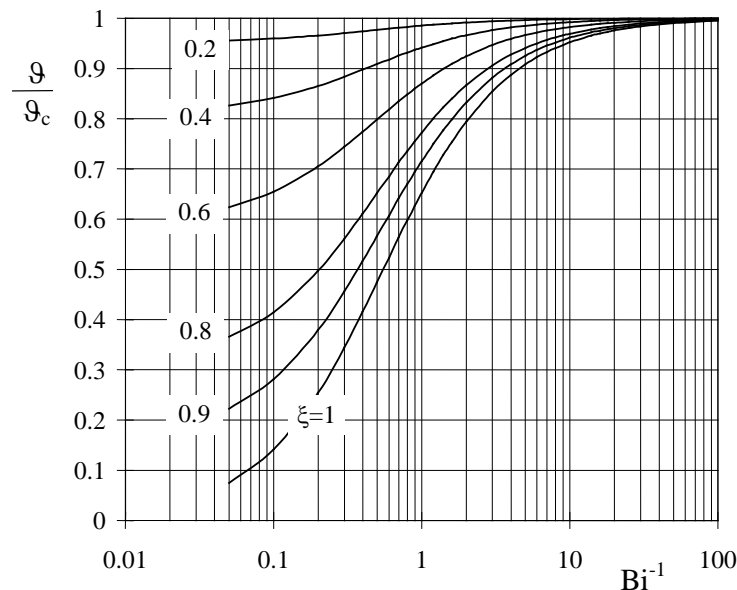


Figura 4.6 Diagramma di Heissler per parete piana con condizioni al contorno di Cauchy

#### Esempio

Si dispone di una lastra piana di spessore  $2L = 30$  cm avente caratteristiche termofisiche note ( $\rho = 1500$  kg/m<sup>3</sup>,  $c = 800$  J/kgK,  $k = 0.6$  W/mK) che all'istante iniziale ha una temperatura uniforme e costante e pari a  $T_o = 100$  °C. Viene immersa in un fluido a temperatura  $T_f = 20$  °C. Determinare la temperatura della lastra ad una distanza di 7.5 cm dalla superficie dopo 16 h di immersione sapendo che il coefficiente convettivo è  $h = 8$  W/m<sup>2</sup>K.

#### Soluzione

Si valuta inizialmente il numero di Biot utilizzando come lunghezza caratteristica il semispessore della parete:

$$Bi = \frac{hL}{k_s} = \frac{8 \{W / m^2 K\} \cdot 0.15 \{m\}}{0.6 \{W / mK\}} = 2$$

Essendo il numero di Biot nel campo di applicazione del modello di parete

piana indefinita con resistenza interna non trascurabile la soluzione sarà del tipo:

$$\vartheta = \vartheta(\xi, Fou, Bi)$$

e l'incognita è la temperatura adimensionale  $\vartheta$ . Si dovranno utilizzare i diagrammi adimensionali di Heisler validi per lastra piana (fig. 4.5 e 4.6) utilizzando valori noti dei gruppi adimensionali  $\xi$  e  $Fou$ :

$$\xi = \frac{x}{L} = 0.5$$

$$Fou = \frac{at}{L^2} = \frac{kt}{\rho c L^2} = \frac{0.6 \{W / mK\} \cdot 16 \{h\} \cdot 3600 \{s / h\}}{1500 \{kg / m^3\} \cdot 800 \{J / kgK\} \cdot 0.15^2 \{m^2\}} = 1.28$$

Dal diagramma di figura 4.5, con dati di ingresso  $1/Bi$  e  $Fou$  si ricava:

$$\vartheta_c = 0.28$$

Dal diagramma di figura 4.6, con dati di ingresso  $1/Bi$  e  $\xi$  si ricava:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = 0.93$$

da cui si ricava  $\vartheta = 0.28 \cdot 0.93 = 0.26$

Dalla definizione di  $\vartheta$  si ricava:

$$T = \vartheta(T_o - T_f) + T_f = 40.83 \{^{\circ}C\}$$


---

### 4.3. La parete seminfinita in regime variabile ( $Bi > 0.01$ )

In alcuni problemi di conduzione si deve analizzare il transitorio termico in corpi di spessore elevato delimitati da superfici piane sulle quali si hanno condizioni al contorno variabili nel tempo. Il transitorio termico che si realizza in questi casi dipende dalle condizioni al contorno che si impongono sulle superfici piane. Tra i casi che possono presentarsi si illustrerà quello relativo ad una condizione al contorno di prima specie per una parete piana di spessore tanto rilevante da potersi considerare di spessore infinito: si ha la cosiddetta parete seminfinita. Il criterio generale per l'applicazione della soluzione valida per la parete seminfinita alla parete di spessore finito, è che:

$$\frac{L}{\sqrt{4at}} \geq 2$$

ove  $L$  è il semispessore della parete.

Si consideri dunque un corpo seminfinito (o ad esso assimilabile) in regime transitorio, con distribuzione di temperatura uniforme e costante, la cui superficie venga improvvisamente portata a temperatura diversa.

L'equazione differenziale che descrive il fenomeno di conduzione è l'equazione di Fourier:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \forall x, & t = 0 \\ T = T_o \end{cases}$$

mentre le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} x = 0, & t > 0 \\ T = T_l \end{cases} \quad \begin{cases} x = \infty, & t > 0 \\ T = T_o \end{cases}$$

La soluzione analitica si ottiene con un artificio che permette di trasformare l'equazione alle derivate parziali in una equazione alle derivate totali di più agevole soluzione e che ammette una soluzione generale.

Coerentemente con la definizione di solido seminfinito la soluzione del problema deve fornire la distribuzione di temperatura tale che per valori molto grandi di  $x$  la temperatura sia pari alla temperatura iniziale  $T_o$  così come espresso dalla seconda condizione al contorno. In un corpo seminfinito non è definibile una lunghezza caratteristica ma si può avere una coordinata  $x$  che definisce la posizione all'interno della parete. Per questa classe di problemi, che riguardano la propagazione di perturbazioni termiche in solidi seminfiniti la posizione  $x$  ed il tempo  $t$  per cui si verifica un dato valore di temperatura non sono indipendenti e l'equazione generale della conduzione può essere riformulata introducendo la grandezza adimensionale:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

Analogamente si adimensionalizza la temperatura nel mezzo utilizzando le temperature note:

$$\vartheta = \frac{T - T_o}{T_l - T_o}$$

Con queste grandezze adimensionali, essendo  $\vartheta = \vartheta(T)$  e  $\eta = \eta(x, t)$  si ottiene che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{dT}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{dT}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{dT}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{dT}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{dT}{d\vartheta} \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{dT}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Derivando le grandezze adimensionali  $\eta$  e  $\vartheta$  si ha:

$$\frac{dT}{d\vartheta} = (T_l - T_o) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4at}} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4at}} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

sostituendo si ottiene, in definitiva, una equazione differenziale del secondo ordine in  $\vartheta = \vartheta(\eta)$ :

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\vartheta}{d\eta} = 0$$

Le condizioni ai limiti trasformate si riducono a:

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \vartheta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta = \infty \\ \vartheta = 0 \end{cases}$$

Per ottenere l'integrale generale dell'equazione differenziale occorre eseguire una ulteriore sostituzione di variabile. Posto ora:

$$Y = \frac{d\vartheta}{d\eta}$$

si ottiene:

$$\frac{dY}{d\eta} + 2\eta Y = 0$$

separando le variabili ed integrando si ricava:

$$Y = C_1 e^{-\eta^2}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2}$$

da cui si ottiene, integrando ulteriormente:

$$\vartheta = C_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + C_2$$

Essendo la funzione d'errore di Gauss (fig. 4.7) definita come:

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz$$

l'integrale generale può essere riscritto come :

$$\vartheta = C'_1 \text{erf}(\eta) + C_2$$

Poiché:

$$\text{erf}(0) = 0$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

le condizioni ai limiti consentono di ricavare:

$$C_2 = 1$$

$$C'_1 = -C_2 = -1$$

In conclusione si ottiene:

$$\vartheta = 1 - \text{erf}(\eta)$$

Si definisce con il simbolo erfc la funzione complementare d'errore di Gauss (complementary error function) che è pari a:

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$$

La temperatura in un generico punto x ad un istante generico t è data quindi dalla relazione:

$$T = T_o + (T_1 - T_o) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

La grandezza adimensionale:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

rappresenta dunque la risposta del corpo seminfinito ad una perturbazione superficiale a gradino. Infatti la soluzione  $T = T(x, t)$  dipende soltanto dal valore assunto dalla quantità  $\eta$ . Osservando la funzione d'errore di Gauss si nota che per  $\eta > 2$  la temperatura adimensionalizzata tenderà al valore iniziale. In altri termini per  $\eta < 2$  la soluzione trovata dipende solo dalla condizione iniziale e non dalla condizione al contorno ( $x \rightarrow \infty$ ).

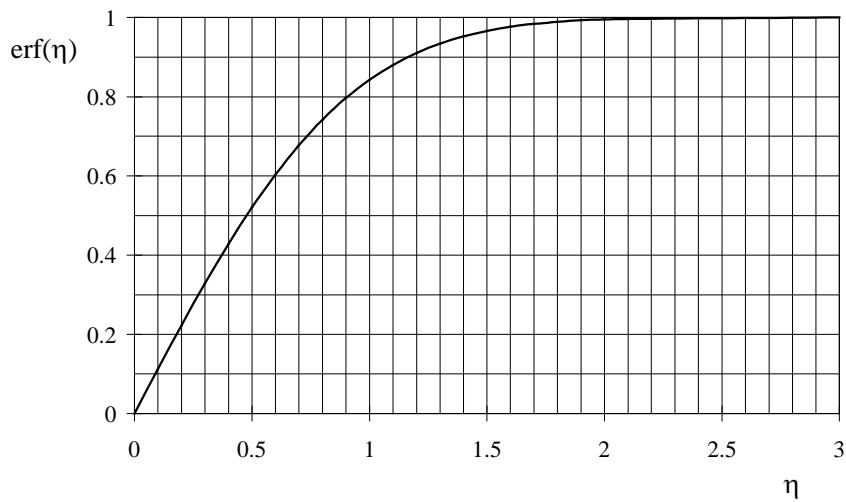


Figura 4.7 Funzione d'errore di Gauss

In questo caso la soluzione ottenuta per una parete seminfinita può essere applicata ad una parete di semispessore  $L$  finito purché valga la condizione:

$$\frac{L}{\sqrt{4at}} \geq 2$$

Il flusso termico areico, in una generica sezione a distanza  $x$  dalla superficie, è:

$$J = -k \frac{dT}{dx}$$

Derivando l'espressione della distribuzione di temperatura precedentemente ricavata si ottiene:

$$J(x, t) = -\frac{k(T_1 - T_o)}{\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

ed in particolare alla superficie in  $x = 0$  si ha:

$$J(0, t) = -\frac{k(T_1 - T_o)}{\sqrt{\pi a t}}$$

Il calore scambiato, per unità di superficie, tra l'istante iniziale  $t = 0$  ed un istante generico  $t$  è invece dato da:

$$Q(t) = \int_0^t J(0, t) dt$$

$$Q(t) = -2k(T_1 - T_o) \sqrt{\frac{t}{\pi a}}$$

### **Esempio**

*Nella progettazione di una rete idrica in zone di montagna, è necessario evitare che le condotte ghiaccino durante l'inverno. Nell'ipotesi che la superficie del terreno possa essere considerata a temperatura costante per lunghi periodi, determinare quale è la profondità minima a cui deve essere interrata una condotta d'acqua per evitare che congeli nel caso in cui la temperatura superficiale del terreno da un valore iniziale di  $T_o = 20^\circ\text{C}$  si abbassi repentinamente a  $T_s = -15^\circ\text{C}$ , e permanga a tale valore per un periodo di 60 giorni. Sono note le proprietà termofisiche del terreno:  $\rho = 2050 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 1840 \text{ J/kgK}$ ,  $k = 0.52 \text{ W/mK}$ .*

### **Soluzione**

*Si utilizza la soluzione valida per la parete semiinfinita con distribuzione iniziale uniforme di temperatura e condizioni al contorno di Dirichlet. La soluzione è:*

$$T = T_o + (T_1 - T_o) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

*da cui si può ricavare, con  $T = 0^\circ\text{C}$ :*

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) = \frac{T - T_o}{T_1 - T_o} = \frac{0 - (-15)}{20 - (-15)} = 0.4286$$

*Dal diagramma di figura 4.7, con  $\operatorname{erf} = 0.5714$  si ricava  $\eta = 0.58$*

*La diffusività termica del terreno è:*

$$a = \frac{k}{\rho c} = \frac{0.52}{2050 \cdot 1840} = 1.3786 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

*La profondità a cui può essere interrata la tubatura è quindi:*

$$x = 0.58 \sqrt{4at}$$

$$x = 0.58 \sqrt{4 \cdot 1.3786 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 60 \text{ giorni} \cdot 86400 \text{ s/giorno}} = 0.98 \text{ m}$$

Possono essere fatte alcune osservazioni generali sulla soluzione. Dato che per lo stesso valore del numero adimensionale  $\eta$  ci sono infinite coppie di valori  $(x, t)$ , la stessa temperatura si avrà in istanti differenti a profondità diverse. Sarà perciò utile definire un "fronte" convenzionale della

perturbazione termica, scegliendo per esso, ad esempio, un valore pari all'1% della perturbazione superficiale imposta. Risulterà cioè  $\eta = 0.01$  a cui corrisponde un ben preciso valore del gruppo adimensionale  $\eta$ . Infatti:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) = 0.01 \quad \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) = 0.99 \quad \frac{x}{\sqrt{4at}} = 1.8$$

Nell'ultima relazione la coppia  $(x, t)$  rappresenta profondità e tempo alle quali si trova il fronte della perturbazione (pari a 1/100 della perturbazione superficiale a gradino). A parità di ogni altro parametro essa risulta funzione della diffusività termica  $a$ , ovvero varia da materiale a materiale.

Ad esempio nella tabella 4.I che segue si può leggere il tempo di penetrazione della perturbazione, in funzione della diffusività termica del materiale e della profondità.

<b>x</b>	<b>a= 10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>/s rame</b>	<b>a= 10<sup>-5</sup> m<sup>2</sup>/s ferro</b>	<b>a= 3·10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s terreno</b>
0.01m	0.08 s	0.77 s	25.7 s
1 m	12 min 52 s	2 h 10 min	71 h 30 min

Tabella 4.I      Tempo di penetrazione in funzione della diffusività termica e della distanza  $x$

Il tempo di penetrazione è importante in tutti i problemi di regolazione termica.

Si pensi ad esempio ad un forno termoregolato attraverso un elemento sensibile inguainato in refrattario. Se  $x$  è lo spessore della guaina, la perturbazione arriverà all'elemento sensibile in un tempo  $t$  proporzionale ad  $x$  ed inversamente proporzionale alla diffusività del materiale refrattario  $a$ . Il problema ha un aspetto duale altrettanto importante, in quanto precisa la profondità di penetrazione della perturbazione in un tempo prefissato.

Dato che di frequente le perturbazioni termiche superficiali sono da ascrivere all'alternarsi giorno notte con periodicità di 24 h (con inversione del segno della perturbazione ogni semiperiodo di 12 ore), la soluzione del mezzo seminfinito potrà essere adottata per muri aventi spessore  $L > 0.5$  m: tutta la zona che sta a valle del fronte della perturbazione, non risente infatti della perturbazione superficiale e non influisce sull'andamento del fenomeno. Infatti per un muro la diffusività termica è dell'ordine di  $a = 3 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s. Su questo fatto si basava l'affermazione fatta all'inizio del paragrafo secondo la quale la soluzione del muro seminfinito poteva essere adottata tutte le volte che la quantità adimensionale

$$\frac{L}{\sqrt{4at}}$$

supera il valore limite prestabilito.



Riassumendo quanto esposto in questo capitolo si può affermare che la soluzione di un problema di conduzione in regime stazionario non può essere codificato in un approccio matematico unico. Nei casi pratici è opportuno introdurre ipotesi semplificative che rendono più agevole la soluzione matematica del problema differenziale a fronte di una approssimazione nella soluzione. Come è stato illustrato il numero di Biot ed il numero di Fourier consentono di individuare tipologie di risoluzione che sono riassunte nella figura 4.8.

Si ricorda comunque che lo sviluppo dei metodi numerici e soprattutto degli strumenti di calcolo ha notevolmente agevolato la soluzione di questo tipo di problemi.

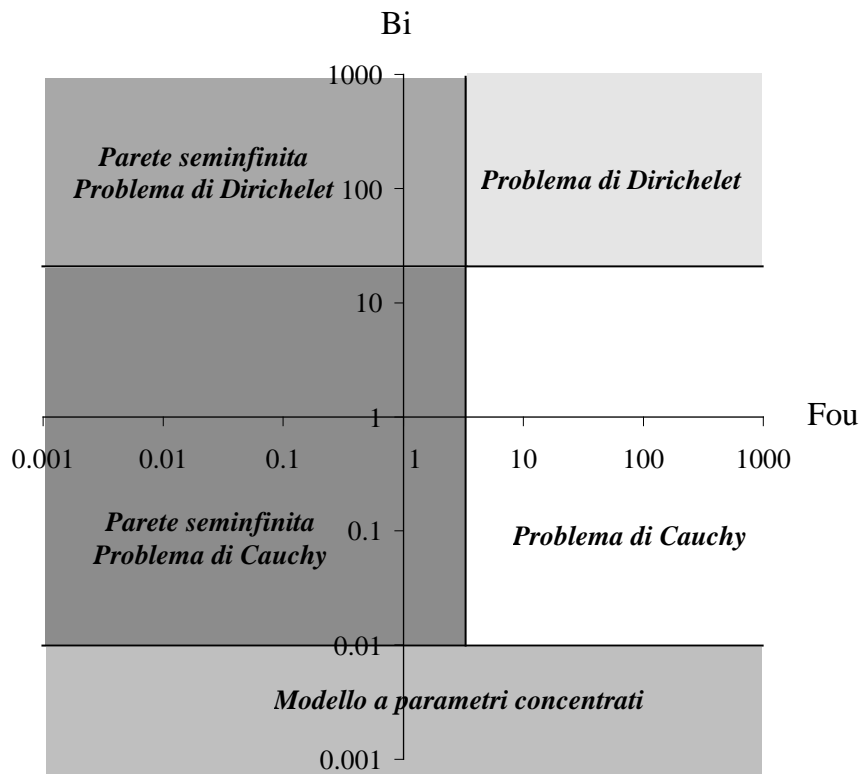


Figura 4.8 Domini di applicabilità delle soluzioni per un caso di conduzione in transitorio

#### 4.4. Esercizi

*Una sottile lastra di rame di spessore  $s=2\text{ mm}$ , alla temperatura  $T_i=500\text{ }^\circ\text{C}$  viene immersa improvvisamente in acqua a temperatura costante  $T=20\text{ }^\circ\text{C}$  fino a che la lastra raggiunga una temperatura  $T_f=50\text{ }^\circ\text{C}$ . Essendo noti la massa volumica del rame  $\rho=8900\text{ kg/m}^3$ , il calore specifico  $c=0.1\text{ kcal/kgK}$ , la conduttività termica  $k=350\text{ W/mK}$ , ed il coefficiente convettivo  $h=100\text{ W/m}^2\text{K}$ , determinare il tempo necessario per raggiungere la temperatura  $T_f$ .*  
( $t=304\text{ s}$ )

*Per la misura della temperatura di una corrente gassosa si utilizza una termocoppia, la cui giunzione può essere approssimata ad una sfera con diametro  $D=1\text{ mm}$ . Le proprietà termofisiche del materiale con cui è realizzata la giunzione sono note ( $\rho=8500\text{ kg/m}^3$ ,  $c=320\text{ J/kgK}$ ,  $k=35\text{ W/mK}$ ) ed il coefficiente di scambio termico tra giunzione e gas è  $h=210\text{ W/m}^2\text{K}$ . Si determini il tempo necessario affinché con la termocoppia si misuri il 99% della differenza di temperatura iniziale (tempo di risposta).*  
( $t=10\text{ s}$ )

*Calcolare il tempo massimo al disopra del quale una parete in acciaio (diffusività termica  $a=1.25\cdot10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ) di spessore  $L=5\text{ cm}$  non può essere trattata come semiinfinita.*  
( $t=198\text{ s}$ )

## 5. Metodi numerici per i problemi di conduzione

Il fenomeno della conduzione del calore ha luogo in geometrie tridimensionali ed il problema matematico che ne risulta può essere risolto in modo analitico solo per alcune geometrie semplici e con condizioni al contorno non particolarmente complesse. Nei capitoli precedenti è stato illustrato come risolvere per via analitica problemi in regime stazionario in sistemi a simmetria piana, cilindrica e sferica, e alcuni problemi in regime variabile. Sono anche risolvibili analiticamente problemi bidimensionali con condizioni al contorno uniformi.

L'impiego dei metodi analitici è quindi riservato solo ad alcune situazioni e quando la geometria e/o le condizioni al contorno sono più complesse, l'impossibilità di raggiungere una soluzione analitica impone l'uso di altre tecniche di soluzione della equazione della conduzione. Molti problemi pratici presentano inoltre dipendenza delle proprietà termofisiche dei mezzi dalla temperatura ed eventualmente comportamenti anisotropi che rendono impossibili soluzioni analitiche esatte dei campi termici.

La soluzione delle equazioni differenziali è quindi realizzata con metodi approssimati che consentono di ottenere soluzioni approssimate ma di adeguata accuratezza. Tra i metodi approssimati quelli oggi maggiormente in uso sono i metodi numerici. Lo sviluppo di strumenti di calcolo sempre più potenti e di metodi di soluzione di sistemi di equazioni algebriche sempre più efficienti ha reso estremamente interessante l'impiego di tecniche numeriche. Sono oggi disponibili software commerciali in grado di risolvere, anche su un semplice personal computer, la totalità dei problemi di conduzione. Diversi sono i metodi matematici utilizzati tra cui il metodo delle differenze finite ed il metodo degli elementi finiti. In questo capitolo non verranno illustrate le differenze e le potenzialità delle diverse tecniche ma ci si limiterà ad illustrare il solo metodo delle differenze finite per la ragione che è di semplice implementazione e di gran lunga il più utilizzato per la soluzione dei problemi di conduzione.

L'approccio alle differenze finite si basa sulla risoluzione di un sistema di equazione algebriche che deriva dall'approssimazione che nasce dalla

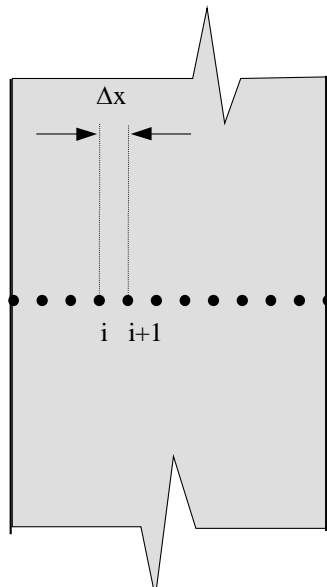
sostituzione nelle equazioni differenziali che reggono il fenomeno della conduzione di quantità infinitesime con quantità finite. Per questa ragione il metodo è detto metodo delle differenze finite.

L'ipotesi di Fourier e l'equazione generale della conduzione da essa derivata mantengono tutta la loro validità ma il mezzo in cui avviene la conduzione non è più considerato un "continuo" ma un insieme di punti discreti, nei quali è possibile determinare la temperatura ad intervalli discreti di tempo.

### 5.1. Formulazione alle differenze finite

Il punto di partenza del metodo delle differenze finite è rappresentato dalla discretizzazione del dominio geometrico. Per illustrare l'approccio si consideri il caso semplice di una parete piana indefinita in regime non stazionario la cui temperatura è quindi funzione solo della coordinata  $x$  e del tempo  $t$ .

Facendo riferimento alla figura 5.1 si possono notare i punti discreti con cui verrà descritto il sistema continuo. Tali punti sono distanziati tra loro di una distanza  $\Delta x$ . Si indichi con  $i$  il generico punto nella parete.



*Figura 5.1 Discretizzazione geometrica di una parete piana indefinita*

Una derivata rispetto al tempo od allo spazio può essere approssimata mediante una formulazione alle differenze finite ricorrendo ad uno sviluppo in serie di Taylor troncato della funzione analizzata. Per la funzione  $T = T(x)$

lo sviluppo nell'intorno del punto di coordinata  $x$  è dato dalla relazione:

$$T(x + \Delta x) = T(x) + \frac{dT}{dx} \Delta x + \frac{d^2 T}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{d^3 T}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \dots$$

ovvero dalla relazione:

$$T(x - \Delta x) = T(x) - \frac{dT}{dx} \Delta x + \frac{d^2 T}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{d^3 T}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \dots$$

Troncando lo sviluppo dopo il termine lineare in  $\Delta x$  si possono determinare le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} + o(\Delta x^2) \\ \frac{dT}{dx} &= \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x} + o(\Delta x^2) \end{aligned}$$

che possono essere scritte, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a  $\Delta x$ , anche con l'impiego di una coordinata logica  $i$  riportata come pedice:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &\cong \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \\ \frac{dT}{dx} &\cong \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned}$$

che sono note rispettivamente come rappresentazione della derivata prima nella forma a differenze finite in avanti (forward difference form) e come rappresentazione della derivata prima nella forma a differenze finite all'indietro (backward difference form). Una terza espressione della derivata prima si ottiene sottraendo tra loro le due espressioni dello sviluppo in serie di Taylor ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{T(x + \Delta x) - T(x - \Delta x)}{2\Delta x} + o(\Delta x^3) \\ \frac{dT}{dx} &\cong \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Questa espressione è nota come rappresentazione a differenza centrale della derivata prima (central difference form).

In tutte le espressioni proposte della derivata prima è presente un errore di troncamento indicato con  $o(\Delta x^2)$  oppure  $o(\Delta x^3)$  che rappresenta l'ordine di grandezza dell'errore introdotto per avere considerato una sequenza finita di termini nell'espressione della derivata prima.

Se vengono sommate le due espressioni che danno lo sviluppo in serie di Taylor della funzione  $T(x)$  può essere ottenuta l'espressione della derivata seconda:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + o(\Delta x^4)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} \cong \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'espressione che si ricava è nota come formula a differenza centrale a tre punti.

Per quanto riguarda la derivata prima rispetto al tempo può essere adottato un approccio analogo basato sulla scelta di una discretizzazione con intervallo temporale  $\Delta t$ . Si tralasciano le espressioni dello sviluppo in serie di Taylor e si osserva che nella scrittura che verrà impiegata si utilizzerà l'apice per indicare il generico istante temporale. In modo analogo a quanto già illustrato si determinano le relazioni:

$$\frac{dT}{dt} \cong \frac{T^{t+1} - T^t}{\Delta t}$$

$$\frac{dT}{dt} \cong \frac{T^t - T^{t-1}}{\Delta t}$$

che rappresentano le espressioni approssimate della derivata rispetto al tempo nella formulazione rispettivamente forward e backward.

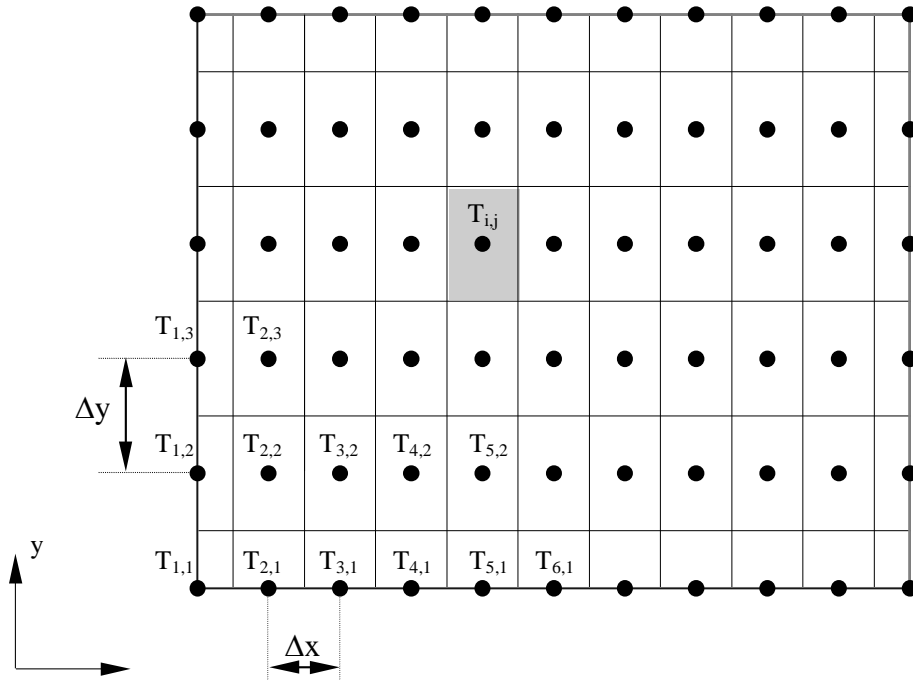


Figura 5.2 Discretizzazione di un dominio bidimensionale

L'aspetto positivo di questo approccio è che è possibile sostituire alle derivate parziali delle espressioni algebriche e ricondurre quindi la soluzione di un problema differenziale alla soluzione di un problema algebrico.

Per applicare il metodo delle differenze finite ad un dominio spaziale è necessario per prima cosa discretizzare dal punto di vista geometrico il dominio stesso. Così facendo si individuano un numero finito  $k$  di nodi a cui è associata una temperatura incognita. Devono quindi essere scritte un numero  $k$  di equazioni (pari al numero dei nodi) nelle incognite temperature nodali.

Facendo riferimento al dominio bidimensionale di figura 5.2 si può osservare che ad ogni nodo è associato un elemento che, per i nodi interni del dominio, ha lati  $\Delta x$  e  $\Delta y$  essendo questi due ultimi le distanze tra due nodi adiacenti rispettivamente in direzione  $x$  ed  $y$ .

Possono a questo punto essere adottati due metodi differenti per la scrittura del sistema di equazioni che deriva dalla equazione generale della conduzione e dalle condizioni al contorno proprie del problema che si analizza.

Un primo metodo consiste nella sostituzione diretta delle espressioni approssimate ricavate delle derivate parziali della temperatura nell'equazione fondamentale della conduzione o nelle equazioni che esprimono le condizioni al contorno; un secondo metodo si basa sull'impostazione di un bilancio energetico per un elemento della regione circostante un dato nodo.

Sebbene i due metodi possano essere impiegati indistintamente di norma risulta semplice il primo metodo per i nodi interni ed il secondo metodo per i nodi appartenenti al contorno del dominio.

Ai fini della modellazione si suppone inoltre che la potenza termica generata in un elemento sia concentrata nel nodo.

## 5.2. Differenze finite per il regime stazionario

Si consideri il caso illustrato in figura 5.2 con l'ipotesi di avere generazione interna uniforme ( $\sigma$ ). L'equazione generale della conduzione in coordinate cartesiane ortogonali è:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\sigma}{k} = 0$$

Per i nodi interni è possibile utilizzare le espressioni approssimate ricavate per le derivate parziali ottenendo, per ogni nodo di coordinate logiche  $i, j$ :

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{\sigma}{k} = 0$$

Risolvendo rispetto a  $T_{i,j}$  ed indicando con il simbolo  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$$

si ottiene la relazione:

$$2(1 + \beta)T_{i,j} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \beta T_{i,j+1} + \beta T_{i,j-1} + \frac{\sigma}{k} \Delta x^2$$

L'equazione differenziale viene quindi sostituita da una equazione algebrica lineare che mette in relazione la temperatura nel nodo (i, j) con le temperature nei nodi vicini e con il valore locale della potenza generata per unità di volume.

Nel caso abbastanza comune di spaziatura quadrata ( $\Delta x = \Delta y$ ) ed assenza di generazione interna l'equazione che si ottiene per i nodi interni è:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})$$

ovvero la temperatura nel nodo (i, j) è la media aritmetica delle temperature dei nodi contigui.

Per i nodi al contorno occorre analizzare ogni specifico caso. La situazione più semplice che si può avere è quella relativa a condizioni al contorno di prima specie, ovvero temperatura imposta. Le altre possibili condizioni devono essere analizzate in modo opportuno. A titolo di esempio si illustra come ricavare la condizione al contorno nel caso di condizione al contorno di terza specie (scambio convettivo) caratterizzata da un coefficiente convettivo h ed una temperatura del fluido  $T_\infty$ . Si considererà la geometria riportata in fig. 5.3 con, per semplicità, elementi a spaziatura quadrata.

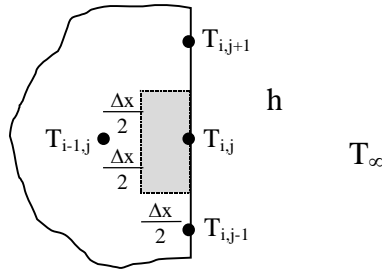


Figura 5.3 Schema per la definizione dell'equazione algebrica che rappresenta una condizione al contorno di terza specie

Si scriverà ora l'equazione di bilancio energetico in regime stazionario per l'elemento di contorno illustrato in figura:

$$k\Delta x \frac{(T_{i-1,j} - T_{i,j})}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_{i,j-1} - T_{i,j})}{\Delta x} = h\Delta x (T_{i,j} - T_\infty)$$

Se ora si introduce il numero di Biot caratteristico della convezione alle



differenze finite e definito come:

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k}$$

si ottiene la relazione:

$$T_{i,j} = \frac{1}{2 + Bi} \left[ T_{i-1,j} + \frac{1}{2} (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) + Bi T_{\infty} \right]$$

Tale relazione può essere messa a sistema con le relazioni per i nodi interni ottenendo così un sistema di equazioni algebriche nelle temperature nodali incognite.

La tabella 5.I illustra le più comuni situazioni geometriche e condizioni al contorno con le equazioni che ne derivano dall'applicazione del bilancio energetico.

Una volta completato il sistema di equazioni algebriche nelle incognite temperature nodali questo può essere risolto sia in forma diretta con tecniche di inversione della matrice o di eliminazione di Gauss, sia in forma approssimata. La soluzione diretta del sistema di equazioni algebriche fornisce il risultato corretto del valore nodale ma comporta un impegno di risorse di calcolo molto oneroso e pertanto limitato ai casi con un numero ridotto di incognite nodali. Le soluzioni in forma approssimata, che sono oggi sicuramente le più utilizzate e di cui la più diffusa è la tecnica di Gauss-Seidel, si basano su tecniche iterative che convergono rapidamente ai valori nodali corretti.

I valori comunque che si ottengono con tecniche numeriche differiscono dalla soluzione analitica esatta del problema: l'entità dello scostamento dipende essenzialmente dalla discretizzazione adottata: più si aumenta il numero di nodi più ci si avvicina alla soluzione esatta ma con un sempre maggiore utilizzo di risorse di calcolo. E' stato dimostrato inoltre che le tecniche iterative di Gauss-Seidel per problemi di conduzione in regime stazionario, con discretizzazione quadrata, convergono sempre alla soluzione esatta e non si verificano fenomeni di instabilità. Infatti nel sistema di equazioni che si ottiene il termine diagonale della matrice dei coefficienti è sempre maggiore, o al più uguale, della somma dei termini extradiagonali. Per approfondimenti ulteriori si rimanda a testi specifici.

### 5.3. Differenze finite per il regime non stazionario

I metodi numerici illustrati per la soluzione dei problemi di conduzione in regime stazionario possono essere proficuamente utilizzati per la soluzione dei problemi non stazionari. In questo caso la equazione differenziale della conduzione in regime non stazionario viene discretizzata sia rispetto al dominio spaziale sia rispetto al dominio temporale.

A seconda di come si esplicitano le derivate parziali si ottengono quelli che sono detti metodo esplicito e metodo implicito.

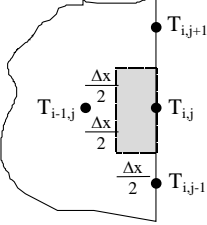
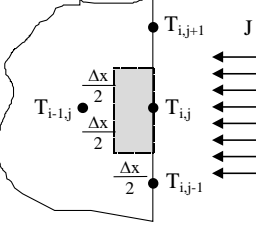
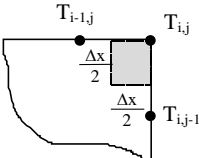
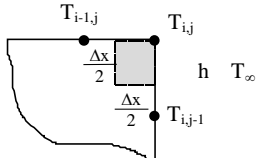
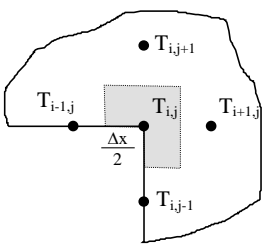
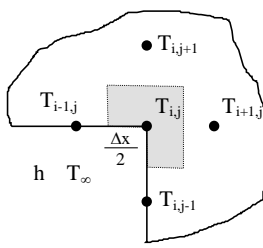
<p>Superficie adiabatica</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{2} T_{i-1,j} + \frac{1}{4} (T_{i,j+1} + T_{i,j-1})$	<p>Flusso termico uniforme</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{2} T_{i-1,j} + \frac{1}{4} (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) + \frac{J \Delta x}{2k}$
<p>Superficie adiabatica</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{2} (T_{i-1,j} + T_{i,j-1})$	<p>Scambio termico convettivo</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{1 + Bi} \left[ \frac{1}{2} (T_{i-1,j} + T_{i,j-1}) + Bi T_{\infty} \right]$
<p>Superficie adiabatica</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{3} (T_{i+1,j} + T_{i,j+1}) + \frac{1}{6} (T_{i-1,j} + T_{i,j-1})$	<p>Scambio termico convettivo</p>  $T_{i,j} = \frac{1}{3 + Bi} \left[ T_{i,j+1} + T_{i+1,j} + \frac{1}{2} (T_{i-1,j} + T_{i,j-1}) + Bi T_{\infty} \right]$

Tabella 5.1 Condizioni al contorno con il metodo delle differenze finite in geometrie bidimensionali

### 5.3.1. Schema esplicito

Si consideri, per semplicità, un problema monodimensionale in regime transitorio in un mezzo omogeneo isotropo. L'equazione generale della conduzione, in assenza di generazione interna, è:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

ove  $a$  è la diffusività termica del mezzo. Si indicherà con  $T_i^t$  la temperatura nel nodo  $i$ -esimo al tempo  $t$ . Utilizzando la relazione trovata per la forma forward della derivata rispetto al tempo e valutando la derivata seconda spaziale all'istante  $t$  si ha:

$$\frac{T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t}{\Delta x^2} = \frac{1}{a} \frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta t}$$

risolvendo rispetto alla temperatura incognita  $T_i^{t+1}$  si ottiene:

$$T_i^{t+1} = (1 - 2\Delta Fou) T_i^t + \Delta Fou (T_{i+1}^t + T_{i-1}^t)$$

$$\Delta Fou = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

in cui  $\Delta Fou$  è il numero di Fourier del reticolo.

Questa equazione rappresenta l'equazione base per i nodi interni di un problema monodimensionale in regime transitorio. Come si può facilmente osservare la temperatura di un generico nodo all'istante  $t+1$  è messa in relazione con le temperature del nodo stesso e di quelli contigui all'istante  $t$ . Non è quindi necessario ricorrere a tecniche iterative ma occorre solo conoscere, come è logico attendersi, le temperature nodali all'istante iniziale. Questa tecnica di soluzione è chiamata esplicita per indicare che non è necessaria alcuna tecnica iterativa ma dalla soluzione ad un istante generico  $t$  si risale immediatamente alla soluzione all'istante  $t+1$ .

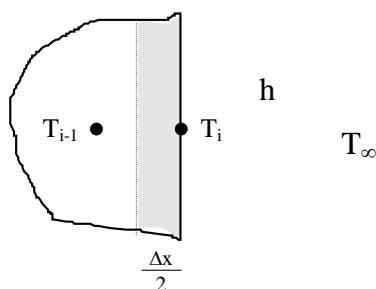


Figura 5.4 Elemento di contorno in una parete monodimensionale

Per completare l'impostazione del problema occorre imporre le condizioni al contorno e l'approccio che si segue anche nel caso di regime transitorio è analogo a quanto illustrato per il regime permanente. Si impone

il bilancio energetico per gli elementi di contorno. Si illustrerà il solo problema di condizioni al contorno di terza specie (scambio convettivo).

Facendo riferimento alla figura 5.4 si scriverà l'equazione di bilancio energetico in regime transitorio per l'elemento di contorno. Si considererà una superficie della parete pari a S:

$$kS \frac{(T_{i-1}^t - T_i^t)}{\Delta x} - hS(T_i^t - T_\infty) = \rho c S \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta t}$$

in questa relazione  $\rho$  è la massa volumica e  $c$  il calore specifico della parete.

Risolvendo rispetto alla temperatura della parete all'istante  $t+1$  si ricava:

$$T_i^{t+1} = 2\Delta Fou (T_{i-1}^t + Bi T_\infty^t) + (1 - 2\Delta Fou - 2\Delta Fou Bi) T_i^t$$

$$\Delta Fou = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad Bi = \frac{h \Delta x}{k}$$

In maniera del tutto analoga possono essere espresse altre condizioni al contorno.

### 5.3.2. Condizioni di stabilità

Il metodo esplicito appare quindi di semplice applicazione. La principale difficoltà relativa all'uso di tale metodo consiste nel fatto che l'intervallo temporale  $\Delta t$  non può essere scelto a piacere ma è limitato da condizioni di stabilità numerica della soluzione. E' stato infatti dimostrato che per evitare oscillazioni divergenti della temperatura nei nodi i coefficienti che moltiplicano le temperature nodali nelle equazioni algebriche devono essere sempre positivi. Da questo ne deriva che, essendo il numero di Fourier locale ed il numero di Biot locale comunque grandezze positive si deve avere:

per i nodi interni:

$$1 - 2\Delta Fou \geq 0$$

per condizioni al contorno convettive

$$1 - 2\Delta Fou - 2\Delta Fou Bi \geq 0$$

Da questi due vincoli si ottengono le due disequazioni seguenti:

$$\begin{cases} \Delta Fou \leq \frac{1}{2} \\ \Delta Fou \leq \frac{1}{2(1 + Bi)} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta t \leq \frac{1}{2a} \Delta x^2 \\ \Delta t \leq \frac{1}{2a(1 + Bi)} \Delta x^2 \end{cases}$$

di cui deve essere presa in considerazione la più restrittiva, ovvero la seconda proposta. La scelta quindi del passo di discretizzazione spaziale impone un limite al passo di discretizzazione temporale.

Il metodo esplicito è, come già detto, estremamente semplice da implementare ma impone un vincolo al valore di  $\Delta t$ .

### 5.3.3. Schema implicito

Consideriamo ancora un problema monodimensionale in regime transitorio in un mezzo omogeneo isotropo. L'equazione generale della conduzione, in assenza di generazione interna, è:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Utilizzando la relazione trovata per la forma forward della derivata rispetto al tempo e valutando la derivata seconda spaziale all'istante t+1 si ha:

$$\frac{T_{i+1}^{t+1} - 2T_i^{t+1} + T_{i-1}^{t+1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{a} \frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta t}$$

risolvendo rispetto alla temperatura incognita  $T_i^{t+1}$  si ottiene:

$$T_i^{t+1} = \frac{\Delta Fou (T_{i+1}^{t+1} + T_{i-1}^{t+1}) + T_i^t}{1 + 2\Delta Fou}$$

$$\Delta Fou = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

che rappresenta la formulazione implicita dell'equazione valida per i nodi interni di un problema monodimensionale in regime transitorio.

Il sistema di equazioni che si ricava è evidentemente non risolvibile in forma esplicita ma richiede una soluzione simultanea del sistema di equazioni. La temperatura nodale all'istante t+1 in un nodo dipende infatti dalle temperature nodali allo stesso istante t+1 dei nodi contigui. Questo richiede per la soluzione l'adozione di tecniche numeriche iterative ma ha l'indubbio vantaggio di non avere limitazioni nella scelta dell'intervallo temporale  $\Delta t$  di discretizzazione. Il metodo è incondizionatamente stabile.

Anche in questo caso si devono imporre le condizioni al contorno e l'approccio che si segue è analogo a quanto già illustrato. Imponendo il bilancio energetico per gli elementi di contorno (fig. 5.4) si ottiene l'equazione di bilancio energetico in regime transitorio con condizioni al contorno convettive. Si considererà una superficie della parete pari a S:

$$kS \frac{(T_{i-1}^{t+1} - T_i^{t+1})}{\Delta x} - hS(T_i^{t+1} - T_\infty^{t+1}) = \rho c S \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta t}$$

Risolvendo rispetto alla temperatura della parete all'istante t+1 si ricava:

$$T_i^{t+1} = \frac{2\Delta Fou T_{i-1}^{t+1} + 2\Delta Fou Bi T_\infty^{t+1} + T_i^t}{(1 - 2\Delta Fou - 2\Delta Fou Bi)}$$

$$\Delta Fou = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad Bi = \frac{h\Delta x}{k}$$

In maniera del tutto analogo possono essere espresse altre condizioni al contorno.

## 5.4. Conclusione

I metodi numerici offrono indubbi vantaggi, al giorno d'oggi, per le

grosse potenze di calcolo che si possono avere con semplici personal computer.

Il metodo delle differenze finite rappresenta un approccio semplice e facilmente implementabile. Lo svantaggio è il ricorso a discretizzazioni regolari (strutturate) e questo non consente lo studio di geometrie particolarmente complesse con gradienti termici localizzati. Una buona discretizzazione nelle zone in cui sono presenti elevati gradienti termici comporta una uguale discretizzazione geometrica in zone meno interessanti.

I metodi basati su elementi finiti non presentano queste limitazioni e sono oggi considerati più validi. Lo svantaggio di tali metodi risiede nella formulazione matematica non semplice da sviluppare. Esistono infatti codici di calcolo commerciali che consentono di trattare problematiche di scambio termico anche complesso e completo senza che sia richiesta all'utente una conoscenza approfondita degli aspetti matematici ma richiedono la conoscenza delle leggi fisiche che reggono lo scambio termico.

## 6. La convezione

Il fenomeno di trasporto di calore per convezione è connesso al trasporto di massa in un fluido in moto relativo rispetto ad una parete. Il fatto che il fluido sia in moto complica la formulazione analitica del problema della trasmissione di calore per convezione e, laddove si è giunti ad una risoluzione del problema, l'adeguatezza del risultato è sicuramente limitata dalle ipotesi semplificative adottate per risolvere il problema matematico.

Si è preferito, per questa ragione, lo studio sperimentale del fenomeno della convezione attraverso l'introduzione di una legge fenomenologica semplice che consente di determinare il legame tra flusso termico areico e differenza di temperatura. Tale legge è nota come legge di Newton per la convezione:

$$J = h(T_p - T_f)$$

In essa  $J$  rappresenta il flusso termico areico,  $T_p$  la temperatura superficiale della parete,  $T_f$  la temperatura del fluido opportunamente definita mentre  $h$  è detto coefficiente convettivo (o coefficiente limitare).

In base alla legge di Newton il coefficiente convettivo è espresso, in unità del Sistema Internazionale, in  $[W/m^2K]$ .

In questo coefficiente sono concentrate tutte le difficoltà di determinazione del flusso termico convettivo, perché il coefficiente convettivo non è una costante fisica caratteristica del fluido ma è funzione della geometria del sistema, del regime di moto e della natura del fluido.

Inoltre la quantità  $T_f$  che compare nell'equazione di Newton rappresenta la temperatura del fluido e ad essa non è facile attribuire un ben preciso valore, in quanto il fluido è generalmente sede di un gradiente termico e la sua temperatura varia da punto a punto. L'esperienza mostra che il gradiente termico è particolarmente accentuato nello strato di fluido direttamente a contatto con la parete (detto strato limite termico) e che il fenomeno si esaurisce quasi completamente in tale strato. I criteri di scelta o definizione di  $T_f$  risulteranno in generale quelli della semplicità di determinazione e di significatività e, per ogni configurazione geometrica, diverse saranno le definizioni della temperatura  $T_f$  da attribuirsi al fluido nell'espressione della legge di Newton.

Nel caso di un fluido che lambisce esternamente un corpo solido si utilizza come temperatura  $T_f$  la cosiddetta temperatura asintotica  $T_\infty$ , ovvero la temperatura del fluido misurata in un punto in cui è praticamente nulla l'influenza della parete del solido.

Nel caso invece di un fluido che scorre all'interno di un condotto si possono adottare diverse soluzioni anche se è maggiormente diffuso l'utilizzo della temperatura di miscelamento adiabatico, definita come:

$$T_a = \frac{\int_S \rho c_p T w dS}{\int_S \rho c_p w dS}$$

In questa espressione  $\rho$  è la massa volumica del fluido,  $c_p$  il calore specifico a pressione costante,  $T$  la temperatura e  $w$  la velocità del fluido. Tutte queste grandezze sono generalmente funzione della posizione nella sezione  $S$  del condotto. La temperatura così ottenuta è quella che si avrebbe per mescolamento adiabatico dei filetti fluidi che attraversano a diversa temperatura la sezione  $S$ .

Si è detto che il fenomeno della convezione è legato al movimento macroscopico di massa nel fluido. In relazione alla causa che origina il movimento del fluido la convezione viene classificata in convezione forzata o convezione naturale (o libera).

Nella convezione forzata il moto del fluido è impresso da dispositivi quali una pompa, un compressore od un ventilatore che ne determinano la velocità.

Nella convezione naturale il moto del fluido è provocato da spinte di galleggiamento dovute al diverso valore locale della massa volumica del fluido, a sua volta conseguente ad un disuniforme campo di temperatura: il fluido più caldo tende a salire verso l'alto mentre le masse di fluido più fredde tendono a scendere verso il basso.

La convezione è anche classificata in convezione esterna o convezione interna a secondo che il fluido scorra all'esterno di un corpo o all'interno di un condotto.

## 6.1. Generalità sui meccanismi di trasporto

Come già affermato il fenomeno della convezione è connesso al movimento di un fluido in moto relativo rispetto ad una parete. Il fatto che il fluido sia in moto comporta che lo scambio termico sia strettamente connesso ai meccanismi di trasporto sia della massa sia della quantità di moto.

Si parlerà in generale di fenomeni di trasporto e la trattazione di questi fenomeni può essere unitaria in quanto sono accomunati da forti analogie.



Per semplicità si considererà solo un sistema monocomponente, monofase, in moto e si analizzerà un volume di controllo infinitesimo e fisso rispetto ad un sistema inerziale.

Attraverso il contorno di questo elemento si avranno flussi di massa, di energia (e quindi anche di calore) e di quantità di moto.

L'equazione di bilancio afferma che la quantità netta entrante attraverso la superficie di controllo di una grandezza  $G$  (massa, quantità di moto o energia) eguaglia la variazione della grandezza  $G$  nel volume di controllo.

Si deve subito precisare che la portata entrante di una generica grandezza (massa, quantità di moto o energia) è in genere divisa in due contributi: contributo convettivo (o macroscopico) e contributo diffusivo (o microscopico). I contributi convettivi sono associati al trasporto macroscopico della massa e in questo paragrafo non saranno trattati.

Le tre equazioni di trasporto per diffusione hanno struttura analoga e derivano da formulazioni note.

#### 6.1.1. Trasporto di massa

Le legge di Fick per il trasporto molecolare della massa dice che:

$$\mathbf{J}_{mj} = -D \frac{\partial C}{\partial y} \mathbf{j}$$

dove  $\mathbf{J}_{mj}$  rappresenta il flusso della specie chimica in direzione  $y$  (di versore  $\mathbf{j}$ ),  $C$  la concentrazione della specie chimica e  $D$  il coefficiente di diffusione della specie chimica. La concentrazione  $C$  è definita come il numero di moli per unità di volume.

#### 6.1.2. Trasporto di calore

Le legge di Fourier per il trasporto molecolare del calore dice che:

$$\mathbf{J}_{qj} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j}$$

dove  $\mathbf{J}_{qj}$  rappresenta il flusso di calore in direzione  $y$  (di versore  $\mathbf{j}$ ),  $T$  la temperatura del mezzo e  $k$  la conduttività termica del mezzo.

Questa relazione può anche essere scritta come:

$$\mathbf{J}_{qj} = -\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y} \mathbf{j}$$

ovvero

$$\mathbf{J}_{qj} = -D_q \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y} \mathbf{j}$$

ove  $D_q$  rappresenta la diffusività termica (già indicata con il simbolo  $a$  nel § 2.2).

### 6.1.3. Trasporto molecolare della quantità di moto

Le legge di Newton per i fluidi afferma che:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \mathbf{j}$$

dove  $\tau_{yx}$  rappresenta lo sforzo di taglio in direzione y (di versore  $\mathbf{j}$ ),  $w_x$  la componente di velocità del fluido in direzione x e  $\mu$  la viscosità dinamica del fluido.

La viscosità dinamica del fluido è una proprietà del fluido ed è generalmente funzione delle coordinate termodinamiche T e P. I fluidi per i quali la viscosità non dipende dal gradiente di velocità sono detti fluidi newtoniani. L'unità di misura della viscosità nel Sistema Internazionale di unità di misura è [kg/ms] o anche [Ns/m<sup>2</sup>]. E' in uso una unità derivata dal sistema cgs che è il Poise [P] di cui si utilizza comunemente il sottomultiplo centiPoise [cP]. Il fattore di conversione tra le grandezze del SI ed il cP è:

$$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

Osservando che lo sforzo tangenziale può essere interpretato come flusso di quantità di moto, questa relazione può anche essere scritta come:

$$\mathbf{J}_{wj} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial y} \mathbf{j}$$

ovvero

$$\mathbf{J}_{wj} = -D_w \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial y} \mathbf{j}$$

ove  $D_w$  rappresenta la diffusività della quantità di moto anche nota come viscosità cinematica ( $\nu$ ).

Le relazioni illustrate sono valide nel caso sia in atto il fenomeno di trasporto per sola collisione molecolare. Tuttavia nei fluidi possono presentarsi situazioni in cui hanno instabilità nel moto (turbolenza) che rimescolano le particelle fluide. Anche in tal caso si possono scrivere equazioni di bilancio analoghe a quelle illustrate che porteranno alla introduzione dei coefficienti di diffusione turbolenta della massa, della quantità di moto e del calore.

Le tre equazioni di trasporto diffusivo rivelano evidenti analogie formali: da esse risulta che il flusso di una certa grandezza è proporzionale, attraverso il coefficiente di diffusione, al gradiente di "concentrazione" volumetrica di quella stessa grandezza. In esse i diversi coefficienti:

$$D \quad D_q = \frac{k}{\rho c_p} \quad D_w = \frac{\mu}{\rho}$$

hanno la dimensione di velocità areolari e sono quindi espressi in unità del SI in [m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>].

La presenza contemporanea dei tre meccanismi di trasporto così come la

loro influenza nel fenomeno della convezione rendono il calcolo del coefficiente convettivo un problema arduo se affrontato analiticamente.

Inoltre la convezione è un meccanismo di scambio termico complesso in cui gioca un ruolo molto importante l'aspetto fluidodinamico. Pertanto, prima di affrontare il problema del trasferimento di energia tra solido e fluido è opportuno premettere alcune informazioni relative al moto dei fluidi e per far questo si proporrà l'analisi di una situazione specifica semplice quale quella di una lastra piana investita da un fluido che si muove parallelamente ad essa.

## 6.2. La fluidodinamica su lastra piana

Si consideri il moto di un fluido su una lastra piana non in movimento (fig. 6.1) ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui la coordinata  $x$  è misurata sulla superficie della lastra a partire dal cosiddetto bordo di attacco della lastra, nella direzione di moto del fluido, mentre  $y$  è misurata a partire dalla superficie nella direzione normale ad essa. Si supponga che il fluido investa la lastra con una velocità uniforme  $w_\infty$  nella direzione  $x$ . A contatto con una superficie il fluido assume la velocità della superficie (ipotesi o condizione di aderenza) e pertanto il fluido, a diretto contatto con la lastra, è fermo.

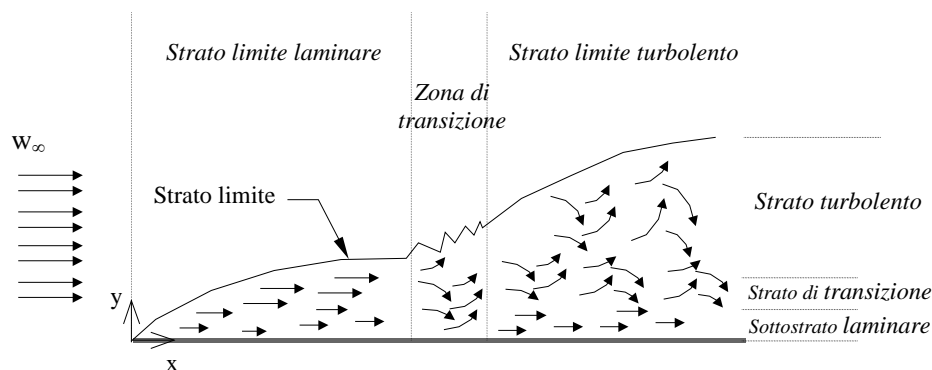


Figura 6.1 Sviluppo dello strato limite e regimi di flusso per moto su lastra piana

### 6.2.1. Strato limite fluidodinamico

Negli strati adiacenti allo strato aderente alla lastra le particelle del fluido per effetto della viscosità tenderanno progressivamente a raggiungere la velocità indisturbata  $w_\infty$ . In questi strati sono influenti le sollecitazioni di taglio viscoso e la regione in cui la velocità è inferiore alla velocità

indisturbata è detta zona di strato limite. Lo spessore  $\delta_v$  di tale strato è arbitrariamente definito come la distanza dalla superficie alla quale la componente in direzione x della velocità del fluido è pari a:

$$w = 0.99w_\infty$$

La linea ideale per la quale  $w = 0.99w_\infty$  separa il campo fluidodinamico in due regioni: la regione in prossimità della parete detta regione di strato limite in cui sono rilevanti gli effetti viscosi e la regione di moto non viscoso in cui tali effetti sono trascurabili.

Nello strato limite la componente di velocità del fluido in direzione x varierà tra 0 per  $y = 0$  e  $0.99w_\infty$  per  $y = \delta_v$ .

All'interno dello strato limite due strati adiacenti di fluido si muoveranno con velocità diverse: lo strato più lontano dalla lastra avrà velocità maggiore e tenderà a trascinare lo strato più vicino alla parete che si muove con una velocità inferiore. La forza di trascinamento per unità di area tra i due filetti è, come già detto, lo sforzo di taglio  $\tau$  e, per molti fluidi questa sollecitazione è proporzionale al gradiente di velocità.

Il fluido in movimento rispetto alla lastra esercita quindi una azione di trascinamento sulla lastra stessa che può essere valutato quando è noto lo sforzo di taglio sulla superficie della lastra, definito come:

$$\tau_p = -\mu \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0}$$

La misura dello sforzo di taglio alla parete  $\tau_p$  è piuttosto complessa in quanto richiederebbe la conoscenza del profilo di velocità in ogni punto della lastra. Nel caso di flussi esterni si preferisce correlare lo sforzo di taglio alla parete con la velocità della corrente fluida indisturbata  $w_\infty$ :

$$\tau_p = C_f \frac{\rho w_\infty^2}{2}$$

dove  $C_f$  è il coefficiente di attrito ed è normalmente valutato sperimentalmente.

Il coefficiente di attrito è un parametro molto importante nello studio del fenomeno della convezione in quanto è correlabile, come sarà illustrato, sia al coefficiente convettivo, sia alla perdita di carico fluidodinamica e quindi, nel caso di convezione forzata, alla potenza assorbita dal dispositivo meccanico che mette in moto il fluido.

Osservando la rappresentazione dello strato limite nella figura 6.1 si nota la presenza di tre diverse regioni per lo strato limite denominate laminare, di transizione e turbolento.

Un moto è denominato laminare se ordinato (o stabile) ovvero se i singoli filetti fluidi si muovono tutti parallelamente tra loro.

Un moto è denominato turbolento se caratterizzato da variazioni di

velocità e moto disordinato (o instabile) con componenti di velocità trasversali.

In generale la transizione tra moto laminare e turbolento non avviene bruscamente ma esiste una regione nella quale il moto fluttua tra laminare e turbolento prima di diventare completamente instabile e perciò turbolento.

La dimostrazione sperimentale dell'esistenza di diversi regimi di moto è dovuta ad Osborne Reynolds che nel 1880 eseguì una serie di esperienze al fine di comprendere come si potesse descrivere il movimento di un fluido. La classica esperienza di Reynolds sulla transizione laminare turbolento è consistita nell'iniettare inchiostro in una corrente fluida. Se il filetto di inchiostro segue un percorso regolare il moto è laminare; quando il filetto di inchiostro comincia a fluttuare si ha la zona di transizione mentre quando tende a rimescolarsi completamente nel campo di moto in modo disordinato si ha un regime turbolento (Fig. 6.2).

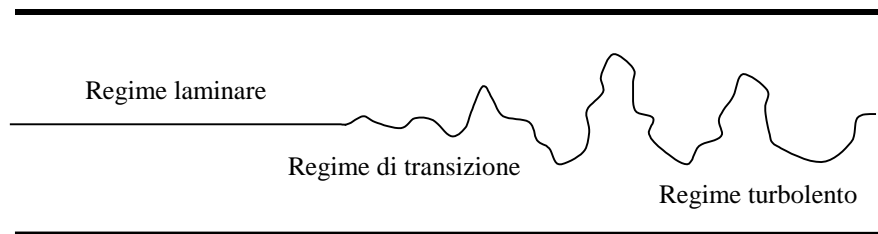


Figura 6.2 Esperienza di Reynolds

Si dimostra che il profilo di velocità è approssimativamente parabolico nel moto laminare e diventa praticamente piatto nel moto turbolento con una brusca variazione in prossimità della parete.

Lo strato limite turbolento può essere scomposto in tre regioni: il sottostrato laminare di spessore molto piccolo in prossimità della parete nel quale sono predominanti gli effetti viscosi ed il comportamento è laminare; uno strato di transizione in cui gli effetti legati alla turbolenza (effetti convettivi) sono equivalenti ai fenomeni viscosi (effetti diffusivi); lo strato turbolento nel quale sono predominanti gli effetti della turbolenza.

Nel moto turbolento l'intenso mescolamento del fluido dovuto alle fluttuazioni del campo di moto favorisce lo scambio termico ed aumenta la forza di attrito superficiale. Questo si traduce, come sarà evidenziato successivamente, nel raggiungimento di un massimo sia del coefficiente convettivo locale sia del coefficiente d'attrito quando il moto diventa completamente turbolento. Mentre l'aumento del coefficiente convettivo nel moto turbolento è un aspetto positivo, l'aumento del coefficiente d'attrito si traduce in un aumento delle perdite di carico fluidodinamiche e quindi nell'aumento della potenza meccanica dei dispositivi impiegati per mettere in moto il fluido (compressore, pompa, etc.).

### 6.2.2. Il numero di Reynolds

Il regime di moto (laminare, di transizione o turbolento) dipende principalmente dal rapporto tra le forze d'inerzia nel fluido e le forze viscose; questo rapporto è un gruppo adimensionale noto come numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\text{Forze d'inerzia}}{\text{Forze viscose}}$$

Per determinare la sua espressione, che ne rende possibile l'utilizzo pratico, conviene analizzare un volume di controllo infinitesimo nel sistema costituito da un fluido in moto.

L'elementino di volume di fluido di dimensioni  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , si muova di moto stazionario in direzione  $x$ , cioè con  $w = w_x(x,y)$  che non dipende dal tempo (fig. 6.3).

Le forze di inerzia per un generico elementino di massa  $dM$  sono:

$$\text{Forze di inerzia} = dM \cdot a$$

$$\text{Forze di inerzia} = (\rho dx dy dz) \frac{Dw}{Dt}$$

La accelerazione del fluido è:

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Per essere, come ipotizzato, il regime stazionario e  $w = w_x(x,y)$  si ha:

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial x} w$$

da cui si ricava che le forze di inerzia sono:

$$\text{Forze d'inerzia} = \rho \frac{\partial w}{\partial x} w (dx dy dz)$$

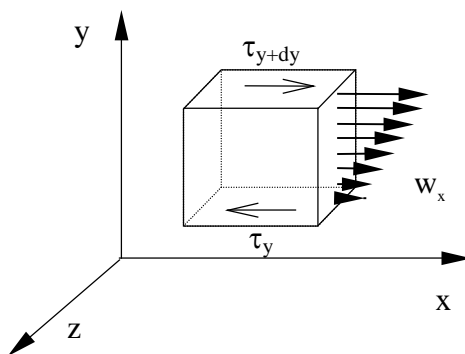


Figura 6.3 Volume di controllo

Le risultante delle forze viscose nella direzione di moto  $x$  è:

$$\text{Forze viscosi} = (\tau_{y+dy} - \tau_y) dx dz$$

$$\text{Forze viscosi} = \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy \right) dx dz$$

La legge di Newton per i fluidi viscosi sancisce, come già riportato, una proporzionalità tra lo sforzo tangenziale ed il gradiente di velocità tramite la viscosità dinamica. Per questo la risultante delle forze viscosi può essere scritta come:

$$\text{Forze viscosi} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dx dy dz$$

$$\text{Forze viscosi} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy dz$$

Facendo il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi si ottiene:

$$\frac{\text{Forze d'inerzia}}{\text{Forze viscosi}} = \frac{\rho w \frac{\partial w}{\partial x} dx dy dz}{\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy dz}$$

Il numero di Reynolds risulta in definitiva pari al termine:

$$Re = \frac{\rho w \frac{\partial w}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$

Se ora si sfruttano le seguenti proporzionalità:

$$w \div w_m \quad \frac{\partial w}{\partial x} \div \frac{w_m}{\lambda} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \div \frac{w_m}{\lambda^2}$$

ove  $w_m$  e  $\lambda$  hanno significato rispettivamente di velocità caratteristica del sistema e di grandezza geometrica caratteristica del sistema, si ottiene:

$$Re = \frac{\rho w_m \lambda}{\mu}$$

La scelta della velocità caratteristica e della lunghezza caratteristica dipendono dalla situazione analizzata. Nel caso di lastra piana la velocità caratteristica è la velocità indisturbata e la lunghezza caratteristica è la distanza  $x$  dal bordo di attacco mentre nel caso di un fluido che scorre in un condotto cilindrico di sezione circolare la velocità caratteristica è la velocità media di sezione e la lunghezza caratteristica è il diametro  $D$  del condotto.

Per elevati valori del numero di Reynolds sono prevalenti le forze inerziali che tendono a destabilizzare il moto favorendo quindi l'instaurarsi di un regime turbolento. Per bassi valori di Reynolds sono prevalenti le forze

viscose che tendono a stabilizzare il moto favorendo la presenza di un regime stazionario.

Il numero di Reynolds in corrispondenza del quale il moto diventa turbolento è detto numero di Reynolds critico. Nel caso di lastra piana liscia si ha:

$$Re_c = 3.5 \cdot 10^5$$

Il valore del  $Re_c$  dipende dalla geometria, dalla rugosità superficiale della superficie e da molti altri parametri.

### 6.2.3. Strato limite termico

Quando un fluido lambisce una superficie solida a temperatura differente, si ha la formazione di uno strato limite termico a causa di un fenomeno analogo a quello fluidodinamico.

Si consideri il moto di un fluido a temperatura  $T_\infty$  su una lastra piana a temperatura costante  $T_p$ . A causa della differenza di temperatura tra la lastra ed il fluido si avrà un flusso termico attraverso il fluido in moto, e la contemporanea formazione di un gradiente di temperatura. La zona del fluido in cui è presente la variazione di temperatura è detta strato limite termico. Lo spessore  $\delta_t$  di tale strato viene convenzionalmente definito come la distanza dalla superficie alla quale la temperatura del fluido è pari a:

$$T = 0.99T_\infty$$

Lo spessore dello strato limite termico aumenta all'aumentare della distanza dal bordo di attacco della lastra come illustrato in figura 6.3.

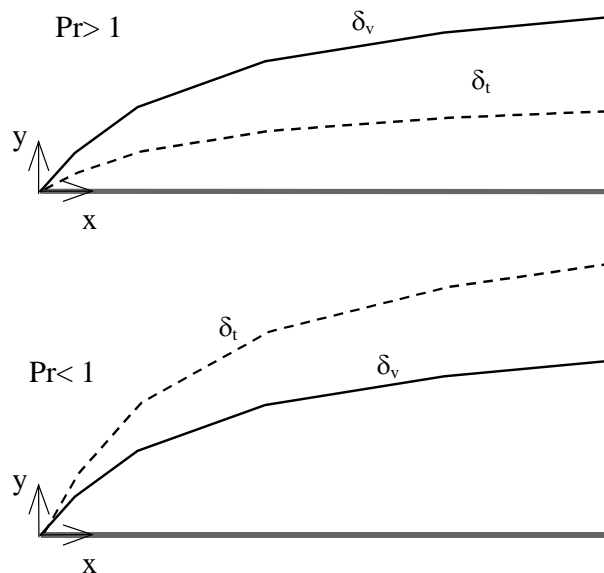


Figura 6.3 Strato limite fluidodinamico e strato limite termico



Il profilo di temperatura nello strato limite termico dipende inoltre dal campo fluidodinamico presente. Normalmente nel moto su una superficie riscaldata o raffreddata si hanno i contemporanei sviluppi dello strato limite fluidodinamico e termico. In particolare lo sviluppo dello strato limite fluidodinamico influenza notevolmente lo sviluppo dello strato limite termico.

#### 6.2.4. Il numero di Prandtl

Il rapporto tra gli spessori dello strato limite di velocità e di temperatura sono legati al parametro adimensionale noto come numero di Prandtl. Esso, dalle relazioni precedenti, vale:

$$\text{Pr} = \frac{\text{diffusività molecolare della quantità di moto}}{\text{diffusività molecolare del calore}}$$

$$\text{Pr} = \frac{v}{a} = \frac{\mu c}{k}$$

I valori del numero di Prandtl variano tra 0.01 per metalli liquidi a 100000 per gli oli pesanti. Si noti che per l'acqua, a temperatura ambiente, il numero di Prandtl è circa 10 mentre per i gas compreso nell'intervallo 0.7-1.0.

Poiché per i metalli liquidi la diffusività molecolare della quantità di moto (nota come viscosità cinematica) è molto minore della diffusività termica il numero di Prandtl è molto piccolo e lo spessore dello strato limite fluidodinamico risulta minore dello strato limite termico.

La potenza termica scambiata per convezione in un punto qualsiasi della lastra è proporzionale al gradiente locale di temperatura. Infatti data la esistenza di una condizione di aderenza per il fluido che scorre sulla superficie la trasmissione del calore tra la lastra ed il fluido adiacente avviene per pura conduzione. Il flusso termico è quindi espresso dalla relazione:

$$J = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Il flusso termico convettivo non è quindi altro che il flusso conduttivo all'interfaccia solido-fluido. Eguagliando l'espressione data dalla legge di Newton della convezione con il flusso conduttivo all'interfaccia solido-fluido si ottiene una misura del coefficiente convettivo h:

$$h = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_p - T_\infty)}$$

In generale si può dire che il coefficiente di convezione dipende dal punto in cui si valuta il flusso termico areico per cui si definisce un coefficiente

convettivo locale ed eventualmente un coefficiente convettivo medio relativo all'intera superficie.

### 6.3. La determinazione del coefficiente convettivo: il numero di Nusselt

In verità il valore del coefficiente convettivo  $h$  si valuta per altra via. E' infatti più utile per la valutazione di  $h$  il rapporto tra la potenza termica scambiata per conduzione in uno strato di fluido in quiete di spessore  $L$  e la potenza termica scambiata per convezione con il fluido in movimento quando la differenza di temperatura è  $(T_p - T_\infty)$ :

$$\frac{J_{\text{conv}}}{J_{\text{cond}}} = \frac{h(T_p - T_\infty)}{\frac{k}{L}(T_p - T_\infty)} = \frac{hL}{k}$$

Questo rapporto è un gruppo adimensionale noto come numero di Nusselt:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

Il numero di Nusselt rappresenta quindi l'incremento della potenza termica trasmessa per convezione attraverso uno strato di fluido rispetto a quella per conduzione attraverso lo stesso strato ed è pertanto sempre maggiore di 1 non potendo il fenomeno della convezione prescindere dalla conduzione.

Il fenomeno della convezione è particolarmente complesso da analizzare in quanto è richiesta la soluzione dei campi fluidodinamici e termici. La determinazione del coefficiente convettivo presuppone perciò la conoscenza della distribuzione di temperatura nello strato limite ed un approccio analitico al problema comporta notevoli difficoltà. Per questa ragione si preferisce ricorrere all'analisi dimensionale che consente di individuare un numero ridotto di parametri attraverso cui descrivere un fenomeno fisico.

Il numero elevato di variabili fisiche coinvolte nel fenomeno e la necessità di trovare tra esse una correlazione sperimentale, impongono di ricorrere all'analisi dimensionale, al fine di raggruppare le variabili in rapporti adimensionali con il conseguente risultato di dare validità generale alle correlazioni sperimentali e di diminuire drasticamente il peso della sperimentazione necessaria.

La scelta delle variabili adimensionali andrebbe effettuata adimensionalizzando le equazioni che descrivono il fenomeno fisico indagato. Tali grandezze adimensionali possono anche essere determinate con un approccio più semplice quale l'impiego del teorema di Buckingham.

## 6.4. Il teorema di Buckingham

Il principio su cui è basata l'analisi dimensionale è che l'equazione, non nota, che lega tra loro le grandezze fisiche che influenzano un dato fenomeno fisico deve essere dimensionalmente omogenea.

L'analisi dimensionale si basa sul principio di omogeneità dimensionale per una relazione tra grandezze fisiche.

Si supponga che una grandezza fisica  $G_1$  dipenda esclusivamente da un insieme di altre  $r-1$  grandezze fisiche  $G_2, G_3, \dots, G_r$ . Dal punto di vista analitico questo consentirà di scrivere:

$$G_1 = f(G_2, G_3, \dots, G_r)$$

In forma implicita questa relazione si pone come:

$$g(G_1, G_2, G_3, \dots, G_r) = 0$$

Si definisce insieme delle  $n$  grandezze fondamentali l'insieme più piccolo di grandezze fisiche necessario per esprimere, attraverso leggi o definizioni, le  $r$  grandezze originarie. Dovrà necessariamente essere:

$$n < r$$

Al fine di esprimere le grandezze fisiche in gioco nella trasmissione del calore si possono utilizzare quattro grandezze, lunghezza, massa, tempo e temperatura come grandezze fondamentali. Per l'analisi fluidodinamica sono invece sufficienti tre grandezze fondamentali: lunghezza, massa e tempo.

Il teorema di Buckingham (o teorema del pi greco) afferma che la relazione funzionale  $g = 0$  è esprimibile con una relazione tra parametri adimensionali. Il numero di tali parametri è:

$$\Pi = r - n$$

e la relazione funzionale può essere scritta come:

$$g'(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_\Pi) = 0$$

ove  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\Pi$  sono  $\Pi$  gruppi adimensionali definiti come:

$$\pi_1 = \frac{G_1}{G_{\Pi+1}^{\alpha_1} G_{\Pi+2}^{\alpha_2} \dots G_r^{\alpha_{r-\Pi}}}$$

$$\pi_2 = \frac{G_2}{G_{\Pi+1}^{\beta_1} G_{\Pi+2}^{\beta_2} \dots G_r^{\beta_{r-\Pi}}}$$

....

$$\pi_\Pi = \frac{G_\Pi}{G_{\Pi+1}^{\delta_1} G_{\Pi+2}^{\delta_2} \dots G_r^{\delta_{r-\Pi}}}$$

Le grandezze  $G_{\Pi+1}, G_{\Pi+2}, \dots, G_r$  devono essere tali da contenere, nel complesso, tutte le grandezze fondamentali. Gli esponenti  $\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i$  devono essere tali per cui le grandezze  $\pi$  siano adimensionali.

Ciascun gruppo adimensionale viene ottenuto risolvendo il sistema di

equazioni algebriche che deriva dall'imporre una adimensionalizzazione dei gruppi  $\pi$ .

L'espressione della funzione  $g'$  che lega le grandezze adimensionali viene definita con l'analisi di dati sperimentali. Il più semplice legame tra le grandezze adimensionali è la relazione:

$$\pi_1 = A\pi_2^a\pi_3^b\pi_{11}^f$$

Le costanti  $A, a, b, \dots, f$  sono determinabili con dati sperimentali.

La bontà del metodo è dipendente dalla corretta individuazione delle grandezze che influenzano un dato fenomeno fisico. L'impiego di tale metodo con una erronea individuazione delle grandezze fisiche che influenzano il fenomeno potrebbe far perdere generalità alle correlazioni ottenute. L'importanza dell'analisi dimensionale risiede nella semplicità di impiego e nel fatto che consente di ridurre l'attività sperimentale che può essere necessaria per individuare il legame tra le grandezze originarie.

La scelta delle  $\Pi$  grandezze dipendenti è molto importante in quanto queste ultime compaiono nelle relazioni monomie una sola volta e sono quindi facilmente esplicitabili analiticamente.

Si procederà inizialmente ad utilizzare l'analisi dimensionale per determinare il coefficiente di attrito e di conseguenza la forza di trascinamento. Successivamente l'analisi dimensionale viene applicata per determinare il coefficiente convettivo in convezione forzata e quindi la potenza termica dissipata dalla lastra.

## 6.5. Esercizi

*Determinare il numero di Prandtl di acqua alla pressione  $P = 1 \text{ atm}$  e temperatura  $T = 10^\circ \text{C}$ . Sono note le proprietà termofisiche dell'acqua: massa volumica  $\rho = 999.7 \text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c_p = 4.192 \text{ kJ/kgK}$ , viscosità  $\mu = 1.304 \text{ cP}$ , conduttività termica  $k = 0.58 \text{ W/mK}$ .*

**(Pr = 9.42)**

*Determinare il numero di Prandtl di acqua alla pressione  $P = 1 \text{ atm}$  e temperatura  $T = 60^\circ \text{C}$ . Sono note le proprietà termofisiche dell'acqua: massa volumica  $\rho = 983.2 \text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c_p = 4.184 \text{ kJ/kgK}$ , viscosità  $\mu = 0.467 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ , conduttività termica  $k = 0.65 \text{ W/mK}$ .*

**(Pr = 3.01)**

*Determinare il numero di Prandtl di sodio allo stato di liquido saturo a temperatura  $T = 600 \text{ K}$ . Sono note le proprietà termofisiche del sodio: massa volumica  $\rho = 873 \text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c_p = 1.299 \text{ kJ/kgK}$ , viscosità  $\mu = 3.28 \cdot 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$ , conduttività termica  $k = 75.4 \text{ W/mK}$ .*

**(Pr = 0.0057)**

*Determinare il numero di Prandtl di aria alla pressione  $P = 1 \text{ atm}$  e*

temperatura  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Sono note le proprietà termofisiche dell'aria: massa volumica  $\rho = 1.205\text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c_p = 1.006\text{ kJ/kgK}$ , viscosità  $\mu = 1.81 \cdot 10^{-5}\text{ Ns/m}^2$ , conduttività termica  $k = 0.025\text{ W/mK}$ .

**(Pr = 0.73)**

Determinare il numero di Reynolds per una portata  $m = 2\text{ kg/s}$  di acqua che fluisce in un condotto di sezione circolare con diametro  $D = 3\text{ cm}$ . Sono note le proprietà termofisiche dell'acqua: massa volumica  $\rho = 983.2\text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c_p = 4.184\text{ kJ/kgK}$ , viscosità  $\mu = 0.467 \cdot 10^{-3}\text{ Ns/m}^2$ , conduttività termica  $k = 0.65\text{ W/mK}$ .

**(Re = 181761)**



## 7. Convezione forzata

Come si è detto la convezione può essere forzata, se la velocità è imposta da un dispositivo, oppure naturale. Si applicherà dapprima l'analisi dimensionale alla convezione forzata considerando il solo caso della lastra piana lambita da un fluido. Oltre a determinare la potenza termica scambiata si determinerà anche la forza di trascinamento indice della interazione tra il campo fluidodinamico e la lastra.

### 7.1. Coefficienti di attrito e convettivo su lastra piana in convezione forzata

La forza di trascinamento e la potenza termica scambiata tra un fluido ed una lastra piana possono essere determinate teoricamente con una soluzione approssimata o numerica delle equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia oppure con l'impiego della sperimentazione abbinata a correlazioni empiriche. Queste correlazioni si individuano con l'analisi dimensionale.

La determinazione della forza di trascinamento richiede la conoscenza della sollecitazione di taglio lungo la lastra. Lo sforzo di taglio locale  $\tau_{px}$  dipende a sua volta dalle proprietà del fluido quali la viscosità  $\mu$  e la massa volumica  $\rho$ , dalla distanza  $x$  dal bordo di attacco e dalla velocità  $w_\infty$  della corrente fluida. La relazione, in forma implicita è:

$$f(\tau_{px}, \rho, \mu, w_\infty, x) = 0$$

Le grandezze fondamentali necessarie ad esprimere le grandezze fisiche in gioco sono tre (lunghezza  $L$ , massa  $M$  e tempo  $t$ ) ed in base al teorema di Buckingham si ricavano due gruppi adimensionali  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Le dimensioni delle singole grandezze sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\tau_{px} &= [ML^{-1}t^{-2}] & w_\infty &= [Lt^{-1}] \\ \rho &= [ML^{-3}] & x &= [L] \\ \mu &= [ML^{-1}t^{-1}]\end{aligned}$$

Scegliendo ad esempio come grandezze dipendenti le grandezze  $\tau_{px}$  e  $\mu$ ,

che quindi compariranno nei gruppi adimensionali una sola volta, si determinano i due gruppi adimensionali che consentono di descrivere il fenomeno di interazione fluidodinamica tra lastra e fluido. Si deve imporre che i rapporti  $\pi_1$  e  $\pi_2$  siano adimensionali:

$$\pi_1 = \frac{\tau_{px}}{\rho^{\alpha_1} w_{\infty}^{\alpha_2} x^{\alpha_3}}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho^{\beta_1} w_{\infty}^{\beta_2} x^{\beta_3}}$$

Sostituendo alle grandezze originarie la loro espressione dimensionale si ottiene;

$$\pi_1 = \frac{[ML^{-1}t^{-2}]}{[ML^{-3}]^{\alpha_1} [Lt^{-1}]^{\alpha_2} [L]^{\alpha_3}} = [M]^{1-\alpha_1} [L]^{-1+3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} [t]^{-2+\alpha_2}$$

$$\pi_2 = \frac{[ML^{-1}t^{-1}]}{[ML^{-3}]^{\beta_1} [Lt^{-1}]^{\beta_2} [L]^{\beta_3}} = [M]^{1-\beta_1} [L]^{-1+3\beta_1-\beta_2-\beta_3} [t]^{-1+\beta_2}$$

Perché i due gruppi siano adimensionali gli esponenti relativi alle singole grandezze fondamentali devono essere nulli:

$$1 - \alpha_1 = 0$$

$$-1 + 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$-2 + \alpha_2 = 0$$

$$1 - \beta_1 = 0$$

$$-1 + 3\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0$$

$$-1 + \beta_2 = 0$$

Risolvendo il sistema di sei equazioni in sei incognite si ottengono i valori dei coefficienti incogniti:

$$\alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 2 \quad \beta_2 = 1$$

$$\alpha_3 = 0 \quad \beta_3 = 1$$

I gruppi adimensionali sono quindi:

$$\pi_1 = \frac{\tau_{px}}{\rho w_{\infty}^2} = \frac{C_{fx}}{2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho w_{\infty} x} = \frac{1}{Re_x}$$

Si osservi che con la scelta di  $\tau_{px}$  e  $\mu$  come grandezze dipendenti si sono ottenuti il coefficiente di attrito locale ed il numero di Reynolds. La relazione tra gruppi adimensionali cercata sarà quindi:



$$C_{fx} = C_{fx}(Re_x)$$

Lo stesso procedimento di adimensionalizzazione viene utilizzato per la determinazione del coefficiente convettivo al fine di valutare la potenza termica scambiata. Il coefficiente convettivo locale  $h_x$  dipende dalle proprietà termofisiche del fluido, viscosità  $\mu$ , massa volumica  $\rho$ , conduttività termica  $k_f$  e calore specifico  $c$ , dalla distanza  $x$  dal bordo di attacco e dalla velocità  $w_\infty$  della corrente fluida. La relazione, in forma implicita è:

$$f(h_x, \rho, \mu, k_f, c, w_\infty, x) = 0$$

Le grandezze fondamentali sono quattro (lunghezza  $L$ , massa  $M$ , tempo  $t$  e temperatura  $T$ ) per cui con il teorema di Buckingham si ricavano tre gruppi dimensionali. Le dimensioni delle grandezze in gioco sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} h_x &= [Mt^{-3}T^{-1}] \\ \rho &= [ML^{-3}] \\ \mu &= [ML^{-1}t^{-1}] \\ k_f &= [MLt^{-3}T^{-1}] \\ c &= [L^2t^{-2}T^{-1}] \\ w_\infty &= [Lt^{-1}] \\ x &= [L] \end{aligned}$$

individuando come derivate le grandezze  $h_x$ ,  $w_\infty$  e  $c$  si determinano i tre gruppi adimensionali che consentono di descrivere il fenomeno di scambio termico tra lastra e fluido. Si deve imporre che i rapporti  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  siano adimensionali:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{h_x}{\rho^{\alpha_1} k_f^{\alpha_2} \mu^{\alpha_3} x^{\alpha_4}} \\ \pi_2 &= \frac{w_\infty}{\rho^{\beta_1} k_f^{\beta_2} \mu^{\beta_3} x^{\beta_4}} \\ \pi_3 &= \frac{c}{\rho^{\delta_1} k_f^{\delta_2} \mu^{\delta_3} x^{\delta_4}} \end{aligned}$$

Sostituendo alle grandezze originarie la loro espressione dimensionale si ottiene;

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{[Mt^{-3}T^{-1}]}{[ML^{-3}]^{\alpha_1} [MLt^{-3}T^{-1}]^{\alpha_2} [ML^{-1}t^{-1}]^{\alpha_3} [L]^{\alpha_4}} = \\ &= [M]^{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} [L]^{3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4} [t]^{-3+3\alpha_2+\alpha_3} [T]^{-1+\alpha_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \frac{[ML^{-1}t^{-1}]}{[ML^{-3}]^{\beta_1} [MLt^{-3}T^{-1}]^{\beta_2} [ML^{-1}t^{-1}]^{\beta_3} [L]^{\beta_4}} = \\
&= [M]^{1-\beta_1-\beta_2-\beta_3} [L]^{-1+3\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4} [t]^{-1+3\beta_2+\beta_3} [T]^{+\beta_2} \\
\pi_3 &= \frac{[L^2t^{-2}T^{-1}]}{[ML^{-3}]^{\delta_1} [MLt^{-3}T^{-1}]^{\delta_2} [ML^{-1}t^{-1}]^{\delta_3} [L]^{\delta_4}} = \\
&= [M]^{2-\delta_1-\delta_2-\delta_3} [L]^{3\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4} [t]^{-2+3\delta_2+\delta_3} [T]^{-1+\delta_2}
\end{aligned}$$

Perché i tre gruppi siano adimensionali gli esponenti relativi alle singole grandezze fondamentali devono essere nulli:

$$\begin{aligned}
1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\
3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\
-3 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\
-1 + \alpha_2 &= 0 \\
1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 &= 0 \\
-1 + 3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 &= 0 \\
-1 + 3\beta_2 + \beta_3 &= 0 \\
\beta_2 &= 0 \\
2 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 &= 0 \\
3\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 &= 0 \\
-2 + 3\delta_2 + \delta_3 &= 0 \\
-1 + \delta_2 &= 0
\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di sei equazioni in sei incognite si ottengono i valori dei coefficienti incogniti:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 = 0 & \beta_1 = 1 & \delta_1 = 0 \\
\alpha_2 = 1 & \beta_2 = 0 & \delta_2 = 1 \\
\alpha_3 = 0 & \beta_3 = 1 & \delta_3 = -1 \\
\alpha_4 = -1 & \beta_4 = -1 & \delta_4 = 0
\end{array}$$

I gruppi adimensionali sono quindi:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{h_x x}{k_f} = Nu_x \\
\pi_2 &= \frac{\rho w_\infty x}{\mu} = Re_x \\
\pi_3 &= \frac{c\mu}{k_f} = Pr
\end{aligned}$$

Si osservi che si sono ottenuti il numero di Nusselt, il numero di Reynolds ed il numero di Prandtl. La relazione tra gruppi adimensionali cercata per la convezione forzata sarà quindi:

$$Nu_x = Nu_x(Re_x, Pr)$$

I coefficienti locali di attrito e di scambio convettivo variano lungo la superficie della lastra a seguito dello sviluppo degli strati limite fluidodinamico e termico. La valutazione della forza di trascinamento complessiva e della potenza termica complessivamente scambiata richiedono di determinare opportuni valori medi sia del coefficiente di attrito sia del coefficiente convettivo. Di seguito si riporteranno sia i valori locali che i valori mediati. I coefficienti mediati possono essere desunti da quelli locali con una semplice integrazione:

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx$$

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

I coefficienti di attrito e convettivo locali hanno il medesimo andamento come risulta dalla figura 7.1.

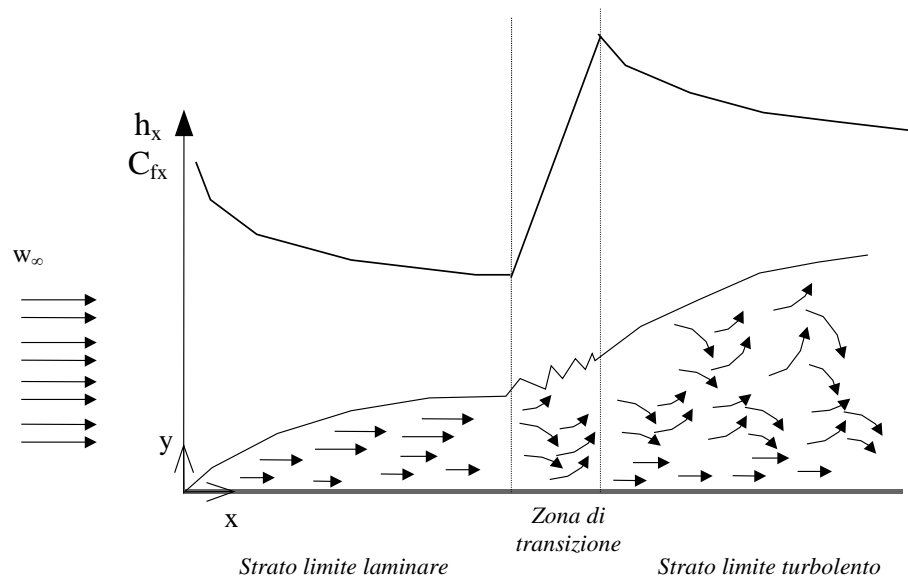


Figura 7.1 Variazione dei coefficienti di attrito e convettivo per lastra piana

### 7.1.1. Le correlazioni sperimentali

Poiché nello strato limite la temperatura del fluido varia tra  $T_p$  e  $T_\infty$ , e con la temperatura variano anche le proprietà termofisiche del fluido, le proprietà

del fluido per la determinazione del numero di Reynolds e del numero di Nusselt sono convenzionalmente valutate per un valore medio di temperatura detta temperatura di film e definita dalla relazione:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Nel tratto iniziale il flusso su lastra piana è laminare ed i coefficienti d'attrito e convettivo locali, espressi utilizzando come lunghezza caratteristica la distanza dal bordo di attacco, sono ricavabili dalle relazioni:

$$C_{fx} = \frac{0.664}{Re_x^{0.5}}$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{0.5} Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.6)$$

Sia  $C_{fx}$  che  $h_x$  tendono a zero per  $x \rightarrow \infty$ . Il coefficiente medio di attrito ed il numero di Nusselt relativo all'intera lastra sono pari a:

$$C_f = \frac{1.328}{Re_L^{0.5}}$$

$$Nu = 0.664 Re_L^{0.5} Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.6)$$

Queste ultime relazioni sono valide se lungo l'intera lastra è presente uno strato limite laminare. Nel caso in cui  $Re_L > Re_c$  le relazioni proposte valgono solo per il tratto  $x < x_c$  ove  $x_c$  è la distanza dal bordo di attacco oltre il quale il regime di moto è turbolento.

Il coefficiente d'attrito locale ed il numero di Nusselt nel caso di flusso turbolento su lastra piana sono dati dalle relazioni:

$$C_{fx} = \frac{0.0592}{Re_x^{0.2}} \quad (3.5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7)$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \quad (0.6 \leq Pr \leq 60)$$

i coefficienti di attrito e di scambio convettivo locali diminuiscono all'aumentare di  $x$  e, come si nota dal grafico di figura 7.1, sono massimi quando il flusso diventa completamente turbolento. I coefficienti di attrito e di scambio termico convettivo locali sono infine superiori a quelli che si hanno in moto laminare.

Le espressioni che seguono forniscono i coefficienti medi di attrito e convettivo quando il flusso risulta turbolento lungo l'intera lastra o quando la zona di flusso laminare nella lastra è molto piccola rispetto alla lunghezza complessiva della lastra ( $x_c \ll L$ ).

$$C_f = \frac{0.074}{Re_L^{0.2}} \quad (3.5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7)$$

$$Nu = 0.037 Re_L^{0.8} Pr^{1/3} \quad (0.6 \leq Pr \leq 60)$$

Nei casi in cui la lunghezza della lastra piana è tale da non consentire di trascurare la zona di flusso laminare rispetto alla zona di flusso turbolento i valori dei coefficienti d'attrito e convettivo medi si determinano integrando in maniera opportuna i risultati già riportati per flusso laminare e turbolento.

Una volta determinati i coefficienti medi si determina la forza di trascinamento e la potenza termica scambiata con le relazioni:

$$F = C_f \rho S \frac{w_\infty^2}{2}$$

$$\dot{Q} = hS(T_p - T_\infty)$$

dove  $S = bL$  è la superficie della lastra di lunghezza  $L$  e larghezza  $b$ .

Quando la lastra invece di essere isoterma è sottoposta ad un flusso termico areico costante il numero di Nusselt locale è dato dalle relazioni:

$$Nu_x = 0.453 Re_x^{0.5} Pr^{1/3} \quad (\text{laminare})$$

$$Nu_x = 0.0308 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \quad (\text{turbolento})$$

Queste relazioni forniscono, rispetto al caso di lastra con superficie isoterma, valori più elevati del coefficiente convettivo del 36 % in flusso laminare e del 4 % in flusso turbolento.

### **Esempio**

Olio lubrificante con  $T_\infty = 60^\circ\text{C}$  scorre alla velocità  $U_\infty = 2 \text{ ms}^{-1}$  su una piastra, lunga  $L = 5 \text{ m}$  e larga  $b = 1 \text{ m}$ , a temperatura  $T_p = 20^\circ\text{C}$ . Determinare la forza totale di trascinamento e la potenza termica scambiata per unità di larghezza della piastra. Sono note le proprietà termofisiche dell'olio alla temperatura  $T_f = 40^\circ\text{C}$ : massa volumica  $\rho = 876 \text{ kg/m}^3$ , viscosità cinematica  $\nu = 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , conduttività termica  $k = 0.144 \text{ W/mK}$ , numero di Prandtl  $Pr = 2870$ .

### **Soluzione**

Si determina il numero di Reynolds al termine della lastra

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{2 \cdot 5}{2.42 \cdot 10^{-4}} = 41322 \quad \text{regime laminare}$$

Si determina quindi il coefficiente di attrito medio con la relazione:

$$C_f = \frac{1.328}{Re_L^{0.5}} = \frac{1.328}{41322^{0.5}} = 0.00653$$

La forza di trascinamento agente sulla piastra vale:

$$F = C_f \rho S \frac{U_\infty^2}{2} = 0.00653 \cdot 876 \cdot (5 \cdot 1) \frac{2^2}{2} = 57.2 \text{ {N}}$$

Il numero di Nusselt medio si determina con la relazione:

$$Nu = 0.664 Re_L^{0.5} Pr^{1/3} = 0.664 \cdot 41322^{0.5} 2870^{1/3} = 1918$$

Dalla definizione di numero di Nusselt si ottiene il coefficiente convettivo medio:

$$h = Nu \frac{k}{L} = 55.2 \{W / m^2 K\}$$

La potenza complessivamente scambiata è:

$$\dot{Q} = hS(T_p - T_\infty) = 55.2 \cdot (5 \cdot 1)(60 - 20) = 11040 \{W\}$$


---

## 7.2. Flusso su cilindri

Il flusso su cilindri è un fenomeno abbastanza frequente: nel caso di scambiatori di calore di tipo “shell and tube” esiste un fluido che lambisce esternamente e spesso trasversalmente una schiera di tubi cilindrici percorsi all’interno da un altro fluido. Come lunghezza caratteristica del cilindro in questo caso viene assunto il diametro esterno  $D$  mentre come temperatura di riferimento per la valutazione delle proprietà termofisiche del fluido si utilizza la temperatura di film. In numero di Reynolds è definito come:

$$Re = \frac{\rho w_\infty D}{\mu}$$

dove  $w_\infty$  è la velocità uniforme con cui il fluido investe trasversalmente il cilindro,  $\rho$  la massa volumica e  $\mu$  la viscosità dinamica del fluido.

Il numero di Reynolds critico per la transizione laminare turbolento è:

$$Re_c \approx 2.8 \cdot 10^5$$

lo strato limite resta laminare per  $Re < Re_c$  mentre diventa turbolento per numeri di Reynolds superiori al valore critico.

Nel flusso trasversale su cilindri il moto del fluido avviene secondo traiettorie complesse.

Per bassi numeri di Reynolds ( $Re < 1$ ), il moto è completamente simmetrico rispetto al piano contenente l’asse del cilindro e parallelo alla direzione del flusso indisturbato. Lo strato limite laminare, che si sviluppa attorno al cilindro, non si separa dalla superficie. Per  $Re \approx 3 \div 6$ , le linee di corrente iniziano a deviare nella parte posteriore del cilindro e lo strato limite laminare si separa dalla superficie prima del punto di ristagno posteriore generando la formazione di due vortici stazionari e ricircolanti che rimangono aderenti alla superficie del cilindro. Al crescere di  $Re$  i due vortici si allungano verso valle e la loro dimensione cresce linearmente con  $Re$ . Per  $Re \approx 100$  l’effetto delle forze di inerzia permette il distacco alternato di vortici con verso di rotazione discorde tra loro, che vengono trascinati a valle dalla corrente generale con velocità leggermente inferiore alla velocità  $w_\infty$  per poi venire dissipati nella scia stessa che mantiene sempre carattere laminare. Questo tipico fenomeno con la doppia schiera di vortici alternati è noto come scia di von Karman e persiste fino a  $Re \approx 300$ . Per  $Re$  maggiori il mescolamento vorticoso prevale e i vortici non sono più facilmente

visualizzabili. Fintanto che  $Re$  è minore di  $2.8 \cdot 10^5$  lo strato limite è laminare sulla parte frontale del cilindro, fino al punto di separazione che è posizionato a circa  $70^\circ \div 80^\circ$  dal punto di ristagno anteriore. Il flusso all'esterno della scia è ancora laminare mentre al suo interno il comportamento è irregolare ed instabile. L'interazione tra il cilindro e la vena fluida si traduce in una forza applicata al cilindro e scomponibile in una componente diretta come la velocità  $w_\infty$  (forza di resistenza) ed in una componente normale detta forza di portanza. La generalizzazione del problema porta a definire un coefficiente di resistenza medio ( $C_d$ ) ed un coefficiente di portanza ( $C_l$ ) con cui valutare la forza di resistenza e la forza di portanza. L'andamento del coefficiente di resistenza medio  $C_d$  è riportato nel grafico di figura 7.2.

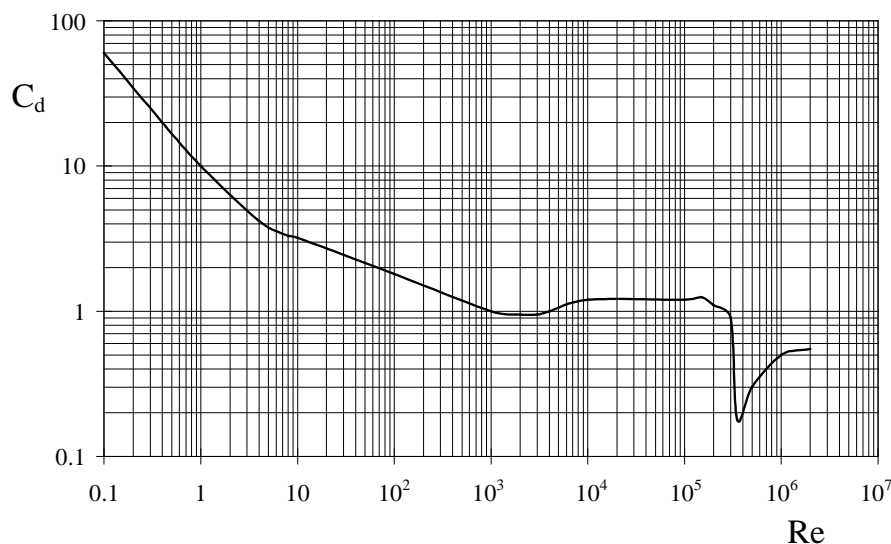


Figura. 7.2 Coefficiente di resistenza per cilindro singolo

La notevole riduzione del  $C_d$  che si osserva al passaggio da strato limite laminare a strato limite turbolento è dovuto allo spostamento del punto di distacco verso la parte posteriore del corpo con conseguente riduzione delle dimensioni della scia e quindi del valore del trascinamento per pressione.

La complessità del comportamento fluidodinamico si traduce in una variabilità locale del coefficiente convettivo sulla superficie del cilindro.

Lo studio dello scambio termico convettivo ha portato a proporre diverse correlazioni per quanto riguarda il numero di Nusselt medio, ovvero il coefficiente convettivo medio. Il numero di Nusselt locale presenta un andamento che dipende dal numero di Reynolds: per  $Re$  particolarmente bassi e tali da non permettere la formazione di una scia vorticoso dietro il cilindro il coefficiente di scambio termico locale presenta un massimo nel

punto di ristagno anteriore ed un minimo in prossimità della zona di poppa. Quando si ha la formazione dei due vortici stazionari e ricircolanti che rimangono aderenti alla superficie del cilindro si osserva un aumento del coefficiente di scambio termico dopo il punto di separazione dello strato limite (fig. 7.3). Per  $Re$  sufficientemente elevato e tale da permettere il distacco di vortici, il coefficiente di scambio termico diminuisce con l'aumentare dello spessore dello strato limite fino al raggiungimento di un minimo nel punto di separazione dello strato limite, per poi ricominciare a crescere fino al punto di ristagno posteriore dove presenta un valore vicino a quello di prua.

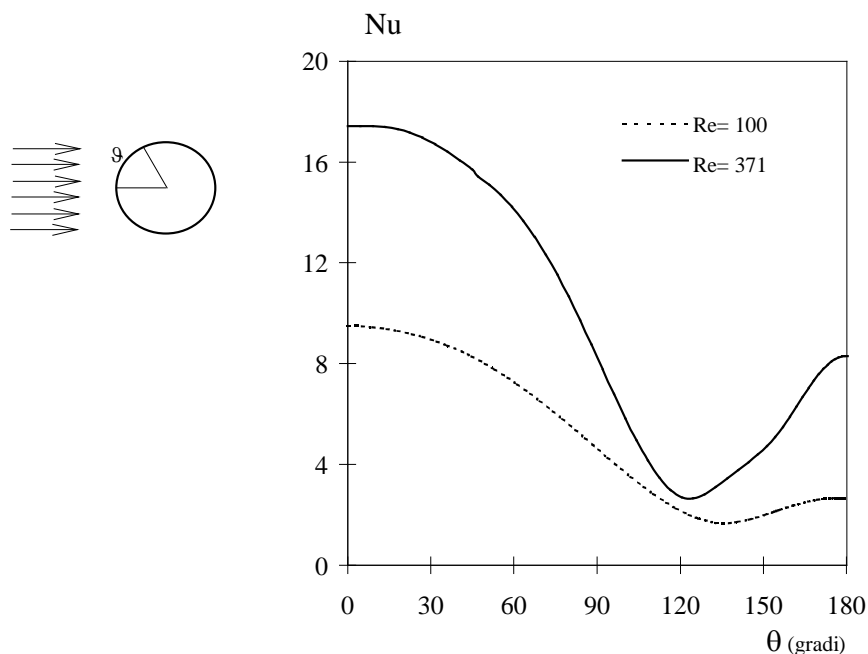


Figura 7.3 Andamento del numero di Nusselt locale per moto laminare attorno al cilindro in funzione dell'angolo  $\theta$  misurato a partire dal punto di ristagno anteriore per  $Re = 100$  e  $Re = 371$ .

La relazione più nota per quanto riguarda il numero di Nusselt medio con superficie del cilindro isoterma è quella proposta da Churchill e Bernstein:

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{0.5} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{28200}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad Re \cdot Pr > 0.2$$



Questa correlazione ha un campo di validità abbastanza ampio e le proprietà termofisiche del fluido sono valutate alla temperatura di film, media tra la temperatura di superficie e quella della corrente fluida.

La relazione di Churchill e Bernstein è valida per cilindro singolo con superficie liscia. Questa relazione può essere impiegata anche per cilindri multipli purché il flusso su ciascuno di essi non sia influenzato dalla presenza di altri. In caso contrario si utilizzano correlazioni opportune per fasci tubieri.

### 7.3. Flusso all'interno di tubi

Il moto all'interno di condotti è importante dal punto di vista ingegneristico presentandosi tale situazione frequentemente. Basti pensare ad uno comune scaldabagno domestico nel quale l'acqua scorre all'interno di una serpentina riscaldata dalla fiamma del bruciatore. Lo studio del processo di scambio termico è equivalente a quello illustrato per la lastra piana anche se lo sviluppo degli strati limite fluidodinamico e termico sono soggetti al vincolo costituito dal confinamento del moto nel condotto. L'analisi dei campi fluidodinamici e termici in un condotto nella cui sezione di ingresso si ha un campo di velocità e di temperatura uniforme mette in evidenza la presenza di un tratto iniziale del condotto in cui si hanno gli sviluppi degli strati limiti. Superato questo tratto i profili non si modificano morfologicamente e si è in presenza di profili detti sviluppati.

Il tipo di interazione tra le pareti del condotto ed il fluido è analogo a quanto descritto per la lastra piana. Infatti il fluido in contatto con la superficie del condotto viene rallentato per la presenza di sforzi viscosi; si sviluppa quindi uno strato limite di velocità che aumenta in direzione del moto (fig. 7.4).

Per il moto all'interno dei condotti si definisce numero di Reynolds l'espressione:

$$Re = \frac{\rho w_m D}{\mu}$$

ove  $w_m$  è la velocità media di sezione ottenuta come rapporto tra la portata massica, ed il prodotto tra massa volumica  $\rho$  e area della sezione del condotto.

Il numero di Reynolds critico per la transizione laminare turbolento è  $Re_c = 2000$ . In generale si assume che il regime di moto che si instaura in un condotto è:

$Re \leq 2000$	moto laminare
$2000 < Re < 4000$	transizione laminare - turbolento
$Re \geq 4000$	moto turbolento

Se il condotto è simmetrico, come ad esempio quello ottenuto con due lastre piane parallele o con un tubo cilindrico, si ha un accrescimento simmetrico dello strato limite lungo il condotto sino a che, nel caso di moto laminare, questo occupa l'intera sezione del condotto con un profilo di velocità che è parabolico.

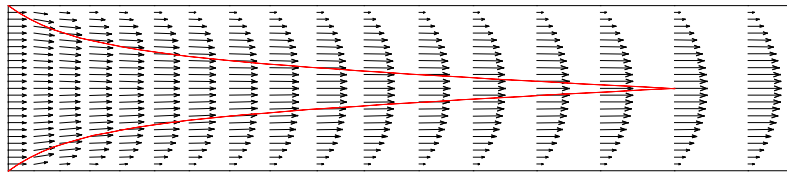


Figura 7.4 Sviluppo del profilo di velocità. La linea tratteggiata rappresenta lo sviluppo dello strato limite fluidodinamico in regime laminare.

Nel caso di moto turbolento lo strato limite si sviluppa sino ad una distanza detta lunghezza d'imbocco  $x_i$  oltre la quale rimane costante. In questo caso il profilo di velocità sviluppato è praticamente piatto.

La lunghezza d'imbocco fluidodinamica può essere correlata al diametro del condotto ed al numero di Reynolds mediante le espressioni:

$$\frac{x_i}{D} = 0.05 Re \quad \text{moto laminare}$$

$$\frac{x_i}{D} = 10 \quad \text{moto turbolento}$$

Per quanto riguarda lo sviluppo dello strato limite termico con condizione al contorno di temperatura imposta valgono considerazioni analoghe a quanto detto per lo sviluppo dello strato limite fluidodinamico. Lo spessore dello strato limite termico aumenta dalla sezione di ingresso sino a raggiungere l'asse del condotto. Questo punto definisce la lunghezza di imbocco termica  $x_t$ . La regione che segue quella di ingresso termica è caratterizzata dall'avere un profilo della temperatura adimensionalizzata  $\theta$  costante. La temperatura adimensionalizzata  $\theta$  è definita come:

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_a - T_p}$$

ove  $T_p$  e  $T_a$  rappresentano rispettivamente la temperatura di parete e la temperatura di miscelamento adiabatico della sezione considerata.

La lunghezza di imbocco termico dipende, oltre che dal numero di Reynolds, anche dal numero di Prandtl:

$$\frac{x_t}{D} = 0.05 \text{ Re Pr} \quad \text{moto laminare}$$

$$\frac{x_t}{D} = 10 \quad \text{moto turbolento}$$

Come si può notare nel caso di moto turbolento la lunghezza di sviluppo dello strato limite termico coincide con la lunghezza di sviluppo dello strato limite fluidodinamico.

Il coefficiente di attrito è proporzionale allo sforzo di taglio in parete e quindi al gradiente di velocità alla parete. Nella zona di profilo fluidodinamico sviluppato il gradiente di velocità in parete non varia e pertanto il coefficiente di attrito rimane costante. Un'analoga considerazione può essere fatta per quanto riguarda il coefficiente convettivo per cui si può concludere che i coefficienti di attrito e di scambio termico restano costanti nella regione di flusso sviluppato.

Nell'analizzare la zona di ingresso del condotto emerge che il coefficiente convettivo ed il coefficiente di attrito si riducono mano a mano che si sviluppano i profili di velocità e di temperatura. Si può quindi affermare che la caduta di pressione ed il flusso termico areico sono maggiori nelle sezioni di ingresso.

Si illustreranno i risultati relativi alla zona completamente sviluppata nei diversi regimi di moto.

### 7.3.1. Moto laminare

Nell'analisi del moto di un fluido all'interno di un condotto è importante valutare la perdita di carico ( $\Delta P$ ) intesa come differenza di pressione tra la sezione di ingresso e la sezione di uscita in quanto correlabile alla potenza richiesta dal dispositivo (ventilatore, pompa o compressore) per mettere in moto il fluido. La caduta di pressione all'interno del tubo è una funzione della lunghezza  $L$  e del diametro  $D$  del tubo, delle caratteristiche del fluido (massa volumica  $\rho$  e viscosità  $\mu$ ) e della velocità media nel condotto ( $w_m$ ). In definitiva si ha:

$$\Delta P = \Delta P(L, D, \rho, \mu, w_m)$$

L'analisi dimensionale mette in evidenza la presenza di tre gruppi adimensionali. Le dimensioni delle grandezze in gioco sono rispettivamente:

$$\Delta P = [ML^{-1}t^{-2}]$$

$$L = [L]$$

$$D = [L]$$

$$\rho = [ML^{-3}]$$

$$\mu = [ML^{-1}t^{-1}]$$

$$w_m = [Lt^{-1}]$$

individuando come grandezze dipendenti  $\Delta P$ ,  $\mu$  e  $L$  si determinano i tre gruppi adimensionali che consentono di descrivere il fenomeno di scambio termico tra lastra e fluido. Si deve imporre che i rapporti  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  siano adimensionali:

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{D^{\alpha_1} w_m^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3}}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{D^{\beta_1} w_m^{\beta_2} \rho^{\beta_3}}$$

$$\pi_3 = \frac{L}{D^{\delta_1} w_m^{\delta_2} \rho^{\delta_3}}$$

Sostituendo alle grandezze originarie la loro espressione dimensionale si ottiene;

$$\pi_1 = \frac{[ML^{-1}t^{-2}]}{[L]^{\alpha_1} [Lt^{-1}]^{\alpha_2} [ML^{-3}]^{\alpha_3}} = [M]^{1-\alpha_3} [L]^{-1-\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3} [t]^{-2+\alpha_2}$$

$$\pi_2 = \frac{[ML^{-1}t^{-1}]}{[L]^{\beta_1} [Lt^{-1}]^{\beta_2} [ML^{-3}]^{\beta_3}} = [M]^{1-\beta_3} [L]^{-1-\beta_1-\beta_2+3\beta_3} [t]^{-1+\beta_2}$$

$$\pi_3 = \frac{[L]}{[L]^{\delta_1} [Lt^{-1}]^{\delta_2} [ML^{-3}]^{\delta_3}} = [M]^{-\delta_3} [L]^{1-\delta_1-\delta_2+3\delta_3} [t]^{+\delta_2}$$

Perché i tre gruppi siano adimensionali gli esponenti relativi alle singole grandezze fondamentali devono essere nulli:

$$1 - \alpha_3 = 0$$

$$-1 - \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$-2 + \alpha_2 = 0$$

$$1 - \beta_3 = 0$$

$$-1 - \beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 0$$

$$-1 + \beta_2 = 0$$

$$-\delta_3 = 0$$

$$1 - \delta_1 - \delta_2 + 3\delta_3 = 0$$

$$\delta_2 = 0$$

Risolvendo il sistema di sei equazioni in sei incognite si ottengono i valori dei coefficienti incogniti:

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\delta_2 = 0$
$\alpha_3 = 1$	$\beta_3 = 1$	$\delta_3 = 0$

I gruppi adimensionali sono quindi:

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho w_m^2} = \frac{f}{2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho w_m D} = \frac{1}{Re}$$

$$\pi_3 = \frac{L}{D}$$

Si osservi che si sono ottenuti l'inverso del numero di Reynolds, un gruppo adimensionale geometrico ed il fattore di attrito  $f$  (secondo Moody o Darcy). La relazione tra gruppi adimensionali cercata per la perdita di carico sarà quindi:

$$f = f\left(Re, \frac{L}{D}\right)$$

Tale relazione la si pone infine nella forma:

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho w_m^2}{2}$$

ove  $f = f(Re)$ . Si può dimostrare che tra il fattore di attrito secondo Moody ( $f$ ) ed il coefficiente d'attrito  $C_f$  esiste un legame di proporzionalità:

$$C_f = \frac{f}{4}$$

Nel caso di moto laminare il fattore d'attrito  $f$  è, per un condotto di sezione circolare:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Si noti che, per le definizioni adottate, il fattore di attrito è convenzionalmente utilizzato per la valutazione della caduta di pressione mentre il coefficiente di attrito è impiegato per la valutazione della forza di trascinamento agente sulla superficie del condotto.

Il numero di Nusselt nella regione di flusso laminare completamente sviluppato in un tubo circolare viene determinato partendo dall'equazione di bilancio energetico:

$$Nu = 3.66 \quad \text{temperatura di superficie costante}$$

$$Nu = 4.36 \quad \text{flusso termico areico costante}$$

Una relazione più generale che consente di valutare il numero di Nusselt medio nel caso di moto laminare che si sviluppa sia idrodinamicamente che termicamente è data dalla relazione di Sieder e Tate:

$$Nu = 1.86 \left( Re \cdot Pr \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \quad Pr > 0.5$$

In questo caso le proprietà termofisiche del fluido sono valutate alla temperatura media del fluido mentre la viscosità  $\mu_p$  è valutata alla temperatura di parete.

Nel caso di condotto di sezione non circolare con moto laminare completamente sviluppato il coefficiente di attrito ed il numero di Nusselt sono determinabili dalla tabella 7.I.

Sezione trasversale	a/b	Nusselt		fattore d'attrito
		$T_p = \text{costante}$	$J = \text{costante}$	
Cerchio		3.66	4.36	$64 \text{ Re}^{-1}$
Esagono		3.35	4.00	$60.20 \text{ Re}^{-1}$
Quadrato		2.98	3.61	$56.92 \text{ Re}^{-1}$
Rettangolo	1	2.98	3.61	$56.92 \text{ Re}^{-1}$
	2	3.39	4.12	$62.20 \text{ Re}^{-1}$
	3	3.96	4.79	$68.36 \text{ Re}^{-1}$
	4	4.44	5.33	$72.92 \text{ Re}^{-1}$
	6	5.14	6.05	$78.80 \text{ Re}^{-1}$
	8	5.60	6.49	$82.32 \text{ Re}^{-1}$
	$\infty$	7.54	8.24	$96.00 \text{ Re}^{-1}$
Ellisse	1	3.66	4.36	$64.00 \text{ Re}^{-1}$
	2	3.74	4.56	$67.28 \text{ Re}^{-1}$
	4	3.79	4.88	$72.96 \text{ Re}^{-1}$
	8	3.72	5.09	$76.60 \text{ Re}^{-1}$
	16	3.65	5.18	$78.16 \text{ Re}^{-1}$
triangolo isoscele	Angolo al vertice			
	$10^\circ$	1.61	2.45	$50.80 \text{ Re}^{-1}$
	$30^\circ$	2.26	2.91	$52.38 \text{ Re}^{-1}$
	$60^\circ$	2.47	3.11	$53.32 \text{ Re}^{-1}$
	$90^\circ$	2.34	2.98	$52.60 \text{ Re}^{-1}$
	$120^\circ$	2.00	2.68	$50.96 \text{ Re}^{-1}$

*Tabella 7.I Numero di Nusselt e fattore di attrito per flusso laminare completamente sviluppato in tubi di varie sezioni*

I numeri di Reynolds e di Nusselt sono determinati utilizzando come grandezza caratteristica il diametro idraulico  $D_h$  definito con l'espressione:

$$D_h = \frac{4S}{P}$$

ove  $S$  è l'area della sezione trasversale del condotto mentre  $P$  è il suo perimetro. Si può notare che a parità di sezione trasversale il condotto a sezione circolare consente di avere il minore coefficiente d'attrito ed il maggiore coefficiente convettivo. Questo giustifica l'impiego di condotti a

sezione circolare per lo scambio termico.

---

**Esempio**

Una portata di olio con velocità media di sezione  $w_m = 2 \text{ ms}^{-1}$  fluisce in un condotto con diametro  $D = 30 \text{ cm}$ . Il condotto, per una lunghezza  $L = 100 \text{ m}$  è immerso in uno strato di ghiaccio e la temperatura superficiale del condotto è  $T_p = 0^\circ\text{C}$ . Considerando trascurabile la resistenza termica della parete del condotto determinare il coefficiente convettivo medio dell'olio sapendo che la temperatura dell'olio all'ingresso del condotto è  $T_i = 20^\circ\text{C}$ .

Le proprietà termofisiche dell'olio alla temperatura  $T = 20^\circ\text{C}$  sono: massa volumica  $\rho = 890 \text{ kg/m}^3$ , conduttività termica  $k = 0.145 \text{ W/mK}$ , viscosità dinamica  $\mu = 0.8 \text{ Ns/m}^2$ , calore specifico  $c_p = 1.9 \text{ kJ/kgK}$ .

**Soluzione**

Il numero di Reynolds per il flusso di olio nel condotto è:

$$\text{Re} = \frac{\rho w_m D}{\mu} = \frac{890 \cdot 2 \cdot 0.3}{0.8} = 667.5 \quad \text{regime laminare}$$

La lunghezza di imbocco termica in regime laminare è determinabile con la relazione:

$$x_t = 0.05D \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}$$

Il numero di Prandtl è pari a:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{1900 \cdot 0.8}{0.145} = 10483$$

per cui si ricava:

$$x_t = 0.05D \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr} = 0.05 \cdot 0.3 \cdot 667.5 \cdot 10483 \cong 105000 \text{ m}$$

Tale lunghezza è molto maggiore della lunghezza del condotto; questo è un caso tipico quando si utilizza fluidi con numero di Prandtl elevato. Il numero di Nusselt medio si determina con la relazione di Sieder-Tate; essendo  $\mu_p = 3.85 \text{ Ns/m}^2$  la viscosità dinamica dell'olio alla temperatura di parete di  $0^\circ\text{C}$

$$\text{Nu} = 1.86 \left( \text{Re} \cdot \text{Pr} \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} = 1.86 \left( 667.5 \cdot 10483 \frac{0.3}{100} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{0.8}{3.85} \right)^{0.14} = 41.18$$

Come si può notare tale valore è maggiore del valore che si avrebbe nel caso di profilo termico sviluppato ( $\text{Nu} = 3.66$ ). Dal valore del numero di Nusselt si risale al coefficiente convettivo medio:

$$h = \text{Nu} \frac{k}{D} = 41.18 \frac{0.145}{0.3} = 19.9 \text{ W/m}^2\text{K}$$

---

### 7.3.2. Moto turbolento

Come già è stato affermato il moto è completamente turbolento in un condotto quando il numero di Reynolds è superiore a 4000. L'analisi teorica del processo di sviluppo degli strati limiti nel caso di moto turbolento è particolarmente difficile per cui si preferisce ricorrere a relazioni basate esclusivamente su dati sperimentali.

Per tubi lisci il fattore d'attrito nel caso di moto turbolento completamente sviluppato è determinabile con le espressioni:

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad 4000 < Re < 10000$$

$$f = \frac{0.184}{Re^{0.20}} \quad Re > 10000$$

Nel caso di condotti non lisci (detti rugosi) il coefficiente d'attrito è determinabile con correlazioni complesse che esprimono il coefficiente di attrito in funzione anche della rugosità relativa. Questa è definita come rapporto tra l'altezza delle asperità  $\varepsilon$  ed il diametro del condotto  $D$ .

Il coefficiente di attrito è anche disponibile sotto forma grafica (diagramma di Moody) come illustrato in figura 7.5.

Come si può notare esiste una vasta area di questo diagramma in cui il fattore di attrito dipende esclusivamente dalla rugosità relativa ed è indipendente dal numero di Reynolds.

Il numero di Nusselt è legato al coefficiente di attrito in moto turbolento dalla analogia di Chilton- Colburn espressa come:

$$Nu = 0.125 \cdot f \cdot Re \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

Tale analogia mette in evidenza una proporzionalità diretta tra fattore di attrito e coefficiente convettivo. Questo significa che ogni qualvolta si adottano soluzioni che migliorano lo scambio termico si ha un aumento delle perdite di carico.

La sostituzione della relazione che esprime il coefficiente di attrito in funzione del numero di Reynolds per  $Re > 10000$  consente di determinare la equazione di Colburn per flusso turbolento completamente sviluppato in tubi lisci:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{\frac{1}{3}} \quad 0.7 < Pr < 160 \quad Re > 10000$$

Questa relazione è stata proposta in forma corretta da Dittus-Boelter:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n \quad 0.7 < Pr < 160 \quad Re > 10000$$

$n = 0.4$  per il riscaldamento

$n = 0.3$  per il raffreddamento

Le proprietà del fluido in queste correlazioni vengono valutate alla temperatura media tra quella nella sezione di ingresso e quella nella sezione di uscita.

Le precedenti relazioni sono indipendenti dalle condizioni al contorno imposte. Valgono sia per temperatura di parete costante sia per flusso termico areico costante.

Nel caso di superfici rugose la analogia di Chilton-Colburn ha ancora validità e può essere adottata utilizzando il valore del fattore di attrito come



lo si determina dal diagramma di Moody.

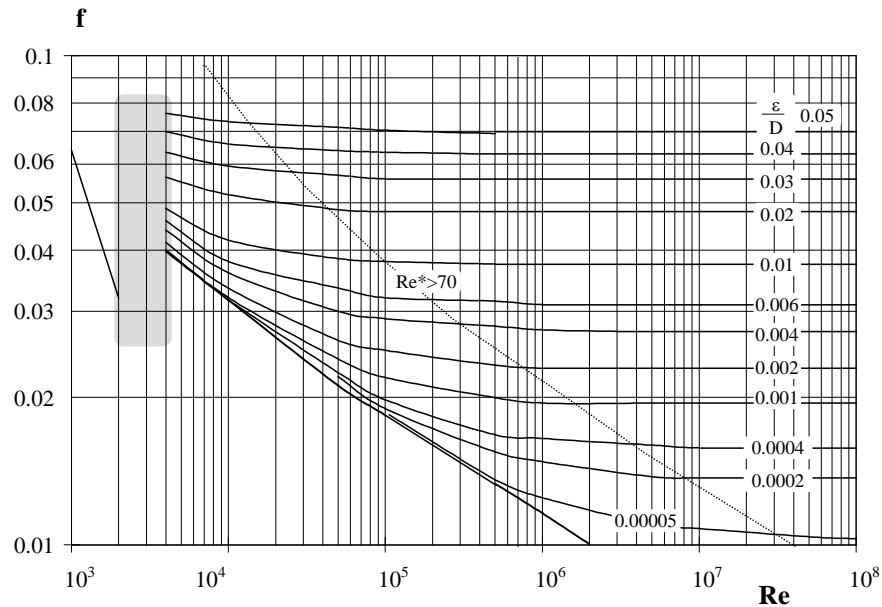


Figura 7.5 Diagramma di Moody

#### 7.4. Scambio termico in un tubo

In molte applicazioni pratiche di riscaldamento e di raffreddamento di un fluido si adotta come soluzione quella di far scorrere con moto forzato il fluido all'interno di un condotto (tubo) mentre la sua superficie esterna viene riscaldata o raffreddata. In tali applicazioni si deve valutare la lunghezza complessiva del condotto necessaria per avere definite condizioni di uscita del fluido.

Poiché nella sezione del condotto la velocità del fluido varia tra zero alla parete ed un valore massimo sull'asse del condotto conviene riferirsi alla velocità media di sezione:

$$w_m = \frac{\dot{m}}{\rho S}$$

dove  $\dot{m}$  è la portata massica,  $\rho$  la massa volumica ed  $S$  la sezione del condotto. Per un fluido incomprimibile in moto in un condotto di sezione costante la velocità media di sezione non varia. Molti fluidi reali presentano invece una dipendenza della massa volumica dalla temperatura per cui si osserva una variazione della velocità media di sezione. In tali casi conviene riferirsi ad una velocità media costante valutata ad una temperatura media tra

il valore assunto nelle sezioni di ingresso e di uscita. L'errore che si commette con questa assunzione è in genere trascurabile.

Con l'ipotesi di essere in regime stazionario, di poter trascurare la variazione di energia potenziale e di energia cinetica tra le sezioni di ingresso (i) e di uscita (u) e di non avere scambi di lavoro, l'equazione di bilancio energetico si riduce a:

$$\dot{m}(h_i - h_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

Se ora supponiamo che il fluido sia un gas perfetto o un fluido incomprimibile ideale che si muove nel condotto a pressione costante (e quindi in assenza di perdite di carico), la variazione di entalpia tra le sezioni di ingresso e di uscita può essere espressa in funzione della temperatura di miscelamento adiabatico delle sezioni, per cui l'equazione di bilancio energetico diventa:

$$\dot{m}c_p(T_i - T_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

Questa equazione di bilancio può essere accoppiata con una equazione di bilancio locale che esprime il flusso termico areico ( $J_s$ ) in una sezione in funzione della differenza tra la temperatura della superficie del condotto ( $T_p$ ) e la temperatura di miscelamento adiabatico del fluido ( $T_m$ ):

$$J_s = h(T_p - T_m)$$

dove  $h$  è il coefficiente convettivo locale. Nel caso in cui i profili di velocità e di temperatura siano sviluppati si ha una costanza del coefficiente convettivo.

La potenza complessivamente scambiata da un condotto di diametro  $D$  e lunghezza  $L$  è legata al flusso termico areico locale dalla relazione:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = \int_0^L J_s \cdot \pi D dx$$

Per determinare sia l'andamento della temperatura di miscelamento adiabatico, sia la lunghezza del condotto necessaria per avere un determinato salto entalpico nel fluido è necessario fare alcune considerazioni sulle condizioni al contorno. Si possono presentare infatti due diverse situazioni: flusso termico areico costante o temperatura superficiale del condotto costante.

#### 7.4.1. Flusso termico areico costante

Nel caso di flusso termico areico costante la potenza termica complessivamente scambiata è data dalla relazione:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = J_s \cdot \pi DL$$

e la temperatura di miscelamento adiabatico in una generica sezione è:

$$T_m = T_i + \frac{J_s \pi D x}{\dot{m}c_p}$$

Si noti che la temperatura di miscelamento adiabatico aumenta (diminuisce) linearmente nella direzione del flusso nel caso di riscaldamento (raffreddamento). La temperatura superficiale del tubo può essere a questo punto determinata con la relazione:

$$J_s = h(T_p - T_m)$$

Se quindi  $h$  è costante anche la differenza di temperatura ( $T_p - T_m$ ) rimane costante e quindi la temperatura superficiale del condotto aumenta (diminuisce) linearmente nella direzione del flusso (Fig. 7.6).

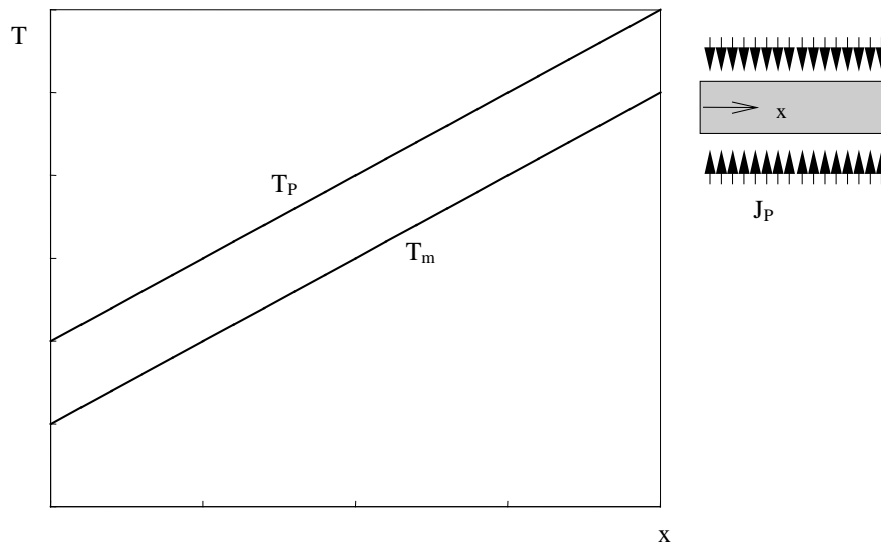


Figura 7.6 Distribuzione di temperatura in un condotto con flusso termico areico costante

#### 7.4.2. Temperatura superficiale del condotto costante

In questo caso non è possibile eseguire direttamente l'integrazione che consente di determinare la potenza termica complessivamente scambiata in funzione del flusso termico areico. Occorre impostare l'analisi del fenomeno di scambio termico partendo dalla equazione di conservazione dell'energia applicata ad un volume di controllo infinitesimo di lunghezza  $dx$  (fig. 7.7)

L'equazione di bilancio energetico, con le ipotesi illustrate nel paragrafo precedente, è:

$$\dot{m}(h_x - h_{x+dx}) + d\dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

ove la potenza termica scambiata è data da:

$$d\dot{Q}^{\leftarrow} = h(T_p - T_x)\pi D \cdot dx$$

ove  $T_x$  è la temperatura di miscelamento adiabatico relativa al volume di controllo analizzato. Con le ipotesi proposte per il fluido si ha che:

$$h_x - h_{x+dx} = h_x - \left( h_x + \frac{dh}{dx} dx + o(dx^2) \right)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a  $dx$  ed utilizzando la definizione di entalpia, si ha il sistema di equazioni:

$$-\dot{m}c_p dT_x + d\dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

$$d\dot{Q}^{\leftarrow} = h(T_p - T_x)\pi D \cdot dx$$

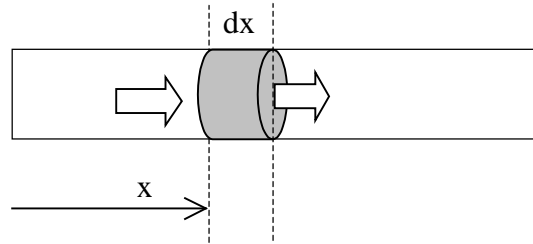


Figura 7.7 Volume di controllo infinitesimo

Per sostituzione si può ottenere l'equazione differenziale seguente:

$$-\dot{m}c_p dT_x + h(T_p - T_x)\pi D \cdot dx = 0$$

Essendo  $T_p = \text{cost}$  si può scrivere:

$$dT_x = -d(T_p - T_x)$$

che sostituita nella relazione precedente consente di avere una equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{d(T_p - T_x)}{(T_p - T_x)} = -\frac{h\pi D}{\dot{m}c_p} \cdot dx$$

La condizione ai limiti è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ T_x = T_i \end{cases}$$

con cui si ricava la distribuzione di temperatura in funzione della coordinata  $x$  nel condotto:

$$\ln \frac{(T_p - T_x)}{(T_p - T_i)} = -\frac{h\pi D}{\dot{m}c_p} \cdot x$$

ovvero:

$$T_x = T_p - (T_p - T_i)e^{-\frac{h\pi D}{\dot{m}c_p} \cdot x}$$

La distribuzione di temperatura è riportata in figura 7.8. Si noti che la differenza di temperatura tra la parete ed il fluido diminuisce esponenzialmente nella direzione del flusso.

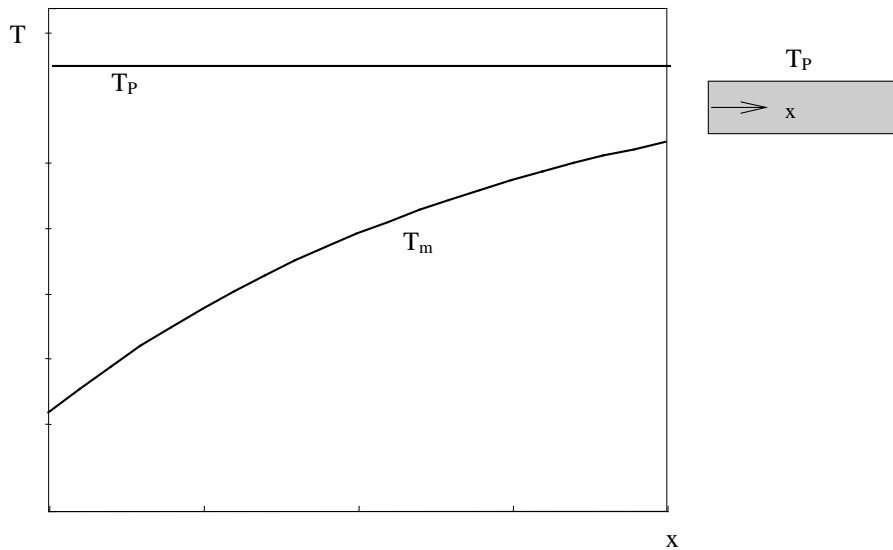


Figura 7.8 Distribuzione di temperatura in un condotto con temperatura di parete costante

Se si vuole determinare la lunghezza che deve avere il tubo perché si abbia una temperatura in uscita pari a  $T_u$  si ha la relazione:

$$L = -\frac{\dot{m}c_p}{h\pi D} \ln \frac{(T_p - T_u)}{(T_p - T_i)}$$

La potenza complessivamente scambiata nel condotto con  $T_p = \text{cost}$  può essere facilmente calcolata. Se infatti si risolve questa relazione rispetto al prodotto  $\dot{m}c_p$  si ricava la relazione:

$$\dot{m}c_p = -\frac{h\pi DL}{\ln \frac{(T_p - T_u)}{(T_p - T_i)}}$$

che sostituita nell'equazione di bilancio energetico per il condotto di lunghezza  $L$ :

$$\dot{m}c_p(T_i - T_u) + \dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

consente di ottenere la relazione:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = h\pi DL \frac{(T_i - T_u)}{\ln \frac{(T_p - T_u)}{(T_p - T_i)}}$$

Ponendo ora  $S = \pi DL$  e:

$$\begin{aligned}\Delta T_u &= (T_p - T_u) \\ \Delta T_i &= (T_p - T_i) \\ (T_i - T_u) &= \Delta T_u - \Delta T_i\end{aligned}$$

Si ponga:

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_u - \Delta T_i}{\ln \frac{\Delta T_u}{\Delta T_i}}$$

si ottiene:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = hS \cdot \Delta T_{ml}$$

Il termine  $\Delta T_{ml}$  è detto differenza media logaritmica di temperatura. Si noti che i termini  $\Delta T_i$  e  $\Delta T_u$  sono le differenze di temperatura tra la parete ed il fluido nelle sezioni rispettivamente di ingresso e di uscita.

### **Esempio**

*Facendo riferimento all'esempio illustrato in §7.3.1 si determini la temperatura dell'olio all'uscita del condotto, la potenza termica dissipata dall'olio, e la potenza di pompaggio.*

### **Soluzione**

*La temperatura all'uscita del condotto può essere determinata con la relazione:*

$$T_u = T_p - (T_p - T_i) e^{-\frac{h\pi D}{\dot{m}c_p}L}$$

*La portata in massa è pari a:*

$$\dot{m} = \rho w_m \left( \pi \frac{D^2}{4} \right) = 890 \cdot 2 \cdot \left( \pi \frac{0.3^2}{4} \right) = 125.8 \text{ kg/s}$$

*La temperatura in uscita dal condotto è:*

$$T_u = 0 - (0 - 20) e^{-\frac{19.9\pi \cdot 0.3}{125.8 \cdot 1900} 100} = 19.84 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

*La potenza complessivamente scambiata può essere determinata con l'equazione di bilancio energetico in regime stazionario:*

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_i - h_u)$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p (T_i - T_u) = 125.8 \cdot 1900 (20 - 19.84) = 38240 \text{ W}$$

*Poiché la temperatura dell'olio nel condotto non varia significativamente la valutazione del coefficiente convettivo utilizzando le proprietà del fluido nella sezione di ingresso è da ritenersi corretta. Non è necessario iterare.*

*Il moto dell'olio nel condotto si ritiene sviluppato per cui il coefficiente di attrito è pari a:*

$$f = \frac{64}{Re} = 0.0959$$

*La potenza necessaria per il pompaggio è:*

$$\dot{L} = \dot{m} \frac{\Delta P}{\rho}$$

La perdita di carico è:

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho w_m^2}{2} = 0.0959 \cdot \frac{100}{0.3} \frac{890 \cdot 2^2}{2} = 56900 \text{ {Pa}}$$

La potenza per il pompaggio è quindi:

$$\dot{L} = 8.042 \text{ {kW}}$$


---

## 7.5. Esercizi

Un condotto cilindrico ( $D = 10 \text{ cm}$ ) per il trasporto di un vapore condensante ha una temperatura superficiale  $T_e = 110 \text{ }^\circ\text{C}$  ed è disposto all'aperto. Il condotto è investito da una corrente d'aria a temperatura  $T_a = 4 \text{ }^\circ\text{C}$  con velocità in direzione normale al tubo di  $8 \text{ ms}^{-1}$ . Determinare la potenza termica dissipata per unità di lunghezza. Le proprietà termofisiche dell'aria alla temperatura di film  $T = 57 \text{ }^\circ\text{C}$  sono: viscosità cinematica  $\nu = 1.86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , numero di Prandtl  $Pr = 0.708$ , conduttività termica  $k = 0.0283 \text{ W/mK}$ .

$$(Q = 1851 \text{ W/m})$$

Un condotto di diametro interno  $D_i = 3 \text{ cm}$  e lunghezza  $L = 5 \text{ m}$  è dotato di una resistenza elettrica che consente di dissipare potenza in modo uniforme. La superficie esterna della resistenza è adiabatica. All'interno del condotto scorre una portata volumetrica  $\Gamma = 10 \text{ lt/min}$  di acqua che viene riscaldata dalla temperatura  $T_i = 15 \text{ }^\circ\text{C}$  alla temperatura  $T_u = 65 \text{ }^\circ\text{C}$ . Determinare la potenza che deve dissipare la resistenza elettrica e la temperatura della superficie del tubo nella sezione finale. Sono note le proprietà termofisiche dell'acqua alla temperatura  $T = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ : massa volumica  $\rho = 994 \text{ kg/m}^3$ , conduttività termica  $k = 0.628 \text{ W/mK}$ , viscosità cinematica  $\nu = 1.86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , numero di Prandtl  $Pr = 4.34$ , calore specifico  $c_p = 4178 \text{ J/kgK}$ .

$$(Q = 73.46 \text{ kW/m}^2, T_{pu} = 115 \text{ }^\circ\text{C})$$

Una portata di acqua con velocità media  $w = 6 \text{ cms}^{-1}$ , scorre in un condotto di diametro  $D = 2.7 \text{ cm}$ . L'acqua ha una temperatura, nella sezione di ingresso, di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Determinare la perdita di carico per unità di lunghezza nella regione di profilo fluidodinamico sviluppato. E' nota la viscosità cinematica  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

$$(\Delta P/L = 2.64 \text{ Pa/m})$$





## 8. La convezione naturale

Con convezione naturale si intende il fenomeno di scambio termico che si presenta con il moto del fluido che ha origine spontanea e non è impresso da un dispositivo meccanico.

Nella convezione forzata il coefficiente convettivo è generalmente proporzionale al numero di Reynolds, e quindi alla velocità del fluido; nel caso di convezione naturale le velocità del fluido sono basse, normalmente non superano  $1 \text{ ms}^{-1}$ , e pertanto il coefficiente convettivo è minore rispetto al caso di convezione forzata.

Anche se con basse velocità la trasmissione del calore per convezione naturale è un meccanismo che interviene in molte applicazioni di interesse tecnologico ed in molti processi ambientali. La convezione naturale è il fenomeno principale di scambio termico nel raffreddamento di componenti elettronici, nei dispositivi di riscaldamento ambientale, nelle linee di trasmissione della potenza. In taluni sistemi a fenomeni di convezione naturale è assegnato il compito di smaltire potenza termica quando vengono meno altre possibilità di intervento. Sono dovuti ancora a fenomeni di convezione naturale i moti che si originano nell'atmosfera, negli oceani e lo scambio termico tra la superficie corporea degli esseri viventi e l'aria circostante.

L'analisi dei problemi di convezione naturale è in generale molto più complessa rispetto al caso di convezione forzata. Questo giustifica il prevalere dell'approccio sperimentale nello studio di questa modalità di scambio termico.

### 8.1. Caratteristiche fenomenologiche

E' noto che se viene spenta la piastra elettrica di una cucina questa si raffredda sino a raggiungere la temperatura dell'aria circostante. Ad una osservazione superficiale il processo di raffreddamento appare dovuto alla sola conduzione negli strati di aria adiacenti alla superficie della piastra.

Nella realtà, oltre al fenomeno della conduzione, è presente sia lo scambio termico per irraggiamento, sia quello dovuto al movimento dell'aria

in prossimità della superficie (convezione naturale).

Se il fenomeno dell'irraggiamento è trascurabile il processo di raffreddamento della piastra può essere spiegato come segue. Quando la piastra calda è lambita da aria più fredda, la sua temperatura superficiale si riduce mentre lo strato di aria che lambisce la piastra si riscalda per effetto della conduzione.

L'aria in contatto con la superficie della piastra ha una temperatura più elevata rispetto all'aria ambiente e pressione pari a quella dell'ambiente. Essa avrà di conseguenza una massa volumica  $\rho$  minore, così come indica l'equazione di stato dei gas ideali.

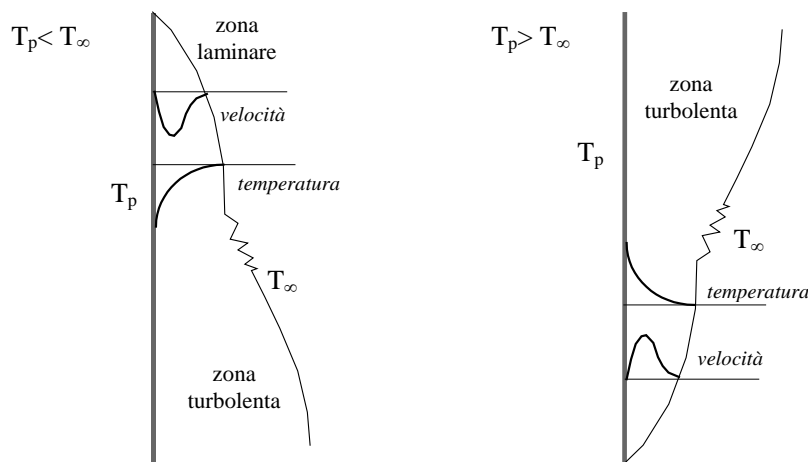


Figura 8.1 Esempi di convezione naturale su lastra verticale

L'aria calda è quindi più “leggera” e tenderà a salire lasciando uno spazio che verrà occupato da aria più fredda e più “pesante” che a contatto con la superficie della piastra ne accelera il processo di raffreddamento.

Questo processo continua fino a quando la superficie della piastra si porta in equilibrio termico con l'ambiente.

Il movimento risultante dal continuo ricambio dell'aria in prossimità della superficie riscaldata è, in conclusione, l'aspetto più importante per il fenomeno della convezione naturale. Anche in questo caso si può parlare di strato limite aderente alla piastra. In ogni caso lo sviluppo dello strato limite è accompagnato dal trascinamento di fluido che proviene dalle zone limitrofe. La configurazione e le caratteristiche dello strato limite dipendono dalle condizioni termiche presenti. In figura 8.1 è evidenziato come questo si possa sviluppare nei casi di superficie verticale a temperatura superiore o inferiore a quella dell'aria che la lambisce. Lo strato limite manterrà condizioni di laminarità fino ad una certa distanza dal punto in cui ha origine il suo sviluppo oltre il quale si manifestano fenomeni di turbolenza e di instabilità.

Come nella convezione forzata lo spessore dello strato limite aumenta nella direzione di moto del fluido. La velocità è nulla sia sulla superficie sia sul bordo esterno dello strato limite di velocità in quanto il fluido fuori dello strato limite è praticamente fermo. Nello strato limite la velocità ha quindi un massimo. La temperatura nel fluido ha un andamento esponenziale tra la temperatura della superficie e la temperatura  $T_\infty$  raggiunta asintoticamente come mostrato in figura 8.1.

E' infine da tenere presente che, in generale, l'esistenza di un gradiente di temperatura all'interno di un fluido non è sinonimo di moto convettivo. Se si considerano due superfici orizzontali e parallele a diversa temperatura si può formare un moto convettivo solo se la superficie inferiore è più calda di quella superiore. In tal caso la presenza di un gradiente negativo di temperatura nel fluido genera un gradiente positivo di massa volumica che innesca un moto convettivo (fig. 8.2). Nel caso in cui la piastra superiore sia a temperatura superiore si ha un gradiente positivo che causa un gradiente di massa volumica negativo e la condizione del fluido è quindi stabile.

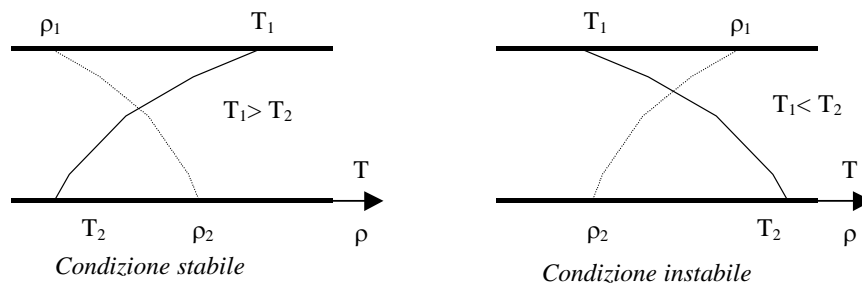


Figura 8.2 Stabilità di un fluido compreso tra due lastre parallele a diversa temperatura

La convezione naturale ha luogo ovviamente anche quando una superficie ha una temperatura inferiore alla temperatura del fluido circostante. In tal caso in movimento convettivo del fluido a contatto con la superficie è equiverso con il campo gravitazionale.

La forza responsabile del movimento di un volume di fluido di massa volumica  $\rho$  immerso in un fluido di massa volumica  $\rho_f$  è la spinta di galleggiamento; tale forza, per unità di volume, è:

$$f_g = g(\rho_f - \rho)$$

dove  $g$  è l'accelerazione del campo gravitazionale. Di conseguenza dove non c'è gravità, come in una navicella spaziale, non si può avere convezione naturale anche in presenza di aria.

Poiché nella trasmissione del calore la variabile principale è la temperatura conviene esprimere la forza di galleggiamento in funzione della temperatura del fluido. Utilizzando il coefficiente di dilatazione termica a

pressione costante  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

si ottiene, in prima approssimazione:

$$f_g = g\rho\beta\Delta T$$

## 8.2. Il coefficiente convettivo in convezione naturale

Anche nel caso della convezione naturale per la determinazione del coefficiente convettivo si ricorre all'utilizzo dell'analisi dimensionale.

Il coefficiente convettivo  $h$  dipende dalle proprietà termofisiche del fluido, viscosità  $\mu$ , massa volumica  $\rho$ , conduttività termica  $k_f$  e calore specifico  $c$ , da una grandezza geometrica caratteristica del sistema  $x$  e dalla forza di galleggiamento per unità di volume  $g\rho\beta\Delta T$ . La relazione, in forma implicita è:

$$f(h, \rho, \mu, k_f, c, \rho g \beta \Delta T, x) = 0$$

Le grandezze fondamentali sono quattro (lunghezza  $L$ , massa  $M$ , tempo  $t$  e temperatura  $T$ ) ed in base al teorema di Buckingham si ricavano tre gruppi dimensionali. Le dimensioni delle grandezze in gioco sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} h &= [M t^{-3} T^{-1}] \\ \rho &= [M L^{-3}] \\ \mu &= [M L^{-1} t^{-1}] \\ k_f &= [M L t^{-3} T^{-1}] \\ c &= [L^2 t^{-2} T^{-1}] \\ \rho g \beta \Delta T &= [M L^{-2} t^{-2}] \\ x &= [L] \end{aligned}$$

Se si individuano come dipendenti le grandezze  $h$ ,  $\rho g \beta \Delta T$  e  $c$ , si determinano i tre gruppi adimensionali che consentono di descrivere il fenomeno di scambio termico tra lastra e fluido. Imponendo l'adimensionalità dei rapporti  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  si ha:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{h}{\rho^{\alpha_1} k_f^{\alpha_2} \mu^{\alpha_3} x^{\alpha_4}} \\ \pi_2 &= \frac{\rho g \beta \Delta T}{\rho^{\beta_1} k_f^{\beta_2} \mu^{\beta_3} x^{\beta_4}} \\ \pi_3 &= \frac{c}{\rho^{\delta_1} k_f^{\delta_2} \mu^{\delta_3} x^{\delta_4}} \end{aligned}$$

Sostituendo alle grandezze originarie la loro espressione dimensionale si ottiene;

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{[M t^{-3} T^{-1}]}{[M L^{-3}]^{\alpha_1} [M L t^{-3} T^{-1}]^{\alpha_2} [M L^{-1} t^{-1}]^{\alpha_3} [L]^{\alpha_4}} = \\
&= [M]^{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} [L]^{3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4} [t]^{-3+3\alpha_2-\alpha_3} [T]^{-1+\alpha_2} \\
\pi_2 &= \frac{[M L^{-2} t^{-2}]}{[M L^{-3}]^{\beta_1} [M L t^{-3} T^{-1}]^{\beta_2} [M L^{-1} t^{-1}]^{\beta_3} [L]^{\beta_4}} = \\
&= [M]^{1-\beta_1-\beta_2-\beta_3} [L]^{-2+3\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4} [t]^{-2+3\beta_2-\beta_3} [T]^{\beta_2} \\
\pi_3 &= \frac{[L^2 t^{-2} T^{-1}]}{[M L^{-3}]^{\delta_1} [M L t^{-3} T^{-1}]^{\delta_2} [M L^{-1} t^{-1}]^{\delta_3} [L]^{\delta_4}} = \\
&= [M]^{2-\delta_1-\delta_2-\delta_3} [L]^{3\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4} [t]^{-2+3\delta_2-\delta_3} [T]^{-1+\delta_2}
\end{aligned}$$

Perché i gruppi siano adimensionali gli esponenti relativi alle singole grandezze fondamentali devono essere nulli:

$$\begin{aligned}
1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\
3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\
-3 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\
-1 + \alpha_2 &= 0 \\
1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 &= 0 \\
-2 + 3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 &= 0 \\
-2 + 3\beta_2 + \beta_3 &= 0 \\
\beta_2 &= 0 \\
2 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 &= 0 \\
3\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 &= 0 \\
-2 + 3\delta_2 + \delta_3 &= 0 \\
-1 + \delta_2 &= 0
\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di sei equazioni in sei incognite si ottengono i valori dei coefficienti incogniti:

$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = -1$	$\delta_1 = 0$
$\alpha_2 = 1$	$\beta_2 = 0$	$\delta_2 = 1$
$\alpha_3 = 0$	$\beta_3 = 2$	$\delta_3 = -1$
$\alpha_4 = -1$	$\beta_4 = -3$	$\delta_4 = 0$

I gruppi adimensionali sono quindi:

$$\pi_1 = \frac{hx}{k_f} = Nu$$

$$\pi_2 = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T x^3}{\mu^2} = Gr$$

$$\pi_3 = \frac{c\mu}{k_f} = Pr$$

Il secondo gruppo adimensionale è detto numero di Grashoff. La relazione tra gruppi adimensionali cercata per la convezione naturale sarà quindi:

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

Prima di illustrare le possibili correlazioni è interessante evidenziare il significato fisico del numero di Grashoff.

### 8.2.1. Il numero di Grashoff

Nel caso di convezione naturale non si possono prendere in considerazione le sole forze d'inerzia e viscosi, ma si deve tenere conto della spinta di galleggiamento verticale dovuta alle variazioni di massa volumica locale in seno al fluido.

Come già detto le forze inerziali, le forze viscosi e la spinta di galleggiamento sono così espresse:

$$\text{Forze d'inerzia} = \rho w \frac{\partial w}{\partial x} dx dy dz$$

$$\text{Forze viscosi} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy dz$$

$$\text{Forze di galleggiamento} = (\rho g \beta \Delta T) dx dy dz$$

Ne segue che il rapporto tra il prodotto delle forze di inerzia e forze di galleggiamento ed il quadrato delle forze viscosi è pari al numero di Grashoff:

$$\frac{(\text{Forze d'inerzia}) \cdot (\text{Forze di galleggiamento})}{(\text{Forze viscosi})^2} = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T \lambda^3}{\mu^2} = Gr$$

Il numero di Grashoff ha nel campo della convezione naturale, la stessa funzione del numero di Reynolds nella convezione forzata, essendo le forze di inerzia e le forze idrostatiche tra loro affini per quanto riguarda l'influenza sul moto dell'elemento di volume.

### 8.3. Le correlazioni per convezione naturale

Dall'analisi dimensionale del fenomeno fisico si è dedotta l'espressione

generale valida per la convezione naturale:

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

Si può notare che la forma assunta da questa funzione è in genere ben approssimata sperimentalmente da espressioni monomie del tipo:

$$Nu = a \cdot Gr^b \cdot Pr^c$$

Le costanti che caratterizzano quantitativamente questa funzione (a, b e c) sono note attraverso misure sperimentali e dipendono dalla geometria del sistema e di conseguenza le stesse costanti sono valide per ogni geometria simile.

Talvolta in tale relazione gli esponenti b e c assumono lo stesso valore e per questo la relazione si esprime come:

$$Nu = a \cdot (Gr \cdot Pr)^b$$

$$Nu = a \cdot Ra^b$$

Il prodotto  $Gr \cdot Pr$  è ancora un numero adimensionale noto come numero di Rayleigh.

Geometria	lunghezza caratteristica	Intervallo di Ra	Nu
piastra verticale di altezza L	L	$10^4 \div 10^9$	$Nu = 0.59 Ra^{1/4}$
		$10^9 \div 10^{13}$	$Nu = 0.1 Ra^{1/3}$
piastra orizzontale			
(Superficie superiore calda o superficie inferiore fredda)	Area/Perimetro	$10^4 \div 10^7$	$Nu = 0.54 Ra^{1/4}$
		$10^7 \div 10^{11}$	$Nu = 0.15 Ra^{1/3}$
(Superficie superiore fredda o superficie inferiore calda)	Area/Perimetro	$10^5 \div 10^{11}$	$Nu = 0.27 Ra^{1/4}$
Cilindro verticale di altezza L e diametro D	L	come una lastra verticale quando	$D \geq \frac{35L}{Gr^{1/4}}$
Cilindro orizzontale di diametro D	D	$10^5 \div 10^{12}$	$Nu = \left\{ 0.6 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$

Tabella 8.I Correlazioni empiriche per il numero di Nusselt in convezione naturale

<b>T</b> (°C)	<b>ρ</b> (kg/m <sup>3</sup> )	<b>c<sub>p</sub></b> (J/kgK)	<b>μ·10<sup>5</sup></b> (Ns/m <sup>2</sup> )	<b>k</b> (W/mK)	<b>Pr</b>	<b>ρ<sup>2</sup>gβ/μ<sup>2</sup>·10<sup>-8</sup></b> (m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> )
-50	1.582	1003	1.45	0.0198	0.735	5.2360
-40	1.514	1003	1.51	0.0205	0.737	4.2330
-30	1.452	1003	1.56	0.0213	0.735	3.4964
-20	1.395	1003	1.61	0.0220	0.732	2.9087
-10	1.342	1003	1.65	0.0228	0.726	2.4655
0	1.293	1004	1.70	0.0235	0.725	2.0767
10	1.247	1004	1.75	0.0243	0.724	1.7593
20	1.204	1005	1.80	0.0250	0.724	1.4984
30	1.165	1005	1.85	0.0257	0.723	1.2827
40	1.127	1006	1.90	0.0264	0.723	1.1033
50	1.093	1006	1.94	0.0271	0.719	0.9630
60	1.060	1007	1.99	0.0278	0.720	0.8352
70	1.029	1007	2.03	0.0285	0.716	0.7345
80	1.000	1008	2.08	0.0292	0.717	0.6418
90	0.972	1009	2.12	0.0299	0.715	0.5682
100	0.946	1010	2.16	0.0306	0.713	0.5045
110	0.921	1011	2.20	0.0313	0.711	0.4492
120	0.898	1012	2.24	0.0319	0.710	0.4011
130	0.876	1013	2.29	0.0326	0.712	0.3559
140	0.855	1014	2.33	0.0333	0.710	0.3194
150	0.834	1016	2.37	0.0339	0.710	0.2873
160	0.815	1018	2.41	0.0345	0.710	0.2591
170	0.797	1020	2.45	0.0352	0.710	0.2341
180	0.779	1021	2.49	0.0358	0.710	0.2120
190	0.762	1023	2.53	0.0364	0.710	0.1923
200	0.746	1025	2.57	0.0371	0.711	0.1748
210	0.731	1027	2.61	0.0377	0.712	0.1592
220	0.716	1029	2.65	0.0383	0.712	0.1452
230	0.702	1031	2.68	0.0389	0.711	0.1337
240	0.688	1033	2.72	0.0395	0.712	0.1223
250	0.675	1035	2.76	0.0401	0.713	0.1121
260	0.662	1037	2.80	0.0406	0.714	0.1029
270	0.650	1039	2.83	0.0412	0.713	0.0953
280	0.638	1040	2.86	0.0418	0.712	0.0883
290	0.627	1041	2.89	0.0424	0.710	0.0820
300	0.616	1042	2.92	0.0429	0.709	0.0762

*Tabella 8.II Proprietà termofisiche dell'aria a pressione atmosferica*



Tale gruppo adimensionale permette in generale di distinguere tra convezione naturale in regime laminare o in regime turbolento:

$$Ra \leq 10^9 \quad \text{regime laminare}$$

$$Ra \geq 10^9 \quad \text{regime turbolento}$$

L'esponente  $b$  è nella maggior parte dei casi pari a  $1/4$  per regime laminare e  $1/3$  per regime turbolento.

Alcune correlazioni sono riportate nella tabella 8.I per varie geometrie insieme con la lunghezza caratteristica, il campo di variazione del numero di Rayleigh entro i quali le relazioni sono applicabili. Nell'utilizzare queste correlazioni le proprietà termofisiche del fluido sono valutate alla temperatura di film:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Le relazioni illustrate sono valide per superfici isoterme di cui è nota la temperatura  $T_p$ .

La tabella 8.II riporta le proprietà termofisiche dell'aria a pressione atmosferica.

Per i casi in cui è imposto un flusso termico areico uniforme  $J_p$  sulla superficie le correlazioni corrispondenti fanno riferimento ad un numero di Grashoff definito come:

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta J_p x^4}{\mu^2 k}$$

dove  $k$  è la conduttività termica del fluido. In questo caso le correlazioni sono molto buone in regime laminare mentre è presente qualche scostamento in regime turbolento.

### **Esempio**

*Calcolare il coefficiente convettivo  $h$  per una parete verticale immersa in aria essendo note le temperature della parete  $T_p = 60^\circ\text{C}$ , dell'aria  $T_a = 20^\circ\text{C}$  e l'altezza della parete  $L = 0.5\text{ m}$ .*

### **Soluzione**

*Le proprietà dell'aria vanno valutate alla temperatura di film:*

$$T_f = \frac{T_p + T_a}{2} = 40^\circ\text{C}$$

*Dalla tabella con le proprietà termofisiche dell'aria a  $T = 40^\circ\text{C}$  si ricava:*

$\rho = 1.127\text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.9 \cdot 10^{-5}\text{ Ns/m}^2$ ,  $c_p = 1006\text{ J/kgK}$ ,  $k = 0.0246\text{ W/mK}$ ,  $Pr = 0.723$ ,  $\rho^2 g \beta / \mu^2 = 1.1033 \cdot 10^8\text{ m}^{-3}\text{K}^{-1}$ .

*Può essere quindi determinato il numero di Grashoff:*

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} = 1.1033 \cdot 10^8 (60 - 20) \cdot 0.5^3 = 5.5165 \cdot 10^8$$

*Il numero di Rayleigh è:*

$$Ra = Gr \cdot Pr = 3.98843 \cdot 10^8$$

Per una parete verticale (con  $Ra < 10^9$ ) è valida la correlazione:

$$Nu = 0.59 Ra^{1/4}$$

per cui si determina  $Nu = 83.38$

E' quindi possibile determinare il coefficiente convettivo

$$h = \frac{Nu \cdot k}{L} = \frac{83.38 \cdot 0.0246}{0.5} = 4.1 \left\{ W / m^2 K \right\}$$


---

#### 8.4. La convezione naturale all'interno di cavità

E' noto che per limitare la dissipazione termica di una superficie vetrata verso l'ambiente esterno si utilizzino i doppi vetri, costituiti da due lastre di vetro che racchiudono una intercapedine di aria. Infatti, il vetro ha buone proprietà isolanti ma l'effetto di isolamento in questo caso è potenziato dallo strato di aria interposta tra le due lastre. In questo modo si realizza una cavità nella quale, in molti casi, il fluido non rimane fermo.

Il moto del fluido nella cavità dipende dalla disposizione di questa rispetto al campo gravitazionale. In una cavità disposta verticalmente il fluido in contatto con la superficie più calda sale mentre quello in contatto con la superficie più fredda scende dando luogo ad un movimento rotazionale che aumenta lo scambio termico attraverso la cavità (fig. 8.3).

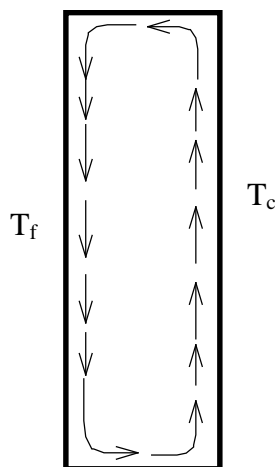


Figura 8.3 Movimento dell'aria all'interno di una intercapedine con temperature delle superfici differenti

Nel caso invece di una cavità disposta orizzontalmente si ha un movimento del fluido solo se la superficie più calda è quella inferiore. Il moto convettivo in questo caso si instaura solo per  $Ra > 1708$ . Per un numero di Rayleigh inferiore a questo limite si ha conduzione pura.

Per una cavità il numero di Rayleigh si calcola con la relazione:

$$Ra = \frac{\rho^2 g \beta (T_c - T_f) \delta^3}{\mu^2} Pr$$

dove la lunghezza caratteristica  $\delta$  è la distanza tra la superficie calda a temperatura  $T_c$  e quella fredda a temperatura  $T_f$ . Anche in questo caso le proprietà termofisiche del fluido sono valutate alla temperatura di film, media aritmetica delle temperature delle superfici.

Geometria	Fluido	H/ $\delta$	Pr	Ra	Nu
Cavità rettangolare verticale di altezza H e larghezza $\delta$	gas-liq	-	-	<2000	Nu = 1
	Gas	11-42	0.5-2	2000-2·10 <sup>5</sup>	$Nu = 0.197 Ra^{\frac{1}{4}} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-\frac{1}{9}}$
		11-42	0.5-2	2·10 <sup>5</sup> -10 <sup>7</sup>	$Nu = 0.073 Ra^{\frac{1}{3}} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-\frac{1}{9}}$
	Liquido	10-40	1-20000	10 <sup>4</sup> -10 <sup>7</sup>	$Nu = 0.042 Pr^{0.012} Ra^{\frac{1}{4}} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-0.3}$
		1-40	1-20	10 <sup>6</sup> -10 <sup>9</sup>	$Nu = 0.046 Ra^{\frac{1}{3}}$
Cavità rettangolare orizzontale di larghezza $\delta$	Gas-liq	-	-	<1708	Nu = 1
	Gas	-	0.5-2	1708-7000	$Nu = 0.059 Ra^{0.4}$
		-	0.5-2	7000-3.2·10 <sup>5</sup>	$Nu = 0.212 Ra^{\frac{1}{4}}$
		-	0.5-2	>3.2·10 <sup>5</sup>	$Nu = 0.061 Ra^{\frac{1}{3}}$
	liquido	-	1-5000	1708-6000	$Nu = 0.012 Ra^{0.6}$
		-	1-5000	6000-3.7·10 <sup>4</sup>	$Nu = 0.37 Ra^{0.2}$
		-	1-20	3.7·10 <sup>4</sup> -10 <sup>8</sup>	$Nu = 0.13 Ra^{0.3}$
		-	1-20	>10 <sup>8</sup>	$Nu = 0.057 Ra^{\frac{1}{3}}$

*Tabella 8.III Correlazioni empiriche per la convezione naturale in cavità rettangolari*

Quando  $Ra > 1708$  le forze di galleggiamento superano gli attriti viscosi ed iniziano i moti convettivi sotto forma di celle esagonali dette celle di Benard che per  $Ra > 3 \cdot 10^5$  scompaiono per la presenza di un regime di moto turbolento.

Le relazioni empiriche che si utilizzano per studiare la convezione nella

cavità sono, per il caso di superfici piane parallele, riportate in tabella 8.III.

## 8.5. Convezione mista

In molte applicazioni è presente contemporaneamente sia il campo di velocità corrispondente alla convezione naturale sia il campo di velocità imposto e quindi dovuto a convezione forzata. E' opportuno valutare l'importanza relativa dei due fenomeni convezione naturale e forzata attraverso il rapporto:

$$\frac{Gr}{Re^2}$$

Nel caso in cui  $Gr \gg Re^2$  gli effetti della convezione naturale sono prevalenti rispetto alla convezione naturale. Nel caso in cui  $Gr \approx Re^2$  si ha convezione mista con entrambi gli effetti della convezione naturale e forzata presenti. Nel caso in cui  $Gr \ll Re^2$  si ha convezione forzata.

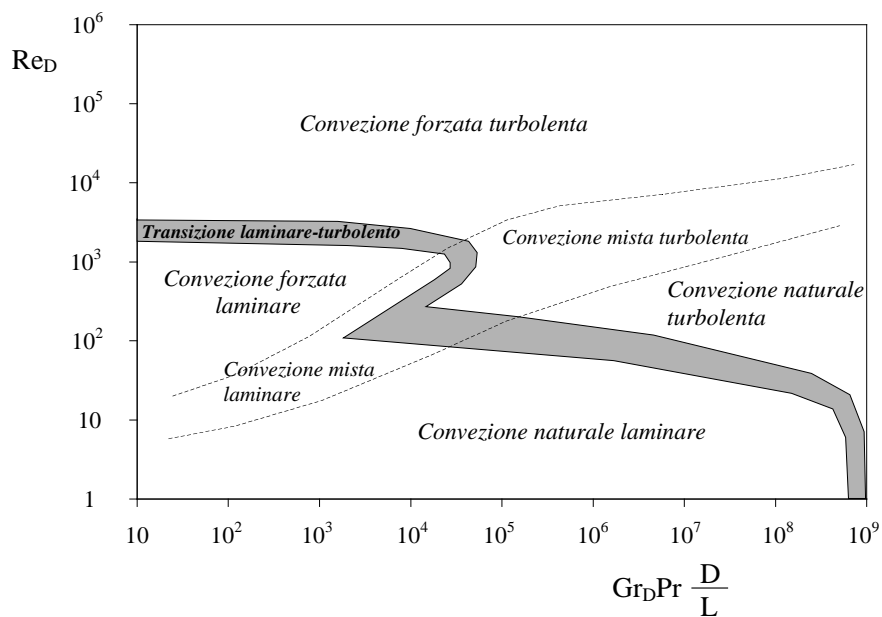


Figura 8.4 Regimi di scambio termico in condotti disposti verticalmente

Una rappresentazione qualitativa delle differenti combinazioni fluidodinamiche e convettive è riportata in figura 8.4. La figura si riferisce allo scambio termico all'interno di condotti verticali con moto ascendente e discendente. Come si può osservare la transizione tra moto laminare e turbolento avviene a numeri di  $Re_D$  inferiori a quelli corrispondenti al deflusso isoterma per la presenza di convezione naturale.

## 8.6. Esercizi

Calcolare il coefficiente convettivo  $h$  per una parete verticale immersa in acqua essendo note le temperature della parete  $T_p = 60\text{ }^\circ\text{C}$ , dell'aria  $T_a = 20\text{ }^\circ\text{C}$  e l'altezza della parete  $L = 0.5\text{ m}$ . Le proprietà termofisiche dell'acqua alla temperatura  $T = 40\text{ }^\circ\text{C}$  sono:  $\rho = 994.6\text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0.7 \cdot 10^{-3}\text{ Ns/m}^2$ ,  $c_p = 4186\text{ J/kgK}$ ,  $k = 0.628\text{ W/mK}$ ,  $\beta = 0.324 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ . **(R. 865 W/m<sup>2</sup>K)**

In un condotto cilindrico con diametro  $D = 20\text{ mm}$  e spessore  $s = 3\text{ mm}$  disposto orizzontalmente, realizzato con un materiale di conduttività termica  $k = 0.023\text{ W/mK}$ , scorre vapore condensante alla temperatura  $T = 160\text{ }^\circ\text{C}$ . Il tubo è rivestito di materiale coibente di spessore  $s = 10\text{ mm}$  avente conduttività termica  $k_{is} = 0.4\text{ kcal/hmK}$ . Si ipotizzi che il coefficiente convettivo vapore parete sia  $h_i = 1000\text{ kcal/m}^2\text{hK}$ . Il condotto è lambito esternamente da aria alla temperatura  $T_a = 25\text{ }^\circ\text{C}$ . Determinare la potenza termica dissipata per unità di lunghezza del condotto. (Si valutino le proprietà termofisiche dell'aria alla temperatura di film  $T_f = 40\text{ }^\circ\text{C}$ )

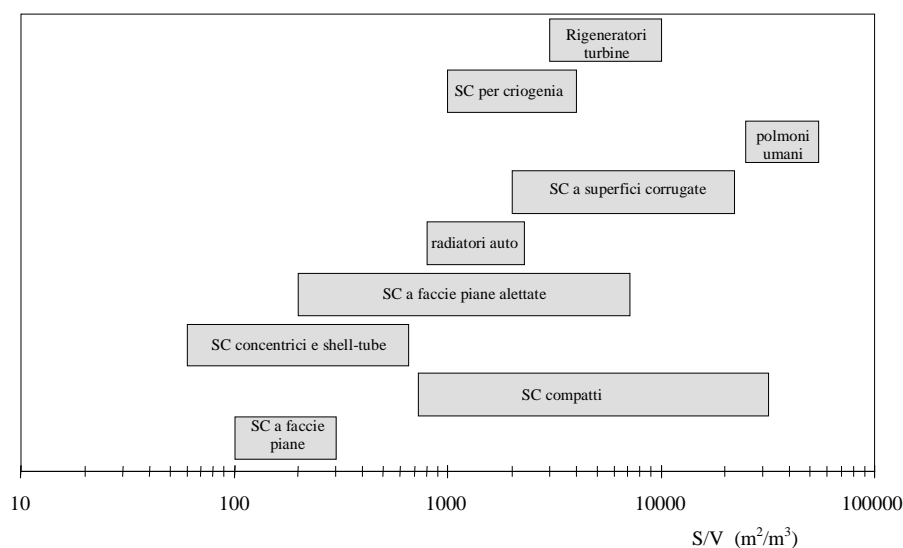
**(R. 48.4 W/m)**



## 9. Scambiatori di calore

Lo scambiatore di calore è una apparecchiatura destinata a realizzare il trasferimento di potenza termica tra due correnti fluide a diversa temperatura.

Queste apparecchiature hanno un vasto impiego in numerose applicazioni. Sono, ad esempio, componenti fondamentali di tutte le macchine termiche e sono inoltre utilizzati nel riscaldamento degli edifici e negli impianti di condizionamento e refrigerazione. La figura 9.1 illustra schematicamente i diversi campi di applicazione in relazione al rapporto S/V tra superficie di scambio e volume dello scambiatore.



*Figura 9.1 Campi di applicazione degli scambiatori di calore (SC)*

La classificazione di queste apparecchiature può essere realizzata con diversi criteri come evidenziato nella tabella 9.I.

Nel caso in cui all'interno del dispositivo si verifichi una miscelazione tra i due fluidi (come nelle torri evaporative) si ha uno scambiatore detto a contatto diretto. Il loro impiego è limitato ai casi in cui sia semplice

riottenere una separazione tra i due fluidi all'uscita dello scambiatore. Se invece i due fluidi sono separati da una parete impermeabile alla massa si ha il cosiddetto scambiatore a contatto indiretto.

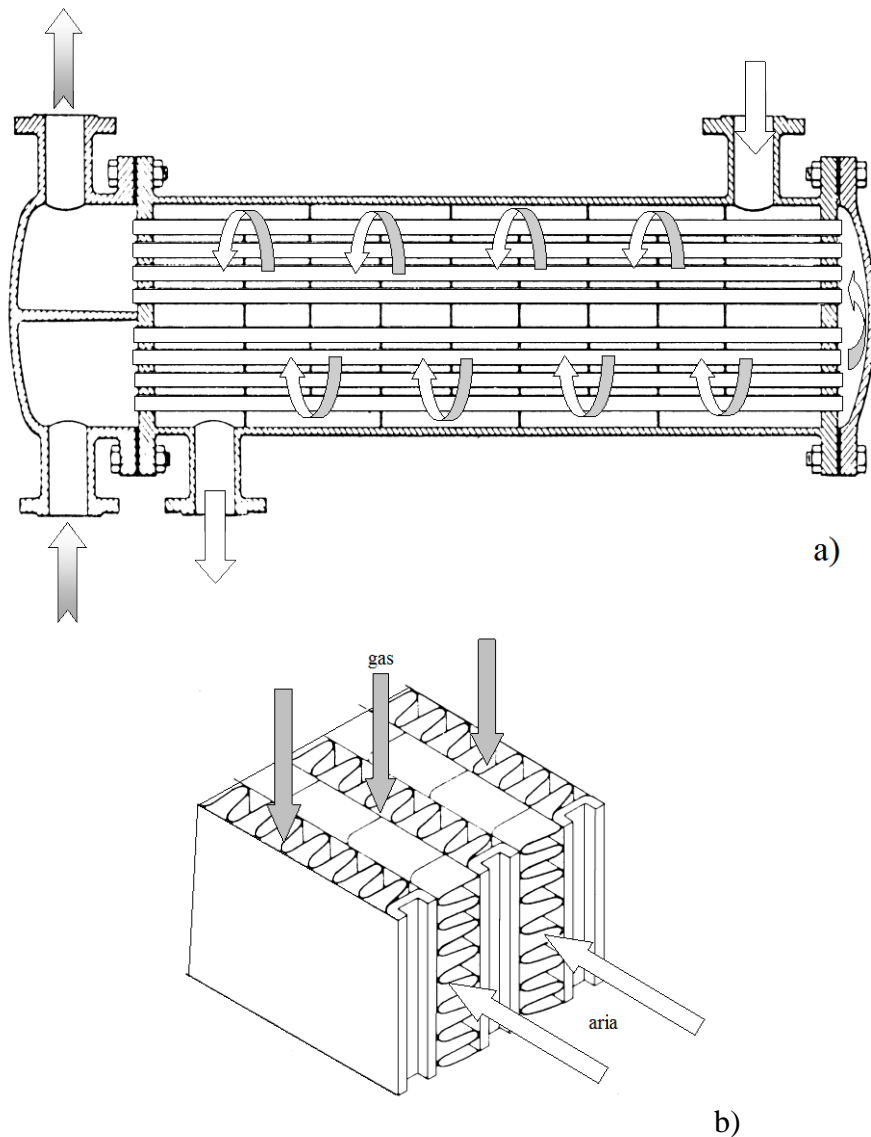
<b>Criterio di classificazione</b>	<b>Tipologia dello scambiatore</b>	
<i>Processo di scambio termico</i>	<i>A contatto diretto</i>	
	<i>A contatto indiretto</i>	<i>Trasferimento diretto</i>
		<i>Rigeneratore</i>
		<i>A letto fluido</i>
<i>Rapporto tra superficie di scambio e volume</i>	<i>Compatti</i>	
	<i>Non compatti</i>	
<i>Configurazione di moto dei fluidi</i>	<i>Passaggio singolo</i>	<i>Equicorrente</i>
		<i>Controcorrente</i>
		<i>Correnti incrociate</i>
	<i>Passaggi multipli</i>	<i>Equicorrente e corrente incrociata</i>
		<i>Controcorrente e corrente incrociata</i>
		<i>Shell and tube con flussi paralleli</i>
		<i>Shell and tube con più sezioni uscita</i>
		<i>Shell and tube con separazione dei flussi</i>
		<i>A piastre piane parallele</i>
<i>Geometria costruttiva</i>	<i>Tubulare</i>	<i>A tubi concentrici</i>
		<i>Shell and tube</i>
		<i>A spirale</i>
	<i>A piastre piane</i>	
	<i>Superfici estese</i>	<i>A piastra corrugata</i>
		<i>A tubo alettato</i>
	<i>Rigenerativo</i>	<i>A matrice fissa</i>
		<i>A matrice mobile</i>
<i>Meccanismo prevalente di scambio termico</i>	<i>Due fluidi monofase</i>	
	<i>Monofase e Bifase</i>	
	<i>Due fluidi bifase</i>	
	<i>Scambio convettivo e radiativo</i>	

*Tabella 9.1 Classificazione degli scambiatori (Shak R.K., "Classification of Heat Exchangers" in Kacac S., Bergles A.E., Mayinger F. Eds, "Heat Exchangers: Thermal Hydraulic Fundamentals and Design", Hemisphere, Washington, DC, pp. 9-46, 1981)*

E' nell'ambito di questi ultimi che è possibile una distinzione in base alle disposizioni delle due correnti fluide. Si parlerà di scambiatore in equicorrente quando i due fluidi scorrono parallelamente e nella stesso verso e scambiatore in controcorrente quando il verso di moto dei due fluidi è opposto. Altra possibile disposizione è a correnti incrociate, in cui le



direzioni di moto dei due fluidi non sono parallele.



*Figura 9.2 Scambiatori di calore: a) modello ad un solo passaggio nel mantello ed a 2 passaggi nei tubi(shell and tube); b) particolare di uno scambiatore con flussi incrociati non miscelati.*

Gli scambiatori di calore possono essere classificati anche in base al loro grado di compattezza, ossia mediante la valutazione della superficie di scambio termico per unità di volume. Si definiscono scambiatori di calore compatti quei dispositivi che hanno una superficie di scambio termico per

unità di volume maggiore di  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . In base alla tipologia costruttiva gli scambiatori di calore si possono distinguere in scambiatori a fascio tubiero (shell and tube), a tubi concentrici, a piastre piane, etc.. In figura 9.2 sono illustrati alcuni scambiatori di calore.

La progettazione di uno scambiatore di calore richiede non solo un dimensionamento termodinamico ma anche la valutazione delle perdite di carico fluidodinamiche che condizionano la scelta dei sistemi di pompaggio, la scelta della geometria e della tecnologia realizzativa e la progettazione meccanica dell'intero dispositivo. In questa trattazione si porrà attenzione alla sola progettazione termodinamica mentre si accennerà brevemente agli aspetti di valutazione delle perdite di carico.

Si prenderanno qui in considerazione esclusivamente scambiatori di calore a contatto indiretto.

### 9.1. Il coefficiente globale di scambio termico

Negli scambiatori a contatto indiretto il processo di scambio termico avviene per convezione nei fluidi e per conduzione nella parete solida di separazione. Con il termine di coefficiente globale di scambio termico  $U$  si usa indicare la conduttanza specifica totale, espressa in unità SI in  $[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$ . Essa è comprensiva del termine di trasporto conduttivo attraverso la parete e dei due termini di trasporto convettivo tra fluidi e parete. Tale coefficiente è specifico alla superficie di scambio e la sua valutazione deve tenere presente la geometria della parete di separazione tra le due correnti fluide che nel caso più complesso può essere aleatoria sulle due superfici come mostrato in figura 9.3.

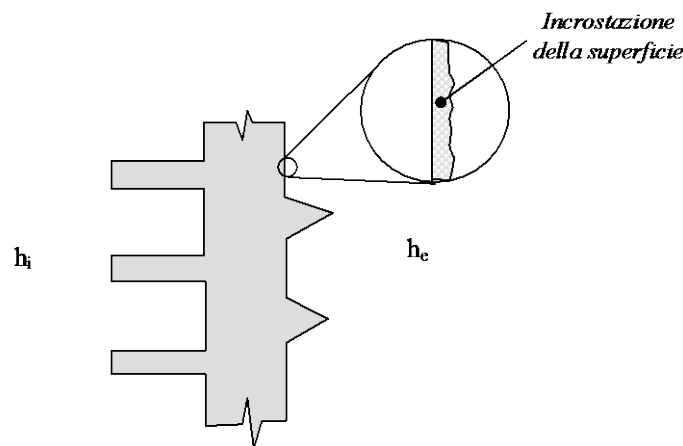


Figura 9.3

*Schematica rappresentazione della parete di separazione delle correnti fluide di uno scambiatore di calore.*

Oltre alla resistenza conduttiva della parete sono spesso presenti resistenze di sporcamento aggiuntive (resistenze di fouling) dovute alle incrostazioni delle superfici. Tali resistenze aggiuntive dipendono anche dagli intervalli tra gli interventi di manutenzione dello scambiatore di calore e possono far variare in modo significativo le prestazioni del dispositivo. Quando lo scambiatore è nuovo tale resistenza è nulla.

Valori indicativi delle resistenze di sporcamento sono riportati in tabella 9.II.

<b>Fluido</b>	<b>Resistenza di fouling <math>R_f</math> (m<sup>2</sup>K/W)</b>
Acqua di mare (T < 50 °C)	0.0001
Acqua di mare (T > 50 °C)	0.0002
Acqua di fiume (T < 50 °C)	0.0002-0.001
Olio	0.0009
Fluidi frigoriferi	0.0002
Vapore	0.0001

*Tabella 9.II Valori indicativi delle resistenze di sporcamento delle superfici dello scambiatore*

Facendo riferimento al caso più generale di una superficie di separazione con alettature il coefficiente globale di scambio termico si determina con la relazione:

$$\frac{1}{US} = \frac{1}{\varepsilon_{ali} h_i S_i} + \frac{R_{fi}}{\varepsilon_{ali} S_i} + R_w + \frac{R_{fe}}{\varepsilon_{ale} S_e} + \frac{1}{\varepsilon_{ale} h_e S_e}$$

In queste espressioni  $S$ ,  $S_i$  ed  $S_e$  sono rispettivamente la superficie nominale dello scambiatore, la superficie totale alettata  $i$  e la superficie totale alettata  $e$ . Le grandezze  $\varepsilon_{ali}$  ed  $\varepsilon_{ale}$  sono le efficienze delle alettature  $i$  ed  $e$  come indicato in § 3.6. I termini  $R_{fi}$ ,  $R_{fe}$  sono rispettivamente le resistenze di sporcamento del lato  $i$  e del lato  $e$  mentre  $R_w$  è la resistenza conduttiva della parete solida.

<b>Fluido – Fluido</b>	<b>Coefficiente globale di scambio termico <math>U</math> (W/ m<sup>2</sup>K)</b>
Acqua – Acqua	850 – 1700
Acqua – Gas	60 – 170
Acqua – Olio	110 – 350
Vapore condensante – Acqua in tubi	1000 – 6000
Acqua – Freon condensante	450 – 850
Olio – Olio	170 – 300

*Tabella 9.III Valori rappresentativi del coefficiente globale di scambio termico*

Valori rappresentativi del coefficiente globale di scambio termico sono riportati in tabella 9.III.

L'analisi termodinamica di uno scambiatore di calore può essere condotta in modo diverso per soddisfare esigenze specifiche quali la progettazione di uno scambiatore o l'idoneità di uno scambiatore esistente a fornire le prestazioni desiderate.

Nel primo caso la progettazione di uno scambiatore di calore mira a determinare la superficie di scambio necessaria per trasferire una data potenza termica tra due fluidi di cui sono note le capacità termiche di portata e le temperature di ingresso.

Nel secondo caso la verifica dell'idoneità di un dispositivo esistente è fatta attraverso la valutazione della potenza termica trasferibile conoscendo le caratteristiche, di scambio e geometriche, dello scambiatore, le capacità termiche di portata e le temperature di ingresso dei due fluidi.

Il primo problema si risolve con il metodo della differenza di temperatura media logaritmica, mentre per la seconda classe di problemi si adotta il metodo dell'efficienza. In questa trattazione verranno illustrati ambedue gli approcci.

## **9.2. Il metodo della differenza di temperatura media logaritmica**

Nello scambiatore di calore la potenza termica scambiata risulta funzione delle caratteristiche geometriche dello scambiatore, nonché delle temperature e delle caratteristiche termofisiche dei fluidi. La teoria elementare dello scambiatore stabilisce relazioni tra questi parametri, nel caso di fluidi a correnti parallele, separate da una superficie di scambio. Nella trattazione che segue, detta trattazione elementare, si adotterà la convenzione di indicare con  $c$  il fluido caldo e con  $f$  il fluido freddo. La coordinata  $x$  rappresenta la coordinata corrente della superficie di scambio dello scambiatore.

Nella trattazione elementare valgono alcune ipotesi semplificative che si sintetizzano in:

- il sistema opera in regime stazionario;
- il dispositivo è adiabatico rispetto all'ambiente, ovvero il fluido caldo cede calore al solo fluido freddo;
- il dispositivo non scambia potenza meccanica con l'ambiente;
- sono trascurabili le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale tra due generiche sezioni per i due flussi;
- il coefficiente globale di scambio termico è costante;
- i fluidi hanno proprietà termofisiche costanti;
- i fluidi sono o gas perfetto o liquido incomprimibile ideale che scorre nel

dispositivo a pressione costante;

- la conduttività termica assiale lungo lo scambiatore è nulla.

In realtà il calore specifico dei fluidi può cambiare al variare della temperatura del fluido ed il coefficiente globale di scambio termico può cambiare al variare delle proprietà termofisiche del fluido e delle condizioni fluidodinamiche ma, in molte applicazioni, tali variazioni non sono significative.

### 9.2.1. Scambiatore in equicorrente

Si considererà lo scambiatore in equicorrente schematizzato in figura 9.4.

Applicando l'equazione di bilancio energetico al volume di controllo infinitesimo con le ipotesi semplificative illustrate, per ogni singola corrente fluida, ed indicando con  $d\dot{Q}$ , la potenza termica infinitesima ceduta dal fluido caldo al fluido freddo, si ottiene:

$$\dot{m}_c [h_x - h_{x+dx}]_c - d\dot{Q} = 0$$

$$\dot{m}_f [h_x - h_{x+dx}]_f + d\dot{Q} = 0$$

La potenza termica scambiata è esprimibile in funzione della differenza di temperatura tra i due fluidi:

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f)dx$$

Con l'ipotesi che il fluido sia un gas perfetto o un fluido incomprimibile ideale che si muove nel condotto a pressione costante (e quindi in assenza di perdite di carico), la variazione di entalpia tra le sezioni di ingresso e di uscita può essere espressa in funzione della temperatura di miscelamento adiabatico delle sezioni, per cui l'equazione di bilancio energetico diventa:

$$\dot{m}_c c_{pc} [T_x - T_{x+dx}]_c - d\dot{Q} = 0$$

$$\dot{m}_f c_{pf} [T_x - T_{x+dx}]_f + d\dot{Q} = 0$$

ove  $T$  è la temperatura di miscelamento adiabatico del volume di controllo analizzato.

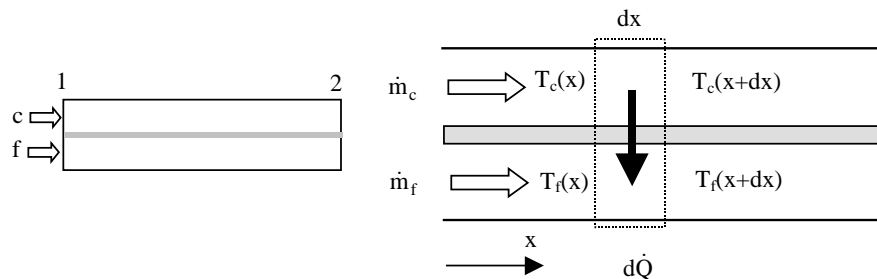


Figura 9.4 Schema di uno scambiatore in equicorrente

Sviluppando in serie di Taylor le temperature dei fluidi ed introducendo le capacità termica di portata  $C_c$  e  $C_f$ , espressa in unità del SI in [W/K], si ottiene:

$$T_x - T_{x+dx} = T_x - \left( T_x + \frac{dT}{dx} dx + o(dx^2) \right)$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{pc}$$

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e sostituendo si ottiene il sistema di equazioni:

$$C_c dT_c + d\dot{Q} = 0$$

$$C_f dT_f - d\dot{Q} = 0$$

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f) dx$$

Si indicherà ora con i pedici 1 e 2 le sezioni estreme (iniziale e finale) dello scambiatore. Attraverso la sezione iniziale (1) si ha, per lo scambiatore in equicorrente, l'ingresso dei due fluidi come illustrato in figura 9.4.

Per determinare sia l'andamento delle temperature di miscelamento adiabatico  $T_c(x)$  e  $T_f(x)$ , sia la superficie dello scambiatore necessaria per trasferire una determinata potenza termica è necessario risolvere il sistema di equazioni differenziali del primo ordine con la seguente condizione al contorno:

$$\begin{cases} x = 0 \\ T_c = T_{c1} \\ T_f = T_{f1} \\ \dot{Q} = 0 \end{cases}$$

L'integrazione delle prime due equazioni differenziali consentono di ricavare le prime due equazioni fondamentali degli scambiatori di calore:

$$\dot{Q} = C_c (T_{c1} - T_{c2})$$

$$\dot{Q} = C_f (T_{f2} - T_{f1})$$

In queste relazioni si è indicato con  $T_{c1}$ ,  $T_{f1}$  le temperature rispettivamente del fluido caldo e del fluido freddo nella sezione iniziale (ingresso) dello scambiatore, e con  $T_{c2}$  e  $T_{f2}$  le temperature rispettivamente del fluido caldo e del fluido freddo nella sezione finale (di uscita) dello scambiatore.

Per l'integrazione della terza equazione differenziale si risolvono le prime due equazioni differenziali rispetto a  $dT_c$  e  $dT_f$  ottenendo:

$$dT_c = -\frac{d\dot{Q}}{C_c} \quad dT_f = +\frac{d\dot{Q}}{C_f}$$

Sottraendo alla prima equazione la seconda ed osservando che:

$$dT_c - dT_f = d(T_c - T_f)$$

si ha:

$$d(T_c - T_f) = -d\dot{Q} \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

consentendo di ottenere il sistema di equazioni differenziali:

$$d(T_c - T_f) = -M d\dot{Q}$$

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f) dx$$

$$M = \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

Sostituendo nella prima equazione differenziale a  $d\dot{Q}$  l'espressione che deriva dalla potenza termica scambiata si ha:

$$d(T_c - T_f) = -MU(T_c - T_f) dx$$

Questa relazione integrata, tra la sezione iniziale 1 e la sezione finale 2, consente di ricavare:

$$\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1} = -MUS$$

Sostituendo alle capacità termiche di portata le espressioni:

$$\frac{1}{C_c} = \frac{1}{\dot{Q}} (T_{c1} - T_{c2})$$

$$\frac{1}{C_f} = \frac{1}{\dot{Q}} (T_{f2} - T_{f1})$$

e risolvendo rispetto alla potenza termica di portata si ottiene la relazione:

$$\dot{Q} = US \frac{[(T_c - T_f)_2 - (T_c - T_f)_1]}{\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1}}$$

che rappresenta la terza equazione fondamentale degli scambiatori di calore e che può essere riscritta come:

$$\dot{Q} = US \Delta T_{ml}$$

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$

$$\Delta T_1 = (T_c - T_f)_1 \quad \Delta T_2 = (T_c - T_f)_2$$

ove  $\Delta T_{ml}$  è chiamata differenza di temperatura media logaritmica.

L'andamento delle temperature nello scambiatore al variare della

superficie di scambio si ottiene dalle prime due relazioni fondamentali valutate nella generica sezione x:

$$T_c(x) = T_{c1} - \frac{\dot{Q}_x}{C_c}$$

$$T_f(x) = T_{f1} + \frac{\dot{Q}_x}{C_f}$$

Essendo:

$$\dot{Q}_x = -\frac{1}{M} [(T_c - T_f)_x - \Delta T_1]$$

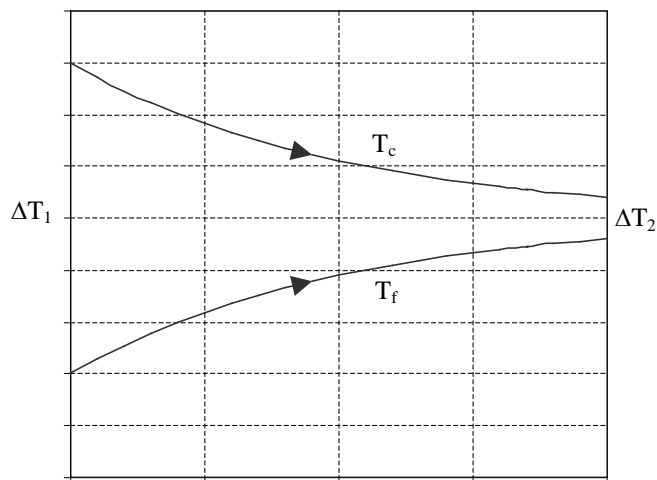
$$\ln \frac{\Delta T_1}{(T_c - T_f)_x} = MU_x$$

si ricavano le distribuzioni di temperatura:

$$T_c(x) = T_{c1} - \frac{\Delta T_1}{MC_c} (1 - e^{-UMx})$$

$$T_f(x) = T_{f1} + \frac{\Delta T_1}{MC_f} (1 - e^{-UMx})$$

Temperatura



Superficie di scambio

Figura 9.5 Distribuzione di temperatura in uno scambiatore in equicorrente

Per individuare l'andamento delle temperature è sufficiente analizzare le derivate prime e seconde di queste funzioni:



$$\frac{dT_c}{dx} < 0 \quad \frac{d^2T_c}{dx^2} > 0$$

$$\frac{dT_f}{dx} > 0 \quad \frac{d^2T_f}{dx^2} < 0$$

Per cui si osserva che la temperatura del fluido caldo è decrescente ed ha un andamento con concavità rivolta verso l'alto, mentre la temperatura del fluido freddo è crescente ed ha andamento con concavità rivolta verso il basso come mostrato qualitativamente in fig. 9.5.

Se si mantengono costanti il coefficiente globale di scambio termico, le temperature dei fluidi nella sezione di ingresso e le capacità termiche di portata dei due fluidi e si immagina di estendere all'infinito la superficie di scambio, le temperature in uscita tendono ad un valore comune.

### **Esempio**

Uno scambiatore di calore a condotti concentrici in equicorrente è utilizzato per raffreddare olio di lubrificazione ( $c_{po} = 2.1 \text{ kJ/kgK}$ ) di un motore. Come fluido di raffreddamento si utilizza acqua ( $c_{pa} = 4.1 \text{ kJ/kgK}$ ) che scorre con una portata  $G_a = 0.2 \text{ kg/s}$  all'interno del condotto centrale di diametro  $D_i = 25 \text{ mm}$  mentre la portata di olio attraverso il condotto anulare è  $G_o = 0.1 \text{ kg/s}$ . L'olio e l'acqua entrano nello scambiatore con temperature rispettivamente  $T_{oi} = 100^\circ\text{C}$  e  $T_{ai} = 20^\circ\text{C}$ . Determinare quanto deve essere lungo lo scambiatore affinché l'olio abbia una temperatura in uscita pari a  $60^\circ\text{C}$ . Sono noti: il coefficiente globale di scambio termico  $U_i = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

### **Soluzione**

La potenza termica scambiata si ottiene con il bilancio energetico per l'olio:

$$\dot{Q}^{\rightarrow} = G_o (h_{oi} - h_{ou})$$

$$\dot{Q}^{\rightarrow} = G_o c_{po} (T_{oi} - T_{ou}) = 0.1 \cdot 2100 \cdot (100 - 60) = 8400 \text{ W}$$

Nota la potenza termica è possibile determinare la temperatura dell'acqua all'uscita dallo scambiatore con il bilancio energetico per l'acqua:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = G_a (h_{au} - h_{ai})$$

$$\dot{Q}^{\rightarrow} = G_a c_{pa} (T_{au} - T_{ai})$$

$$T_{au} = T_{ai} + \frac{\dot{Q}^{\rightarrow}}{G_a c_{pa}} = 20 + \frac{8400}{0.2 \cdot 4100} = 30.24^\circ\text{C}$$

La differenza di temperatura media logaritmica per lo scambiatore in equicorrente è:

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$

$$\Delta T_1 = (T_{oi} - T_{ai}) = 100 - 20 = 80^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_2 = (T_{ou} - T_{au}) = 60 - 30.24 = 29.76^\circ\text{C}$$

per cui si ricava:

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \frac{80 - 29.76}{\ln \frac{80}{29.76}} = 50.8 \{^{\circ}\text{C}\}$$

Si può quindi determinare la superficie di scambio e quindi la lunghezza dello scambiatore:

$$\dot{Q} = U_i \pi D_i L \Delta T_{ml}$$

$$L = \frac{\dot{Q}}{U_i \pi D_i \Delta T_{ml}} = \frac{8400}{100 \cdot \pi \cdot 0.025 \cdot 50.8} = 21 \{\text{m}\}$$

### 9.2.2. Scambiatore in controcorrente

Si considererà ora lo scambiatore in controcorrente. Si indicherà con i pedici 1 e 2 rispettivamente le sezioni iniziale e finale dello scambiatore. Attraverso la sezione iniziale (1) si assumerà, per lo scambiatore in controcorrente, l'ingresso del fluido freddo e l'uscita del fluido caldo mentre attraverso la sezione finale (2) si ha, conseguentemente, l'uscita del fluido freddo e l'entrata del fluido caldo come illustrato in figura 9.6.

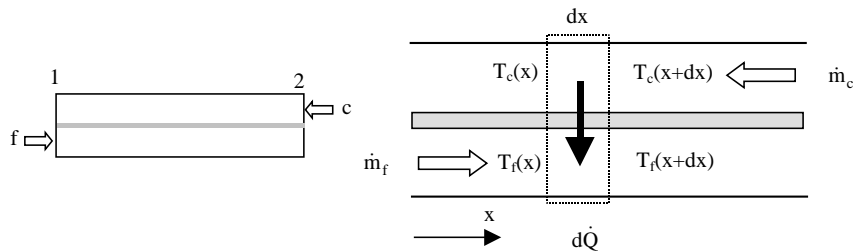


Figura 9.6 Schema di uno scambiatore in controcorrente

Applicando l'equazione di bilancio energetico con le ipotesi semplificative illustrate ad ogni singola corrente fluida, ed indicando con  $d\dot{Q}$ , la potenza termica infinitesima ceduta dal fluido caldo al fluido freddo, si ottiene:

$$\dot{m}_c [h_{x+dx} - h_x]_c - d\dot{Q} = 0$$

$$\dot{m}_f [h_x - h_{x+dx}]_f + d\dot{Q} = 0$$

La potenza termica scambiata è esprimibile in funzione della differenza di temperatura tra i due fluidi:

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f)dx$$

Con l'ipotesi che il fluido sia un gas perfetto o un fluido incomprimibile ideale che si muove nel condotto a pressione costante (e quindi in assenza di perdite di carico), la variazione di entalpia tra le sezioni di ingresso e di uscita può essere espressa in funzione della temperatura di miscelamento

adiabatico delle sezioni e l'equazione di bilancio energetico diventa:

$$\dot{m}_c c_{pc} [T_{x+dx} - T_x]_c - d\dot{Q} = 0$$

$$\dot{m}_f c_{pf} [T_x - T_{x+dx}]_f + d\dot{Q} = 0$$

ove  $T$  è la temperatura di miscelamento adiabatico relativa al volume di controllo analizzato.

Sviluppando in serie di Taylor le temperature dei fluidi ed introducendo le capacità termica di portata  $C_c$  e  $C_f$ :

$$T_x - T_{x+dx} = T_x - \left( T_x + \frac{dT}{dx} dx + o(dx^2) \right)$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{pc}$$

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e sostituendo si ottiene il sistema di equazioni:

$$C_c dT_c - d\dot{Q} = 0$$

$$C_f dT_f - d\dot{Q} = 0$$

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f) dx$$

Per determinare sia l'andamento della temperatura di miscelamento adiabatico, sia la superficie dello scambiatore necessaria per scambiare una determinata potenza termica è necessario risolvere il sistema di equazioni differenziali del primo ordine con la condizione al contorno:

$$\begin{cases} x = 0 \\ T_c = T_{c1} \\ T_f = T_{f1} \\ \dot{Q} = 0 \end{cases}$$

L'integrazione delle prime due equazioni differenziali consentono di ricavare le prime due equazioni fondamentali degli scambiatori di calore:

$$\dot{Q} = C_c (T_{c2} - T_{c1})$$

$$\dot{Q} = C_f (T_{f1} - T_{f2})$$

In queste relazioni si è indicato con  $T_{c1}$ ,  $T_{f1}$  le temperature rispettivamente del fluido caldo e del fluido freddo nella sezione iniziale (1) dello scambiatore, e con  $T_{c2}$  e  $T_{f2}$  le temperature rispettivamente del fluido caldo e del fluido freddo nella sezione finale (2) dello scambiatore. Si osservi che la temperatura del fluido caldo nella sezione iniziale dello scambiatore corrisponde, per la scelta che è stata fatta del sistema di coordinate, alla temperatura minima della corrente calda, ovvero la temperatura di uscita dallo scambiatore.

L'integrazione della terza equazione differenziale richiede lo svolgimento di alcuni passaggi. Risolvendo infatti le prime due equazioni differenziali rispetto a  $dT_c$  e  $dT_f$  si ha:

$$dT_c = + \frac{d\dot{Q}}{C_c}$$

$$dT_f = + \frac{d\dot{Q}}{C_f}$$

Sottraendo alla prima equazione la seconda ed osservando che:

$$dT_c - dT_f = d(T_c - T_f)$$

si ha:

$$d(T_c - T_f) = -d\dot{Q} \left( \frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_c} \right)$$

consentendo di ottenere il sistema di equazioni differenziali:

$$d(T_c - T_f) = -Nd\dot{Q}$$

$$d\dot{Q} = U(T_c - T_f)dx$$

$$N = \left( \frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_c} \right)$$

Il coefficiente  $N$  è un coefficiente che può assumere valore positivo, negativo o nullo.

Sostituendo nella prima equazione differenziale a  $d\dot{Q}$  l'espressione che deriva dalla potenza termica scambiata si ha:

$$d(T_c - T_f) = -NU(T_c - T_f)dx$$

che integrata, tra la sezione iniziale 1 e la sezione finale 2, consente di ricavare:

$$\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1} = -NUS$$

Sostituendo alle capacità termiche di portata le espressioni:

$$\frac{1}{C_c} = \frac{1}{\dot{Q}} (T_{c2} - T_{c1})$$

$$\frac{1}{C_f} = \frac{1}{\dot{Q}} (T_{f2} - T_{f1})$$

e risolvendo rispetto alla potenza termica di portata si ottiene la relazione:

$$\dot{Q} = US \frac{[(T_c - T_f)_2 - (T_c - T_f)_1]}{\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1}}$$

che può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= US\Delta T_{ml} \\ \Delta T_{ml} &= \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \\ \Delta T_1 &= (T_c - T_f)_1 \quad \Delta T_2 = (T_c - T_f)_2\end{aligned}$$

ove  $\Delta T_{ml}$  è ancora la differenza di temperatura media logaritmica. L'espressione della differenza di temperatura media logaritmica risulta, per lo scambiatore in controcorrente, formalmente uguale a quello per l'equicorrente.

L'andamento delle temperature nello scambiatore al variare della superficie di scambio si ottiene dalle relazioni:

$$\begin{aligned}T_c(x) &= T_{c1} + \frac{\dot{Q}_x}{C_c} \\ T_f(x) &= T_{f1} + \frac{\dot{Q}_x}{C_f}\end{aligned}$$

Essendo infine:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_x &= -\frac{1}{N}[(T_c - T_f)_x - \Delta T_1] \\ \ln \frac{\Delta T_1}{(T_c - T_f)_x} &= NUx\end{aligned}$$

si ricavano le distribuzioni di temperatura  $T_c(x)$  e  $T_f(x)$ :

$$\begin{aligned}T_c(x) &= T_{c1} + \frac{\Delta T_1}{NC_c}(1 - e^{-UNx}) \\ T_f(x) &= T_{f1} + \frac{\Delta T_1}{NC_f}(1 - e^{-UNx})\end{aligned}$$

Per ricavare l'andamento delle temperature è sufficiente analizzare le derivate prime e seconde di queste funzioni e si ricava che tali derivate dipendono dal segno del coefficiente N. In particolare si ha:

$$\begin{array}{ccccc} N > 0 & \frac{dT_c}{dx} > 0 & \frac{d^2T_c}{dx^2} < 0 & \frac{dT_f}{dx} > 0 & \frac{d^2T_f}{dx^2} < 0 \\ N < 0 & \frac{dT_c}{dx} > 0 & \frac{d^2T_c}{dx^2} > 0 & \frac{dT_f}{dx} > 0 & \frac{d^2T_f}{dx^2} > 0 \end{array}$$

Per cui si osserva che le temperature dei fluidi caldo e freddo è crescente con la coordinata x. La concavità dipende dal valore del coefficiente N. Quando il fluido caldo ha capacità termica di portata maggiore di quella del

fluido freddo ( $N > 0$ ) la concavità delle funzioni che danno la distribuzione di temperatura è rivolta verso il basso. Viceversa quando il fluido caldo ha capacità termica di portata minore di quella del fluido freddo ( $N < 0$ ) la concavità delle funzioni che danno la distribuzione di temperatura è rivolta verso l'alto come mostrato qualitativamente in fig. 9.7.

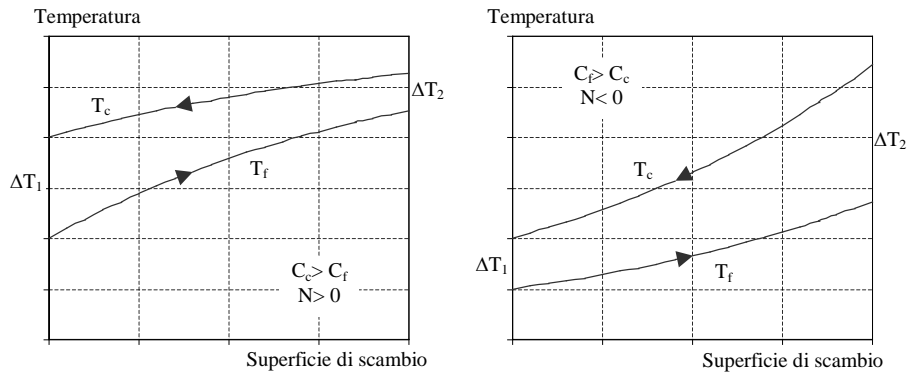


Figura 9.7 Distribuzione di temperatura per uno scambiatore in controcorrente

Il confronto tra le distribuzioni di temperatura nello scambiatore in equicorrente (fig. 9.5) ed in quello in controcorrente (fig. 9.7) mette in evidenza che la differenza locale delle temperature di miscelamento adiabatico sono più uniformi nello scambiatore in controcorrente rispetto a quello in equicorrente. Per questa ragione, lo scambiatore in controcorrente è termodinamicamente più efficiente, e quindi comporta una minore entropia generata per irreversibilità, rispetto ad un equivalente scambiatore in equicorrente (a parità di temperature di ingresso dei fluidi).

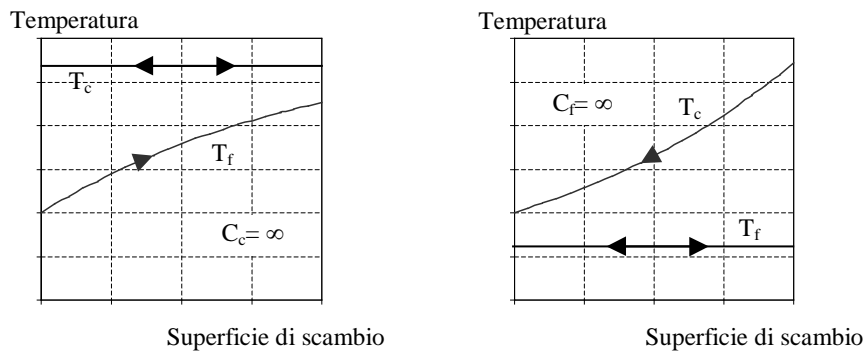


Figura 9.8 Distribuzione di temperatura per condensatore ed evaporatore

Quando uno dei due fluidi nello scambiatore di calore è in transizione di

fase (condensazione o evaporazione) la sua temperatura rimane costante ed il concetto di differenza di temperatura media logaritmica è ancora applicabile come era già emerso nel § 7.7. La distribuzione di temperatura che si ha è riportata in figura 9.8 e si può notare che è indipendente dall'avere flussi in equicorrente o in controcorrente.

Nel caso infine di uno scambiatore in controcorrente con due correnti fluide di eguale capacità termica di portata la differenza di temperatura locale non varia e la distribuzione di temperatura in funzione della superficie di scambio è lineare come mostrato in figura 9.9.

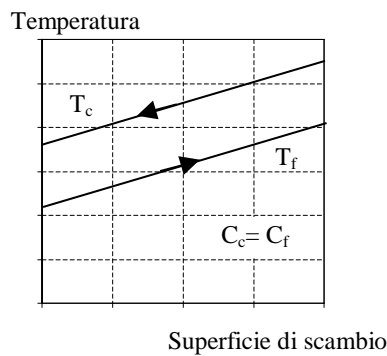


Figura 9.9 Distribuzione di temperatura per scambiatore in controcorrente con capacità termiche di portata uguali tra loro

#### **Esempio**

Si consideri l'esempio riportato nel § 9.2.1 con uno scambiatore in controcorrente. Determinare quanto deve essere lungo lo scambiatore affinché l'olio abbia una temperatura in uscita pari a 60 °C.

#### **Soluzione**

La potenza termica scambiata e la temperature di uscita dell'acqua non sono variate ottenendosi con lo stesso bilancio energetico.

La differenza di temperatura media logaritmica per lo scambiatore in controcorrente è:

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$

$$\Delta T_1 = (T_{oi} - T_{au}) = 100 - 30.24 = 69.76 \text{ } \{^{\circ}\text{C}\} \quad \Delta T_2 = (T_{ou} - T_{ai}) = 60 - 20 = 40 \text{ } \{^{\circ}\text{C}\}$$

per cui si ricava:

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_2 - \Delta T_1]}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \frac{69.76 - 40}{\ln \frac{69.76}{40}} = 53.5 \text{ } \{^{\circ}\text{C}\}$$

Si può quindi determinare la superficie di scambio e quindi la lunghezza dello scambiatore:

$$\dot{Q} = U_i \pi D_i L \Delta T_{ml}$$

$$L = \frac{\dot{Q}}{U_i \pi D_i \Delta T_{ml}} = \frac{8400}{100 \cdot \pi \cdot 0.025 \cdot 53.5} = 20 \text{ {m}}$$

*Come si può osservare, a parità di condizioni, lo scambiatore in controcorrente richiede una minore superficie di scambio. Di conseguenza, a parità di superficie di scambio, si ha una maggiore potenza termica scambiata con la soluzione in controcorrente.*

---

### 9.3. Scambiatori di calore a passaggi multipli

Nel caso di scambiatori che non siano classificabili come scambiatori in equicorrente o controcorrente la trattazione elementare illustrata non è più direttamente applicabile. In questi scambiatori la distribuzione di temperatura non è più monodimensionale e una corretta valutazione della temperatura locale nello scambiatore richiede l'impiego di analisi molto complesse ed il ricorso a codici di calcolo termofluidodinamico.

Alcuni studi hanno comunque messo in evidenza che l'analisi di un generico scambiatore può ancora essere effettuata con l'impiego della differenza di temperatura media logaritmica purché questa sia opportunamente corretta.

La correzione viene generalmente effettuata mediante opportuno fattore di correzione F, nella cui determinazione vengono impiegate le temperature dei due fluidi vettori, in ingresso (1) ed in uscita (2), e le capacità termiche di portata dei due fluidi che percorrono rispettivamente i tubi (t) ed il mantello (T).

La relazione che fornisce la potenza termica complessivamente scambiata è:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= US \cdot F \Delta T_{ml} \\ \Delta T_{ml} &= \frac{[\Delta T_1 - \Delta T_2]}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} \\ \Delta T_1 &= (T_1 - t_1) \quad \Delta T_2 = (T_2 - t_2) \end{aligned}$$

Il fattore correttivo è riportato in diagrammi e per gli scambiatori maggiormente diffusi è illustrato in fig. 9.10a-b.

In questi diagrammi compaiono due grandezze adimensionali P ed R definite rispettivamente come:

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \quad R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$$

Dal bilancio energetico si può dimostrare che la grandezza R è anche il rapporto tra le capacità termiche di portata dei fluidi t e T.



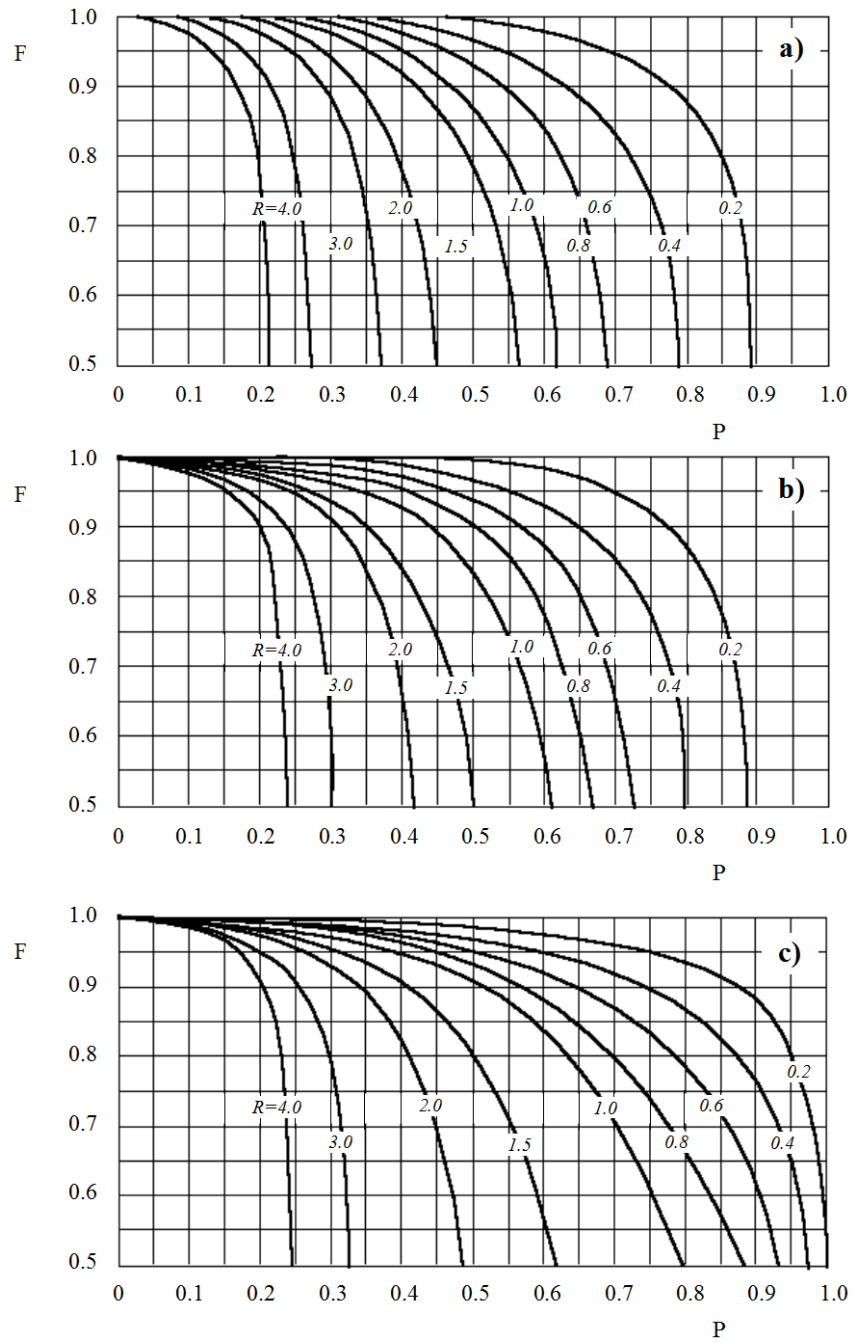


Figura 9.10a Fattore correttivo  $F$  per i più comuni scambiatori. Scambiatore a correnti incrociate con: a) entrambi i fluidi non miscelati; b) con un fluido miscelato; c) con i due fluidi miscelati.

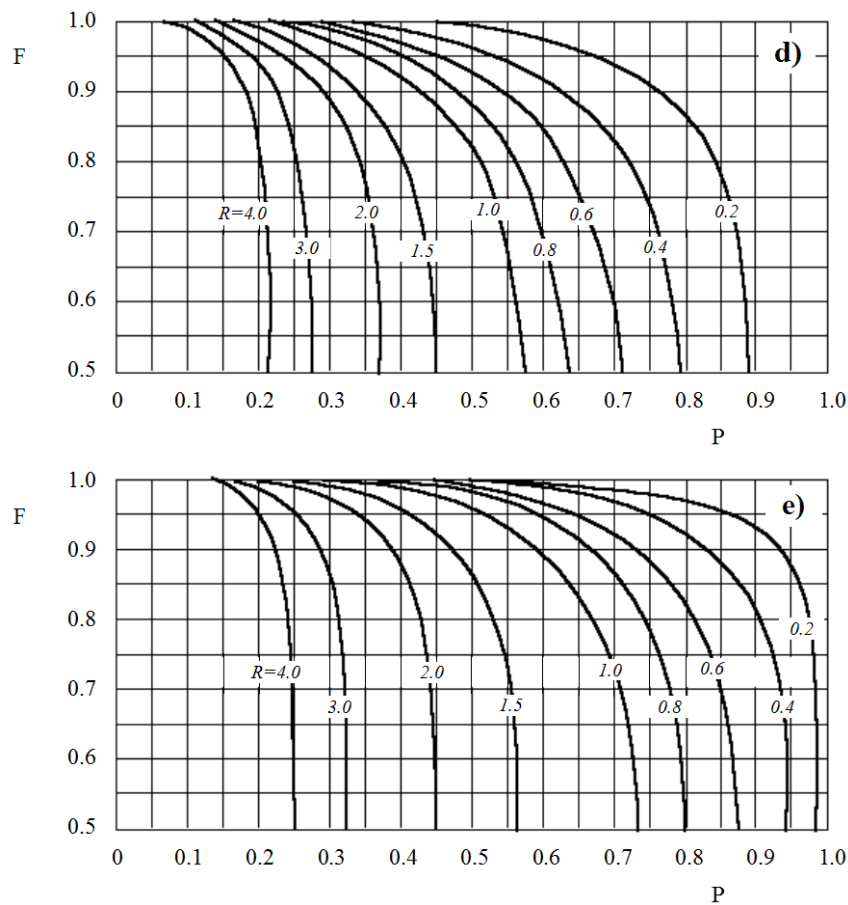


Figura 9.10b Fattore correttivo  $F$  per i più comuni scambiatori: d) scambiatore ad un solo passaggio nel mantello ed a 2 o più passaggi nei tubi; e) scambiatore a due passaggi nel mantello ed a 4 o più passaggi nei tubi

#### 9.4. Efficienza dello scambiatore di calore

Il parametro che definisce il grado di bontà di uno scambiatore di calore è l'efficienza  $\varepsilon$ , definita come il rapporto tra la potenza effettivamente scambiata e la potenza teorica massima scambiabile da uno scambiatore in controcorrente di superficie infinita:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\infty}}$$

Osservando le distribuzioni di temperatura riportate in figura 9.7 si nota come all'aumentare della superficie di scambio nel caso di  $N > 0$  la

temperatura del fluido freddo ( $T_f$ ) tenda asintoticamente alla temperatura con cui il fluido caldo entra nello scambiatore ( $T_{ci}$ ); analogamente nel caso di  $N < 0$  la temperatura del fluido caldo ( $T_c$ ) tende asintoticamente alla temperatura con cui il fluido freddo entra nello scambiatore ( $T_{fi}$ ). Ne consegue che in questi due casi la potenza termica massima scambiata è esprimibile con le relazioni:

$$\dot{Q}_\infty = C_f (T_{f2} - T_{f1}) = C_f (T_{ci} - T_{fi}) \quad N > 0 \Rightarrow C_f < C_c$$

$$\dot{Q}_\infty = C_c (T_{c2} - T_{c1}) = C_c (T_{ci} - T_{fi}) \quad N < 0 \Rightarrow C_c < C_f$$

In definitiva si può concludere che la potenza termica massima scambiabile da uno scambiatore in controcorrente di superficie infinita si può determinare con la relazione:

$$\dot{Q}_\infty = C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})$$

ove  $C_{\min}$  è la capacità termica di portata minore mentre  $T_{ci}$  e  $T_{fi}$  sono le temperature che i due fluidi caldo e freddo hanno quando entrano nello scambiatore e quindi sono la temperatura massima e minima presente nello scambiatore.

## 9.5. Il metodo NTU

Con il metodo della differenza di temperatura media logaritmica è possibile il dimensionamento dello scambiatore note le temperature di ingresso e di uscita dei fluidi ed il coefficiente globale di scambio termico. Con tale metodo si raggiunge lo scopo di scegliere lo scambiatore che soddisfa determinati requisiti termodinamici di progetto.

Quando per uno scambiatore sono invece note le temperature di ingresso dei due fluidi, le capacità termiche di portata, la superficie ed il coefficiente globale di scambio termico è possibile ricavare la potenza scambiata e le temperature dei fluidi all'uscita dello scambiatore con un approccio iterativo e pertanto poco agevole. Questo problema si incontra quando bisogna determinare la potenza termica scambiata da uno specifico scambiatore o quando si deve stabilire se uno scambiatore è in grado di rispondere a determinate esigenze di scambio termico.

Si può superare questa difficoltà ricorrendo ad un diverso approccio basato sui risultati di una ricerca di Kays e London (1955) e noto come metodo  $\varepsilon$ -NTU.

Questo metodo è basato sull'adozione di alcuni gruppi adimensionali.

### 9.5.1. Analisi dimensionale

L'analisi dimensionale applicata allo studio degli scambiatori di calore permette di individuare i gruppi adimensionali che consentono la valutazione delle prestazioni di uno scambiatore.

Le equazioni fondamentali per lo studio dello scambiatore di calore, che sono state ricavate nel § 9.3, hanno mostrato che la potenza termica scambiata da uno scambiatore è esprimibile come funzione di una serie di grandezze:

$$\dot{Q} = \dot{Q}(C_c, C_f, U, S, T_{ci}, T_{fi})$$

La presenza di sette grandezze fisiche e di quattro grandezze fondamentali mette in luce che questo legame possa essere ricondotto ad un legame funzionale tra tre gruppi adimensionali come è stato illustrato presentando il teorema di Buckingham. La relazione in forma implicita è:

$$f(\dot{Q}, C_{\min}, C_{\max}, U, S, T_{ci}, T_{fi}) = 0$$

Le dimensioni delle singole grandezze sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= [ML^2t^{-3}] \\ C_{\min} &= [ML^2t^{-3}T^{-1}] \\ C_{\max} &= [ML^2t^{-3}T^{-1}] \\ U &= [Mt^{-3}T^{-1}] \\ S &= [L^2] \\ T_{ci} &= [T] \\ T_{fi} &= [T]\end{aligned}$$

Per lo studio degli scambiatori con l'analisi dimensionale si è proposto di sostituire alle variabili indipendenti  $T_{ci}$  e  $T_{fi}$  la loro differenza  $(T_{ci} - T_{fi})$ . Scegliendo ad esempio come grandezze dipendenti le grandezze  $\dot{Q}$ ,  $C_{\max}$ ,  $U$ , che quindi compariranno nei gruppi adimensionali una sola volta, si determinano i tre gruppi adimensionali che consentono di descrivere lo scambio termico nello scambiatore. Si deve imporre che i rapporti  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , e  $\pi_3$  siano adimensionali:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\dot{Q}}{C_{\min}^{\alpha_1} S^{\alpha_2} (T_{ci} - T_{fi})^{\alpha_3}} \\ \pi_2 &= \frac{C_{\max}}{C_{\min}^{\beta_1} S^{\beta_2} (T_{ci} - T_{fi})^{\beta_3}} \\ \pi_3 &= \frac{U}{C_{\min}^{\gamma_1} S^{\gamma_2} (T_{ci} - T_{fi})^{\gamma_3}}\end{aligned}$$

Sostituendo alle grandezze originarie la loro espressione dimensionale si ottiene:

$$\pi_1 = \frac{[ML^2 t^{-3}]}{[ML^2 t^{-3} T^{-1}]^{\alpha_1} [L^2]^{\alpha_2} [T]^{\alpha_3}} = [M]^{1-\alpha_1} [L]^{2-2\alpha_1-2\alpha_2} [t]^{-3+3\alpha_1} [T]^{\alpha_1-\alpha_3}$$

$$\pi_2 = \frac{[ML^2 t^{-3} T^{-1}]}{[ML^2 t^{-3} T^{-1}]^{\beta_1} [L^2]^{\beta_2} [T]^{\beta_3}} = [M]^{1-\beta_1} [L]^{2-2\beta_1-2\beta_2} [t]^{-3+3\beta_1} [T]^{-1+\beta_1-\beta_3}$$

$$\pi_3 = \frac{[Mt^{-3} T^{-1}]}{[ML^2 t^{-3} T^{-1}]^{\gamma_1} [L^2]^{\gamma_2} [T]^{\gamma_3}} = [M]^{1-\gamma_1} [L]^{-2\gamma_1-2\gamma_2} [t]^{-3+3\gamma_1} [T]^{-1+\gamma_1-\gamma_3}$$

Perché i tre gruppi siano adimensionali gli esponenti relativi alle singole grandezze fondamentali devono essere nulli:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_1 &= 0 \\ 2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \\ -3 + 3\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ 1 - \beta_1 &= 0 \\ 2 - 2\beta_1 - 2\beta_2 &= 0 \\ -3 + 3\beta_1 &= 0 \\ -1 + \beta_1 - \beta_3 &= 0 \\ 1 - \gamma_1 &= 0 \\ -2\gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0 \\ -3 + 3\gamma_1 &= 0 \\ -1 + \gamma_1 - \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di equazioni si ottengono i valori dei coefficienti incogniti:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 & \beta_1 = 1 & \gamma_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = 0 & \gamma_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1 & \beta_3 = 0 & \gamma_3 = 0 \end{array}$$

I gruppi adimensionali sono quindi:

$$\pi_1 = \frac{\dot{Q}}{C_{\min}(T_{ci} - T_{fi})} = \varepsilon$$

$$\pi_2 = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \frac{1}{C}$$

$$\pi_3 = \frac{US}{C_{\min}} = NTU$$

I gruppo adimensionali individuati sono l'efficienza  $\varepsilon$ , il rapporto tra le

capacità termiche di portata  $C$  e la grandezza NTU detta numero di unità di scambio (Number of Transfer Units). Tale parametro ha significato di rapporto tra il flusso termico trasmesso per unità di differenza di temperatura media tra i fluidi, e il flusso termico corrispondente ad una variazione di temperatura unitaria del fluido di capacità termica di portata minore. A parità del rapporto tra il coefficiente globale di scambio termico e la capacità termica di portata minore, NTU è indicativa della superficie di scambio e quindi delle dimensioni dello scambiatore.

La relazione tra gruppi adimensionali ricercata per lo scambiatore è una relazione del tipo:

$$\varepsilon = f(\text{NTU}, C)$$

Kays e London hanno dimostrato che ogni scambiatore ha un suo valore di efficienza poiché questa dipende dalla geometria dello scambiatore e dalla sua tipologia. In particolare hanno dimostrato che l'efficienza risulta funzione soltanto del rapporto tra le capacità termiche di portata e della grandezza adimensionale NTU.

Tale funzione è stata determinata per numerose configurazioni di scambiatori e riportata in forma grafica (fig. 9.11a-b) mentre nella tabella 9.IV sono riportate le espressioni che si ottengono per alcune tipologie di scambiatori.

Tipologia di scambiatore	Relazione per la determinazione dell'efficienza
<i>Equicorrente</i>	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-\text{NTU}(1+C)]}{1+C}$
<i>Controcorrente</i>	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-\text{NTU}(1-C)]}{1 - C \exp[-\text{NTU}(1-C)]}$
<i>Shell and tube con 1 passaggio nella shell e 2-4 nei tubi</i>	$\varepsilon = 2 \left\{ 1 + C + \sqrt{1+C^2} \frac{1 + \exp\left[-\text{NTU}\sqrt{1+C^2}\right]}{1 - \exp\left[-\text{NTU}\sqrt{1+C^2}\right]} \right\}^{-1}$
<i>A flussi incrociati non miscelati</i>	$\varepsilon = 1 - \exp\left\{ \frac{\text{NTU}^{0.22}}{C} \left[ \exp(-C \cdot \text{NTU}^{0.78}) - 1 \right] \right\}$
<i>A flussi incrociati con <math>C_{\min}</math> non miscelato e <math>C_{\max}</math> miscelato</i>	$\varepsilon = \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \exp\{-C[1 - \exp(-\text{NTU})]\}$
<i>A flussi incrociati con <math>C_{\min}</math> miscelato e <math>C_{\max}</math> non miscelato</i>	$\varepsilon = 1 - \exp\left\{ -\frac{1}{C} [1 - \exp(-C \cdot \text{NTU})] \right\}$

Tabella 9.IV Efficienza di scambiatori. Con  $C$  è indicato il rapporto  $C_{\min}/C_{\max}$

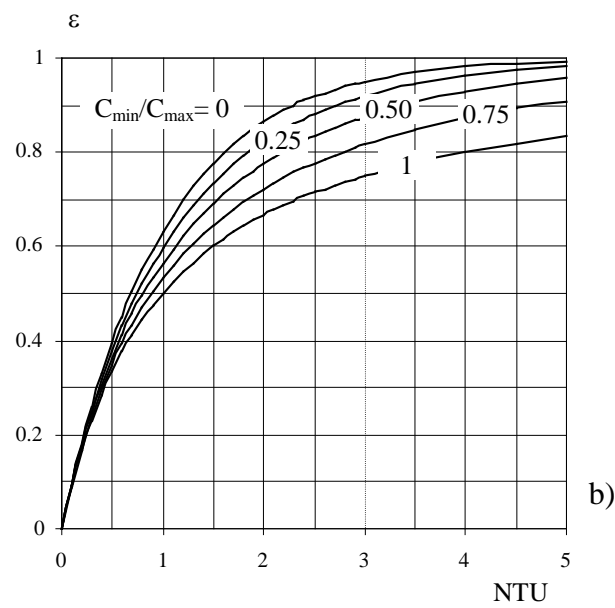
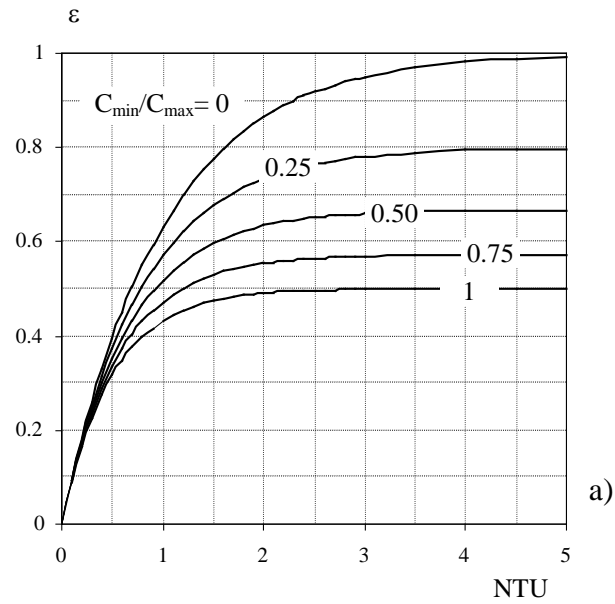


Figura 9.11b Efficienza di scambiatori in equicorrente (a) e controcorrente (b)

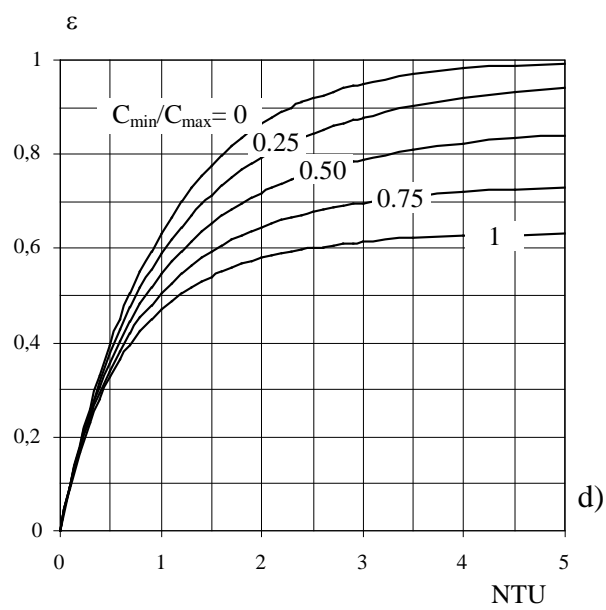
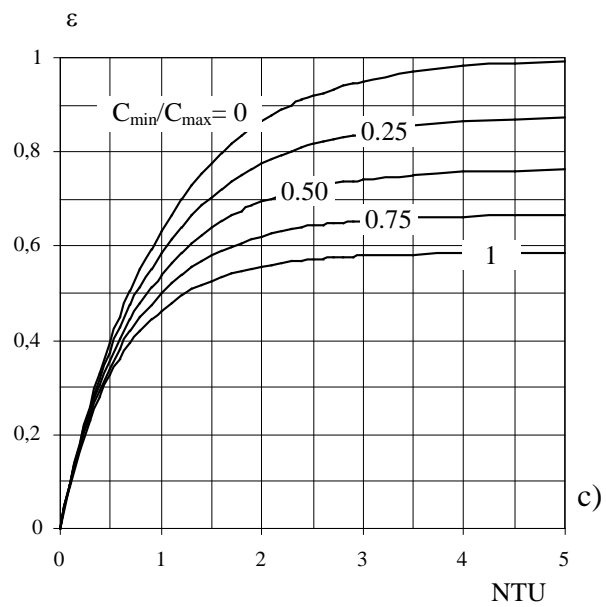


Figura 9.11b Efficienza di scambiatori shell and tube (c) e a flusso incrociato con una corrente miscelata ed una non miscelata (d).



---

**Esempio**

Determinare l'espressione dell'efficienza in funzione del rapporto tra le capacità termiche di portata dei fluidi ( $C$ ) ed il numero delle unità di scambio ( $NTU$ ) per uno scambiatore in equicorrente.

**Soluzione**

Per uno scambiatore in equicorrente si era determinata la relazione:

$$\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1} = - \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) US$$

che con opportuni passaggi può essere riscritta come:

$$\ln \frac{(T_c - T_f)_2}{(T_c - T_f)_1} = - \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{US}{C_f}$$

Utilizzando la equazione di bilancio energetico:

$$C_f (T_{f2} - T_{f1}) = C_c (T_{c1} - T_{c2})$$

si ricava l'espressione per la temperatura del fluido caldo nella sezione di uscita:

$$T_{c2} = T_{c1} - \frac{C_f}{C_c} (T_{f2} - T_{f1})$$

che sostituita nella relazione prima determinata e sommando e sottraendo  $T_{f1}$ , consente di ricavare:

$$\ln \frac{\left[ T_{c1} - T_{f1} + T_{f1} - T_{f2} - \frac{C_f}{C_c} (T_{f2} - T_{f1}) \right]}{(T_{c1} - T_{f1})} = - \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{US}{C_f}$$

che si può semplificare in:

$$\ln \left[ 1 - \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{T_{f2} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} \right] = - \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{US}{C_f}$$

La relazione che ha definito l'efficienza può essere manipolata in modo di ottenere:

$$\varepsilon = \frac{C_f (T_{f2} - T_{f1})}{C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})} \quad \frac{T_{f2} - T_{f1}}{T_{ci} - T_{fi}} = \varepsilon \frac{C_{\min}}{C_f}$$

osservando che  $T_{ci} = T_{c1}$ ,  $T_{fi} = T_{f1}$ , si ottiene l'espressione che consente di calcolare l'efficienza di uno scambiatore in equicorrente:

$$\varepsilon_{\text{equicorrente}} = \frac{1 - e^{- \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{US}{C_f}}}{\left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \frac{C_{\min}}{C_f}}$$

Ponendo ora  $C_f$  o  $C_c$  pari a  $C_{\min}$  e l'altro termine pari a  $C_{\max}$  si ottiene la relazione:

$$\varepsilon_{\text{equicorrente}} = \frac{1 - e^{-NTU \left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)}}{\left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)}$$

*ovvero la relazione cercata tra  $\varepsilon$ , NTU ed il rapporto tra le capacità termiche di portata dei due fluidi.*

---

## 9.6. Le perdite di carico

Nella analisi di uno scambiatore di calore è importante non sottovalutare le perdite di carico fluidodinamiche. Tra i requisiti di progetto, oltre alle prestazioni termiche vanno presi in considerazione gli aspetti economici. Questi requisiti sono solitamente la riduzione dei costi del dispositivo e dell'impianto e la riduzione dei costi di pompaggio.

In generale la progettazione di uno scambiatore di calore richiede un compromesso tra i costi economici di esercizio e di impianto e le prestazioni dello scambio termico. Quest'ultimo può essere migliorato con l'utilizzo di superfici alettate o con dispositivi che aumentino la turbolenza della corrente fluida. Queste soluzioni consentono di aumentare il coefficiente globale di scambio termico ma nel contempo aumentano le perdite di carico fluidodinamiche.

La valutazione della potenza spesa per il pompaggio segue i principi classici della fluidodinamica con la valutazione delle perdite di carico per i fluidi che scorrono nello scambiatore. Questa valutazione è semplice per gli scambiatori di geometria semplice quali gli scambiatori ad un solo passaggio mentre è particolarmente complessa per gli scambiatori shell and tube per la complessità delle configurazioni di moto che si possono presentare.

Per un fluido incomprimibile la potenza assorbita da una pompa adiabatica, con variazione di energia cinetica ed energia potenziale nulla tra le sezioni di ingresso e di uscita, per il pompaggio di una portata massica  $\dot{m}$  è determinabile con la relazione:

$$\dot{L} = \frac{1}{\eta_p} \dot{m} \cdot v \Delta P$$

In questa espressione  $\Delta P$  è la perdita di carico complessiva,  $v$  il volume specifico del fluido,  $\eta_p$  il rendimento isoentropico di compressione.

La perdita di carico attraverso uno scambiatore di calore è generalmente una funzione complessa che dipende dalla geometria e dalla tipologia dello scambiatore. Non esistono quindi correlazioni semplici che possono derivare da un approccio analitico al problema ma generalmente si dispone di risultati di analisi sperimentali.

Nella valutazione della perdita di carico complessiva deve rientrare la stima delle perdite di carico localizzate e distribuite.

Per una analisi più dettagliata si rimanda ai test specialistici del settore.

## 9.7. Esercizi

*Per raffreddare una portata  $m_o = 0.3$  kg/s di olio ( $c_{po} = 2130$  J/kgK) si utilizza uno scambiatore shell and tube con un passaggio nel mantello ed 8 passaggi nei tubi. In questi ultimi scorre acqua ( $c_{pa} = 4180$  J/kgK) con una portata  $m_a = 0.2$  kg/s. I tubi sono di spessore sottile con diametro interno  $D_i = 1.4$  cm e lunghezza per ogni passaggio  $L = 5$  m. Il coefficiente globale di scambio termico è  $U = 310$  W/m<sup>2</sup>K. L'acqua e l'olio entrano nello scambiatore con temperature rispettivamente  $T_{ai} = 20$  °C e  $T_{oi} = 150$  °C. Determinare la potenza termica scambiata e le temperature dei fluidi in uscita.*

***( $Q = 49$  kW,  $T_{au} = 78.6$  °C,  $T_{ou} = 73.3$  °C)***

*Uno scambiatore di calore shell and tube con due passaggi nel mantello e quattro passaggi nei tubi viene impiegato per riscaldare una soluzione dalla temperatura  $T_1 = 20$  °C alla temperatura  $T_2 = 50$  °C. Nei tubi, di diametro  $D = 2$  cm e spessore trascurabile scorre acqua che si raffredda da  $t_1 = 80$  °C a  $t_2 = 40$  °C. La lunghezza complessiva dello scambiatore è  $L = 60$  m. I coefficienti convettivo lato acqua e lato soluzione sono rispettivamente  $h_a = 160$  W/m<sup>2</sup>K e  $h_s = 25$  W/m<sup>2</sup>K. Determinare la potenza termica scambiata.*

***( $Q = 1743$  W)***

*Uno scambiatore a calore in controcorrente a doppio tubo viene utilizzato per riscaldare una portata  $m_a = 1.2$  kg/s di acqua ( $c_{pa} = 4180$  J/kgK) dalla temperatura  $T_{ai} = 20$  °C alla temperatura  $T_{au} = 80$  °C. Come fluido caldo si utilizza acqua pressurizzata ( $c_{pc} = 4310$  J/kgK) con temperatura in ingresso  $T_{ci} = 160$  °C e con portata  $m_c = 2$  kg/s. Il coefficiente globale di scambio termico è  $U = 640$  W/m<sup>2</sup>K. Determinare la lunghezza dello scambiatore.*

***( $L = 108.4$  m)***



## 10. L'irraggiamento

Un corpo a temperatura diversa da 0 K emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica.

Nel trattare la radiazione elettromagnetica distingueremo tra radiazione emessa e radiazione incidente su un corpo materiale, e questo al fine di giungere al calcolo dell'energia scambiata con il meccanismo radiativo tra due corpi che si "vedono" (ovvero nell'ipotesi che a causa dell'elevato rapporto tra dimensioni dei corpi e lunghezza d'onda delle radiazioni termiche, si possano applicare le leggi dell'ottica lineare).

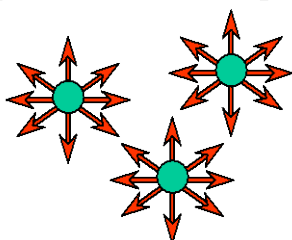
Sarà data la precedenza all'argomento della radiazione emessa, mentre l'argomento del comportamento delle sostanze investite da radiazioni termiche verrà trattato successivamente.

### 10.1. La radiazione elettromagnetica

La radiazione è sempre un fenomeno di volume in quanto entrano in gioco anche gli strati non superficiali della materia.

Nei solidi e nei liquidi però si tratta il fenomeno come superficiale, perché le radiazioni emesse dagli strati profondi sono rapidamente assorbite nell'intorno dell'elemento emittente a causa della non trasparenza (opacità) o ridotta trasparenza del mezzo (fig. 10.1).

**Fenomeno volumetrico**  
*gas, vetro, mezzi trasparenti*



**Fenomeno superficiale**  
*solidi, mezzi non trasparenti*

Figura 10.1 Radiazione termica nei gas (fenomeno volumetrico) e nei solidi (fenomeno superficiale)

Le radiazioni provengono da corpi i cui costituenti elementari (elettroni) si trovano, per cause varie, in uno stato di "eccitazione" rispetto ad uno stato di riferimento e tendono a riportarsi nello stato fondamentale. In questa fase di transizione è emessa energia considerata, secondo il modello utilizzato, o sotto forma di quanti di energia (modello corpuscolare di Planck) o sotto forma di onde elettromagnetiche (modello ondulatorio di Maxwell). La radiazione possiede una energia funzione dei livelli energetici coinvolti.

Il campo di variabilità dell'energia (o della lunghezza d'onda ad essa correlata) è detto spettro della radiazione ed è funzione sia del tipo di eccitazione dei costituenti sia del tipo di materia emittente.

In particolare si dicono “radiazioni termiche” le radiazioni emesse dai corpi per il solo fatto di essere a temperatura diversa dallo zero assoluto: esse appartengono alla più vasta categoria delle radiazioni elettromagnetiche. La temperatura, causa di eccitazione, provoca l'emissione di radiazioni in tutto lo spettro di lunghezze d'onda, ma con intensità centrata prevalentemente nel campo compreso tra  $10^{-2}$   $\mu\text{m}$  (ultravioletto) e  $10^2$   $\mu\text{m}$  (infrarosso).

Si osservi che il campo indicato include l'intervallo del visibile (di lunghezza d'onda  $\lambda$  compresa nell'intervallo 0.4–0.7  $\mu\text{m}$ ): si vedrà più avanti che la massima emissione di energia solare cade proprio in questo intervallo.

Nella maggior parte dei problemi pratici di irraggiamento le dimensioni caratteristiche dei sistemi trattati sono di ordine di grandezza superiore alla lunghezza d'onda delle radiazioni termiche e di conseguenza la natura corpuscolare della radiazione prevale ed il trasporto per irraggiamento può essere ben interpretato in termini di particelle (fotoni) che si propagano (nel vuoto) con la velocità della luce  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s.

La velocità di propagazione  $\bar{c}$  in un mezzo di indice di rifrazione  $n$  vale:

$$\bar{c} = \frac{c}{n}$$

Alla particella in movimento è associata una lunghezza d'onda  $\lambda$  pari a:

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{\nu}$$

dove  $\nu$  è la frequenza della radiazione: essa è correlabile, secondo la teoria quantistica, all'energia  $e_f$  della particella:

$$e_f = h\nu$$

ove  $h$  è la costante di Planck pari a  $h = 6.6256 \cdot 10^{-34}$  [J·s].

Alla particella è inoltre associata la massa relativistica:

$$m_f = \frac{e_f}{\bar{c}^2}$$

I fotoni possono essere trattati come particelle materiali che non interagiscono tra loro, ma interagiscono con le molecole del mezzo in cui si propagano essendo da questo assorbiti, riflessi, diffusi.

Un flusso di fotoni isoenergetici è inoltre equivalente, in una visione ondulatoria della radiazione, ad una radiazione monocromatica. Frequenza e lunghezza d'onda della radiazione sono perfettamente correlabili solo nello spazio vuoto, ma la rappresentazione in lunghezza d'onda è tradizionalmente la più usata. Nella figura 10.2 è riportato lo spettro completo in lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche di diversa natura.

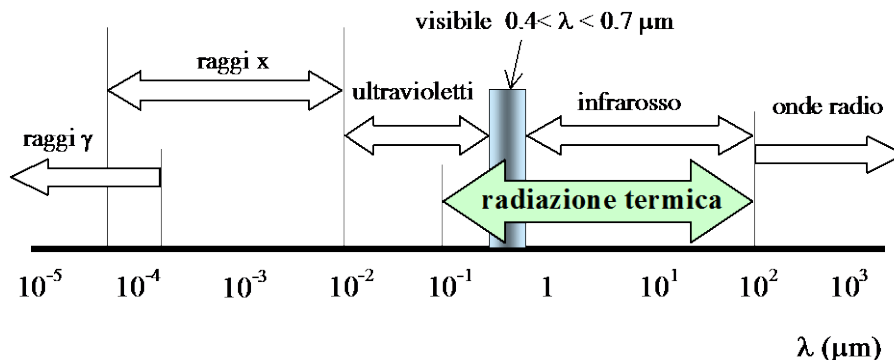


Figura 10.2 Lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche

### 10.1.1. Grandezze caratteristiche

La radiazione termica è caratterizzata da una distribuzione spettrale e da una distribuzione spaziale. Per questa ragione si definiscono grandezze caratteristiche della radiazione termica che consentono di evidenziare la natura spettrale e direzionale della radiazione: si definiscono grandezze che possono riferirsi ad un intervallo di lunghezza d'onda (grandezze spettrali o monocromatiche) oppure possono riferirsi a tutto lo spettro (grandezze totali o integrali). La radiazione è inoltre diversa a seconda della direzione di provenienza o di incidenza (grandezze angolari). Le radiazioni possono riferirsi all'intero semispazio sovrastante la superficie (grandezze emisferiche).

Nel seguito si utilizzerà la seguente simbologia e nomenclatura:

- i pedici  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  indicano rispettivamente grandezze o proprietà riferite alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , all'angolo solido  $\omega$ , all'angolo azimutale  $\phi$ , all'angolo di zenith  $\theta$ ;
- i pedici  $i$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\tau$ , hanno rispettivamente il significato di incidente, emesso, assorbito, riflesso, trasmesso;
- l'apice  $n$  qualifica le grandezze o proprietà del corpo nero (definito in § 10.3);
- $E$ ,  $R$ ,  $G$ ,  $J$  qualifica le grandezze o quantità emesse, riflesse, irradiate ed emergenti;
- $\mathbf{n}$  versore o vettore normale alla superficie  $A$ ;
- $\mathbf{\Omega}$  il vettore orientato secondo la direzione di propagazione della

- radiazione centrato nell'angolo solido  $d\omega$ ;
- angolari o direzionali: le grandezze riferite all'angolo solido unitario;
- emisferiche: le grandezze integrate nel semispazio;
- monocromatiche: le grandezze riferite all'intervallo unitario di lunghezza d'onda;
- integrali: le grandezze riferite all'intero campo spettrale.

## 10.2. L'intensità della radiazione

La misura della radiazione, sia essa emessa o riflessa o trasmessa o assorbita, è basata sulla definizione della intensità della radiazione  $I$ .

Si definisce intensità angolare monocromatica, la quantità

$$I_{\omega,\lambda} = \frac{dq}{dt \cdot dA_n \cdot d\lambda \cdot d\omega}$$

Essa rappresenta la potenza termica radiante, nell'intervallo unitario elementare di lunghezza d'onda  $d\lambda$  attorno a  $\lambda$ , per unità di area elementare normale  $dA_n$  alla direzione di propagazione  $\Omega$ , per unità di angolo solido elementare  $d\omega$  centrato nella direzione  $\Omega$  (fig. 10.3). Adottando un sistema di riferimento sferico, indicando con  $\theta$  l'angolo di zenith e con  $\phi$  l'angolo azimutale, risulta:

$$\Omega = f(\theta, \phi)$$

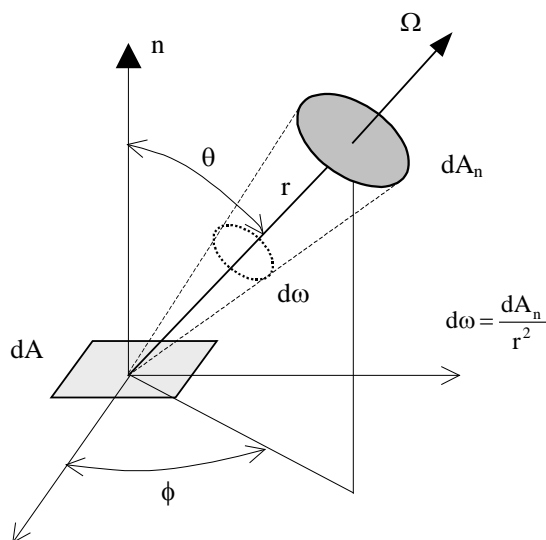


Figura 10.3 Natura direzionale della radiazione emessa da una superficie  $dA$  in una direzione  $\Omega$  caratterizzata da un angolo solido  $d\omega$



L'espressione dell'intensità può essere integrata rispetto a  $\lambda$ , rispetto ad  $\omega$ , oppure rispetto ad entrambe queste quantità dando luogo alle seguenti grandezze:

$$I_{\omega} = \frac{dq}{dt \cdot dA_n \cdot d\omega} = \int_0^{\infty} I_{\omega,\lambda} d\lambda$$

$$I_{\lambda} = \frac{dq}{dt \cdot dA_n \cdot d\lambda} = \int_{SS} I_{\omega,\lambda} d\omega$$

$$I = \frac{dq}{dt \cdot dA_n} = \int_{SS} \int_0^{\infty} I_{\omega,\lambda} d\lambda \cdot d\omega$$

La grandezza SS rappresenta l'emisfero sovrastante la superficie dA. Alle grandezze ricavate si attribuisce rispettivamente il nome di intensità angolare integrale  $I_{\omega}$ , di intensità emisferica monocromatica  $I_{\lambda}$ , ed intensità emisferica integrale I, e ciò in accordo con la nomenclatura istituita, secondo la quale "integrale" caratterizza la grandezza riferita all'intero campo spettrale ed "emisferica" la grandezza integrata nel semispazio. L'intensità  $I_{\omega}$  fisicamente rappresenta la potenza compresa nell'intero spettro di lunghezza d'onda e nell'angolo solido unitario che lascia la superficie dell'areola elementare normale alla direzione di propagazione, mentre  $I_{\lambda}$  fisicamente rappresenta la potenza monocromatica che lascia la superficie dell'areola nell'intero semispazio (in tutte le direzioni dello spazio) che sta al disopra di essa. L'intensità I è il flusso integrale emisferico e indica la potenza termica emergente dalla superficie elementare dA in tutte le direzioni dello spazio nell'intero campo delle lunghezze d'onda.

L'integrazione nello spazio dell'intensità angolare (sia monocromatica che integrale) deve essere fatta con una certa cautela in quanto l'intensità ha come riferimento l'area normale.

Considerando  $dA_n$  la proiezione di dA nella direzione  $\Omega$  (fig. 10.4) si potrà scrivere:

$$dA_n = dA \cdot \cos \theta$$

e la potenza termica uscente dall'areola dA è data da:

$$I = \int_{SS} I_{\omega} \cos \theta \cdot d\omega = \frac{dq}{dt \cdot dA}$$

Avendo sostituito a  $d\omega$  l'espressione che si ricava dalla fig. 10.4:

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} = \frac{r \cdot \sin \theta d\theta \cdot r d\phi}{r^2} = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

l'integrale precedente diviene:

$$I = \int_{SS} I_{\omega} \cos \theta \cdot d\omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_{\omega} \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

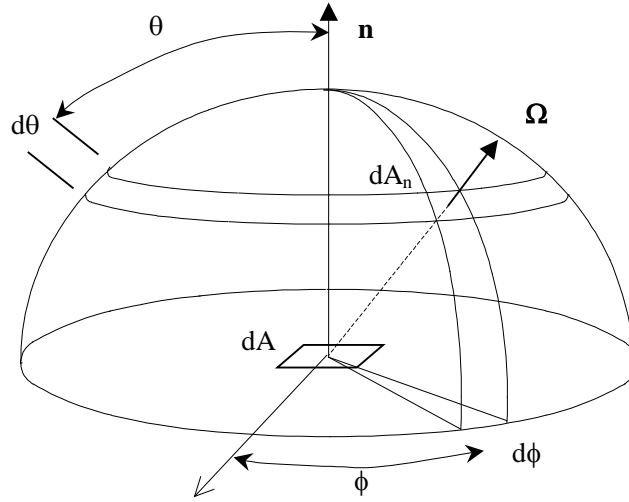


Figura 10.4 Emissione della radiazione nel semispazio superiore alla superficie  $dA$

Se ora si considera una radiazione isotropa, ovvero indipendente dalla direzione  $\Omega$ , si ottiene la relazione:

$$I = I_{\omega} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

sostituendo ai due integrali il loro valore:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

si ottiene:

$$I = \pi I_{\omega}$$

Analogamente dalla relazione:

$$I_{\lambda} = \int_{SS} I_{\omega,\lambda} \cos \theta \cdot d\omega$$

se si considera una radiazione isotropa si ottiene:

$$I_{\lambda} = I_{\omega,\lambda} \int_{SS} \cos \theta \cdot \frac{dA_n}{r^2} = I_{\omega,\lambda} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

ovvero:

$$I_{\lambda} = \pi I_{\omega,\lambda}$$

Come si è detto le espressioni precedenti valgono se l'intensità della radiazione angolare è isotropa; in questo caso la radiazione viene definita diffusa e l'intensità  $I_{\omega}$  è costante e può essere rappresentata come segmento di lunghezza costante in un diagramma polare  $I_{\omega} = I_{\omega}(\Omega)$ .

L'intensità di radiazione elettromagnetica è una grandezza introdotta per

definire la radiazione nello spazio, ma può essere impiegata indifferentemente per definire la radiazione emessa, incidente od emergente da una superficie materiale.

### 10.3. La radiazione emessa: il potere emissivo

Mentre nello spazio, in mancanza di un qualsiasi riferimento fisico, è naturale assumere come superficie di riferimento la superficie perpendicolare alla direzione di propagazione, nel definire le proprietà radiative di una superficie reale, viene spontaneo prendere come riferimento, una porzione elementare di essa. Poiché dal punto di vista pratico ciò che ha interesse è il flusso di energia uscente dalla superficie elementare reale  $dA$  in tutte le direzioni dello spazio, si definisce potere emissivo emisferico integrale, o emittenza, la quantità  $E$  che rappresenta l'energia termica emessa nell'unità di tempo dall'areola reale nell'intero campo spettrale e nel semispazio sovrastante:

$$E = \frac{dq}{dt \cdot dA}$$

Questa espressione deriva per doppia integrazione dalla definizione di potere emissivo monocromatico angolare:

$$E_{\omega, \lambda} = \frac{dq}{dt \cdot dA \cdot d\omega \cdot d\lambda}$$

Questa grandezza è la potenza termica radiante emessa nell'intervallo unitario elementare di lunghezza d'onda  $d\lambda$  attorno a  $\lambda$ , per unità di area emettente  $dA$ , per unità di angolo solido elementare  $d\omega$  centrato nella direzione  $\Omega$  dove  $\Omega = f(\theta, \phi)$ .

Analogamente a quanto già visto, questa espressione può essere integrata rispetto a  $\lambda$  rispetto ad  $\omega$ , oppure rispetto ad entrambe queste quantità dando luogo alle seguenti grandezze:

$$E_{\omega} = \int_0^{\infty} E_{\omega, \lambda} d\lambda$$

$$E_{\lambda} = \int_{SS} E_{\omega, \lambda} d\omega$$

$$E = \int_{SS} \int_0^{\infty} E_{\omega, \lambda} d\lambda \cdot d\omega$$

Si attribuisce ad esse rispettivamente il nome di potere emissivo angolare integrale ( $E_{\omega}$ ), di potere emissivo emisferico monocromatico ( $E_{\lambda}$ ) e, come già indicato, potere emissivo emisferico integrale.

L'istituzione di una relazione tra potere emissivo (riferito all'areola reale) ed intensità (riferita all'areola normale alla direzione di propagazione  $\Omega$ ) è

immediata essendo  $\theta$  l'angolo tra la normale e la direzione  $\Omega$ :

$$dA_n = dA \cdot \cos \theta$$

Secondo quanto già visto le intensità  $I$  ed  $I_\lambda$  rappresentano le quantità di energia totali emesse dall'areola reale e coincidono perciò con  $E$  ed  $E_\lambda$ :

$$E = I = \pi I_\omega$$

$$E_\lambda = I_\lambda = \pi I_{\omega,\lambda}$$

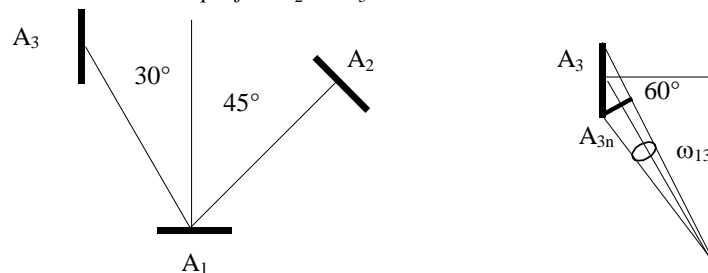
mentre nella direzione  $\Omega$  l'intensità ed il potere emissivo non coincidono, essendo l'una specifica all'area normale e l'altra all'area reale ovvero alla proiezione dell'area normale nella direzione  $\Omega$ :

$$E_{\omega,\lambda} = I_{\omega,\lambda} \cos \theta = \frac{I_\lambda}{\pi} \cos \theta$$

$$E_\omega = I_\omega \cdot \cos \theta = \frac{I}{\pi} \cos \theta$$

### Esempio

Una superficie  $A_1 = 100 \text{ cm}^2$  ha una emissione diffusa di intensità  $I = 500 \text{ W/m}^2\text{sr}$ . Questa radiazione intercetta altre due superfici di area  $A_2 = A_3 = 100 \text{ cm}^2$  che distano  $L = 0.5 \text{ m}$  dalla superficie  $A_1$  e sono orientate nello spazio come illustrato in figura. Si chiede di determinare la potenza termica intercettata dalle due superfici  $A_2$  ed  $A_3$ .



### Soluzione

Gli angoli solidi sottesi dalle superfici  $A_2$  ed  $A_3$  rispetto alla superficie  $A_1$  sono:

$$\omega_{12} = \frac{A_2}{L^2} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ \{sr\}}$$

$$\omega_{13} = \frac{A_{3n}}{L^2} = \frac{A_3 \cos 60}{L^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ \{sr\}}$$

La potenza termica emergente da una generica superficie  $A_1$  ed intercettata da una superficie  $A$  è data dalla relazione:

$$\dot{Q} = \frac{dq}{dt} = I \cdot A_n \cdot \omega = I \cdot A_1 \cos \theta \cdot \omega$$

La potenza termica che lascia la superficie  $A_1$  ed è intercettata dalle superfici  $A_2$  ed  $A_3$  è data dalle relazioni:

$$\dot{Q}_{12} = I \cdot A_1 \cos 45 \cdot \omega_{12} = 0.141 \{W\}$$

$$\dot{Q}_{13} = I \cdot A_1 \cos 30 \cdot \omega_{13} = 0.087 \{W\}$$

#### 10.4. L'interazione tra radiazione e superficie: radiosità e irradiazione

La potenza radiante che lascia una superficie, chiamata anche radiosità  $J$ , o brillantezza, è dovuta sia al potere emissivo della superficie stessa sia alla eventuale radiazione incidente sulla superficie e da questa riflessa (Fig. 10.5).

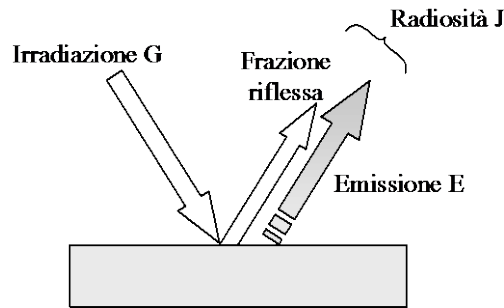


Figura 10.5 Radiosità ed irradiazione di una superficie

Ad indicare la sua distribuzione spaziale e direzionale si usano, secondo la simbologia istituita, i pedici  $\lambda$ ,  $\phi$  e  $\theta$  oppure  $\lambda$  ed  $\omega$ .

La quantità  $J_{\lambda, \phi, \theta}$  ovvero  $J_{\lambda, \omega}$  rappresenta la potenza termica emergente nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda  $d\lambda$  attorno a  $\lambda$ , per unità di area elementare reale  $dA$ , per unità di angolo solido elementare  $d\omega$  centrato nella direzione  $\Omega$  dove  $\Omega = f(\phi, \theta)$ .

Anch'essa è correlata alla intensità ed infatti la radiosità totale (fig. 10.4) è data da:

$$J = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\omega, \lambda(\epsilon+\rho)} \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot d\lambda$$

Se la superficie emette e riflette in modo diffuso, si potrà scrivere:

$$J_\lambda = \pi I_{\omega, \lambda(\epsilon+\rho)}$$

$$J = \pi I_{\omega(\epsilon+\rho)}$$

Nella direzione  $\Omega$  l'intensità ed il potere emissivo non coincidono, essendo l'una riferita all'area normale e l'altro all'area reale ovvero alla proiezione dell'area normale:

$$J_{\omega, \lambda(\epsilon+\rho)} = I_{\omega, \lambda(\epsilon+\rho)} \cos \theta = \frac{I_{\lambda(\epsilon+\rho)}}{\pi} \cos \theta$$

$$J_{\omega(\varepsilon+\rho)} = I_{\omega(\varepsilon+\rho)} \cdot \cos \theta = \frac{I_{(\varepsilon+\rho)}}{\pi} \cdot \cos \theta$$

Dicesi irradiazione la radiazione incidente su una superficie, radiazione originata da emissione o riflessione di altre superfici. L'irradiazione viene indicata con la lettera G.

La quantità  $G_{\omega,\lambda}$  è quantità spettrale e direzionale ed è denominata irradiazione monocromatica angolare e rappresenta la potenza radiante incidente nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda  $d\lambda$  attorno a  $\lambda$ , per unità di area reale  $dA$ , per unità di angolo solido elementare  $d\omega$  centrato nella direzione  $\Omega$ . La direzione  $\Omega$  può anche essere espressa attraverso gli angoli di zenith e di azimuth e saranno valide le due diverse notazioni:  $G_{\lambda,\theta,\phi}$   $G_{\omega,\lambda}$ . Risulta:

$$G = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,\theta,\phi} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot d\phi \cdot d\lambda$$

L'irradiazione emisferica integrale G rappresenta la potenza radiante incidente sulla superficie elementare  $dA$  proveniente da tutte le direzioni e di tutte le lunghezze d'onda.

Se la radiazione incidente è diffusa,  $I_\lambda$  è indipendente da  $\theta$  e  $\phi$  e vale la uguaglianza:

$$G_\lambda = \pi I_{\lambda,\omega}$$

$$G = \pi I_\omega$$

In analogia con quanto già visto:

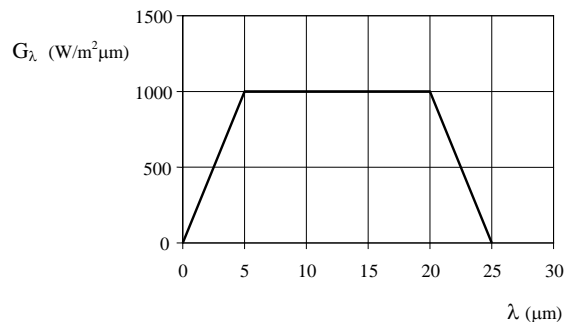
$$G_{\omega,\lambda} = I_{\omega,\lambda} \cos \theta = \frac{I_\lambda}{\pi} \cos \theta$$

$$G_\omega = I_\omega \cos \theta = \frac{I}{\pi} \cos \theta$$

---

### **Esempio**

Essendo nota la distribuzione spettrale della radiazione incidente  $G_\lambda$ , riportata in figura, si vuole determinare l'irradiazione emisferica integrale G.



### **Soluzione**

L'irradiazione totale può essere determinata con l'integrale:

$$G = \int_0^{\infty} G_{\lambda} d\lambda$$

L'integrale può essere scomposto:

$$G = \int_0^5 G_{\lambda} d\lambda + \int_5^{20} G_{\lambda} d\lambda + \int_{20}^{25} G_{\lambda} d\lambda$$

$$G = \frac{1}{2} 1000(5-0) + 1000(20-5) + \frac{1}{2} 1000(25-20) = 20000 \left\{ \text{W} / \text{m}^2 \right\}$$

---

## **10.5. Interazioni tra radiazione e mezzo**

Secondo il modello corpuscolare il flusso di energia raggiante che investe un oggetto materiale può essere visto come flusso di fotoni che interagiscono con il mezzo, che supporremo semitrasparente: essi possono essere assorbiti, riflessi, trasmessi ed il processo dipende dalla natura del mezzo e dalla frequenza (o lunghezza d'onda o energia) della radiazione considerata (fig. 10.6).

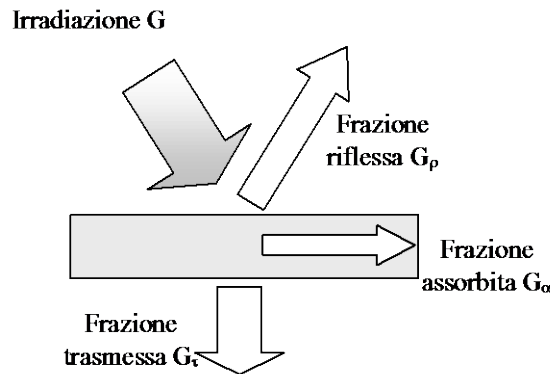


Figura 10.6 Comportamento di un mezzo materiale trasparente

La radiazione incidente, contenuta nell'intervallo unitario spettrale ed angolare, viene in parte assorbita, in parte riflessa, in parte trasmessa:

$$G_{\omega,\lambda} = G_{\omega,\lambda(\alpha)} + G_{\omega,\lambda(\rho)} + G_{\omega,\lambda(\tau)}$$

Dividendo tutti i membri della relazione per  $G_{\omega,\lambda}$  si ottiene

$$1 = \frac{G_{\omega,\lambda(\alpha)}}{G_{\omega,\lambda}} + \frac{G_{\omega,\lambda(\rho)}}{G_{\omega,\lambda}} + \frac{G_{\omega,\lambda(\tau)}}{G_{\omega,\lambda}} = \alpha_{\omega,\lambda} + \rho_{\omega,\lambda} + \tau_{\omega,\lambda}$$

Si definiscono così il coefficiente di assorbimento monocromatico direzionale  $\alpha_{\omega,\lambda}$ , il coefficiente di riflessione monocromatico direzionale  $\rho_{\omega,\lambda}$

ed il coefficiente di trasmissione monocromatico direzionale  $\tau_{\omega,\lambda}$ .

In modo del tutto analogo si potrà scrivere:

$$G_{\lambda} = G_{\lambda(\alpha)} + G_{\lambda(\rho)} + G_{\lambda(\tau)}$$

$$1 = \frac{G_{\lambda(\alpha)}}{G_{\lambda}} + \frac{G_{\lambda(\rho)}}{G_{\lambda}} + \frac{G_{\lambda(\tau)}}{G_{\lambda}} = \alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} + \tau_{\lambda}$$

definendo il coefficiente di assorbimento monocromatico emisferico  $\alpha_{\lambda}$ , il coefficiente di riflessione monocromatico emisferico  $\rho_{\lambda}$  ed il coefficiente di trasmissione monocromatico emisferico  $\tau_{\lambda}$ .

Facendo riferimento alla irradiazione totale si ottiene:

$$G = G_{\alpha} + G_{\rho} + G_{\tau}$$

$$1 = \frac{G_{\alpha}}{G} + \frac{G_{\rho}}{G} + \frac{G_{\tau}}{G} = \alpha + \rho + \tau$$

Il rapporto tra la potenza assorbita e la potenza incidente viene chiamato coefficiente di assorbimento  $\alpha$ . Il rapporto tra la potenza riflessa e la potenza incidente viene chiamato coefficiente di riflessione  $\rho$ . Il rapporto tra la potenza trasmessa e la potenza incidente viene chiamato coefficiente di trasmissione  $\tau$ .

I vari coefficienti di assorbimento, di riflessione e di trasmissione definiti dipendono sia dalla caratteristica della radiazione incidente, sia dalle proprietà del mezzo.

Il valore di questi coefficienti può variare tra 0 ed 1.

In particolare si avrà:

$$\begin{cases} \alpha_{\omega,\lambda} = \alpha_{\omega,\lambda}(\theta, \phi, \lambda) \\ \rho_{\omega,\lambda} = \rho_{\omega,\lambda}(\theta, \phi, \lambda) \\ \tau_{\omega,\lambda} = \tau_{\omega,\lambda}(\theta, \phi, \lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{\lambda} = \alpha_{\lambda}(\lambda) \\ \rho_{\lambda} = \rho_{\lambda}(\lambda) \\ \tau_{\lambda} = \tau_{\lambda}(\lambda) \end{cases}$$

Inoltre se il coefficiente di assorbimento è indipendente dal punto P considerato, si parla di superficie uniforme; se a non dipende da  $\lambda$  si parla di superficie grigia; se indipendente da  $\Omega$ , isotropa; se indipendente da  $\theta$ , lambertiana.

In particolare si ha che:

Superficie nera:  $\alpha = 1$  (o assorbitore perfetto);

Superficie perfettamente riflettente:  $\rho = 1$ ;

Superficie perfettamente trasparente:  $\tau = 1$ .

La maggior parte dei corpi solidi sono "opachi" e non trasmettono quindi radiazioni ( $\tau = 0$ ). Il vetro, il salgemma ed altri cristalli inorganici rappresentano alcuni dei rari materiali solidi con una certa trasparenza ( $\tau < 1$ ).

Sono anche semitrasparenti molti liquidi e tutti i gas.



La trasmissione e l'assorbimento possono considerarsi fenomeni di interazione volumica.

La attenuazione della radiazione è fortemente dipendente dallo spessore attraversato e dalla natura del mezzo ed è in genere selettiva. L'anidride carbonica ed il vapore d'acqua hanno, ad esempio, bande di assorbimento nell'infrarosso e sono trasparenti alle radiazioni visibili. Altre volte l'attenuazione nell'atmosfera è dipendente dalla presenza e dalla concentrazione, che indicheremo con  $c$ , di inquinanti solidi o liquidi in sospensione. In questo caso il comportamento del mezzo assorbente può essere ben approssimato dalla relazione di Lambert-Beer, basata sull'ipotesi che, in un mezzo isotropo, la variazione dell'intensità della radiazione con lo spessore è funzione lineare della concentrazione e dell'intensità della radiazione attraverso un coefficiente di estinzione  $\beta$  indipendente dalla direzione, ma dipendente dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ . L'equazione costitutiva risulterà perciò:

$$\frac{dI_{\omega,\lambda}}{dx} = -\beta(\lambda) \cdot c \cdot I_{\omega,\lambda}$$

Questa relazione differenziale può essere integrata con la condizione al contorno:

$$\begin{cases} x = 0 \\ I_{\omega,\lambda} = I_{(0)\omega,\lambda} \end{cases}$$

Si ottiene così la legge di Lambert-Beer:

$$I_{\omega,\lambda} = I_{(0)\omega,\lambda} e^{-\beta c x}$$

In questo modo la radiazione diminuisce esponenzialmente con la concentrazione delle speci assorbenti: si passa per esempio, da un'attenuazione 10 ad un'attenuazione 100 raddoppiando la concentrazione di inquinanti.

Per quanto attiene il fenomeno della riflessione, bisogna ricordare che si articola in due tipi fondamentali: la riflessione speculare e la riflessione diffusa (fig. 10.7).

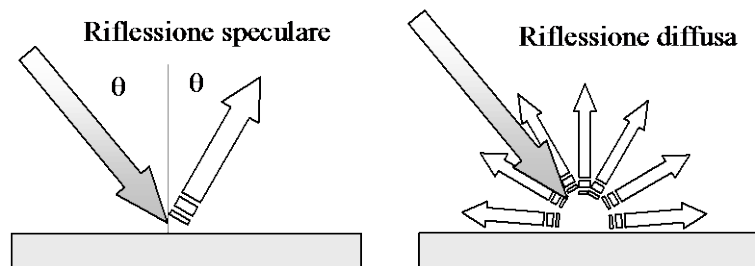


Figura 10.7 Riflessione speculare e riflessione diffusa

Nel primo caso l'angolo di incidenza della radiazione è uguale all'angolo di riflessione, nel secondo caso la radiazione incidente viene riflessa in tutte le direzioni. Dal punto di vista pratico la riflessione che più si avvicina a quella speculare è caratteristica delle superfici lucide e lisce, mentre la riflessione diffusa caratterizza le superfici rugose. I mezzi trasparenti ad assorbimento nullo possono avere un'azione di diffusione della radiazione (o "scattering" della radiazione), azione che è selettiva essendo funzione della lunghezza d'onda: essa è, per esempio, responsabile del fenomeno di colorazione azzurra del cielo.

## 10.6. L'emissione del corpo nero

Un corpo avente le caratteristiche di assorbire completamente tutte le radiazioni che incidono su di esso e di emettere più di qualsiasi altro corpo alla medesima temperatura viene chiamato "corpo nero". Il corpo nero o radiatore ideale è il modello a cui si raffrontano le caratteristiche radianti dei corpi reali.

Le leggi di emissione del corpo nero sono fondate sulle classiche esperienze di Stefan (1879), circa l'effetto della temperatura sull'emissione del nero di platino e sulla teoria di Boltzmann (1884) (a conferma dei dati sperimentali di Stefan) e sulla successiva teoria di Planck (1900). Secondo Stefan e Boltzmann il potere emissivo emisferico integrale del corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta:

$$E^n = \sigma_o T^4$$

in cui  $\sigma_o$  è una costante dimensionata.

Successivamente Planck, applicando i principi della meccanica quantistica alla radiazione termica che si propaga in un mezzo di indice di rifrazione  $n$ , è riuscito a confermare sia la teoria che i dati sperimentali precedenti. Egli ha dedotto che l'intensità della radiazione monocromatica emisferica emessa dalla superficie nera deve valere:

$$I_{\lambda}^n = \frac{2hc^{-2}}{\lambda^5 \left[ e^{(hc/\lambda kT)} - 1 \right]}$$

Da questa relazione emerge la dipendenza della intensità dalla temperatura. In essa  $h$  è la costante di Planck,  $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$  [J/K] è la costante di Boltzmann mentre  $\bar{c}$  è la velocità di propagazione di una onda elettromagnetica nel mezzo:

$$\bar{c} = \frac{c}{n}$$

Essendo inoltre una superficie nera un emettitore diffuso ne consegue che il potere emissivo monocromatico per una radiazione che si propaga nel

vuoto o in un mezzo con indice di rifrazione unitario è:

$$E_{\lambda}^n = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left[ e^{\left( \frac{hc}{\lambda kT} \right)} - 1 \right]} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ e^{\left( \frac{C_2}{\lambda T} \right)} - 1 \right]}$$

$$E_{\lambda}^n = E_{\lambda}^n(\lambda, T)$$

che è detta legge di Planck del corpo nero. Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  sono dette prima e seconda costante di Planck e valgono:

$$C_1 = 2\pi hc^2 = 3.7413 \cdot 10^8 \left\{ \text{W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2 \right\}$$

$$C_2 = 1.4388 \cdot 10^4 \left\{ \mu\text{m} \cdot \text{K} \right\}$$

Il risultato può essere portato in forma grafica (fig. 10.8) in un diagramma piano ( $E_{\lambda}$ ,  $\lambda$ ) in cui vengono tracciate le curve isoterme. Da questa rappresentazione risulta evidente che solo per temperature maggiori di 2000 K, l'emissione del corpo nero diventa significativa nel campo visibile: il massimo dell'emissione monocromatica si sposta infatti verso le lunghezze d'onda minori al crescere della temperatura. A temperatura ambiente si ha emissione prevalentemente nell'infrarosso, mentre a circa 6000 K il massimo cade al centro del visibile.

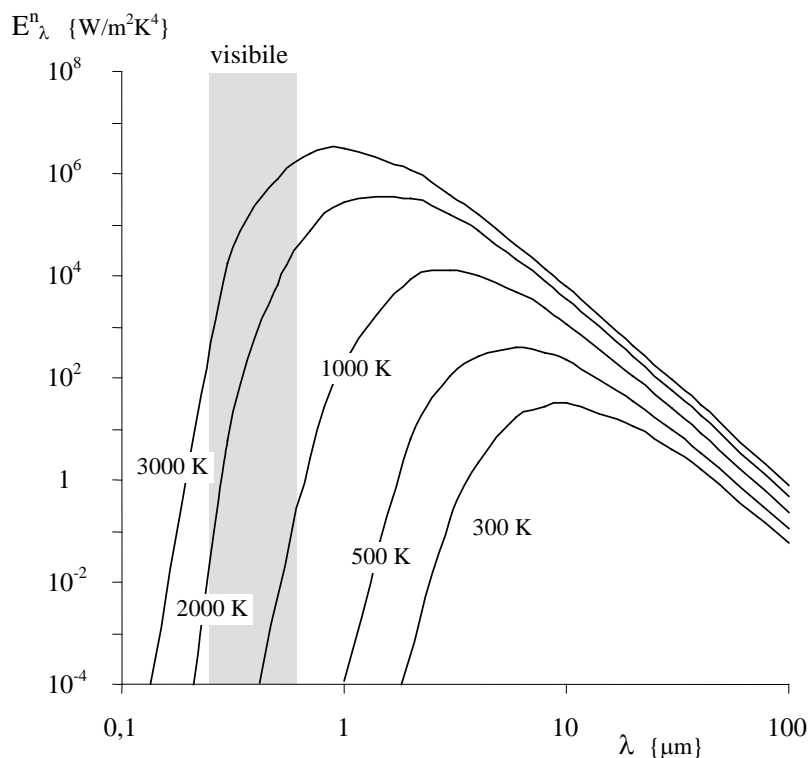


Figura 10.8 Spettro di emissione del corpo nero

Analiticamente il valore di massimo di emissione monocromatica si ottiene annullando la derivata della distribuzione spettrale del corpo nero. Per semplicità si preferisce adottare una relazione semplificata delle legge di Planck nota come relazione semplificata di Wien:

$$E_{\lambda}^n = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot e^{(C_2/\lambda T)}}$$

La derivata rispetto a  $\lambda$  del potere emissivo monocromatico è:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\lambda}^n}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} [C_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-(C_2/\lambda T)}] \\ \frac{dE_{\lambda}^n}{d\lambda} &= -5C_1 \lambda^{-6} \cdot e^{-(C_2/\lambda T)} + C_1 \lambda^{-5} \frac{C_2}{\lambda^2 T} e^{-(C_2/\lambda T)} \end{aligned}$$

Eguagliando a zero questa derivata si ottiene:

$$\lambda T = \frac{C_2}{5}$$

Sostituendo in essa il valore di  $C_2$  si ottiene la legge di Wien:

$$\lambda_{\max} T = 2897.8 \{ \mu\text{mK} \}$$

Il potere emissivo integrale emisferico del corpo nero è dato dalla relazione:

$$E^n = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \sigma_o T^4$$

nota come legge di Stefan-Boltzmann. La costante  $\sigma_o = 5.67 \cdot 10^{-8} [\text{W/m}^2\text{K}^4]$  è detta costante di Stefan-Boltzmann.

### **Esempio**

Calcolare l'energia emessa dal corpo nero in corrispondenza della lunghezza d'onda  $\lambda = 6 \mu\text{m}$ , ad una temperatura  $T = 1500 \text{ K}$ . Calcolare inoltre l'intensità di radiazione monocromatica angolare  $I_{\omega, \lambda}^n$  ed il potere emissivo monocromatico angolare  $E_{\omega, \lambda}^n$  nella direzione  $\theta = 60^\circ$ .

### **Soluzione**

Il potere emissivo monocromatico  $E_{\lambda}^n$  viene calcolato dalla legge di Planck:

$$E_{\lambda}^n = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot e^{(C_2/\lambda T)}} = \frac{3.7413 \cdot 10^8}{6^5 \left[ e^{\left( \frac{1.4388 \cdot 10^4}{6 \cdot 1500} \right)} - 1 \right]} = 12190 \{ \text{W} / \text{m}^2 \mu\text{m} \}$$

L'intensità monocromatica angolare è legata al potere emissivo monocromatico dalla relazione:

$$E_{\lambda}^n = \pi \cdot I_{\omega, \lambda}^n$$

da cui si ricava:

$$I_{\omega,\lambda}^n = \frac{E_{\lambda}^n}{\pi} = \frac{12190}{\pi} = 3880.2 \left\{ \text{W} / \text{m}^2 \mu\text{m} \cdot \text{st} \right\}$$

mentre tra  $E_{\omega,\lambda}^n$  e  $I_{\omega,\lambda}^n$  esiste la relazione:

$$E_{\omega,\lambda}^n = I_{\omega,\lambda}^n \cos \theta = 3880.2 \cdot \cos 60 = 1940.1 \left\{ \text{W} / \text{m}^2 \mu\text{m} \cdot \text{st} \right\}$$

### **Esempio**

Un corpo nero ha emittenza monocromatica integrale massima in corrispondenza del centro della banda visibile ( $\lambda_{\max} = 0.55 \mu\text{m}$ ). Calcolare la temperatura di emissione.

### **Soluzione**

Si utilizzi la legge dello spostamento o legge di Wien:

$$\lambda_{\max} T = 2897.8 \left\{ \mu\text{mK} \right\}$$

da cui si ricava:

$$T = \frac{2897.8}{\lambda_{\max}} = 5268.7 \left\{ \text{K} \right\}$$

## **10.6.1. La banda di emissione**

In alcuni casi lo spettro di emissione della radiazione da parte della superficie avviene prevalentemente in intervalli particolari di lunghezza d'onda della radiazione (superfici selettive). In questi casi è utile poter determinare la frazione del potere emissivo che è contenuto in un certo intervallo di lunghezza d'onda o banda.

Per una determinata temperatura questa frazione, riferita ad un corpo nero, si esprime come rapporto tra la potenza emessa dal corpo nero nell'intervallo di lunghezze d'onda  $0-\lambda$  ed il potere emissivo del corpo nero:

$$F_{(0 \rightarrow \lambda)} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda}^n d\lambda}{\sigma_o T^4}$$

Si può dimostrare che la frazione di energia emessa nell'intervallo  $0-\lambda$  sia funzione esclusivamente del prodotto  $\lambda T$ . Essendo, a temperatura costante:

$$d(\lambda T) = T d\lambda$$

si ha:

$$F_{(0 \rightarrow \lambda)} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda}^n d\lambda}{\sigma_o T^4} = \int_0^{\lambda T} \frac{E_{\lambda}^n}{\sigma_o T^5} d(\lambda T) = f(\lambda T)$$

Il risultato è normalmente riportato in una tabella (tab. 10.I) in funzione del prodotto  $\lambda T$ . Questi risultati possono anche essere utilizzati per la determinazione della frazione della radiazione che cade in un intervallo  $\lambda_1-\lambda_2$ .

Si ha infatti che:

$$F_{(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2)} = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{\lambda}^n d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{\lambda}^n d\lambda}{\sigma_o T^4} = \int_0^{\lambda_2 T} \frac{E_{\lambda}^n}{\sigma_o T^5} d(\lambda T) - \int_0^{\lambda_1 T} \frac{E_{\lambda}^n}{\sigma_o T^5} d(\lambda T) = F_{(0 \rightarrow \lambda_2)} - F_{(0 \rightarrow \lambda_1)}$$

$\lambda T$ ( $\mu\text{mK}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$\lambda T$ ( $\mu\text{mK}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$	$\lambda T$ ( $\mu\text{mK}$ )	$F_{(0 \rightarrow \lambda)}$
200	0.000000	4107	0.500000	11000	0.931890
400	0.000000	4500	0.564280	12000	0.945098
600	0.000000	5000	0.633747	15000	0.969981
800	0.000016	5500	0.690715	20000	0.980859
1000	0.000321	6000	0.737818	30000	0.994329
2000	0.066728	6500	0.776216	40000	0.997607
2500	0.161155	7000	0.808109	50000	0.998775
3000	0.273232	8000	0.856288	75000	0.999637
3500	0.382870	9000	0.890029	100000	0.999847
4000	0.480877	10000	0.914199		

Tabella 10.1 Banda di emissione del corpo nero

## 10.7. La legge di Kirckoff ed il radiatore integrale

Si abbia una cavità vuota di materia ma piena di una radiazione di intensità  $I$  supposta isotropa ed omogenea. La cavità è termicamente isolata dall'ambiente circostante e contiene due corpi senza convessità caratterizzati da coefficienti di assorbimento  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  ed aventi superficie esterna  $A_1$  ed  $A_2$  (fig. 10.9).

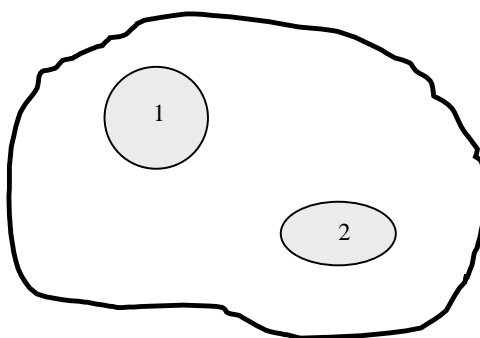


Figura 10.9 Cavità contenente due corpi neri

Il secondo principio della termodinamica ci assicura che il sistema perverrà ad uno stato di equilibrio contraddistinto da eguaglianza della temperatura delle pareti della cavità e dei corpi contenuti in essa e che e il

flusso netto uscente dai corpi stessi deve essere nullo, qualsiasi sia la natura del materiale ed il loro orientamento entro la cavità. Si potrà allora scrivere eguagliando l'energia assorbita ed emessa:

$$\alpha_1 A_1 I = A_1 E_1$$

$$\alpha_2 A_2 I = A_2 E_2$$

da cui si ricava:

$$I = \frac{E_1}{\alpha_1} = \frac{E_2}{\alpha_2} = \frac{E}{\alpha}$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Ne segue che, nel caso particolare in cui i due corpi sono neri ( $\alpha = 1$ ,  $E = E^n$ ) si ottiene

$$I = E^n$$

avendo indicato  $E^n$  il potere emissivo del corpo nero.

Si conclude che:

- la cavità isoterma è un "radiatore integrale" o "emettitore integrale" perché la radiazione che la riempie è pari alla radiazione emessa dal corpo nero a quella temperatura e perciò da un foro sufficientemente piccolo da non turbare l'equilibrio termodinamico del sistema, uscirà un flusso di energia raggiante pari a quella del corpo nero a quella temperatura;
- il piccolo foro praticato nella cavità isoterma si comporta in assorbimento come un corpo nero ("assorbitore integrale") poiché tutte le radiazioni che penetrano nella cavità rimangono per intero assorbite attraverso un gioco di riflessioni ripetute e ciò indipendentemente dal materiale costituente le pareti della cavità. (Fig. 10.10).

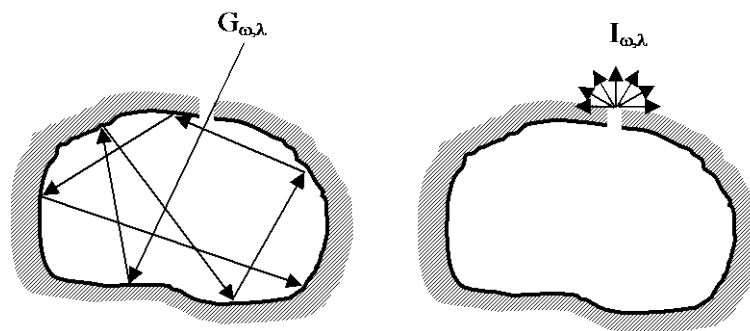


Figura 10.10 Schematizzazione del comportamento del corpo nero

Il corpo nero è dunque per definizione quel corpo che, per ogni temperatura e lunghezza d'onda, emette ed assorbe la massima quantità possibile di energia.

Esso è perciò un caso limite, ovvero un campione ideale con il quale

confrontare le caratteristiche di emissione ed assorbimento radiante degli altri corpi.

Si è inoltre visto che il coefficiente di assorbimento risulta pari a:

$$\alpha = \frac{E}{I} = \frac{E}{E^n}$$

Il rapporto illustrato è indicato con la lettera  $\varepsilon$  e prende il nome di "coefficiente di emissione", nome giustificato dal suo significato fisico: esso rappresenta infatti l'energia emessa dal corpo reale rispetto a quella emessa dal corpo nero alla stessa temperatura. Dalle relazioni precedenti risulta allora:

$$\alpha = \varepsilon$$

In generale l'uguaglianza  $\alpha = \varepsilon$  vale per qualsiasi corpo: questa eguaglianza ci assicura che il coefficiente di assorbimento è pari al coefficiente di emissione (legge di Kirckoff).

La legge di Kirckoff è stata desunta per la radiazione integrale, ma è ugualmente vera per la radiazione monocromatica. E' possibile infatti dimostrare che all'equilibrio il coefficiente di assorbimento monocromatico uguaglia quello di emissione:

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda.$$

I coefficienti di assorbimento e di emissione hanno dunque lo stesso valore, rimanendo entrambi funzione dell'orientamento  $\Omega$ , della lunghezza d'onda  $\lambda$  e della temperatura.

I materiali che hanno coefficienti "selettivi" in lunghezza d'onda vengono sfruttati tecnicamente. Ad esempio, i collettori solari sono in grado di assorbire alte percentuali di energia solare ed avere, contemporaneamente, basse perdite per irraggiamento. I collettori solari sfruttano in particolare la trasparenza del vetro nel visibile e la sua opacità nell'infrarosso: infatti il vetro lascia entrare l'energia solare (la cui intensità è concentrata per il 99% nel campo visibile) e non permette il reirraggiamento proveniente dalla superficie del pannello a temperatura relativamente bassa, la cui intensità è concentrata nell'infrarosso. Anche le serre sfruttano la medesima proprietà selettiva di alcuni materiali trasparenti nel visibile ed opachi nell'infrarosso riuscendo ad "intrappolare" la maggior parte dell'energia solare che le attraversa.

Nella figura 10.11 sono riportati gli andamenti del coefficiente di emissione monocromatico misurato in direzione normale alla superficie per alcuni materiali, ed in figura 10.12 l'andamento del coefficiente di emissione al variare della direzione per materiali conduttori elettrici ed isolanti.



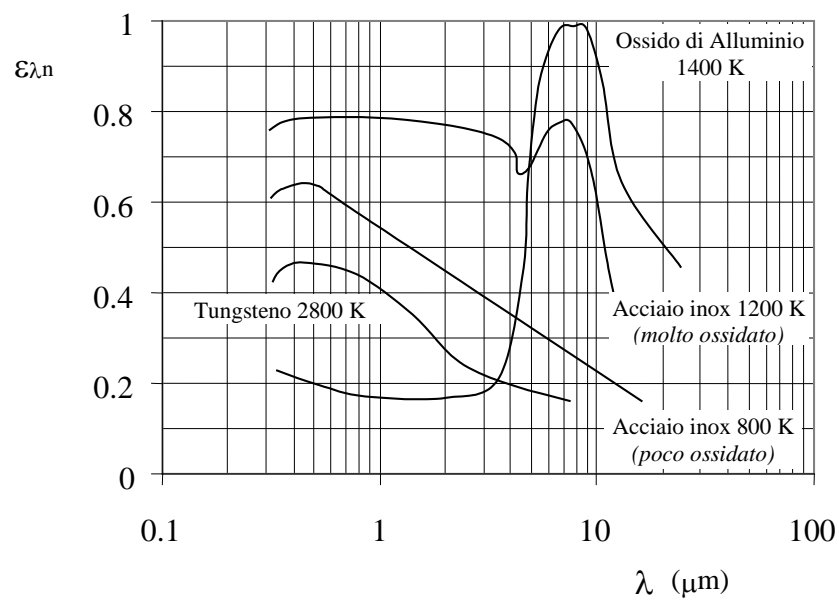


Fig. 10.11 Coefficiente di emissione monocromatico in direzione normale per superfici reali

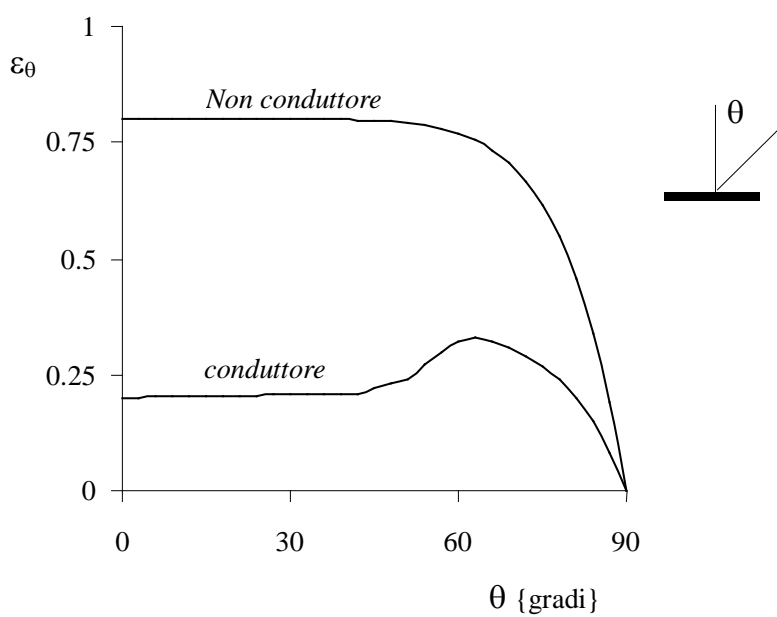


Fig. 10.12 Variazione dell'emissività integrale angolare per materiali conduttori e non conduttori

## 10.8. L'emissione del corpo grigio

Si è visto come il corpo nero abbia per definizione la caratteristica di avere il potere emissivo monocromatico ed integrale maggiore di qualsiasi altra superficie reale. Il coefficiente di emissione monocromatico emisferico  $\varepsilon_\lambda$  è definito come:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_\lambda^n} = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)$$

In base alla precedente definizione risulta che il potere emissivo monocromatico di una superficie reale può “non” essere una frazione costante del potere emissivo del corpo nero, a pari temperatura:

$$E_\lambda = \varepsilon_\lambda(\lambda, T) \cdot E_\lambda^n$$

e che il potere emissivo integrale della superficie reale può scriversi:

$$E = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_\lambda^n d\lambda$$

Quando il coefficiente di emissione monocromatico integrale è indipendente dalla lunghezza d'onda della radiazione emessa, pur rimanendo dipendente dalla temperatura, ai fini dell'integrazione della precedente relazione  $\varepsilon_\lambda$  è costante.

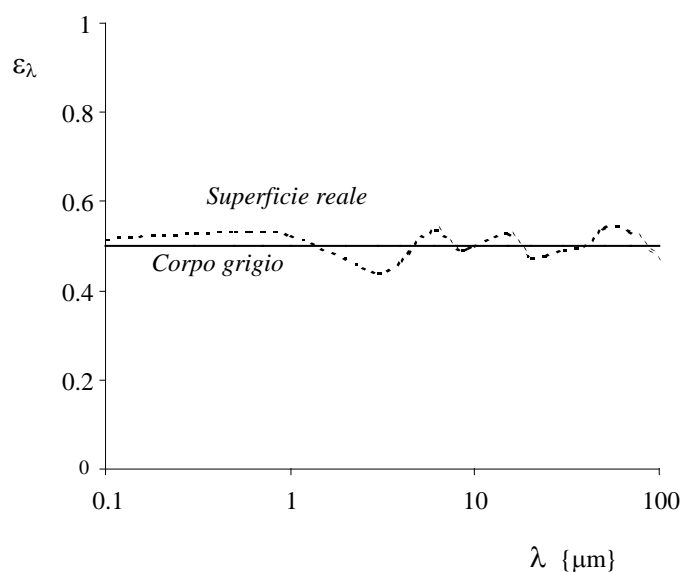


Figura 10.13 Coefficiente di emissione monocromatico integrale di una superficie reale e di un corpo grigio

Tale superficie è detta superficie grigia o corpo grigio. La figura 10.13 riporta l'andamento del coefficiente di emissione di una superficie reale a

temperatura costante e quello di un corpo grigio di pari temperatura. Come si può osservare dalla fig.10.14 la superficie reale di cui si è riportato il coefficiente di emissione monocromatico può essere con buona approssimazione considerata grigia.

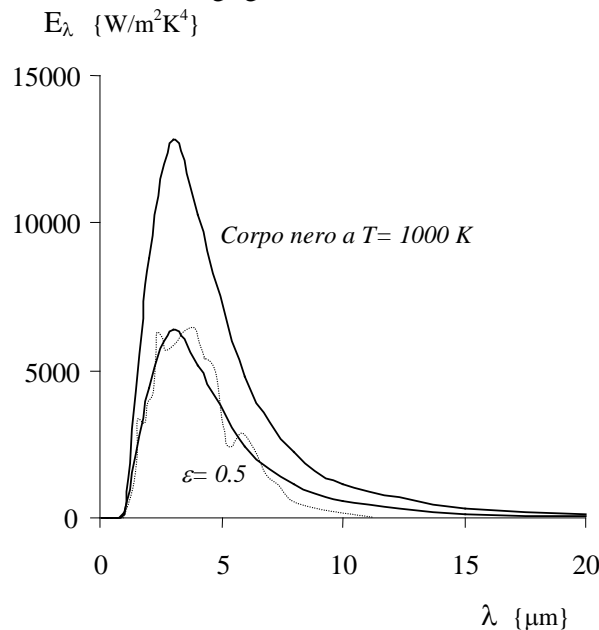


Figura 10.14 Confronto del potere emissivo del corpo nero e di un corpo grigio, con quello di una superficie reale.

Per il corpo grigio si potrà allora scrivere:

$$E = \int_0^\infty \epsilon_\lambda E_\lambda^n \cdot d\lambda = \epsilon \int_0^\infty E_\lambda^n \cdot d\lambda = \epsilon \sigma_o T^4$$

Dalla legge di Kirckoff si deduce che il corpo grigio, per essere opaco, ha un coefficiente di assorbimento monocromatico angolare costante e pari al coefficiente di emissione. Tale coefficiente può variare con la temperatura del corpo.

#### **Esempio**

Un corpo grigio ha potere emissivo integrale monocromatico  $E_\lambda = 5000\text{ kcal/h}\cdot\text{m}^2\cdot\mu\text{m}$  alla temperatura  $T = 1000\text{ K}$  ed alla lunghezza d'onda  $\lambda = 2\text{ }\mu\text{m}$ . Calcolare il suo coefficiente di emissione  $\epsilon_\lambda$ .

#### **Soluzione**

Il coefficiente di emissione del corpo grigio (essendo per definizione l'emissione del corpo grigio indipendente dalla lunghezza d'onda e perciò frazione costante di quella del corpo nero) può essere calcolato come rapporto tra potenza emessa e potenza del corpo nero alla stessa temperatura in qualsiasi zona dello spettro. In particolare, in corrispondenza

di  $\lambda = 2 \mu\text{m}$  dalla equazione di Planck valida per il corpo nero, si ha:

$$E_{\lambda}^n = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot [e^{(C_2/\lambda T)} - 1]}$$

$$E_{\lambda}^n = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot e^{(C_2/\lambda T)}} = \frac{3.7413 \cdot 10^8}{2^5 \left[ e^{\left( \frac{1.438810^4}{2 \cdot 1000} \right)} - 1 \right]} = 8788 \text{ (W / m}^2 \mu\text{m)}$$

e di conseguenza:

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon = \frac{E_{\lambda}}{E_{\lambda}^n}$$

$$\varepsilon = \frac{5000 \frac{4186}{3600}}{8788} = 0.662$$

essendo  $1 \text{ kcal/h} = 4186/3600 \text{ W}$ .

---

## 10.9. Esercizi

Una lampadina ha un filamento a temperatura  $T = 2500 \text{ K}$  che si comporta come un corpo nero; calcolare la potenza termica emessa per radiazione dal filamento nel campo del visibile ( $0.40\text{-}0.75 \mu\text{m}$ ) e la lunghezza per cui è massima la radiazione messa.

$$(F_{(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2)} = 0.0527, \lambda_{\text{max}} = 1.16 \mu\text{m})$$

L'emissività monocromatica di una superficie opaca alla temperatura  $T = 527^\circ\text{C}$  è approssimabile con la funzione:

$$\varepsilon_{\lambda} = 0.3 \quad 0 \leq \lambda \leq 3 \mu\text{m}$$

$$\varepsilon_{\lambda} = 0.8 \quad 3 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 7 \mu\text{m}$$

$$\varepsilon_{\lambda} = 0.3 \quad 7 \mu\text{m} \leq \lambda \leq \infty \mu\text{m}$$

Determinare l'emissività integrale della superficie ed il potere emissivo.

$$(\varepsilon = 0.521, E = 12.1 \text{ kW/m}^2)$$

Determinare il potere emissivo ed il potere emissivo monocromatico alla lunghezza d'onda  $\lambda = 3 \mu\text{m}$  per un corpo nero alla temperatura  $T = 800 \text{ K}$ .

$$(E^n = 23224 \text{ W/m}^2, E_{\lambda}^n = 3848.4 \text{ W/m}^2 \mu\text{m})$$

## 11. Lo scambio termico per irraggiamento

L'irraggiamento potrebbe definirsi come il meccanismo di trasporto dell'energia in assenza di materia: esso, infatti, a differenza del trasporto conduttivo e convettivo, non richiede il supporto di un mezzo materiale e grazie ad esso giunge sulla terra l'energia solare attraverso il vuoto cosmico. Il mezzo materiale, non necessario, rappresenta anzi un ostacolo al propagarsi della radiazione che può essere da esso diffusa, assorbita e riflessa.

L'irraggiamento è tecnicamente importante perché è spesso il fenomeno dominante nel trasporto di energia tra corpi solidi ad alta temperatura e fenomeno non trascurabile a temperature già poco superiori alla temperatura ambiente.

### 11.1. Il fattore di forma (o di vista)

Dopo aver considerato le proprietà radiative delle superfici e le interazioni tra superficie e radiazione termica verrà ora determinata la potenza termica raggianti scambiata tra due superfici a temperatura diversa. La trasmissione del calore per irraggiamento tra due o più superfici è condizionata prevalentemente dalla geometria del sistema, oltreché dalle proprietà radiative delle superfici interessate. Il parametro geometrico che qualifica l'influenza della disposizione geometrica relativa tra le superfici coinvolte nel processo di scambio si chiama fattore di forma o fattore di vista. Esso è comunemente indicato con la lettera "F" dotata di un pedice che precisa il verso e le superfici interessate e rappresenta la frazione di energia emessa da una superficie  $i$  che incide su una generica superficie  $j$ . Si indica ad esempio con  $F_{12}$  la frazione dell'energia emergente dalla superficie 1 che cade sulla superficie 2:

$$F_{12} = \frac{\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}}{\dot{Q}_1}$$

ove  $\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}$  rappresenta la potenza termica che per irraggiamento lascia la superficie 1 ed incide sulla superficie 2, mentre  $\dot{Q}_1$  è la potenza termica che complessivamente, per irraggiamento, lascia la superficie 1.

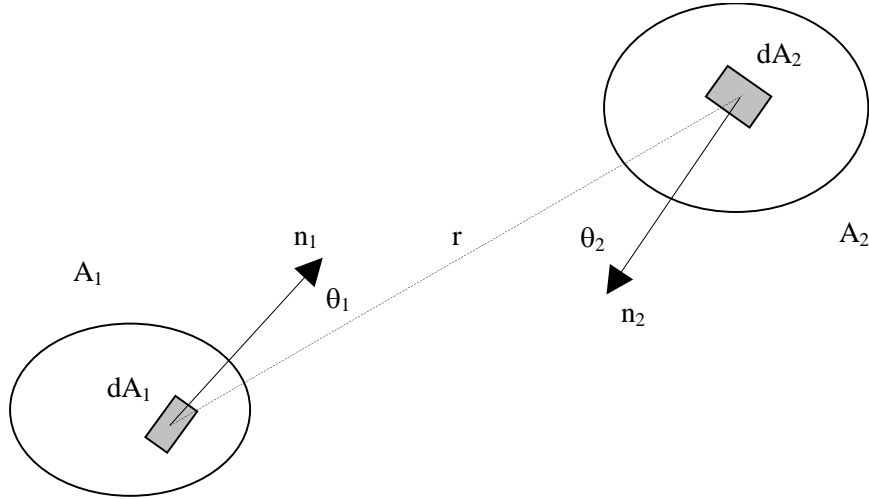


Figura 11.1 Scambio termico tra due corpi

Considerando l'energia emergente dalle superfici (somma dell'energia emessa più la quota riflessa di quella che su di esse incide) si potrà scrivere, con riferimento alla figura 11.1 ed introducendo l'intensità della radiazione emessa dalla superficie 1 ( $I_{\omega 1}$ ), che l'energia che emerge da 1 e che raggiunge 2 è:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \int_{SS A_1} \int_{A_2} I_{\omega 1} dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1$$

essendo  $d\omega_1$  l'angolo solido secondo cui è vista la superficie infinitesima  $dA_2$  dalla superficie  $dA_1$ . Si può allora ricavare:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_2} \int_{A_1} I_{\omega 1} dA_1 \cos \theta_1 \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2}$$

La radiazione termica che lascia la superficie 1 è ottenibile come prodotto dalla superficie  $A_1$  per la radiosità della superficie stessa:

$$\dot{Q}_1 = A_1 J_1$$

Se la radiazione è isotropa si scriverà:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{I_1}{r^2} \int_{A_2} \int_{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2$$

$$\dot{Q}_1 = A_1 \pi I_1$$

da cui si ricava il fattore di vista:

$$F_{12} = \frac{\int_{A_2} \int_{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{A_1 \pi r^2}$$

Questo risultato mette in evidenza che il fattore di vista, per superfici che emettono una radiazione diffusa, è una grandezza geometrica. In modo analogo si può ottenere la relazione:

$$F_{21} = \frac{\int_{A_2} \int_{A_1} \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{A_2 \pi r^2}$$

Da esse si deduce "la legge di reciprocità":

$$F_{12} A_1 = F_{21} A_2$$

I valori del fattore di vista per le configurazioni geometriche più comuni sono in genere riportate in diagrammi (fig. 11.2, 11.3, 11.4), che riportano famiglie di curve parametrizzate per diversi rapporti delle grandezze geometriche caratteristiche.

L'uso dei diagrammi può essere esteso se si utilizzano alcune proprietà caratteristiche dei fattori di vista.

Per una superficie suddivisa in più subaree (figura 11.5), le frazioni di energia emergente dalla subarea 1, che incidono sulle altre superfici in vista, possono essere sommate (legge "della sommabilità dei fattori di forma"):

$$F_{1(2+3)} = F_{12} + F_{13}$$

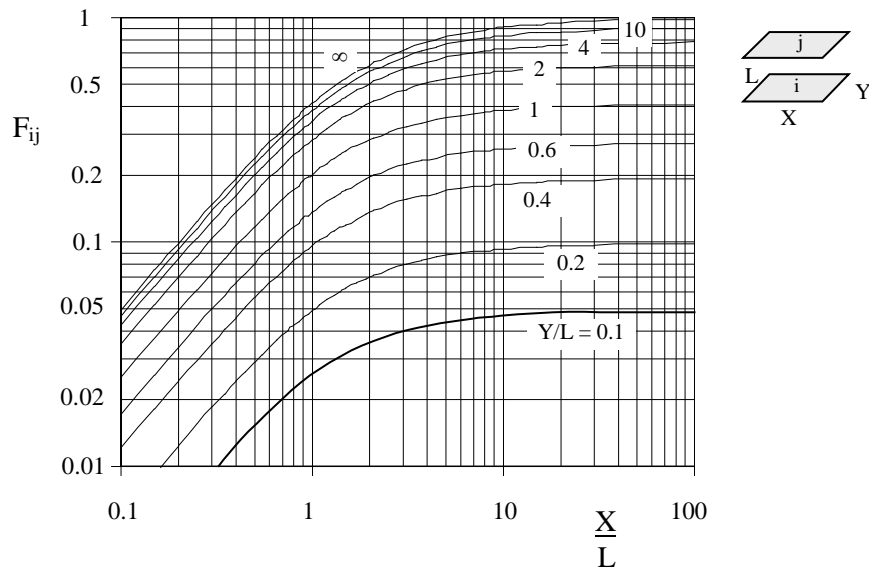


Figura 11.2 Fattore di vista per superfici piane parallele

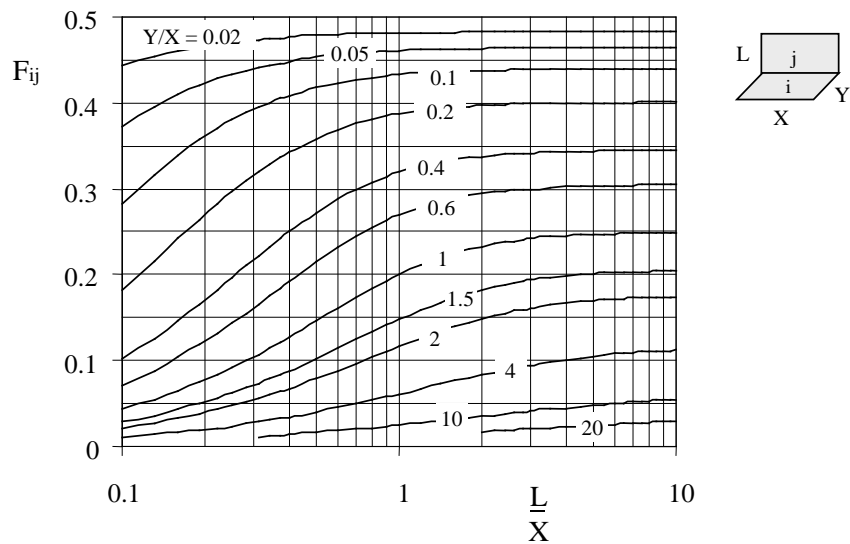


Figura 11.3 Fattore di vista per superfici piane perpendicolari

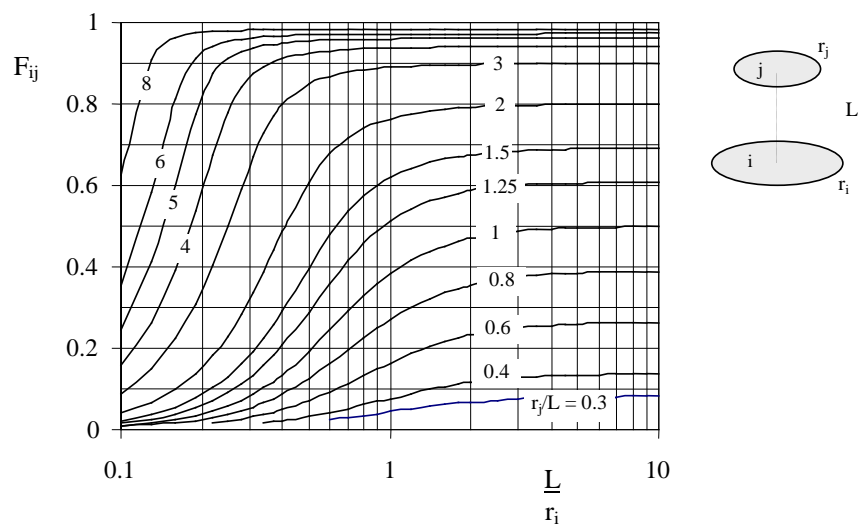


Figure 11.4 Fattore di vista per superfici circolari parallele e concentriche

Da questa proprietà discende la cosiddetta condizione di chiusura. Nel caso di  $n$  superfici che completamente racchiudono una generica superficie  $A_k$  (fig. 11.6a), vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{ki} = 1$$



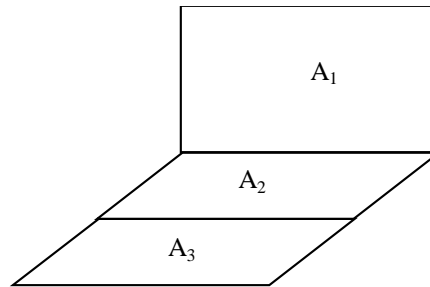


Figura 11.5 Sommabilità dei fattori di vista per una superficie composta

Essa sta a significare che l'energia emessa dal corpo interno, privo di concavità, cade per intero sulle superfici della cavità.

Analogamente per una cavità chiusa costituita da  $n$  subaree (Fig. 11.6b) i fattori di vista relativi ad una qualsiasi delle superfici ( $k$ ) godono della stessa proprietà:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{ki} = 1$$

Essa sta a significare che l'energia che emerge da una superficie generica, cade per intero sulle superfici che definiscono la cavità. Si deve osservare che se una superficie è concava l'energia che emerge da questa è intercettata anche dalla superficie stessa ed è questa la ragione per cui la sommatoria è estesa a tutte le superfici formanti la cavità.

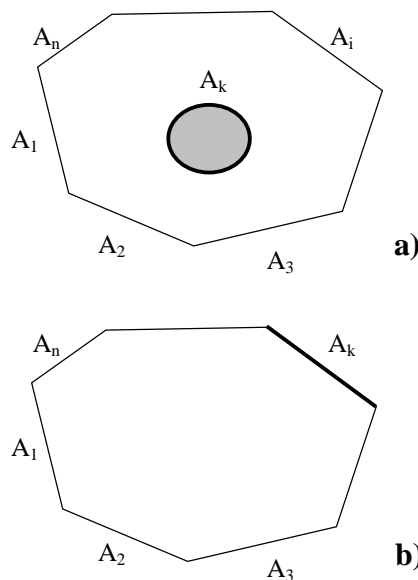
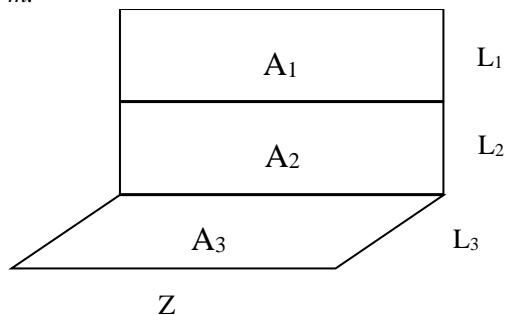


Figura 11.6 Cavità formata da  $n$  superfici

---

**Esempio**

Calcolare il fattore di vista tra le due superfici  $A_1$  ed  $A_3$  non contigue, disposte come illustrato in figura essendo note le dimensioni  $L_1 = L_2 = 0.5$  m,  $L_3 = 1$  m,  $Z = 2$  m.

**Soluzione**

Il fattore di vista  $F_{13}$  può essere determinato sfruttando la proprietà dei fattori di vista con superfici composte:

$$F_{13} = F_{(1+2)3} - F_{23}$$

i fattori di vista  $F_{(1+2)3}$  e  $F_{23}$  si possono determinare con il diagramma di riportato.

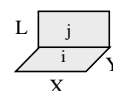
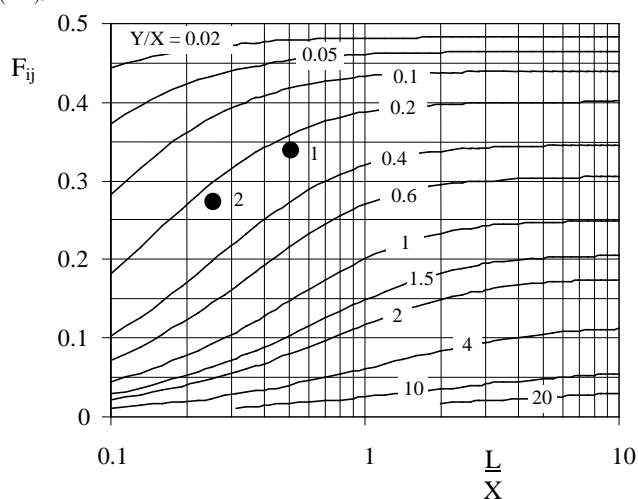
Per la superficie (1+2) si hanno:

$$\frac{L}{X} = \frac{L_1 + L_2}{Z} = 0.5$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{L_3}{Z} = 0.25$$

da cui si determina il punto 1:

$$F_{(1+2)3} = 0.34$$



Per la superficie 2 si ha:

$$\frac{L}{X} = \frac{L_2}{Z} = 0.25$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{L_3}{Z} = 0.25$$

da cui si determina il punto 2:

$$F_{23} = 0.27$$

Dalla proprietà di sommabilità dei fattori di vista si ottiene:

$$F_{13} = F_{(1+2)3} - F_{23} = 0.34 - 0.27 = 0.07$$


---

## 11.2. Lo scambio termico tra corpi neri

Siano due superfici nere  $A_1$  ed  $A_2$ , rispettivamente alla temperatura  $T_1$  e  $T_2$  (costanti nel tempo) e sia  $F_{12}$  il fattore di forma o fattore di vista della superficie  $A_1$  rispetto alla superficie  $A_2$ . Essendo la superficie 2 nera il fattore di vista  $F_{12}$  rappresenta anche la frazione di energia emessa dalla superficie  $A_1$  che viene completamente assorbita da  $A_2$ . Una considerazione analoga vale per  $F_{21}$  che rappresenta la frazione di energia emessa da  $A_2$  che cade su  $A_1$  e viene da essa completamente assorbita.

La differenza di queste quantità è la potenza radiante scambiata  $\dot{Q}_{12}$ .

La potenza emessa dai due corpi è:

$$\dot{Q}_1 = A_1 E_1^n$$

$$\dot{Q}_2 = A_2 E_2^n$$

mentre la potenza radiante emessa dalla superficie 1 ed assorbita dalla superficie 2 e la potenza radiante emessa dalla superficie 2 ed assorbita dalla superficie 1 sono rispettivamente date dalle relazioni:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = F_{12} A_1 E_1^n$$

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = F_{21} A_2 E_2^n$$

La potenza netta scambiata è quindi:

$$\dot{Q}_{12} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 E_1^n - F_{21} A_2 E_2^n$$

In base alla legge di reciprocità si ha la relazione:

$$F_{12} A_1 = F_{21} A_2$$

per cui si ottiene:

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 (E_1^n - E_2^n)$$

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

e

$$\dot{Q}_{12} = F_{21} A_2 (E_1^n - E_2^n)$$

$$\dot{Q}_{12} = F_{21} A_2 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

---

**Esempio**

Due piastre quadrate nere distano tra loro di  $L = 0.5 \text{ m}$  ed hanno lato  $X = Y = 2.5 \text{ m}$ . Esse si trovano rispettivamente alle temperature  $T_1 = 27^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 127^\circ\text{C}$ . Calcolare la potenza termica scambiata in regime stazionario.

**Soluzione**

Se le superfici sono entrambe nere la potenza radiante scambiata è:

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 (E_1^n - E_2^n)$$

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

Utilizzando il diagramma di fig. 11.2 si ricava:

$$\frac{X}{H} = \frac{Y}{H} = 5 \quad F_{12} = 0.7$$

per cui si ricava:

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\dot{Q}_{12} = 0.7 \cdot (2.5)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} (300^4 - 400^4) = -4395 \text{ W / m}^2$$

Il segno negativo sta a significare che la potenza termica è ceduta dal corpo più caldo (2) a quello più freddo (1).

---

### 11.3. Lo scambio radiante tra corpi grigi

Il modello di superficie a cui si farà riferimento è quello di una superficie grigia. Tale superficie è opaca ed emette in modo diffuso, assorbe in modo diffuso e la riflessione è una riflessione diffusa. Si ipotizza inoltre che la radiazione incidente su tale superficie sia una radiazione diffusa.

In accordo con il modello di corpo grigio il coefficiente di assorbimento, di riflessione e di emissione non dipendono né dall'angolo né dalla lunghezza d'onda, ma dalla sola temperatura superficiale del mezzo:

$$\alpha = \alpha(T)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T)$$

$$\rho = \rho(T)$$

ed inoltre, per essere il corpo opaco:

$$\alpha + \rho = 1$$

Lo spazio interposto è, anche in questo caso, vuoto di materia e di conseguenza l'unico meccanismo di scambio termico possibile è quello radiativo. Si suppone inoltre che la temperatura di ogni superficie considerata sia uniforme e costante nel tempo.

Il calcolo dello scambio termico nel caso di due superfici di queste caratteristiche radiative e senza concavità (assenza di autoirraggiamento), completamente racchiuse l'una nell'altra (fig. 11.7) è semplice ed i risultati che si ottengono sono la base per estendere l'analisi a situazioni geometricamente più complesse.

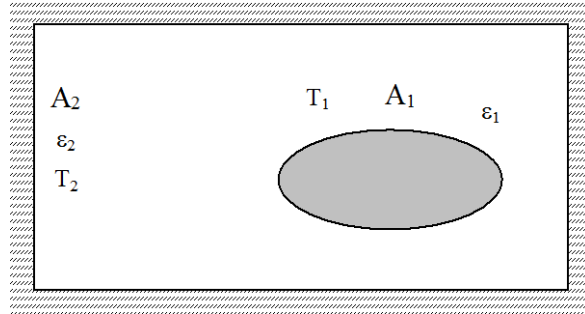


Figura 11.7 Scambio termico tra corpi grigi

Si indicherà con  $E^n$  il potere emissivo del corpo nero, con  $G$  (irradiazione) la potenza radiante specifica incidente con  $J$  (radiosità o brillantezza) la potenza radiante specifica uscente od emergente (somma della potenza emessa e di quella riflessa). La relazione tra queste quantità è:

$$J = \varepsilon E^n + \rho G$$

$$J = \alpha E^n + (1 - \alpha)G$$

La potenza radiante scambiata in regime stazionario può esprimersi in tre diversi modi (si consideri positivo il flusso nella direzione 1-2, essendo 1 il corpo centrale completamente circondato dalla superficie 2):

- 1) attraverso il bilancio energetico relativo alla superficie 1: la potenza scambiata, considerata positiva se uscente dalla superficie 1, è data dalla differenza tra irradiazione e radiosità della superficie:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 (J_1 - G_1)$$

$$J_1 = \alpha_1 E_1^n + (1 - \alpha_1)G_1$$

che consentono di determinare la irradiazione della superficie 1:

$$G_1 = \frac{J_1 - \alpha_1 E_1^n}{1 - \alpha_1}$$

La potenza termica scambiata è quindi:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 \left( J_1 - \frac{J_1 - \alpha_1 E_1^n}{1 - \alpha_1} \right)$$

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\alpha_1 A_1}{1 - \alpha_1} (E_1^n - J_1)$$

Questa relazione consente di esprimere la potenza termica scambiata in funzione di grandezze riferite alla superficie 1.

- 2) in modo analogo attraverso il bilancio energetico relativo alla superficie 2: la potenza scambiata, considerata positiva se uscente dalla superficie 2, è data dalla differenza tra irradiazione e radiosità della superficie:

$$\dot{Q}_{21} = A_2(J_2 - G_2)$$

$$J_1 = \alpha_2 E_2^n + (1 - \alpha_2)G_2$$

che consentono di determinare la irradiazione della superficie 2:

$$G_2 = \frac{J_2 - \alpha_2 E_2^n}{1 - \alpha_2}$$

La potenza termica scambiata è quindi:

$$\dot{Q}_{21} = A_2 \left( J_2 - \frac{J_2 - \alpha_2 E_2^n}{1 - \alpha_2} \right)$$

$$\dot{Q}_{21} = \frac{\alpha_2 A_2}{1 - \alpha_2} (E_2^n - J_2)$$

Questa relazione consente di esprimere la potenza termica scambiata in funzione di grandezze riferite alla superficie 2.

In base a queste espressioni è immediato osservare una analogia elettrica tra la nota legge di Ohm ed il fenomeno dello scambio radiativo in regime permanente. Infatti l'equazione precedente mostra che la potenza termica  $\dot{Q}_{ij}$  è direttamente proporzionale ad una differenza di "potenziale" ( $E_i^n - J_i$ ), mentre ciò che ne ostacola il passaggio è analogo ad una resistenza:

$$R_i = \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i A_i}$$

Il termine  $R_i$  è chiamato resistenza termica superficiale essendo legato alla differenza tra il potere emissivo del corpo nero e la radiosità della superficie e si annulla nel caso di corpo nero.

- 3) calcolando la potenza trasferita come differenza tra la potenza emergente da 1 che cade su 2, e quella emergente da 2 che cade su 1:

$$\dot{Q}_{12} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1}$$

In questo caso, con l'adozione dei fattori vista, si hanno le relazioni:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} J_1$$

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = A_2 F_{21} J_2$$

e si ricava la relazione:

$$\dot{Q}_{12} = F_{12} A_1 J_1 - F_{21} A_2 J_2 = A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

Questa equazione mostra che il flusso termico  $\dot{Q}_{ij}$  è direttamente proporzionale ad una differenza di "potenziale" ( $J_i - J_j$ ), mentre ciò che ne ostacola il passaggio è analogo ad una resistenza:

$$R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} = \frac{1}{A_j F_{ji}}$$

Il termine  $R_{ij}$  è chiamato resistenza termica spaziale essendo legato alla

disposizione geometrica relativa delle superfici.

In condizioni di regime dovrà essere:

$$\dot{Q}_{12} = -\dot{Q}_{21}$$

Riassumendo si hanno le relazioni:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\alpha_1 A_1}{1 - \alpha_1} (E_1^n - J_1)$$

$$\dot{Q}_{21} = \frac{\alpha_2 A_2}{1 - \alpha_2} (E_2^n - J_2)$$

$$\dot{Q}_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

Questo sistema di equazioni può essere risolto eliminando le radiosità delle superfici. Si ha infatti.

$$\dot{Q}_{12} \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 A_1} = (E_1^n - J_1)$$

$$\dot{Q}_{12} \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 A_2} = (J_2 - E_2^n)$$

$$\dot{Q}_{12} \frac{1}{A_1 F_{12}} = (J_1 - J_2)$$

Sommando i termini delle relazioni scritte si ottiene:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{(E_1^n - E_2^n)}{\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 A_2}}$$

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 A_2}}$$

Nell'ultima relazione scritta si ricorda che le temperature  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature termodinamiche dei corpi e sono misurate nella scala assoluta (K).

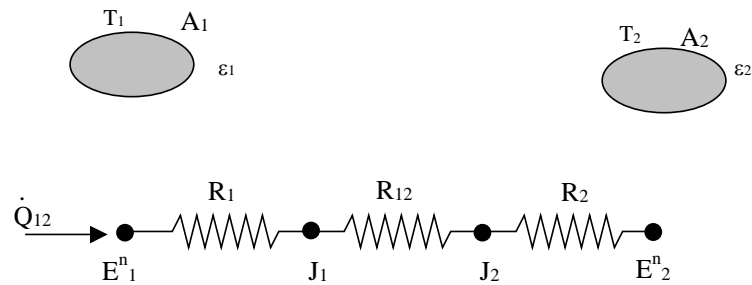


Figura 11.8 Analogia elettrica per lo scambio termico tra due corpi grigi.

L'analogia elettrica illustrata è illustrata nella figura 11.8: il modello elettrico è costituito dalle tre resistenze in serie ai cui estremi sono i due potenziali  $E_1^n$  ed  $E_2^n$ .

La relazione ottenuta per lo scambio termico tra due corpi grigi è estremamente generale e può essere adottata anche per scambi con corpi neri.

Il problema si complica se si hanno più di due superfici e se si tiene conto dell'autoirraggiamento. E' possibile per esempio dimostrare che nel caso di una cavità divisa in N subaree finite, ciascuna a differente temperatura, con coefficienti di emissione funzioni della temperatura e della lunghezza d'onda, le potenze termiche scambiate e le temperature sono collegate tra di loro da N equazioni. In esse compaiono i coefficienti di assorbimento funzioni della temperatura e di conseguenza il calcolo delle temperature a partire dalle potenze termiche note richiede metodi iterativi che hanno come punto di partenza valori arbitrari dei coefficienti stessi.

Verranno ora ricavate relazioni formalmente più semplici applicabili a disposizioni geometriche definite.

### 11.3.1. Pareti piane parallele ed indefinite

Si abbiano due superfici piane, parallele e di dimensioni e distanza tali da rendere trascurabile l'effetto di bordo. Risulta:

$$A_1 = A_2 = A$$

$$F_{12} = F_{21} = 1$$

per cui si ricava la relazione:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A\sigma_o(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1}$$

Nel caso particolare in cui le superfici siano nere ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ) si ha la relazione già trovata:

$$\dot{Q}_{12} = A\sigma_o(T_1^4 - T_2^4)$$

### 11.3.2. Superfici cilindriche coassiali ed indefinite

Nel caso di superfici cilindriche coassiali di lunghezza infinita (o comunque con effetto di bordo trascurabile) indicando con 1 il corpo contenuto, si avrà:

$$F_{12} = 1$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

da cui si ricava, per unità di lunghezza del cilindro:



$$\frac{\dot{Q}_{12}}{L} = \frac{\pi D_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right)}$$

Nel caso in cui i due cilindri siano neri si ha la relazione:

$$\frac{\dot{Q}_{12}}{L} = \pi D_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

### 11.3.3. Superfici sferiche concentriche

Nel caso di superfici sferiche concentriche si avrà:

$$F_{12} = 1$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

da cui si ricava:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\pi D_1^2 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{D_1^2}{D_2^2} \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right)}$$

### 11.3.4. Corpo in una cavità molto grande

Nel caso di un corpo piccolo completamente contenuto in un altro di dimensioni molto maggiori si avrà:

$$F_{12} = 1$$

$$A_1 \ll A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \approx 0$$

da cui si ricava:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 \alpha_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)$$

La potenza termica scambiata è, in questo caso, indipendente dal coefficiente di emissione  $\alpha_2$  della cavità. In altri termini la potenza termica scambiata dal corpo contenuto nella cavità dipende dalla temperatura della superficie della cavità e non le proprietà radiative di tale superficie.

### 11.3.5. Schermi radianti

In base all'analogia con le reti elettriche il fenomeno dello scambio radiativo in regime permanente può essere schematizzato attraverso una rete equivalente di resistenze intercalate da poli a potenziale diverso. Infatti la potenza termica  $\dot{Q}$  attraverso una superficie è provocata dalla differenza di potenziale, mentre ciò che ne ostacola il passaggio è la resistenza termica.

Ne scende immediatamente la possibilità di calcolare la potenza termica radiante nel caso di inserzione tra le due superfici di una nuova superficie

(schermo).

Lo schermo interposto tra le due superfici a temperatura  $T_1$  e  $T_2$ , si porterà ad una temperatura intermedia  $T_x$ , che nel caso di lamina sottile potrà per semplicità essere considerata uguale sulle due facce. Si ipotizza inoltre che le due superfici dello schermo ed i due coefficienti di assorbimento siano uguali. Lo schema corrispondente è quello di fig. 11.9.

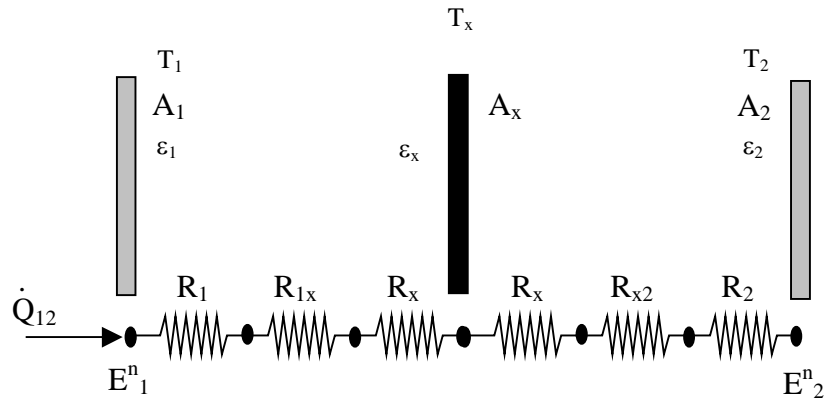


Figura 11.9 Schermo radiante

In condizioni di stazionarietà si avrà:

$$\dot{Q}_{1x} = \dot{Q}_{x2} = \dot{Q}_{12}$$

con le relazioni:

$$\dot{Q}_{1x} = \frac{\sigma_o (T_1^4 - T_x^4)}{\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1x}} + \frac{1 - \alpha_x}{\alpha_x A_x}}$$

$$\dot{Q}_{x2} = \frac{\sigma_o (T_x^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \alpha_x}{\alpha_x A_x} + \frac{1}{A_x F_{x2}} + \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 A_2}}$$

Ora sia esplicitando rispetto alla differenza di temperature e sommando membro a membro, sia sfruttando l'analogia elettrica illustrata in figura 11.9, si ottiene:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1x}} + \frac{1 - \alpha_x}{\alpha_x A_x} + \frac{1 - \alpha_x}{\alpha_x A_x} + \frac{1}{A_x F_{x2}} + \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 A_2}}$$

In caso di superfici piane parallele indefinite inoltre:

$$A_1 = A_2 = A_x = A$$

$$F_{1x} = F_{x2} = 1$$

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A\sigma_o(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + 2\left(\frac{1}{\alpha_x} - 1\right)}$$

L'inserimento dello schermo comporta quindi una riduzione della potenza termica radiante scambiata tra le superfici 1 e 2. E' facile dimostrare che la riduzione di potenza radiante scambiata dovuta all'inserimento dello schermo è tanto maggiore quanto più alto è il potere riflettente dello schermo radiante, ovvero quanto minore è il suo coefficiente di assorbimento  $\alpha_x$ .

Gli schermi radianti sono in genere costituiti da fogli sottili di materiale ad elevato potere riflettente ed elevata conducibilità termica.

Si dimostra inoltre che con N schermi di eguale coefficiente di emissione  $\alpha$ , la potenza radiante scambiata risulta

$$\dot{Q}_N = \frac{\dot{Q}}{N+1}$$

In questa relazione  $\dot{Q}$  è la potenza termica scambiata in assenza di schermi radianti.

### **Esempio**

Siano due superfici cilindriche concentriche e coassiali ( $D_1 = 10$  cm,  $D_2 = 15$  cm) rispettivamente alle temperature  $T_1 = 300$  K e  $T_2 = 800$  K.

Calcolare la potenza termica scambiata per irraggiamento, avendo supposto perfettamente trasparente il mezzo interposto, trascurabile l'effetto di bordo e sapendo che  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ . Calcolare inoltre di quanto si riduce l'irraggiamento a seguito dell'interposizione di una lamina di alluminio avente coefficiente di assorbimento  $\alpha = 0.1$  e diametro  $D = 12$  cm.

### **Soluzione**

La potenza termica scambiata, in assenza di schermo radiante, è data da

$$\frac{\dot{Q}_{12}}{L} = \frac{\pi D_1 \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right)}$$

$$\frac{\dot{Q}_{12}}{L} = \frac{\pi \cdot 0.1 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} (800^4 - 300^4)}{\frac{1}{0.5} + \frac{0.1}{0.15} \left( \frac{1}{0.5} - 1 \right)} = 2715 \text{ W/m}$$

se viene inserito uno schermo di diametro  $D$  si ha:

$$\frac{\dot{Q}_{1x2}}{L} = \frac{\pi \sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{D_1} + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha D} + \frac{1}{D} + \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2 D_2}}$$

$$\frac{\dot{Q}_{1x2}}{L} = \frac{\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} (800^4 - 300^4)}{\frac{1-0.5}{0.5 \cdot 0.1} + \frac{1}{0.1} + 2 \frac{1-0.1}{0.1 \cdot 0.12} + \frac{1}{0.12} + \frac{1-0.5}{0.5 \cdot 0.15}} = 392.7 \text{ W/m}$$

Può ora essere determinata la temperatura raggiunta dallo schermo radiante:

$$\frac{\dot{Q}_{1x}}{L} = \frac{\pi \sigma_o (T_1^4 - T_x^4)}{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{D_1} + \frac{1-\alpha}{\alpha D}}$$

$$T_x = \sqrt[4]{T_1^4 - \frac{\dot{Q}_{1x2}}{L \pi \sigma_o} \left( \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{D_1} + \frac{1-\alpha}{\alpha D} \right)} = 671 \text{ K}$$

### **Esempio**

Sia una camera avente pareti a temperatura  $T_p = 0^\circ\text{C}$  contenente aria alla temperatura  $T_a = 25^\circ\text{C}$ .

Calcolare la temperatura indicata da un termometro a mercurio, posto al centro della stanza.

E' noto il coefficiente di assorbimento del bulbo termometrico  $\alpha_t = 0.9$  ed il coefficiente convettivo in aria  $h = 5 \text{ kcal/hm}^2\text{K}$

### **Soluzione**

Dopo un tempo sufficientemente lungo l'altezza della colonna di mercurio rimane costante (condizione di equilibrio) ed il termometro si trova in uno stato stazionario nel quale l'energia ricevuta dall'esterno deve uguagliare l'energia ceduta. Il bilancio energetico si scrive infatti:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}^{\leftarrow} - \dot{L}^{\rightarrow}$$

In regime stazionario, senza scambi di lavoro, si avrà:

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

$$\dot{L}^{\rightarrow} = 0$$

In particolare, poiché gli scambi di energia termica possono avvenire solo per convezione con l'aria e per irraggiamento con le pareti il termometro indicherà una temperatura intermedia tra quella dell'aria e quella della parete. Il bilancio energetico, in regime stazionario è quindi:

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = 0$$

$$\dot{Q}^{\leftarrow} = A_t h (T_a - T_t) + A_t \alpha_t \sigma_o (T_p^4 - T_t^4)$$

Si ottiene quindi:

$$\alpha_t \sigma_o T_t^4 + h T_t - (\alpha_t \sigma_o T_p^4 + h T_a) = 0$$

Per risolvere numericamente questa equazione occorre utilizzare le temperature assolute:  $T_p = 273 \text{ K}$ ,  $T_a = 298 \text{ K}$ .

Questa equazione di quarto grado può essere risolta per tentativi ottenendosi:

$$T_t = 287 \text{ K} = 14^\circ\text{C}$$

Se, mediante il termometro, si vuole misurare la temperatura dell'aria è ovvio che l'esistenza di pareti a temperatura diversa (fredde, nella fattispecie) associate ad un grado di nerezza elevato, perturba notevolmente la misura. Si ricorre perciò all'impiego di termometri a bulbo schermato, avendo l'avvertenza di rendere il più riflettente possibile la superficie esterna dello schermo (coefficiente di assorbimento  $\alpha$  basso). In tal caso lo schermo si porterà ad una sua temperatura di regime, soluzione della stessa equazione precedente ove  $T_x$  è la temperatura incognita dello schermo. Nell'ipotesi di avere  $\alpha_x = \alpha_t = 0.1$  si ottiene  $T_x = 296 \text{ K} = 23^\circ \text{C}$ . La temperatura del termometro schermato sarà intermedia fra la temperatura dell'aria ( $25^\circ \text{C}$ ) e quella dello schermo ( $23^\circ \text{C}$ ). Si ottiene infatti  $T_t = 297.2 \text{ K} = 24.2^\circ \text{C}$ . Questa temperatura è abbastanza vicina a quella reale dell'aria.

#### 11.4. Scambio termico in cavità con tre superfici

Si consideri una cavità composta da tre superfici. Le tre superfici siano isoterme con temperature uniformi rispettivamente  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ . Le tre superfici abbiano inoltre estensioni rispettivamente  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  e siano opache, grigie e diffondenti con coefficiente di emissione  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ .

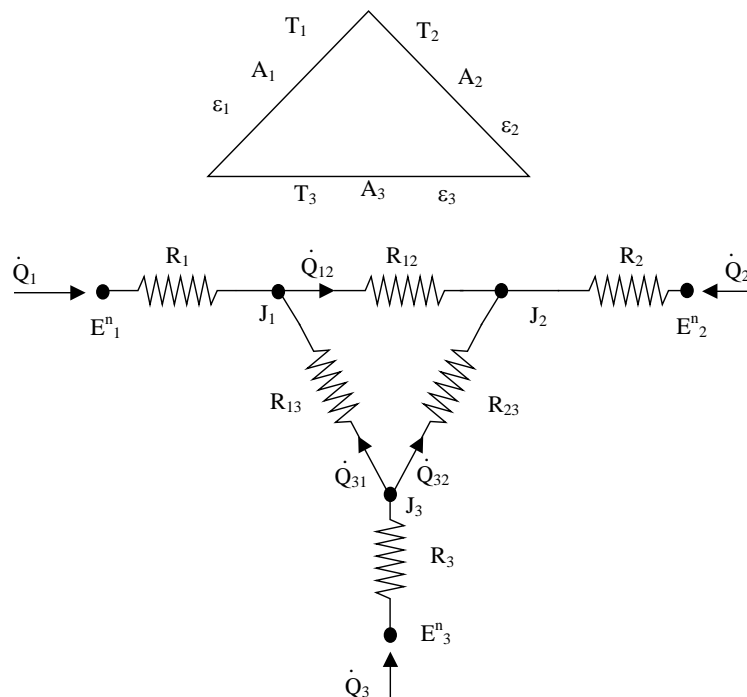


Figura 11.9 Analogia elettrica per una cavità costituita da tre superfici grigie

La determinazione delle potenze nette scambiate per ogni superficie può essere effettuata ricorrendo alla analogia elettrica e riportando una resistenza superficiale per ogni superficie ed una resistenza spaziale per ogni coppia di superfici come mostrato in figura 11.9.

Se, come in questo caso, sono note le temperature delle superfici, sono anche noti i poteri emissivi di corpo nero delle tre superfici e, per il calcolo della potenza termica netta scambiata da ogni superficie, si devono determinare le radiosità delle superfici stesse. Queste si determinano risolvendo il sistema di equazioni che deriva dall'analisi della rete triangolare illustrata. Le relazioni che si ricavano imponendo che la somma algebrica delle potenze termiche nette trasmesse ai nodi sia nulla, sono:

$$\dot{Q}_1 - \dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{31} = 0$$

$$\dot{Q}_{12} + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_{32} = 0$$

$$-\dot{Q}_{31} - \dot{Q}_{32} + \dot{Q}_3 = 0$$

In funzione dei poteri emissivi e delle radiosità si ottiene:

$$\frac{E_1^n - J_1}{R_1} + \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} = 0$$

$$\frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{E_2^n - J_2}{R_2} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}} = 0$$

$$\frac{J_1 - J_3}{R_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}} + \frac{E_3^n - J_3}{R_3} = 0$$

Una volta note le radiosità delle superfici è possibile determinare la potenza termica netta uscente da ogni superficie con le relazioni:

$$\dot{Q}_1 = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}}$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}}$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}}$$

Come casi particolari che semplificano le relazioni precedenti ci sono il caso di superficie nera che ha resistenza di superficie  $R_i = 0$  o di superficie adiabatica (reirradiante) per la quale  $\dot{Q}_i = 0$ .

## 11.5. Il sole

Il sole è la più importante sorgente di radiazioni: da essa dipende la vita

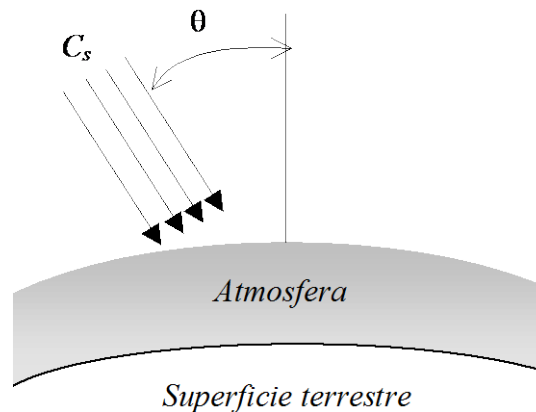
dell'uomo sulla terra. Il sole è considerato come una sfera gassosa (composta per il 73% da idrogeno, per il 25% da elio e per il rimanente 2% da altri elementi più pesanti) avente una massa  $M=2^{10}$  kg, un diametro  $D=1.4\cdot10^9$  m ed è ad una distanza media dalla terra pari a  $L=1.5\cdot10^{11}$  m.

Il disco solare, visto dalla terra, sottende un arco di 32' (poco più di mezzo grado); di conseguenza ai fini pratici i raggi solari possono essere considerati come paralleli e l'energia ad essi associata può essere misurata, prescindendo dall'angolo solido, come energia che attraversa, nell'unità di tempo, la superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione. Si chiama costante solare il flusso di energia così definito, proveniente dal sole e misurato alla distanza media della terra dal sole. Il valore della costante solare è:

$$C_s = 1353 \left\{ \text{W} / \text{m}^2 \right\}$$

La radiazione solare che incide su una superficie all'esterno dell'atmosfera ha una variazione, a causa dell'orbita ellittica della terra attorno al sole, di circa  $\pm 3.4\%$ .

La potenza solare che raggiunge la terra dipende da molti fattori quali il giorno, l'ora, le condizioni atmosferiche l'orientamento relativo della superficie terrestre rispetto alla direzione dei raggi solari ed è sicuramente inferiore alla costante solare, in quanto parte dell'energia emessa dal sole viene assorbita e diffusa dall'atmosfera terrestre, costituita da aria, anidride carbonica e sostanze inquinanti solide, liquide e gassose (fig. 11.10).



*Figura 11.10 Radiazione solare sulla superficie terrestre*

A causa di questi fenomeni la distribuzione spettrale dell'energia solare ha una variazione nell'attraversare l'atmosfera. Il potere emissivo

monocromatico solare è riportato nella figura 11.12 sia misurato all'esterno dell'atmosfera, sia sulla superficie terrestre in relazione ad una massa d'aria  $m$  pari a 1.

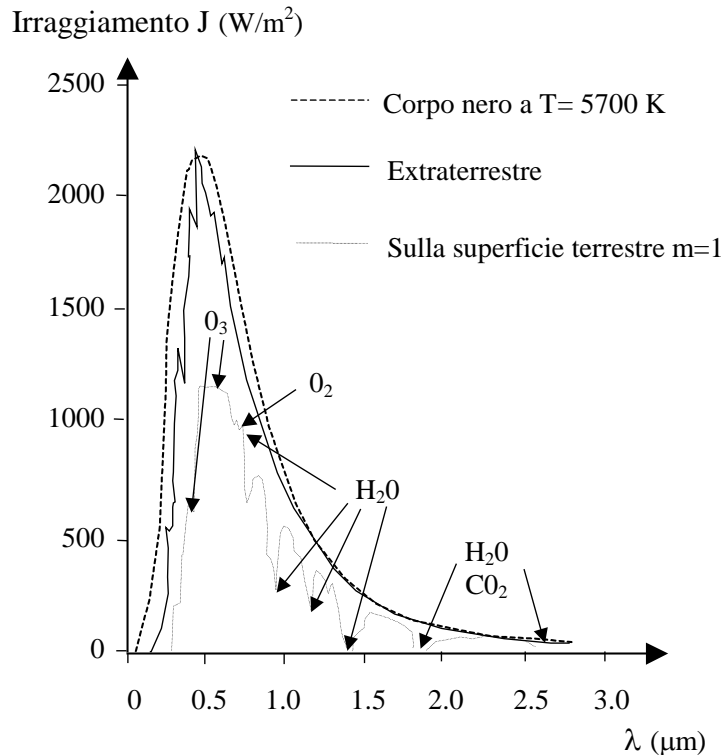


Figura 11.12 Spettro di emissione della radiazione solare

Dalla figura risulta evidente che il sole non emette come un corpo nero nel vuoto e pertanto non è possibile, dalle caratteristiche della radiazione, risalire alla temperatura della superficie emittente. Limitatamente a caratteristiche particolari è, tuttavia, lecito istituire un corpo nero equivalente, la cui temperatura può essere attribuita alla superficie solare (fotosfera). Tale equivalenza, necessariamente parziale, può essere definita in diversi modi, dando luogo a temperature convenzionali distinte ed utili a fini specifici.

Considerando quale elemento di ragguaglio la potenza globalmente irradiata nello spazio circostante, si definisce una temperatura efficace pari a quella che dovrebbe avere la fotosfera solare per emettere uguale potenza; secondo la legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$T = \sqrt[4]{\frac{C_s}{\sigma_o}} = 5753.K$$



L'intensità monocromatica di radiazione, ad una specificata lunghezza d'onda, consente invece di definire la temperatura di radiazione, come quella temperatura che dovrebbe avere la fotosfera solare, se fosse nera, per emettere in tutto lo spazio circostante la stessa potenza monocromatica. Tale temperatura varia con la lunghezza d'onda considerata: in media, nel campo del visibile ( $0.38 \leq \lambda \leq 0.78 \mu\text{m}$ ) può essere assunta pari a 5900 K, nell'infrarosso sale fino a 6000 K, mentre nell'ultravioletto la temperatura di radiazione assume valori inferiori a 5000 K.

La temperatura di colore, infine è la temperatura per la quale il corpo nero equivalente, fissate due distinte lunghezze d'onda, ha pari rapporto d'intensità monocromatica, nel senso che il rapporto delle due intensità monocromatiche di radiazione relative allo spettro solare è pari al rapporto fra le intensità monocromatiche di radiazione emesse da un corpo nero ad un'opportuna temperatura, in corrispondenza della stessa coppia di lunghezze d'onda.

Si osservi che temperatura di colore è una denominazione convenzionale, che non ha una precisa relazione con la sensazione fisiologica che determina la visione colorata.

Più complicata è l'equivalenza, non sempre possibile, fra una sorgente di radiazioni ed un opportuno corpo nero, al fine di ottenere una uguale sensazione cromatica rispetto all'occhio umano medio. Due sorgenti che soddisfano tale condizione sono dette metameriche. La radiazione solare, filtrata dall'atmosfera terrestre, produce circa la stessa sensazione cromatica della radiazione emessa da un corpo nero alla temperatura di 6500 K.

La temperatura effettiva del sole può essere oggetto solo di stime indirette, sicuramente essa è minima in superficie ed aumenta progredendo verso l'interno della sfera solare: tenendo conto delle reazioni nucleari che si ritiene abbiano luogo all'interno, la temperatura profonda del sole può essere considerata nell'ordine di  $10^7$  K.

## 11.6. Scambio termico sulla superficie terrestre

Circa il comportamento dei corpi investiti da radiazioni solari, si può dire che in generale la quantità di energia incidente su un corpo è la somma dell'energia proveniente direttamente dal sole e dell'energia solare diffusa dall'atmosfera (essa varia dal 10% al 50% a seconda della copertura del cielo).

Se la superficie ricevente non è normale alla direzione dei raggi solari, l'energia direzionale che incide per unità di area  $G_i$ , è data da:

$$G_i = G \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione dei raggi e la normale alla superficie.

La frazione di energia incidente assorbita da una superficie dipende poi

sia dalla sua natura, sia dalla composizione spettrale dell'energia solare. Come evidenziato già nella figura 11.12 la composizione spettrale dell'energia solare che incide sulla superficie della terra è funzione della grandezza chiamata massa d'aria ( $m$ ). Tale grandezza tiene conto del cammino percorso dalla radiazione nell'attraversare l'atmosfera ed è pari al rapporto tra il percorso più breve che i raggi solari potrebbero compiere ed il percorso effettivo. Indicando con  $\theta$  l'angolo di zenith (l'angolo compreso tra la normale alla superficie terrestre e l'angolo di incidenza della radiazione) la massa d'aria è data dalla relazione:

$$m = \frac{1}{\cos \theta}$$

Osservando sempre la distribuzione spettrale si nota come la radiazione solare sulla superficie terrestre sia concentrata nell'intervallo di lunghezza d'onda  $0.3 < \lambda < 2.5 \mu\text{m}$ . Si nota la presenza di elevati effetti di assorbimento della radiazione da parte di alcuni gas. In particolare l'ozono ( $\text{O}_3$ ) ha capacità filtrante per le lunghezze d'onda inferiori a  $0.4 \mu\text{m}$  (zona dell'ultravioletto); il vapore d'acqua e la  $\text{CO}_2$  attenua la radiazione per le lunghezze d'onda nell'infrarosso. La capacità dell'ozono di attenuare le radiazioni ultraviolette, che sono nocive, giustifica l'importanza di limitare l'impiego dei CFC che sono in grado di distruggere l'ozono dell'atmosfera.

L'atmosfera influenza la radiazione solare sulla superficie terrestre non solo per la capacità di assorbire le radiazioni ma anche per la presenza di fenomeni di scattering. Tali fenomeni si differenziano in scattering molecolare ed in "mie scattering". Il primo caso è dovuto alle molecole di gas e/o vapore che provocano una riflessione della radiazione in tutte le direzioni ottenendosi una radiazione diffusa con anche una riflessione della radiazione incidente. Nel secondo caso l'interazione tra la radiazione e le particelle di aerosol e di polvere dà origine ad una radiazione concentrata nella direzione dei raggi incidenti. Questi fenomeni consentono di scomporre la radiazione che raggiunge la superficie terrestre in una componente diretta ed in una componente diffusa.

La componente diretta è presente nelle giornate serene e durante le ore diurne mentre la componente diffusa è presente in ogni situazione ambientale e di orario ed è l'unica componente presente di notte e durante le giornate molto nuvolose. La valutazione dell'emissione dell'atmosfera viene normalmente effettuata introducendo il concetto di temperatura equivalente di cielo da cui si ricava che il potere emissivo dell'atmosfera è:

$$E_{\text{atm}} = \sigma_o T_{\text{cielo}}^4$$

La temperatura equivalente di cielo dipende dalle condizioni atmosferiche e varia nell'intervallo 230-285 K. I valori inferiori si hanno con condizioni di cielo sereno e con poca umidità mentre i valori maggiori si

hanno con cielo coperto e con elevato tasso di umidità.

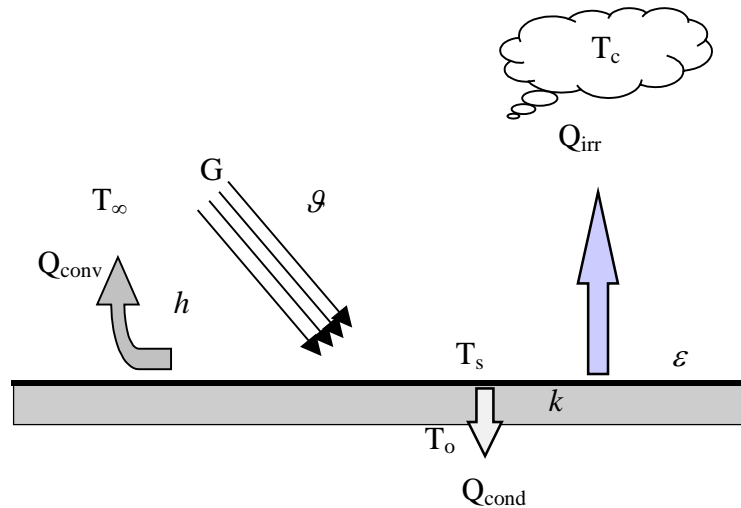


Figura 11.13 Schematizzazione degli scambi energetici di una superficie disposta sulla superficie terrestre

La determinazione della temperatura di equilibrio di una superficie investita dalla radiazione solare e disposta sulla superficie terrestre (fig. 11.13) è quindi possibile con l'equazione di bilancio energetico illustrata nel § 1.5:

$$\alpha_s SG \cdot \cos \vartheta + \frac{kS}{L}(T_o - T_s) - hS(T_s - T_\infty) - \varepsilon \sigma_o S(T_s^4 - T_{\text{cielo}}^4) = 0$$

In questa relazione  $G$  rappresenta l'irraggiamento della superficie (radiazione diretta),  $\vartheta$  l'angolo tra la direzione di incidenza dei raggi solari e la normale alla superficie,  $L$  lo spessore della soletta. Nel caso di una superficie adiabatica e non investita da una radiazione diretta, come può esserci di notte, la temperatura di equilibrio della superficie è inferiore alla temperatura dell'aria e questo giustifica la formazione di ghiaccio nelle notti fredde e serene.

E' da osservare inoltre che le radiazioni che interessano l'irraggiamento ambientale intervengono in due intervalli di lunghezza d'onda molto diversi: la radiazione solare nelle regione a inferiori lunghezze d'onda ( $0.3-0.7 \mu\text{m}$ ) mentre la radiazione terrestre ed atmosferica in un intervallo a più elevate lunghezze d'onda ( $4-40 \mu\text{m}$ ). Su questa differenza di lunghezze d'onda è basato il funzionamento delle superfici selettive utilizzate per lo sfruttamento dell'energia solare. Il coefficiente di assorbimento della radiazione solare è differente dal coefficiente di emissione alle temperature ambientali come illustrato, per alcuni materiali, in tabella 11.I.

Superficie	$\alpha_s$	$\varepsilon$
<i>Alluminio</i>		
Lucido	0.09	0.03
Anodizzato	0.14	0.84
<i>Rame</i>		
Lucido	0.18	0.03
Ossidato	0.65	0.75
<i>Acciaio inox</i>		
Lucido	0.37	0.60
Opaco	0.50	0.21
<i>Metalli placcati</i>		
ossido di nickel nero	0.92	0.08
cromo nero	0.87	0.09
Calcestruzzo	0.60	0.88
<i>Marmo bianco</i>	0.46	0.95
<i>Laterizio rosso</i>	0.63	0.93
<i>Asfalto</i>	0.90	0.90
<i>Vernice nera</i>	0.97	0.97
<i>Vernice bianca</i>	0.14	0.93
<i>Neve</i>	0.28	0.97
<i>Pelle umana</i>	0.62	0.97

Tabella 11.1 Coefficienti di assorbimento solare  $\alpha_s$  ed emissività  $\varepsilon$  a temperatura ambiente per alcune superfici

## 11.7. Irraggiamento e misura della temperatura

La radiazione emessa da una superficie nera nel vuoto è funzione semplice e nota della temperatura della superficie emittente. Misurando tale radiazione è pertanto facile risalire alla temperatura se la superficie è nera, meno facile, ma non impossibile, se la superficie è di natura generica e si trova immersa in un mezzo assorbente o disperdente.

Nel caso di superfici o corpi ad elevata temperatura la pirometria ottica, che è un capitolo fondamentale della termometria, è l'unica tecnica possibile non prevedendo un contatto diretto tra un termometro ed il corpo di cui si vuole misurare la temperatura. Un altro caso in cui si deve ricorrere alla pirometria ottica è quando si debbano eseguire misure a distanza, senza contatto fisico con la sostanza di cui si vuol misurare la temperatura.

Strumenti in grado di misurare l'intensità della radiazione nello spazio sono generalmente detti radiometri e quando sono impiegati al fine di dedurre la temperatura di corpi emittenti radiazioni termiche, prendono il nome specifico di pirometri ottici.

Il caso più semplice, per il quale è possibile raggiungere un soddisfacente

rigore metrologico, è quello in cui la superficie emittente sia nera. Diversamente, non solo intervengono le proprietà, poco note, delle varie superfici, ma si ha anche che la radiazione intercettata dal pirometro è somma di una quota emessa e di una quota riflessa, che non è possibile separare.

Quando necessario, si ovvia a tale inconveniente associando al corpo di cui si vuol misurare la temperatura un conveniente corpo nero in equilibrio termodinamico.

Il corpo nero può essere ottenuto, ad esempio, praticando un foro cilindrico profondo almeno dieci centimetri e collimando il radiometro in modo da raccogliere esclusivamente le radiazioni provenienti dal foro ottenendosi con questo artificio risultati soddisfacenti.

La misura radiometrica della temperatura, in termometria fondamentale, si realizza per temperature superiori al punto di solidificazione dell'oro a pressione atmosferica (1377.58 K), mentre nelle applicazioni industriali e di laboratorio trova impiego a partire dalla temperatura ambiente.

Nella pratica corrente vengono impiegati tre tipi fondamentali di strumenti:

- pirometri a radiazione totale: è basato sulla misura della radiazione totale mediante un elemento termosensibile e presuppone la conoscenza, sperimentale, del coefficiente di assorbimento della superficie;
- pirometri a radiazione monocromatica: sono anche detti a scomparsa di filamento, perché si basa sulla regolazione della intensità di una sorgente di riferimento costituita dal filamento di una lampadina, fino ad uguagliare l'intensità proveniente dal corpo la cui temperatura è oggetto della misura. La radiazione è filtrata attraverso un filtro rosso che permette di solito il passaggio della sola radiazione avente una lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$ ;
- pirometri a due colori: si dimostra che fissata la coppia di lunghezze d'onda, la temperatura della superficie nera risulta una funzione lineare del logaritmo naturale del rapporto fra le intensità monocromatiche rilevate dallo strumento.

Nella classe dei pirometri potrebbe anche rientrare il termografo infrarosso, strumento in grado di misurare la potenza radiante infrarossa emergente da una superficie. Esso rende possibile il rilievo di mappe termiche superficiali di temperatura.

E' noto che tutti i corpi emettono energia sotto forma di radiazione elettromagnetiche e che la quantità (potere emissivo) e la qualità (potere emissivo monocromatico,) sono differenti da superficie a superficie a seconda della loro temperatura e della loro natura.

Se un corpo ha una temperatura non uniforme emetterà energia in misura diversa da punto a punto essendo, in particolare, maggiore l'energia emessa

in ogni zona dello spettro, dalle zone più calde. I corpi grigi o colorati emettono, a parità di temperatura, in minor misura se confrontati con i corpi neri.

Si ricorda inoltre che nello spettro di emissione si individuano alcune bande specifiche:

- zona del visibile:  $0.3 \mu\text{m} < \lambda < 0.75 \mu\text{m}$ ;
- zona dell'infrarosso fotografico:  $0.75 \mu\text{m} < \lambda < 1.2 \mu\text{m}$ . E' così detta in quanto esistono emulsioni sensibili a questa banda dello spettro consentendo una riproduzione su lastra fotografica dell'immagine. Ha applicazione in campo fotografico e nei sensori per la visione notturna;
- zona dell'infrarosso termico:  $\lambda > 1.2 \mu\text{m}$ .

Nel caso della termografia infrarossa si utilizzerà una banda dello spettro completamente situata nell'infrarosso termico ( $2 \mu\text{m} < \lambda < 6 \mu\text{m}$ ) rendendo così possibili misure su oggetti relativamente "freddi", che nella zona del visibile o dell'infrarosso fotografico non emettono in modo apprezzabile. Nella banda di sensibilità dei sensori per termografia il coefficiente di assorbimento dell'aria è particolarmente basso mentre il potere emissivo delle superfici a temperatura ambiente è sufficientemente elevato.

Schematicamente l'apparecchiatura di termovisione è costituita da una camera con ottica al germanio trasparente all'infrarosso che fornisce l'immagine infrarossa della superficie. Questa immagine viene esplorata in tempo reale con un sistema di scansione ottico-meccanico. Le radiazioni vengono in questo modo a cadere su un rivelatore (antimoniuro di Indio) e trasformate in segnale elettrico che viene digitalizzato e memorizzato. Le applicazioni più note si hanno nel campo medico per la rilevazione di tumori superficiali e nel campo della fisica tecnica degli edifici per la rilevazione e la quantificazione delle dispersioni termiche dell'edificio.

## 11.8. Esercizi

*Si consideri un forno di forma cubica con lato  $L = 5 \text{ m}$  le cui superfici si possano considerare nere. Le superfici superiore, laterali ed inferiori sono mantenute ad una temperatura costante pari rispettivamente a  $1500 \text{ K}$ ,  $800 \text{ K}$  e  $500 \text{ K}$ . Determinare la potenza termica  $Q_{il}$  scambiata per irraggiamento tra la superficie inferiore e quella laterale e la potenza  $Q_{si}$  scambiata tra la superficie superiore e quella inferiore. ( $Q_{il} = 393.6 \text{ kW}$ ,  $Q_{si} = 1319 \text{ kW}$ )*

*Un sottile foglio di alluminio, con emissività  $\varepsilon = 0.1$  per entrambe le superfici, viene posto tra due piastre parallele molto grandi di emissività rispettivamente  $\varepsilon_1 = 0.2$  e  $\varepsilon_2 = 0.7$  e con temperature rispettivamente  $T_1 = 800 \text{ K}$  e  $T_2 = 500 \text{ K}$ . Determinare la potenza termica scambiata in assenza di schermo e con lo schermo.*

$$(Q = 3625 \text{ W/m}^2, Q_{\text{schermo}} = 805.6 \text{ W})$$



