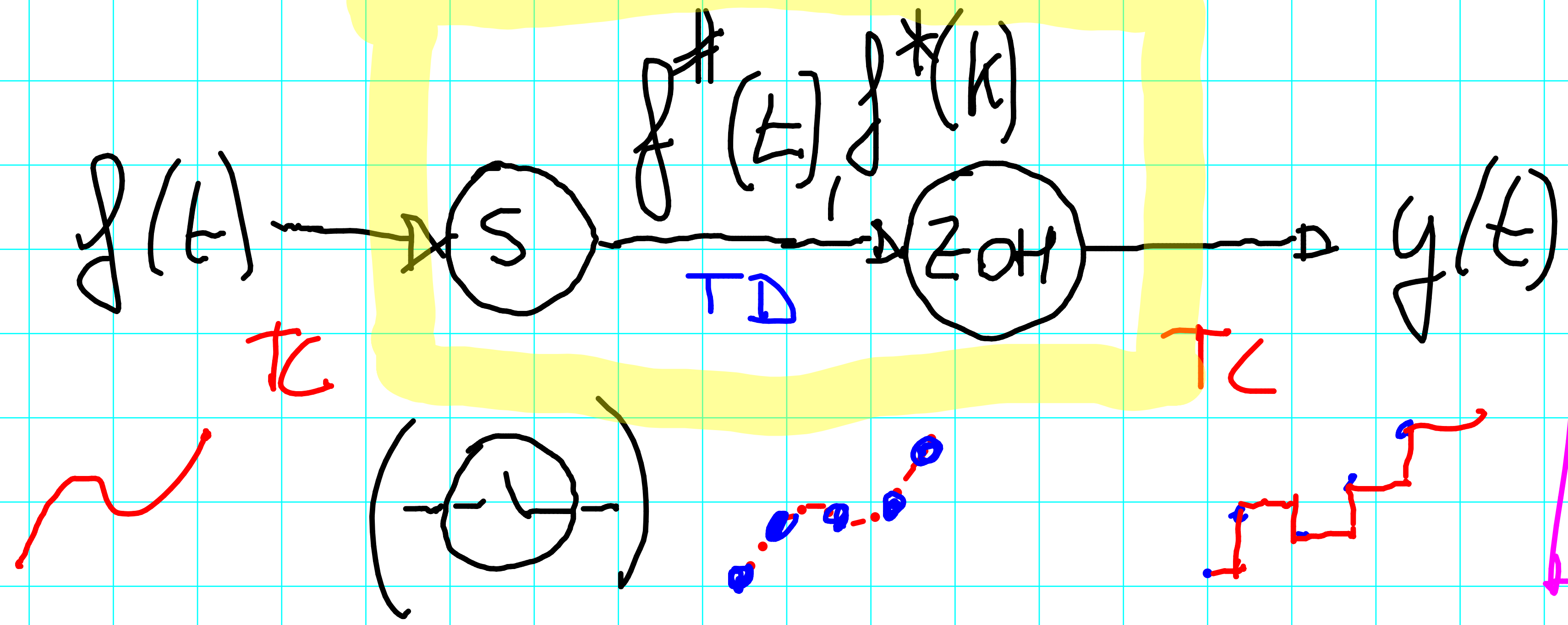
07/05/2020

③ Scelta di T_s (effetto di utilizzo di S&H)

Problema:



$$\boxed{y(t) \neq f(t)}$$

Posso dotare questo sistema a TC di una FdT?

• Def: impulso di Dirac $\delta(t)$

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$

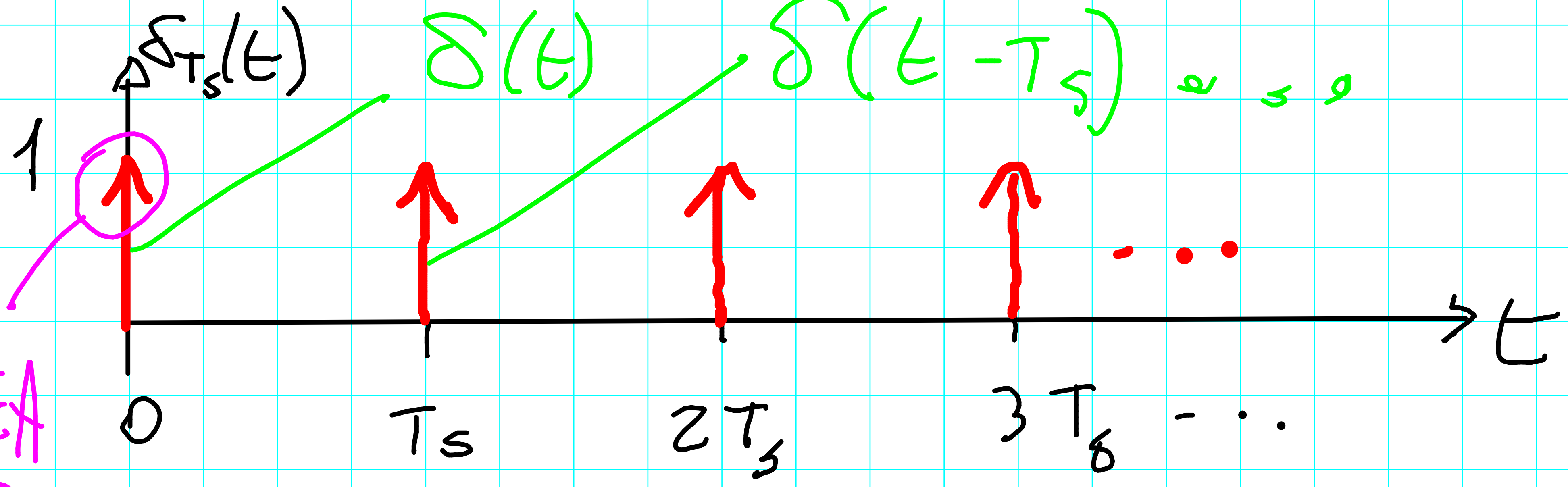
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t-\tau)}_{\neq 0 \text{ solo in } t=\tau} f(t)\,dt = f(\tau)$$

• Def: treno d'impulsi unitari a passo T_s

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT_s)$$

↑ o anche $-\infty$
ma a noi interessano quelli "con inizio"

Notazione:



con questo indico impulsi di AREA unitaria

- Modello del campionatore

$$\underset{f(t)}{TC} \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \begin{matrix} f^*(k) = f(kT_s) \\ f^\#(t) \end{matrix}$$

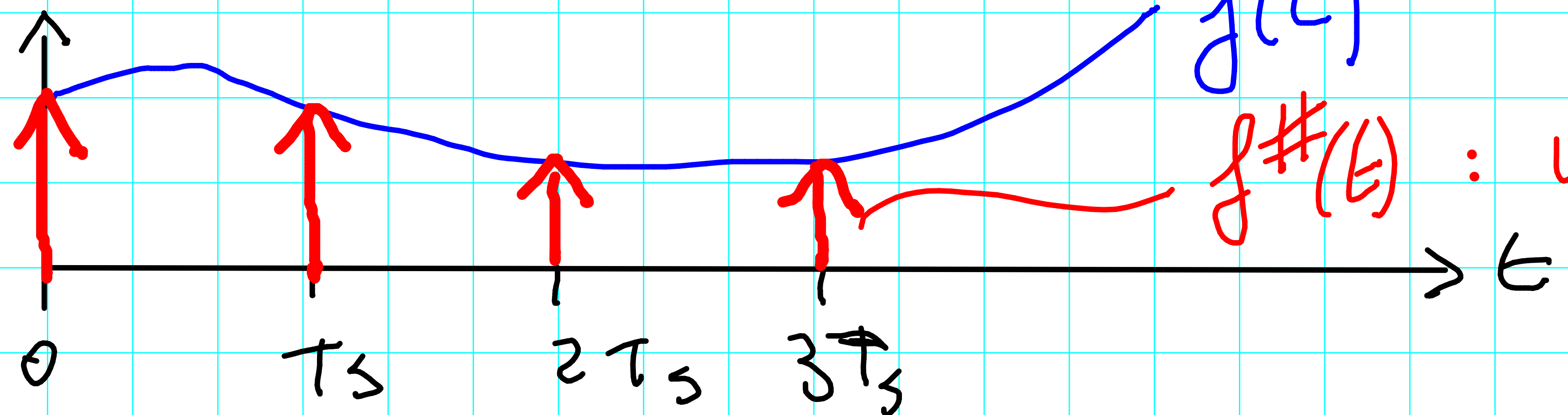
CAMPIONAMENTO (sequenza, k INTERO)

Treno di impulsi a TC che mostreremo equivalere a f^*

Ho bisogno di rappresentare f^* con un segnale a TC per dotarlo di TDL

Ancora a TC: $$f^\#(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{\text{indip. da } k} \delta(t-kT_s) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT_s) = f(t)\,\delta_{T_s}(t)$$

Notazione:



$f(t)$

$f^\#(t)$: impulsi di AREA $f(kT_s)$

OSS: posso anche scrivere

$$f^{\#}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\underbrace{kT_s}_{\text{qui c'era } t \text{ ma } \delta=0 \text{ se non in } kT_s})\,\delta(t-kT_s)$$

• TDL di $f^{\#}(t)$:

$$F^{\#}(s) = \int_0^{\infty} f^{\#}(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\,\delta(t-kT_s)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \int_0^{\infty} \delta(t-kT_s)\,e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\,e^{-skT_s}$$

• TZ di $f^*(k)$

$$f^*(k) = f(kT_s) \Rightarrow F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\, z^{-k}$$

QUINDI

$$F^*(e^{sT_s}) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\, e^{-skT_s} = F^\#(s)$$

NB è la trasf. exp. di campionamento

cioè INFORMATIVAMENTE

F^* (TZ) equivale a $F^\#$ (TDL)

come nel tempo $f^*(k)$, sequenza a TD, equivale a $f^\#(t)$, treno d'impulsi a TC

MA CHE RELAZIONE C'È tra le TDL di $f(t)$ e $f^{\#}(t)$?

cioè: $\mathcal{L}[f(t)] \xrightarrow{?} \mathcal{L}[f^{\#}(t)]$

Premessa: ricordando la def $\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s)$

vale il risultato

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$$

(sviluppo in serie di Fourier, libro)

Allora

$$f^{\#}(t) = f(t)\,\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip. da } k}}{f(t)}\, e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$$

Prop. TDL

se $\mathcal{L}[v(t)] = V(s)$

Allora $\mathcal{L}[v(t)\,e^{\lambda t}] = \int_0^\infty v(t)\,e^{\lambda t}\,e^{-st}\,dt = \int_0^\infty v(t)\,e^{-(s-\lambda)t}\,dt$

$= V(s-\lambda)$

Quindi

ω_s, F. di camp.

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}\right] = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s-jk\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

LIN della TDL

TDL di $f(t)$

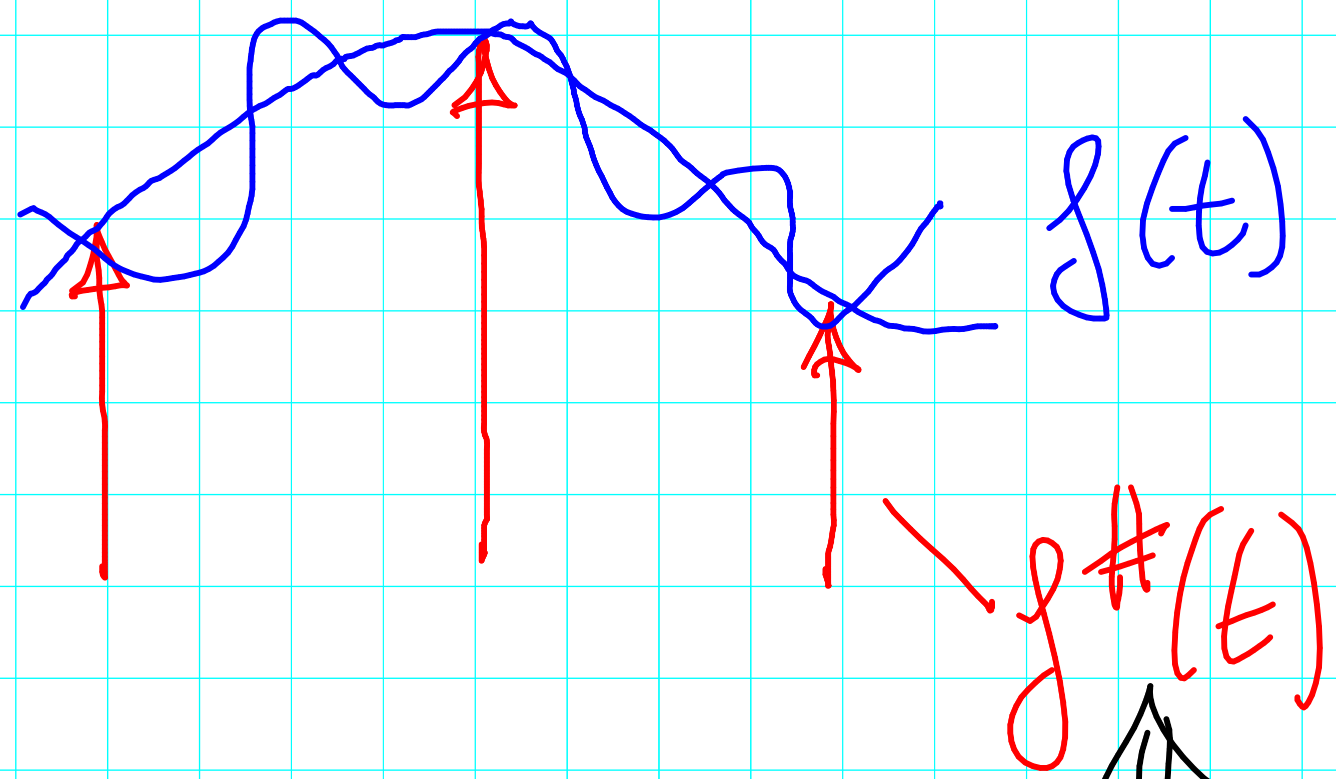
Ovvero

$$\underbrace{F^{\#}(s)}_{\text{TDL del segnale campionato visto a TC}} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s-jk\omega_s)$$

TDL del

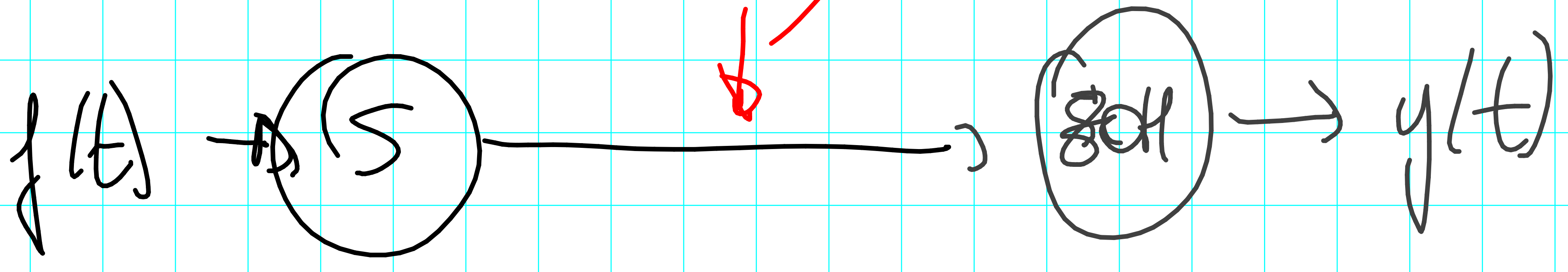
Segnale campionato visto a TC

Motivazione intuitiva:



contiene in un certo senso "∞ repliche" di una f(t) "fondamentale"

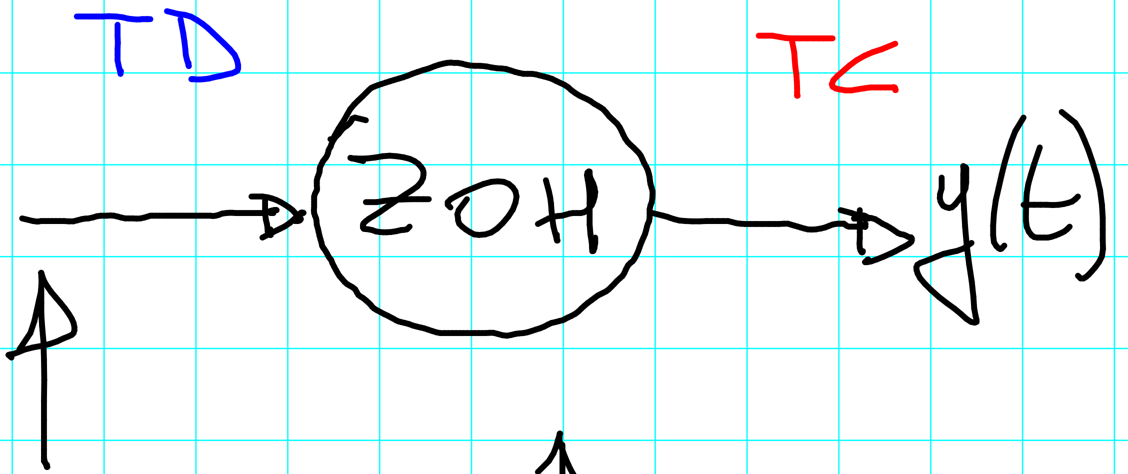
Voi siete qui



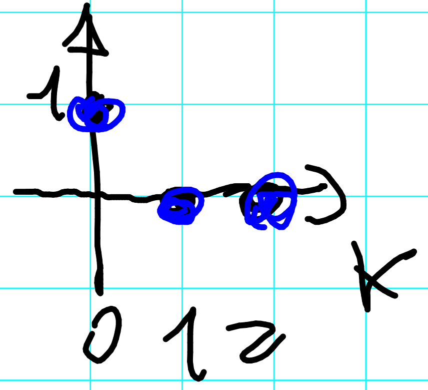
abbiamo la TDC di questo nella versione a TC $f^*(t)$

equivalente alla sequenza a TD $f^*(k)$

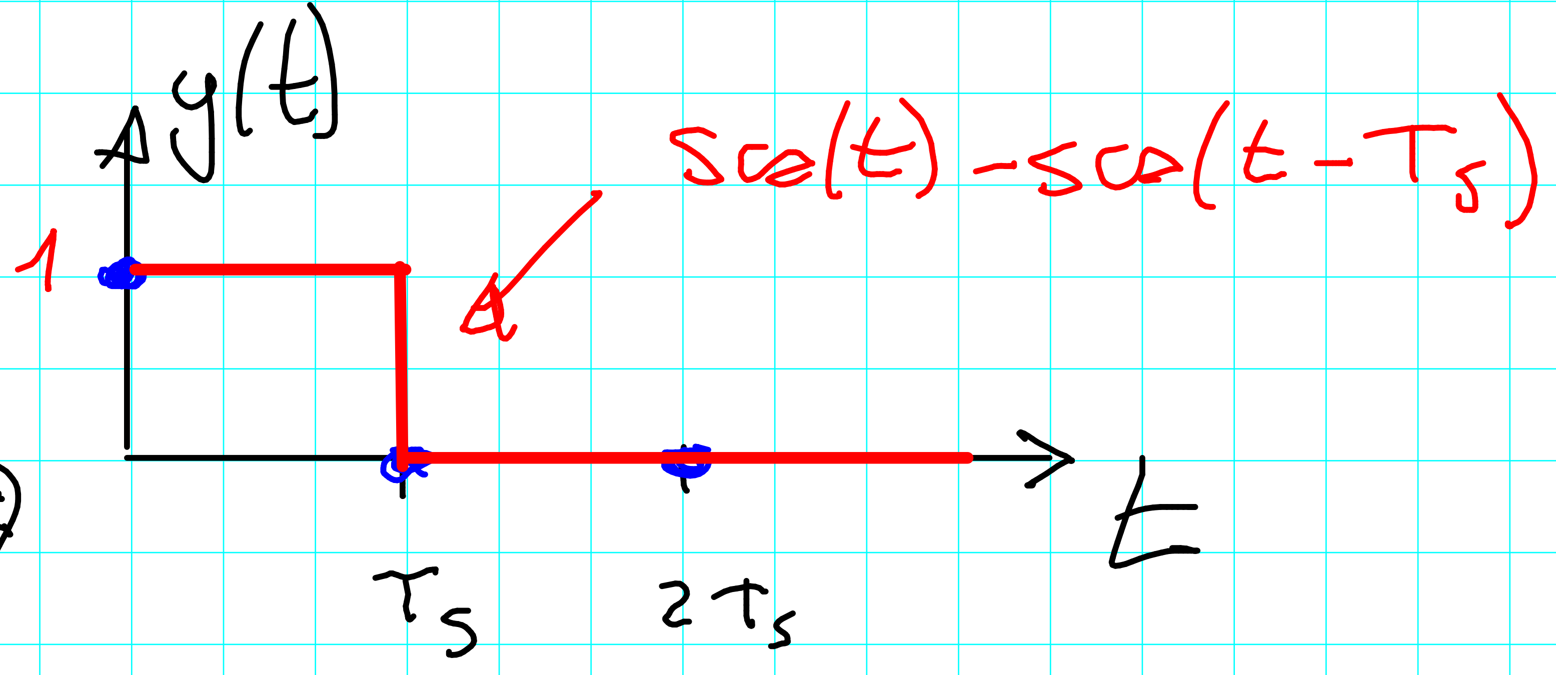
- Ora consideriamo lo ZOH



$$f^*(k) = \mathrm{imp}(k)$$



$\Longrightarrow$



CHE EQUIVALE nel TC

$$a \; f^{\#}(t) = \mathrm{imp}(t) = \delta(t)$$

Quindi posso pensare ZOH (LTI) come

$$\mathrm{imp}(t) \longrightarrow \boxed{\text{ZOH}} \longrightarrow \mathrm{sca}(t) - \mathrm{sca}(t - T_s)$$

$\mathcal{L}$

$$\mathrm{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \qquad \mathrm{sca}(t) - \mathrm{sca}(t-T_s) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_s}$$

$$\text{FdT dello ZOH} = \frac{\mathcal{L}[\text{uscita}]}{\mathcal{L}[\text{ingresso}]} = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$$

tramite l'interpretazione $g^\#$

Allora mettendo tutto insieme

$$f(t) \longrightarrow S \xrightarrow{f^\#(t),\ f^*(k)} ZOH \longrightarrow y(t)$$

TDL $F(s)$

TDL , TZ

$F^\#(s)$, $F^*(z)$

$$Y(s) = \frac{1-e^{-sT_s}}{s} F^\#(s) = \underbrace{\frac{1-e^{-sT_s}}{sT_s}}_{H_0(s),\ \text{FdT di S\&H}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s-jk\omega_s)$$

TDL del segnale campionato e mantenuto $= H_0(s) \left(\text{TDL del segnale di partenza} + \infty \text{ sue repliche a distanza } \omega_s \right)$

$\Rightarrow$ Fenomeno dell'Aliasing

Occorre che ω_s sia almeno il doppio della max ω contenuta in $f(t)$, teorema di Shannon

Supponendo quindi che T_s sia ben scelto, ovvero non vi siano nel segnale campionato componenti (significative) a frequenze superiori a $\omega_s/2$, ci basta

1) tener conto della sola "fondamentale" $F(s)$

2) considerare $H_0(j\omega)$ solo per $\omega < \omega_s/2$

Per $\omega < \omega_s/2$

$$H_0(j\omega) \simeq e^{-j\omega T_s/2}$$

$$\Downarrow$$

$$H_0(s) \simeq e^{-sT_s/2}$$

S&H $\simeq$ ritardo di mezzo passo