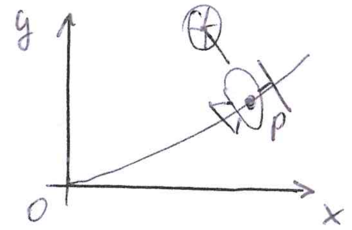
ESERCIZIO BONUS



durante la prima fase di decollo, la posizione P del baricentro di un elicottero è nota in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 2t^2 \ [m] \\ y = 0.04t^3 \ [m] \end{cases} \qquad t \ [s]$$

1) calcolare la traiettoria $y(x)$

2) al tempo $t = 10 \ [s]$ determinare:

A) VETTORE POSIZIONE $\vec{P} = (P - O)$

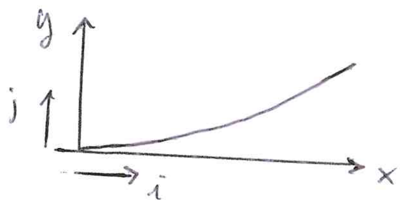
B) VETTORE VELOCITÀ $\vec{v}_p$

C) VETTORE ACCELERAZIONE $\vec{a}_p$

---

1) TRAIETTORIA

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 0.04t^3 \end{cases} \rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow y = g(x) = 0.04 \left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}$$



TRAIETTORIA $\vec{P}(t) = 2t^2\vec{i} + 0{,}04t^3\vec{j}$

è il luogo delle posizioni con $t \in [t_0, t_f]$

2A) POSIZIONE A $t = 10s$

$$\begin{cases} x(10) = 200 \ [m] \\ y(10) = 40 \ [m] \end{cases} \qquad \vec{P}(10) = 200\vec{i} + 40\vec{j}$$

quanto vale l'ascissa curvilinea in $t = 10 \ [s]$?

$$S(t) = S(10) = \int_0^{10} \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2} \, dt \underset{*}{=} \int_0^{10} \sqrt{16t^2 + 0.0144t^4} \, dt = 204{,}435 \ [m]$$

I.E. Numero reale che identifica la lunghezza della traiettoria percorsa

$$* \int_0^{10} t \left(16 + 0.0144t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left.\frac{\left(0.0144t^2 + 16\right)^{3/2}}{3 \cdot 0.0144}\right|_0^{10} = 204{,}435 \ [m]$$

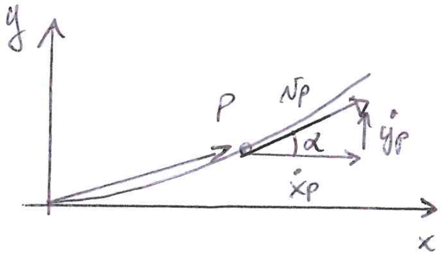
2B) velocità a $t = 10\,[s]$

$$\vec{v}_p = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} \overset{(4t\,\vec{i} + 0.12t^2\,\vec{j})}{=} 40\,\vec{i} + 12\,\vec{j}\ [m/s]$$

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\vec{t}$$

$s = s(t)$ ASCISSA CURVILINEA

$\vec{t}$ VETTORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA



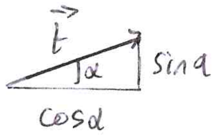
$$v_p = |\vec{v}_p| = \sqrt{\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2} = 41{,}76\ \left[\frac{m}{s}\right] = \dot{s}$$

$$\dot{s} = |\vec{v}_p|$$

versore $\vec{t}$: $\vec{t} = \dfrac{\vec{v}_p}{|\vec{v}_p|} = \dfrac{40}{41{,}76}\,\vec{i} + \dfrac{12}{41{,}76}\,\vec{j} = 0.958\,\vec{i} + 0.287\,\vec{j}$

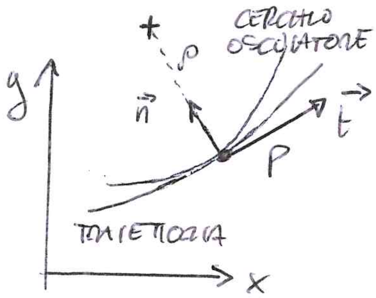
VERIFICHIAMO LA TANGENZA: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0.3$

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)\right\} = \frac{d}{dx}\left\{0.04\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}\right\}\Bigg|_{x=200m} = 0.04\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2}}\,\Bigg|_{x=200m} = 0.3$$



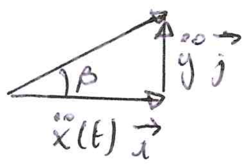
$\operatorname{tg}(\alpha) = 0.3$ $\quad \alpha = 16.7°$ $\quad \begin{cases} \cos\alpha = 0.958 \\ \sin\alpha = 0.287 \end{cases}$

2c) ACCELERAZIONE A $t = 10\,[s]$



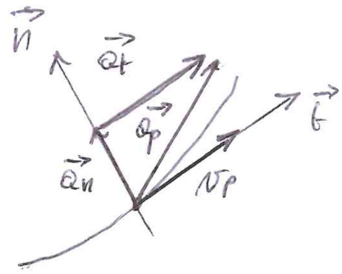
$$\vec{a}_p = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} = 4\,\vec{i} + 0.24\,t\,\vec{j} =$$
$$= 4\,\vec{i} + 2.4\,\vec{j}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 4\ [m/s^2] \\ \ddot{y}(t) = 2.4\ [m/s^2] \end{cases}$$



$$\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) \cong 31°$$

Componenti normale e tangenziale $\begin{cases} \vec{a}_t = \ddot{s}\,\vec{t} \\ \vec{a}_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n} \end{cases}$



NOTI: $\vec{a}_P$, $\vec{t}$, $\dot{s}$ RICAVARE: $\ddot{s}$, $\vec{a}_n$, ρ

- RICAVO $\ddot{s}$ usando il prodotto scalare: $(\vec{a}_t \parallel \vec{v}_P \parallel \vec{t})$

$$\ddot{s} = \underbrace{\vec{a}_P}_{\text{NOTO}} \times \vec{t} = \ddot{s}\,\vec{t} \times \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\cancelto{0}{\vec{n} \times \vec{t}} =$$

$$= (4\vec{i} + 2.4\vec{j}) \times (0.958\vec{i} + 0.287\vec{j}) =$$

$$= 3.83 + 0.69 = 4.52\ [m/s^2]$$

- RICAVO $\vec{a}_n$, ρ e $\vec{n}$

MODO 1 $|\vec{a}_P|^2 = \ddot{x}_P^2 + \ddot{y}_P^2 = 21,76\ \frac{m}{s^2}$

ma $|\vec{a}_P|^2 = \ddot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2 \Rightarrow \frac{\dot{s}^2}{\rho} = 1.15\left[\frac{m}{s^2}\right] = |\vec{a}_n|$

sapendo che $\vec{a}_P = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n} \rightarrow \vec{n} = \dfrac{\vec{a}_P - a_t\,\vec{t}}{a_n} = -0,287\vec{i} + 0.958\vec{j}$

e sapendo $\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = 1.15\left[\frac{m}{s^2}\right] \rightarrow \rho = 1516.4\ [m]$

MODO 2 calcolo il versore $\vec{n}$ usando il vettore binormale $\vec{b} \perp xy$

$$\vec{b} = \frac{\vec{v}_P \wedge \vec{a}_P}{|\vec{v}_P \wedge \vec{a}_P|} = \vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.958 & 0.287 & 0 \end{vmatrix} = -0.287\vec{i} + 0.958\vec{j}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}_P \times \vec{n} = (4\vec{i} + 2.4\vec{j}) \times (-0.287\vec{i} + 0.958\vec{j}) = 1.15\left[\frac{m}{s^2}\right]$$