19/03/2020

06/05/2014 E1

E1) Dato il SD NL a TC

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 + u \\
\dot{x}_2 = x_1 e^{x_2} \\
y = x_1 (x_2 - u) + u^2
\end{cases}
$$

1) stati e uscite di ep. per $u(t) = \bar{u} = -1$?

2) stabilità degli ep. eventualmente trovati ?

1) Equilibri

$$\begin{cases} \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1 e^{\bar{x}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = -\bar{u}$$

per $\bar{u} = -1$ $\exists$ il solo ep. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{y} = \bar{x}_1(\bar{x}_2 - \bar{u}) + \bar{u}^2 = 1$$

Sistema linearizzato e stab. equilibri

- Sist. lin. AS $\Rightarrow$ equilibrio AS
- Matrice A del sist. lin. con almeno 1 autovalore con $Re > 0$ $\Rightarrow$ equilibrio I
- Altrimenti $\Rightarrow$?

2) Stab. equilibrio

Calcolo $f_x = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ e^{x_2} & x_1 e^{x_2} \end{bmatrix}$

Nell'equilibrio $f_x \big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 1, \bar{u} = -1$

Autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -e & s \end{bmatrix} = 0 \qquad s^2 - e = 0$$

1 autovalore con $\operatorname{Re} > 0 \Rightarrow$ eq. /

$\square$

E2 | 04/05/2015, E1

Dato il SD LTI SISO a TC

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

1) AS/S/I?

2) FdT $G(s)$?

3) $y(t)$ prodotto da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)$?

1) Autovalori di A

$$\det \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + s - 110 + 108 = 0$$

$$s^2 + s - 2 = 0$$

1 variazione di segno

1 aut. con Re > 0

Sistema I

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

2)
$$G(s) = c(sI-A)^{-1}b + d$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 12 & s-10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-10 & 9 \\ -12 & s+11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{//} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3s+3 \\ -3s+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{//} \left(-6s+6-3s+3 \right)$$

$$= \frac{-9s+9}{(s+2)(s-1)} = \frac{-9\cancel{(s-1)}}{(s+2)\cancel{(s-1)}} = \frac{-9}{s+2}$$

3) Mov. Forzato ($x(0)=0$) prodotto da $u(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)$

$$U(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow Y(s) = G(s)\,U(s) = -\frac{18}{s(s+2)}$$

Uso Heaviside

$$Y_1(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2}$$

$$\alpha(s+2) + \beta s = -18$$

$s = 0$ $\quad 2\alpha = -18$ $\quad \alpha = -9$

$s = -2$ $\quad -2\beta = -18$ $\quad \beta = 9$

Quindi $Y(s) = -\dfrac{9}{s} + \dfrac{9}{s+2}$

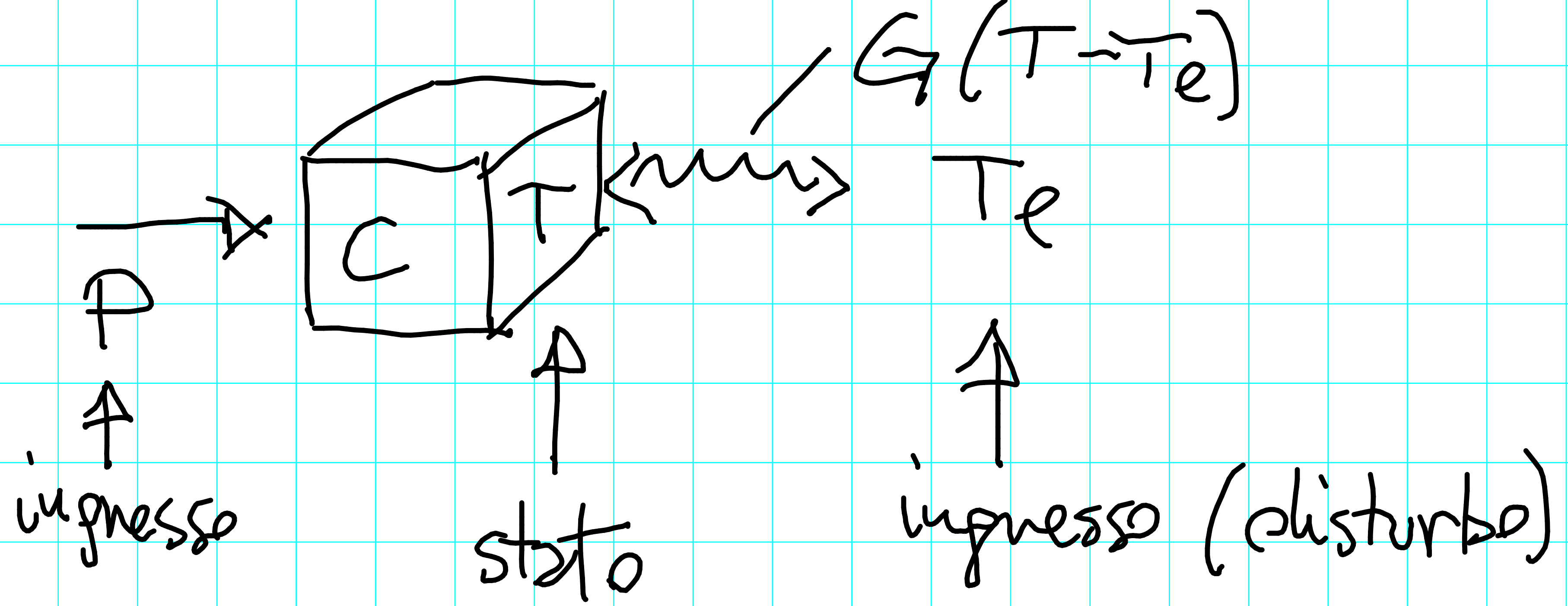
$$y(t) = -9\,\mathrm{sca}(t) + 9\,e^{-2t}\,\mathrm{sca}(t)$$

$$= \left(-9 + 9e^{-2t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

$\square$

ES 3

Consideriamo un corpo solido riscaldato e che scambia convettivamente con una temp. fissa



Cap. termica $C = 10\ J/°C$

Condutt. " $G = 2\ W/°C$ $(R = 0{,}5\ °C/W)$

Modello: bilancio dinamico di energia

$$\frac{d}{dt}\underbrace{E}_{CT} = \underbrace{\sum P}_{P - G(T - T_e)}$$

Quindi

$$C\dot{T} = P - G(T - T_e)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{C}P - \frac{G}{C}T + \frac{G}{C}T_e$$

riordino:

$$\underbrace{\dot{T}}_{\dot{x}} = \underbrace{-\frac{G}{C}}_{a}T + \underbrace{\frac{1}{C}}_{u}P + \underbrace{\frac{G}{C}T_e}_{\text{disturbo}}$$

Trasformo secondo Laplace e guardo soltanto i MF

$$sT(s) = -\frac{G}{C}T(s) + \frac{1}{C}P(s) + \frac{G}{C}T_e(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{s+\frac{G}{C}}\left(\frac{1}{C}P(s) + \frac{G}{C}T_e(s)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1/C}{s+G/C}}_{\text{FdT da } P \text{ a } T} P(s) + \underbrace{\frac{G/C}{s+G/C}}_{\text{FdT da } T_e \text{ a } T} T_e(s)$$

EFFETTO di P su T

EFFETTO di T_e su T

(PSE)

Scriveremo spesso la FdT da U a Y come $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$

come nel nostro caso

TDL degli ingressi/disturbi

$$T(s) = \underbrace{\frac{T(s)}{P(s)}}_{\text{FdT}}\, P(s) + \underbrace{\frac{T(s)}{T_e(s)}}_{\text{FdT}}\, T_e(s)$$

$$\frac{T_{\text{dovuta a }P}(s)}{P(s)} \qquad \frac{T_{\text{dovuta a }T_e}(s)}{T_e(s)}$$

rapporti $\dfrac{\text{effetto}}{\text{causa}}$

Riscrivo le FdT in modo leggermente diverso

$$\frac{T(s)}{P(s)} = G_{TP}(s) = \frac{1/C}{s + G/C} = \frac{1/G}{1 + \frac{C}{G}s}$$

$$\frac{T(s)}{T_e(s)} = G_{TT_e}(s) = \frac{G/C}{s + G/C} = \frac{1}{1 + \frac{C}{G}s}$$

Supponiamo di applicare uno scalino a $\bar{P}$:

$$\text{impresso} \quad P(s) = \frac{\bar{P}}{s}$$

calcoliamo l'effetto su T

$$T(s) = G_{TP}(s) \cdot P(s) = \frac{\overbrace{1/G}^{\mu}}{1+\underbrace{\frac{C}{G}}_{\tau} s} \cdot \frac{\bar{P}}{s} = \frac{\mu}{1+s\tau} \frac{\bar{P}}{s}$$

Uso Heaviside

$$T(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{1+s\tau}$$

$$\alpha(1+s\tau) + \beta s = \mu \bar{P}$$

$s = 0 \qquad \alpha = \mu \bar{P}$

$s = -\frac{1}{\tau} \qquad -\frac{1}{\tau}\beta = \mu \bar{P} \Rightarrow \beta = -\mu\tau\bar{P}$

Quindi $\quad T(s) = \dfrac{\mu \bar{P}}{s} - \underbrace{\dfrac{\mu \tau \bar{P}}{1+s\tau}}_{\dfrac{\mu \bar{P}}{s+\frac{1}{\tau}}}$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\mu \bar{P}\,\mathrm{sca}(t) \qquad \mu \bar{P}\, e^{-t/\tau}\,\mathrm{sca}(t)$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = \mu \bar{P}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \mathrm{sca}(t)$$

Aspetto della risposta:

$$T(0) = 0$$

$$T(\infty) = \mu \bar{P} = \frac{1}{G} \bar{P}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0} ?$$

NB è l'effetto di P, cioè la variazione rispetto all'effetto di Te

Verifico e calcolo con TVI/TVF

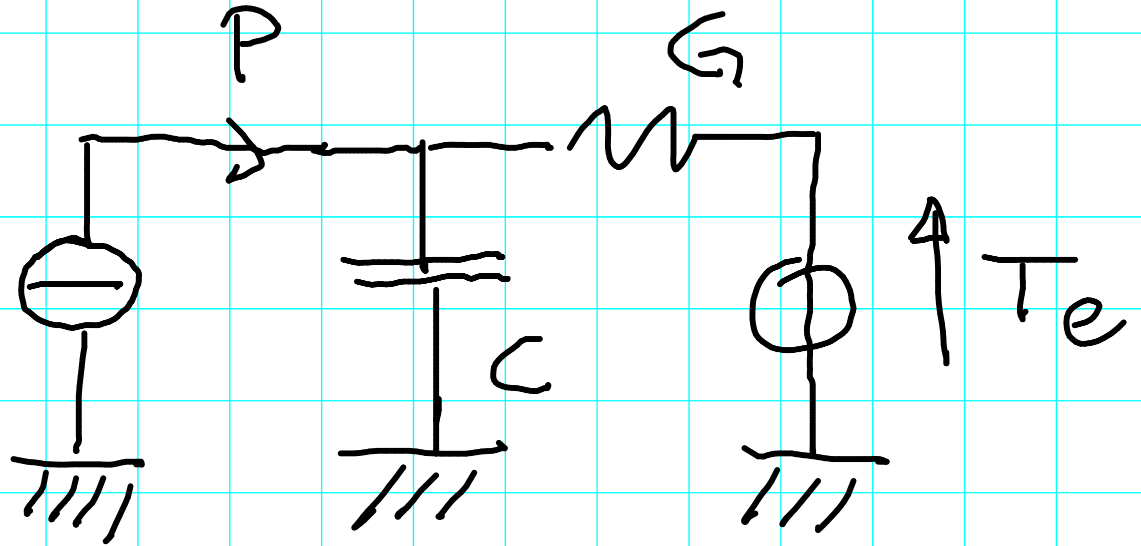
$$T(s) = \frac{\mu \bar{P}}{s(1+s\tau)} \qquad \tau > 0 \quad \text{AS}$$

- $T(0^+) = \lim\limits_{s \to \infty} s\,T(s) = \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{\mu \bar{P}}{1+s\tau} = 0$ ✓
- $T(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} s\,T(s) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{\mu \bar{P}}{1+s\tau} = \mu \bar{P}$ ✓

$$\mathcal{L}[\dot{T}] = s\,\mathcal{L}[T] - T(0) = \frac{\mu \bar{P}}{1+s\tau}$$

- $\dot{T}(0) = \lim\limits_{s \to \infty} s\,\mathcal{L}[\dot{T}] = \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{\mu \bar{P} s}{1+s\tau} = \dfrac{\mu \bar{P}}{\tau}$

Es. elettrico



componente indipendente dalla fisica specifica

teoria dei sistemi e del controllo

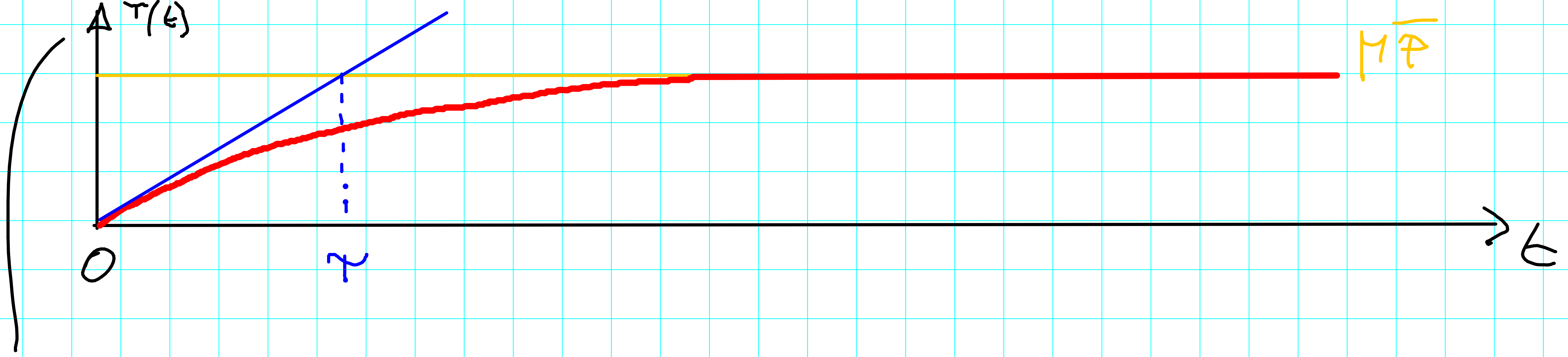
modelli dell'oggetto da controllare

modelli dei controllori

FISICA

TECNOLOGIA

Nel nostro caso



effetto su T di uno scalino di P ampio $\bar{P}$ applicato a $t=0$

Anticipo: chiameremo

μ "guadagno statico"

τ "costante di tempo"

NB nel nostro caso $\mu = 0{,}5\ \frac{°C}{W}$, $\tau = 5\ s$

$\square$