

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Federico Mainetti Gambera

18 aprile 2020

## Indice

<b>I</b>	<b>Lezioni</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)</b>	<b>3</b>
1.1	Domanda . . . . .	3
1.2	Risposta alla domanda (dimostrazione) . . . . .	3
1.3	Generalizzazione della risposta . . . . .	3
1.4	Riassunto e proprietà . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)</b>	<b>5</b>
2.1	Domanda . . . . .	5
2.2	Risposta alla domanda (dimostrazione) . . . . .	5
2.3	Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza) . . . . .	5
2.4	Definizione di risposta in frequenza . . . . .	6
2.5	Esempio . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Rappresentazioni della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento</b>	<b>7</b>
3.1	Diagramma polare . . . . .	7
3.2	Diagrammi cartesiani o di Bode . . . . .	7
3.2.1	Diagramma di Bode del modulo . . . . .	7
3.2.2	Diagramma di Bode della fase . . . . .	7
3.3	Tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici) . . . . .	7
<b>II</b>	<b>Esercitazioni</b>	<b>9</b>

# **Parte I**

## **Lezioni**

## 1 Risposta esponenziale (SD LTI a TC, SISO)

### 1.1 Domanda

Dato il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$  sottoposto all'ingresso  $u(t) = e^{\lambda t}$  con  $t \geq 0$  (o equivalentemente  $e^{\lambda t} \text{sca}(t)$ ), esiste uno stato iniziale  $x(0)$  tale che  $x(0)$  e  $u(t)$  producono un'uscita  $y(t) = Y e^{\lambda t}$ , con  $Y$  un numero qualunque (non la trasformata) e  $t \geq 0$ ?

In altri termini:

Sottoponiamo un sistema dinamico (di cui non sono note le proprietà sulla sua stabilità) a un ingresso esponenziale ( $u(t) = e^{\lambda t}$ , che può anche essere amplificato come  $u(t) = U e^{\lambda t}$ , ovviamente il ragionamento non cambia). Detto questo sappiamo che un ingresso  $x(0)$  produce un movimento libero di  $y$  fatto da modi, invece un uscita del tipo  $u(t) = e^{\lambda t}$  produce un movimento forzato fatto da modi + un termine  $Y e^{\lambda t}$  (con  $t \geq 0$  e con  $Y$  un numero, non la trasformata). La domanda è se esiste uno  $x(0)$  tale che questi modi si elidano e resti solo il termine  $Y e^{\lambda t}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow u(t) = e^{\lambda t} \longrightarrow \exists x(0) \text{ tale che } \longrightarrow y(t) = Y e^{\lambda t} \quad (t \geq 0) ?$$

### 1.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Rispondiamo a questa domanda:

**Primo passaggio:**

Se voglio che  $y(t) = Y e^{\lambda t}$ , allora anche  $x(t)$  dovrà avere la forma  $X e^{\lambda t}$  (con  $X$  un numero, non la trasformata), perchè  $y(t) = c x(t) + d e^{\lambda t}$  e qualunque forma di  $x(t)$  che non sia del tipo  $e^{\lambda t}$  si "vedrebbe" su  $y$ .

**Secondo passaggio:**

Quindi  $x(t) = x(0) e^{\lambda t}$  (di cui noi stiamo proprio cercando  $x(0)$ ) e di conseguenza  $\dot{x}(t) = \lambda x(0) e^{\lambda t}$ .

**Terzo passaggio:**

Sostituisco  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  appena espressi nell'equazione di stato, che devono evidentemente soddisfare:

$$\lambda x(0) e^{\lambda t} = A x(0) e^{\lambda t} + b e^{\lambda t}$$

considerando che  $e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0) e^{\lambda t} = A x(0) e^{\lambda t} + b e^{\lambda t}$$

$$\lambda x(0) = A x(0) + b$$

per cui otteniamo che

$$(\lambda I - A) x(0) = b$$

### 1.3 Generalizzazione della risposta

Quindi **in generale** con  $u(t) = U e^{\lambda t}$  (con  $U$  un numero qualunque che semplicemente amplifica l'esponenziale), se  $\lambda$  non è autovalore di  $A$ , allora esiste uno e uno solo

$$x(0) = (\lambda I - A)^{-1} b U$$

tale che

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda I - A)^{-1} b U e^{\lambda t} \\ y(t) = c x(t) + d u(t) = [c(\lambda I - A)^{-1} b + d] U e^{\lambda t} = G(\lambda) u(t) \end{cases}$$

## 1.4 Riassunto e proprietà

- Dato il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$  in cui  $u(t) = Ue^{\lambda t}$ , dove  $t \geq 0$  e  $\lambda$  non è autovalore di  $A$   
 $\implies$  con  $x(0) = (\lambda I - A)^{-1}bU$  si ottiene  $y(t) = G(\lambda)u(t)$ , con  $t \geq 0$ .
- Proprietà bloccante degli zeri: se  $G(\lambda) = 0 \implies$  con lo stesso stato iniziale  $x(0)$ , l'uscita diventa  $y(t) = 0$ , con  $t \geq 0$ .
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale  $x(0)$ , l'uscita tenderà a  $y(t) \rightarrow G(\lambda)u(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ .

## 2 Risposta sinusoidale (SD LTI a TC, SISO)

### 2.1 Domanda

Dato il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$  e l'ingresso  $u(t) = U \sin(\omega t)$  per  $t \geq 0$  (o equivalentemente  $u(t) = U \sin(\omega t) \text{sca}(t)$ ), esiste un qualche stato iniziale  $x(0)$  tale che  $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$  per  $t \geq 0$ ?

In altri termini:

[La domanda è molto simile a quella data per la risposta esponenziale] Applicato un ingresso sinusoidale, esiste uno stato di iniziale che faccia elidere fra loro i modi del moto libero e i modi del moto forzato in modo che io veda in uscita solo una sinusoide?

### 2.2 Risposta alla domanda (dimostrazione)

Per rispondere ci basta ricordare che

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e che, data la linearità del sistema, vale il principi di sovrapposizione degli effetti. Quindi applichiamo due volte il risultato ottenuto per la risposta esponenziale e combiniamo i risultati.

Poniamo  $u_1(t) = e^{j\omega t}$  e  $u_2(t) = e^{-j\omega t}$ , per cui  $u(t) = U \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2j}$

Iniziamo analizzando  $u_1(t)$ : se  $j\omega$  non è autovalore di  $A$ , allora esiste uno e un solo  $x_1(0)$  tale che l'uscita ottenuta è

$$y_1(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$

Per  $u_2(t)$ : se  $-j\omega$  non è autovalore di  $A$ , allora esiste uno e un solo  $x_2(0)$  tale che l'uscita ottenuta è

$$y_2(t) = G(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

Combiniamo ora  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{U}{2j}(u_1(t) - u_2(t)) \\ x(0) &= \frac{U}{2j}(x_1(0) - x_2(0)) \end{aligned} \implies \text{Principio di sovrapposizione degli effetti} \implies y(t) = \frac{U}{2j}(y_1(t) - y_2(t))$$

Analizziamo  $y(t)$ :

$$y(t) = \frac{U}{2j} (G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t})$$

Osserviamo che  $G(s)$  è razionale fratta, quindi  $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$  (complesso coniugato). Quindi se pongo  $G(j\omega) = Me^{j\phi}$  (con  $M$  modulo e  $\phi$  argomento di  $G(j\omega)$ ) otteniamo  $G(-j\omega) = Me^{-j\phi}$ .

Allora

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{U}{2j} (Me^{j\phi}e^{j\omega t} - Me^{-j\phi}e^{-j\omega t}) = MU \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ y(t) &= MU \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

con  $M = |G(j\omega)|$  e  $\phi = \arg(G(j\omega))$

### 2.3 Generalizzazione della risposta (Teorema fondamentale della risposta in frequenza)

Dato il sistema dinamico LTI a TC, SISO  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ , detta  $G(s)$  la sua funzione di trasferimento e considerato l'ingresso  $u(t) = U \sin(\omega t)$  per  $t \geq 0$ :

- Se  $\mp j\omega$  non sono autovalori di  $A$ , allora esiste uno e uno solo stato iniziale  $x(0)$  tale che  $y(t) = |G(j\omega)|U \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$  per  $t \geq 0$ . (Se  $\mp j\omega$  sono autovalori di  $A$ , allora si verifica un fenomeno di risonanza, che però non è argomento di questo corso).
- Se INOLTRE il sistema è asintoticamente stabile, allora qualunque sia lo stato iniziale, l'uscita tenderà a  $y(t) \rightarrow |G(j\omega)|U \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$  per  $t \rightarrow \infty$

## 2.4 Definizione di risposta in frequenza

**definizione:** Data una funzione di trasferimento  $G(s)$ , la sua restrizione all'asse immaginario positivo  $J^+$ , cioè  $G(j\omega)$  con  $\omega \geq 0$ , si dice **risposta in frequenza** (RF) di  $G(s)$ .

## 2.5 Esempio

**es.** Dato  $G(s) = \frac{1}{1+0,15s}$ , che è asintoticamente stabile, e  $u(t) = 5\sin(20t)$ , a cosa tende  $y(t) \rightarrow ?$  per  $t \rightarrow \infty$ ?

Siccome il sistema è asintoticamente stabile, allora per il teorema della risposta in frequenza  $y(t) \rightarrow 5|G(j20)|\sin(20t + \arg(G(j20)))$ .

$$G(j20) = \frac{1}{1+2j} \Rightarrow \begin{aligned} |G(j20)| &= \frac{1}{\sqrt{1+4}} \sim 0,45 \\ \arg(G(j20)) &= -\arctan(2) \sim -63,5 \end{aligned}$$

[il prof ha terminato i conti e ha tracciato un grafico di  $u(t)$  e  $y(t)$  usando maxima: ci sta mostrando che il modulo  $|G(j20)|$  rappresenta la percentuale dell'ampiezza dell'uscita rispetto all'ampiezza dell'ingresso, in questo esempio l'uscita è ampia il 45% dell'ingresso; invece l'argomento  $\arg(G(j20))$  rappresenta lo sfasamento del segnale di uscita rispetto al segnale di ingresso, in questo esempio l'uscita è sfasata di 63 gradi (in ritardo) e per capire quanto effettivamente sia uno sfasamento di 63 gradi basta considerare che un periodo del segnale di ingresso sono 360 gradi]

### 3 Rappresentazioni della risposta in frequenza di una funzione di trasferimento

#### 3.1 Diagramma polare

[immagine dagli appunti del prof]

In un piano immaginario il termine  $s = j\omega$  "cammina" lungo l'asse immaginario. Se ora calcoliamo  $G(s)$  e lo mostriamo in un secondo piano immaginario, otteniamo una curva  $G(j\omega)$  con parametro  $\omega$ .

Possiamo ora dire che la risposta in frequenza è l'immagine attraverso  $G$  dell'asse immaginario positivo  $J^+$ .

#### 3.2 Diagrammi cartesiani o di Bode

##### 3.2.1 Diagramma di Bode del modulo

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode del modulo è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è l'asse delle  $\omega$  e quello delle ordinate è l'asse di  $|G(j\omega)|$ .

L'asse delle  $\omega$  è logaritmico, cioè a pari distanza non corrisponde pari differenza, ma pari rapporto logaritmico (in base 10). Inoltre lo zero non viene rappresentato, perchè si trova a  $-\infty$ , e per questo l'intersezione con l'asse di  $|G(j\omega)|$  non viene rappresentato.

L'asse di  $|G(j\omega)|$  è, invece, espresso in  $dB$ .

**Definizione:** Rappresentare una quantità in  $dB$  significa  $x_{dB} = 20 \log_{10} |x|$ .

Per esempio  $100_{dB} = 40$ ,  $0_{dB} = -20$ ,  $-0_{dB} = -20$ ,  $1_{dB} = 0$ . Notare che la scrittura in  $dB$  non distingue il segno, e inoltre che se  $|x| > 1$ , allora  $x_{dB} > 0$  e se  $|x| < 1$ , allora  $x_{dB} < 0$ .

##### 3.2.2 Diagramma di Bode della fase

[immagine dagli appunti del prof]

Il diagramma di Bode della fase è un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse è sempre logaritmico ed è l'asse delle  $\omega$ , invece l'asse delle ordinate è l'asse di  $\arg(G(j\omega))$  misurato in gradi.

#### 3.3 Tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici)

Scriviamo la funzione di trasferimento  $G(s)$  della cui risposta in frequenza vogliamo i diagrammi di Bode nella forma

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots}{(1 + st_1)(1 + st_2) \dots} \cdot \frac{(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2) \dots}{(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2) \dots}$$

In cui:

- prima frazione:  $g$  è il **tipo** della funzione di trasferimento ed è il numero di poli in  $s = 0$  meno il numero di zeri in  $s = 0$ , o, per dirlo in altri termini, il numero di poli (se positivo) o zeri (se negativo) in  $s = 0$ .  
Per esempio una funzione di trasferimento di tipo 1 ha un polo nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo  $-1$  ha uno zero nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 2 ha due poli nell'origine, una funzione di trasferimento di tipo 0 non ha nè poli nè zeri nell'origine.
- seconda frazione: i vari termini a numeratore del tipo  $(1 + s\tau_i)$  rendono conto degli zeri reali non nell'origine; invece i vari termini a denominatore del tipo  $(1 + st_k)$  rendono conto dei poli reali non nell'origine.
- terza frazione: infine ci possono essere coppie di zeri complessi coniugati e coppie di poli complessi coniugati, rappresentate dai termini  $(1 + 2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2)$  (per gli zeri) e  $(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2)$  (per i poli).

Inoltre il numero  $\mu$  è detto **guadagno** della funzione di trasferimento, i termini  $t, \tau$  sono **costanti di tempo** di zeri e poli,  $\omega, \sigma$  si dicono **frequenze naturali** (o pulsazioni naturali) e  $\zeta, \xi$  sono i **fattori di smorzamento**.

Una delle proprietà più particolari è che tutto il termine  $\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots}{(1+st_1)(1+st_2)\dots} \cdot \frac{(1+2\frac{\zeta}{\sigma_n}s + \frac{1}{\sigma_n^2}s^2)\dots}{(1+2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2)\dots}$  tende a  $\rightarrow 1$  per  $s \rightarrow 0$ , quindi  $G(s) \sim \frac{\mu}{s^g}$  per  $s \rightarrow 0$ .

es.  $G(s) = \frac{(s+2)(s^2-3s+2)}{s^3+4s^2+s}$ .

Trasformiamola nella forma che vogliamo avere per il diagramma di Bode:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2(1+\frac{s}{2})(s-1)(s-2)}{s(s^2+4s+1)} = \frac{2(1+\frac{s}{2})(-1)(1-s)(-2)(1-\frac{s}{2})}{s(s-(-2-\sqrt{3}))(s-(-2+\sqrt{3}))} = \\ &= \frac{2(-1)(-2)(1+\frac{s}{2})(1-s)(1-\frac{s}{2})}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})s(1-\frac{s}{-2-\sqrt{3}})(1-\frac{s}{-2+\sqrt{3}})} \end{aligned}$$

in cui  $\mu = \frac{2(-1)(-2)}{(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})}$  e  $g = 1$ .

Quindi ogni funzione di trasferimento razionale fratta si può esprimere come prodotto di termini del tipo

$$\begin{aligned} G_a(s) &= \mu & G_c(s) &= 1 + st \\ G_b(s) &= \frac{1}{s^g} & G_d(s) &= 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \end{aligned}$$

Allora detti  $G_i$  i fattori componenti  $G$ , Siccome

$$G = \prod G_i \implies \begin{cases} |G| = \prod |G_i| \implies |G|_{dB} = \sum |G_i|_{dB} \\ \arg(G) = \sum \arg(G_i) \end{cases}$$

Vediamo perciò come tracciare i diagrammi di bode del modulo e della fase (asintotici) di  $G_{a,b,c,d}$ . Una volta fatto questo sarà semplice combinarli per arrivare al tracciamento definitivo di  $G$ .

- $G_a(s) = \mu \rightarrow G_a(j\omega) = \mu \rightarrow |G_a(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu|$  e  $\arg(G_a(j\omega)) = \begin{cases} 0 & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$ .

Il diagramma di bode del modulo è una retta orizzontale (se  $|\mu| > 1$  è sopra l'asse delle ascisse, se  $\mu < 1$  è sotto l'asse delle ascisse).

Anche il diagramma di bode della fase è una retta orizzontale che coincide con l'asse delle ascisse se  $\mu > 0$ , altrimenti se  $\mu < 0$  è posta all'altezza di  $-180^\circ$ .

- continua la prossima volta, ciao



## Parte II

# Esercitazioni