

# ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

11 ottobre 2019

# Indice

**[mancano]:**

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1)
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3)
-

## 0-LEZIONE

[manca]

# 1-LEZIONE

30/09/19

## Formula di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**dim.** dimostrazione per induzione:

[manca] ...

**es.** Trovare il coefficiente di  $b^7$  nell'espressione  $(a^3b^2 - b)^5$ .

$$(a^3b^2 - b)^5 = b^5(a^3b - 1)^5$$

il coefficiente di  $b^7$  è uguale a quello di  $b^2$  in  $(a^3b - 1)^5$

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} [a^3b]^k (-1)^{5-k}$$

per ottenere il coefficiente di  $b^2$  devo porre  $k = 2$ , quindi ottengo:

$$\binom{5}{2} (a^3)^2 b^2 (-1)^{5-2} = -\binom{5}{2} a^6 b^2$$

il coefficiente cercato è  $-\binom{5}{2} = -\frac{5!}{2!3!} = 10$ .

**es.** Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k = 3^n.$$

E' possibile dimostrare questa uguaglianza per induzione, ma in realtà è molto più semplice usare direttamente la formula di Newton  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ . Infatti se poniamo  $a = 2$  e  $b = 1$  otteniamo esattamente l'equazione della consegna.

**es.** Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1.$$

Per dimostrare questa uguaglianza usiamo ancora una volta la formula di Newton con  $a = -2$  e  $b = 1$  e, invece di  $n$ , usiamo  $2n$ .

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k b^{2n-k} = (a+b)^{2n}.$$

## Calcolo combinatorio

**dim. Dimostrazione combinatoria della formula di Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Utilizziamo il termine  $P_{k,n-k}^* = \binom{n}{k}$  per rappresentare il numero delle permutazioni con ripetizione di  $n$  oggetti  $k$  di un tipo e  $n-k$  dell'altro.

Partiamo dalla definizione di esponenziale  $(a+b)^n = (a+b)_1(a+b)_2 \dots (a+b)_n$ . Nello svolgere questi prodotti avrò scelto  $k$  volte  $a$  e  $n-k$  volte  $b$  per ottenere  $a^k b^{n-k}$ . E' come avere  $n$  caselle di cui le prime  $k$  occupate da  $a$  e le restanti  $n-k$  occupate da  $b$ :

$$[a_1]_1 [a_2]_2 \dots [a_k]_k [b_1]_{k+1} [b_2]_{k+2} \dots [b_{n-k}]_n$$

Ma una configurazione così può presentarsi  $P_{k,n-k}^*$  (cioè  $\binom{n}{k}$ ) volte. Da qui quindi arriviamo alla forma:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**def.** dato un insieme  $X$  di  $n$  oggetti distinti, chiamo **combinazioni semplici (senza ripetizioni) di classe  $K$**  un qualsiasi sottoinsieme (il cui ordine non importa) di  $k$  oggetti estratti da  $X$ .

$C_{n,k}$  è il simbolo che rappresenta il numero di combinazioni semplici di  $k$  oggetti estratti senza ordine.

**teor.**

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

**dim.** Immaginiamo di dover inserire elementi in delle caselle per ottenere uno specifico allineamento. abbiamo  $k$  caselle e  $n$  elementi. Nella prima casella

posso scegliere fra  $n$  elementi da inserire, nella seconda potrò scegliere fra  $n - 1$ , poi fra  $n - 2$  elementi e così via.

$$n(n - 1) \dots (n - k + 1)$$

Seguendo questo ragionamento abbiamo disposto in maniera **ordinata** gli elementi lungo un allineamento. Se non si vuole considerare l'ordine, dobbiamo dividere il risultato trovato per le  $k!$  permutazioni possibili:

$$\frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

n.b.  $n(n - 1) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$

## Cardinalità di un insieme

E' lo studio del numero di oggetti appartenenti a un certo insieme.

Dato un insieme  $X$  di  $n$  oggetti, qual è la cardinalità dell'insieme delle parti di  $X$ ? L'insieme delle parti è l'insieme di tutti i sottoinsiemi ed è rappresentato dalla lettera  $\mathcal{P}(X)$

**teor.** L'insieme delle parti  $\mathcal{P}(X)$  di un insieme  $X$  di cardinalità  $n$  ha cardinalità  $2^n$ .

**dim.**  $X$  ha certamente come sottoinsiemi quelli banali, cioè  $\emptyset$  e  $X$  stesso.

Quanti sottoinsiemi di 1 elemento ha  $X$ ?  $n$  (riscrivibile come  $C_{n,1}$ , cioè come combinazione semplice senza ripetizioni di classe 1)

Quanti sottoinsiemi di 2 elemento ha  $X$ ?  $C_{n,2}$

...

Quanti sottoinsiemi di  $n-1$  elemento ha  $X$ ?  $C_{n,n-1}$

Dal teorema precedentemente visto sappiamo che  $C_{n,x} = \binom{n}{x}$ , quindi:

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-1} + 1 = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + 1$$

dove il primo 1 rappresenta  $\emptyset$  e l'ultimo 1 rappresenta  $X$  stesso.

Ora questa espressione può essere raccolta in una sommatoria e tramite la formula di Newton possiamo scrivere:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

**oss.** L'insieme delle parti di un insieme **finito** ha cardinalità sempre **maggiore** dell'insieme stesso.

## Topologia in $\mathbb{R}$

### Intorno

**def.** concetto fondamentale è quello di **intorno** di un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  o  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

in  $\mathbb{R}$ : IMMAGINE

in  $\mathbb{R}^2$ : IMMAGINE

$B_r(x_0)$  è il simbolo che rappresenta l'intorno di raggio  $r$  del punto  $x_0$ .

$B_r(x_0)$  è l'insieme dei punti con distanza inferiore ( $<$ ) di  $r$  dal centro  $x_0$ . Da notare è il fatto che i punti sul bordo/confine dell'intorno non appartengono all'intorno.

Vediamo ora una definizione formale:

- in  $\mathbb{R}$ :

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

- in  $\mathbb{R}^2$ :

$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : dist(p, p_0) < r\}$$

$$\text{dove } dist(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

**oss.** in  $\mathbb{R}$  una qualunque semiretta è detta "intorno di  $\pm\infty$ ". in  $\mathbb{R}^2$ , invece, non si parla di "intorno di  $\pm\infty$ ".

### Punti interni, esterni e di frontiera

**def.** Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{R}^2$ ,  $x^*$  è un punto **interno** ad  $A$  se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A$$

**oss.** Ovviamente se  $x^*$  è un punto interno allora  $x^* \in A$ , ma per essere un punto interno non deve solo essere  $\in$  in  $A$ , ma anche se è circondato solo da punti di  $A$ ).

**oss.** questa definizione non si occupa di definire l'operatore " $\in$ ", ma definisce il concetto di punto "interno".

**def.**  $x^*$  è un punto **esterno** ad  $A$  se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A^c$$

**oss.** Ovviamente se  $x^*$  è un punto esterno allora  $x^* \in A^c$  ovvero  $x^* \notin A$ , ma per essere un punto esterno ad  $A$  non deve  $\in$  ad  $A^c$  e, inoltre, deve essere



circondato solo da punti di  $A^c$

**def.**  $x^*$  è un punto di **frontiera** se

$$\forall B_r(x^*), (B_r(x^*) \cap A) \neq \emptyset \wedge (B_r(x^*) \cap A^c) \neq \emptyset$$

**oss.** Un punto è di frontiera se non è nè interno nè esterno.

### Insiemi aperti e chiusi

**def.** Dato un insieme  $A$  (in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{R}^2$ )

- si dice **aperto** se è fatto solo da punti interni;
- si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto oppure se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

**es.** l'insieme in  $\mathbb{R}$

$$A = (a, b)$$

è un insieme aperto e i punti  $a$  e  $b$  sono di frontiera.

**es.** se, però, cambiamo l'ambiente da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^2$  otteniamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, y = 0\}$$

che non è aperto in quanto è costituito solo da punti di frontiera, ma non li contiene tutti, quindi non è neanche chiuso.

IMMAGINE

## 2-LEZIONE

07/10/19

### Topologia in $\mathbb{R}$

#### Punti isolati e di accumulazione

**def.** Un punto  $x_0 \in A$  si dice **isolato** per  $A$  se

$$\exists B_r(x_0) : B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$$

img1

**es.** Prendiamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = n \in \mathbb{N}\}$$

img2

Notiamo che  $A$  è fatto di soli punti isolati.

**def.** Un punto  $x_0$  è un punto di **accumulazione** per  $A$  se

$$\forall B_r(x_0) \exists x \in A \text{ e } x \neq x_0$$

cioè se esiste una successione di punti di  $A$  che raggiunge  $x_0$ .

img3

il disegno mostra come ci sia un percorso che raggiunge  $x_0$ .

**oss.** Da notare è il fatto che il punto può  $\in A$  come può  $\in A^c$ .

**oss.** tutti i punti interni ad un insieme sono di accumulazione.

**oss.** i punti di frontiera sono di accumulazione purchè non siano isolati

**es.**

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x : -4 < x \leq e \vee x = \pi \vee x > 10\}$$
$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

I punti di frontiera sono  $-4, e, \pi, 10$ . Ma  $\pi$  non è un punto di accumulazione.

#### Insieme limitato, convesso, non convesso e compatto

**def.** Un insieme  $A$  è **limitato** se occupa una porzione con area finita dell'ambiente. Formalmente si dice che è limitato se

$$\exists y \in \mathbb{R}^2 \text{ e } B_r(y) \subset A.$$

Spesso per  $y$  si prende l'origine degli assi.

**es.** Analizza il seguente insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x : -4 < x \leq e \vee x = \pi \vee x > 10\}$$

L'insieme corrisponde a questo:

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

che non è limitato per via di  $(10, +\infty)$ .

**def.** un insieme  $A$  è **convesso** se  $\forall x, y \in A$  il segmento di estremi  $x$  e  $y$  appartiene ad  $A$ .

Esempi di insiemi convessi:

img4

**def.** un insieme  $A$  è **non convesso** se esiste un segmento con estremi  $x, y \in A$  tale per cui parte di esso non sia contenuto nell'insieme  $A$ .

Esempi di insiemi non convessi:

img5

**es.** In  $\mathbb{R}$  gli insiemi "convessi" che insiemi sono?

$\mathbb{N}$  è convesso in  $\mathbb{R}$ ? no.

$\mathbb{Q}$  è convesso in  $\mathbb{R}$ ? no.

Gli unici insiemi "convessi" in  $\mathbb{R}$  sono gli insiemi:

- singoletti;
- intervalli;
- semirette.

**def.** un insieme  $A$  è **compatto** se è chiuso e limitato.

**es.** esempio di insieme compatto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

img6

l'insieme è chiuso e limitato, quindi compatto.

## Funzioni

### Definizioni principali

**def.** cos'è una **funzione**?

Una funzione ha tre "ingredienti" principali che la compongono:

- un insieme di partenza detto **dominio**  $V$ , un elemento di questo insieme lo simboleggiamo con la lettera  $v$ .
- un insieme di arrivo detto **codominio**  $W$ , un elemento del secondo insieme lo simboleggiamo con la lettera  $w$ .
- una legge che definisce la funzione, simboleggiata dal simbolo  $f()$ .

**def.** Si dice **dominio naturale** l'insieme  $V'$ , contenuto o uguale  $V$ , il più grande sottoinsieme del dominio dove la legge è completamente definita.

**def.** Si dice che  $w$  è l' **immagine** di  $v$  attraverso  $f$ .

$$w = f(v)$$

**def.** Si dice che  $v$  è la **controimmagine** di  $w$  attraverso  $f$ .

**def.** L'**insieme immagine** è la totalità delle immagini e si indica come  $im(f)$ , spesso si dice anche "immagine della funzione".

$$im(f) = \{w \in W : \exists v \rightarrow f(v) = w\}$$

### Funzioni iniettive, suriettive e biettive

**def.** una funzione  $f$  si dice **iniettiva** se preserva elementi distinti.

$$se \ \forall v_1 \neq v_2 \rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$$

**def.** una funzione è **non iniettiva** se ci sono elementi diversi con la stessa immagine.

**def.** una funzione è **suriettiva** se "invade" tutto il codominio.

$$im(f) \equiv W$$

**es.** Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow y = \sin(x)$$

non è iniettiva e non è suriettiva.

**es.** Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$\begin{aligned} &[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ &x \rightarrow y = \sin(x) \end{aligned}$$

img8

è iniettiva e suriettiva.

**def.** una funzione che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biiettiva**.

## Successioni

### definizione

**def.** Le successioni sono funzioni particolari il cui dominio è  $\mathbb{N}$  e il codominio  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \quad V = \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow y = f(n) \end{aligned}$$

Spesso si scrive:  $n \rightarrow y = f_n$ , oppure  $n \rightarrow y = a_n$ , dove  $a_n$  è l'immagine dell'elemento n-esimo.

img9

### Successioni monotone e limitate

**def.** Una successione si dice **monotona** se ha un andamento con un trend costante.

**def.** Una successione si dice monotona **crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

**def.** Una successione si dice monotona **strettamente crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$$

**def.** Una successione di dice monotona **decrecente** se

$$\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

**def.** Una successione di dice monotona **strettamente decrecente** se

$$\forall n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2}$$

**oss.** una successione **costante** è una successione monotona crescente e decrescente.

**def.** una successione è **limitata** se il suo insieme immagine  $im(f)$  è un insieme limitato di  $\mathbb{R}$

$$im(f) \subseteq B_r(x)$$

Vediamo alcuni esempi di successioni che contengono alcuni casi notevoli.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

img10

Notiamo che  $n$  non può assumere il valore 0, che quindi è escluso dal suo dominio. La successione è limitata, ma oscilla, quindi non è monotona.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

img11

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > a_1$$

$$a_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} > a_2$$

Questa successione è famosa perchè converge al valore  $e$ . E' limitata e monotona strettamente crescente.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a = \ln(n)$$

Non è limitata, ma è limitata solamente inferiormente, è monotona strettamente crescente.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

img13

è limitata e periodica con periodo  $T = 2$ .

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = \sin(n)$$

img14

è limitata, non è monotona, può sembrare periodica, ma non lo è perchè il periodo sarebbe  $2\pi \notin \mathbb{N}$ .

**es.** successione potenza

$$a_n = n^{\frac{1}{2}}$$

img15

monotona strettamente crescente, limitata inferiormente.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^{(\frac{1}{2})}$$

img16

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

img17

## Natura delle successioni

**def.** La **natura** (o **comportamento**) di una successione è l'andamento osservato per grandi valori del dominio.

La natura di una successione è di tre tipi:

- convergente
- divergente (positivamente o negativamente)
- irregolare

**def.** Si dice che  $\{a_n\}$  **converge** a  $L$  e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow{+\infty} L$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

img18

definizione formale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \text{ se } \forall B_r(L) \exists M : \forall n > M \quad a_n \in B_r(L)$$

definizione a parole:

per ogni intorno  $B_r$  del limite  $L$  esiste una posizione  $M$  al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno del valore  $L$ .

img19

**def.**  $a_n$  è **positivamente divergente** o **divergente a**  $+\infty$  e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \text{ se } \forall B_r(+\infty) \exists M : \forall n > M \quad a_n \in B_r(+\infty)$$

definizione a parole:

per ogni intorno  $B_r$  di  $+\infty$  esiste una posizione  $M$  al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di  $+\infty$ .

img20



**def.** una successione è **negativamente divergente** o **divergente a  $-\infty$**  e lo scrivo

$$a_n \xrightarrow{+\infty} -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = -\infty \text{ se } \forall B_r(-\infty) \exists M : \forall n > M \quad a_n \in B_r(-\infty)$$

definizione a parole:

per ogni intorno  $B_r$  di  $+\infty$  esiste una posizione  $M$  al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di  $+\infty$ .

img21

**def.** Una successione ha una **proprietà definitiva** se la proprietà è valida per la successione da un certo valore in poi.

Le definizioni di convergenza e divergenza possono essere riscritte usando la definizione della proprietà definitiva.

**def.** Una successione che non è né divergente né convergente è **irregolare**.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

questa successione è irregolare e limitata.

**es.** Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

questa successione è irregolare e illimitata.

## 3-LEZIONE

10/10/19

[perso i primi 20 minuti]

Sta parlando di limiti...

$$\forall B_s(l) \exists B_q(x_0) : \forall x \in A \cap B_q(x_0) - \{x_0\} , f(x) \in B_s(l)$$

”per ogni intorno del valore limite  $l$ ” definitivamente vicino a  $x_0$  la funzione sta nell’intorno del valore limite.

### Algebra dei limiti

Per poter fare dei confronti rigorosi fra limiti, ovvero fra funzioni, ho bisogno di introdurre due simboli:

- asintotico:  $\sim$
- o-piccolo:  $o$

### o-piccolo

**def.**  $f = o(g)$  per  $x \rightarrow x_0$  se  $f$  è trascurabile rispetto  $g$ . Cioè se, confrontando  $f$  e  $g$ ,  $f$  perde.

**def.** Definizione formale:

$$f = o(g) \text{ se } f(x) = g(x)h(x) \text{ e } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

**oss.** conseguenza è che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

**es.** Per  $x \rightarrow 0$  dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \rightarrow vera$$

$$x = o(x^2) \rightarrow falsa$$

**es.** Per  $x \rightarrow +\infty$  dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \rightarrow falsa$$

$$x = o(x^2) \rightarrow \text{vera}$$

**regola.** Nell'intorno dell'origine (tendendo a  $\rightarrow 0$ ) potenze alte della variabili sono trascurabili, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più basse.

**regola.** allontanandosi dall'origine (tendendo a  $\rightarrow \pm\infty$ ) potenze basse sono trascurabili rispetto a potenze più alte, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più alte.

### Proprietà di o-piccolo

- Costanti in o-piccolo.

Con  $k \in \mathbb{R}$  e costante:

$$o(k \cdot g) = o(g) = k \cdot o(g)$$

**dim.**

$$f = o(k \cdot g) \rightarrow f = o(g)$$

$$f = k \cdot g \cdot h$$

ma  $h \rightarrow 0$ , quindi  $k \cdot h \rightarrow 0$

$$f = o(g)$$

- Somma di o-piccoli.

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

**dim.** conseguenza della proprietà precedente.

**oss.** errore tipico:  $o(g) - o(g) = 0$ . SBAGLIATISSIMO.

**es.** per  $z \rightarrow +\infty$

$$f_1 = x^3 - 2x + 4 = x^3 + o(x^3)$$

$$f_2 = x^3 + x^2 - 7 = x^3 + o(x^3)$$

$$f_1 - f_2 = x^3 + o(x^3) - (x^3 + o(x^3)) = o(x^3) - o(x^3) \neq 0$$

$$f_1 - f_2 = -2x + 4 - x^2 + 7$$

- Prodotto di funzioni e o-piccolo.

Con  $f$  una funzione

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

**dim.**

$$F = o(g) = g \cdot h \text{ e } h \rightarrow 0$$

moltiplico entrambe le parti per  $f$

$$f \cdot F = f \cdot g \cdot h$$

- Potenze di o-piccolo.

Con  $k \in \mathbb{R}^+$

$$[o(g)]^k = o(g^k)$$

**dim.**

$$G = o(g)$$

$$G = g \cdot h \text{ e } h \rightarrow 0$$

elevo tutto alla  $k$

$$G^k = g^k \cdot h^k \quad H = h^k \rightarrow 0$$

## Asintotico

**def.**  $f$  è **asintotico** a  $g$  se tendono allo stesso valore e inoltre ci tendono allo stesso modo.

$$f \sim g \quad x \rightarrow x_0$$

formalmente:

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f = g \cdot h \text{ e } h \rightarrow 1$$

**oss.** conseguenza:

$$\frac{f}{g} \rightarrow 1$$

**teor. teorema fondamentale** che lega  $\sim$  e  $o()$

per  $x \rightarrow x_0$

$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$

Due funzioni sono asintotiche se hanno lo stesso termine dominante.

**dim.** dimostrazione da sinistra a destra ( $\Rightarrow$ ):

ipotesi:  $f = g \cdot h$  e  $h \rightarrow 1$ . Sottraggo  $g$  da entrambi i membri:

$$f - g = g \cdot h - g = g(h - 1) \quad H = h - 1 \rightarrow 0$$

$$f - g = o(g)$$

$$f = g + o(g)$$

**dim.** dimostrazione da destra a sinistra ( $\Leftarrow$ )

ipotesi:  $f - g = o(g)$

$$f - g = g \cdot h \quad h \rightarrow 0$$

$$f = g + g \cdot h = g(1 + h) \quad H = h + 1 \rightarrow 1$$

$$f \sim g$$

### Proprietà di asintotico

- Potenza di funzioni asintotiche:

$$f \sim g \iff f^k \sim g^k$$

**dim.** [manca la dimostrazione]

$$f = g \cdot h \quad \dots$$

- Prodotti e rapporti di funzioni asintotiche.

$f_1 \sim g_1$  e  $f_2 \sim g_2$  allora

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

$$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$$

prodotti e rapporti di funzioni asintotiche sono asintotici fra loro.

**dim.** [manca la dimostrazione]

$$f_1 \sim g_1$$

$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \rightarrow 1$$

$$f_2 \sim g_2$$

$$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \rightarrow 1$$

...

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot H \quad H = \frac{h_1}{h_2} \rightarrow 1$$

**oss.** Notare che non c'è una proprietà per la somma di asintotici, che invece nell'o-piccolo c'è.

## Limiti notevoli

[Stiamo guardando simulazioni su MATLAB. Osserviamo che il seno nell'intorno dell'origine è approssimabile con la bisettrice, il coseno con la parabola, la funzione esponenziale traslata in giù di un unità con la bisettrice, il logaritmo traslato a sinistra di un unità con la bisettrice, etc.]

Vediamo ora in formule questi risultati:

- **Seno**

per  $x \rightarrow 0$

$$\sin(x) = x + o(x)$$

questa uguaglianza si può riscrivere come  $\sin(x) - x = o(x)$ , cioè  $o(x)$  è l'errore che sto facendo nell'approssimare  $\sin(x)$  come  $x$ .

img1

Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:

$$\sin(x) \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- **Coseno**

per  $x \rightarrow 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

img2

Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:

$$\cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$

- **Esponenziale**

per  $x \rightarrow 0$

$$e^x - 1 = x + o(x)$$

img3

Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- **Logaritmo**

per  $x \rightarrow 0$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

img4

Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Per ognuno di questi limiti notevoli sono state fornite tre versioni che rappresentano la stessa cosa, la più importante e più ricca di significato è sempre la prima, quella con o-piccolo.

**es.** Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \quad x \rightarrow +\infty$$

numeratore:

$$3x^4 - x = 3x^4 + o(3x^4) = 3x^4 + o(x^4)$$

$$3x^4 - x \sim 3x^4$$

$$(3x^4 - x)^{\frac{1}{2}} \sim (3x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{3x^4 - x} \sim \sqrt{3x^4}$$

$$\sqrt{3x^4 - x} = \sqrt{3x^4} + o(x^2)$$

$$x^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$$

$$x^2 - 1 \sim x^2$$

usiamo ora la proprietà dei rapporti di funzioni asintotiche:

$$\frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{3x^4}}{x^2} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \sqrt{3}$$

**Limite notevole della potenza  $\alpha$ -esima con  $0 < \alpha < 1$**

$$y = x^\alpha \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

per  $x \rightarrow 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$$

img5

Questo limite notevole viene usato per risolvere le radici.

Forniamo, come per gli altri limiti notevoli visti, le altre due forme notevoli:

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \dots [manca]$$

**es.** Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3} - \cos(x)}{\sin(x)}$$

per studiare il limite analizziamo l'andamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2-x^3} - \cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

occupiamoci della radice con la proprietà appena vista:

$$(1+t)^\alpha - 1 = \alpha t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

se prendo  $t = 2x^2 - x^3$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(2x^2-x^3)$$

Analizzando  $o(2x^2-x^3)$ , noto che  $x^3$  è trascurabile rispetto a  $2x^2$  (ricorda che  $x \rightarrow 0$ ), Inoltre la costante 2 non conta nell'o-piccolo, quindi:

$$1 + \frac{1}{2}(2x^2-x^3) + o(x^2)$$

Inoltre anche in  $(2x^2-x^3)$  posso ignorare  $x^3$  per lo stesso motivo, quindi:

$$(1+2x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$



Quindi tornando alla funzione originale

Numeratore:

$$1 + x^2 + o(x^2) - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore:

$$x + o(x)$$

Numeratore/denominatore:

$$\frac{\sqrt{1+2x^2-x^3}-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} \sim \frac{\frac{3}{2}x^2}{x} \sim \frac{3}{2}x$$

Quindi la funzione tende a 0 con la pendenza di  $\frac{3}{2}x$

**es.** Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt[4]{16x^2-2}}{\sqrt{x+1}}$$

Analizziamo  $\sqrt[4]{16x^2-2}$ , vorremmo usare il limite notevole della potenza  $\alpha$ -esima con  $0 < \alpha < 1$ , in questo caso  $\alpha = \frac{1}{4}$ :

$$(1+t)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}t + o(t) \quad t \rightarrow 0$$

ma noi nell'espressione della consegna abbiamo  $x \rightarrow +\infty$  e non possiamo quindi usare il limite notevole, perciò:

$$= \sqrt[4]{16x^2-2} = \sqrt[4]{16x^2(1 - \frac{2}{16x^2})} = 2\sqrt{|x|}(1 - \frac{1}{8x^2})^{\frac{1}{4}} =$$

Ora possiamo usare il limite notevole con  $t = -\frac{1}{8x^2}$ , perchè ora  $\frac{1}{x^2}$  tende a 0 per  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{x}(1 + \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{8x^2})) + o(\frac{1}{x^2}) = \\ &= 2\sqrt{x} - \frac{1}{16} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) \end{aligned}$$

Analizziamo ora  $\sqrt{x-1}$ :

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x(1 - \frac{1}{x})} = \sqrt{x}(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{x} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x} \right) + o\left(-\frac{1}{x}\right) \right] =$$

essendo il  $-$  dentro all'o-piccolo, lo considero come una costante  $(-1)$  e quindi lo posso togliere:

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Ora, quindi, ottengo:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Fra i due o-piccolo,  $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$  è più grande di  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

## **4-LEZIONE**

# 1-ESERCITAZIONE

## Numeri complessi

es. risolvere

$$|z|^2 - 2z = 0$$

Due soluzioni possibili. La prima:

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

La seconda:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$|z| = \rho$$

$$\rho^2 - 2\rho e^{i\theta} = 0$$

raccogliamo  $\rho$

$$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rho - 2e^{i\theta} = 0$$

$$\rho = 2e^{i\theta}$$

$\rho$  è il modulo

$$\rho e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$$

$$\theta = 0 \wedge \rho = 2$$

es. determina  $z_1$  e  $z_2$  tali che  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) = 2$

$$z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 - 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

ora verifica che  $\bar{z}_1 = z_2$

$$\bar{z}_1 = -1 + 2i$$

$$-z_2 = -1 + 2i$$

**es.**

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) + 1 = 0\}$$

(IMMAGINE di  $A$  e di  $B$ )

$$C = \{v \in \mathbb{C} : v = z - 3 + i, z \in A \cap B\}$$

il termine  $v = z - 3 + i$  rappresenta un traslazione di  $(-3, 1)$  da applicare all'insieme che è l'intersezione di  $A$  e  $B$ :

$$z = x + iy$$

$$z = -3 + i = x + iy - 3 + i$$

$$v = (x - 3) + i(1 + y)$$

**es.** trovare le soluzioni di

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{i}z = 0$$

Non si può applicare il teorema fondamentale dell'algebra per via della presenza di  $\bar{z}$ .

Iniziamo togliendo  $i$  dal denominatore

$$-\frac{2i}{i} = -\frac{2i}{1} = -2i$$

$$z^2 - z\bar{z} + 2iz = 0$$

$$z(z - \bar{z} + 2i) = 0$$

prima soluzione è  $z = 0$

Ora poniamo  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$

$$2iy + 2i = 0$$

$$2i(y + 1) = 0$$

Da cui ricaviamo  $y = -1$

Definire l'insieme B (A rappresenta le soluzioni del punto precedente):

$$B = \{w \in (C) : w = z + 3i, z \in A\}$$

Notiamo che  $w = z + 3i$  rappresenta una traslazione verso l'alto. Quindi il punto  $(0, 0)$  diventa  $(0, 3i)$ , invece la retta  $y = -1$ , cioè  $Im(z) = -1$ , diventa la retta  $Im(w) = 2$ .

**es.**

$$i^{255} z^3 = \bar{z}$$

Per risolvere  $i^{225}$  si può notare che gli esponenti di  $i$  seguono un pattern:  $i^0 = 1$   $i^1 = i$   $i^2 = -1$   $i^3 = -i$ . Inoltre da ricordarsi che  $i$  ha modulo 1 e argomento  $\frac{\pi}{2}$   
IMMAGINE

$$i^{225} = i^{224+1} = i^{224} i^1 = 1i = i$$

$$iz^3 = \bar{z}$$

Ora risolviamo questa equazione usando la forma esponenziale dei numeri complessi:  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho(\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-i\theta})$$

Che da origine a due soluzioni. La prima:

$$\rho = 0$$

Accettata perchè  $\rho$  è un numero reale positivo. La seconda:

$$\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{-i\theta}$$

Modulo:

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = \pm 1$$

Ma essendo  $\rho$  un numero reale positivo rifiutiamo  $-1$  come soluzione. Quindi  $\rho = 1$ .

Argomento:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi$$

$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

per  $k = 0, \dots, 3$ .

es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}|\operatorname{Im}(z)|\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : iw^2 \in A\}$$

partendo dal fatto che  $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} : x = \sqrt{3}|y|\}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & y \geq 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_z e^{i\frac{\pi}{6}} & y \geq 0 \\ \rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}} & y < 0 \end{cases}$$

$$w = \rho_w e^{i\theta_w}$$

$$iw^2 = z$$

moltiplico per  $-i$

$$w^2 = -iz$$

Per  $A^+$ :

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{i\frac{\pi}{6}})$$

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = \rho_z e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$

$$\arg(w) = 2\theta_w = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \theta_w = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per  $k = 0, 1$ .

Per  $A^-$ :

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \rho_z e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$

$$\theta_w = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$$

## Permutazioni con e senza ripetizioni

Definiamo il fattoriale di un numero  $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1) \dots 2 \cdot 1 & n \geq 1 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è tipicamente usato per calcolare il numero di possibili permutazioni. Per esempio il numero di possibili permutazioni (anagrammi) di una parola si ottiene con il fattoriale del numero di lettere.

**es.** ROMA  $\rightarrow 4!$

**es.** FARFALLA  $\rightarrow 8!$ , ma se per esempio volessimo eliminare la possibilità di permutare lettere identiche, dovremmo togliere a  $8!$  le possibili permutazioni delle F ( $2!$ ), delle A ( $3!$ ), e delle L ( $2!$ ) e quindi otterremmo:

$$\frac{8!}{2!2!3!}$$

**es.** In quante configurazioni diverse si possono porre 9 persone in fila indiana?  $9!$

**es.** Se le 9 persone dell'esercizio fossero 5 maschi e 4 femmine e noi volessimo avere sempre per prima i tutti i maschi e poi tutte le femmine?  $5!4!$

## Esercizi sui Fattoriali

**es.** TDE. 3 uomini e 3 donne devono sedersi alternati a un tavolo rotondo, quante sono le diverse possibili configurazioni?

Per risolvere questo esercizio ragioniamo a "coppie" di persone (uomo-donna) che possiamo creare:  $3!$ .

Queste  $3!$  coppie possibili possono essere disposte sul tavolo in  $3!$  modi diversi.

Il numero fino ad ora ottenuto va moltiplicato per due perchè abbiamo solo lavorato con le coppie uomo-donna, ma possiamo rifare lo stesso ragionamento anche per le coppie donna-uomo.

Ultimo fattore da considerare è il fatto che il tavolo sia rotondo, infatti le permutazioni possibili di elementi su un tavolo rotondo non sono  $n!$  ma  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ . Questo accade perchè se avessimo un fila indiana da riempire con gli elementi A,B e C otterremmo tre possibili configurazioni: ABC, CAB, BCA. Ma se disposte su un tavolo rotondo queste tre disposizioni sono esattamente la stessa disposizione.



Risposta:

$$\frac{3!2!2!}{6}$$

(6 sono i posti a tavola)

**es.** TDE

Possibili anagrammi di ESAME?

$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

**es.** TDE

Con 14 partite di una schedina di calcio con 3 pareggi e 2 vittorie in casa, quante possibilità di compilare la schedina ci sono?

$$\frac{14!}{9!2!3!}$$

**es.** TDE

Quante password di 6 cifre e composte solo dai caratteri "0" "1" "2" esistono?

$$3^6$$

## Coefficienti binomiali

**def.** Coefficiente binomiale con  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vediamo alcuni coefficienti binomiali notevoli:

caso  $k = 0$  :

$$\binom{n}{0} = 1$$

caso  $k = n$  :

$$\binom{n}{n} = 1$$

caso k piccolo, comodo perchè risolve il binomiale trasformandolo in una frazione con k fattori sopra e sotto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

**dim.**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!}$$

caso n e k sono numeri molto simili, comodo perchè riconduce il binomiale alla formula precedente

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**dim.**

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

**def.** potenza del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**es.** coefficiente di  $x^7y^3$  nello sviluppo di  $(2x-y)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^k (-y)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} 2^k (-1)^{10-k} x^k y^{10-k}$$

per  $x^7y^3$  devo prendere  $k=7$ :

$$\binom{10}{7} 2^7 (-1)^3 = \dots = -30 \cdot 2^9$$

**es.** TDE. Coefficiente di  $a^5b^7$  nello sviluppo di  $(2\sqrt{ab} + 3ab)^7$

Si potrebbe applicare direttamente Newton, ma per semplificare i calcoli sarebbe meglio prima raccogliere  $ab$

$$a^{\frac{7}{2}}b^7(2+3a^{\frac{1}{2}})^7 = a^{\frac{7}{2}}b^7 \left[ \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^k (3a^{\frac{1}{2}})^{7-k} \right]$$

l'intera sommatoria è moltiplicata per  $b^7$  e  $a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{7}{2}-\frac{k}{2}}$ , quindi per ottenere  $b^7a^5$  devo prendere  $k = 4$ .

$$k = 4 \rightarrow \binom{7}{4} 2^4 (3)^3 = \dots$$

**es.** risolvere la seguente equazione

$$2 \binom{x-1}{1} + 3 \binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$$

per  $x-1 \geq 1$ , per  $x+1 \geq 3$  e  $x \geq 2$ , quindi solo  $x \geq 2$

$$2 \frac{(x-1)!}{(x-2)!} + 3 \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - \frac{x!}{2!(x-2)!} = 0$$

$$2(x-1) \frac{(x-2)!}{(x-2)!} + 3 \frac{x+1}{6} - \frac{x(x-1)}{2} = 0$$

$$(x-1)(2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = 0$$

$x-1=0$  non si accetta.

$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$  è impossibile.

non ci sono soluzioni.

## Topologia in $\mathbb{R}$

**def.**

Preso un insieme  $A \in \mathbb{R}$ ,  $k$  é **maggiorante** di  $A$  se  $k \geq x, \forall x \in A$ .

Preso un insieme  $A \in \mathbb{R}$ ,  $k$  é **minorante** di  $A$  se  $k \leq x, \forall x \in A$ .

Un insieme è **limitato superiormente** se ne esiste almeno un maggiorante.

Un insieme è **limitato inferiormente** se ne esiste almeno un minorante.

L'**estremo inferiore**  $\inf(A)$  è il massimo dei minoranti (non deve per forza appartenere ad  $A$ ).

L'**estremo superiore**  $\sup(A)$  è il minimo dei maggioranti (non deve per forza appartenere ad  $A$ ).

Il **minimo**  $\min(A)$  è uguale all' $\inf(A)$  se esso appartiene ad  $A$ . Notare che se esiste il  $\min(A)$  esso è anche l' $\inf(A)$ , ma non vale il viceversa.

**es.** consideriamo l'insieme  $A = (0, 1]$ .

$-1$  è un minorante, pure  $-2$ , etc. L'insieme dei minoranti di  $A$  è:  $(-\infty, 0]$ , il più grande è lo 0, che quindi è l' $\inf(A)$ , ma non è il  $\min(A)$ , perchè non

appartiene ad  $A$ .

Se invece l'insieme fosse stato  $A = [0, 1]$ , l'insieme dei minoranti sarebbe ancora  $(-\infty, 0]$ ,  $\inf(A)$  sarebbe ancora 0, ma in questo caso sarebbe anche il  $\min(A)$ .

L'insieme dei maggioranti è invece  $[1, +\infty]$ ,  $\sup(A) = 1$ ,  $\max(A) = 1$ .

**def.** Un punto è detto di **accumulazione** se:

- qualunque intorno di quel punto contiene almeno un punto di  $A$
- ogni intorno di  $x_0$  contiene un punto in  $A$  diverso da  $x_0$

**def.** un punto è detto di **frontiera** se:

- in ogni intorno cadono punti di  $A$  e di  $A^c$

**def.** un punto è detto **isolato** se:

- per qualunque intorno non ci sono altri punti di  $A$

**es.**

$$A = \{-2\} \cup (1, 3]$$

$-2$  è di frontiera e isolato, 1 e 3 sono di frontiera.

**def.** un insieme è detto **interno** se:

- esiste almeno un intorno con solo punti di  $A$

**def.** un insieme è detto **aperto** se:

- tutti i punti di  $A$  sono punti interni

**def.** un insieme è detto **chiuso** se:

- tutti i punti di  $A$  sono punti di accumulazione

**es.**

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \in [1, 5]\}$$

che equivale all'insieme

$$\{-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{5}\} \cap \mathbb{Q}$$

maggioranti:  $(\sqrt{5}, +\infty)$

$\sup(B) = \sqrt{5}$ , ma non esiste perchè siamo in  $\mathbb{Q}$

$\inf(B) = \dots$

$\max(B) = \text{non esiste}$

$\min(B) = \dots$

## 2-ESERCITAZIONE

08/10/19

**es.** Studiare il seguente insieme:

$$B = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 3\}$$

L'insieme dei minoranti è  $(-\infty, -3]$ , inoltre  $-3$  è il massimo dei minoranti, quindi  $\inf(B) = -3$ , ma non è il  $\min(B)$  perchè non  $\in B$ .

L'insieme dei maggioranti è  $[3, +\infty)$ , inoltre  $3$  è il  $\sup(B)$  e  $\max(B)$ .

$-3, 3$  sono punti di frontiera.

$[-3, 3]$  punti di accumulazione.

Non esistono punti isolati.

$B$  non è nè aperto nè chiuso.

**es.** studiare i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\}$$

$$A = \{-2 \leq x - 1 \leq 2\} = \{-1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{-1 \leq x^2 \leq 3\} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$B$  è chiuso,  $\inf(B) = -\sqrt{3} = \min(B)$ ,  $\sqrt{3} = \sup(B) = \max(B)$

**es.**

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x^3| - x > 0\}$$

Riscrittura algebrica:

$$\begin{cases} \text{per } x \geq 0 & x^3 - x^3 > 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \\ \text{per } x < 0 & -2x^3 > 0 \quad \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

**es.**

$$f(x, y) = \frac{\arccos(x)}{\arcsin(y)}$$

$$D = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, y \neq 0\}$$

L'insieme è limitato perchè

$$\exists k : \sqrt{x^2 + y^2} < K$$

L'insieme non è aperto (il punto (1,1) non è interno).

L'insieme non è chiuso (il punto (1,0) è di accumulazione e  $\notin A$ )

es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 9| > |z - 9i|\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : \arg(w) = \frac{\pi}{4}\}$$

$A \cup B$  è:

- chiuso
- aperto
- nè chiuso nè aperto
- numerabile (cioè se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali)

img 22

I punti che appartengono ad  $A$  sono quelli al di sopra della bisettrice, bisettrice non inclusa. L'insieme  $B$  è invece la bisettrice che parte dall'origine e taglia il I quadrante.

I punti della semiretta bisettrice che parte dall'origine e taglia il III quadrante è costituita da punti di accumulazione.

La risposta corretta è che l'insieme  $A \cup B$  non è nè chiuso nè aperto.

es. TDE

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{|z - 2|}{|z|} < 1\}$$

$A$  è:

- senza punti di accumulazione
- aperto
- chiuso
- limitato

$$\begin{aligned}
z - 2 &= x - 2 + iy \\
\frac{|z - 2|}{|z|} &= \frac{\sqrt{(x - 2)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} < 1 \\
x^2 + 4x + 4 + y^2 &< x^2 + y^2 \\
x &> 1
\end{aligned}$$

Ha punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ascisse, non è limitato, non è chiuso perchè non contiene tutti i suoi punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ordinate. La risposta giusta è che è aperto.

**es.**

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = 5 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

per  $n = 1$  abbiamo  $x_1 = 3$ , poi per  $n = 2$  abbiamo  $x_2 = 4$ , poi  $x_3 = 5 - \frac{2}{3}$  etc.

L'idea dell'insieme è che al crescere di  $n$  ci avviciniamo sempre di più al valore 5.

$$f(x) = 5 - \frac{2}{x}$$

img23

Troviamo *inf* e *sup* di  $A$ :

$$\inf(A) = 3 = \min(A)$$

Per verificare che 3 sia l'*inf* devo verificare che sia un minorante e sia il massimo dei minoranti.

Verifichiamo che 3 sia un minorante:

$$\begin{aligned}
3 &\leq x_n \\
3 &\leq 5 - \frac{2}{n} \\
\frac{2}{n} &\leq 2 \\
\frac{1}{n} &\leq 1
\end{aligned}$$

Ora verifichiamo che sia il massimo dei minoranti, cioè che se salgo sopra il 3, non trovo più un minorante:

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_n : x_n < 3 + \epsilon$$

$$5 - \frac{2}{n} < 3 + \epsilon$$

$$\frac{2}{n} > 2 - \epsilon$$

$$n < \frac{2}{2 - \epsilon}$$

essendo  $\frac{2}{2-\epsilon}$  maggiore di 1 mi basta prendere  $n = 1$ .

Inoltre 3 è anche minimo perchè appartiene all'insieme.

Verifichiamo ora che 5 è il sup ma non il max di  $A$ .

$$\sup(A) = 5 \neq \max(A)$$

Per essere il sup deve essere maggiorante e il minimo dei maggioranti.

$$5 \geq X_n \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$5 \geq 5 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$0 \geq -\frac{2}{n}$$

Ora voglio verificare che sia il minimo dei maggioranti, cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_n : x_n > 5 - \epsilon$$

$$5 - \frac{2}{n} > 5 - \epsilon$$

$$-\frac{2}{n} > -\epsilon$$

$$\epsilon > \frac{2}{n}$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

$$n = \frac{2}{\epsilon} + 3$$

Ora dobbiamo dimostrare che non è il massimo, cioè che non appartiene all'insieme.

Tutti gli elementi dell'insieme hanno la forma

$$5 - \frac{2}{n}$$



Ma siccome non esiste  $n$  per cui  $5 - \frac{2}{n} = 5$ , l'elemento non appartiene all'insieme.

L'insieme è limitato? sì.

Tutti i punti sono isolati? sì, dimostriamolo:

$$x_{\bar{n}} = 5 - \frac{2}{\bar{n}}$$

$$d = \text{dist}(x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}) = \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}$$

se quindi prendiamo l'intorno

$$B(x_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}) \quad (?)$$

abbiamo dimostrato che tutti i punti sono isolati.

Troviamo ora il limite per  $n \rightarrow \infty$  e dimostriamolo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x_n = 5 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} - 0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \text{ vale } |x_n - 5| < \epsilon$$

$$|x_n - 5| < \epsilon$$

$$|(5 - \frac{2}{n} - 5)| < \epsilon$$

$$\frac{2}{n} < \epsilon$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

**es.** dimostrare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n^2 - 1} = 3$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \text{ vale } |\frac{3n^2 + n}{n^2 - 1}| < \epsilon$$

$$|\frac{n+3}{n^2-1}| < \epsilon$$

$$-\epsilon < \frac{n+3}{n^2-1} < \epsilon$$

$$\begin{cases} \frac{n+3}{n^2-1} > -\epsilon \\ \frac{n+3}{n^2-1} < \epsilon \end{cases}$$

La prima disequazione è sempre verificata, per la seconda:

$$\begin{aligned} \epsilon n^2 - n - (\epsilon + 3) &> 0 \\ n_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon(\epsilon + 3)}}{2\epsilon} \\ n &\leq \frac{\alpha??}{2\epsilon} \vee \frac{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon(\epsilon + 3)}}{2\epsilon} \end{aligned}$$

**es.** descrivere il carattere della seguente successione:

$$a_n = n - 2\cos n \frac{\pi}{2} \rightarrow n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

notiamo un pattern:

$$\cos(1 + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad , \quad \cos(2 + \frac{\pi}{2}) = -1 \quad , \quad \cos(3 + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad , \quad \cos(4 + \frac{\pi}{2}) = 1$$

al crescere di n il pattern si ripete. La nostra successione quindi si muove così:z

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_3 = 3 \quad , \quad a_4 = 2$$

quindi  $a_n$  è:

$$a_n = \begin{cases} 4k+1 & \text{se } n = 4k+1 \\ 4k+4 & \text{se } n = 4k+2 \\ 4k+3 & \text{se } n = 4k+3 \\ 4k+2 & \text{se } n = 4k+4 \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{N}$

Il limite di  $a_n$  per  $n \rightarrow +\infty$  é  $+\infty$ .

dimostriamolo:

$$\forall k > 0 \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \text{ vale } a_n > k$$

qualunque  $k$  fissato riesco a trovare un  $\bar{n}$  per cui tutti i successivi elementi sono maggiori di  $k$ .

[manca dimostrazione] ...

**es.**

$$a_n = (1 - \cos \frac{9}{10} \pi)^n$$

E' simile alla successione geometrica ( $a_n = q^n$ ).  
Analiziamo la sua ragione:

$$-1 < \cos \frac{9}{10} < 0$$

quindi

$$1 < q < 2$$

diverge a  $+\infty$

### **3-ESERCITAZIONE**