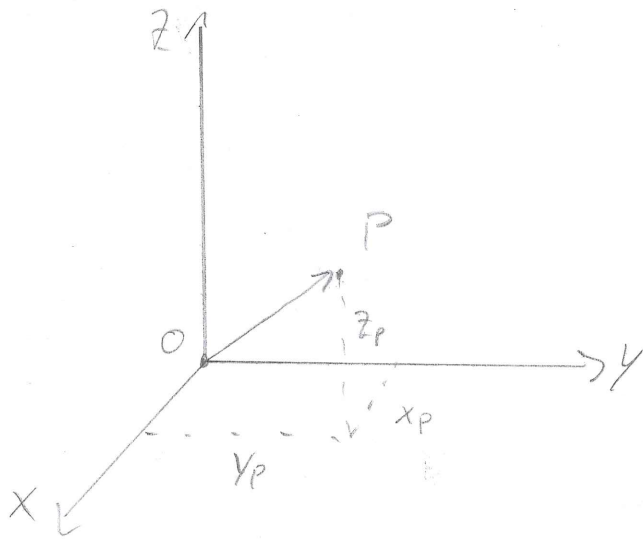


ESERCITAZIONE 1

- RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE
- CINEMATICA DEL PUNTO

• DEFINIZIONE DI VETTORE



in un sistema di riferimento cartesiano definiamo il vettore \vec{P}

$$\vec{P} = (P - O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono VERSORI

un vettore è caratterizzato dalle proprietà: MODULO, DIREZIONE, VERSO + PUNTO o RETTA DI APPLICAZIONE

MODULO DEL VETTORE \vec{P} : $|\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

i VERSORI hanno modulo unitario.

Nel corso studiamo problemi piani \rightarrow non è vero che tutti i vettori appartengono al piano. ES. velocità angolare $\vec{\omega}$ e $\perp xy$ $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

Nell'esempio \vec{P} è un vettore posizione: indica la posizione di P nel sistema di riferimento.

In MECCANICA esistono diverse grandezze di tipo VETTORIALE

- ES:
- grandezze cinematiche: velocità, velocità angolare, accelerazione, accelerazione angolare
 - grandezze dinamiche: forze e coppie (momenti)

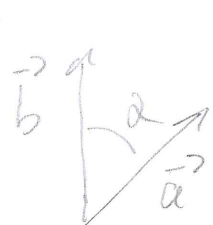
In MECCANICA esistono anche grandezze di tipo SCALARE (sono numeri)

ES: densità, massa (non peso), volume, potenza, lavoro, energia

• OPERAZIONI TRA VETTORI

- PRODOTTO SCALARE \times

$$C = \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \text{il risultato è uno scalare}$$



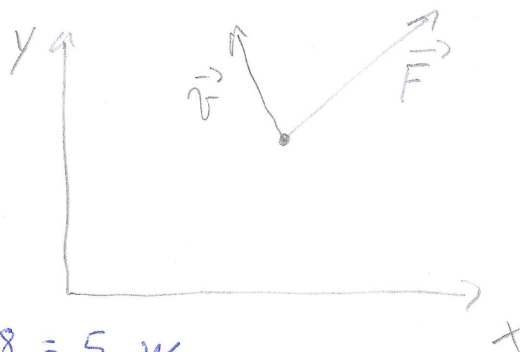
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab \cos \alpha = \vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{prop. commutativa})$$

ES: potenza $W = \vec{F} \times \vec{v}$ $\alpha \alpha = 90^\circ \Rightarrow c = 0$

$$W = \vec{E} \times \vec{w}$$

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \quad [N]$$

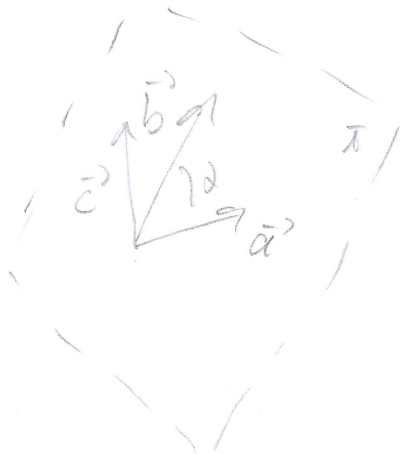
$$\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} \quad [m/s]$$



$$W = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 4\vec{j}) = -3 + 8 = 5 \text{ W}$$

- PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \text{il risultato è un vettore}$$



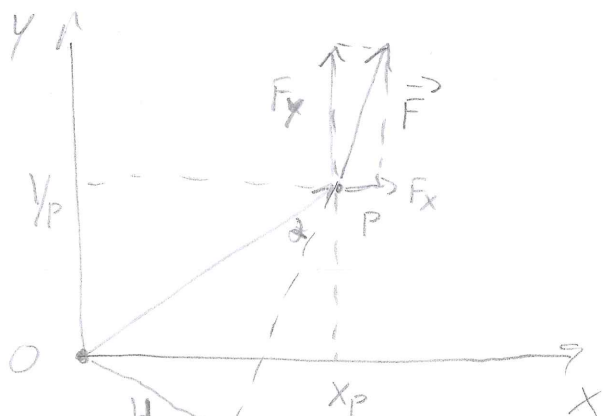
il vettore \vec{c} è \perp al piano definito dai vettori \vec{a} e \vec{b}

$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha \quad \alpha \alpha = 0 \Rightarrow \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a} \quad \text{non commutativo}$$

! regola mano dx

ES. MOMENTO di una forza: $\vec{M} = (P-O) \wedge \vec{F}$



$$\vec{M} = (P-O) \wedge \vec{F} =$$

$$= (x_P \vec{i} + y_P \vec{j}) \wedge (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) =$$

$$x_P F_y \vec{k} - y_P F_x \vec{k} = (x_P F_y - y_P F_x) \vec{k}$$

$$\vec{M} \text{ è } \perp \text{ a } xy$$

SI SCORRONE NELLA SANA
DEL MOMENTO DOVUTA
A F_x E DI QUELLO DOVUTA
A F_y

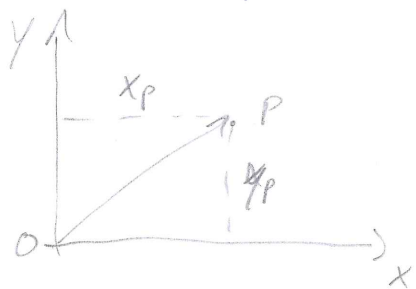
$$\vec{F} = \vec{i} + 3\vec{j} \quad [N]$$

$$(P-O) = 5\vec{i} + 2\vec{j} \quad [m]$$

$$\vec{M} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \wedge (\vec{i} + 3\vec{j}) = (15 - 2) = 13 \vec{k} \quad [Nm]$$

CINEMATICA NEL PIANO

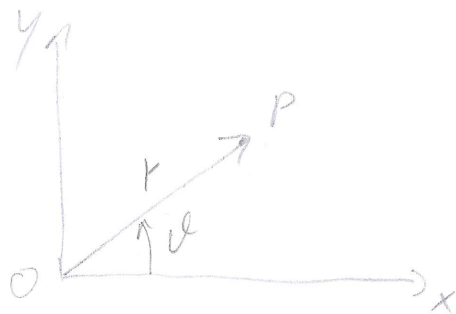
- vettore posizione



coordinate cartesiane

$$(P-O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$$

$$|(P-O)| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = r \quad \tan \vartheta = \frac{y_P}{x_P}$$



coordinate polari r, ϑ

$$(P-O) = r \cos \vartheta \vec{i} + r \sin \vartheta \vec{j}$$

per definire la posizione di un punto nel piano servono 2 coordinate

- equazioni scalari del movimento

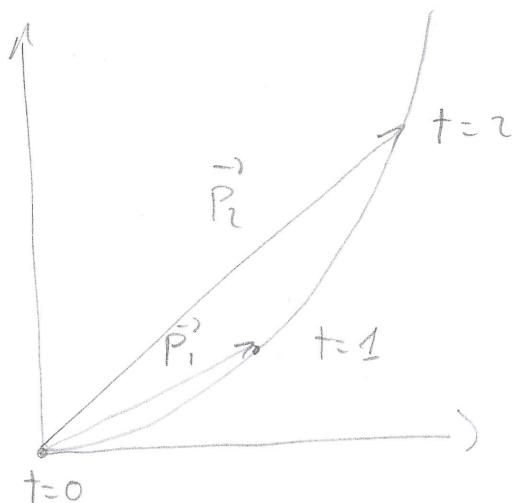
posizione di P in funzione del tempo

$$\text{ES: } \begin{cases} x = x(t) = 3t \\ y = y(t) = 5t^2 \end{cases}$$

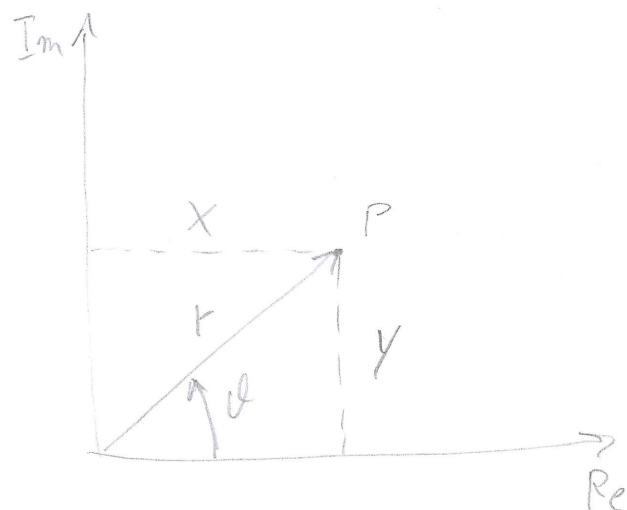
posso ricavare l'equazione della traiettoria $y = f(x)$

(NON SEMPRE È POSSIBILE)

$$t = \frac{x}{3} \quad y = 5 \left(\frac{x}{3} \right)^2 = \frac{5}{9} x^2 \quad \text{parabola con vertice in } O$$



UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI



sistema di riferimento $Re - Im$

$r = \text{modulo}$

$\theta = \text{anomalia}$ (! convenzione $\theta \uparrow$)

- forma cartesiana: $\vec{z} = x + iy$

- forma esponenziale: $\vec{z} = r e^{i\theta}$ (rappresentazione polare)

[relazione di Eulero: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$]

$$e^{i0} = 1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = -1$$

- forma trigonometrica: $\vec{z} = r \cos \theta + i r \sin \theta$



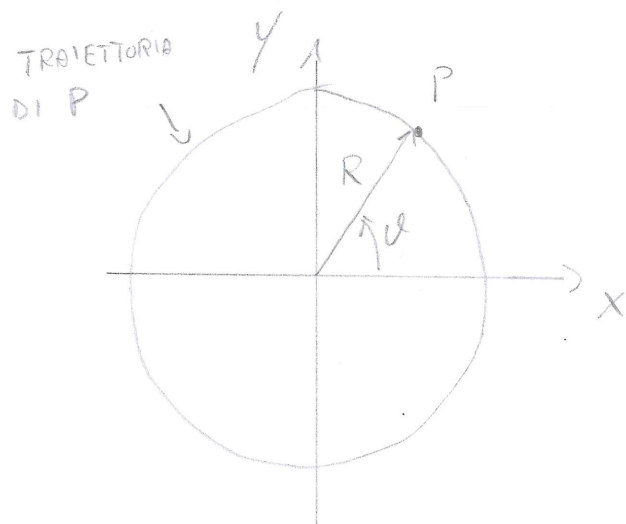
CINEMATICA DEL PUNTO NEL PIANO

- Posizione $\vec{P} = (P - O)$

- velocità $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

- accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

APPLICAZIONE: punto su traiettoria circolare



il punto P è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R

se utilizzo coordinate polari

$r = R = \text{costante}$

$\theta = \theta(t)$ funzione del tempo

$$\vec{p} = (p-o) = x(t) \vec{i}' + y(t) \vec{j}' = x(u(t)) \vec{i}' + y(u(t)) \vec{j}'$$

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u \end{cases}$$

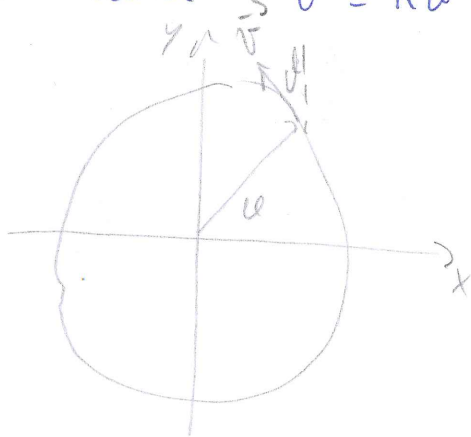
$$(p-o) = R \cos u \vec{i}' + R \sin u \vec{j}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{x}(t) \vec{i}' + \dot{y}(t) \vec{j}' = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} \vec{i}' + \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} \vec{j}' =$$

$$= -R \sin u \dot{u} \vec{i}' + R \cos u \dot{u} \vec{j}' = v_x \vec{i}' + v_y \vec{j}'$$

posso scrivere $\vec{v} = R \dot{u} \underbrace{(-\sin u \vec{i}' + \cos u \vec{j}')}_{\vec{t}'}$

$$\vec{t}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



\dot{u} è la velocità con cui varia la direzione di \vec{v}

$$|\vec{v}| = R \dot{u}$$

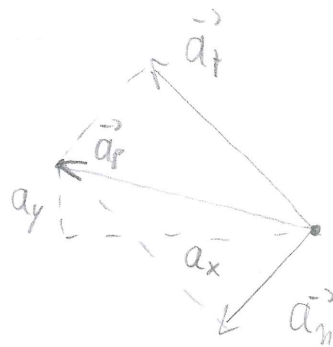
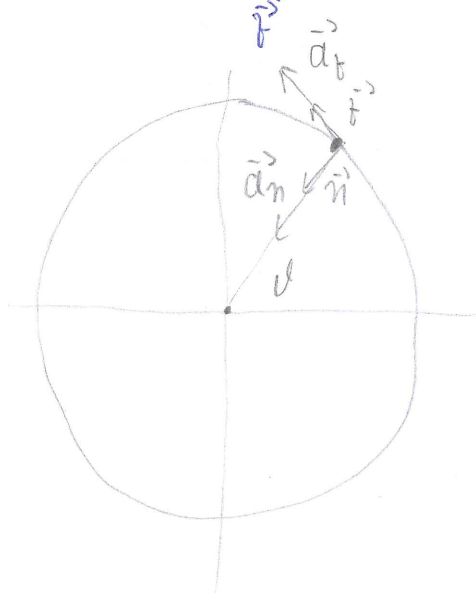
$\dot{u} > 0$, ALTREMENTI STO PERCORRENDO LA TRAIETTORIA NELL'ALTRO SENSO

accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dv_y}{dt} \vec{j}' = \ddot{x}(t) \vec{i}' + \ddot{y}(t) \vec{j}' =$$

$$= (-R \cos u \ddot{u} - R \sin u \dot{u}^2) \vec{i}' + (-R \sin u \ddot{u} + R \cos u \dot{u}^2) \vec{j}' = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}'$$

$$\vec{a} = R \ddot{u} \underbrace{(-\sin u \vec{i}' + \cos u \vec{j}')}_{\vec{t}'} - R \dot{u}^2 \underbrace{(R \cos u \vec{i}' + R \sin u \vec{j}')}_{R \vec{n}'}$$



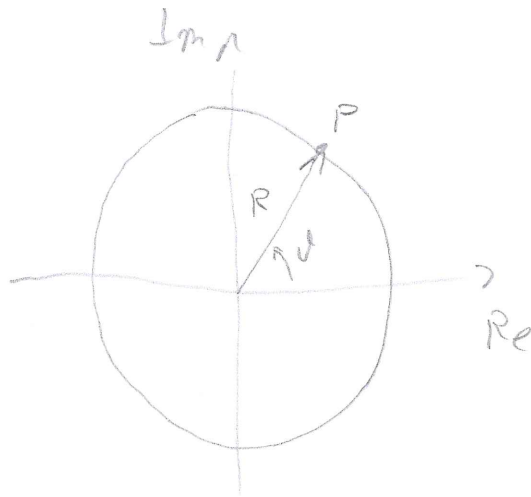
approccio con i numeri complessi

$$(P-O) = R e^{i\vartheta}$$

$$R = \text{cost}$$

$\vartheta = \text{variable}$

$$\begin{cases} x = \text{Re}(\vec{P}) = R \cos \vartheta \\ y = \text{Im}(\vec{P}) = R \sin \vartheta \end{cases}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = i R e^{i\vartheta} \dot{\vartheta} = R \dot{\vartheta} e^{i(\vartheta + \frac{\pi}{2})}$$

$[\perp (P-O)]$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \sin \vartheta \dot{\vartheta} \\ \dot{y} = R \cos \vartheta \dot{\vartheta} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R e^{i\vartheta} \ddot{\vartheta} + i R e^{i\vartheta} \dot{\vartheta}^2 = R \ddot{\vartheta} e^{i(\vartheta + \pi)} + R \dot{\vartheta}^2 e^{i(\vartheta + \frac{\pi}{2})}$$

$\vec{a}_n \qquad \vec{a}_t$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - R \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 \\ \ddot{y} = -R \sin \vartheta \ddot{\vartheta} + R \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 \end{cases}$$