27/04/2020

REGOLATORI PID (Proporzionale, Integrale, Derivativo)

↳ la legge di controllo PID è molto usata e "standardizzata"

Legge di controllo ideale:

$$u(t) = \underbrace{K_P\, e(t)}_{P} + \underbrace{K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau}_{I} + \underbrace{K_D \frac{de(t)}{dt}}_{D}$$

AZIONI

- Azione P

$u_p = K_p e$ "più errore, più azione di controllo"

PERÒ

se u fosse soltanto u_p

per avere $u \neq 0$

devo accettare $e \neq 0$

(in generale)

IDEA ("automatic reset"):

$$u(t) = u_p(t) + \bar{u}$$

con $\bar{u}$ scelto in modo da avere $e = 0$

MA evidentemente $\bar{u}$ dipende dal valore del set point

Allora come calcolo $\bar{u}$? (supponiamo $\mu_p > 0$)

Se $e = 0$ l'ho trovato

Se $e < 0$ deve crescere

Se $e > 0$ deve decrescere

Ma allora $\bar{u}$ è prop. a $\int e \, dt$

"Automatic reset" $\Rightarrow$ Azione I

- Azione 1

$$u_1(t) = K_1 \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

NB **SE** il sistema in AC va a regime

tutto costante

ALLORA in tale regime, in presenza di azione I l'errore è nullo

Forme alternative della legge di controllo PID:

$$u = K_P e + K_I \int e\,dt + K_D \frac{de}{dt}$$

$$\mathcal{L} \Downarrow$$

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s)$$

$$= K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_D \right) E(s)$$

$K = K_P$
$K_I = K_P / T_i$
$K_D = K_P T_D$

"GUADAGNO" (K)

TEMPO INTEGRALE (T_i)

TEMPO DERIVATIVO (T_D)

$$U(s) = K\,\frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i}$$

IDEALE
(2 zeri e 1 polo)

Forma ISA reale a 1 grado di libertà

$$U(s) = \underbrace{K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right.}_{PI \quad K\frac{1+sT_i}{sT_i}} + \underbrace{\left.\frac{sT_d}{1+sT_d/N}\right)}_{D \text{ reale}} E(s)$$

Parametri
K, T_i, T_d, N

PI $\quad K\,\dfrac{1+sT_i}{sT_i}$

1Z 1P ✓

D reale

Ruolo dell'azione P : garantire una risposta immediata (pronta) a variazioni dell'errore

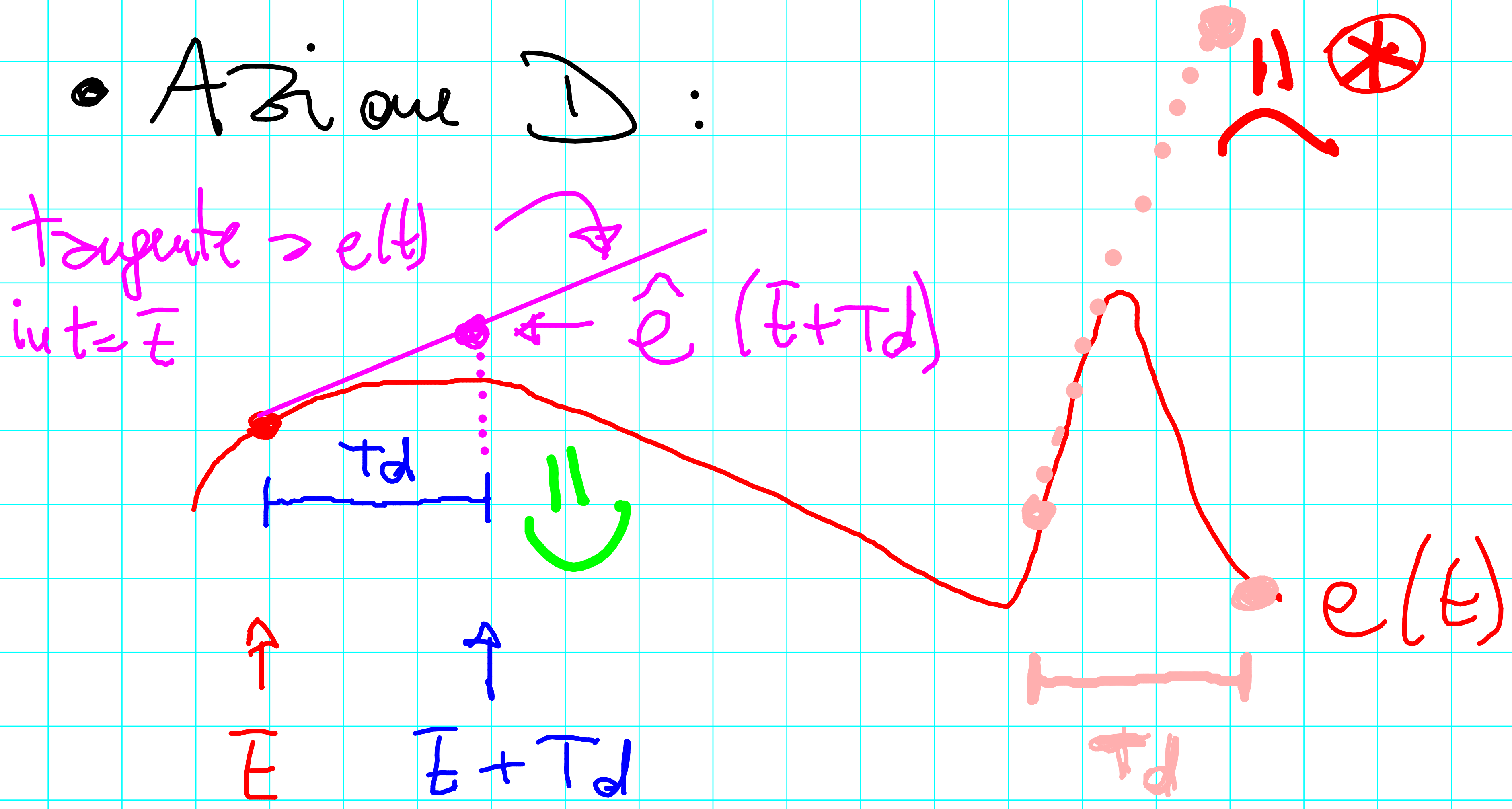
" " " I : garantire errore nullo a regime (supponendo che regime vi sia, cioè AC AS)

" " " D : "anticipare" l'errore

↑

vediamo

• Azione D :



$$\hat{e}(\bar{t}+T_d) = e(\bar{t}) + \underbrace{\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=\bar{t}} \cdot T_d}_{\text{variazione PREVISTA di } e(t) \text{ su orizzonte } T_d}$$

(*) T_d non deve essere "troppo grande" rispetto alla scala temporale della dinamica di e(t) se no la previsione è "molto" errata

⇒ U_d è proporzionale alla var. prevista dell'errore : T_d è l'orizzonte di questa previsione e K il fattore di proporzionalità

Forma ISA reale a 2 gdl $\quad (U/W \neq -U/Y)$

$$U(s) = K\left(\underbrace{b\,W(s) - Y(s)}_{} + \frac{1}{sT_i}\underbrace{\left(W(s) - Y(s)\right)}_{} + \underbrace{\frac{sT_d}{1+sT_d/N}\left(c\,W(s) - Y(s)\right)}_{}\right)$$

peso del set point nell'azione P

NESSUN peso sul set point nell'azione I perché a regime voglio $e = 0$

peso del set point nell'azione D

$K \cdot \underbrace{\quad}_{U_p/K}\ \underbrace{\quad}_{U_I/K}\ \underbrace{\quad}_{U_d/K}$

P $\quad$ I $\quad$ D

$(e = w - y)$

Parametri: $\underbrace{K, T_i, T_d}_{\text{PID IDEALE}}, N, b, c$

N:

$|j\omega T_d|$: RF del derivatore ideale

$\left|\dfrac{j\omega T_d}{1 + j\omega T_d/N}\right|$ derivatore reale

in questa banda D reale $\simeq$ D ideale

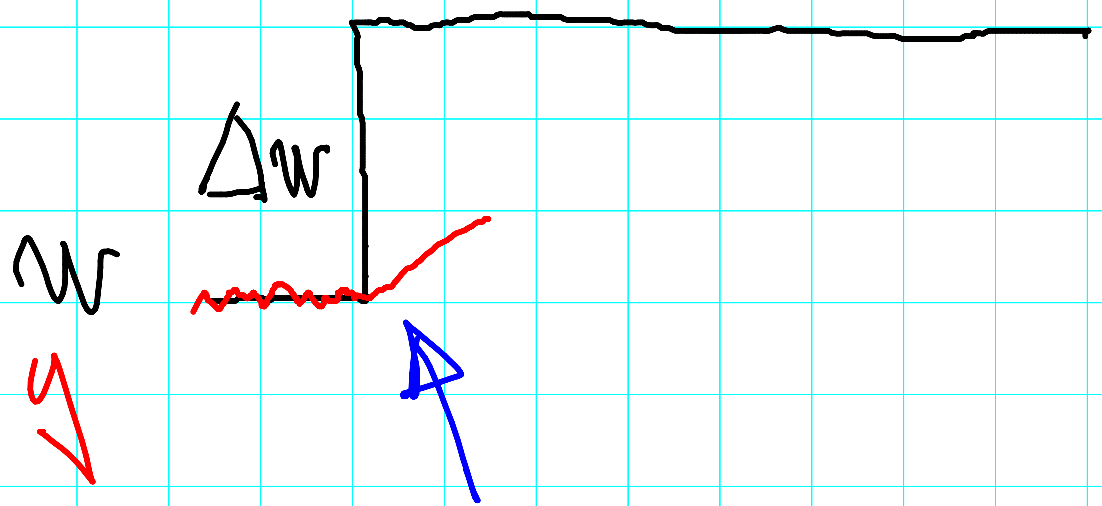
NB $T_d, N > 0$

N alto $\Rightarrow$ D quasi ideale,

MA modulo elevato in alta frequenza

$\Rightarrow$ controllo sensibile a rumore b :

$$u_p = K(bw - y)$$



nei primi istanti $\quad u_p \simeq K b \Delta w$

può ridurre le sollecitazioni "brusche" agli attuatori a fronte di variazioni "brusche" di w

c: Se varia w a scalino

inizialmente anche e varia a scalino

$\Rightarrow \frac{de}{dt} \sim$ impulso

c riduce l'effetto di simili "quasi impulsi" sugli attuatori

Caso notevole: PID a derivazione d'uscita

$c = 0$

OSS quando $w = cost$ $\dot{e} = -\dot{y} \Rightarrow c = 0$ non causa approssimazioni

PID = regolatore con 2 zeri e 2 poli
(reale) di cui uno nell'origine

PI = regolatore con 1 zero e 1 polo
nell'origine

Ragioni della vasta applicabilità del PID

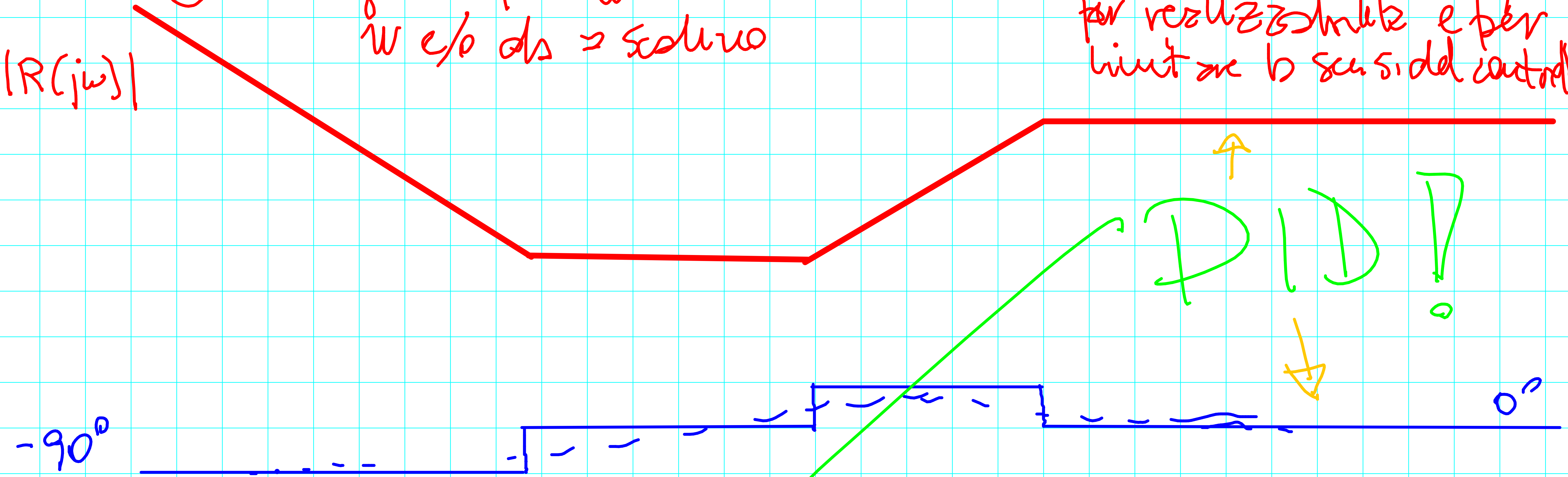
es. tipico: sistema in cui per lunghi periodi $w = \text{cost.}$
soggetto a disturbi in andata a scalino
o lentamente variabili e il processo è AS

<u>MOLTO</u> Frequente nel controllo
di processo

⇒ Voglio un regolatore che abbia

① un integratore per $e_\infty = 0$ con w e/o d_s = scalino

③ un polo in alta freq. per realizzabilità e per limitare la sens. del controllo



② uno o due zeri per alzare la fase di $L(j\omega)$ nella banda opportuna in modo da avere il φ_m voluto

(PI)

METODI DI TARATURA per PI/PID (cenno)

ES

$$P(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Risp. a scalino

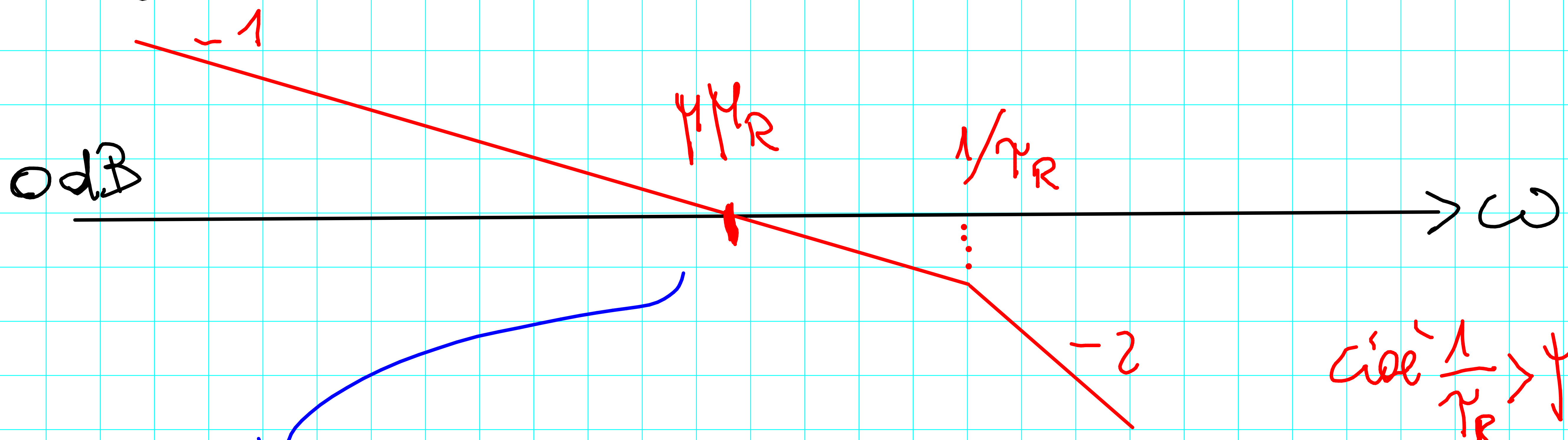
$T_1, T_2 > 0$

PID reale: pongo $R(s) = \mu_R \dfrac{(1+sT_{R1})(1+sT_{R2})}{s(1+s\tilde{T}_R)}$

(1) Pongo $T_{R1} = T_1$ e $T_{R2} = T_2$ (taro per cancellazione)

$$\Rightarrow L(s) = \frac{\mu\mu_R}{s(1+sT_R)}$$

② Scelgo μ_R e τ_R in modo che



cioè $\frac{1}{\tau_R} > \mu_R$

$$\omega_c = \mu_R$$

$$\varphi_m = 90^\circ - \mathrm{arctg}^\circ(\omega_c \tau_R)$$

$$= 90^\circ - \mathrm{arctg}^\circ(\mu_R \tau_R)$$

- Regola di taratura

Modello di P : μ, T_1, T_2

Forma del PID : quella scritta sopra

Specifiche : $\bar{\omega}_c, \bar{\varphi}_m$

Forme di taratura :

$$T_{R1} = T_1$$

$$T_{R2} = T_2$$

$$\mu_R = \bar{\omega}_c / \mu$$

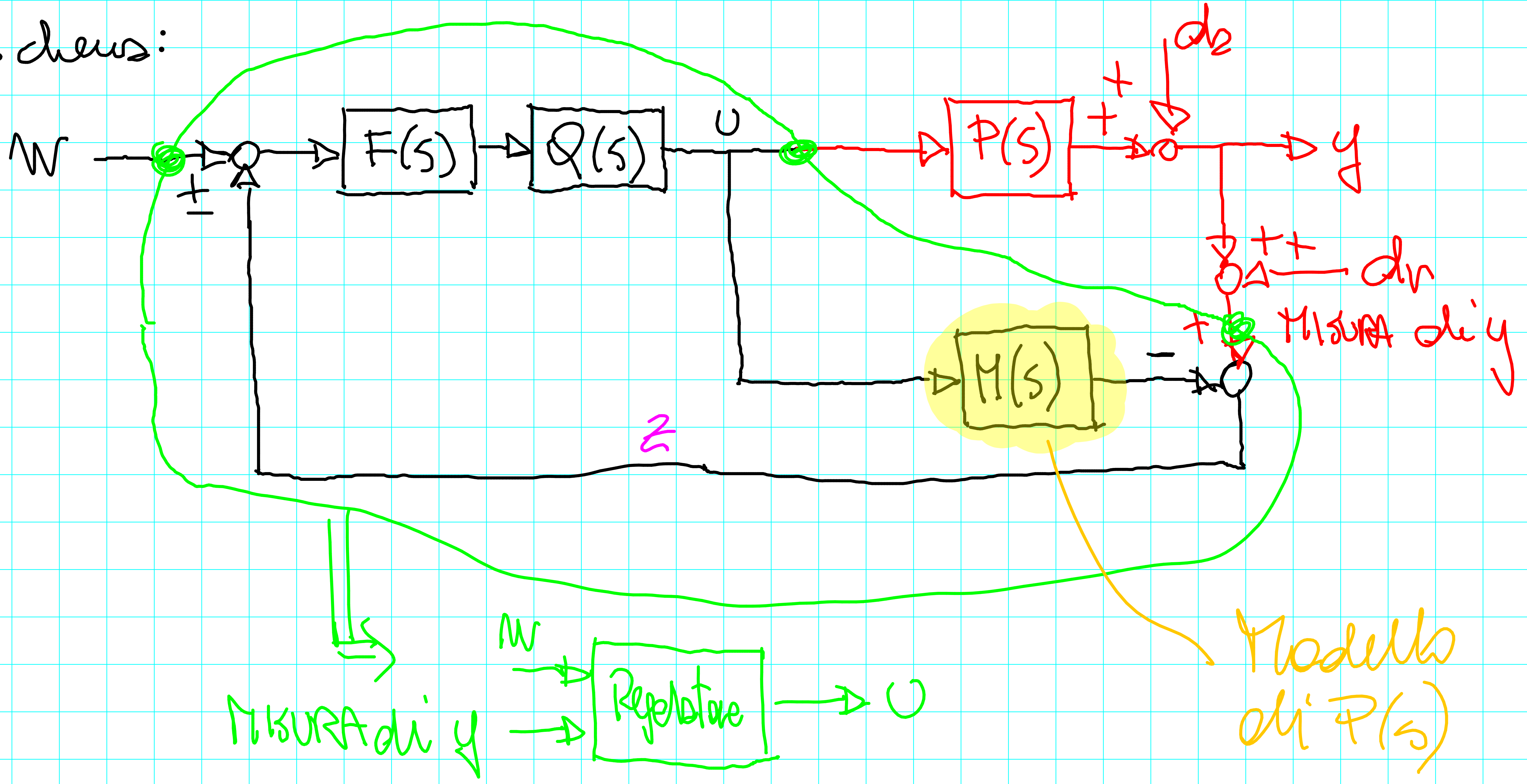
$$\tau_R = \frac{1}{\bar{\omega}_c} \operatorname{tg}\left(90^\circ - \bar{\varphi}_m\right)$$

1. Regole di Ziegler & Nichols ⇒ libro
2. IMC - PID ⇒ lo realizziamo

Internal Model Control

• Premessa: principio del modello interno

Schema:



- $\Pi(s)$ modello del processo

① In CONDIZIONI NOMINALI, cioè

$$M(s) = P(s)$$ modello esatto, no incertezza

$$d_a = d_r = 0$$ nessun disturbo

l'anello è aperto $(z \equiv 0)$

② Sempre in cond. nominali, di conseguenza,

$$Y(s) = F(s)Q(s)P(s)W(s) = F(s)Q(s)\Pi(s)W(s)$$

$M = P$

(3) Se, secondo il caso, nominali, si può anche porre

$$Q(s) = \frac{1}{\Pi(s)}$$

allora $\quad Y(s) = F(s)\, W(s)$

scelgo ad arbitrio la FdT da w a y

NB però FQ deve essere realizzabile e non si devono fare canc. critiche

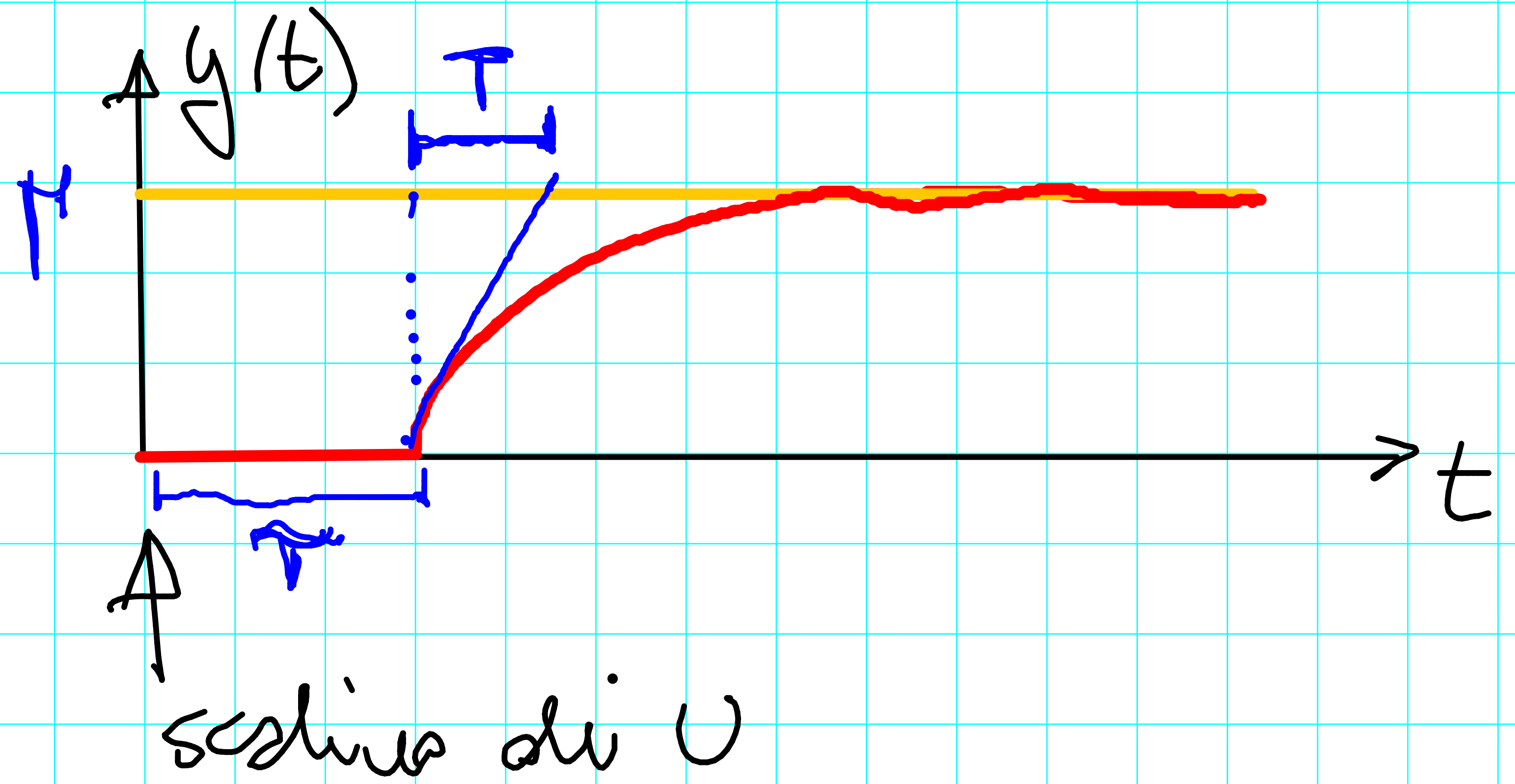
Fine premessa

- Regola di taratura IMC-PID per processi AS

Assumiamo $P(s) = \mu \dfrac{e^{-s\tau}}{1+sT}$ FOPDT

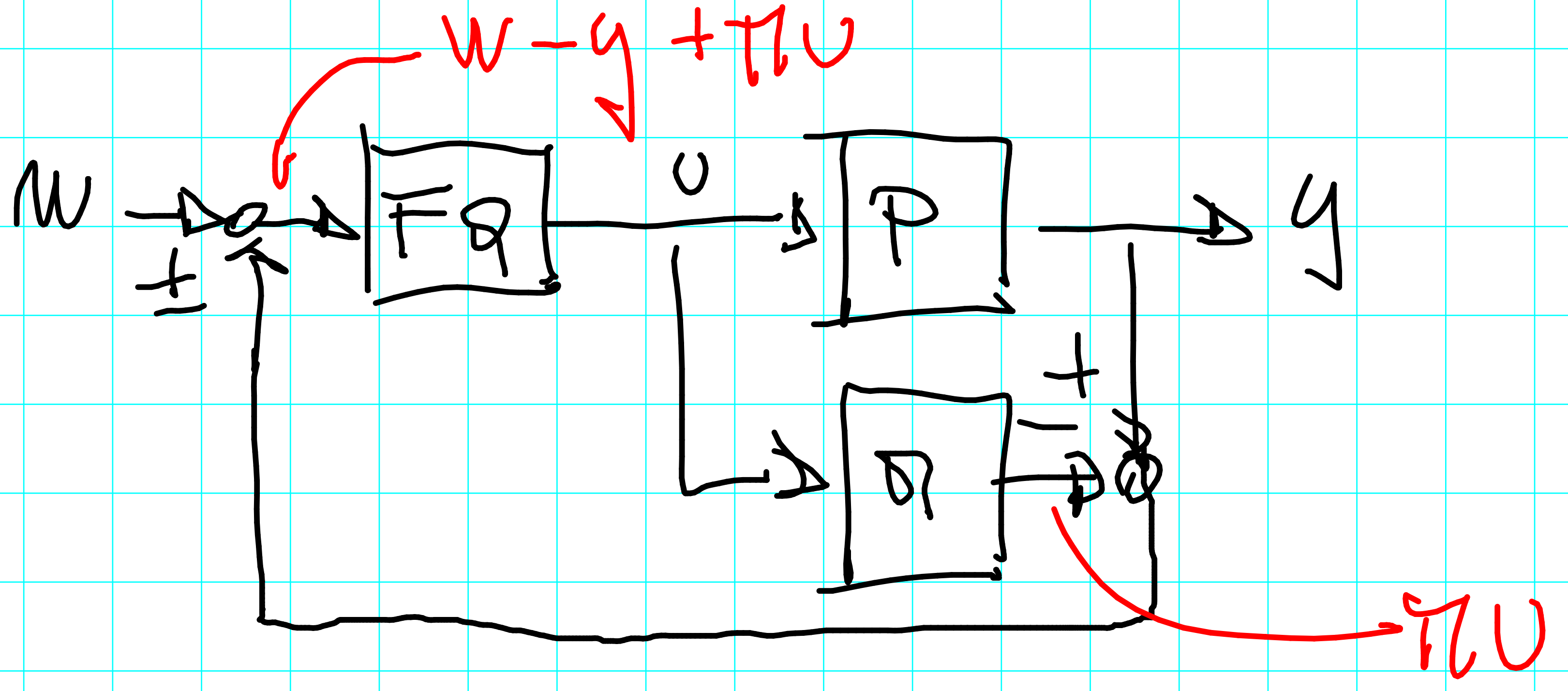
$T > 0$ (AS)
$\tau \geq 0$
($\mu > 0$ per comodità)

NB la risposta a scalino unitario di $P(s)$ è



Ref: metodo della tangente, metodo delle aree....

Modello interno:



$$P(s) = \mu \frac{e^{-s\tau}}{1+sT} = M(s)$$

$$Q(s) = \frac{1+sT}{\mu}$$

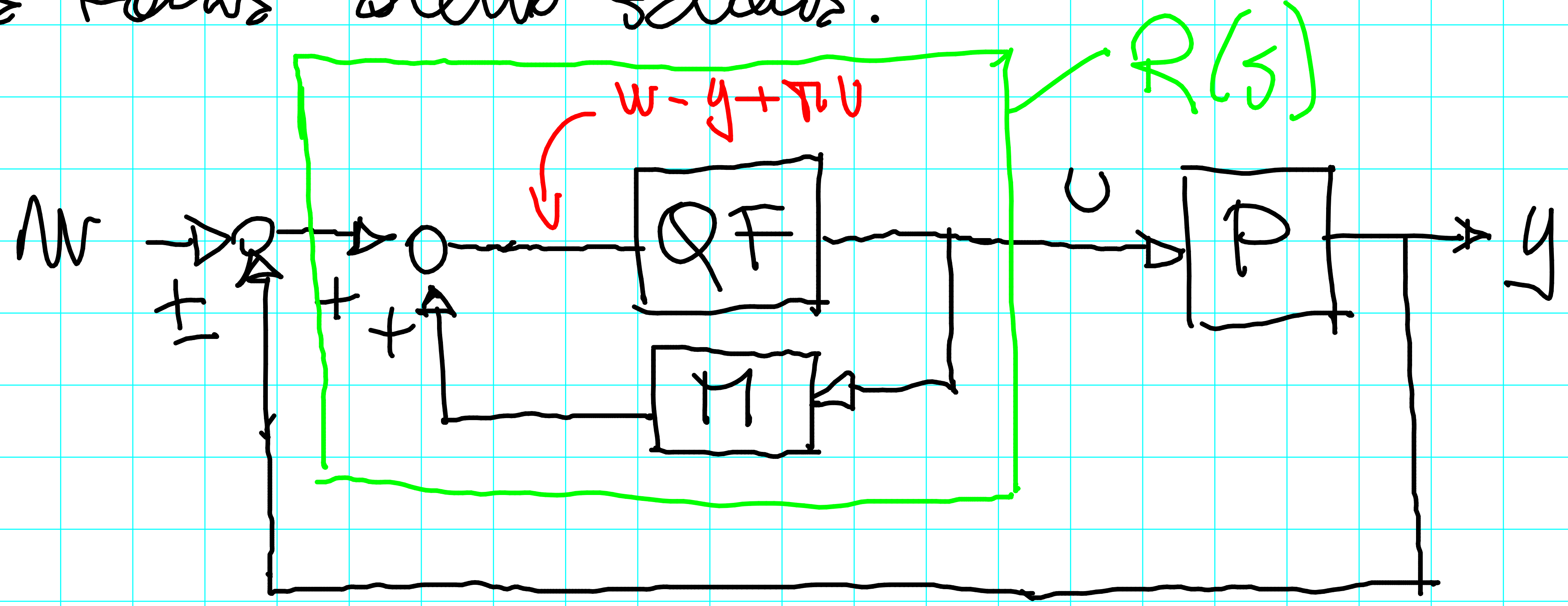
inverto quel che posso, cioè la parte a fase minima

$$F(s) = \frac{1}{1+s\lambda}$$

dinamica desiderata da w a y (guadagno = 1 ⇒ $e_\infty = 0$ per w costante)

QF realizz. ⇒ serve 1 polo

Altra forma dello schema:



$$R(s) = \frac{Q(s)F(s)}{1 - Q(s)F(s)M(s)}$$

Nel nostro caso

$$R = \frac{QF}{1-QFM} = \frac{\frac{1+sT}{M}\,\frac{1}{1+s\lambda}}{1-\cancel{\frac{1+sT}{M}}\,\frac{1}{1+s\lambda}\,\cancel{M}\,\frac{e^{-s\tau}}{\cancel{1+sT}}} = \frac{1}{M}\,\frac{1+sT}{1+s\lambda-e^{-s\tau}}$$

Dobbiamo approssimare $e^{-s\tau}$ con una f.d.t. razionale fratta (approssimanti di Padé)

$$\text{Padé}(1,0) = 1 - s\tau$$

$$\text{Padé}(1,1) = \frac{1-s\tau/2}{1+s\tau/2}$$

\# zeri   \# poli

- Padé (1,0):

$$R(s) = \frac{1}{\mu} \frac{1+sT}{1+s\lambda - (1-s\tau)} = \frac{1}{\mu} \frac{1+sT}{s(\lambda+\tau)}$$

PI

$$R = K \frac{1+sT_i}{sT_i}$$

$$\boxed{T_i = T}$$

$$\frac{K}{T_i} = \frac{1}{\mu(\lambda+\tau)}$$

$$\boxed{K = \frac{T}{\mu(\lambda+\tau)}}$$

• Padé (1,1)

$$R = \frac{1}{\mu} \; \frac{1+sT}{1+s\lambda - \dfrac{1-s\tau/2}{1+s\tau/2}} \; \cdots$$

$$= \frac{1}{\mu(\lambda+\tau)} \; \frac{(1+sT)(1+s\tau/2)}{s\left(1+s\dfrac{\lambda\tau}{2(\lambda+\tau)}\right)}$$

PID reale