

# MECCANICA

Federico Mainetti Gambera

22 agosto 2020

## **Indice**

# Parte I

## LEZIONI

LEZIONE 1 10/03/2020

[link](#) clicca qui

### 1 Informazioni sul corso

#### 1.1 Libro di testo

L'acquisto del libro è fortemente consigliato, gli appunti di queste lezioni sono molto scarni. Il libro è "Fondamenti di meccanica teorica e applicata - McGraw-Hill, N. Bachsmid et al".

#### 1.2 Argomenti del corso

La meccanica si occupa di studiare il movimento di un sistema meccanico. Durante il corso ci occuperemo di **Cinematica**, **Statica** e **Dinamica**.

Per cinematica si intende lo studio del movimento di un sistema meccanico indipendentemente dalle forze che agiscono su di esso. Il moto del sistema è quindi unicamente dettato dai vincoli del sistema stesso.

Viceversa lo studio del moto di un sistema in relazione alle forze che agiscono su di esso è la dinamica. La statica è un caso particolare della dinamica, ovvero quando le forze di un sistema si equilibrano in modo da creare un'assenza di moto.

Infine andremo ad applicare queste tre materie allo studio di una **macchina a un grado di libertà**.

### 2 Cinematica di un punto

Studieremo la cinematica applicata a un punto e riducendoci al caso bidimensionale.

Per poter definire una posizione di un punto c'è bisogno di un **sistema di riferimento** o osservatore, in modo da. Sistemi di riferimento diversi possono dare posizioni diverse per uno stesso punto.

Per **moto di un punto intendiamo l'evoluzione temporale della sua posizione**, inoltre cercheremo di darne una descrizione matematica.

#### 2.1 Gradi di libertà

Le coordinate indipendenti, o gradi di libertà, che caratterizzano un piano e che definiscono una posizione di un punto sono due. Si dice che un punto ha due gradi di libertà nel piano.

Ci sono tre possibilità per scegliere le due coordinate indipendenti:

- **Coordinate cartesiane**, composte da un origine  $O$ , un asse delle ascisse  $X$  e uno delle ordinate  $Y$ . In questo caso la posizione di un punto  $P$  sarà descritta da un vettore  $\vec{P} = (P - O)$ , e, se chiamo  $\vec{j}$  e  $\vec{i}$  i vettori delle proiezioni del punto sull'asse delle ordinate e delle ascisse, posso dire che  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- **Il piano di Gauss**, che è il piano immaginario, dove i due assi principali sono l'asse reale e l'asse immaginario. Anche in questo caso un punto  $P$  sarà descritto da un vettore  $\vec{P} = (P - O) = x + iy$ .
- **Coordinate polari**, si usa ancora il piano di Gauss (immaginario), ma per definire il vettore posizione  $\vec{P} = P - O$  userò due grandezze chiamate modulo e anomalia, dove il **modulo**  $r$  rappresenta la distanza del punto  $P$  dall'origine  $O$  e l'**anomalia (argomento)**  $\theta$  è l'angolo che il vettore forma con l'asse reale in direzione antioraria. Dunque possiamo scrivere  $\vec{P} = re^{i\theta}$  grazie alla formula di Eulero ( $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ). Notiamo che  $x = r\cos(\theta)$  e  $y = r\sin(\theta)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

#### 2.2 Moto

**Il moto del punto rappresenta l'evoluzione delle coordinate che rappresentano la posizione del punto nel tempo.** Se il punto  $P$  si sta muovendo nel tempo, si dice che esso traccia una **traiettoria** nel piano. Per sua natura la traiettoria è una **linea continua**.

Una volta stabilita un'origine per la traiettoria, ovvero la posizione  $P_0$  assunta dal punto nel tempo iniziale  $t_0$ , posso definire una quantità scalare  $s$  detta ascissa curvilinea. L'**ascissa curvilinea** indica la posizione occupata dal punto  $P$  lungo la traiettoria ad un dato istante di tempo. Notiamo che il vettore posizione  $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$  è funzione dell'ascissa curvilinea, che a sua volta è funzione del tempo.

Come studiare il moto del punto?

- studiando direttamente l'evoluzione temporale delle coordinate:

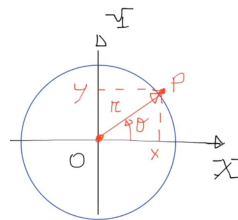
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

- definendo traiettoria e legge oraria:

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{traiettoria} \\ s = s(t) & \text{legge oraria} \end{cases}$$

es. Moto circolare

[immagine dagli appunti del prof]



Per studiare il moto di questo punto  $P$  posso usare uno dei due metodi appena descritti.

**Primo metodo:**

$\theta = \omega t$ , dove  $\omega$  rappresenta la velocità angolare.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{da cui otteniamo che} \quad \begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

**Secondo metodo:**

la traiettoria sarà definita da  $r^2 = x^2 + y^2$ , mentre la legge oraria  $s = \theta r = [\theta = \omega t] = \omega t r$ .

## 2.3 Velocità

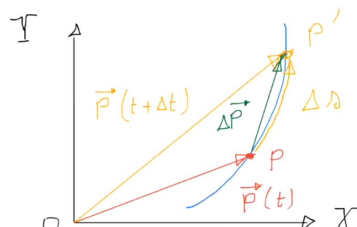
La **velocità**  $\vec{v}$  è definita come  $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ , ricordando che  $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$  il vettore posizione è una funzione dell'ascissa curvilinea che è funzione del tempo.

Quindi nel calcolare la velocità si sta eseguendo la derivata di una funzione di una funzione:  $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{P}}{ds}$ .

Per comprendere il significato del secondo termine di questa equazione ( $\frac{d\vec{P}}{ds}$ ) facciamo un'analisi grafica:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{[\Delta t \rightarrow 0 \text{ oppure } \Delta s \rightarrow 0]} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta s}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Un punto  $P$  si muove dal punto  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  al punto  $\vec{P}' = \vec{P}(t + \Delta t)$  lungo una traiettoria, percorrendo una quantità pari a  $\Delta s$ . A questo punto possiamo dire che  $\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s}$ . Cosa è  $\Delta \vec{P}$ ? è il vettore che unisce il punto  $P$  dalla posizione al tempo  $t$  alla posizione  $t + \Delta t$ , questa quantità al tendere di  $\Delta t$  a 0 tenderà anch'essa a 0. Quindi il vettore  $\Delta \vec{P}$  per  $\Delta t \rightarrow 0$  tenderà a coincidere con l'arco  $\Delta s$  della traiettoria stessa.

Dunque  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} \right| = 1$ . Oltre ad avere quindi modulo pari a 1, tenderà ad essere tangente alla traiettoria. **La velocità è sempre tangente alla traiettoria.**

C'è più di un **modo** per definire la **velocità**:

- Il primo lo abbiamo appena visto: definita come  $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{t} = v \cdot \vec{t}$  (dove per  $\vec{t}$  si intende il versore tangente alla traiettoria)
- Il secondo metodo sfrutta le coordinate cartesiane:  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$ :  $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ .

Sfruttando la seconda definizione, possiamo anche scrivere il vettore velocità come  $\vec{v} = v e^{i\alpha}$ , dove l'angolo  $\alpha$  rappresenta l'angolo formato fra il vettore tangente e l'asse delle ascisse traslato fino al punto considerato. Dunque il modulo  $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  e l'angolo  $\alpha = \text{atan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ , e quindi  $\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

## 2.4 Accelerazione

L'**accelerazione**  $\vec{a}$  per definizione è  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \dot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ .

Dunque  $\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ , posso ora studiare il termine  $\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ , sfruttando le proprietà della derivata di una funzione di funzione,  $\dot{s} \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$ . Ricaviamo quindi l'accelerazione come

$$\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$$

dove il termine  $\frac{d\vec{P}}{ds}$  rappresenta il versore tangente alla traiettoria  $\vec{t}$  e  $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$  rappresenta il rapporto tra il versore normale alla traiettoria  $\vec{n}$  diviso il raggio di curvatura  $\rho$ . Ricaviamo quindi che

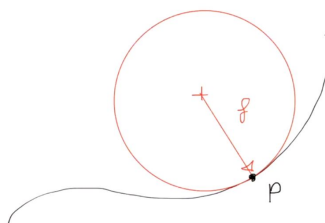
$$\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n} = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

### Raggio osculatore

Verifichiamo ora come  $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ :

Qualsiasi sia la traiettoria descritta nel piano, se noi consideriamo un qualsiasi istante di tempo, notiamo che la traiettoria può essere approssimata con un cerchio, che prende il nome di cerchio osculatore, il cui raggio è detto raggio osculatore.

[immagine dagli appunti del prof]

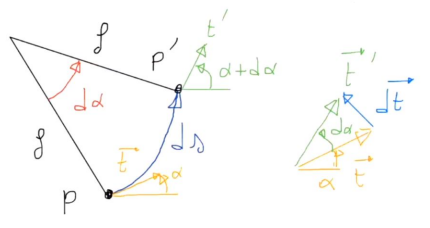


Questo cerchio condivide con la traiettoria il punto stesso, la derivata prima (tangente) e la derivata seconda (curvatura).

La **curvatura**  $c$  è l'inverso del raggio osculatore,  $c = \frac{1}{\rho}$ . Se definiamo la terna destrorsa (con asse  $z$  uscente dal piano verso di noi e asse  $x$  parallelo alla tangente) avremo che il versore  $\vec{n}$  è diretto verso il centro del cerchio osculatore.

Per dimostrare  $\frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ , usiamo  $\frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right) = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{t}' - \vec{t}}{\Delta s}$ .

[immagine dagli appunti del prof]



Se consideriamo un generico piccolo spostamento lungo la traiettoria  $ds$ , questo tratto di traiettoria coinciderà con una sezione del cerchio osculatorio, di cui possiamo calcolare l'angolo  $d\alpha$  (rosso nell'immagine). Consideriamo anche i punti estremi (di partenza e di fine) dello spostamento  $ds$  che sono  $P$  e  $P'$ . Per  $P$  e  $P'$  consideriamo le tangenti e gli angoli  $\alpha$  (giallo e azzurrino) che formano con l'asse delle ascisse. La variazione angolare fra queste due  $\alpha$  sarà pari all'angolo  $d\alpha$  del cerchio osculatorio. Quindi fra  $\vec{t}$  e  $\vec{t}'$  ci sarà un angolo pari a  $d\alpha$ , ed inoltre il vettore differenza  $d\vec{t} = \vec{t}' - \vec{t}$  (in azzurro-blu) tenderà a 0 all'accorciarsi della tratto di traiettoria considerata.

Coi calcoli esprimiamo questo concetto dicendo che  $d\vec{t} = \vec{t}' d\alpha = \vec{t} d\alpha$  e quindi  $|d\vec{t}| = 1 d\alpha$ , e considerando che  $ds = \rho d\alpha$  otteniamo che  $\left| \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \left| \frac{1 d\alpha}{\rho d\alpha} \right| = \frac{1}{\rho}$ . Ma essendo  $d\vec{t} \perp \vec{t}$ , questo andrà a coincidere col versore normale  $\vec{n}$ .

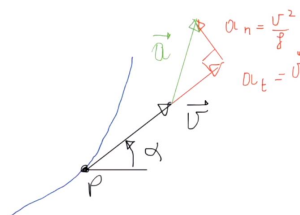
Abbiamo quindi dimostrato che  $\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2 \vec{P}}{ds^2} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n} = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ . La prima componente  $\vec{a}_t = \dot{v} \vec{t}$  prende il nome di **accelerazione tangenziale**, la seconda componente  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$  si chiama invece **accelerazione normale**. Osserviamo che l'accelerazione tangenziale può annullarsi se per esempio siamo in presenza di un moto uniforme, in cui la velocità è costante, al contrario se siamo in presenza di un moto rettilineo, è la velocità normale ad essere nulla.

Come per la velocità, anche per l'**accelerazione** ci sono **modi** differenti per definirla:

- Il primo metodo è quello appena visto:  $\vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}$ .
- Il secondo metodo sfrutta il concetto di ascissa curvilinea e le coordinate cartesiane in cui  $\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$ :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$ .
- Il terzo metodo usa i numeri complessi in cui  $\vec{v} = v e^{i\alpha}$ :  $\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + v i \dot{\alpha} e^{i\alpha}$ , dove  $i = e^{i\pi/2}$  e quindi  $\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + v \dot{\alpha} e^{i(\alpha+\pi/2)}$ . In questo caso  $\vec{a}_t = \dot{v} e^{i\alpha}$  e  $\vec{a}_n = v \dot{\alpha} e^{i(\alpha+\pi/2)}$ . Notando che  $ds = \rho d\alpha$ , otteniamo  $v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\alpha}{dt} = \rho \dot{\alpha}$  e se andiamo a sostituire otteniamo

$$\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + \frac{v^2}{\rho} e^{i(\alpha+\pi/2)}$$

[immagine dagli appunti del prof]



### 3 Cinematica di un corpo

#### 3.1 Definizioni

- **Corpo:** Un corpo è un insieme continuo di infiniti punti che assume dimensioni finite.
- **Posizione del corpo:** è l'insieme di tutti i vettori posizione relativi a ciascun punto appartenente al corpo.
- **Spostamento, velocità, accelerazione:** definiamo spostamento, velocità, accelerazione, come l'insieme di tutti i vettori spostamento, velocità, accelerazione relativi a ciascun punto appartenente al corpo.
- **Moto piano:** in questo corso faremo sempre riferimento a un moto piano, che rappresenta il caso in cui tutti i vettori posizione, velocità e accelerazione di tutti i punti appartenenti al corpo sono paralleli a un piano, detto **piano direttore**.
- **Spostamento infinitesimo:** lo spostamento infinitesimo è una condizione di moto per cui ogni punto che appartiene al corpo subirà uno spostamento di dimensione infinitesima.
- **Atto di moto:** l'atto di moto è l'insieme delle velocità di tutti i punti che appartengono al corpo nell'istante di tempo generico considerato. L'atto di moto rappresenta una "fotografia istantanea" del suo campo di velocità. Possiamo definire un'analogia fra lo spostamento infinitesimo e l'atto di moto: siccome la velocità di un generico punto  $P$  è  $\vec{v}_P = \frac{d\vec{P}}{dt}$ , l'atto di moto può essere visto come lo spostamento infinitesimo di  $P$  fratto l'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$  in cui esso avviene. Perciò tutte le regole cinematiche che definiremo per l'atto di moto varranno anche per lo spostamento infinitesimo.

Tutte le definizioni appena viste valgono per un qualsiasi corpo, ma noi **nel corso vedremo solo corpi rigidi**.

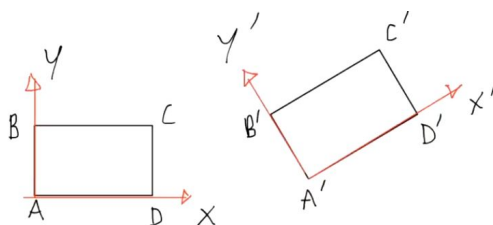
Per un corpo deformabile ci servono  $\infty^2$  gradi di libertà (caso piano) per descrivere ciascuno degli infiniti punti che lo rappresentano.

Nel caso di un corpo rigido saranno sufficienti 3 gradi di libertà per definire la posizione del corpo nel piano.

#### 3.2 Corpo rigido

Un **corpo** si definisce **rigido** se esso può definire solamente **spostamenti rigidi**. Uno **spostamento** si può definire **rigido** se a fronte di esso il corpo **non subisce alcuna variazione né di forma né di dimensioni**.

[immagine dagli appunti del prof]



Più analiticamente diciamo che **uno spostamento è rigido se a seguito dello spostamento esiste un nuovo sistema di riferimento per cui la posizione del corpo rigido risulta la stessa di partenza**.

Se per esempio il corpo subisce un rimpicciolimento o una deformazione a seguito dello spostamento, non siamo in presenza di uno spostamento rigido.

Ne conseguono due **proprietà**:

- La distanza fra due punti qualsiasi di un corpo rigido si mantiene immutata.

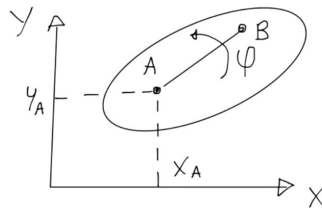
- L'angolo formato dalle rette passanti fra due coppie di punti appartenenti al corpo rimane immutato.

Il principale vantaggio di studiare corpi rigidi è che dobbiamo usare solo **3 coordinate** (3 gradi di libertà) per descrivere pienamente degli spostamenti.

Per capire quali tre coordinate scegliere si seleziona un punto qualsiasi  $A$  all'interno del corpo:

- la prima è l'ascissa del punto  $A$  (come per il punto),  $x_A(t)$ ;
- la seconda è l'ordinata del punto  $A$  (come per il punto),  $y_A(t)$ .
- La terza è la **coordinata angolare**  $\phi$  di un segmento qualsiasi che collega il punto  $A$  con un altro generico punto  $B$  interno al corpo. Ogni punto  $B$  mantiene invariata la sua distanza dal punto  $A$  a seguito di un qualsiasi spostamento e, studiando come varia l'orientamento di questo segmento  $AB$ , sono in grado di ricostruire la posizione di ciascuno dei punti all'interno del corpo rigido. La rotazione  $\phi$  avviene attorno ad un asse  $z$  che esce dal piano del corpo rigido. Qualsiasi segmento all'interno del corpo subirà la stessa variazione angolare (stessa rotazione): la rotazione  $\phi$  è una proprietà dell'intero corpo rigido.

[immagine dagli appunti del prof]

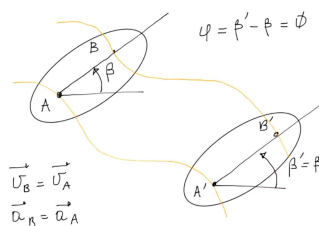


### 3.3 Moto in grande

#### 3.3.1 Traslazione

È un moto nel quale un corpo non varia il proprio orientamento, ovvero in cui la coordinata angolare rimane costante. Tutti i punti del corpo subiranno lo stesso esatto spostamento, dunque  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \dots$ ,  $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \dots$  e le traiettorie di ciascun punto saranno le stesse.

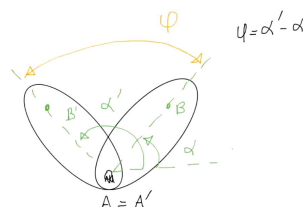
[immagine dagli appunti del prof]



#### 3.3.2 Rotazione

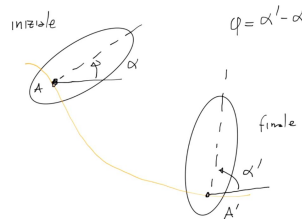
È un moto nel quale un punto (anche esterno al corpo), detto centro di rotazione, mantiene la sua posizione fissa durante lo spostamento. Tutti gli altri punti invece subiranno una rotazione  $\phi$ . La traiettoria di ogni punto seguirà un moto circolare. Possiamo definire un vettore detto  $\vec{\phi} = \phi \vec{k}$  ovvero con direzione uscente dal piano.

[immagine dagli appunti del prof]



### 3.3.3 Rototraslazione

Il corpo rigido andrà a modificare la propria posizione senza però che sia possibile individuare un punto che rimane fermo. Per studiare il moto rototraslatorio si può lavorare considerando due spostamenti successivi, prima una traslazione e poi una rotazione.  
[immagine dagli appunti del prof]



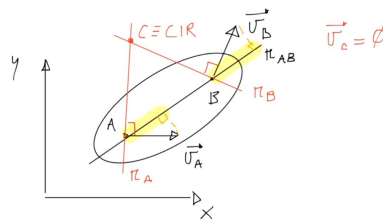
### 3.4 Moto in piccolo (Atto di moto)

Per **atto di moto** si intende un moto in cui gli spostamenti e le rotazioni sono di dimensione infinitesima. L'atto di moto rappresenta una "fotografia istantanea" del campo di velocità del corpo.

Andando ad osservare movimenti in piccolo quindi ci ritroviamo di fronte a moti **o rotatori o traslatori**, non rototraslatori: se la velocità di tutti i punti è uguale in modulo direzione e verso, l'atto di moto è di tipo traslatorio; viceversa, se esiste un punto, detto **centro di istantanea rotazione**, in cui la velocità è nulla, siamo in presenza di un moto di tipo rotatorio.

**es.** Esempio di rotazione:

[immagine dagli appunti del prof]



Presi i punti  $A$  e  $B$  interni al corpo e le rispettive velocità  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$ , essendo il corpo rigido, le proiezioni delle velocità sulla retta  $r_{AB}$  devono essere di medesima lunghezza (nell'immagine: evidenziate in giallo).

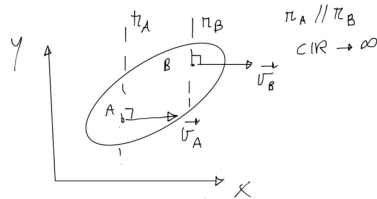
Consideriamo ora le rette  $r_A$  passante per  $A$  e perpendicolare a  $\vec{v}_A$  e la retta  $r_B$  passante per  $B$  e perpendicolare a  $\vec{v}_B$ ; tutti i punti che si trovano sulla retta  $r_A$  devono avere velocità perpendicolare alla retta stessa (analogo per la retta  $r_B$ ), perchè altrimenti il corpo subirebbe una deformazione, quindi tutti i punti su  $r_A$  (o  $r_B$ ) devono avere velocità perpendicolare a  $\vec{v}_A$  (o  $\vec{v}_B$ ). Il punto  $C$  di intersezione di queste due rette dovrebbe avere velocità perpendicolare sia a  $\vec{v}_A$  sia a  $\vec{v}_B$ , ma questo è possibile solo se  $\vec{v}_C = 0$ , dunque il punto  $C$  è il centro di istantanea rotazione del corpo rigido e siamo dunque in presenza di una rotazione.

**oss.** Il centro di istantanea rotazione differisce dal centro di rotazione (dei moti in grande), il primo ha velocità nulla solo nell'istante che stiamo considerando, mentre il secondo è fermo per tutto l'arco della rotazione. In poche parole il centro di istantanea rotazione ha velocità nulla, ma la sua accelerazione può non esserlo.

**es.** Esempio di traslazione:

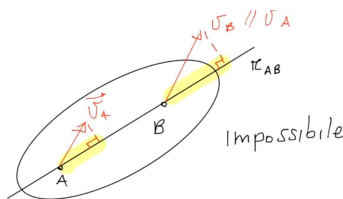
[immagine dagli appunti del prof]





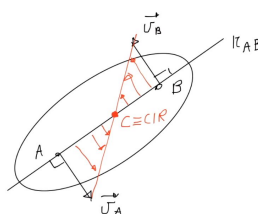
In questo caso le rette  $r_A$  e  $r_B$  sono parallele e non si incontrano mai, il centro di istantanea rotazione non è definibile e dunque il moto è traslatorio.

**es.** Esempio di moto di un corpo non rigido:  
[immagine dagli appunti del prof]



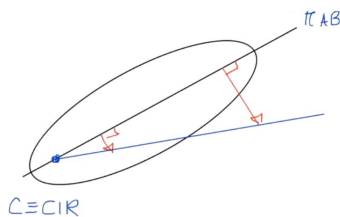
Se i due punti  $A$  e  $B$  hanno  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  di modulo diverso, le proiezioni (in giallo) di queste due velocità sulla retta  $r_{AB}$  non sono identiche e dunque il corpo si sta deformando. In tutti i casi in cui le proiezioni delle velocità sulla retta sono diverse sicuramente rappresentano deformazioni del corpo, e quindi moti non rigidi.

**es.** Un altro esempio di rotazione:  
[immagine dagli appunti del prof]



Se i due punti  $A$  e  $B$  hanno  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  di direzione opposta, la congiungete fra le due velocità (disegnata in rosso) ci mostra che la velocità di tutti i punti lungo il segmento  $AB$  deve diminuire man mano che ci avviciniamo al punto  $C$ , che quindi ha velocità nulla e rappresenta il centro di istantanea rotazione.

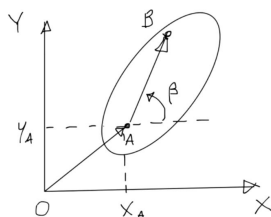
**es.** Un altro esempio di rotazione:  
[immagine dagli appunti del prof]



Se i due punti  $A$  e  $B$  hanno  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  direzione e verso uguali (sono parallele) ma modulo diverso, ancora una volta, la congiungete fra le due velocità (disegnata in rosso) ci mostra che la velocità di tutti i punti lungo il segmento  $AB$  deve diminuire man mano che ci avviciniamo al punto  $C$ , che quindi ha velocità nulla e rappresenta il centro di istantanea rotazione.

### 3.5 Cinematica del corpo rigido

[immagine dagli appunti del prof]



Sia in un piano un corpo rigido, siano due punti qualsiasi  $A$  e  $B$  appartenenti a questo e sia  $\beta$  l'angolo fra il segmento  $AB$  e l'asse orizzontale delle ascisse.

Ci servono **tre coordinate indipendenti** (tre gradi di libertà) per definire l'evoluzione temporale della traslazione di un punto generico del punto  $A = (x_A(t), y_A(t), \beta(t))$ . Se queste tre coordinate indipendenti sono note, allora si può studiare l'evoluzione temporale anche dell'intero corpo rigido.

Supposte note queste tre coordinate  $x_A(t), y_A(t), \beta(t)$ , vogliamo definire velocità, posizione e accelerazione del corpo.

Da notare è che, se invece di  $B$  prendessimo un altro generico punto  $P$  appartenente al corpo, l'angolo  $\alpha$  formato fra il segmento  $AP$  e l'asse orizzontale delle ascisse differisce dall'angolo  $\beta$  a meno di una costante  $\gamma$  a fronte di qualsiasi spostamento.

#### 3.5.1 Posizione

Per definire la posizione di un punto generico di un corpo, per esempio il punto  $B$ , posso scrivere una relazione vettoriale che lega tre vettori:

- il vettore  $AO$ ;
- il vettore  $AB$ ;
- il vettore  $OB$ .

Questi tre vettori sono legati dall'equazione:  $(B - O) = (A - O) + (B - A)$ . Il vettore  $A - O$  è dato da  $x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$ ; il vettore  $B - A$  è dato dal vettore  $AB$  (dal suo modulo) moltiplicato per  $e^{i\beta}$ , quindi  $AB \cdot e^{i\beta}$ . Essendo tutti questi termini noti posso definire la generica posizione del punto  $B$ .

#### 3.5.2 Velocità

La velocità del punto  $B$  è  $\vec{v}_B = \frac{d}{dt}(B - O) = \frac{d}{dt}(A - O) + \frac{d}{dt}(B - A)$ . Dunque andiamo ad eseguire queste derivate:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d}{dt}(AB \cdot e^{i\beta})$ , dove il primo termine è la semplice velocità del punto  $A$ , il secondo membro è la derivata di ciò che abbiamo detto anche al punto precedente. Dunque  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + i\dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i\beta} = \vec{v}_A + \dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta + \pi/2)}$ . Da notare è che  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$  e che, siccome avevamo visto che per un qualunque altro punto ( $P$ ) si ha un angolo ( $\alpha$ ) che differisce da  $\beta$  per una costante ( $\gamma$ ), quindi,  $\dot{\beta} = \dot{\alpha} = \dots = \omega$ , che rappresenta la **velocità angolare** del corpo rigido. Possiamo anche definire un vettore velocità angolare  $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\beta} \vec{k}$ .

A partire dal vettore  $\vec{\omega}$  possiamo definire il senso di rotazione del corpo rigido con la regola della mano destra (ponendo il pollice nella direzione del vettore, otteniamo la rotazione nel senso delle dita che si avvolgono).

Tutti i punti del corpo ruotano con la stessa velocità angolare.

La velocità del punto  $B$ ,  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta + \pi/2)}$ , può essere vista come somma di due componenti:

- $\vec{v}_A$ : la velocità con cui trasla il punto  $A$ .
- $\omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta + \pi/2)}$ : velocità di un punto che si muove di moto rotatorio, in particolare è la velocità con cui si muove il punto  $B$  di moto circolare attorno al punto  $A$ . Questa componente è anche detta  $\vec{v}_{BA}$ , ovvero la velocità di  $B$  rispetto al punto  $A$ .

Riassumendo:

**teor. Teorema di Rivals per le velocità**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

oppure in forma abbreviata

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

dove  $\wedge$  rappresenta un prodotto vettoriale.

### 3.5.3 Accelerazione

Partendo dalla formula  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)}$ , l'accelerazione si ottiene derivando queste due componenti rispetto al tempo.

Quindi

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \ddot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)} - AB \cdot \dot{\beta}^2 e^{i\beta}$$

Il primo termine è l'accelerazione del punto  $A$ . Il secondo e terzo termine rappresentano l'accelerazione tangenziale  $\vec{a}_{BA}^{(t)}$  e normale  $\vec{a}_{BA}^{(n)}$  del punto  $B$  mentre si muove di moto circolare attorno al punto  $A$ , che sommati rappresentano  $\vec{a}_{BA}$ . In questo moto circolare il  $B$  ha velocità angolare  $\omega = \dot{\beta}$  e accelerazione angolare  $\dot{\omega} = \ddot{\beta}$ . Possiamo anche qui andare a definire il vettore  $\vec{\omega} = \dot{\beta} \vec{k}$ .

Partendo invece da  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$  e derivando otteniamo  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(B - A)$ , dove  $\frac{d}{dt}(B - A)$  è esattamente la quantità scritta prima. Possiamo quindi scrivere l'accelerazione come

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

dove il secondo e terzo termine rappresentano l'accelerazione tangenziale  $\vec{a}_{BA}^{(t)}$  e normale  $\vec{a}_{BA}^{(n)}$  del punto  $B$  mentre si muove di moto circolare attorno al punto  $A$ .

**teor. Teorema di Rivals per le accelerazioni**

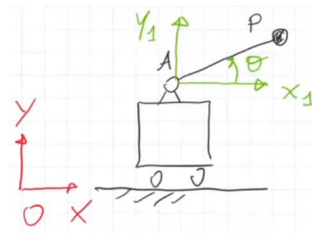
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)]$$

## 4 Analisi cinematica mediante osservatori in moto relativo

Fino ad ora abbiamo considerato sistemi di riferimento fissi, in questa lezione analizziamo sistemi di riferimento mobili rispetto a quello assoluto.

es.

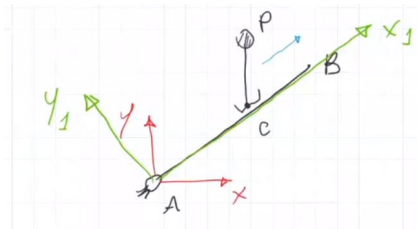
[immagine dagli appunti del prof]



L'immagine mostra un carrello su cui è incernierata una barra  $AP$ . Se andiamo a considerare un unico sistema di riferimento assoluto (in rosso), il moto del punto  $P$  è un moto rototraslatorio, ma, se noi andassimo a inserire un sistema di riferimento mobile (in verde) che trasla insieme al punto  $A$ , il moto del punto  $P$  diventa un moto di rotazione. Abbiamo dunque scomposto il moto rototraslatorio del punto  $P$  nel moto traslatorio del nuovo sistema di riferimento mobile e nel moto rotatorio del punto  $P$  in questo nuovo sistema di riferimento.

es.

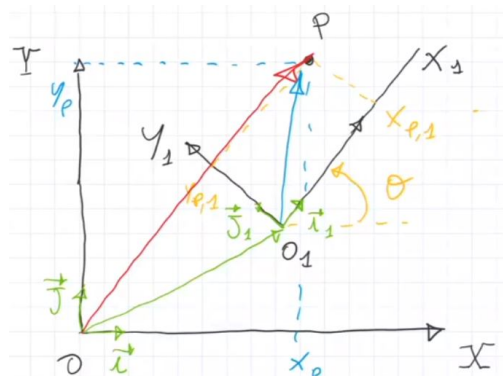
[immagine dagli appunti del prof]



L'immagine mostra un'asta  $AB$  incernierata al pavimento che può ruotare, sull'asta può, inoltre, scivolare una seconda asta  $CP$ . Anche in questo caso il moto del punto  $P$  rispetto a un unico sistema di riferimento assoluto (in rosso) sarebbe un moto rototraslatorio. Se però introduciamo un sistema di riferimento mobile (in verde) che abbia assi  $Y_1$  e  $X_1$  che ruotano insieme all'asse  $AB$ , il moto del punto  $P$  diventa un moto traslatorio.

### 4.1 Posizione

[immagine dagli appunti del prof]



Vogliamo descrivere il moto di un generico punto  $P$  (velocità, posizione, accelerazione) andando a introdurre un nuovo sistema di riferimento mobile  $(O_1, X_1, Y_1)$  rispetto a un sistema di riferimento fisso  $(O, X, Y)$ .

Il sistema di riferimento mobile introdotto è in moto rototraslatorio noto rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Indichiamo con  $\theta$  la rotazione del sistema di riferimento mobile rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il punto generico  $P$  ha coordinate  $x_P, y_P$  rispetto al sistema assoluto, e  $x_{P,1}, y_{P,1}$  rispetto al sistema mobile.

La posizione può essere vista come somma vettoriale (come abbiamo visto per i corpi rigidi):

$$(P - O) = (O_1 - O) + (P - O_1)$$

dove  $(P - O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$  e  $(O_1 - O) = x_{O_1} \vec{i} + y_{O_1} \vec{j}$  e  $(P - O_1) = x_{P,1} \vec{i}_1 + y_{P,1} \vec{j}_1$ . Se il moto del sistema di riferimento mobile è noto, conoscendo la posizione di  $P$  rispetto al sistema assoluto, posso ricavare la posizione rispetto al sistema mobile, viceversa, conoscendo la posizione di  $P$  rispetto al sistema mobile, posso ricavare la posizione rispetto al sistema assoluto.

$$(P - O) = x_{O_1} \vec{i} + y_{O_1} \vec{j} + x_{P,1} \vec{i}_1 + y_{P,1} \vec{j}_1$$

## 4.2 Velocità

La velocità è definita come  $\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O) = \frac{d}{dt}(O_1 - O) + \frac{d}{dt}(P - O_1)$ , sviluppando queste derivate, otteniamo:

$$\vec{v}_P = \dot{x}_{O_1} \vec{i} + \dot{y}_{O_1} \vec{j} + \dot{x}_{P,1} \vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1} \vec{j}_1 + x_{P,1} \frac{d}{dt} \vec{i}_1 + y_{P,1} \frac{d}{dt} \vec{j}_1$$

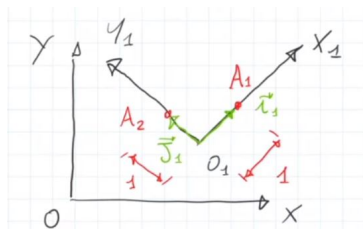
In teoria, i primi due termini, se  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  variassero il loro orientamento rispetto al tempo, dovrebbero essere derivati pure loro, ma siccome il sistema di riferimento assoluto è fisso, la loro derivata è nulla. Per i secondi due termini invece i versori variano il proprio orientamento nel tempo perchè fanno riferimento a un sistema mobile, dunque non posso trascurare la loro derivata e per questo ci sono gli ultimi due addendi.

1- La prima coppia di termini  $\dot{y}_{O_1} \vec{j} + \dot{x}_{P,1} \vec{i}_1$  rappresenta la velocità  $\vec{v}_{O_1}$  del punto  $O_1$  rispetto al sistema di riferimento assoluto, anche detta velocità assoluta di  $O_1$ .

2- La seconda coppia di termini  $\dot{y}_{P,1} \vec{j}_1 + x_{P,1} \frac{d}{dt} \vec{i}_1$  rappresenta la velocità  $\vec{v}_{rel,P}$  relativa di  $P$ , cioè la velocità di  $P$  rispetto al sistema di riferimento mobile.

3- La terza e ultima coppia  $x_{P,1} \frac{d}{dt} \vec{i}_1 + y_{P,1} \frac{d}{dt} \vec{j}_1$  è più complicata da analizzare e dobbiamo prima capire cosa sono le derivate dei versori  $\vec{i}_1$  e  $\vec{j}_1$ .

[immagine dagli appunti del prof]



Consideriamo i due sistemi di riferimento, mobile e assoluto, e poniamo due punti  $A_1$  e  $A_2$  sugli assi del sistema di riferimento mobile a distanza unitaria dall'origine  $O_1$ . Questi due punti rappresentano i nostri versori  $\vec{j}_1$  e  $\vec{i}_1$ .

$$(A_1 - O) = (O_1 - O) + (A_1 - O_1), \text{ dove il termine } (A_1 - O_1) \text{ è il versore } \vec{i}_1$$

$$(A_2 - O) = (O_1 - O) + (A_2 - O_1), \text{ dove il termine } (A_2 - O_1) \text{ è il versore } \vec{j}_1$$

Andiamo a derivare queste due equazioni per determinare la velocità dei punti  $A_1$  e  $A_2$ . Facciamo i calcoli solo per  $A_1$ , per  $A_2$  i procedimenti sono del tutto analoghi:

$$\frac{d}{dt}(A_1 - O) = \frac{d}{dt}(O_1 - O) + \frac{d}{dt}(A_1 - O_1)$$

Il termine  $\frac{d}{dt}(A_1 - O)$  rappresenta la velocità assoluta  $\vec{v}_{A_1}$  di  $A_1$ , il secondo termine  $\frac{d}{dt}(O_1 - O)$  è la velocità assoluta  $\vec{v}_{O_1}$  di  $O_1$ , l'ultimo termine  $\frac{d}{dt}(A_1 - O_1)$  è la derivata  $\frac{d}{dt}\vec{i}_1$  rispetto al tempo del versore  $\vec{i}_1$ . Abbiamo quindi determinato la velocità assoluta del punto  $A_1$ .

Potevamo ottenere il medesimo risultato usando il teorema di Rivals per un corpo rigido (che in questo caso è rappresentato dal sistema di riferimento mobile), infatti la velocità di un punto qualsiasi di un corpo rigido è data dalla somma di due componenti: una componente di traslazione di un punto generico del corpo (per esempio l'origine  $O_1$ ) e una componente di rotazione del corpo attorno al punto  $O_1$ . Se andiamo a definire il vettore velocità angolare  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k}_1$  del sistema mobile, allora

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (A_1 - O_1) = [\text{dove } (A_1 - O_1) = \vec{i}_1] = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1$$

Riprendendo entrambi i metodi visti e uguagliandoli, otteniamo:

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{O_1} + \frac{d}{dt}\vec{i}_1 = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \implies \frac{d}{dt}\vec{i}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1$$

Procedendo in maniera analoga anche per il punto  $A_2$ , otteniamo le **formule di Poisson**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \\ \frac{d}{dt}\vec{j}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 \end{cases}$$

Possiamo ora andare a sostituirle all'interno della formula della velocità scritta in precedenza ( $\vec{v}_P = \dot{x}_{O_1}\vec{i} + \dot{y}_{O_1}\vec{j} + \dot{x}_{P,1}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\vec{j}_1 + x_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i}_1 + y_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j}_1$ ):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + x_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 + y_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1$$

dove i termini  $x_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 + y_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1$  possono essere riscritti come  $\vec{\omega}(x_{P,1}\vec{i}_1 + y_{P,1}\vec{j}_1)$  (la parentesi rappresenta il vettore  $(P - O_1)$ ).

**teor. Teorema dei moti relativi per le velocità**

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) = \vec{v}_{tr,P} + \vec{v}_{rel,P}$$

dove la somma di  $\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$  prende il nome di **velocità di trascinamento**  $\vec{v}_{tr,P}$  del punto  $P$ , che è la velocità che il punto  $P$  avrebbe se fosse rigidamente collegato al sistema di riferimento mobile.

Questo teorema esprime la relazione fra la velocità assoluta di un punto  $P$  e la **velocità relativa** a un sistema di riferimento in moto relativo rispetto a quello assoluto. La velocità assoluta è quindi la somma di due componenti, la velocità di trascinamento e la velocità relativa rispetto al sistema mobile. Quindi una volta noto il moto di trascinamento del sistema mobile è possibile passare dalla velocità assoluta a quella relativa e viceversa.

### 4.3 Accelerazione

Anche per l'accelerazione vogliamo cercare una relazione fra l'accelerazione del punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento assoluto e l'accelerazione del punto  $P$  rispetto al sistema di riferimento mobile.

Deriviamo dunque rispetto al tempo l'equazione  $\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$ :

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1)) + \frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P}$$

Deriviamo questi ultimi tre addendi singolarmente:

- Il primo termine  $\frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1}$  è l'accelerazione  $\vec{a}_{O_1}$  assoluta del punto  $O_1$ .
- Il secondo termine, cioè la derivata rispetto al tempo  $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1))$ , si ottiene derivando prima il vettore omega rispetto al tempo e moltiplicandola per il vettore  $P - O_1$  e successivamente moltiplicando omega per la derivata rispetto al tempo del vettore  $(P - O_1)$ . Quindi otteniamo  $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1)) = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(P - O_1)$ , dove  $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\theta}\vec{k}$ . Possiamo quindi riscrivere questo secondo termine come  $\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$ .

- Sapendo che  $\vec{v}_{rel,P} = \dot{x}_{P,1}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\vec{j}_1$ , possiamo derivare il terzo termine, derivando sia  $\dot{x}_{P,1}$  e  $\dot{y}_{P,1}$ , sia i versori  $\vec{i}_1$  e  $\vec{j}_1$  perchè sono versori di un sistema di riferimento in movimento. Quindi otteniamo  $\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P} = \ddot{x}_{P,1}\vec{i}_1 + \ddot{y}_{P,1}\vec{j}_1 + \dot{x}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j}_1$ , dove i primi due addendi sono l'accelerazione  $\vec{a}_{rel,P}$  relativa del punto  $P$  e gli ultimi due addendi possono essere riscritti grazie alle formule di Poisson nel seguente modo:  $\dot{x}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j}_1 = \dot{x}_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 = \vec{\omega} \wedge (\dot{x}_{P,1}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\vec{j}_1)$ , inoltre il termine fra parentesi è la velocità  $\vec{v}_{rel,P}$  relativa del punto  $P$ .

**teor. Teorema dei moti relativi per le accelerazioni o teorema di Coriolis:**

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] + 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} + \vec{a}_{rel,P}$$

Nei primi tre termini  $(\vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)])$  si riconosce il teorema di Rivals per le accelerazioni relative a un punto  $P$  che si muove solidalmente con la terna mobile.  $\vec{a}_{O_1}$  è l'accelerazione con cui la terna si sposta;  $\vec{a}_{tg,P} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1)$  e  $\vec{a}_{n,P} = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)]$  sono l'accelerazione legata al moto rotatorio di  $P$  attorno ad  $O_1$ , in particolare il primo è la componente tangenziale, e il secondo la componente normale. I tre termini assieme sono **l'accelerazione di trascinamento**  $\vec{a}_{tr,P}$  del punto  $P$ , cioè l'accelerazione che avrebbe il punto  $P$  se fosse rigidamente legato al sistema di riferimento mobile.

A questo termine di accelerazione di trascinamento vengono aggiunte un'**accelerazione relativa**  $\vec{a}_{rel,P}$  (come accade anche per la velocità) e il termine  $\vec{a}_{co} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$  detto **accelerazione complementare o di Coriolis** (di cui non c'è il rispettivo per la velocità).

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tr,P} + \vec{a}_{co} + \vec{a}_{rel,P}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{tr,P} = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] \\ \vec{a}_{co} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} \\ \vec{a}_{rel,P} = \vec{a}_{rel,P} \end{cases}$$

Notiamo che l'accelerazione di Coriolis  $\vec{a}_{co}$  si annulla per tre casi:

- $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_{rel,P}$  (impossibile nel piano);
- $\vec{\omega} = 0$  (il sistema mobile si muove di moto traslatorio);
- $\vec{v}_{rel,P} = 0$ , in questo caso il teorema di Coriolis coincide con il teorema di Rivals.

## 5 Sistemi meccanici

In prima approssimazione possiamo vedere una macchina come un insieme di corpi rigidi legati fra loro attraverso opportuni vincoli. I vincoli sono condizioni essenziali per lo studio di una macchina e devono sempre essere rispettati.

Esistono vincoli **interni**, cioè legati ai corpi rigidi del sistema, o **esterni**, cioè legati alla struttura che contiene questi corpi rigidi, chiamata **telaio**.

### 5.1 Vincoli elementari

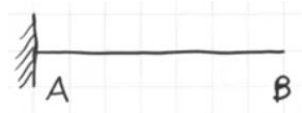
In questo corso andremo ad analizzare solo i vincoli elementari, che sono dei vincoli che realizzano la diretta soppressione di uno o più gradi di libertà di un corpo, cioè vanno ad inibire una delle possibilità di moto del corpo rigido. Ricordiamo che il corpo rigido nel piano ha tre gradi di libertà, le traslazioni degli assi  $X$  e  $Y$  e la rotazione.

Un vincolo che impedisce  $n$  gradi di libertà, viene espresso algebricamente come  $n$  equazioni vincolanti.

#### 5.1.1 Vincoli tripli

E' un vincolo che sopprime tutte le possibilità di moto di un corpo rigido.

- **Incastro**: [immagine dagli appunti del prof]

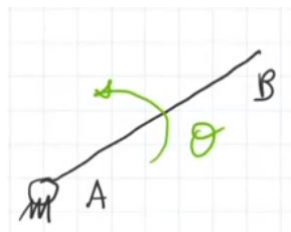


Vediamo una trave  $AB$  incastrata nel punto  $A$  che non ha più possibilità di movimento.

#### 5.1.2 Vincoli doppi

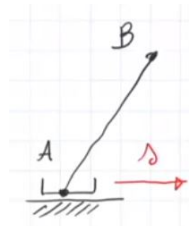
Sono vincoli che sopprimono due possibilità di moto di un corpo rigido, che avrà quindi ancora una possibilità di moto disponibile.

- **Cerniera**: [immagine dagli appunti del prof]



Vediamo una trave  $AB$  con una cerniera nel punto  $A$ . La cerniera impedisce ogni traslazione possibile, tuttavia la trave può ancora ruotare.

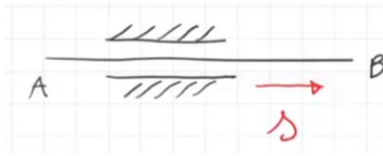
- **Pattino**: [immagine dagli appunti del prof]



Vediamo una trave  $AB$  con un pattino nel punto  $A$ . Il pattino impedisce il distacco dalla linea piana e impedisce anche ogni rotazione, tuttavia la trave può ancora scivolare sulla guida che si sta considerando.

- **Manicotto**: [immagine dagli appunti del prof]



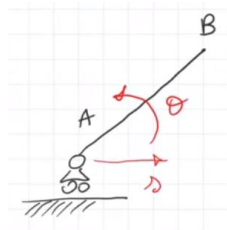


Vediamo una trave  $AB$  a cui è imposto un vincolo manicotto. Il manicotto impedisce rotazioni e movimenti perpendicolari, tuttavia la trave può ancora scivolare in direzione parallela.

### 5.1.3 Vincoli singoli

Sono vincoli che sopprimono una sola possibilità di moto di un corpo rigido.

- **Carrello più cerniera o carrello:** [immagine dagli appunti del prof]



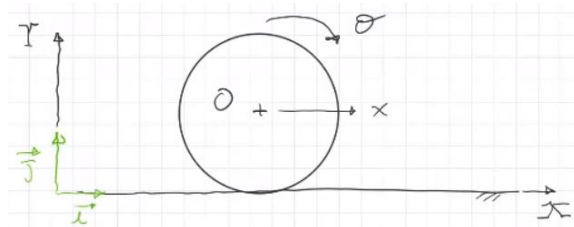
Vediamo una trave  $AB$  con un carrello più cerniera nel punto  $A$ . Il carrello più cerniera impedisce unicamente movimenti perpendicolari alla guida, ma consente spostamenti paralleli alla guida o rotazioni.

LEZIONE 4 24/03/2020

[link](#) clicca qui

## 5.2 Vincoli di contatto

Proviamo ad analizzare il moto di un disco che rotola su una guida piana:  
[immagine dagli appunti del prof]



Notiamo subito che il centro  $O$  del disco rigido si manterrà sempre a una distanza costante dalla guida piana, perciò  $y_O = R = \text{costante}$ :  $v_{yO} = 0$ .

Nell'analisi di sistemi con vincoli di contatto non è obbligatorio che la velocità del punto di contatto si annulli: può essere presente una componente  $v_{xC} \neq 0$ , che prende il nome di **velocità di strisciamento**.

Da questo esempio notiamo che il vincolo di contatto introduce una sola equazione di vincolo che fa in modo che il disco abbia solo due gradi di libertà,  $\theta$  e  $x$ .

Il vincolo da imporre è quindi solo quello sul centro del disco:

$$\begin{cases} v_{yO} = 0 \end{cases}$$

## 5.3 Vincolo di puro rotolamento

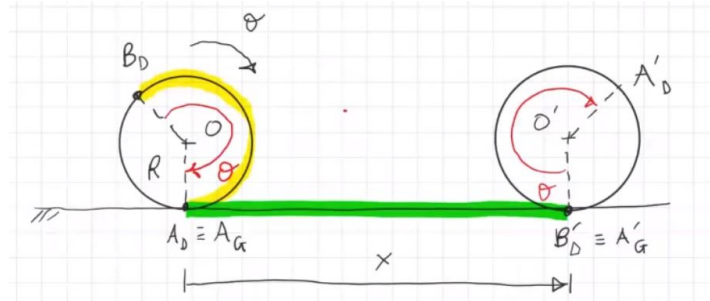
Nel caso di puro rotolamento non si ammette velocità di strisciamento, per cui i vincoli da imporre sono due:

$$\begin{cases} v_{yO} = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_{yC} = 0 \\ v_{xC} = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il punto di contatto  $C$  rappresenta il punto di istantanea rotazione (CIR).

Nel vincolo di puro rotolamento abbiamo quindi due equazioni, di conseguenza si ha un solo grado di libertà, che può essere o  $x$  o  $\theta$ .

Vediamo ora il legame che c'è fra la coordinata  $x$  e la coordinata  $\theta$ :  
[immagine dagli appunti del prof]



Notiamo subito che tutti i punti dell'arco  $B_D A_D$  entreranno in contatto con la guida piana. Notiamo che il punto di contatto lungo la guida piana si sposta di una quantità  $A_G A'_G$ , che è la stessa quantità di  $OO'$ , e inoltre deve essere la stessa quantità dell'arco  $B_D A_D$ :

$$x = A_G A'_G = OO' = A_D B_D = \theta R$$

Tenendo conto del risultato appena ottenuto e del vincolo sul centro del disco possiamo ottenere la legge oraria del centro del disco:

$$\begin{cases} x_O = \bar{X}_O + R\theta \text{ (con } \bar{X}_O \text{ punto iniziale)} \\ y_O = R \end{cases}$$

Derivando possiamo trovare la velocità:

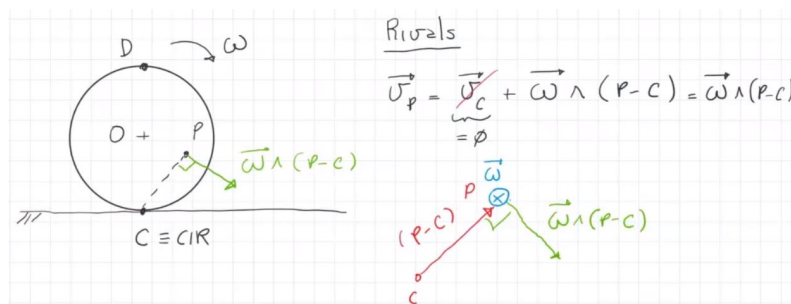
$$\begin{cases} v_{x_O} = R\dot{\theta} = \dot{x} \\ v_{y_O} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_O = \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{i}$$

Derivando ancora troviamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_{x_O} = R\ddot{\theta} = \ddot{x} \\ a_{y_O} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{a}_O = R\ddot{\theta}\vec{i}$$

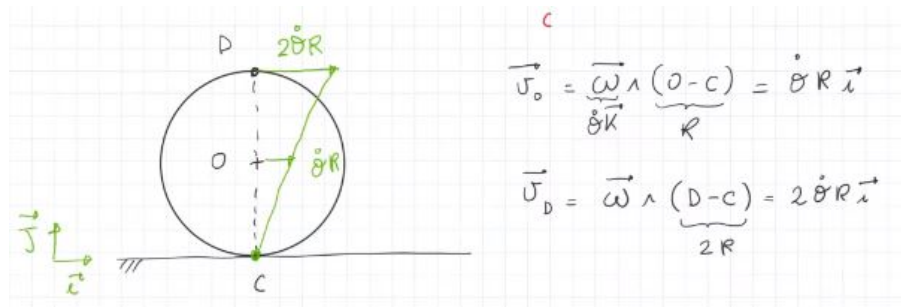
La velocità angolare sarà invece calcolabile come  $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$ , che sarà negativa perchè il disco ruota in senso orario (regola della mano destra). Sfruttando Rivals possiamo ricavare la velocità di un generico punto  $P$  interno al disco:

[immagine dagli appunti del prof]



Allo stesso modo (con Rivals) possiamo calcolare la velocità del centro del disco o del punto diametralmente opposto al punto di contatto:

[immagine dagli appunti del prof]



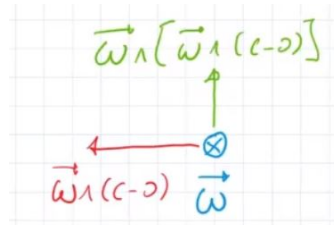
Sappiamo che il punto di contatto è il centro di istantanea rotazione, quindi ha velocità nulla, ma accelerazione diversa da zero, andiamo a calcolare l'accelerazione. Sapendo che l'accelerazione del centro  $\vec{a}_O = \ddot{\theta} R \vec{i}$ , grazie a Rivals otteniamo che

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (\vec{C} - \vec{O}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{C} - \vec{O})] = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{C} - \vec{O})]$$

siccome  $\vec{a}_O = \ddot{\theta} R \vec{i}$  e  $\dot{\vec{\omega}} \wedge (\vec{C} - \vec{O}) = -\ddot{\theta} R \vec{i}$ , rimane quindi la sola accelerazione normale che è uguale a:

$$\vec{a}_C = \dot{\theta}^2 R \vec{j}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Da notare che tutti i calcoli fatti si potevano ritrovare analizzando il sistema con un sistema di coordinate in modo relativo posto sul centro del disco.

## 6 Cinematica dei sistemi meccanici

### 6.1 Classificazione dei sistemi meccanici

I sistemi meccanici possono essere classificati in due macro categorie:

- **Meccanismi:** Si definisce meccanismo un sistema meccanico in cui vi è almeno una possibilità di moto residua una volta imposti vincoli. In poche parole il numero di gradi di libertà deve essere maggiore o uguale a 1.
- **Struttura:** Il sistema non ha nessun grado di libertà, le uniche possibilità di movimento sono legate alle deformabilità dei corpi.

All'interno di questo corso vedremo solo meccanismi.

I meccanismi a loro volta si suddividono in due sottocategorie:

- **Catene cinematiche aperte:** Ciascun corpo che costituisce il sistema è collegato esclusivamente al corpo che lo precede o al corpo che lo segue dalla catena (telaio incluso).
- **Catene cinematiche chiuse:** Se non è aperta.

La differenza fra questi due sistemi è che nel caso di catene aperte, per studiare il moto di un corpo è sufficiente studiare il moto relativo di un corpo rispetto a quello che lo precede, viceversa in una catena chiusa il moto del meccanismo si userà un'equazione detta **di chiusura**.

L'**equazione di chiusura** esprime utilizzando il formalismo dei numeri complessi il poligono chiuso che in ogni istante del moto è descritto dalla catena cinematica chiusa.

#### 6.1.1 Regola di Grublen

La **Regola di Grublen** si usa per calcolare quanti gradi di libertà abbia un sistema meccanico **piano** con **vincoli elementari** che ciascuno colleghi **al più due corpi** (eccezione fatta per i telai).

Il numero  $n$  di gradi di libertà è dato dalla regola:

$$n = 3 \cdot n_c - n_v = 3 \cdot n_c - (1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3)$$

con  $n_c$  il numero di corpi rigidi;  $n_v$  il numero di vincoli,  $n_1$  il numero di vincoli singoli,  $n_2$  il numero di vincoli doppi e  $n_3$  il numero di vincoli tripli.

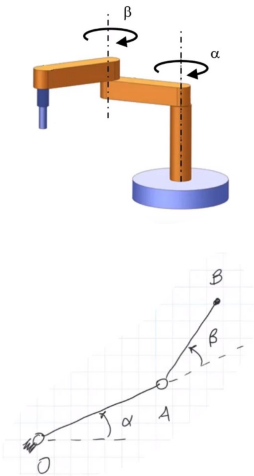
Ovviamente bisogna sempre tenere conto che il numero di gradi di libertà è sempre maggiore o uguale a 0.

Se utilizzando la regola di Grublen il numero di gradi di libertà è esattamente 0, allora siamo in presenza di una struttura **isostatica**, se il numero di gradi di libertà risulta essere negativo, allora siamo in presenza di una struttura **iperstatica**.

## 7 Cinematica del manipolatore SCARA

### 7.1 Introduzione

[immagini dagli appunti del prof]

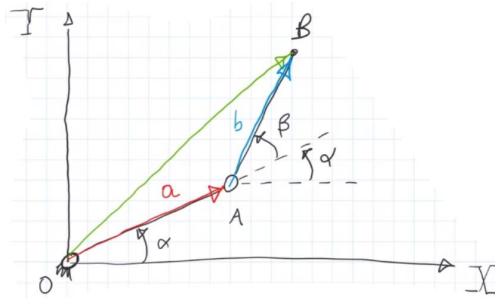


Il manipolatore **SCARA** ha due gradi di libertà che sono  $\alpha$  e  $\beta$  ed è una **catena cinematica aperta**. Il punto  $B$  prende il nome di **end-effector** ed è il punto di interesse. Per studiarlo bisogna conoscere in ogni istante l'evoluzione di  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  nel tempo e le loro derivate.

### 7.2 Numeri complessi

Analizziamo il sistema SCARA col formalismo dei numeri complessi:

[immagine dagli appunti del prof]



Per studiare la **posizione** del punto  $B$  possiamo sommare le posizioni delle due aste  $OA$  e  $AB$ :

$$(B - O) = (A - O) + (B - A) = ae^{i\alpha} + be^{i(\alpha+\beta)}$$

Passiamo ora in forma parametrica:

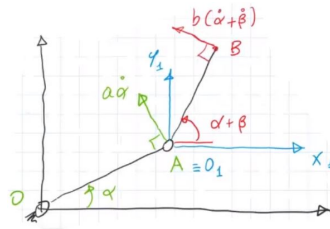
$$\begin{cases} x_B = a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha + \beta) \\ y_B = a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Derivando otteniamo la **velocità**:

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dt}(A - O) + \frac{d}{dt}(B - A) = ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib(\dot{\beta} + \dot{\alpha})e^{i(\alpha+\beta)} = a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} + b(\dot{\beta} + \dot{\alpha})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -a\dot{\alpha}\sin(\alpha) - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\sin(\alpha + \beta) \\ \dot{y}_B = a\dot{\alpha}\cos(\alpha) + b(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Deriviamo ancora per l'**accelerazione**:

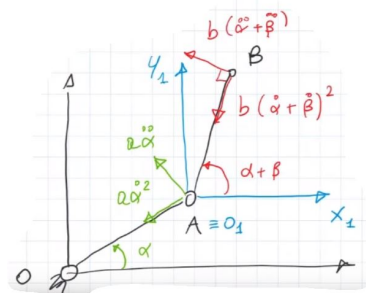
$$\vec{a}_B = a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})} - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2e^{i(\alpha+\beta)}$$

da cui possiamo ricavare la forma parametrica facendo le proiezioni (...).

Andiamo ad analizzare i termini che compongono l'accelerazione:

- $\vec{a}_{tr,B} = a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha}$  sono rispettivamente la componente tangenziale e quella normale dell'accelerazione di trascinamento di B. (In verde nell'immagine).
- $\vec{a}_{rel,B} = b(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})} - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2e^{i(\alpha+\beta)}$  sono rispettivamente la componente tangenziale e la componente normale dell'accelerazione relativa rispetto al sistema di riferimento con centro in A. (In rosso nell'immagine).
- Notiamo che dal teorema dei moti relativi ( $\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{co}$ ), manca il termine dell'accelerazione di Coriolis, che però siccome abbiamo scelto una terna traslante la velocità angolare della terna è nulla e quindi il termine di Coriolis si annulla.

[immagine dagli appunti del prof]

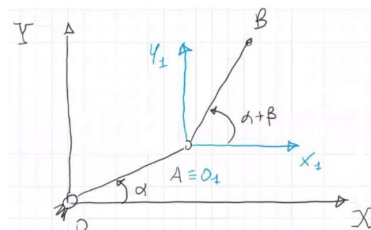


Interpretiamo ora i risultati ottenuti col teorema dei moti relativi, in particolare consideriamo le seguenti due possibili configurazioni: traslante e rotante. [impostiamo il problema, lasciamo la soluzione come compito dello studente].

### 7.3 Sistema mobile traslante

Poniamo un sistema mobile traslante con origine nel punto A e traslante sulla sua traiettoria circolare.

[immagine dagli appunti del prof]



Accelerazione angolare della terna:  $\omega_t = \dot{\omega}_t = 0$ .

Accelerazione di Coriolis:  $\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega}_t \wedge \vec{v}_{rel,B} = 0$ .

Utilizziamo ora i teoremi dei moti relativi per calcolare velocità e accelerazioni:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{tr,B} + \vec{v}_{rel,B} \text{ e } \vec{a}_B = \vec{a}_{tr,B} + \vec{a}_{rel,B} + \vec{a}_{co}.$$

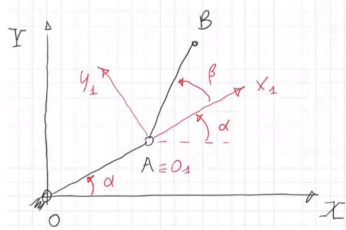
Notiamo che la velocità angolare dell'asta  $AO$  è pari a  $\vec{\omega}_{AO} = \dot{\alpha}\vec{k}$  (con  $\alpha$  angolo fra l'asse delle  $X$  e l'asta  $AO$ ), mentre la velocità angolare dell'asta  $BA$  è pari a  $\vec{\omega}_{BA} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{k}$  (con  $\alpha + \beta$  angolo fra l'asse  $X_1$  e l'asta  $AB$ ).

[terminare a casa, soluzione nel pdf della lezione]

## 7.4 Sistema mobile rotante

Poniamo un sistema mobile rotante con origine nel punto  $A$  e rotante solidalmente all'asta  $OA$ .

[immagine dagli appunti del prof]



Accelerazione angolare della terna:  $\vec{\omega}_t = \dot{\alpha}\vec{k}$ ,  $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{k}$ .

Accelerazione di Coriolis:  $\vec{a}_{co} \neq 0$ .

Notiamo che la velocità angolare dell'asta  $AO$  è pari a  $\vec{\omega}_{AO} = \dot{\alpha}\vec{k}$  (come il caso precedente), mentre la velocità angolare dell'asta  $BA$  è pari a  $\vec{\omega}_{BA} = \dot{\beta}\vec{k}$ .

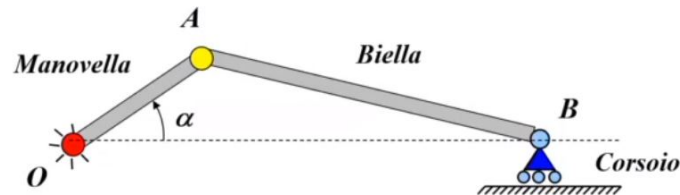
La velocità relativa di  $B$  diventa  $\vec{v}_{rel,B} = \vec{\omega} - BA \wedge (B - A) = \dot{\beta}e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})}$ .

[terminare a casa, soluzione nel pdf della lezione]

## 8 Cinematica del manovellismo ordinario

### 8.1 Introduzione

[immagine dagli appunti del prof]



Il **manovellismo ordinario** è un sistema costituito da tre corpi: un corpo rotante detto **manovella** (rosso), un corpo che effettua una traslazione che viene chiamato **corsoio** (giallo) e, infine, un elemento chiamato **biella** (marrona).

il punto  $A$  prende il nome di **bottone di manovella** e il punto  $B$  prende il nome di **piede di biella**.

Il manovellismo ordinario serve per trasformare un moto rotatorio in un moto traslatorio alternato (o viceversa).

Perchè sia possibile che la manovella possa compiere una rotazione a 360 gradi è necessario che il raggio della manovella sia minore del raggio della biella.

Questo meccanismo è una **catena chiusa**, con un unico grado di libertà ( $\alpha$ ).

Esistono due tipi di manovellismi:

- **manovellismo ordinario centrato**: il moto del punto  $B$  è un moto traslatorio alternato lungo un asse che passa per il punto  $O$ .
- **manovellismo ordinario deviato**: se non è centrato.

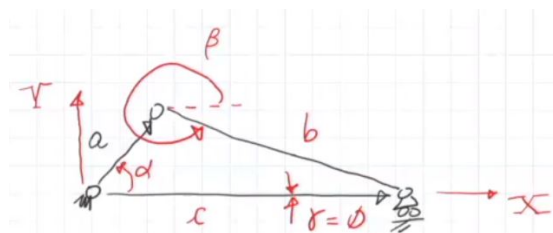
In questo corso studieremo il manovellismo ordinario centrato.

### 8.2 Posizione del manovellismo ordinario centrato

Noto  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\ddot{\alpha}$ , con  $\dot{\alpha} = \omega = \text{costante}$ , studiamo la posizione del punto  $B$ .

Per farlo usiamo l'**equazione di chiusura**, cioè l'equazione che descrive il poligono chiuso composto da manovella, biella e telaio:

[immagine dagli appunti del prof]



$$(A - O) + (B - A) = (B - O)$$
$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = ce^{i\gamma}$$

Imponiamo il vincolo che la manovella sia minore della biella e cioè che:

$$\lambda = \frac{a}{b} < 1$$



dove  $\lambda$  prende il nome di **rapporto caratteristico del manovellismo**.

Un altro vincolo da imporre è che l'angolo  $\beta$  sia:

$$\beta \in [90, 90]$$

Infine,  $\gamma$  fa parte del telaio immobile e quindi è sempre nullo.

Dunque:

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = ce^{i\gamma} = c$$

Separando parte reale e immaginaria ottengo:

$$\begin{cases} a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) = c \\ a\sin(\alpha) + b\sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ottengo che  $\sin(\beta) = \frac{a}{b}\sin(\alpha) = \lambda\sin(\alpha)$  e considerando che  $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ , allora  $\cos(\beta) = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2(\alpha)}$ .

$$\begin{cases} c = a\cos(\alpha) + b\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2(\alpha)} \\ \beta = \arcsin(-\lambda\sin(\alpha)) \end{cases}$$

Abbiamo così determinato  $c(t)$  e  $\beta(t)$ .

Analizziamo ora il caso particolare in cui  $\alpha = 0$ , cioè in cui  $c = c_{max} = a + b$ , questo punto è il punto di massima estensione e prende il nome di **punto morto esterno**.

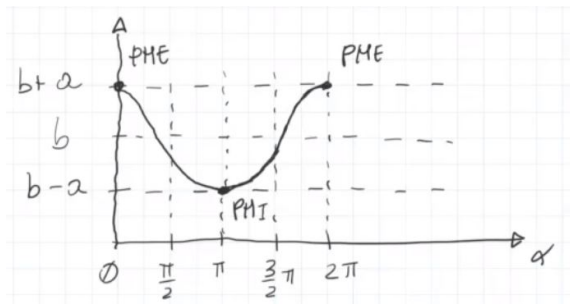
In questo punto la velocità di  $B$  si annulla, mentre l'accelerazione di  $B$  risulta essere massima in modulo.

Al contrario si ha la velocità massima del punto  $B$  circa (!) per un valore di  $\alpha$  pari a  $\frac{\pi}{2}$ . In questo caso  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$  e  $\vec{v}_B \sim v_{max}$ .

Se  $\alpha = \pi$ , la distanza  $c$  sarà minima, cioè  $c = c_{min} = b - a$  e questo punto prende il nome di **punto morto interno**.

Il moto del corsoio è rappresentabile circa così:

[immagine dagli appunti del prof]



ed si avvicina a un modo cosinusoidale quanto più  $\lambda = \frac{a}{b}$  è minore di 1.

### 8.3 Velocità del manovellismo ordinario centrato

Derivando le equazioni di chiusura ottenute precedentemente otteniamo:

$$\begin{aligned} ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib\dot{\beta}e^{i\beta} &= \dot{c} \\ a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} + b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} &= \dot{c} \end{aligned}$$

Andiamo a interpretare questi termini con il teorema dei moti relativi, per una terna mobile posizionata nel punto  $A$ :

- velocità di trascinamento di  $B$  è  $\vec{v}_{tr,B} = a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$
- velocità relativa di  $B$  è  $\vec{v}_{rel,B} = b\dot{\beta}e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}$

Proiettiamo ora sull'asse  $X$  e  $Y$  l'equazione per ottenere il sistema:

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha}\sin(\alpha) - b\dot{\beta}\sin(\beta) = \dot{c} \\ a\dot{\alpha}\cos(\alpha) + b\dot{\beta}\cos(\beta) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è un sistema in due equazioni e in due incognite  $(\dot{c}, \dot{\beta})$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & b \sin(\beta) \\ 0 & -b \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ a\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

### 8.3.1 Jacobiano del moto

Il procedimento appena seguito per determinare la velocità del punto  $B$  poteva essere semplificato usando il jacobiano del moto.

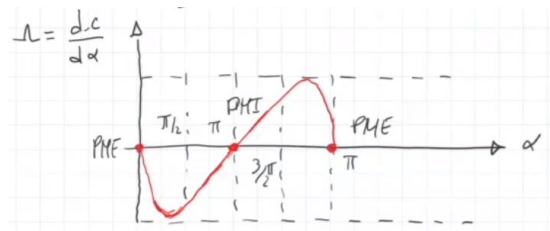
Il **Jacobiano del moto** rappresenta la velocità di un punto di interesse ( $B$ ) rapportato alla derivata prima della coordinata indipendente (del grado di libertà, cioè dell'angolo della manovella).

$$\Lambda = \frac{v_B}{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{c}}{\dot{\alpha}} = \Lambda(\alpha) = -a[\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\tan(\beta)]$$

$$\Lambda = \frac{\dot{c}}{\dot{\alpha}} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{dc}{d\alpha} = \Lambda(\alpha)$$

$$\dot{\alpha} = \Omega = \text{costante} \Rightarrow v_B = \Lambda(\alpha)\dot{\alpha} = \Lambda(\alpha)\Omega = \frac{dc}{d\alpha}\Omega$$

Vediamo ora una rappresentazione della velocità:  
[immagine dagli appunti del prof]



## 8.4 Accelerazione del manovellismo ordinario centrato

Come per la velocità, ci basta derivare il risultato trovato precedentemente:

$$\ddot{\alpha}ae^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + \ddot{\beta}be^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} = \ddot{c}$$

Interpretando i termini col teorema dei moti relativi otteniamo:

- $\vec{a}_{tr,B} = \ddot{\alpha}ae^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha}$
- $\vec{a}_{rel,B} = \ddot{\beta}be^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta}$
- l'accelerazione di Coriolis è nulla

Proiettando sugli assi ottengo il sistema:

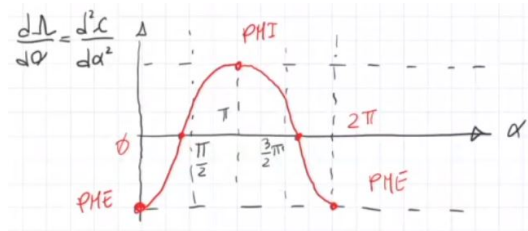
$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin(\alpha) - a\dot{\alpha}^2\cos(\alpha) - b\ddot{\beta}\sin(\beta) - b\dot{\beta}^2\cos(\beta) = \ddot{c} \\ a\ddot{\alpha}\cos(\alpha) - a\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) + b\ddot{\beta}\cos(\beta) - b\dot{\beta}^2\sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

Col Jacobiano del moto ( $\dot{c} = \Lambda(\alpha)\dot{\alpha}$ ) otteniamo un'interpretazione più intuitiva dell'accelerazione:

$$\ddot{c} = \frac{d\Lambda(\alpha)}{dt}\dot{\alpha} + \Lambda(\alpha)\frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \frac{d^2c}{d\alpha^2}\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\Lambda(\alpha)$$

$$\dot{\alpha} = \Omega = \text{costante} \Rightarrow \ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow \ddot{c} = \dot{\alpha}^2 \frac{d^2 c}{d\alpha^2} = \frac{d^2 c}{d\alpha^2} \Omega^2$$

Vediamo ora una rappresentazione grafica:  
[immagine dagli appunti del prof]



## 9 Statica del punto materiale

### 9.1 Equazioni cardinali della statica per il punto materiale

Supponiamo di avere un corpo puntiforme di massa  $m$  su cui agiscono diverse forze  $F_1, F_2, \dots, F_i$ .

Quello che vogliamo fare è stabilire le condizioni per le quali il sistema è in **equilibrio**, ovvero per cui il punto materiale non si muove.

**Condizione necessaria e sufficiente per avere equilibrio in un punto materiale è che si annullino tutte le forze applicate al punto.**

Imporre questa condizione significa imporre la seguente equazione:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

dove per  $\vec{R}$  si intende la risultante delle forze.

Questa equazione si può proiettare lungo gli assi  $X$  e  $Y$  e ottenere quindi un sistema scalare che prende il nome di **equazioni cardinali della statica**:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

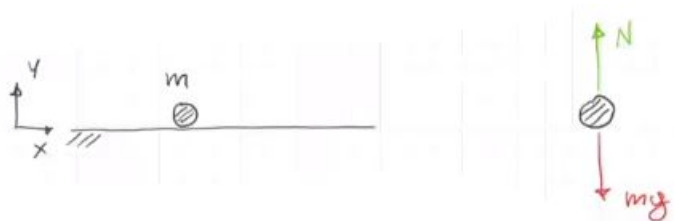
Queste equazioni cardinali della statica ci servono per:

- Calcolare le reazioni vincolari;
- Note forze, calcolare la posizione di equilibrio statico;
- Oppure nota la posizione di equilibrio, calcolare le forze attive.

Vediamo come procedere operativamente: si prende il punto materiale, lo si isola, si mettono in evidenza tutte le forze che agiscono su di esso, sia quelle attive, sia quelle reattive. Infine si scrivono le equazioni cardinali della statica.

es.

[immagine dagli appunti del prof]



Un punto materiale  $m$  fermo su un piano ci permette di dedurre che esiste una forza vincolare  $N$  che contrasta la forza di gravità  $mg$ .

Equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \rightarrow R_y = N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

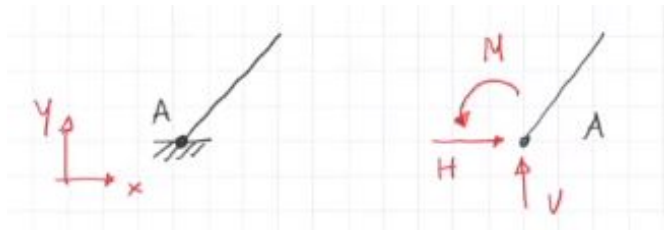
## 9.2 Reazioni vincolari

Le **reazioni vincolari** sono le forze trasmesse attraverso i vincoli.

Le reazioni vincolari si comportano in base ai movimenti impediti dal vincolo stesso. Si hanno quindi tante reazioni vincolari quanti sono i gradi di libertà soppressi dal vincolo.

### 9.2.1 Incastro

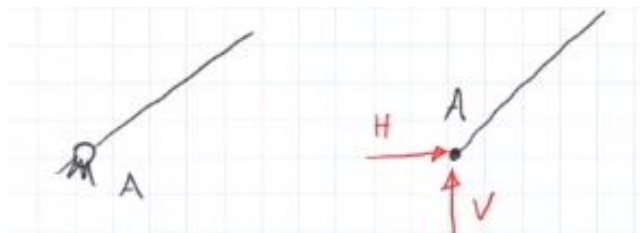
[immagine dagli appunti del prof]



L'incastro è un vincolo triplo, dunque ha tre reazioni vincolari:  $H, V, M$ .

### 9.2.2 Cerniera

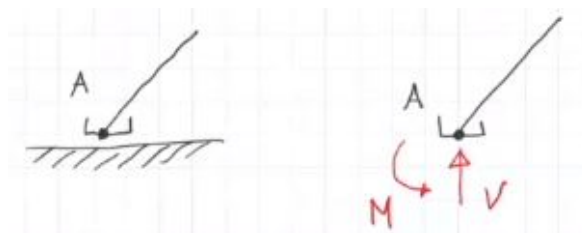
[immagine dagli appunti del prof]



La cerniera è un vincolo doppio, dunque ha due reazioni vincolari:  $H, V$ .

### 9.2.3 Pattino

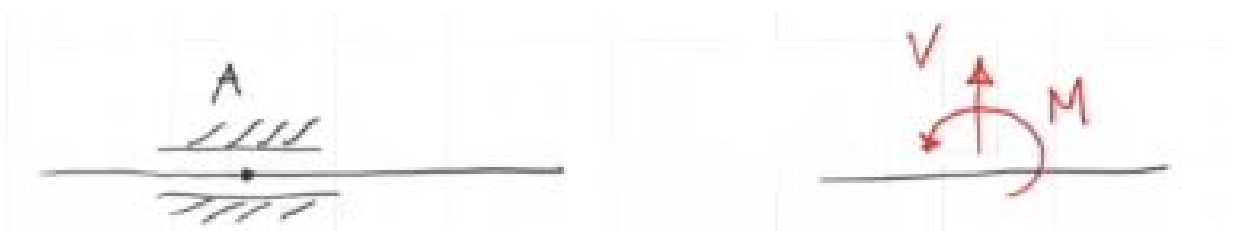
[immagine dagli appunti del prof]



Il pattino è un vincolo doppio, dunque ha due reazioni vincolari:  $M, V$ .

### 9.2.4 Manicotto

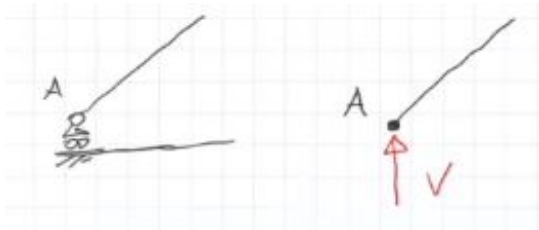
[immagine dagli appunti del prof]



Il manicotto è un vincolo doppio, dunque ha due reazioni vincolari:  $M, V$ .

### 9.2.5 Carrello-cerniera

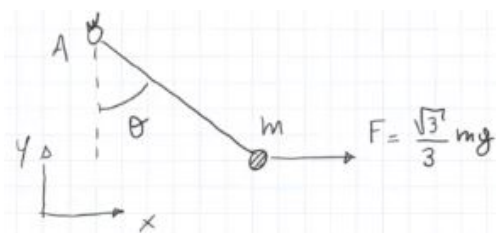
[immagine dagli appunti del prof]



Il manicotto è un vincolo singolo, dunque ha una sola reazione vincolare:  $V$ .

es.

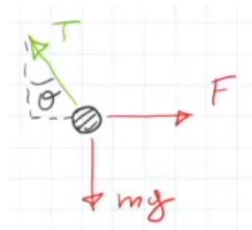
[immagine dagli appunti del prof]



Un punto con massa  $m$  in un piano verticale ha applicata una forza  $F$  ed è collegato con una fune inestensibile e incompressibile (cioè indeformabile e priva di massa) a una cerniera  $A$ .

Durante il processo di isolamento del punto di massa  $m$  devo tenere in mente la presenza della fune che, siccome è incompressibile e inestensibile, trasmette la forza della cerniera  $A$ .

[immagine dagli appunti del prof]

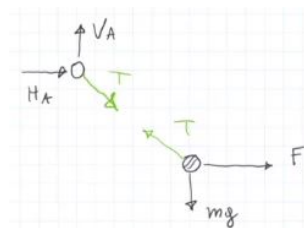


Scriviamo ora le equazioni cardinali della statica lungo l'asse  $X$  e lungo l'asse  $Y$ :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F - T \sin(\theta) = 0 \\ T \cos(\theta) - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F = T \sin(\theta) \\ mg = T \cos(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{T \sin(\theta)}{T \cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{F}{mg} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = 30^\circ \\ T = \frac{F}{\sin(\theta)} = \frac{2}{3} \sqrt{3} mg \end{cases}$$

Possiamo quindi interpretare le forze in gioco, considerando che deve sempre valere il **principio di azione-reazione**:

[immagine dagli appunti del prof]



Dunque ora le forze vincolari sono

$$\begin{cases} V_A = mg \\ H_A = -F \end{cases}$$

## 10 Statica del corpo rigido

### 10.1 equazioni cardinali della statica per il corpo rigido

L'annullamento della risultante delle forze applicate non è più una condizione sufficiente se si parla di corpi rigidi. Infatti per i corpi rigidi si hanno tre gradi di libertà e questa condizione ci permette di trovare solo due equazioni.

La nuova **condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido** è che si annulli la risultante di tutte le forze ed il momento rispetto ad un generico polo  $O$  di tutte le forze e coppie attive e reattive applicate al corpo stesso.

Traducendo questa definizione in equazioni otteniamo le **equazioni cardinali della statica per il corpo rigido**:

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_j \vec{C}_j = 0 \end{cases}$$

dove  $\sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$  rappresenta il **momento di una forza** e  $\sum_j \vec{C}_j$  una **coppia**.

Da questo sistema otteniamo tre equazioni:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_O = 0 \end{cases}$$

A queste tre equazioni si può sostituire una delle prime due con l'annullamento dei momenti rispetto a un altro polo  $Q$ :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ M_O = 0 \\ M_Q = 0 \end{cases}$$

a patto che il segmento  $OQ$  non sia perpendicolare all'asse delle  $X$ .

Infine si può ripetere l'ultimo passaggio sostituendo la prima equazione con un altro momento:

$$\begin{cases} M_O = 0 \\ M_Q = 0 \\ M_P = 0 \end{cases}$$

a patto che  $O, Q, P$  non siano allineati.

Le equazioni cardinali della statica mi serviranno per:

- calcolare le reazioni vincolari;
- definire una posizione di equilibrio, se sono note le forze attive esterne al corpo rigido;
- oppure definire le forze attive per mantenere una posizione di equilibrio assegnata.

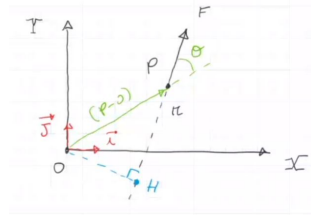
Notiamo inoltre che questo è possibile solo se il corpo è vincolato in maniera isostatica o ipostatica, cioè se il numero di relazioni di vincolo è minore o uguale del numero di gradi di libertà iniziali (che nel caso di corpo singolo sono 3).

Il tipico procedimento analitico è estremamente simile a quello che si fa per il caso del punto materiale:

- isolare il corpo rigido;
- mettere in evidenza le forze attive e reattive;
- applicare le equazioni cardinali della statica.

## 10.2 Momento di una forza

[immagine dagli appunti del prof]



Data una forza  $F$  applicata a un punto  $P$ , detto **punto di applicazione della forza**. Invece  $r$  prende il nome di **retta di applicazione della forza**.

Il momento rispetto al polo  $O$  (in questo caso origine del sistema) per definizione è:

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} = \vec{PO} |\vec{F}| \sin(\theta)$$

Notiamo che  $\vec{PO} \sin(\theta) = \vec{OH}$ , quindi possiamo scrivere:

$$\vec{M}_O = |\vec{F}| \cdot \vec{OH} \vec{k} = \text{forza per braccio}$$

dove  $\vec{OH}$  prende il nome di **braccio della forza**.

Notiamo inoltre che se spostassi il punto di applicazione  $P$  lungo la retta  $r$  di applicazione, il braccio e quindi anche il momento non cambierebbero.

Notiamo inoltre il momento è sempre in direzione  $\vec{k}$ , cioè uscente dal foglio.

## 10.3 Coppia

Una **coppia** è un sistema di due forze che ha risultante nulla, ma momento diverso da zero.

[immagine dagli appunti del prof]



Perché questo sia possibile ci devono essere delle condizioni:

- $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$
- $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$
- $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Se queste condizioni sono rispettate allora siamo in presenza di una coppia, e quindi possiamo sostituire le due forze con una coppia che ha valore pari al modulo delle forze per la distanza  $d$  fra i punti di applicazioni:

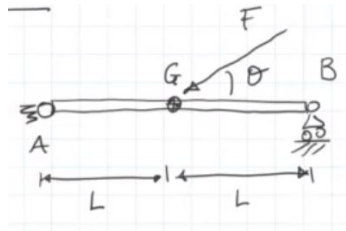
$$\vec{C} = F d \vec{k}$$

Notiamo che le coppie non dipendono dal polo preso in considerazione.

es.

[immagine dagli appunti del prof]

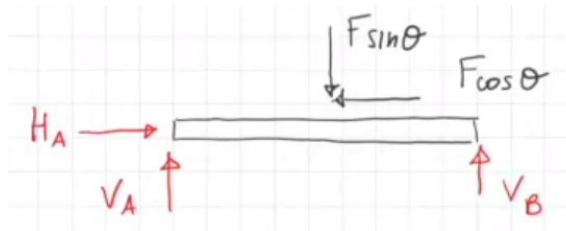




In questo esempio  $n_O = 3gdl$ ,  $n_v = 2 + 1 = 3gdl$  e quindi  $n = 0gdl$ . La struttura è isostatica.

Isoliamo la trave:

[immagine dagli appunti del prof]



Abbiamo quindi un sistema in tre incognite  $H_A, V_A, V_B$ , che possiamo trovare con le equazioni cardinali della statica.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A - F \cos(\theta) = 0 \\ V_A + V_B - F \sin(\theta) = 0 \\ -F \sin(\theta)L + V_B 2L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = F \cos(\theta) \\ V_B = \frac{F}{2} \sin(\theta) \\ V_A = \frac{F}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

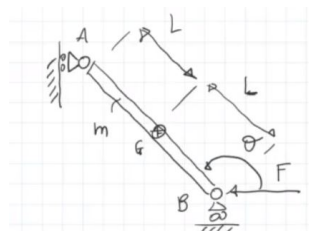
con  $L$  metà della lunghezza dell'asta.

Capiamo ora la terza delle equazioni cardinali della statica, cioè quella sul momento rispetto al polo A. Tutti i vettori forza ( $H_A, V_A, F \cos(\theta)$ ), che hanno retta di applicazione passante per il punto A avranno braccio nullo e di conseguenza momento nullo. Gli unici vettori forza con momento non nullo sono quindi  $F \sin(\theta)$  e  $V_B$ .

La scelta del polo è arbitraria, in questo esercizio abbiamo deciso di usare A come polo per pura comodità.

es.

[immagine dagli appunti del prof]

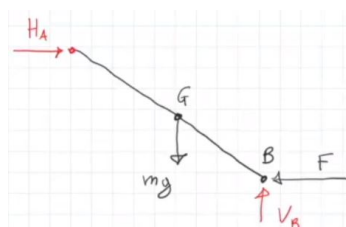


Assumiamo questo sistema in un piano verticale e di avere  $\theta$  noto.

Calcoliamo i gradi di libertà:  $n_O - n_V = n = 3 - 2 = 1gdl$  che è  $\theta$ . Il sistema è un meccanismo ipostatico.

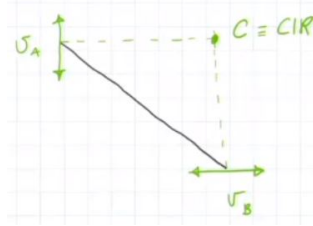
Isoliamo ora la trave e analizziamo le forze:

[immagine dagli appunti del prof]

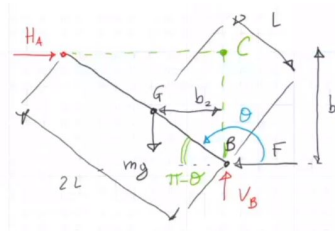


Impostiamo le equazioni cardinali della statica, considerando come polo dei momenti il punto  $C = CIR$ :

[immagine dagli appunti del prof]



[immagine dagli appunti del prof]



$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ -Fb_1 + mgb_2 = 0 \end{cases}$$

Con  $b_1 = 2L\sin(\pi - \theta) = 2L\sin(\theta)$  e  $b_2 = L\cos(\pi - \theta) = -L\cos(\theta)$ .

Nel calcolo del momento per la forza  $F$ , esso viene posto negativo per convenzione, infatti la forza  $F$  fa girare in senso orario l'asta attorno al polo  $C$ .

$$\begin{cases} V_B = mg \\ H_A = F \\ F = -\frac{mg\cos(\theta)}{2\sin(\theta)} = -\frac{mg}{2\tan(\theta)} \end{cases}$$

## 11 Statica dei sistemi di corpi rigidi

### 11.1 Equazioni cardinali della statica dei sistemi di corpi rigidi

Come fra punto materiale e corpo rigido, anche fra corpo rigido e sistema di corpi rigido, le equazioni cardinali del corpo rigido non sono più una condizione sufficiente per l'equilibrio del sistema.

Perchè il sistema di corpi rigidi sia in equilibrio bisogna che sia in equilibrio ogni parte del sistema stesso sotto l'azione delle forze esterne che competono su ciascun corpo e sotto le azioni delle forze che traducono le azioni delle parti contigue. In altre parole affinché il sistema di corpi rigidi sia in equilibrio bisogna che lo sia ogni sua parte sotto le forze esterne e interne, e attive e reattive.

Vediamo le **equazioni cardinali della statica dei sistemi di corpi rigidi**:

$$\begin{cases} \sum_j \vec{F}_{j,i} = 0 \\ \sum_j (P_{j,i} - 0) \wedge \vec{F}_{j,i} + \sum_k \vec{C}_{k,i} = 0 \end{cases}$$

per  $i = 1, 2, \dots, n_c$ .

Le forze **attive** sono tutte le forze **esterne** che possono essere applicate al sistema, le forze **reattive** sono invece le forze vincolari, le forze **interne** sono le forze che traducono gli effetti dei corpi contigui a quello considerato.

Nella risoluzione di problemi di statica di sistemi di corpi rigidi solitamente si procede isolando uno ad uno tutti i corpi che li costituiscono singolarmente, analizzando tutte le forze in gioco. In seguito si impostano le  $3 \cdot n_c$  equazioni cardinali in modo da poter risolvere al più  $3 \cdot n_c$  incognite.

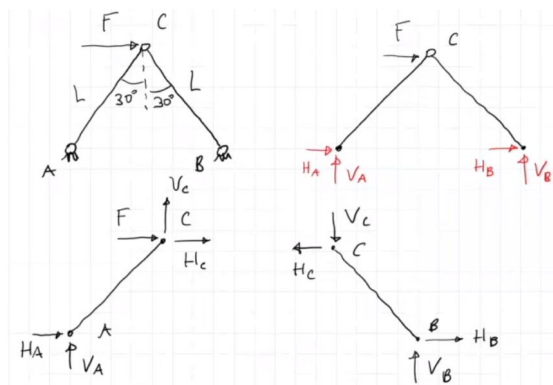
In particolare le equazioni cardinali ci permettono di:

- calcolare le reazioni vincolari incognite;
- se sono note le forze esterne, di calcolare la posizione di equilibrio incognita;
- oppure, se è nota la posizione di equilibrio, ci permettono di calcolare le forze esterne che ci permettono di mantenere tale posizione.

Questi tre punti valgono se e solo se il sistema è isostatico oppure ipostatico, cioè se  $n_v \leq 3 \cdot n_c$ .

es.

[immagine dagli appunti del prof]

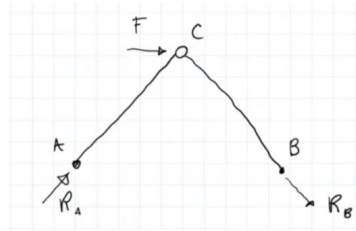


Le incognite sono solo le reazioni vincolari  $H_A, V_A, H_B, V_B, V_C, H_C$ , che sono 6, ma siccome abbiamo due corpi abbiamo  $3 \cdot n_c = 6$  equazioni.

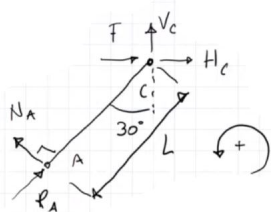
Ora bisognerebbe solo impostare le equazioni cardinali e risolvere, ma vediamo un metodo più furbo per risolvere l'esercizio.

E' sufficiente accorgersi di conoscere la direzione delle reazioni vincolari sia in A, sia in B:

[immagine dagli appunti del prof]



Vediamo per esempio l'asta AC:  
[immagine dagli appunti del prof]



Notiamo che nell'analisi dei momenti rispetto al polo C, l'unica forza che non ha braccio nullo è  $N_A$ , tutte le altre hanno retta di applicazione passante per il punto C (e quindi braccio nullo), quindi

$$M_C = 0 \rightarrow -N_A L = 0$$

dove il segno negativo viene dal fatto che si prende per convenzione una rotazione antioraria positiva e che la forza  $N_A$  fa ruotare l'asta attorno al polo in senso orario.

Lo stesso discorso si applica anche all'asta CB.

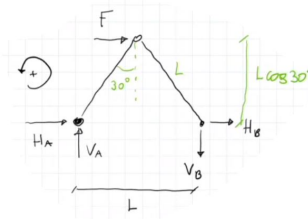
Perchè la reazione vincolare abbia la stessa direzione dell'asta che stiamo considerando, devono verificarsi due condizioni:

- ci siano due cerniere agli estremi;
- non si abbiano forze o momenti concentrati sull'asta se non negli estremi.

Quando queste condizioni sono rispettate, si dice che l'asta è una **biella**, cioè la reazione vincolare è diretta parallelamente all'asta.

Risolviamo ora questo esercizio sfruttando questo concetto:

[immagine dagli appunti del prof]



$$M_A = 0 \rightarrow -FL \cos(30^\circ) - V_B L = 0 \rightarrow V_B = -F \cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Sapendo che l'asta CB è una biella e che la sua reazione vincolare ha direzione parallela all'asta posso scrivere:

$$R_B = \frac{V_B}{\cos(30^\circ)} = -F$$

Per cui la sola componente orizzontale diventa

$$H_B = \frac{F}{2}$$

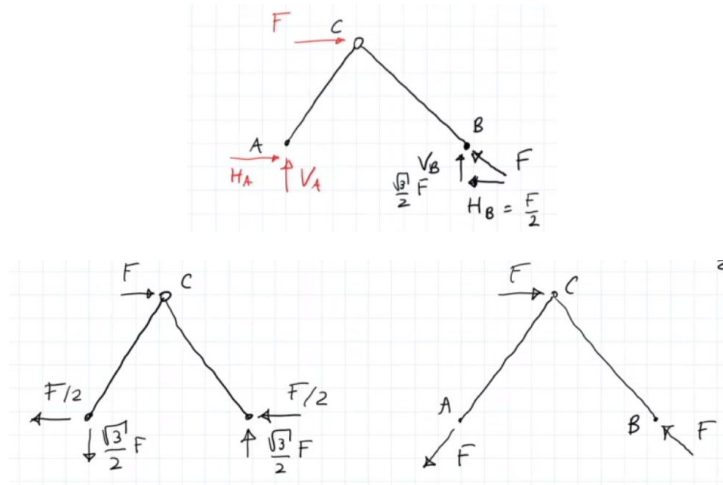
da cui, uguagliando le forze lungo l'asse delle X, ottengo:

$$R_x = 0 \rightarrow H_A + F - H_B = 0 \rightarrow H_A = -\frac{F}{2}$$

uguagliando sull'asse delle  $Y$ , invece, ottengo:

$$R_y = 0 \rightarrow V_A + V_B = 0 \rightarrow V_A = -V_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

[immagini dagli appunti del prof]

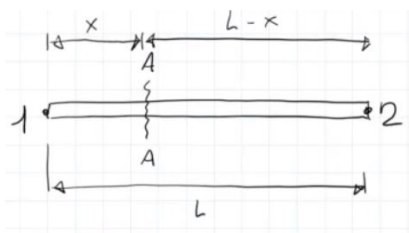


## 11.2 Azioni interne

Uno dei problemi della meccanica è quello di indagare lo stato di sollecitamento di un componente all'interno di un sistema, ovvero capire quali sono le sezioni del corpo maggiormente sollecitate dalle forze esterne al sistema.

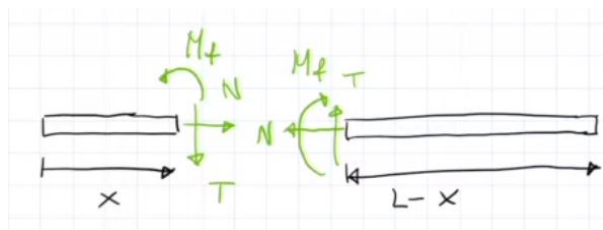
In questo corso studieremo gli stati di sollecitamento di una certa sezione di **travi snelle** in equilibrio.

[immagine dagli appunti del prof]



Per studiare lo stato di sollecitamento della trave in figura nella sezione  $A$  possiamo suddividere la trave in due sotto travi con un **incastro fittizio** e quindi isolarle e studiarne le forze vincolari:

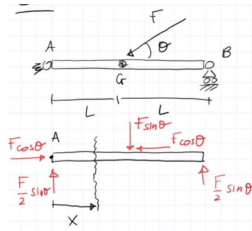
[immagine dagli appunti del prof]



dove  $M_f$  prende il nome di **momento flettente**,  $N$  prende il nome di **azione assiale**,  $T$  prende il nome di **azione di taglio**. Queste tre assieme costituiscono le **azioni interne**.

Per convenzione l'azione assiale  $N$  è positiva se mette in trazione la sezione considerata, l'azione di taglio è positiva se fa ruotare in senso antiorario la sezione considerata e il momento flettente è positiva se va a tendere le fibre della parte inferiore dell'elemento considerato.

es. Riprendiamo un esempio della lezione scorsa di cui avevamo già valutato le forze:  
[immagine dagli appunti del prof]

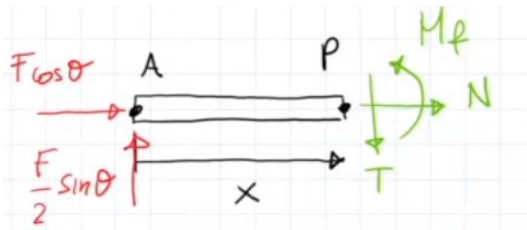


Volendo studiare le azioni interne al variare di  $x$  lungo la trave, troviamo in due diversi casi poichè nel punto  $G$  sono presenti delle forze applicate:

- $0 \leq x < L$
- $L \leq x \leq 2L$

Per il caso  $0 \leq x < L$ :

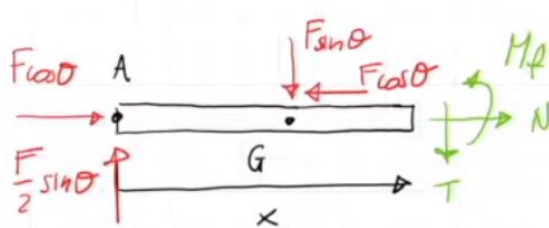
[immagine dagli appunti del prof]



Applichiamo le equazioni cardinali della statica usando il polo  $P$  per i momenti:

$$\begin{cases} F \cos(\theta) + N = 0 \\ \frac{F}{2} \sin(\theta) - T = 0 \\ -\frac{F}{2} \sin(\theta)x + M_f = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = -F \cos(\theta) \\ T = \frac{F}{2} \sin(\theta) \\ M_f = \frac{F}{2} \sin(\theta)x \end{cases}$$

Per il caso  $L \leq x \leq 2L$ : [immagine dagli appunti del prof]

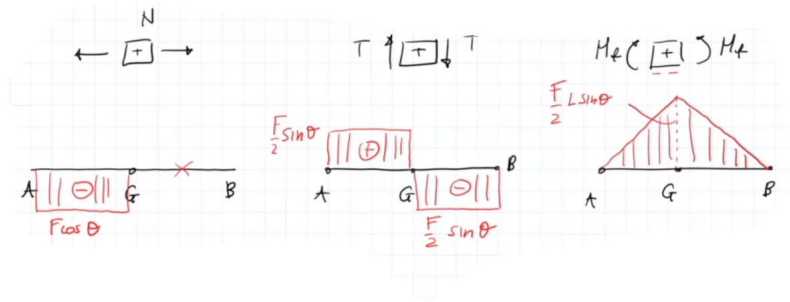


Applichiamo le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} F \cos(\theta) - F \cos(\theta) + N = 0 \\ \frac{F}{2} \sin(\theta) - F \sin(\theta) - T = 0 \\ -\frac{F}{2} \sin(\theta)x + F \sin(\theta)(x - L) + M_f = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T = -\frac{F}{2} \sin(\theta) \\ M_f = FL \sin(\theta) - \frac{Fx}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

Unendo i due risultati posso scrivere un diagramma che mi mostra le tre azioni interne in dipendenza del valore di  $x$ :

[immagine dagli appunti del prof]



La **prima verifica** che bisogna fare per capire se i risultati ottenuti sono sensati è che agli estremi (sui vincoli) i valori delle reazioni vincolari agli estremi coincidano con i valori delle azioni interne. In questo esempio per i vincoli in  $A$  le azioni assiali devono coincidere con  $H_A$  e le azioni di taglio devono coincidere con  $V_A$ , nel punto  $B$  invece abbiamo solo le azioni di taglio e devono coincidere con  $V_B$ .

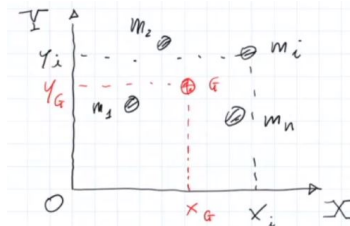
Come **secondo verifica** si possono cercare i punti in cui ci sono delle discontinuità nelle azioni interne (si vede bene nel diagramma riportato poco fa - ultima immagine). Questi punti o discontinuità possono esistere solo se sono presenti delle forze o dei momenti concentrati. Inoltre la discontinuità dovrà essere uguale al valore della forza che sto applicando. Nel nostro esempio la discontinuità in  $G$  dell'azione assiale dovrà essere pari a  $F \cos(\theta)$ , mentre la discontinuità dell'azione di taglio dovrà essere pari a  $F \sin(\theta)$ .

## 12 Dinamica dei corpi rigidi

### 12.1 Baricentro

#### 12.1.1 Masse puntiformi

Introduciamo per prima cosa il concetto di baricentro per **masse puntiformi**, in seguito estenderemo il concetto per le masse di corpi rigidi [immagine dagli appunti del prof]



Detto  $G$  il **baricentro**, esso ha due coordinate  $x_G$  e  $y_G$ , definite come media pesata delle coordinate di tutte le masse puntiformi in gioco, dove il peso è dato dalla massa del singolo punto:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m} \\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{m} \end{cases}$$

dove  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Le coordinate del baricentro possono anche essere definite come

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{m} \\ y_G = \frac{S_x}{m} \end{cases}$$

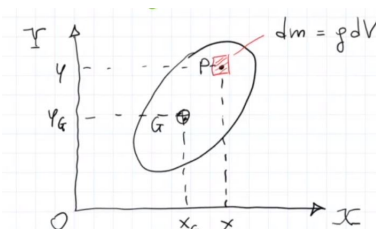
dove  $S_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$  e  $S_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$  sono i **momenti statici del prim'ordine** attorno, rispettivamente, all'asse  $Y$  e all'asse  $X$ .

Possiamo dire che il baricentro  $G$  è il **centro delle forze peso**, questo significa che il momento del baricentro delle forze peso rispetto al polo  $G$  è nullo.

#### 12.1.2 Copri rigidi

Per estendere il concetto di baricentro ai **corpi rigidi** ci basta considerare il corpo rigido come un insieme infinito e continuo di infiniti punti.

[immagine dagli appunti del prof]



Definito un corpo rigido e una piccola sezione infinitesima di massa  $dm = \rho dV$ , con  $\rho$  densità. Considerando che l'intero corpo è costituito da infiniti punti, per calcolare le coordinate del baricentro è sufficiente sostituire la sommatoria con un integrale:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \int_V \rho(x, y, z) x dV \\ y_G = \frac{1}{m} \int_V \rho(x, y, z) y dV \end{cases}$$



Notiamo che se si sceglie un **sistema di riferimento baricentrico** cioè con origine nel baricentro, allora i momenti statici del prim'ordine si annullano.

Se, inoltre, definiamo dei corpi rigidi **omogenei**, cioè con densità costante  $\rho(x, y, z) = \rho = \text{costante}$  e di **spessore costante** (spessore uscente dal foglio)  $h = \text{costante}$ , allora  $dV = h dA$  e quindi il calcolo delle coordinate si semplifica molto:

$$x_G = \frac{\rho h}{m} \int_A x dA = \frac{1}{A} \int_A x dA y_G = \frac{\rho h}{m} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

Da qui notiamo che in caso di corpi rigidi omogenei e di spessore costante possiamo studiarne il baricentro analizzandone la geometria:

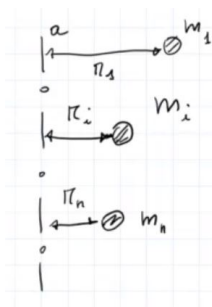
- Se il corpo possiede un asse di simmetria, allora il baricentro dovrà appartenere a questo asse;
- Se un corpo ha più di un asse di simmetria, allora il baricentro si troverà sull'intersezione di questi;
- Se un corpo è facilmente suddivisibile in sottocorpi di cui è noto il baricentro, allora la posizione del baricentro del corpo intero sarà la media pesata dei baricentri dei sottocorpi.

## 12.2 Momento di inerzia

### 12.2.1 Masse puntiformi

Il **momento di inerzia** ci dice come la massa sia distribuita all'interno del corpo.

[immagine dagli appunti del prof]



Dato un asse  $a$  (tratteggio-puntini nell'immagine), date delle masse  $m_i$  puntiformi, allora il momento di inerzia  $J_a$  è dato dal **momento statico del secondo ordine** ( $= \sum m_i r_i^2$ ) della massa rispetto all'asse  $a$ :

$$J_a = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

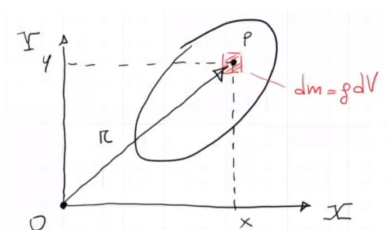
Tanto più una massa è distante dall'asse tanto più sarà grande il suo momento di inerzia.

Nel caso piano, l'unico asse di nostro interesse sarà un asse perpendicolare all'asse del foglio, come l'asse  $z$ .

### 12.2.2 Corpo rigido

Vediamo il caso di corpo rigido:

[immagine dagli appunti del prof]



Dato un punto  $P$  appartenente al corpo rigido e che ha una massa infinitesima  $dm = \rho dV$ , per estendere il concetto da massa puntiforme a corpo rigido, tutto quello che dobbiamo fare è sostituire il simbolo di sommatoria con quello di integrale.

In questo corso studieremo sempre il momento di inerzia in riferimento all'asse  $z$ , e quindi per indicare il momento di inerzia  $J_{OZ}$ , cioè per l'asse  $Z$  e il polo  $O$  (origine), per comodità scriveremo solo  $J_O$ :

$$J_O = \int_V \rho(x, y, z) r^2 dV = \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dV$$

Vediamo ora il caso di un corpo **omogeneo** e a **spessore costante**:

$$J_O = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \int_A \rho h (x^2 + y^2) dA = \rho h \int_A r^2 dA$$

Il momento di inerzia di un corpo diventa una **caratteristica del corpo** quando lo si considera per il polo  $G$ , cioè per il baricentro. In questo caso più la massa è lontana dal baricentro più il momento di inerzia è maggiore.

Se si sceglie un qualsiasi altro polo, il momento di inerzia non è più una proprietà del corpo, perchè dipende dal polo scelto.

Come possiamo legare il momento di inerzia di un generico polo  $O$  rispetto al momento di inerzia del baricentro?

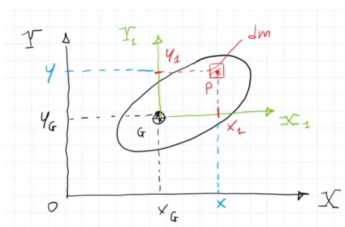
**Teorema del trasporto o teorema di Huygens:**

$$J_O = J_G + m \bar{OG}^2 \quad [Kgm^2]$$

con  $m$  massa del corpo e  $\bar{OG}$  distanza del generico polo  $O$  dal baricentro  $G$ .

Vediamo come dimostrarlo:

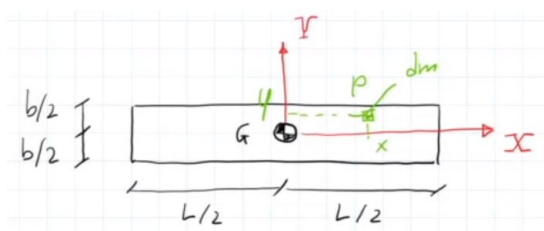
[immagine dagli appunti del prof]



$$\begin{aligned} J_O &= \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \int_V \rho[(x_G + x_1)^2 + (y_G + y_1)^2] dV = \\ &= \int_V \rho(x_G^2 + y_G^2) dV + \int_V \rho(x_1^2 + y_1^2) dV + 2 \int_V \rho x_G x_1 dV + 2 \int_V \rho y_G y_1 dV = \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \int_V \rho dV + \int_V \rho(x_1^2 + y_1^2) dV + 2x_G \int_V \rho x_1 dV + 2y_G \int_V \rho y_1 dV = J_G + m \bar{OG}^2 \end{aligned}$$

**es.** Trave rettangolare omogenea a spessore costante.

[immagine dagli appunti del prof]



$$\begin{aligned} J_G &= \rho h \int_A (x^2 + y^2) dA \\ J_G &= \rho h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dy dx = \rho h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx dy + \rho h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy \end{aligned}$$

$$J_G = \rho h b \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho h L \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$J_G = \rho h b \left( \frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right) + \rho h L \left( \frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right)$$

Se la trave fosse stata snella avremmo semplificato ulteriormente:

$$L \gg b \Rightarrow J_G \approx \frac{m}{12} L^2$$

Notiamo che possiamo sempre in generale scrivere il momento di inerzia di un corpo come il prodotto fra la massa  $m$  e il **raggio giratorio di inerzia**  $r_G$  al quadrato:

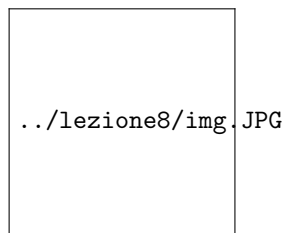
$$J_G = m r_G^2$$

Nel caso della trave snella dell'esempio precedente notiamo che il raggio giratorio di inerzia è pari a  $L$ .

Il raggio giratorio di inerzia ci dice quanto la massa è concentrata intorno al baricentro del corpo, quanto più è piccolo e quanto più la massa è concentrata vicino al baricentro.

**es.** Corona circolare omogenea a spessore costante.

[immagine dagli appunti del prof]



Consideriamo un settore circolare di apertura infinitesima  $d\theta$  e di spessore infinitesimo  $dr$  e che quindi avrà area approssimabile a un rettangolo  $dA = r d\theta dr$  e la generica distanza dal punto  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$J_G = \rho h \int_A (x^2 + y^2) dA = \rho h \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 r dr d\theta = \rho h \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\theta$$

$$J_G = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi \rho h \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \pi \rho h \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} = \rho \frac{\pi h}{2} (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)$$

notiamo che l'area della corona circolare è  $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$  e che  $V = Ah$  e  $m = \rho V$ , per cui:

$$J_G = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$

Introduciamo ora il raggio giratorio di inerzia:

$$J_G = m r_G^2$$

e mostriamo due casi separati:

- Anello sottile, in cui tutta la massa è concentrata sull'anello esterno:  $J_G = m R^2$ , per cui  $r_G = R$ .
- Disco pieno, in cui l'intero disco possiede massa: in questo caso la massa va dal raggio  $R_1 = 0$  al raggio  $R_2 = R$  e quindi  $J_G = m \frac{R^2}{2}$  e  $r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$ .

Da questo esempio notiamo che il raggio giratorio di inerzia ci mostra la distribuzione della massa rispetto al baricentro.

## Parte II

# ESERCITAZIONI

Esercitazione 1 19/03/2020

**link** [Clicca qui](#) (solo audio)

### 13 Esercitazione I

APPUNTI DEL PROF (Anno corrente): ../esercitazione1/pdf/ese\_1\_notes.pdf. [consigliato! Ho preso note su questo pdf, in caso di dubbi confrontare le esercitazioni degli anni scorsi che sono più ordinate]

ESERCITAZIONE -1 (Anno scorso): ../esercitazione1/pdf/01-Richiamiecinematicapunto.pdf.

ESERCITAZIONE -2 (Anno scorso): ../esercitazione1/pdf/01-Eseaggiuntivocinematica.pdf.

#### 13.1 Vettori

Il generico vettore  $\vec{P}$  è definito come  $\vec{P} = (P-O) = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$  con  $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Un vettore è definito da

- modulo  $|\vec{P}| = P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$ ;
- direzione;
- verso;
- punto di applicazione.

##### 13.1.1 Operazioni fra vettori

- **Prodotto scalare:**  $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha) = ab\cos(\alpha)$ , con  $\alpha$  angolo compreso fra i due vettori, notiamo che  $b\cos(\alpha)$  è la proiezione di  $b$  su  $a$ .
- **Somma di vettori:**  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j})$ , graficamente si può usare la regola del parallelogramma.
- **Prodotto vettoriale:**  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , direzione e verso di  $\vec{c}$  sono decisi con la regola della mano destra (primo vettore che compare nel prodotto sul pollice, secondo vettore sull'indice, risultato nel medio), il modulo di  $\vec{c}$  si trova come  $|\vec{c}| = ab\sin(\alpha)$ .  
Per fare il prodotto vettoriale si usa spesso questo metodo:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

#### 13.2 Cinematica del punto

##### 13.2.1 Legge oraria e traiettoria

Data una **legge oraria**  $P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  che descrive il moto di un punto nel tempo, si può ricavare la **traiettoria**:

- Si esplicita la legge oraria in forma parametrica:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
- si ricava  $t$  dalla prima equazione e la si sostituisce nella seconda ricavando così un'equazione  $y = f(x)$ , che prende il nome di traiettoria

### 13.2.2 Numeri complessi

**Forma esponenziale:**  $\vec{P} = re^{j\theta}$ .

**Forma trigonometrica:**  $\vec{P} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$ .

Per passare da una forma all'altra si usano le **relazioni di eulero**:  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ .

Notiamo che  $e^{j0} = 1$ ,  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ , e  $e^{j\pi} = -1$ .

**oss.** Quando si lavora coi numeri complessi, per esempio nel cercare di definire la posizione di un certo punto, si cerca sempre di ottenere il risultato tramite somme di vettori, ciascuno dei quali varia nel tempo o il modulo o l'angolo, non entrambe assieme. E' preferibile usare più vettori "semplici", piuttosto che meno vettori "complessi". Utilizzare questo approccio facilita spesso i conti delle derivate per il calcolo della velocità e dell'accelerazione.

**oss.** Ricordarsi sempre di definire gli angoli correttamente: si parte dall'asse reale e si ruota in senso antiorario.

## 14 Esercitazione II

../esercitazione2/pdf/02-Cinematicacrdisco-motirelativigru.pdf  
../esercitazione2/pdf/ese\_2\_notes.pdf

### 14.1 Ripasso sulla cinematica del corpo rigido

Definito un corpo rigido e due sue punti interni  $A$  e  $B$ , allora il **teorema di Rivals della velocità** dice che:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

con  $\vec{v}_{BA}$  velocità di  $B$  in moto circolare visto da un osservatore traslante in  $A$ .

Il **centro di istantanea rotazione (CIR)** è un punto che nell'istante in cui viene osservato ha velocità nulla. Mentre un **centro di rotazione** ha velocità nulla in ogni istante e quindi anche accelerazione nulla.

Il **teorema di Rivals dell'accelerazione** dice che:

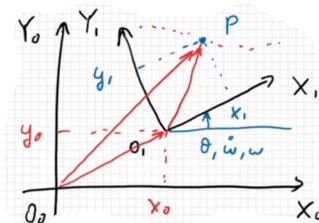
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2(B - A)$$

dove  $\vec{a}_{BA} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2(B - A)$  è l'accelerazione di  $B$  vista da un osservatore traslante in  $A$ .

### 14.2 Ripasso sui moti relativi

Definita una terna fissa  $X_0O_0Y_0$  e una terna rototraslante  $X_1O_1Y_1$  per descrivere il moto di un punto  $P$  nello spazio.

[immagine dagli appunti del prof]



**Velocità:**

$$\vec{v}_P^{(0)} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + \vec{v}_{rel,P}^{(1)}$$

dove  $\vec{v}_P^{(0)}$  è la **velocità assoluta**,  $\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$  è la **velocità di trascinamento (traslatoria-rotatoria)**, e  $\vec{v}_{rel,P}^{(1)}$  è la **velocità relativa**.

**Accelerazione:**

$$\vec{a}_P^{(0)} = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] + \vec{a}_{rel,P} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$$

dove  $\vec{a}_P^{(0)}$  è l'**accelerazione assoluta**,  $\vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)]$  è l'**accelerazione di trascinamento**,  $\vec{a}_{rel,P}$  è l'**accelerazione relativa**, e  $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$  è l'**accelerazione di Coriolis**.

## 15 Esercitazione III

../esercitazione3/pdf/03-Cinematicacr-scalachescivola.pdf  
../esercitazione3/pdf/ese\_3\_notes.pdf

### 15.1 Tipico procedimento di risoluzione di un problema coi numeri complessi

- Disegnare il problema.
- Identificare i dati del problema.
- Calcolare la posizione nei punti richiesti:
  - Identificare i punti richiesti.
  - Trovare una somma di vettori che abbiano ciascuno o modulo costante o angolo costante.
  - Disegnare i vettori scelti.
  - Scrivere l'equazione della somma di vettori in forma complessa (es:  $ae^{i\alpha} = be^{i\beta} + ce^{i\gamma}$ ).
  - Ricordarsi che gli angoli  $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$  vanno presi partendo dall'asse reale e girando in senso antiorario.
  - Sostituire i dati del problema noti. Porre attenzione agli elementi costanti e a quelli variabili nel tempo, di cui ce ne saranno alcuni noti e altri incogniti, cioè da trovare.
  - Semplificare l'equazione con eventuali proprietà dei numeri complessi.
  - Dividere parte reale e parte immaginaria (proiettare sull'asse delle  $X$  e delle  $Y$  l'equazione) in modo da ottenere un sistema.
  - Ricavare dal sistema i valori richiesti.  
[Se il sistema è facilmente risolvibile si procede coi calcoli normalmente, cioè per sostituzione. Se il sistema non è facilmente risolvibile, si passa in forma matriciale che contenga una matrice, che chiameremo  $A$  che moltiplica il vettore delle variabili incognite e il tutto che uguaglia il vettore dei termini noti (nullo se non ce ne sono). Per risolvere il sistema è sufficiente portare dall'altro lato dell'uguale la matrice  $A$  come  $A^{-1}$ .]
  - verificare se i risultati sono sensati.
- Calcolare la velocità nei punti richiesti:
  - Si deriva l'equazione della posizione.
  - Si procede come per la posizione proiettando sull'asse delle  $X$  e delle  $Y$  l'equazione per ottenere un sistema.
  - Dal sistema si ricavano le velocità cercate.
- Calcolare l'accelerazione nei punti richiesti:
  - Si deriva l'equazione della velocità.
  - Si procede come per la velocità proiettando sull'asse delle  $X$  e delle  $Y$  l'equazione per ottenere un sistema.
  - Dal sistema si ricavano le accelerazioni cercate.

Esercitazione 4 09/04/2020  
**link** [Clicca qui \[... praticamente solo audio\]](#)

## 16 Esercitazione IV

../esercitazione4/pdf/04-Eserciziaggiuntivi.pdf  
../esercitazione4/pdf/04-Eserciziaggiuntivi.pdf  
../esercitazione4/pdf/ese\_4\_notes.pdf

### 16.1 Osservazioni sulla risoluzione di problemi col metodo dei moti relativi

Nella risoluzione di esercizi con terne mobili occorre porre correttamente la terna e impostare l'equazione con il teorema dei moti relativi della velocità. Bisogna ora individuare le varie componenti dell'equazione (velocità di trascinamento, relative...) e in seguito per risolvere le incognite è sufficiente costruire un sistema uguagliando le componenti orizzontali con quelle verticali. Questo approccio è praticamente lo stesso usato per i numeri complessi quando si proiettano lungo gli assi le equazioni.

Una volta ottenuta l'equazione, prima di disegnarne i vari termini, è utile fare una tabellina dei moduli e direzioni dei termini, specificando quali sono incognite e quali noti.

Le stesse osservazioni si possono fare per le accelerazioni.