MECCANICA

Federico Mainetti Gambera

20 agosto 2020

Indice

I LEZIONI 3

1 Informazioni sul corso 3
- 1.1 Libro di testo . . . 3
- 1.2 Argomenti del corso . . . 3

2 Cinematica di un punto 3
- 2.1 Gradi di libertà . . . 3
- 2.2 Moto . . . 3
- 2.3 Velocità . . . 4
- 2.4 Accellerazione . . . 5

3 Cinematica di un corpo 7
- 3.1 Definizioni . . . 7
- 3.2 Corpo rigido . . . 7
- 3.3 Moto in grande . . . 8
  - 3.3.1 Traslazione . . . 8
  - 3.3.2 Rotazione . . . 8
  - 3.3.3 Rototraslazione . . . 9
- 3.4 Moto in piccolo (Atto di moto) . . . 9
- 3.5 Cinematica del corpo rigido . . . 11
  - 3.5.1 Posizone . . . 11
  - 3.5.2 Velocità . . . 11
  - 3.5.3 Accellerazione . . . 12

4 Analisi cinematica mediante osservatori in moto relativo 13
- 4.1 Posizione . . . 13
- 4.2 Velocità . . . 14
- 4.3 Accellerazione . . . 15

5 Sistemi meccanici 17
- 5.1 Vincoli elementari . . . 17
  - 5.1.1 Vincoli tripli . . . 17
  - 5.1.2 Vincoli doppi . . . 17
  - 5.1.3 Vincoli singoli . . . 18
- 5.2 Vincoli di contatto . . . 18
- 5.3 Vincolo di puro rotolamento . . . 18

6 Cinematica dei sistemi meccanici 21
- 6.1 Classificazione dei sistemi meccanici . . . 21
  - 6.1.1 Regola di Grublen . . . 21
- 6.2 Cinematica del manipolatore SCARA . . . 21

II ESERCITAZIONI 24

7 Esercitazione I **24**
7.1 Vettori 24
7.1.1 Operazioni fra vettori 24
7.2 Cinematica del punto 24
7.2.1 Legge oraria e traiettoria 24
7.2.2 Numeri complessi 25

8 Esercitazione II **26**
8.1 Ripasso sulla cinematica del corpo rigido 26
8.2 Ripasso sui moti relativi 26

Parte I
LEZIONI

LEZIONE 1 10/03/2020
link clicca qui

1 Informazioni sul corso

1.1 Libro di testo

L'acquisto del libro è fortemente consigliato, gli appunti di queste lezioni sono molto scarni. Il libro è "Fondamenti di meccanica teorica e applicata - McGraw-Hill, N. Bachsmid et al".

1.2 Argomenti del corso

La meccanica si occupa di studiare il movimento di un sistema meccanico. Durante il corso ci occuperemo di **Cinematica**, **Statica** e **Dinamica**.
Per cinematica si intende lo studio del movimento di un sistema meccanico indipendentemente dalle forze che agiscono su di esso. Il moto del sistema è quindi unicamente dettato dai vincoli del sistema stesso.
Viceversa lo studio del moto di un sistema in relazione alle forze che agiscono su di esso è la dinamica.
La statica è un caso particolare della dinamica, ovvero quando le forze di un sistema si equilibriano in modo da creare un'assenza di moto.
Infine andremo ad applicare queste tre materie allo studio di una **macchina a un grado di libertà**.

2 Cinematica di un punto

Studieremo la cinematica applicata a un punto e riducendoci al caso bidimensionale.
Per poter definire una posizione di un punto c'è bisogno di un **sistema di riferimento** o osservatore, in modo da. Sistemi di riferimento diversi possono dare posizioni diverse per uno stesso punto.
Per **moto di un punto intendiamo l'evoluzione temporale della sua posizione**, inoltre cercheremo di darne una descrizione matematica.

2.1 Gradi di libertà

Le coordinate indipedenti, o gradi di libertà, che caraterrizzano un piano e che definiscono una posizione di un punto sono due. Si dice che un punto ha due gradi di libertà nel piano.
Ci sono tre possibilità per scegliere le due coordiante indipendenti:

- **Coordiante cartesiane**, composte da un origine O, un asse delle ascisse X e uno delle ordinate Y. In questo caso la posizione di un punto P sarà descritta da un vettore $\vec{P} = (P - O)$, e, se chiamo $\vec{j}$ e $\vec{i}$ i vettori delle proiezioni del punto sull'asse delle odrinate e delle ascisse, posso dire che $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- **Il piano di Gauss**, che è il piano immaginario, dove i due assi principali sono l'asse reale e l'asse immaginario. Anche in questo caso un punto P sarà descritto da un vettore $\vec{P} = (P-O) = x+iy$.
- **Coordinate polari**, si usa ancora il piano di Gauss (immaginario), ma per definire il vettore posizione $\vec{P} = P - O$ userò due grandezze chiamate modulo e anomalia, dove il **modulo** r rappresenta la distanza del punto P dall'origine O e l'**anomalia (argomento)** θ è l'angolo che il vettore forma con l'asse reale in direzione antioraria. Dunque possiamo scrivere $\vec{P} = re^{i\theta}$ grazie alla formula di Eulero ($e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$). Notiamo che $x = rcos(\theta)$ e $y = rsin(\theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = atan\left(\frac{y}{x}\right)$

2.2 Moto

Il moto del punto rappresenta l'evoluzione delle coordinate che rappresentano la posizione del punto nel tempo. Se il punto P si sta muovendo nel tempo, si dice che esso traccia una **traiettoria** nel piano. Per sua natura la traiettoria è una **linea continua** .

Una volta stabilita un'origine per la traiettoria, ovvero la posizione P_0 assunta dal punto nel tempo iniziale t_0, posso definire una quantità scalare s detta ascissa curvilinea. L'**ascissa curvilinea** indica la posizione occupata dal punto P lungo la traiettoria ad un dato istante di tempo.
Notiamo che il vettore posizione $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$ è funzione dell'ascissa curvilinea, che a sua volta è funzione del tempo.

Come studiare il moto del punto?

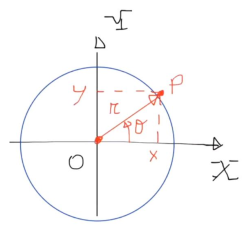
- studiando direttamente l'evoluzione temporale delle coordinate:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

- definendo traiettoria e legge oraria:

$$\begin{cases} y = f(x) \ \text{ traiettoria} \\ s = s(t) \ \text{ legge oraria} \end{cases}$$

es. Moto circolare
[immagine dagli appunti del prof]



Per studiare il moto di questo punto P posso usare uno dei due metodi appena descritti.
Primo metodo:
$\theta = \omega t$, dove ω rappresenta la velocità angolare.

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases} \quad \text{da cui otteniamo che} \quad \begin{cases} x = rcos(\omega t) \\ y = rsin(\omega t) \end{cases}$$

Secondo metodo:
la traiettoria sarà definita da $r^2 = x^2 + y^2$, mentre la legge oraria $s = \theta r = [\theta = \omega t] = \omega t r$.

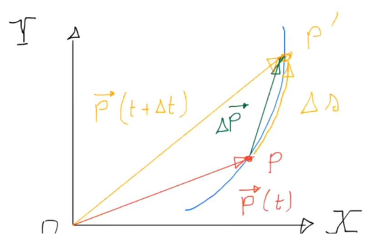
2.3 Velocità

La **velocità** $\vec{v}$ è definita come $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$, ricordando che $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$ il vettore posizione è una funzione dell'ascissa curvilinea che è funzione del tempo.
Quindi nel calcolare la velocità si sta eseguendo la derivata di una funzione di una funzione: $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{P}}{ds}$.

Per comprendere il significato del secondo termine di questa equazione ($\frac{d\vec{P}}{ds}$) facciamo un analisi grafica:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{[\Delta t \to 0 \text{ oppure } \Delta s \to 0]} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{ds}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Un punto P si muove dal punto $\vec{P} = \vec{P}(t)$ al punto $\vec{P'} = \vec{P}(t + \Delta t)$ lungo una traiettoria, percorrendo una quantià pari a Δs. A questo punto possiamo dire che $\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s}$.
Cosa è $\Delta \vec{P}$? è il vettore che unisce il punto P dalla posizione al tempo t alla posizione $t + \Delta t$, questa quantità al tendere di Δt a 0 tenderà anch'essa a 0. Quindi il vettore $\Delta \vec{P}$ per $\Delta t \to 0$ tenderà a coincidere con l'arco Δs della traiettoria stessa.

Dunque $\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} \right| = 1$. Oltre ad avere quindi modulo pari a 1, tenderà ad essere tangente alla traiettoria. **La velocità è sempre tangente alla traiettoria**.

C'è più di un **modo** per definire la **velocità**:

- Il primo lo abbiamo appena visto: definita come $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{t} = v \cdot \vec{t}$ (dove per $\vec{t}$ si intende il versore tangente alla traiettoria)
- Il secondo metodo sfrutta le coordinate cartesiane: $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$: $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$.

Sfruttando la seconda definizione, possiamo anche scrivere il vettore velocità come $\vec{v} = ve^{i\alpha}$, dove l'angolo α rappresenta l'angolo formato fra il vettore tangente e l'asse delle ascisse traslato fino al punto considerato. Dunque il modulo $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ e l'angolo $\alpha = atan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$, e quindi $tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$.

2.4 Accellerazione

L'**accellerazione** $\vec{a}$ per definizione è $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\frac{d\vec{P}}{ds})$.
Dunque $\vec{a} = \ddot{s}\frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\right)$, posso ora studiare il termine $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\right)$, sfruttando le proprietà della derivata di una funzione di funzione, $\dot{s}\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$.
Ricaviamo quindi l'accellerazione come

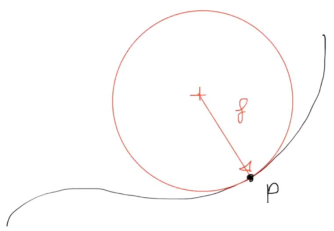
$$\vec{a} = \ddot{s}\frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$$

dove il termine $\frac{d\vec{P}}{ds}$ rappresenta il versore tangente alla traiettoria $\vec{t}$ e $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$ rappresenta il rapporto tra il versore normale alla traiettoria $\vec{n}$ diviso il raggio di curvatura ρ. Ricaviamo quindi che

$$\vec{a} = \ddot{s}\frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Raggio osculatore

Verifichiamo ora come $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$:
Qualsiasi sia la traiettoria descritta nel piano, se noi consideriamo un qualsiasi istante di tempo, notiamo che la traiettoria può essere approssimata con un cerchio, che prende il nome di cerchio osculatore, il cui raggio è detto raggio osculatore.
[immagine dagli appunti del prof]

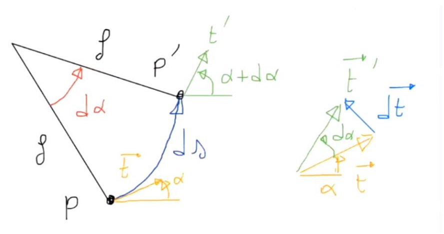


Questo cerchio condivide con la traiettoria il punto stesso, la derivata prima (tangente) e la derivata seconda (curvatura).

La **curvatura** c è l'inverso del raggio osculatore, $c = \frac{1}{\rho}$. Se definiamo la terna destrorsa (con asse z uscente dal piano verso di noi e asce x parallelo alla tangente) avremo che il versore $\vec{n}$ è diretto verso il centro del cerchio osculatore.

Per dimostrare $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, usiamo $\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{P}}{ds}\right) = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta t \to 0 \text{ oppure } \Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{t'} - \vec{t}}{\Delta s}$.

[immagine dagli appunti del prof]



Se consideriamo un generico piccolo spostamento lungo la traiettoria ds, questo tratto di traiettoria coinciderà con una sezione del cerchio osculatorio, di cui possiamo calcolare l'angolo $d\alpha$ (rosso nell'immagine). Consideriamo anche i punti estremi (di partenza e di fine) dello spostamento ds che sono P e P'. Per P e P' consideriamo le tangenti e gli angoli α (giallo e azzurrino) che formano con l'asse delle ascisse. La variazione angolare fra queste due α sarà pari all'angolo $d\alpha$ del cerchio osculatorio. Quindi fra $\vec{t}$ e $\vec{t'}$ ci sarà un angolo pari a $d\alpha$, ed inoltre il vettore differenza $d\vec{t} = \vec{t} - \vec{t'}$ (in azzurro-blu) tenderà a 0 all'accorciarsi della tratto di traiettoria considerata.

Coi calcoli esprimiamo questo concetto dicendo che $d\vec{t} = \vec{t}d\alpha = \vec{t'}d\alpha$ e quindi $|d\vec{t}| = 1d\alpha$, e considerando che $ds = \rho d\alpha$ otteniamo che $\left|\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\frac{1d\alpha}{\rho d\alpha}\right| = \frac{1}{\rho}$. Ma essendo $d\vec{t} \perp \vec{t}$, questo andrà a coincidere col versore normale $\vec{n}$.

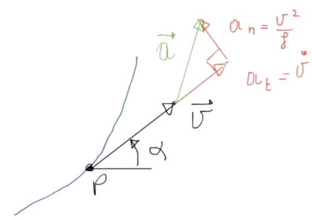
Abbiamo quindi dimostrato che $\vec{a} = \ddot{s}\frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$. La prima componente $\vec{a_t} = \dot{v}\vec{t}$ prende il nome di **accellerazione tangenziale**, la seconda componente $\vec{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$ si chiama invece **accellerazione normale**. Osserviamo che l'accellerazione tangenziale può annullarsi se per esempio siamo in presenza di un moto uniforme, in cui la velocità è costante, al contrario se siamo in presenza di un moto rettilineo, è la velocità normale ad essere nulla.

Come per la velocità, anche per l'**accellerazione** ci sono **modi** differenti per definirla:

- Il primo metodo è quello appena visto: $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$.
- Il secondo metodo sfrutta il concetto di ascissa curvilinea e le coordinate cartesiane in cui $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$: $\vec{a} = \ddot{c}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$.
- Il terzo metodo usa i numeri complessi in cui $\vec{v} = ve^{i\alpha}$: $\vec{a} = \dot{v}e^{i\alpha} + vi\dot{\alpha}e^{i\alpha}$, dove $i = e^{i\pi/2}$ e quindi $\vec{a} = \dot{v}e^{i\alpha} + v\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\pi/2)}$. In questo caso $\vec{a_t} = \dot{v}e^{i\alpha}$ e $\vec{a_n} = v\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\pi/2)}$. Notando che $ds = \rho d\alpha$, otteniamo $v = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\alpha}{dt} = \rho\dot{\alpha}$ e se andiamo a sostituire otteniamo

$$\vec{a} = \dot{v}e^{i\alpha} + \frac{v^2}{\rho}e^{i(\alpha+\pi/2)}$$

[immagine dagli appunti del prof]



LEZIONE 2 12/03/2020
link clicca qui

3 Cinematica di un corpo

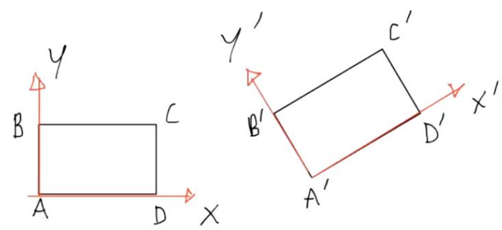
3.1 Definizioni

- **Corpo**: Un corpo è un insieme continuo di infiniti punti che assume dimensioni finite.
- **Posizione del corpo**: è l'insieme di tutti i vettori posizione relativi a ciascun punto appartenente al corpo.
- **Spostamento, velocità, accellerazione**: definiamo spostamento, velocità, accellerazione, come l'insieme di tutti i vettori spostamento, velocità, accellerazione relativi a ciascun punto appartenente al corpo.
- **Moto piano**: in questo corso faremo sempre riferimento a un moto piano, che rappresenta il caso in cui tutti i vettori posizione, velocità e accellerazione di tutti i punti appartenenti al corpo sono paralleli a un piano, detto **piano direttore**.
- **Spostamento infinitesimo**: lo spostamento infinitesimo è una condizione di moto per cui ogni punto che appartiene al corpo subirà uno spostamento di dimensione infinitesima.
- **Atto di moto**: l'atto di moto è l'insieme delle velocità di tutti i punti che appartengono al corpo nell'istante di tempo generico considerato. L'atto di moto rappresenta una "fotografia istantanea" del suo campo di velocità. Possiamo definire un'analogia fra lo spostamento infinitesimo e l'atto di moto: siccome la velocità di un generico punto P è $\vec{v_P} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, l'atto di moto può essere visto come lo spostamento infinitesimo di P fratto l'intervallo di tempo infinitesimo dt in cui esso avviene. Perciò tutte le regole cinematiche che definiremo per l'atto di moto varranno anche per lo spostamento infinitesimo.

Tutte le definizione appena viste valgono per un qualsiasi corpo, ma noi **nel corso vedremo solo corpi rigidi**.
Per un corpo deformabile ci servono ∞^2 gradi di libertà (caso piano) per descrivere ciascuno degli infiniti punti che lo rappresentano.
Nel caso di un corpo rigido saranno sufficienti 3 gradi di libertà per definire la posizione del corpo nel piano.

3.2 Corpo rigido

Un **corpo** si definisce **rigido** se esso può definire solamente **spostamenti rigidi**. Uno **spostamento** si può definire **rigido** se a fronte di esso il corpo **non subisce alcuna variazione nè di forma nè di dimensioni**.
[immagine dagli appunti del prof]



Più analiticamente diciamo che **uno spostamento è rigido se a seguito dello spostamento esiste un nuovo sistema di riferimento per cui la posizione del corpo rigido risulta la stessa di partenza**.
Se per esempio il corpo subisce un rimpicciolimento o una deformazione a seguito dello spostamento, non siamo in presenza di uno spostamento rigido.

Ne conseguono due **proprietà**:

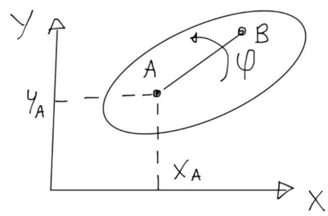
- La distanza fra due punti qualsiasi di un corpo rigido si mantiene immutata.

- L'angolo formato dalle rette passanti fra due coppie di punti appartenenti al corpo rimane immutato.

Il principale vantaggio di studiare corpi rigidi è che dobbiamo usare solo **3 coordinate** (3 gradi di libertà) per descrivere pienamente degli spostamenti.
Per capire quali tre coordinate scegliere si seleziona un punto qualsiasi A all'interno del corpo:

- la prima è l'ascissa del punto A (come per il punto), $x_A(t)$;
- la seconda è l'ordinata del punto A (come per il punto), $y_A(t)$.
- La terza è la **coordinata angolare** ϕ di un segmento qualsiasi che collega il punto A con un altro generico punto B interno al corpo. Ogni punto B mantiene invariata la sua distanza dal punto A a seguito di un qualsiasi spostamento e, studiando come varia l'orientamento di questo segmento AB, sono in grado di ricostruire la posizione di ciascuno dei punti all'interno del corpo rigido. La rotazione ϕ avviene attorno ad un asse z che esce dal piano del corpo rigido. Qualsiasi segmeno all'interno del corpo subirà la stessa variazione angolare (stessa rotazione): la rotazione ϕ è una proprietà dell'intero corpo rigido.

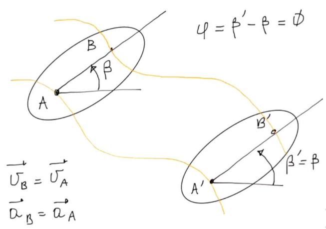
[immagine dagli appunti del prof]



3.3 Moto in grande

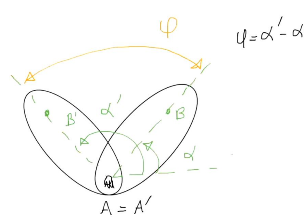
3.3.1 Traslazione

E' un moto nel quale un corpo non varia il proprio orientamento, ovvero in cui la coordinata angolare rimane costante. Tutti i punti del corpo subiranno lo stesso esatto spostamento, dunque $\vec{v_A} = \vec{v_B} = \dots$, $\vec{a_A} = \vec{a_B} = \dots$ e le traiettorie di ciascun punto saranno le stesse.
[immagine dagli appunti del prof]



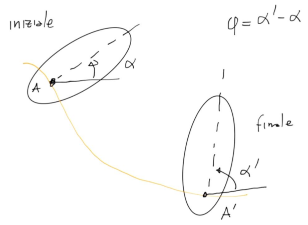
3.3.2 Rotazione

E' un moto nel quale un punto (anche esterno al corpo), detto centro di rotazione, mantiene la sua posizione fissa durante lo spostamento. Tutti gli altri punti invece subiranno una rotazione ϕ. La traiettoria di ogni punto seguirà un moto circolare. Possiamo definire un vettore detto $\vec{\phi} = \phi\vec{k}$ ovvero con direzione uscente dal piano.
[immagine dagli appunti del prof]



3.3.3 Rototraslazione

Il corpo rigido andrà a modificare la propria posizione senza però che sia possibile individuare un punto che rimane fermo. Per studiare il moto rototraslatorio si può lavorare considerando due spostamenti successivi, prima una traslazione e poi una rotazione.
[immagine dagli appunti del prof]

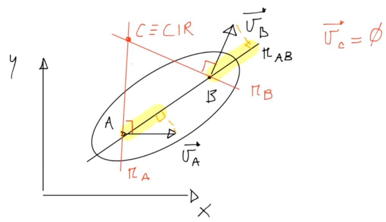


3.4 Moto in piccolo (Atto di moto)

Per **atto di moto** si intende un moto in cui gli spostamenti e le rotazioni sono di dimensione infinitesima. **L'atto di moto rappresenta una "fotografia istantanea" del campo di velocità del corpo**.

Andando ad osservare movimenti in piccolo quindi ci ritroviamo difronte a moti **o rotatori o traslatori**, non rototraslatori: se la velocità di tutti i punti è uguale in modulo direzione e verso, l'atto di moto è di tipo traslatorio; viceversa, se esiste un punto, detto **centro di istantanea rotazione**, in cui la velocità è nulla, siamo in presenza di un moto di tipo rotatorio.

es. Esempio di rotazione:
[immagine dagli appunti del prof]

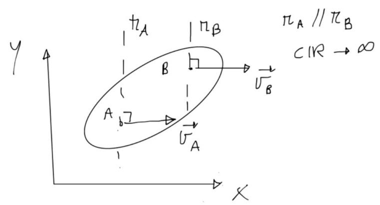


Presi i punti A e B interni al corpo e le rispettive velocità $\vec{v_A}$ e $\vec{v_B}$, essendo il corpo rigido, le proiezioni delle velocità sulla retta r_{AB} devono essere di medesima lunghezza (nell'immagine: evidenziate in giallo).
Consideriamo ora le rette r_A passante per A e perpendicolare a $\vec{v_A}$ e la retta r_B passante per B e perpendicolare a $\vec{v_B}$; tutti i punti che si trovano sulla retta r_A devono avere velocità perpendicolare alla retta stessa (analogo per la retta r_B), perchè altrimenti il corpo subirebbe una deformazione, quindi tutti i punti su r_A (o r_B) devono avere velocità perpendicolare a $\vec{v_A}$ (o $\vec{v_B}$). Il punto C di intersezione di queste due rette dovrebbe avere velocità perpendicolare sia a $\vec{v_A}$ sia a $\vec{v_B}$, ma questo è possibile solo se $\vec{v_C} = 0$, dunque il punto C è il centro di istantanea rotazione del corpo rigido e siamo dunque in presenza di una rotazione.

---

oss. Il centro di istantanea rotazione differisce dal centro di rotazione (dei moti in grande), il primo ha velocità nulla solo nell'istante che stiamo considerando, mentre il secondo è fermo per tutto l'arco della rotazione. In poche parole il centro di istantanea rotazione ha velocità nulla, ma la sua accellarazione può non esserlo.

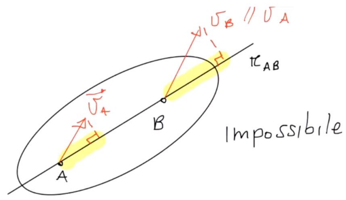
es. Esempio di traslazione:
[immagine dagli appunti del prof]



In questo caso le rette r_A e r_B sono parallele e non si incontrano mai, il centro di istantanea rotazione non è definibile e dunque il moto e traslatorio.

---

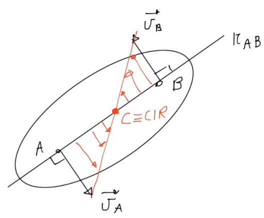
es. Esempio di moto di un corpo non rigido:
[immagine dagli appunti del prof]



Se i due punti A e B hanno $\vec{v_A}$ e $\vec{v_B}$ di modulo diverso, le proiezioni (in giallo) di queste due velocità sulla retta r_{AB} non sono identiche e dunque il corpo si sta deformando. In tutti i casi in cui le proiezioni delle velocità sulla retta sono diverse sicuramente rappresentano deformazioni del corpo, e quindi moti non rigidi.

---

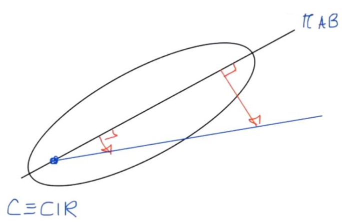
es. Un altro esempio di rotazione:
[immagine dagli appunti del prof]



Se i due punti A e B hanno $\vec{v_A}$ e $\vec{v_B}$ di direzione opposta, la congiungete fra le due velocità (disegnata in rosso) ci mostra che la velocità di tutti i punti lungo il segmeno AB deve diminuire man mano che ci avviciniamo al punto C, che quindi ha velocità nulla e rappresenta il centro di istantanea rotazione.

---

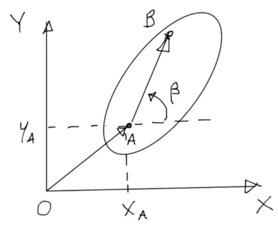
es. Un altro esempio di rotazione:
[immagine dagli appunti del prof]



Se i due punti A e B hanno $\vec{v_A}$ e $\vec{v_B}$ direzione e verso uguali (sono parallele) ma modulo diverso, ancora una volta, la congiungete fra le due velocità (disegnata in rosso) ci mostra che la velocità di tutti i punti lungo il segmeno AB deve diminuire man mano che ci avviciniamo al punto C, che quindi ha velocità nulla e rappresenta il centro di istantanea rotazione.

3.5 Cinematica del corpo rigido

[immagine dagli appunti del prof]



Sia in un piano un corpo rigido, siano due punti qualsiasi A e B appartenenti a questo e sia β l'angolo fra il segmento AB e l'asse orizzontale delle ascisse.

Ci servono **tre coordinate idipendenti** (tre gradi di libertà) per definire l'evoluzione temporale della traslazione di un punto generico del punto $A = (x_A(t), y_A(t), \beta(t))$. Se queste tre coordiante indipendenti sono note, allora si può studiare l'evoluzione temporale anche dell'intero corpo rigido.

Supposte note queste tre coordiante $x_A(t), y_A(t), \beta(t)$, vogliamo definire velocità, posizione e accellerazione del corpo.

Da notare è che, se invece di B prendessimo un altro generico punto P appartenente al corpo, l'angolo α formato fra il segmento AP e l'asse orizzontale delle ascisse differisce dall'angolo β a meno di una costante γ a fronte di qualsiasi spostamento.

3.5.1 Posizone

Per definire la posizione di un punto generico di un corpo, per esempio il punto B, posso scrivere una realazione vettoriale che lega tre vettori:

- il vettore AO;
- il vettore AB;
- il vettore OB.

Questi tre vettori sono legati dall'equazione: $(B - O) = (A - O) + (B - A)$. Il vettore $A - O$ è dato da $x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$; il vettore $B - A$ è dato dal vettore AB (dal suo modulo) moltiplicato per $e^{i\beta}$, quindi $AB \cdot e^{i\beta}$. Essendo tutti questi termini noti posso definire la generica posizione del punto B.

3.5.2 Velocità

La velocità del punto B è $\vec{v_B} = \frac{d}{dt}(B - O) = \frac{d}{dt}(A - O) + \frac{d}{dt}(B - A)$. Dunque andiamo ad eseguire queste derivate: $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \frac{d}{dt}(AB \cdot e^{i\beta})$, dove il primo termine è la semplice velocità del punto A, il secondo membro è la derivata di ciò che abbiamo detto anche al punto precedente. Dunque $\vec{v_B} = \vec{v_A} + i\dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i\beta} = \vec{v_A} + \dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta + pi/2)}$. Da notare è che $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$ e che, siccome avevamo visto che per un qualunque altro punto (P) si ha un angolo (α) che differisce da β per una costante (γ), quindi, $\dot{\beta} = \dot{\alpha} = \cdots = \omega$, che rappresenta la **velocità angolare** del corpo rigido. Possiamo anche definire un vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\beta}\vec{k}$.

A partire dal vettore $\vec{\omega}$ possiamo definire il senso di rotazione del corpo rigido con la regola della mano destra (ponendo il pollice nella direzione del vettore, otteniamo la rotazione nel senso delle dita che si avvolgono).

Tutti i punti del corpo ruotano con la stessa velocità angolare.
La velocità del punto B, $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta + \pi/2)}$, può essere vista come somma di due componenti:

- $\vec{v_A}$: la velocità con cui trasla il punto A.
- $\omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta + \pi/2)}$: velocità di un punto che si muove di moto rotatorio, in particolare è la velocità con cui si muove il punto B di moto circolare attorno al punto A. Questa componente è anche detta $\vec{v}_{BA}$, ovvero la velocità di B rispetto al punto A.

Riassumendo:
teor. Teorema di Rivals per le velocità

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \omega \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)} = \vec{v_A} + \vec{v_{BA}}$$

oppure in forma abbreviata

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

dove $\wedge$ rappresenta un prodotto vettoriale.

3.5.3 Accellerazione

Partendo dalla formula $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \dot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)}$, l'accellerazione si ottiene derivando queste due componenti rispetto al tempo.
Quindi

$$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \ddot{\beta} \cdot AB \cdot e^{i(\beta+\pi/2)} - AB \cdot \dot{\beta}^2 e^{i\beta}$$

Il **primo termine è l'accellerazione del punto** A. Il **secondo e terzo termine** rappresentano l'**accellerazione tangenziale** $\vec{a_{BA}}^{(t)}$ e **normale** $\vec{a_{BA}}^{(n)}$ **del punto** B mentre si muove di moto circolare **attorno al punto** A, che sommati rappresentano $\vec{a_{BA}}$. In questo moto ciroclare il B ha velocità angolare $\omega = \dot{\beta}$ e accellerazione angolare $\dot{\omega} = \ddot{\beta}$. Possiamo anche qui andare a definire il vettore $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\beta}\vec{k}$.

Partendo invece da $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \wedge (B-A)$ e derivando otteniamo $\vec{a_B} = \vec{a_A} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(B-A)$, dove $\frac{d}{dt}(B-A)$ è esattamente la quantità scritta prima. Possiamo quindi scrivere l'accelerazione come

$$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

dove il secondo e terzo termine rappresentano l'accellerazione tangenziale $\vec{a_{BA}}^{(t)}$ e normale $\vec{a_{BA}}^{(n)}$ del punto B mentre si muove di moto circolare attorno al punto A.

teor. Teorema di Rivals per le accellerazioni

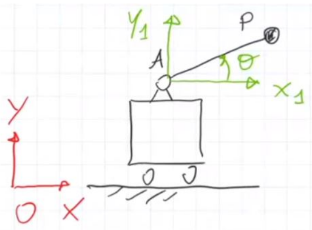
$$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)]$$

LEZIONE 3 17/03/2020
link clicca qui

4 Analisi cinematica mediante osservatori in moto relativo

Fino ad ora abbiamo considerato sistemi di riferimento fissi, in questa lezione analiziamo sistemi di riferimento mobili rispetto a quello assoluto.

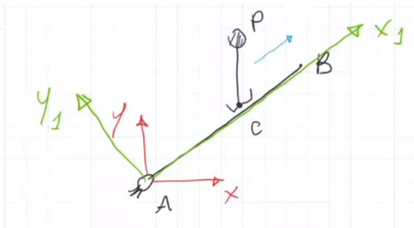
es.
[immagine dagli appunti del prof]



L'immagine mostra un carrello su cui è incernierata una barra AP. Se andiamo a considerare un unico sistema di riferimento assoluto (in rosso), il moto del punto P è un moto rototraslatorio, ma, se noi andassimo a inserire un sistema di riverimento mobile (in verde) che trasla insieme al punto A, il moto del punto P diventa un moto di rotazione. Abbiamo dunque scomposto il moto rototraslatorio del punto P nel moto traslatorio del nuovo sistema di riferimento mobile e nel moto rotatorio del punto P in questo nuovo sistema di riferimento.

---

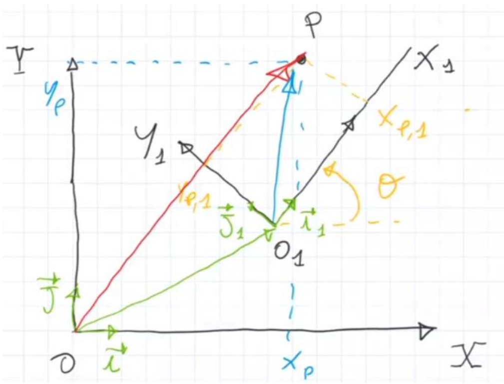
es.
[immagine dagli appunti del prof]



L'immagine mostra un asta AB incernierata al pavimento che può ruotare, sull'asta può, inoltre, scivolare una seconda asta CP. Anche in questo caso il moto del punto P rispetto a un unico sistema di riferimento assoluto (in rosso) sarebbe un moto rototraslatorio. Se però introduciamo un sistema di riferimento mobile (in verde) che abbia assi Y_1 e X_1 che ruotano insieme all'asse AB, il moto del punto P diventa un moto traslatorio.

4.1 Posizione

[immagine dagli appunti del prof]



Vogliamo descrivere il moto di un generico punto P (velocità, posizione, accellerazione) andando a introdurre un nuovo sistema di riferimento mobile (O_1, X_1, Y_1) rispetto a un sistema di riferimento fisso (O, X, Y).
Il sistema di riferimento mobile introdotto è in moto rototraslatorio noto rispetto al sistema di riferimento assoluto.
Indichiamo con θ la rotazione del sistema di riferimento mobile rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il punto generico P ha coordinate x_P, y_P rispetto al sistema assoluto, e $x_{P,1}, y_{P,1}$ rispetto al sistema mobile.

La posizione può essere vista come somma vettoriale (come abbiamo visto per i corpi rigidi):

$$(P - O) = (O_1 - O) + (P - O_1)$$

dove $(P - O) = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}$ e $(O_1 - O) = x_{O_1}\vec{i} + y_{O_1}\vec{j}$ e $(P - O_1) = x_{P,1}\vec{i_1} + y_{P,1}\vec{j_1}$. Se il moto del sistema di riferimento mobile è noto, conoscendo la posizione di P rispetto al sistema assoluto, posso ricavare la posizione rispetto al sistema mobile, viceversa, conoscendo la posizione di P rispetto al sistema mobile, posso ricavare la posizione rispetto al sistema assoluto.

$$(P - O) = x_{O_1}\vec{i} + y_{O_1}\vec{j} + x_{P,1}\vec{i_1} + y_{P,1}\vec{j_1}$$

4.2 Velocità

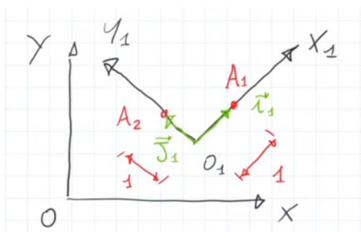
La velocità è definita come $\vec{v_P} = \frac{d}{dt}(P - O) = \frac{d}{dt}(O_1 - O) + \frac{d}{dt}(P - O_1)$, sviluppando queste derivate, otteniamo:

$$\vec{v_P} = \dot{x}_{O_1}\vec{i} + \dot{y}_{O_1}\vec{j} + \dot{x}_{P,1}\vec{i_1} + \dot{y}_{P,1}\vec{j_1} + x_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1} + y_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j_1}$$

In teoria, i primi due termini, se $\vec{i}$ e $\vec{j}$ variassero il loro orientamento rispetto al tempo, dovrebbero essere derivati pure loro, ma siccome il sistema di riferimento assoluto è fisso, la loro derivata è nulla. Per i secondi due termini invece i versori variano il proprio orientamento nel tempo perchè fanno riferimento a un sistema mobile, dunque non posso trascurare la loro derivata e per questo ci sono gli ultimi due addendi.

1- La prima coppia di termini $\dot{y}_{O_1}\vec{j} + \dot{x}_{P,1}\vec{i_1}$ rappresenta la velocità $\vec{v}_{O_1}$ del punto O_1 rispetto al sistema di riferimento assoluto, anche detta velocità assoluta di O_1.
2- La seconda coppia di termini $\dot{y}_{P,1}\vec{j_1} + x_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1}$ rappresenta la velocità $\vec{v}_{rel,P}$ relativa di P, cioè la velocità di P rispetto al sistema di riferimento mobile.
3- La terza e ultima coppia $x_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1} + y_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j_1}$ è più complicata da analizzare e dobbiamo prima capire cosa sono le derivate dei versori $\vec{i_1}$ e $\vec{j_1}$.

[immagine dagli appunti del prof]



Consideriamo i due sistemi di riferimento, mobile e assoluto, e poniamo due punti A_1 e A_2 sugli assi del sistema di riferimento mobile a distanza unitaria dall'origine O_1. Questi due punti rappresentano i nostri versori $\vec{j_1}$ e $\vec{i_1}$.

$$(A_1 - O) = (O_1 - O) + (A_1 - O_1) \text{ , dove il termine } (A_1 - O_1) \text{ è il versore } \vec{i_1}$$

$$(A_2 - O) = (O_1 - O) + (A_2 - O_1) \text{ , dove il termine } (A_2 - O_1) \text{ è il versore } \vec{j_1}$$

Andiamo a derivare queste due equazioni per determinare la velocità dei punti A_1 e A_2. Facciamo i calcoli solo per A_1, per A_2 i procedimenti sono del tutto analoghi:

$$\frac{d}{dt}(A_1 - O) = \frac{d}{dt}(O_1 - O) + \frac{d}{dt}(A_1 - O_1)$$

Il termine $\frac{d}{dt}(A_1 - O)$ rappresenta la velocità assoluta $\vec{v}_{A_1}$ di A_1, il secondo termine $\frac{d}{dt}(O_1 - O)$ è la velocità assoluta $\vec{v}_{O_1}$ di O_1, l'ultimo termine $\frac{d}{dt}(A_1 - O_1)$ è la derivata $\frac{d}{dt}\vec{i_1}$ rispetto al tempo del versore $\vec{i_1}$. Abbiamo quindi determinato la velocità assoluta del punto A_1.

Potevamo ottenere il medesimo risultato usando il terorema di Rivals per un corpo rigido (che in questo caso è rappresentato dal sistema di riferimento mobile), infatti la velocità di un punto qualsiasi di un corpo rigido è data dalla somma di due componenti: una componente di traslazione di un punto generico del corpo (per esempio l'orgine O_1) e una componente di rotazione del corpo attorno al punto O_1. Se andiamo a definire il vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k_1}$ del sistema mobile, allora

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (A_1 - O_1) = \text{ [dove } (A_1 - O_1) = \vec{i_1}] \; = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{i_1}$$

Riprendendo entrambi i metodi visti e uguagliandoli, otteniamo:

$$\vec{v}_{A_1} = \cancel{\vec{v}_{O_1}} + \frac{d}{dt}\vec{i_1} = \cancel{\vec{v}_{O_1}} + \vec{\omega} \wedge \vec{i_1} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\vec{i_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{i_1}$$

Procedendo in maniera analoga anche per il punto A_2, otteniamo le **formule di Poisson**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{i_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{i_1} \\ \\ \frac{d}{dt}\vec{j_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{j_1} \end{cases}$$

Possiammo ora andare a sostituirle all'interno della formula della velocità scritta in precedenza ($\vec{v_P} = \dot{x}_{O_1}\vec{i} + \dot{y}_{O_1}\vec{j} + \dot{x}_{P,1}\vec{i_1} + \dot{y}_{P,1}\vec{j_1} + x_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1} + y_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j_1}$):

$$\vec{v_P} = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + x_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{i_1} + y_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{j_1}$$

dove i termini $x_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{i_1} + y_{P,1}\vec{\omega} \wedge \vec{j_1}$ possono essere riscritti come $\vec{\omega}(x_{P,1}\vec{i_1} + y_{P,1}\vec{j_1})$ (la parentesi rappresenta il vettore $(P - O_1)$.

teor. Teorema dei moti relativi per le velocità

$$\vec{v_P} = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) = \vec{v}_{tr,P} + \vec{v}_{rel,P}$$

dove la somma di $\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$ prende il nome di **velocità di trascinamento** $\vec{v}_{tr,P}$ del punto P, che è la velocità che il punto P avrebbe se fosse rigidamente collegato al sistema di riferimento mobile.
Questo teorema esprime la relazione fra la velocità assoluta di un punto P e la **velocità relativa** a un sistema di riferimento in moto relativo rispetto a quello assoluto. La velocità assoluta è quindi la somma di due componenti, la velocità di trascinamento e la velocità relativa rispetto al sistema mobile. Quindi una volta noto il moto di trascinamento del sistema mobile è possibile passare dalla velocità assoluta a quella relativa e viceversa.

4.3 Accellerazione

Anche per l'accellerazione vogliamo cercare una relazione fra l'accellerazione del punto P rispetto al sistema di riferimento assoluto e l'accellerazione del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile.

Deriviamo dunque rispetto al tempo l'equazione $\vec{v_P} = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$:

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{v_P} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1)) + \frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P}$$

Deriviamo questi ultimi tre addendi singolarmente:

- Il primo termine $\frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1}$ è l'accellerazione $\vec{a}_{O_1}$ assoluta del punto O_1.
- Il secondo termine, cioè la derivata rispetto al tempo $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1))$, si ottiene derivando prima il vettore omega rispetto al tempo e moltiplicandola per il vettore $P - O_1$ e successivamente moltiplicando omega per la derivata rispetto al tempo del vettore $(P - O_1)$. Quindi otteniamo $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge (P - O_1)) = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega}\frac{d}{dt}(P - O_1)$, dove $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\vec{k}$. Possiamo quindi riscrivere questo secondo termine come $\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} + \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge [\omega \wedge (\vec{P} - O_1)]$.

- Sapendo che $\vec{v}_{rel,P} = \dot{x}_{P,1}\vec{i_1} + \dot{y}_{P,1}\vec{j_1}$, possiamo derivare il terzo termine, derivando sia $\dot{x}_{P,1}$ e $\dot{y}_{P,1}$, sia i versori $\vec{i_1}$ e $\vec{j_1}$ perchè sono versori di un sistema di riferimento in movimento.
Quindi otteniamo $\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P} = \ddot{x}_{P,1}\vec{i_1} + \ddot{y}_{P,1}\vec{j_1} + \dot{x}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1} + \dot{y}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j_1}$, dove i primi due addendi sono l'accellerazione $\vec{a}_{rel,P}$ relativa del punto P e gli ultimi due addendi possono essere riscritti grazie alle formule di Poisson nel seguente modo: $\dot{x}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{i_1}+\dot{y}_{P,1}\frac{d}{dt}\vec{j_1} = \dot{x}_{P,1}\vec{\omega}\wedge\vec{i_1}+\dot{y}_{P,1}\vec{\omega}\wedge\vec{j_1} = \vec{\omega} \wedge (\dot{x}_{P,1}\vec{i_1} + \dot{y}_{P,1}\vec{j_1})$, inoltre il termine fra parentesi è la velocità $\vec{v}_{rel,P}$ relativa del punto P.

teor. Teorema dei moti relativi per le accellerazioni o teorema di Coriolis:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] + 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} + \vec{a}_{rel,P}$$

Nei primi tre termini ($\vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)]$) si riconosce il teorema di Rivals per le accellerazioni relative a un punto P che si muove solidalmente con la terna mobile. $\vec{a}_{O_1}$ è l'accellerazione con cui la terna si sposta; $\vec{a}_{tg,P} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1)$ e $\vec{a}_{n,P} = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)]$ sono l'accellerazione legata al moto rotatorio di P attorno ad O_1, in particolare il primo è la componente tangenziale, e il secondo la componente normale. I tre termini assieme sono **l'accellerazione di trascinamento** $\vec{a}_{tr,P}$ del punto P, cioè l'accellerazione che avrebbe il punto P se fosse rigidamente legato al sistema di riferimento mobile.
A questo termine di accellerazione di trascinamento vengono aggiunte un'**accellerazione relativa** $\vec{a}_{rel,P}$ (come accade anche per la velocità) e il termine $\vec{a}_{co} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$ detto **accellerazione complementare o di Coriolis** (di cui non c'è il rispettivo per la velocità).

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{tr,P} + \vec{a}_{co} + \vec{a}_{rel,P}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{tr,P} = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] \\ \vec{a}_{co} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P} \\ \vec{a}_{rel,P} = \vec{a}_{rel,P} \end{cases}$$

Notiamo che l'accellerazione di Coriolis $\vec{a}_{co}$ si annulla per tre casi:

- $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_{rel,P}$ (impossibile nel piano);
- $\vec{\omega} = 0$ (il sistema mobile si muove di moto traslatorio);
- $\vec{v}_{rel,P} = 0$, in questo caso il teorema di Coriolis coincide con il teorema di Rivals.

5 Sistemi meccanici

In prima approssimazione possiamo vedere una macchina come un insieme di corpi rigidi legati fra loro attraverso opportuni vincoli. I vincoli sono condizioni essenziali per lo studio di una macchina e devono sempre essere rispettati.
Esistono vincoli **interni**, cioè legati ai corpi rigidi del sistema, o **esterni**, cioè legati alla struttura che contiene questi corpi rigidi, chiamata **telaio**.

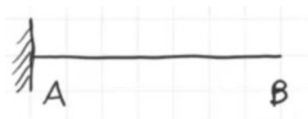
5.1 Vincoli elementari

In questo corso andremo ad analizzare solo i vincoli elementari, che sono dei vincoli che realizzano la diretta soppresione di uno o più gradi di libertà di un corpo, cioè vanno ad inibire una delle possibilità di moto del corpo rigido. Ricordiamo che il corpo rigido nel piano ha tre gradi di libertà, le traslazioni degli assi X e Y e la rotazione.
Un vincolo che impedisce n gradi di libertà, viene espresso algebricamente come n equazioni vincolanti.

5.1.1 Vincoli tripli

E' un vincolo che sopprime tutte le possibilità di moto di un corpo rigido.

- **Incastro**: [immagine dagli appunti del prof]

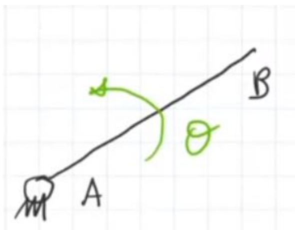


Vediamo una trave AB incastrata nel punto A che non ha più possibilità di movimento.

5.1.2 Vincoli doppi

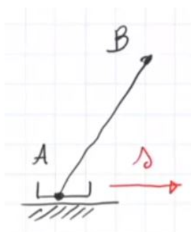
Sono vincoli che sopprimo due possibilità di moto di un corpo rigido, che avrà quindi ancora una possibilità di moto disponibile.

- **Cerniera**: [immagine dagli appunti del prof]



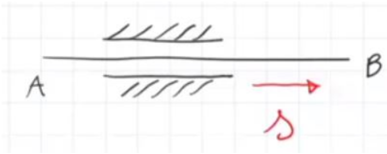
Vediamo una trave AB con una cerniera nel punto A. La cerniera impedisce ogni traslazione possibile, tuttavia la trave può ancora ruotare.

- **Pattino**: [immagine dagli appunti del prof]



Vediamo una trave AB con un pattino nel punto A. Il pattino impedisce il distacco dalla linea piana e impedisce anche ogni rotazione, tuttavia la trave può ancora scivolare sulla guida che si sta considerando.

- **Manicotto**: [immagine dagli appunti del prof]

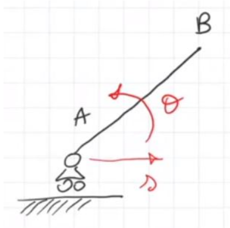


Vediamo una trave AB a cui è imposto un vincolo manicotto. Il manicotto impedisce rotazioni e movimenti perpendicolari, tuttavia la trave può ancora scivolare in direzione parallela.

5.1.3 Vincoli singoli

Sono vincoli che sopprimo una sola possibilità di moto di un corpo rigido.

- **Carrello più cerniera o carrello**: [immagine dagli appunti del prof]

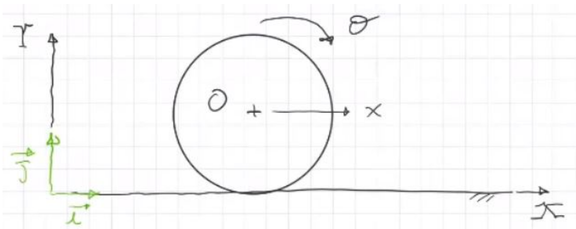


Vediamo una trave AB con un carrello più cerniera nel punto A. Il carrello più cerniera impedisce unicamente movimenti perpendicolari alla guida, ma consente spostamenti paralleli alla guida o rotazioni.

LEZIONE 4 24/03/2020
link clicca qui

5.2 Vincoli di contatto

Proviamo ad analizzare il moto di un disco che rotola su una guida piana:
[immagine dagli appunti del prof]



Notiamo subito che il centro O del disco rigido si manterrà sempre a una distanza costante dalla guida piana, perciò $y_O = R = costante$: $v_{yO} = 0$.

Nell'analisi di sistemi con vincoli di contatto non è obbligatorio che che la velocità del punto di contatto si annulli: può essere presente una componente $v_{xC} \neq 0$, che prende il nome di **velocità di strisciamento**.

Da questo esempio notiamo che il vincolo di contatto introduce una sola equazione di vincolo che fa in modo che il disco abbia solo due gradi di libertà, θ e x.

Il vincolo da imporre è quindi solo quello sul centro del disco:

$$\begin{cases} v_{yO} = 0 \end{cases}$$

5.3 Vincolo di puro rotolamento

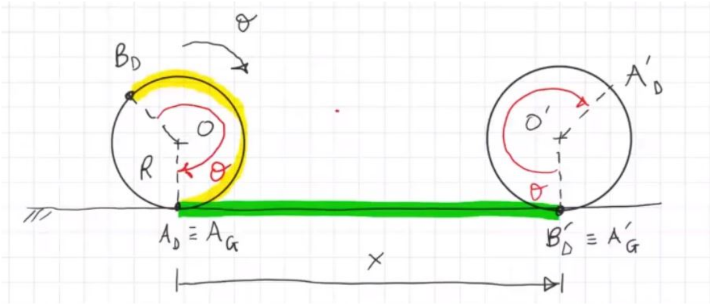
Nel caso di puro rotolamento non si ammette velocità di strisciamento, per cui i vincoli da imporre sono due:

$$\begin{cases} v_{yO} = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_{yC} = 0 \\ v_{xC} = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il punto di contatto C rappresenta il punto di istantanea rotazione (CIR).

Nel vincolo di puro rotolamento abbiamo quindi due equazioni, di conseguenza si ha un solo grado di libertà, che può essere o x o θ.

Vediamo ora il legame che c'è fra la coordinata x e la coordinata θ:
[immagine dagli appunti del prof]



Notiamo subito che tutti i punti dell'arco $B_D A_D$ entreranno in contatto con la guida piana.
Notiamo che il punto di contatto lungo la guida piana si sposta di una quantità $A_G A'_G$, che è la stessa quantità di OO', e inoltre deve essere la stessa quantità dell'arco $B_D A_D$:

$$x = A_G A'_G = OO' = A_D B_D = \theta R$$

Tenendo conto del risultato appena ottenuto e del vincolo sul centro del disco possiamo ottenere la legge oraria del centro del disco:

$$\begin{cases} x_O = \bar{X}_O + R\theta \text{ (con } \bar{X}_O \text{ punto iniziale)} \\ y_O = R \end{cases}$$

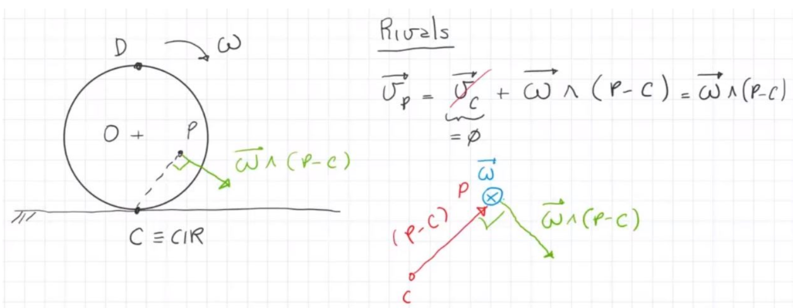
Derivando possiamo trovare la velocità:

$$\begin{cases} v_{xO} = R\dot{\theta} = \dot{x} \\ v_{yO} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \vec{v}_O = \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{i}$$

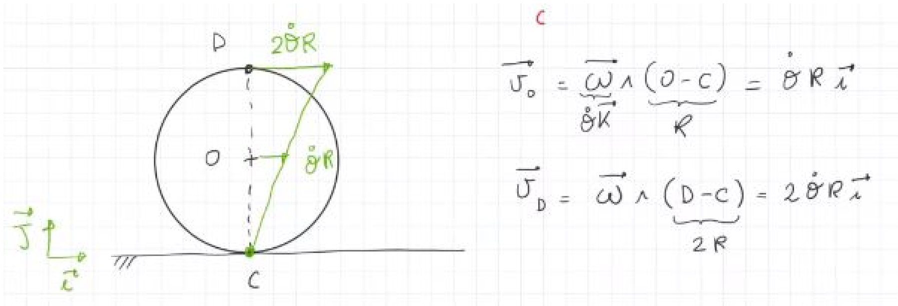
Derivando ancora troivamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_{xO} = R\ddot{\theta} = \ddot{x} \\ a_{yO} = o \end{cases} \quad \rightarrow \vec{a}_O = R\ddot{\theta}\vec{i}$$

La velocità angolare sarà invece calcolabile come $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$, che sarà negativa perchè il disco ruota in senso orario (regola della mano destra). Sfruttando Rivals possiamo ricavare la velocità di un generico punto P interno al disco:
[immagine dagli appunti del prof]



Allo stesso modo (con Rivals) possiamo calcolare la velocità del centro del disco o del punto diametralmente opposto al punto di contatto:
[immagine dagli appunti del prof]



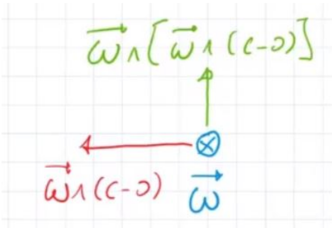
Sappiamo che il punto di contatto è il centro di istantanea rotazione, quindi ha velocità nulla, ma accelazione diversa da zero, andiamo a calcolare l'accellarazione. Sapendo che l'accellerazione del centro $\vec{a}_O = \ddot{\theta}R\vec{i}$, grazie a Rivals otteniamo che

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - O)] = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - O)]$$

siccome $\vec{a}_O = \ddot{\theta}R\vec{i}$ e $\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - O) = -\ddot{\theta}R\vec{i}$, rimane quindi la sola accellerazione normale che è uguale a:

$$\vec{a}_C = \dot{\theta}^2 R\vec{j}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Da notare che tutti i calcoli fatti si potevano ritrovare analizzando il sistema con un sistema di coordinate in modo relativo posto sul centro del disco.

6 Cinematica dei sistemi meccanici

6.1 Classificazione dei sistemi meccanici

I sistemi meccanici possono essere classificati in due macro categorie:

- **Meccanismi**: Si definisce meccanismo un sistema meccanico in cui vi è almeno una possibilità di moto residua una volta imposti vincoli. In poche parole il numero di gradi di libertà deve essere maggiore o uguale a 1.
- **Struttura**: Il sistema non ha nessun grado di libertà, le uniche possibilità di movimento sono legate alle deformabilità dei corpi.

All'interno di questo corso vedremo solo meccanismi.

I mecanismi a loro volta si suddividono in due sottocategorie:

- **Catene cinemaitca aperte**: Ciascun corpo che costituisce il sistema è collegato esclusivamente al corpo che lo precede o al corpo che lo segue dalla catena (telaio incluso).
- **Catene cinemetiche chiuse**: Se non è aperta.

La differenza fra questi due sistemi è che nel caso di catene aperte, per studiare il moto di un corpo è sufficiente studiare il moto relativo di un corpo rispetto a quello che lo precede, viceversa in una catena chiusa il moto del meccanismo si userà un'**equazione** detta **di chiusura**.

L'**equazione di chiusura** esprime utilizzando il formalismo dei numeri complessi il poligono chiuso che in ogni istante del moto è descritto dalla catena cinematica chiusa.

6.1.1 Regola di Grublen

La **Regola di Grublen** si usa per calcolare quanti gradi di libertà abbia un sistema meccanico **piano** con **vincoli elementari** che ciascuno colleghi **al più due corpi** (eccezione fatta per i telai).

Il numero n di gradi di libertà è dato dalla regola:

$$n = 3 \cdot n_c - n_v = 3 \cdot n_c - (1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3)$$

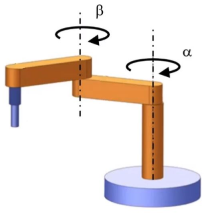
con n_c il numero di corpi rigidi; n_v il numero di vincoli, n_1 il numero di vincoli singoli, n_2 il numero di vincoli doppi e n_3 il numero di vincoli tripli.

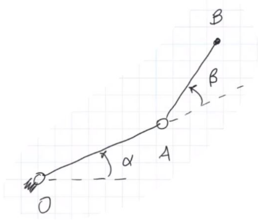
Ovviamente bisogna sempre tenere conto che il numero di gradi di libertà è sempre maggiore o uguale a 0.

Se utilizzando la regola di Grublen il numero di gradi di libertà è esattamente 0, allora siamo in presenza di una struttura **isostatica**, se il numero di gradi di libertà risulta essere negativo, allora siamo in presenza di una struttura **iperstatica**.

6.2 Cinematica del manipolatore SCARA

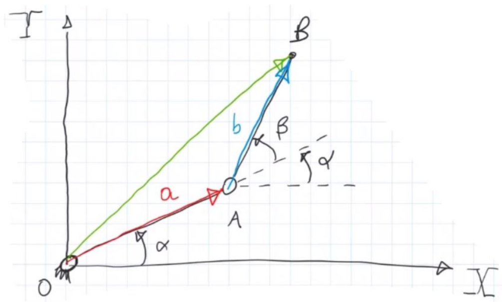
[immagini dagli appunti del prof]





Il manipolatore **SCARA** ha due gradi di libertà che sono α e β ed è una **catena cinematica aperta**. Il punto B prende il nome di **end-effector** ed è il punto di interesse. Per studiarlo bisogna conoscere in ogni istante l'evoluzione di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ nel tempo e le loro derivate.

Analiziamo il sistema SCARA col formalismo dei numeri complessi:
[immagine dagli appunti del prof]



Per studiare la posizione del punto B possiamo sommare le posizioni delle due aste OA e AB:

$$(B-O) = (A-O) + (B-A) = ae^{i\alpha} + be^{i(\alpha+\beta)}$$

Passiamo ora in forma parametrica:

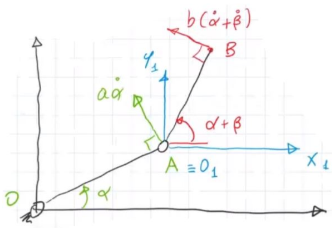
$$\begin{cases} x_B = acos(\alpha) + bcos(\alpha+\beta) \\ y_B = asin(\alpha) + bsin(\alpha+\beta) \end{cases}$$

Derivando otteniamo la velocità:

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dt}(A-O) + \frac{d}{dt}(B-A) = ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib(\dot{\beta}+\dot{\alpha})e^{i(\alpha+\beta)} = a\dot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} + b(\dot{\beta}+\dot{\alpha})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -a\dot{\alpha}sin(\alpha) - b(\dot{\alpha}+\dot{\beta})sin(\alpha+\beta) \\ \dot{y}_B = a\dot{\alpha}cos(\alpha) + b(\dot{\alpha}+\dot{\beta})cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

[immagine dagli appunti del prof]



Deriviamo ancora per l'accellerazione:

$$\vec{a}_B = a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})} - b(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2e^{i(\alpha+\beta)}$$

da cui possiamo ricavare la forma parametrica facendo le proiezioni (...).

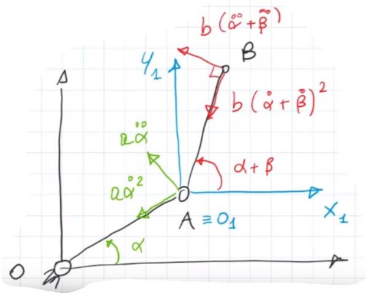
Andiamo ad analizzare i termini che compongono l'accellerazione:

- $\vec{a}_{tr,B} = a\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha}$ sono rispettivamente la componente tangenziale e quella normale dell'accellerazione di trascinamento di B. (In verde nell'immagine).

- $\vec{a}_{rel,B} = b(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})e^{i(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})} - b(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 e^{i(\alpha+\beta)}$ sono rispettivamente la componente tangenziale e la componente normale dell'accellerazione relatica rispetto al sistema di riferimento con centro in A. (In rosso nell'immaigne).

- Notiamo che dal teorema dei moti relativi ($\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{co}$), manca il termine dell'accellerazione di Coriolis, che però siccome abbiamo scelto una terna traslante la velocità angolare della terna è nulla e quindi il termine di Coriolis si annulla.

[immagine dagli appunti del prof]



Parte II
ESERCITAZIONI

Esercitazione 1 19/03/2020
link Clicca qui (solo audio)

7 Esercitazione I

APPUNTI DEL PROF (Anno corrente): `../esercitazione1/pdf/ese_1_notes.pdf`. [consigliato! Ho preso note su questo pdf, in caso di dubbi confrontare le esercitazioni degli anni scorsi che sono più ordinate]

ESERCITAZIONE -1 (Anno scorso): `../esercitazione1/pdf/01-Richiamiecinematicapunto.pdf`.

ESERCITAZIONE -2 (Anno scorso): `../esercitazione1/pdf/01-Eseaggiuntivocinematica.pdf`.

7.1 Vettori

Il generico vettore $\vec{P}$ è definito come $\vec{P} = (P-O) = x_p\vec{i}+y_P\vec{j}+z_P\vec{k}$ con $\vec{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

Un vettore è definito da

- modulo $|\vec{P}| = P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$;
- direzione;
- verso;
- punto di applicazione.

7.1.1 Operazioni fra vettori

- **Prodotto scalare**: $c = \vec{a}\ x\ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\alpha) = abcos(\alpha)$, con α angolo compreso fra i due vettori, notiamo che $bcos(\alpha)$ è la proiezione di b su a.
- **Somma di vettori**: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j})$, graficamente si può usare la regola del parallelogramma.
- **Prodotto vettoriale**: $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, direzione e verso di $\vec{c}$ sono decisi con la regola della mano destra (primo vettore che compare nel prodotto sul pollice, secondo vettore sull'indice, risultato nel medio), il modulo di $\vec{c}$ si trova come $|\vec{c}| = sbsin(\alpha)$.
  Per fare il prodotto vettoriale si usa spesso questo metodo:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}$$

7.2 Cinematica del punto

7.2.1 Legge oraria e traiettoria

Data una **legge oraria** $P(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ che descrive il moto di un punto nel tempo, si può ricavare la **traiettoria**:

- Si esplicita la legge oraria in forma parametrica: $\begin{cases}x = x(t)\\ y = y(t)\end{cases}$
- si ricava t dalla priama equazione e la si sostituisce nella seconda ricavando così un'equazione $y = f(x)$, che prende il nome di traiettoria

7.2.2 Numeri complessi

Forma esponenziale: $\vec{P} = re^{j\theta}$.
Forma trigonometrica: $\vec{P} = rcos(\theta) + jrsin(\theta)$.

Per passare da una forma all'altra si usano le **relazioni di eulero**: $e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta)$.

Notiamo che $e^{j0} = 1$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, e $e^{j\pi} = -1$.

oss. Quando si lavora coi numeri complessi, per esempio nel cercare di definire la posizione di un certo punto, si cerca sempre di ottenere il risultato tramite somme di vettori, ciascuno dei quali varia nel tempo o il modulo o l'angolo, non entrambe assieme. E' preferibile usare più vettori "semplici", piuttosto che meno vettori "complessi". Utilizzare questo approccio facilita spesso i conti delle derivate per il calcolo della velocità e dell'accellerazione.

oss. Ricordarsi sempre di definire gli angoli correttamene: si parte dall'asse reale e si ruota in senso antiorario.

Esercitazione 2 26/03/2020
link Clicca qui

8 Esercitazione II

../esercitazione2/pdf/02-Cinematicacrdisco-motirelativigru.pdf
../esercitazione2/pdf/ese_2_notes.pdf

8.1 Ripasso sulla cinematica del corpo rigido

Definito un corpo rigido e due sue punti interni A e B, allora il **teroema di Rivals della velocità** dice che:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

con $\vec{v}_{BA}$ velocità di B in moto circolare visto da un osservatore traslante in A.

Il **centro di istantanea rotazione** (CIR) è un punto che nell'istante in cui viene osservato ha velocità nulla. Mentre un **centro di rotazione** ha velocità nulla in ogni istante e quindi anche accellerazione nulla.

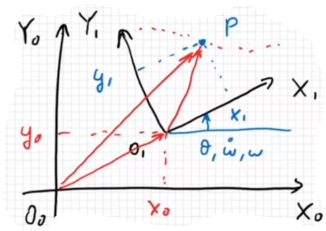
Il **teorema di Rivals dell'accellerazione** dice che:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A)$$

dove $\vec{a}_{BA} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - a)$ è l'accellerazione di B vista da un osservatore traslante in A.

8.2 Ripasso sui moti relativi

Definita una terna fissa $X_0 O_0 Y_0$ e una terna rototraslante $X_1 O_1 Y_1$ per descrivere il moto di un punto P nello spazio.
[immagine dagli appunti del prof]



Velocità:

$$\vec{v}_P^{(0)} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1) + v_{rel,P}^{(1)}$$

dove $\vec{v}_P^{(0)}$ è la **velocità assoluta**, $\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \wedge (P - O_1)$ è la **velocità di trascinamento (traslatoria-rotatoria)**, e $v_{rel,P}^{(1)}$ è la **velocità relativa**.

Accellerazione:

$$\vec{a}_P^{(0)} = \vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)] + \vec{a}_{rel,P} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$$

dove $\vec{a}_P^{(0)}$ è l'**accellerazione assoluta**, $\vec{a}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O_1)]$ è l'**accellerazione di trascinamento**, $\vec{a}_{rel,P}$ è l'**accellerazione relativa**, e $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$ è l'**accellerazione di Coriolis**.