ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

18 novembre 2019

[mancano]:

lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019;
primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1);
tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3);
manca la lezione di giovedì 17/10/19 (LECTURE 5);

10-LEZIONE

18/11/19

Sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari

Riprendiamo dall'ultima lezione sul polinomio di Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Il polinomio di Taylor viene chiamato polinomio di **MacLaurin** se si prende $x_0 = 0$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

es. scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 9 di $sin(x)$

$$f(x) = sin(x) \rightarrow x = 0 \rightarrow 0$$

$$f'(x) = cos(x) \rightarrow x = 0 \rightarrow 1$$

$$f''(x) = -sin(x) \rightarrow x = 0 \rightarrow 0$$

$$f'''(x) = -cos(x) \rightarrow x = 0 \rightarrow -1$$

$$f^{iv}(x) = sin(x) = f(x) \rightarrow x = 0 \rightarrow 0$$

e ciclo di derivate riinizia. Quindi $T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{ix}(0)}{9!}x^9 =$ tutti i termini pari si annullano $=$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9$$

Notiamo che più si calcola un polinomio di grado maggiore e più troviamo una funziona che approssima meglio la funzione seno. Per esempio T_1 approssima il seno solo vicino all'origine, T_3, invece, approssima molto meglio di T_1 (graficamente notiamo che T_3 ha già le prime curvature del seno), etc. [immagine:mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

es. scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 9 di $cos(x)$.
Questo esercizio è estremamente simile a quello precedente, qua invece di annullarsi i termini pari, si annullano quelli dispari. [Fare a casa].
[immagine:mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

es. scrivere il polinomio di MacLauri di grado 9 dell'esponenziale.

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(k)} = e^k \rightarrow x = 0 \rightarrow 1$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

Quindi per $n = 9$ avremo:

$$T_9(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}.$$

[immagine: mancante (rappresentazione di vari gradi del polinomio di MacLaurin)]

Teorema del resto secondo Peano

descrive l'errore nell'approssimazione di $f(x)$ con $T_n(x)$. Dove x, che è il punto in cui sto facendo l'approssimazione, è nell'intorno di x_0 (ma $x \neq x_0$).
teor. Se $f : A \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow y = f(x)$ e ipotesi:

- $A = (a, b)$, $x_0 \in A$
- $f \in C^n(A) = \{$continua con tutte le derivate continue fino a $f^{(n)}$ in ogni punto di $A\}$

allora

$$f(x) = T_n(x) + o(\ (x - x_0)^n\ ) \qquad x \to x_0$$

Questa formula è conosciuta anche in questa forma: $f(x) - T_n(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$ per $x \to x_0$.

Corollario 1 del teorema di Lagrange(che enuncia: $\exists \quad \theta \in (a, b) \quad : \quad (b - a)f'(\theta))f(b) - f(a))$.
Teorema di Cauchy:
Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ e $y = g(x)$, e ipotesi:

- $A = [a, b]$
- f, g continue in A e derivabili in (a, b)

Allora per il teorema di Lagrange sappiamo che

$$\begin{cases} \exists \ \theta_1 \in (a, b) \ : \ f'(\theta_1)(b - a) = f(b) - f(a) \\ \exists \ \theta_2 \in (a, b) \ : \ g'(\theta_2)(b - a) = g(b) - g(a) \end{cases}$$

Allora

$$\exists \ x^* \in (a, b) \ : \ \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dim. Uso un funzione ausiliaria $h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$, che ho ricavato portando tutto a primo termine da : $\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ e togliendo le "derivate".
h ha la regolarità di f e di g perchè è una combinazione lineare di queste due funzione. Applico ora il teorema di Rolle:

$$h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$$

Valutiamo gli estremi: in a

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

in b

$$h(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$$

Quindi per Rolle sappiamo che h ha un punto stazionario. Calcoliamo ora la derivata di h

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Ma sappiam oche esiste un x^* per cui la derivata è nulla:

$$h'(x^*) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x^*) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x^*) = 0$$

Corollario 2 del teorema di Lagrange(che enuncia: $\exists \quad \theta \in (a, b) \quad : \quad (b - a)f'(\theta))f(b) - f(a))$.
Teorema di de l'Hopital (di Voldemort, da non usare secondo il prof.):
Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ e $y = g(x)$, e ipotesi:

- $A = [a, b]$
- f, g continue in A e derivabili in (a, b)
- entrambe le fuznioni sono infinitesime in $x_0 \in (a, b)$

Allora se $l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora $l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

dim. diretta dal corollario 1 (cauchy), $\exists \ \theta \in (a, b) \ :$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = l$$

Dimostrazione del teorema del resto secondo Peano

se $f \in C^n(A)$ e $A = (a, b)$ e $x_0 \in A$, allora $f(x) - T_n^f(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$
dim. per induzione su n

- verifico per $n = 1$:

  $$f \in C^1 \quad , \quad f(x) - [f(x_=) + f'(x_0)(x - x_0)] \ \ =?\ o(x - x_0)$$

  per $x \to x_0$

  $$\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

  Verificata.

- Supponendo che valga per $n - 1$ verifico per n.
  Scriviamo la validità per $n - 1$ con una funzione g: $\ \forall\ g \in C^{n-1}(A)$ allora so che vale

  $$g(x) - T_{n-1}^g(x) = o(\ (x - x_0)^n - 1\ )$$

  Ora dobbiamo verificare che presa $f \in C^n(A)$ allora vale che

  $$f(x) - T_n^f(x) = o(\ (x - x_0)^n\ )$$

  e per farlo ci basta dimostrare che

  $$\frac{f(x) - T_n^f(x)}{(x - x_0)^n}$$

  tenda a 0 per $x \to x_0$. Per calcolare questo limite usiamo il corollario 2:

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'}$$

  Analiziamo prima:

  $$[T_n^f(x)]' = [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n] =$$

  $$= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} = T_{n-1}^{f'}(x)$$

  Quindi: $[T_n^f(x)]' = T_{n-1}^{f'}(x)$.
  Ora possiamo tornare al limite:

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - T_n^f(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f'}(x)}{n \cdot (x - x_0)^{n-1}} =$$

  che per ipotesi di induzione (quella con la funzione g) è

  $$= 0$$

Fine dimostrazione.

Teorema del resto secondo Lagrange

Questo teorema, rispetto a quello del resto secondo Peano, presenta ipotesi più restrittive, che consentono di scrivere il resto in modo pi dettagliato.
$f \in C^{n+1}(A)$, $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, Allora $\exists \ \theta \in (x_0, x)$:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0^{(n+1)})$$

Notiamo che $\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0^{(n+1)})$ è $o(\ (x - x_0)^n\ )$, quindi la forma di Lagrange è più dettagliata di Peano.

dim. Considero due funzioni ausiliarie:

$$g(x) = f(x) - T_n(x)$$
$$w(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

$w(x)$ ha regolarità $\in C^\infty(\mathbb{R})$ e $g(x)$ ha regolarità $inC^{n+1}(A)$.
Calcoliamo $g(x_0)$, $g'(x_0)$, $\dots$, $g^{n+1}(x_0)$ e $w(x_0)$, $w'(x_0)$, $\dots$, $w^{n+1}(x_0)$.
Dato che f e T_n hanno un contatto di ordine n in x_0:

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^n(x_0) = 0$$

Ci rimane quindi da calcolare solo $g^{n+1}(x)$.
Anche per w notiamo che in x_0 le derivate sono nulle:

$$w(x_0) = w'(x_0) = \cdots = w^n(x_0) = 0$$

Anche qui quindi ci rimane da calcolare solo $w^{n+1}(x)$.

$$g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x)$$
$$w^{n+1}(x) = (n+1)!$$

A questo punto vogliamo dimostrare che

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Per farlo portiamo $T_n(x)$ a primo menbro otteniamo:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Ora dividiamo per $(x - x_0)^{n+1}$

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

Dimostreremo il teorema in questa forma.

Riprendiamo le due funzioni ausiliarie

$$\frac{g(x)}{w(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{w(x) - w(x_0)} =$$

dove $g(x_0) = w(x_0) = 0$ e col Corollario 1 (Cauchy), otteniamo che $\exists \ x_1 \in (x_0, x)$:

$$= \frac{g'(x_1)}{w'(x_1)} = \frac{g'(x_1) - g'(x_0)}{w'(x_1) - w'(x_0)} =$$

riapplicando ora nuovamente il Corollario 1 (Cauchy), otteniamo che $\exists \ x_2 \in (x_0, x_1)$:

$$= \frac{g''(x_2)}{w''(x_2 =} = \frac{g''(x_2) - g''(x_0)}{w''(x_2) - w''(x_0)} =$$

riapplichiamo per la terza volta il Corollario 1 (Cauchy) restringendo sempre di più l'intervallo, quindi otteniamo $\exists \ x_3 \in (x_0, x_2)$:

$$= \frac{g'''(x_3)}{w'''(x_3)} = \dots$$

iterando n volte otteniamo:
$\exists \ \theta \in (x_0, X_n)$:

$$\cdots = \frac{g^{n+1}(\theta)}{w^{n+1}(\theta)} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$