# ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

15 ottobre 2019

## [mancano]:

- lezioni ed esercitazioni prima del 30/09/2019
- primi 20 minuti della lezione del 30/09/2019 (LECTURE 1)
- tre piccole cose della lezione del 10/10/19 (LECTURE 3)
- 

# 3-ESERCITAZIONE

15/10/19

**[manca prima ora]**

**es.** Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}}$$
Se fosse stato per $x$ che tende a $\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

Ma tornando al vero esercizio:
Dato che lavoriamo con infinitesimi, gli infinitesimi che pesano di più sono al numeratore $x^{\frac{1}{2}}$ e al denominatore $x^{\frac{1}{2}}$, quindi otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Il limite poteva essere risolto anche così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x^{\frac{3}{2}}+1)} = 1$$

**es.** Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^{3x} = 1^{\infty} =$$
Si può facilmente usare il limite che definisce il numero $e$ per svolgere l'esercizio, ma vediamo come risolverlo senza questo limite notevole:
Possiamo usare la seguente uguaglianza: $x = e^{ln(x)} = ln(e^x)$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{3x \cdot ln(1+\frac{1}{x})} =$$

Ora usiamo $ln(1+x) = x + o(x)$ nell'intorno dell'origine e ricordiamoci le proprietà di o-piccolo: $f(x)\cdot o(g(x)) = o(f(x)\cdot g(x))$ e $c \cdot o(f(x)) = o(c\cdot f(x)) = o(f(x))$ con $c$ una costante

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{3x(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))} = \lim_{x\to +\infty} e^{3+o(1)} =$$

dove $o(1)$ è un infinitesimo, quindi:
$$= e^3$$

**es.** Risolvere il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^-x}{sin(x)} = \frac{0}{0} =$$
risolviamo questo limite con gli o-piccolo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-(1-x+o(x))}{x+o(x)} =$$

Da notare come $o(-x) = o(x)$.
Perchè abbiamo deciso di usare gli o-piccoli? perchè se cerco di approssimare il limite senza gli o-piccoli perdo informazioni e non riesco a risolvere il limite e raggiungo la forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$, con gli o-piccoli invece mantengo informazion ipiù dettagliate.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{x+o(x)} = 2$$

**es.** **es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(\sqrt[3]{x})}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} + o(x^{\frac{1}{3}})}{2x} = +\infty$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{1-x^2} = \frac{0}{0} =$$

cerchiamo di trasformare l'argomento del logaritmo in forma $1+$ infinitesimo, usiamo un cambio di variabile:

$$y = x - 1$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{ln(1+y)}{-y(y+2)} =$$

Il denominatore viene da: $(1-x^2) = (1+x)\cdot(1-x)$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y + o(y)}{-y(y+2)} = -\frac{1}{2}$$

Gli o-piccoli bisogna portarseli dietro fino alla fine, solo allora si decide se servono o se van ignorati, per esempio in questo esercizio solo nell'ultimo passaggio abbiamo deciso di ignorare $o(y)$ perchè era di un ordine di infinitesimo trascurabile.

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}\cdot cos(n)}{sin(\frac{1}{n})} = \frac{0}{0}$$

Trascuriamo per il momento $cos(n)$ e valutiamo solo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\cdot n}}{sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \sim \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{e^n} \to 0$$

Riaggiungiamo ora $cos(n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}\cdot cos(n)}{sin(\frac{1}{n})} = \frac{n}{e^n} cos(n) = 0$$

**es.** Scrivere lo sviluppo asintotico della seguente successione

$$a_n = (-)^n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}) \cdot arctg(\frac{n^2}{1-n})$$

Dobbiamo usare la seguente formula:

$$arcth(x) + arctg(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}$$

Ll'argomento dell'arcotangente si comporta così

$$\frac{n^2}{1-n} < 0 \qquad \forall\, n \geq 2$$

Nell'intonro dell origine

$$arctg(x) = x + o(x) \sim x \qquad con\;\; f(x) \to 0 \quad arctg(f(x)) = f(x) + o(f(x))$$

$$arctg(\frac{n^2}{1-n}) = -\frac{\pi}{2} - arctg(\frac{1-n}{n^2})$$

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (-\frac{\pi}{2} \cdot arctg(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}))$$

Poichè

$$\frac{1}{n^2} << \frac{1}{n}$$

posso ignorare $\frac{1}{n^2}$:

$$a_n = (-)^{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (-\frac{\pi}{2} \cdot arctg(\frac{1}{n})) =$$

ora usando $con \quad f(x) \to 0 \quad arctg(f(x)) = f(x) + o(f(x))$ ottengo:

$$= (-)^{n+1}(\frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})) \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) + o(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) =$$

Svolgiamo ora tutti i conti

$$= (-)^{n+1} \cdot (\frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n})) = (-)^{n+1}\frac{\pi}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$a_n \sim (-)^{n+1}\frac{\pi}{n}$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x - 3} = \frac{0}{0} =$$

Per il teorema di Ruffini $P(3) = 0 \iff P(x)/(x-3)$ ($P(x)$ significa polinomio di x...)

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3}(x-3) \cdot (x+1) = 0$$

Abbiamo risolto il limite senza sviluppi particolari. Ma ora vogliamo sapere il comportamento del limite in un intorno di $3$:

$$4(x-3) \sim f(x)$$

quindi in un intorno di $3$ il comportamento asintotico è approssimabile a quello della retta $4(x-3)$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2}{n}} = \infty^0 =$$

Risolviamo passando all'esponenziale

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{ln(n^{\frac{2}{n}})} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{n} \cdot ln(n)} =$$

a questo punto non dobbiamo approssimare con gli asintotici il logaritmo perchè $n \to \infty$, invece usiamo la gerarchia degli infiniti:

$$= e^0 = 1$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} - x) = \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1) =$$

usiamo $(1 + f(x))^\alpha = 1 + \alpha f(x) + o(f(x)) \sim 1 + \alpha f(x)$ con $f(x)$ funzione infinitesima

$$= \lim_{x \to +\infty} x(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - 1 = \lim_{x \to +\infty} x(-\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) = 0$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(ln(x))}{ln(x)}=1$$

perchè sappiamo $ln(x)\ \to\ 0\quad per\ \ x\ \to\ 1$ e che $\ sin(x)\ \sim\ x\quad per\quad x\ \to\ 0$, quindi $\frac{sin(x)}{x}\ \to$ $1\quad per\ \ x\to 0$

Un altro modo di vedere la soluzione è il seguente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(ln(x))}{ln(x)}=\frac{ln(x)+o(ln(x))}{ln(x)}=1$$

che usa il principio che $sin(x)\sim x\ \ per\ x\to 0$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+3)-sin(x)}{x\cdot cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

usiamo le formule di addizione del seno

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)cos(3)+cos(x)sin(3)-sin(3)}{x\cdot cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)cos(3)}{x\cdot cos(x)}+\frac{cos(x)sin(3)-sin(3)}{x\cdot cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{sin(x)}{x}\cdot\frac{cos(3)}{cos(x)}+\frac{sin(3)}{cos(x)}\cdot\frac{cos(x)-1}{x})=$$

Vediamo che $\frac{cos(x)-1}{x}\to 0$, poi $\frac{sin(3)}{cos(x)}\cdot\frac{cos(x)-1}{x}\to 0$, poi $\frac{sin(x)}{x}\to 1$

$$=cos(3)$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sin(x)}{x-\pi}=\frac{0}{0}$$

Facciamo un cmabio di variabile

$$y=x-\pi$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{sin(y+\pi)}{y}=\lim_{y\to 0}-\frac{sin(y)}{y}=-1$$

**es.** Risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1-cos(x)}{2}}=\infty\cdot 0=$$

in un intorno dell'origine $1-cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2x}=$$

$$=\begin{cases} per\ x\to 0^+ & \frac{1}{2}\\ per\ x\to 0^- & -\frac{1}{2}\end{cases}$$

quindi il limite non esiste.

**es.** Risolvere i lseguente limite:

$$\lim_{x\to e}\frac{ln(x)-1}{x-e}=$$

Facciamo un cambio variabile per avere un logaritmo più comodo

$$y = x - e$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{ln(y+e) - 1}{y} =$$

Sappiamo che $ln(1 + \epsilon(x)) \sim \epsilon(x)$, per cui raccogliamo nel logaritmo per avere questa forma:

$$\lim_{y \to 0} \frac{ln[e(1 + \frac{y}{e})] - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1 + ln(1 + \frac{y}{e}) - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{ln(1 + \frac{y}{e})}{y} = \lim_{y \to 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{e} + o(y)}{y} = \frac{1}{e}$$