20/05/2020

E2) 29/06/2017, E1

Dato il SD NL a TC

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_1 x_2 \\
\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 2u \\
y = x_1^2 + u
\end{cases}
$$

1) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per $\bar{u} = 1$?

2) stabilità ep ?

1) Determino equilibri

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ 0 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 2\underbrace{\bar{u}}_{1} \end{cases}$$

- $\bar{x}_1 = 0 \Rightarrow -2\bar{x}_2 + 2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 1$
- $\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 + 2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = -2$

Quindi vi sono i due stati di equilibrio

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e in corrispondenza

$$\bar{y}_a = 1 \qquad \bar{y}_b = 5$$

2) Matrice dinamica del sist. linearizzato nel generico equilibrio $(\bar x, \bar u)$

$$\left. f_x \right|_{\bar x, \bar u} = \begin{bmatrix} \bar x_2 & \bar x_1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- equilibrio 2 : $\bar x_1 = 0$, $\bar x_2 = 1$, $\bar u = 1$

$$\left. f_x \right|_{\bar x_2, \bar u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \end{bmatrix}$$

1 autovalore con $Re > 0$

$\Rightarrow$ eq.

- equilibrio b: $\bar{x}_1 = -2$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{u} = 1$

$$f_x\Big|_{\bar{x}_b, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(sI - f_x\Big|_{\bar{x}_b, \bar{u}}\right) = \det \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + 2s + 2$$

2 permanenze di segno $\Rightarrow$ 2 autovalori con $Re < 0$

$\Rightarrow$ eq. AS

$\square$

Addendum: sistemi linearizzati

$$f_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad f_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$g_x\Big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g_u\Big|_{\bar{x},\bar{u}} = 1$$

- equilibrio a: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$, $\bar{u} = 1$, $\bar{y} = 1$

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x + \delta u \end{cases}$$

$$\delta x = x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\delta u = u - 1$$
$$\delta y = y - 1$$

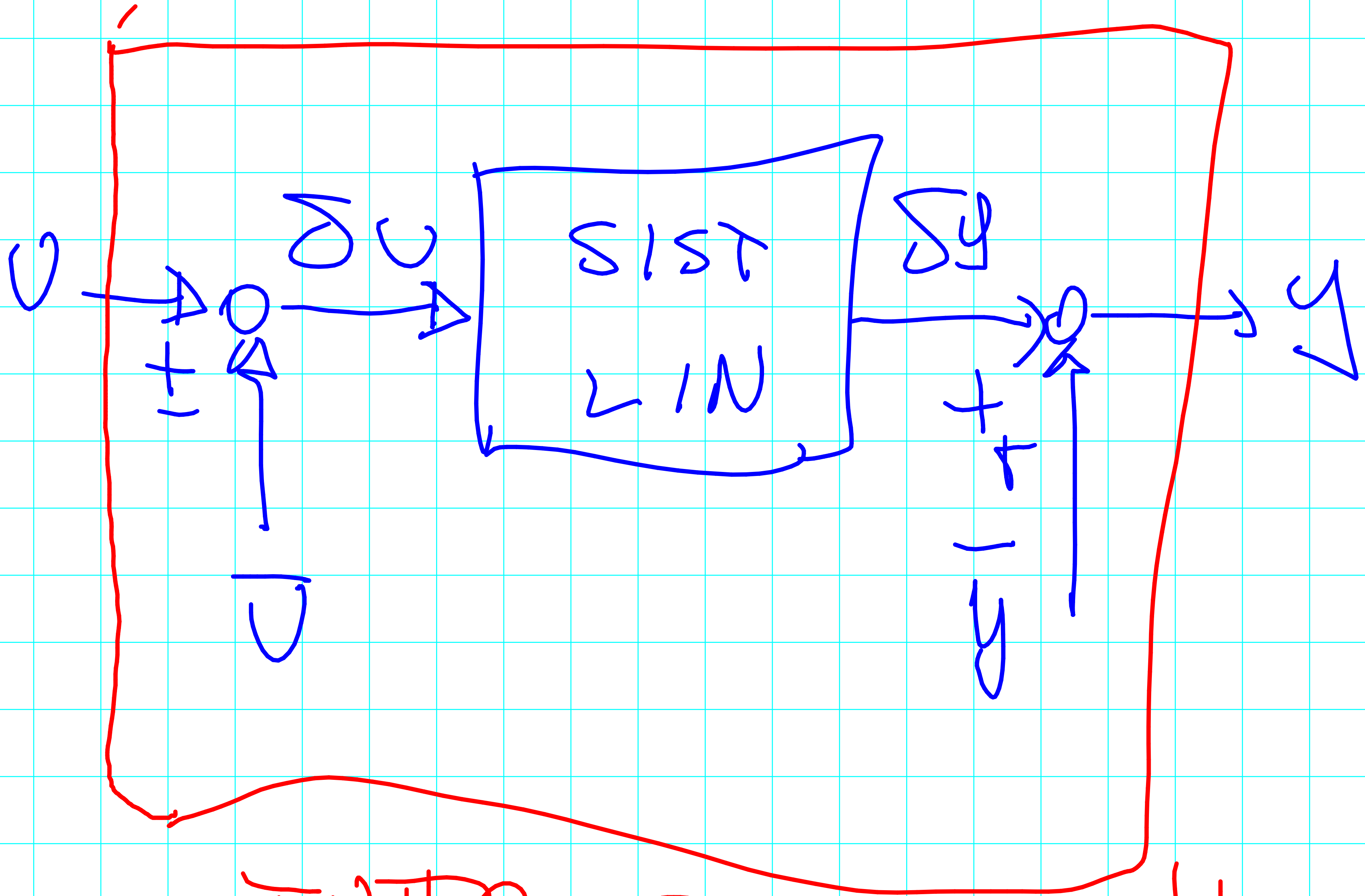
- equilibrio b: $\bar{x}_1 = -2$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{u} = 1$, $\bar{y} = 5$

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \delta x + \delta u \end{cases}$$

$$\delta x = x - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\delta u = u - 1$$
$$\delta y = y - 5$$

$\square$

NB



TUTTO QUESTO approssima il sistema nell'intorno dell'equilibrio

E3

Dato il SD LTI DTC con m. dinamica

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & 2 & 0 \\ \alpha + 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - 1 \end{bmatrix}$$

dire per quali coppie (α, β) esso è AS

Un autovalore di A è $\beta - 1$ e dovendo essere (reale) negativo occorre $\boxed{\beta < 1}$ (per AS)

gli altri due sono gli autovalori di

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & 2 \\ \alpha + 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

cioè le soluzioni di

$$\det \begin{bmatrix} s - \alpha + 1 & -2 \\ -\alpha - 1 & s+2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (s - \alpha + 1)(s+2) - 2(\alpha + 1) = 0$$

$$s^2 + (3 - \alpha) s - 4\alpha = 0$$

coeff. concordi (2° grado)

$$3 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 3$$

$$-4\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha < 0}$$

Sistema AS per $\{ \alpha < 0, \beta < 1 \}$ $\square$

E4 | 21/06/2018, E2

Dato il SD LTI a TC con pol. caratt. (della m. A)

$$\Pi(s) = (2s+\alpha)(s-\beta+1)(s^3+\gamma s^2+s+2)$$

dire per quali terne (α, β, γ) esso è AS

Due autovalori del sistema sono $-\alpha/2$ e $\beta-1$

essi hanno $Re<0$ per $\alpha>0$ e $\beta<1$ rispettivamente

Gli altri 3 autovalori sono le sol. di $s^3+\gamma s^2+s+2=0$

e siccome dipendono da γ uso Routh su quest'ultimo fattore

$$s^3 + \gamma s^2 + s + 2$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \gamma & 2 \\ Q & \\ W & \end{array}$$

$$Q = -\frac{1}{\gamma} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & 2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma - 2}{\gamma}$$

$$W = -\frac{1}{Q} \det \begin{bmatrix} \gamma & 2 \\ Q & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \checkmark$$

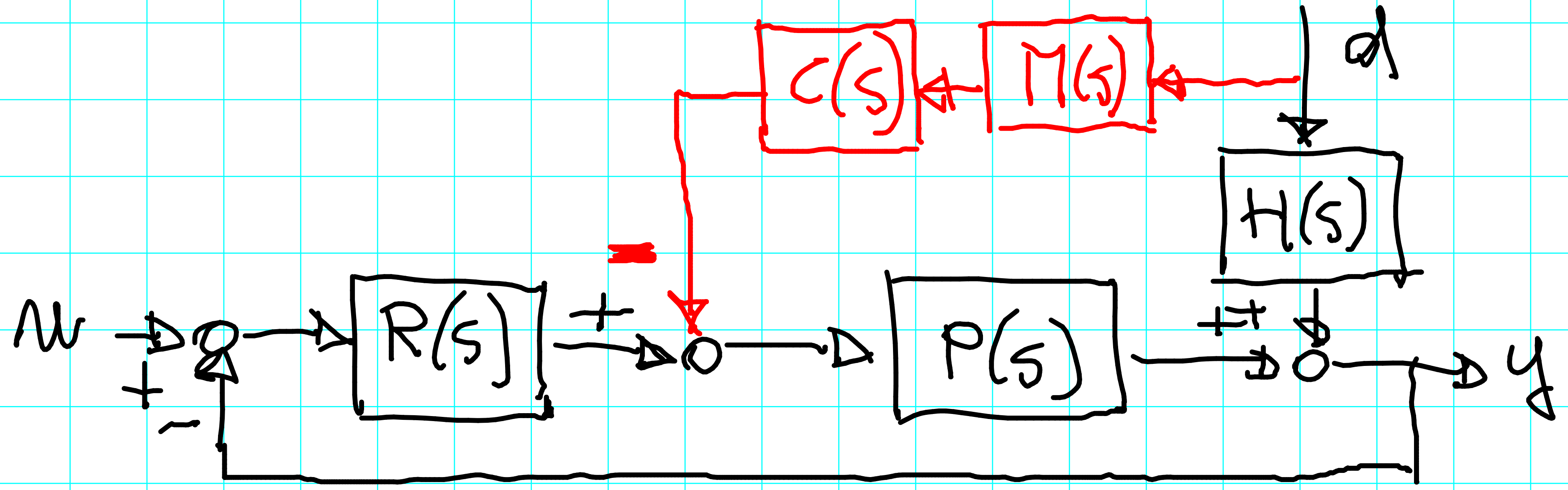
Stabile AS per $\begin{cases} \gamma > 0 \\ \gamma - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma > 2$

Sistema AS per $\{\alpha > 0, \ \beta < 1, \ \gamma > 2\}$

$\square$

E5

Dato il sistema di controllo in retroazione



dove $P(s) = \dfrac{1}{1+5s}$; $R(s) = \dfrac{1+5s}{10s}$; $H(s) = \dfrac{0{,}5}{1+s}$, $M(s) = \dfrac{1}{1+s/10}$

determinare $C(s)$ in modo da compensare un disturbo $d(t)$ sinusoidale con frequenza non superiore al doppio della f. critica dell'anello.

- Determino ω_c:

$$L(s) = R(s)P(s) = \frac{\cancel{1+5s}}{10s}\frac{1}{\cancel{1+5s}} = \frac{0,1}{s}$$

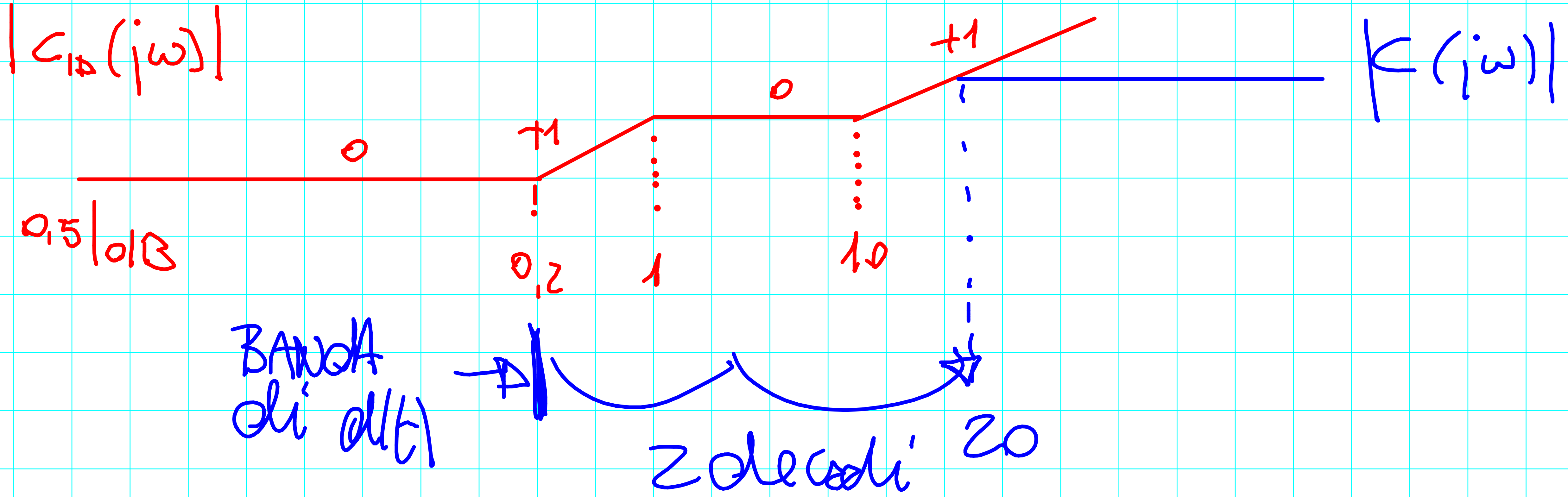
$$\omega_c = 0,1$$

Quindi la max freq. contenuta in $d(t)$ è 0,2.

- Compensatore ideale:

$$\frac{Y}{D} = 0 \Rightarrow \frac{H - MCP}{1+RP} = 0 \Rightarrow C_{ID} = \frac{H}{MP}$$

Quindi $C_{ID} = \frac{0,5}{1+s} \cdot \frac{1+0,1s}{1} \cdot \frac{1+5s}{1} = \frac{0,5(1+0,1s)(1+5s)}{1+s}$ non realizzabile



Aggiungo 1 polo a $\omega = 20$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{0{,}5\,(1+0{,}1s)(1+5s)}{(1+s)(1+s/20)}$$

$\square$