

# MECCANICA

Federico Mainetti Gambera

20 marzo 2020

## 0.1 LEZIONE 1 10/03/2020

link <https://web.microsoftstream.com/video/58e86b29-c2c0-47d6-bbb4-f54861155460>

### 0.1.1 Informazioni sul corso

#### Modalità d'esame

C'è uno scritto il cui massimo voto è 27, se si vuole alzare il voto si può fare un orale. Se si prende meno di 21 si deve obbligatoriamente fare un orale, se la votazione dello scritto l'orale è facoltativo, per prendere più di 27 bisogna fare l'orale. L'esame va sostenuto all'interno della sessione in cui è stato svolto lo scritto.

#### Libro di testo

L'acquisto del libro è fortemente consigliato, gli appunti di queste lezioni sono molto scarni. Il libro è "Fondamenti di meccanica teorica e applicata - McGraw-Hill, N. Bachsmid et al".

#### Argomenti del corso

La meccanica si occupa di studiare il movimento di un sistema meccanico. Durante il corso ci occuperemo di Cinematica, Statica e Dinamica.

Per cinematica si intende lo studio del movimento di un sistema meccanico indipendentemente dalle forze che agiscono su di esso. Il moto del sistema è quindi unicamente dettato dai vincoli del sistema stesso.

Viceversa lo studio del moto di un sistema in relazione alle forze che agiscono su di esso è la dinamica. La statica è un caso particolare della dinamica, ovvero quando le forze di un sistema si equilibrano in modo da creare un'assenza di moto.

Infine andremo ad applicare queste tre materie allo studio di una macchina a un grado di libertà.

### 0.1.2 Cinematica di un punto

Studieremo la cinematica applicata a un punto e riducendoci al caso bidimensionale.

Per moto di un punto intendiamo l'evoluzione temporale della sua posizione, inoltre cercheremo di darne una descrizione matematica.

Per prima cosa c'è bisogno di un sistema di riferimento o osservatore, in modo da poter definire una posizione di un punto. Sistemi di riferimento diversi possono dare posizioni diverse per uno stesso punto.

#### Gradi di libertà

Le coordinate indipendenti, o gradi di libertà, che caratterizzano un piano e che definiscono una posizione di un punto sono due. Si dice che un punto ha due gradi di libertà nel piano.

Ci sono tre possibilità per scegliere le due coordinate indipendenti:

- Coordinate cartesiane, con un origine  $O$ , un asse delle ascisse  $X$  e uno delle ordinate  $Y$ . In questo caso la posizione di un punto  $P$  sarà descritta da un vettore  $\vec{P} = (P - O)$ , e, se chiamo  $\vec{j}$  e  $\vec{i}$  i vettori delle proiezioni del punto sull'asse delle ordinate e delle ascisse, posso dire che  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Il piano di Gauss, che è il piano immaginario, dove i due assi principali sono l'asse reale e l'asse immaginario. Anche in questo caso un punto  $P$  sarà descritto da un vettore  $\vec{P} = (P - O) = x + iy$ . Notiamo che  $i = \sqrt{-1}$
- Coordinate polari, si usa ancora il piano di Gauss (immaginario), ma per definire il vettore posizione  $\vec{P} = P - O$  userò due grandezze chiamate modulo e anomalia, dove il modulo  $r$  rappresenta la distanza del punto  $P$  dall'origine  $O$  e l'anomalia  $\theta$  è l'angolo che il vettore forma con l'asse reale in direzione antioraria. Dunque possiamo scrivere  $\vec{P} = re^{i\theta}$  grazie alla formula di Eulero ( $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ). Notiamo che  $x = r\cos(\theta)$  e  $y = r\sin(\theta)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

## Moto

Il moto del punto rappresenta l'evoluzione delle coordinate che rappresentano la posizione del punto nel tempo. Se il punto  $P$  si sta muovendo nel tempo, traccia una traiettoria nel piano. Per sua natura la traiettoria è una linea continua.

Una volta stabilita un'origine per la traiettoria, ovvero la posizione  $P_0$  assunta dal punto nel tempo iniziale  $t_0$ , posso definire una quantità scalare  $s$  detta ascissa curvilinea. L'ascissa curvilinea indica la posizione occupata dal punto  $P$  lungo la traiettoria ad un dato istante di tempo. Il vettore posizione  $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$  è funzione dell'ascissa curvilinea, che a sua volta è funzione del tempo.

Come studiare il moto del punto?

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  oppure  $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$
- $\begin{cases} y = f(x) & \text{traiettoria} \\ s = s(t) & \text{legge oraria} \end{cases}$

es. Moto circolare

[immagine dagli appunti del prof]

Per studiare il moto di questo punto  $P$  posso usare uno dei due metodi appena descritti.

Primo metodo:

$\theta = \omega t$ , dove  $\omega$  rappresenta la velocità angolare.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{Da cui otteniamo che}$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

Secondo metodo:

la traiettoria sarà definita da  $r^2 = x^2 + y^2$ , mentre la legge oraria  $s = \theta r = [\theta = \omega t] = \omega t r$ .

## Velocità

La velocità  $\vec{v}$  è definita come  $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ , ricordando che  $\vec{P} = \vec{P}(s(t))$  il vettore posizione è una funzione dell'ascissa curvilinea che è funzione del tempo. Quindi nel calcolare la velocità si sta eseguendo la derivata di una funzione di una funzione:  $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{P}}{ds}$ . Per comprendere il significato del secondo termine di questa equazione ( $\frac{d\vec{P}}{ds}$ ) facciamo un'analisi grafica:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{oppure } \Delta s \rightarrow 0 \frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta s}$$

[immagine dagli appunti del prof]

Un punto  $P$  si muove dal punto  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  al punto  $\vec{P}' = \vec{P}(t + \Delta t)$  lungo una traiettoria, percorrendo una quantità pari a  $\Delta s$ . A questo punto possiamo dire che  $\frac{d\vec{P}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s}$ . Cosa è  $\Delta \vec{P}$ ? È il vettore che unisce il punto  $P$  dalla posizione al tempo  $t$  alla posizione  $t + \Delta t$ , questa quantità al variare di  $\Delta t$  a 0 tenderà anch'essa a 0. Quindi il vettore  $\Delta \vec{P}$  per  $\Delta t \rightarrow 0$  tenderà a coincidere con l'arco  $\Delta s$  della traiettoria stessa. Dunque  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} \right| = 1$ . Oltre ad avere quindi modulo pari a 1, tenderà ad essere tangente alla traiettoria.

La velocità è quindi definita come  $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{t}$  (dove per  $\vec{t}$  si intende il versore tangente alla traiettoria). C'è più di un modo per definire la velocità:

- Il primo lo abbiamo appena visto:  $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{t} = v \cdot \vec{t}$ .
- Il secondo metodo sfrutta le coordinate cartesiane  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$ :  $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ .

Sfruttando la seconda definizione, possiamo anche scrivere il vettore velocità come  $\vec{v} = v e^{i\alpha}$ , dove l'angolo  $\alpha$  rappresenta l'angolo formato fra il vettore tangente e l'asse delle ascisse traslato fino al punto considerato. Dunque il modulo  $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  e l'angolo  $\alpha = \text{atan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ , e quindi  $\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

## Accelerazione

L'accelerazione  $\vec{a}$  per definizione è  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \dot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ .

Dunque  $\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ , posso ora studiare il termine  $\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right)$ , sfruttando le proprietà della derivata di una funzione di funzione,  $\dot{s} \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$ .

Ricaviamo quindi l'accelerazione come  $\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$ , dove il termine  $\frac{d\vec{P}}{ds}$  rappresenta il versore tangente alla traiettoria  $\vec{t}$  e  $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2}$  rappresenta il rapporto tra il versore normale alla traiettoria  $\vec{n}$  diviso il raggio di curvatura  $\rho$ . Ricaviamo quindi che

$$\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n} = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

Verifichiamo ora come  $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ :

Qualsiasi sia la traiettoria descritta nel piano, se noi consideriamo una qualsiasi istante di tempo, notiamo che la traiettoria può essere approssimata con un cerchio, che prende il nome di cerchio osculatore, il cui raggio è detto raggio osculatore.

[immagine dagli appunti del prof]

Questo cerchio condivide con la traiettoria il punto stesso, la derivata prima (tangente) e la derivata seconda (curvatura). La curvatura  $c$  è l'inverso del raggio osculatore,  $c = \frac{1}{\rho}$ . Se definiamo la terna destrorsa (con asse  $z$  uscente dal piano verso di noi e asse  $x$  parallelo alla tangente) avremo che il versore  $\vec{n}$  è diretto verso il centro del cerchio osculatore.

Per dimostrare  $\frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ , usiamo  $\frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{P}}{ds} \right) = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{t} - \vec{t}'}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{t} - \vec{t}'}{\Delta s}$ .

[immagine dagli appunti del prof]

Se consideriamo un generico piccolo spostamento lungo la traiettoria  $ds$ , questo tratto di traiettoria coinciderà con una sezione del cerchio osculatore, di cui possiamo calcolare l'angolo  $d\alpha$  (rosso nell'immagine). Consideriamo anche i punti estremi (di partenza e di fine) dello spostamento  $ds$  che sono  $P$  e  $P'$ . Per  $P$  e  $P'$  consideriamo le tangenti e gli angoli  $\alpha$  (giallo e azzurrino) che formano con l'asse delle ascisse. La variazione angolare fra queste due  $\alpha$  sarà pari all'angolo  $d\alpha$  del cerchio osculatore. Quindi fra  $\vec{t}$  e  $\vec{t}'$  ci sarà un angolo pari a  $d\alpha$ , ed inoltre il vettore differenza  $d\vec{t} = \vec{t} - \vec{t}'$  (in azzurro-blu) tenderà a 0 all'accorciarsi della tratto di traiettoria considerata. Coi calcoli esprimiamo questo concetto dicendo che  $d\vec{t} = \vec{t} d\alpha = \vec{t}' d\alpha$  e quindi  $|d\vec{t}| = 1 d\alpha$ , e considerando che  $ds = \rho d\alpha$  otteniamo che  $\left| \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \left| \frac{1 d\alpha}{\rho d\alpha} \right| = \frac{1}{\rho}$ . Ma essendo  $d\vec{t} \perp \vec{t}$ , questo andrà a coincidere col versore normale  $\vec{n}$ .

Abbiamo quindi dimostrato che  $\vec{a} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n} = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ . La prima componente  $\vec{a}_t = \dot{v} \vec{t}$  prende il nome di accelerazione tangenziale, la seconda componente  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$  si chiama invece accelerazione normale. L'accelerazione tangenziale può annullarsi se per esempio siamo in presenza di un moto uniforme, in cui la velocità è costante, al contrario se siamo in presenza di un moto rettilineo, è la velocità normale ad essere nulla.

Come per la velocità, anche per l'accelerazione ci sono modi differenti per definirla:

- Il primo metodo è quello appena visto:  $\vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}$ .
- Il secondo metodo sfrutta il concetto di ascissa curvilinea e le coordinate cartesiane in cui  $\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$ :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$ .
- Il terzo metodo usa i numeri complessi in cui  $\vec{v} = v e^{i\alpha}$ :  $\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + v i \dot{\alpha} e^{i\alpha}$ , dove  $i = e^{i\pi/2}$  e quindi  $\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + v \dot{\alpha} e^{i(\alpha+\pi/2)}$ . In questo caso  $\vec{a}_t = \dot{v} e^{i\alpha}$  e  $\vec{a}_n = v \dot{\alpha} e^{i(\alpha+\pi/2)}$ . Notando che  $ds = \rho d\alpha$ , otteniamo  $v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\alpha}{dt} = \rho \dot{\alpha}$  e se andiamo a sostituire otteniamo  $\vec{a} = \dot{v} e^{i\alpha} + \frac{v^2}{\rho} e^{i(\alpha+\pi/2)}$ .

[immagine dagli appunti del prof]