ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

11 ottobre 2019

Indice

1-LEZIONE

30/09/19

Formula di Newton [mancano primi 20 minuti]

es. Trovare il coefficiente di b^7 nell espressione $(a^3b^2 - b)^5$.

$$(a^3b^2 - b)^5 = b^5(a^3b - 1)^5$$

il coefficiente di b^7 e uguale a quello di b^2 in $(a^3b - 1)^5$

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} [a^3b]^k(-1)^5 - k$$

per ottenere il coefficiente di b^2 devo porre $k = 2$, quindi ottengo:

$$\binom{5}{2}(a^3)^2b^2(-1)^{5-2} = -\binom{5}{2}a^6b^2$$

il coefficiente cercato è $-\binom{5}{2} = -\frac{5!}{2!3!} = 10$.

es. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k = 3^n.$$

E' possibile dimostrare questa uguaglianza per induzione, ma in realtà è molto più semplice usare direttamente la formula di Newton $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. Infatti se poniamo $a = 2$ e $b = 1$ otteniamo esattamente l'equazione della consegna.

es. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1.$$

Per dimostrare questa uguaglianza usiamo ancora una volta la formmula di Newton con $a = -2$ e $b = 1$ e, invece di n, usiamo $2n$.

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k b^{2n-k} = (a+b)^{2n}.$$

Calcolo combinatorio

dim. Dimostrazione combinatoria della **formula di Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Utiliziamo il termine $P^*_{k,n-k} = \binom{n}{k}$ per rappresentare il numero delle permutazioni con ripetizione di n oggetti k di un tipo e $n-k$ dell'altro.
Partiamo dalla definizione di esponenziale $(a+b)^n = (a+b)_1(a+b)_2 \dots (a+b)_n$.
Nello svolgere questi prodotti avrò scelto k volte a e $n-k$ volte b per ottenere $a^k b^{n-k}$. E' come avere n caselle di cui le prime k occupate da a e le restanti $n-k$ occupate da b:

$$[a_1]_1[a_2]_2 \dots [a_k]_k[b_1]_{k+1}[b_2]_{k+2} \dots [b_{n-k}]_n$$

Ma una configurazione così può presentarsi $P^*_{k,n-k}$ (cioè $\binom{n}{k}$) volte.
Da qui quindi arriviamo alla forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

def. dato un insieme X di n oggetti distinti, chiamo **combinazioni semplici (senza ripetioni) di classe** K un qualsiasi sottoinsieme (il cui ordine non importa) di k oggetti estratti da X.
$C_{n,k}$ è il simbolo che rappresenta il numero di combinazioni semplici di k oggetti estratti senza ordine.

teor.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

dim. Immaginiamo di dover inserire elementi in delle caselle per ottenere uno specifico allineamento. abbiamo k caselle e n elementi. Nella prima casella posso scegliere fra n elementi da inserire, nella seconda potrò scegliere fra $n-1$, poi fra $n-2$ elementi e così via.

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Seguendo questo ragionamento abbiamo disposto in maniera **ordinata** gli elementi lungo un allineamento. Se non si vuole considerare l'ordine, dobbiamo dividere il risultato trovato per le $k!$ permutazioni possibili:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n.b. $\quad n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cardinalità di un insieme

E' lo studio del numero di oggetti appartenenti a un certo insieme.
Dato un insieme X di n oggetti, qual è la cardinalità dell'insieme delle parti di X? L'insieme delle parti è l'insime di tutti i sottoinsiemi ed è rappresentato dalla lettera $\mathcal{P}(X)$

teor. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X di cardinalità n ha cardinalità 2^n.
dim. X ha certamente come sottoinsiemi quelli banali, cioè Ø e X stesso.
Quanti sottoinsiemi di 1 elemento ha X? n (riscrivibile come $C_{n,1}$, cioè come combinazione semplice senza ripetizioni di classe 1)
Quanti sottoinsiemi di 2 elemento ha X? $C_{n,2}$
...
Quanti sottoinsiemi di n-1 elemento ha X? $C_{n,n-1}$
Dal teorema precedentemente visto sappiamo che $C_{n,x} = \binom{n}{x}$, quindi:

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + 1 \quad = \quad 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + + \binom{n}{n-1} + 1$$

dove il primo 1 rappresenta $/O$ e l'ultimo 1 rappresetna X stesso.
Ora questa espressione può essere raccolta in una sommatoria e tramite la formula di Newton possiamo scrivere:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

oss. L'**insieme delle parti** di un insieme **finito** ha cardinalità sempre **maggiore** dell insieme stesso.

Topologia in $\mathbb{R}$

Intorno

def. concetto fondamentale è quello di **intorno** di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ o $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
in $\mathbb{R}$: IMMAGINE
in $\mathbb{R}^2$: IMMAGINE
$B_r(x_0)$ è il simbolo che rappresenta l'intorno di raggio r del punto x_0.
$B_r(x_0)$ è l'insieme dei punti con distanza inferiore ($<$) di r dal centro x_0. Da notare è il fatto che i punti sul bordo/confine dell'intorno non appartengono all'intorno.
Vediamo ora una definizione formale:

- in $\mathbb{R}$:
$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$
- in $\mathbb{R}^2$:
$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : dist(p, p_0) < r\}$$
dove $dist(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

oss. in $\mathbb{R}$ una qualunque semiretta è detta "intorno di $\pm\infty$". in $\mathbb{R}^2$, invece, non si parla di "intorno di $\pm\infty$".

Punti interni, esterni e di frontiera

def. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^2$, x^* è un punto **interno** ad A se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A$$

oss. Ovviamente se x^* è un punto interno allora $x^* \subset A$, ma per essere un punto interno non deve solo essere $\subset$ in A, ma anche se è circondato solo da punti di A).
oss. questa definizione non si occupa di definire l'operatore "$\in$", ma definise il concetto di punto "interno".

def. x^* è un punto **esterno** ad A se

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A^c$$

oss. Ovviamente se x^* è un punto esterno allora $x^* \in A^c$ ovvero $x^* \notin A$, ma per essere un punto esterno ad A non deve $\in$ ad A^c e, inoltre, deve essere circondato solo da punti di A^c

def. x^* è un punto di **frontiera** se

$$\forall B_r(x^*),\ (B_r(x^*) \cap a) \neq \emptyset \ \ \wedge \ \ (B_r(x^*) \cap A^c) \neq \emptyset$$

oss. Un punto è di frontiera se non é nè interno nè esterno.

Insiemi aperti e chiusi

def. Dato un insieme A (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^2$)

- si dice **aperto** se è fatto solo da punti interni;
- si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto oppure se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

es. l'insieme in $\mathbb{R}$

$$A = (a, b)$$

è un insieme aperto e i punti a e b sono di frontiera.
es. se, però, cambiamo l'ambiente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ otteniamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a < x < b, \quad y = 0\}$$

che non è aperto in quanto è costituito solo da punti di frontiera, ma non li contiene tutti, quindi non è neanche chiuso.
IMMAGINE

2-LEZIONE

07/10/19

Topologia in $\mathbb{R}$

Punti isolati e di accumulazione

def. Un punto $x_0 \in A$ si dice **isolato** per A se

$$\exists B_r(x_0) \quad : \quad B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$$

img1

es. Prendiamo l'insieme

$$A = x \in \mathbb{R} \; : \; x = n \in \mathbb{N}$$

img2
Notiamo che A è fatto di soli punti isolati.

def. Un punto x_0 è un punto di **accumulazione** per A se

$$\forall B_r(x_0) \exists x \in A \; e \; x \neq x_0$$

cioè se esiste una successione di punti di A che raggiunge x_0.
img3
il disegno mostra come ci sia un percorso che raggiunge x_0.
oss. Da notare è il fatto che il punto può $\in A$ come può $\in A^c$.
oss. tutti i punti interni ad un insieme sono di accumulazione.
oss. i punti di frontiera sono di accumulazione purchè non siano isolati

es.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x \; : \; -4 < x \leq e \;\vee\; x = \pi \;\vee\; x > 10\}$$

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

I punti di frontiera sono $-4, e, \pi, 10$. Ma π non è un punto di accumulazione.

Insieme limitato, convesso, non convesso e compatto

def. Un insieme A è **limitato** se occupa una porzione con area finita dell'ambiente. Formalmente si dice che è limitato se

$$\exists y \in \mathbb{R}^2 \; e \; B_r(y) \subset A.$$

Spesso per y si prende l'origine degli assi.

es. Analizza il seguente insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x \ : \ -4 < x \leq e \ \vee \ x = \pi \ \vee \ x > 10\}$$

L'insieme corrispone a questo:

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

che non è limitato per via di $(10, +\infty)$.

def. un insieme A è **convesso** se $\forall x, \ y \in A$ il segmento di estremi x e y appartiene ad A.
Esempi di insiemi convessi:
img4

def. un insieme A è **non convesso** se esiste un segmento con estremi $x, \ y \ \in A$ tale per cui parte di esso non sia contenuto nell'insieme A.
Esempi di insiemi non convessi:
img5

es. In $\mathbb{R}$ gli insiemi "convessi" che insiemi sono?
$\mathbb{N}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
$\mathbb{Q}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
Gli unici insimei "convessi" in $\mathbb{R}$ sono gli insiemi:

- singoletti;
- intervalli;
- semirette.

def. un insieme A è **compatto** se è chiuso e limitato.

es. esempio di insieme compatto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1 \ e \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

img6
l'insieme è chiuso e limitato, quindi compatto.

Funzioni

Definizioni principali

def. cos'è una **funzione**?

Una funzione ha tre "ingredienti" principali che la compondono:

- un insieme di partenza detto **dominio** V, un elemento di questo insieme lo simboleggiamo con la lettera v.
- un insieme di arrivo detto **codominio** W, un elemento del secondo insieme lo simboleggiamo con la lettera w.
- una legge che definisce la funzione, simboleggiata dal simbolo $f()$.

def. Si dice **dominio naturale** l'insieme V', contenuto o uguale V, il più grande sottoinsieme del dominio dove la legge è completamente definita.

def. Si dice che w è l' **immagine** di v attraverso f.

$$w = f(v)$$

def. Si dice che v è la **controimmagine** di w attraverso f.

def. L'**insieme immagine** è la totalità delle immagini e si indica come $im(f)$, spesso si dice anche "immagine della funzione".

$$im(f) = \{w \in W \ : \ \exists \ v \rightarrow f(v) = w\}$$

Funzioni iniettive, suriettive e biettive

def. una funzione f si dice **iniettiva** se preserva elementi distinti.

$$se \ \ \forall v_1 \neq v_2 \ \rightarrow \ \ f(v_1) \neq f(v_2)$$

def. una funzione è **non iniettiva** se ci sono elementi diversi con la stessa immagine.

def. una funzione è **suriettiva** se "invade" tutto il codominio.

$$im(f) \ \equiv \ W$$

es. Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to y = sin(x)$$

non è iniettiva e non è suriettiva.

es. Definire se la seguente funzione è iniettiva o suriettiva:

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$
$$x \to y = sin(x)$$

img8
è iniettiva e suriettiva.

def. una funziona che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biiettia**.

Successioni

definizione

def. Le successioni sono funzioni particolari il cui dominio è $\mathbb{N}$ e il codominio $\mathbb{R}$

$$f: \quad V = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to y = f(n)$$

Spesso si scrive: $n \to y = f_n$, oppure $n \to y = a_n$, dove a_n è l'immagine dell'elemento n-esimo.
img9

Successioni monotone e limitate

def. Una successione si dice **monotona** se ha un andamento con un trend costante.

def. Una successione di dice monotona **crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} < a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} > a_{n_2}$$

oss. una successione **costante** è una successione monotona crescente e decrescente.

def. una successione è **limitata** se il suo insieme immagine $im(f)$ è un insieme limitato di $\mathbb{R}$

$$im(f) \quad \subseteq \quad B_r(x)$$

Vediamo alcuni esempi di successioni che contengono alcuni casi notevoli.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

img10
Notiamo che n non può assumere il valore 0, che quindi è escluso dal suo dominio. La successione è limitata, ma oscilla, quindi non è monotona.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

img11

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > a_1$$

$$a_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} > a_2$$

Questa successione è famosa perchè converge al valore e. E' limitata e monotona strettamente crescente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a = ln(n)$$

Non è limitata, ma è limitata solamente inferiormente, è monotona strettametne crescente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

img13
è limitata e periodica con periodo $T = 2$.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = sin(n)$$

img14
è limitata, non è monotona, può sembrare periodica, ma non lo è perchè il periodo sarebbe $2\pi \notin \mathbb{N}$.

es. successione potenza

$$a_n = n^{\frac{1}{2}}$$

img15
monotona strettamente crescente, limitata inferiormente.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^{(\frac{1}{2})}$$

img16

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

img17

Natura delle successioni

def. La **natura** (o **comportamento**) di una successione è l'andamento osservato per grandi valori del dominio.
La natura di una successione è di tre tipi:

- convergente
- divergente (positivamente o negativamente)
- irregolare

def. Si dice che $\{a_n\}$ **converge** a L e lo scrivo

$$a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} L$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

img18
definizione formale:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \;\; se \;\; \forall B_r(L)\, \exists\, M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(L)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r del limite L esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno del valore L.
img19

def. a_n è **positivamente divergente** o **divergente a** $+\infty$ e lo scrivo

$$a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \;\; se \;\; \forall B_r(+\infty)\, \exists\, M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(+\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img20

def. una successione è **negativamente divergente** o **divergente a** $-\infty$ e lo scrivo

$$a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

definizione formale:

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = -\infty \;\; se \;\; \forall B_r(-\infty) \; \exists \; M \quad : \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(-\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img21

def. Una successione ha una **proprietà definitiva** se la proprietà è valida per la successione da un certo valore in poi.

Le definizioni di convergenza e divergenza possono essere riscritte usando la definizione della proprietà definitiva.

def. Una successione che non è né divergente né convergente è **irregolare**.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n$$

questa successione è irregolare e limitata.

es. Analizza la seguente successione:

$$a_n = (-1)^n n^2$$

questa successione è irregolare e illimitata.

LEZIONE 3

10/10/19

[perso i primi 20 minuti]

Sta parlando di limiti...

$$\forall B_s(l) \; \exists \; B_q(x_0) \quad : \quad \forall x \in A \cap B_q(x_0) - \{x_0\} \quad , \quad f(x) \in B_s(l)$$

"per ogni intorno del valore limite l" definitivamente vicino a x_0 la funzione sta nell'intorno del valore limite.

Algebra dei limiti

Per poter fare dei confronti rigorosi fra limiti, ovvero fra funzioni, ho bisogno di introdurre due simboli:

- asintotico: $\sim$
- o-piccolo: o

o-piccolo

def. $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se f è trascurabile rispetto g. Cioè se, confrontando f e g, f perde.

def. Definizione formale:

$$f = o(g) \;\; se \;\; f(x) = g(x)h(x) \;\; e \;\; h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

oss. conseguenza è che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

es. Per $x \longrightarrow 0$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to vera$$

$$x = o(x^2) \to falsa$$

es. Per $x \longrightarrow +\infty$ dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

$$x^2 = o(x) \to falsa$$

$$x = o(x^2) \to vera$$

regola. Nell'intorno dell'origine (tendendo a $\to 0$) potenze alte della variabili sono trascurabili, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più basse.
regola. allontanandosi dall'origine (tendendo a $\to \pm\infty$) potenze basse sono trascurabili rispetto a potenze più alte, cioè sono o-piccolo rispetto a potenze più alte.

Proprietà di o-piccolo

- Costanti in o-piccolo.
  Con $k \in \mathbb{R}$ e costante:
  $$o(k \cdot g) = o(g) = k \cdot o(g)$$
  dim.
  $$f = o(k \cdot g) \to f = o(g)$$
  $$f = k \cdot g \cdot h$$
  ma $h \to 0$, quindi $k \cdot h \to 0$
  $$f = o(g)$$

- Somma di o-piccoli.
  $$o(g) \pm o(g) = o(g)$$
  dim. conseguenza della proprietà precedente.
  oss. errore tipico: $o(g) - o(g) = 0$. SBAGLIATISSIMO.
  es. per $z \longrightarrow +\infty$
  $$f_1 = x^3 - 2x + 4 = x^3 + o(x^3)$$
  $$f_2 = x^3 + x^2 - 7 = x^3 + o(x^3)$$
  $$f_1 - f_2 = x^3 + o(x^3) - (x^3 + o(x^3)) = o(x^3) - o(x^3) \neq 0$$
  $$f_1 - f_2 = -2x + 4 - x^2 + 7$$

- Prodotto di funzioni e o-piccolo.
  Con f una funzione
  $$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

dim.

$$F = o(g) = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$

moltiplico entrambe le parti per f

$$f \cdot F = f \cdot g \cdot h$$

- Potenze di o-piccolo.
  Con $k \in \mathbb{R}^+$

  $$[o(g)]^k = o(g^k)$$

  dim.

  $$G = o(g)$$

  $$G = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 0$$

  elevo tutto alla k

  $$G^k = g^k \cdot h^k \qquad H = h^k \to 0$$

Asintotico

def. f è **asintotico** a g se tendono allo stesso valore e inoltre ci tendono allo stesso modo.

$$f \sim g \quad x \to x_0$$

formalemente:

$$f \sim g \quad se \quad f = g \cdot h \;\; e \;\; h \to 1$$

oss. conseguenza:

$$\frac{f}{g} \to 1$$

teor. teorema fondamentale che lega $\sim$ e $o()$
per $x \to x_0$

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$$

Due funzioni sono asintotiche se hanno lo stesso termine dominante.

dim. dimostrazione da sinistra a destra ($\Rightarrow$):
ipotesi: $f = g \cdot h$ e $h \to 1$. Sottraggo g da entrambi i membri:

$$f - g = g \cdot h - g = g(h-1) \quad H = h - 1 \longrightarrow 0$$

$$f - g = o(g)$$
$$f = g + o(g)$$

dim. dimostrazione da destra a sinistra ($\Leftarrow$)
ipotesi: $f - g = o(g)$

$$f - g = g \cdot h \quad h \to 0$$
$$f = g + g \cdot h = g(1 + h) \quad H = h + 1 \to 1$$
$$f \sim g$$

Proprietà di asintotico

- Potenza di funzioni asintotiche:

  $$f \sim g \Longleftrightarrow f^k \sim g^k$$

  dim. [manca la dimostrazione]

  $$f = g \cdot h \quad \dots$$

- Prodotti e rapporti di funzioni asintotiche.
  $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora

  $$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$
  $$\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$$

  prodotti e rapporti di funzioni asintotiche sono asintotici fra loro.

  dim. [manca la dimostrazione]

  $$f_1 \sim g_1$$
  $$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
  $$f_2 \sim g_2$$
  $$f - 1 = g_1 \cdot h - 1 \quad e \quad h_1 \to 1$$
  $$\dots$$
  $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot H \quad H = \frac{h_1}{h_2} \to 1$$

oss. Notare che non c'è una proprietà per la somma di asintotici, che invece nell'o-piccolo c'è.

Limiti notevoli

[Stiamo guardando simulazioni su MATLAB. Osserviamo che il seno nell'intorno dell origine è approssimabile con la bisettrice, il cosendo con la parabola, la funzione esponenziale traslata in giù di un unità con la bisettrice, il logaritmo traslato a sinistra di un unità con la bisettrice,etc.]
Vediamo ora in formule questi risultati:

- **Seno**
  per $x \to 0$
  $$sin(x) = x + o(x)$$
  questa uguaglianza si può riscrivere come $sin(x) - x = o(x)$, cioè o(x) è l'errore che sto facendo nell'approssimare $sin(x)$ come x.
  img1
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$sin(x) \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$
- **Coseno**
  per $x \to 0$
  $$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
  $$cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
  img2
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$
- **Esponenziale**
  per $x \to 0$
  $$e^x - 1 = x + o(x)$$
  img3
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$e^x - 1 \sim x$$
  $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- **Logaritmo**
  per $x \to 0$
  $$ln(1+x) = x + o(x)$$
  img4
  Vediamo altre due forme utili della stessa uguaglianza:
  $$ln(1+x) \sim x$$
  $$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

Per ognuno di questi limiti notevoli sono state fornite tre versioni che rappresentano la stessa cosa, la più importante e più ricca di significato è sempre la prima, quella con o-piccolo.

es. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \qquad x \to +\infty$$
numeratore:
$$3x^4 - x = 3x^4 + o(3x^4) = 3x^4 + o(x^4)$$
$$3x^4 - x \sim 3x^4$$
$$(3x^4 - x)^{\frac{1}{2}} \sim (3x^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} \sim \sqrt{3x^4}$$
$$\sqrt{3x^4 - x} = \sqrt{3x^4} + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 = x^2 + o(x^2)$$
$$x^2 - 1 \sim x^2$$
usiamo ora la proprietà dei rapporti di funzioni asintotiche:
$$\frac{\sqrt{3x^4 - x}}{x^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{3x^4}}{x^2} = \sqrt{3}$$
$$\lim_{x\to +\infty} = \sqrt{3}$$

Limite notevole della pontenza α-esima con $0 < \alpha < 1$

$$y = x^{\alpha} \quad con\ 0 < \alpha < 1$$

per $x \to 0$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$$
$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha x + o(x)$$

img5
Questo limite notevole viene usato per risolvere le radici.
Forniamo, come per gli altri limiti notevoli visti, le altre due forme notevoli:

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x \to 0} \ \ldots [manca]$$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2 - x^3} - cos(x)}{sin(x)}$$

per studiare il limite analiziamo l'andamento asintotico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x^2 - x^3} - cos(x)}{sin(x)} \quad per \ \ x \to 0$$

occupiamoci della radice con la proprietà appena vista:

$$(1+t)^{\alpha} - 1 = \alpha t + o(t) \quad per \ \ t \to 0$$

se prendo $t = 2x^2 - x^3$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1 + 2x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2 - x^3) + o(2x^2 - x^3)$$

Analizzando $o(2x^2 - x^3)$, noto che x^3 è trascurabile rispetto a $2x^2$ (ricorda che $x \to 0$), Inoltre la costatne 2 non conta nell'o-piccolo, quindi:

$$1 + \frac{1}{2}(2x^2 - x^3) + o(x^2)$$

Inoltre anche in $(2x^2 - x^3)$ posso ignorare x^3 per lo stesso motivo, quindi:

$$(1 + 2x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Quindi tornando alla funzione originale
Numeratore:

$$1 + x^2 + o(x^2) - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore:

$$x + o(x)$$

Numeratore/denominatore:

$$\frac{\sqrt{1 + 2x^2 - x^3} - cos(x)}{sin(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} \sim \frac{\frac{3}{2}x^2}{x} \sim \frac{3}{2}x$$

Quindi la funzione tende a 0 con la pendenza di $\frac{3}{2}x$

es. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt[4]{16x^2 - 2}}{\sqrt{x+1}}$$

Analiziamo $\sqrt[4]{16x^2 - 2}$, vorremmo usare il limite notevole della potenza α-esima con $0 < \alpha < 1$, in questo caso $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$(1 + t)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}t + o(t) \quad t \to 0$$

ma noi nell'espressione della consegna abbiamo $x \to +\infty$ e non possiamo quindi usare il limite notevole, perciò:

$$= \sqrt[4]{16x^2 - 2} = \sqrt[4]{16x^2(1 - \frac{2}{16x^2})} = 2\sqrt{|x|}(1 - \frac{1}{8x^2})^{\frac{1}{4}} =$$

Ora possiamo usiamo il limite notevole con $t = -\frac{1}{8x^2}$, perchè ora $\frac{1}{x^2}$ tende a 0 per $x \to +\infty$

$$= 2\sqrt{x}(1 + \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{8x^2})) + o(\frac{1}{x^2}) =$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

Analiziamo ora $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x(1 - \frac{1}{x})} = \sqrt{x}(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{x}[1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{x}) + o(-\frac{1}{x})] =$$

essendo il $-$ dentro all'o-piccolo, lo considero come una costante (-1) e quindi lo posso togliere:

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Ora, quindi, ottengo:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

Fra i due o-piccolo, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ è più grande di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

01/10/19 - ESERCITAZIONE

Numeri complessi

es. risolvere
$$|z|^2 - 2z = 0$$
Due soluzioni possibili. La prima:
$$z = x + iy$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0 \lor x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$
La seconda:
$$z = \rho e * i\theta$$
$$|z| = \rho^2$$
$$\rho^2 - 2\rho e^{i\theta} = 0$$
raccogliamo ρ
$$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$$
$$\rho - 2e^{i\theta} = 0$$
$$\rho = 2e^{i\theta}$$
ρ è il modulo
$$\rho e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$$
$$\theta = 0 \land \rho = 2$$

es. determina z_1 e z_2 tali che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \ \land \ Im(z_1) = Im(z_2) = 2$
$$z = x + iy = Re(z) + iIm(z)$$
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 y = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 - 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

ora verifica che $\bar{z_1} = z_2$

$$\bar{z_1} = -1 + 2i$$

$$-z_2 = -1 + 2i$$

es.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 3\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ Re(w) + Im(w) + 1 = 0\}$$

(IMMAGINE di A e di B)

$$C = \{v \in \mathbb{C} \ : \ v = z - 3 + i, z \in A \cap B\}$$

il termine $v = z - 3 + i$ rappresenta un tranlazione di $(-3, 1)$ da applicare all'insieme che è l'intersezione di A e B:

$$z = x + iy$$

$$z = -3 + i = x + iy - 3 + i$$

$$v = (x - 3) + i(1 + y)$$

es. trovare le soluzioni di

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{i}z = 0$$

Non si può applicare il teorema fondamnetale dell'algebra per via della presenza di $\bar{z}$.
Iniziamo togliendo i dal denominatore

$$-\frac{2}{i}\frac{i}{i} = -\frac{2i}{1} = 2i$$

$$z^2 - z\bar{z} + 2iz = 0$$

$$z(z - \bar{z} + 2i) = 0$$

prima soluzione è $z = 0$
Ora poniamo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$

$$2iy + 2i = 0$$

$$2i(y + 1) = 0$$

Da cui ricaviamo $y = -1$
Definire l'insieme B (A rappresenta le soluzioni del punto precedente):

$$B = \{w \in (C)\ :\ w = z + 3i, z \in A\}$$

Notiamo che $w = z + 3i$ rappresenta una traslazione verso l'alto. Quindi il punto $(0, 0)$ diventa $(0, 3i)$, invece la retta $y = -1$, cioè $Im(z) = -1$, diventa la retta $Im(w) = 2$.

es.

$$i^{255} z^3 = \bar{z}$$

Per risolvere i^{225} si può notare che gli esponenti di i seguono un pattern: $i^0 = 1$ $\ i^1 = i$ $\ i^2 = -1$ $\ i^3 = -i$. Inoltre da ricordarsi che i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$
IMMAGINE

$$i^{225} = i^{224+1} = i^{224} i^1 = 1i = i$$

$$iz^3 = \bar{z}$$

Ora risolviamo questa equazione usando la forma esponenziale dei numeri complessi: $z = \rho e^{i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho(\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-i\theta})$$

Che da origine a due soluzioni. La prima:

$$\rho = 0$$

Accettata perchè ρ è un numero reale positivo. La seconda:

$$\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{-i\theta}$$

Modulo:

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = \pm 1$$

Ma essendo ρ un numero reale positivo rifiutiamo -1 come soluzione. Quindi $\rho = 1$.
Argomento:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi$$
$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

per $k = 0, \dots, 3$.
es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = \sqrt{3|Im(z)|}\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ iw^2 \in A\}$$

partendo dal fatto che $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ x = \sqrt{3}|y|\}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & y \geq 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_z e^{i\frac{\pi}{6}} & y \geq 0 \\ \rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}} & y < 0 \end{cases}$$

$$w = \rho_w e^{i\theta_w}$$
$$iw^2 = z$$

moltiplico per $-i$

$$w^2 = -iz$$

Per A^+:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{i\frac{\pi}{6}})$$
$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = \rho_z e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$arg(w) = 2\theta_w = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\theta_w = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k = 0, 1$.
Per A^-:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta w} = (-i)(\rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \rho_z e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$\theta_w = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$$

Permutazioni con e senza ripetizioni

Definiamo il fattoriale di un numero $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)\dots 2\ 1 & n \geq 1 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è tipicamente usato per calcolare il numero di possibili permutazioni. Per esempio il numero di possibili permutazioni (anagrammi) di una parola si ottiene con il fattoriale del numero di lettere.
es. ROMA $\rightarrow 4!$
es. FARFALLA $\rightarrow 8!$, ma se per esempio volessimo eliminare la possibilità di permutare lettere identiche, dovremmo togliere a 8! le possibili permutazioni delle F (2!), delle A (3!), e delle L (2!) e quindi otteremmo:

$$\frac{8!}{2!2!3!}$$

es. In quante configurazioni diverse si possono porre 9 persone in fila indiana? 9!
es. Se le 9 persone dell'esercizio fossero 5 maschi e 4 femmine e noi volessimo avere sempre per prima i tutti i maschi e poi tutte le femmine? 5!4!

Esercizi sui Fattoriali

es. TDE. 3 uomini e 3 donne devono sedersi alternati a un tavolo rotondo, quante sono le diverse possibili configurazioni?
Per risolvere questo esercizio ragioniamo a "coppie" di persone (uomo-donna) che possiamo creare: 3!.
Queste 3! coppie possibili possono essere disposte sul tavolo in 3! modi diversi.
Il numero fino ad ora ottenuto va moltiplicato per due perchè abbiamo solo lavorato con le coppie uomo-donna, ma possiamo rifare lo stesso ragionamento anche per le coppie donna-uomo.
Ultimo fattore da considerare è il fatto che il tavolo sia rotondo, infatti le permutazioni possibili di elementi su un tavolo rotondo non sono $n!$ ma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Questo accade perchè se avessimo un fila indiana da riempire con gli elementi A,B e C otterremmo tre possibili configurazioni: ABC, CAB, BCA. Ma se disposte su un tavolo rotondo queste tre disposizioni sono esattamente la stessa disposizione.

Risposta:

$$\frac{3!2!2!}{6}$$

(6 sono i posti a tavola)

es. TDE
Possibili anagrammi di ESAME?

$$\frac{5!}{2!} = 5\ 4\ 3 = 60$$

es. TDE
Con 14 partite di una schedina di calcio con 3 pareggi e 2 vittorie in casa, quante possibilità di compilare la schedina ci sono?

$$\frac{14!}{9!2!3!}$$

es. TDE
Quante password di 6 cifre e composte solo dai caratteri "0" "1" "2" esistono?

$$3^6$$

Coefficienti binomiali

def. Coefficiente binomiale con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vediamo alcuni coefficienti binomiali notevoli:
caso $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = 1$$

casp $k = n$:

$$\binom{n}{n} = 1$$

caso k piccolo, comodo perchè risolve il binomiale trasformandolo in una frazione con k fattori sopra e sotto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

dim.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) = (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k!)}$$

caso n e k sono numeri molto simili, comodo perchè riconduce il binomiale alla formula precedente

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dim.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

def. potenza del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

es. ceofficiente di x^7y^3 nello sviluppo di $(2x-y)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^k(-y)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} 2^k(-1)^{10-k}x^k y^{10-k}$$

per x^7y^3 devo prendere $k=7$:

$$\binom{10}{7} 2^7(-1)^3 = \dots = -30\ 2^9$$

es. TDE. Coefficiente di a^5b^7 nello sviluppo di $(2\sqrt{a}b + 3ab)^7$
Si potrebbe applicare direttamente Newton, ma per semplificare i calcoli sarebbe meglio prima raccogliere ab

$$a^{\frac{7}{2}}b^7(2+3a^{\frac{1}{2}})^7 = a^{\frac{7}{2}}b^7 \left[\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k (3a^{\frac{1}{2}})^{7-k}\right]$$

l'intera sommatoria è moltiplicata per b^7 e $a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{7}{2}-\frac{k}{2}}$, quindi per ottenere b^7a^5 devo prendere $k = 4$.

$$k = 4 \to \binom{7}{4} 2^4 (3)^3 = \dots$$

es. risolvere la seguente equazione

$$2\binom{x-1}{1} + 3\binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$$

per $x - 1 \geq 1$, per $x + 1 \geq 3$ e $x \geq 2$, quindi solo $x \geq 2$

$$2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + 3\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - \frac{x!}{2!(x-2)!} = 0$$

$$2(x-1)\frac{(x-2)!}{(x-2)!} + 3\frac{x+1}{6} - \frac{x(x-1)}{2} = 0$$

$$(x-1)(2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = 0$$

$x - 1 = 0$ non si accetta.
$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$ è impossibile.
non ci sono soluzioni.

Topologia in $\mathbb{R}$

def.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **maggiorante** di A se $k \geq x, \forall x \in A$.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **minorante** di A se $k \leq x, \forall x \in A$.
Un insieme è **limitato superiormente** se ne esiste almeno un maggiorante.
Un insieme è **limitato inferioremente** se ne esiste almeno un minorante.
L'**estremo inferiore** $inf(A)$ è il massimo dei minoranti (non deve per forza appartenere ad A).
L'**estremo superiore** $sup(A)$ è il minimo dei maggioranti (non deve per forza appartenere ad A).
Il **minimo** $min(A)$ è uguale all'$inf(A)$ se esso appartiene ad A. Notare che se esiste il $min(A)$ esso è anche l'$inf(A)$, ma non vale il viceversa.

es. consideriamo l'insieme $A = (0, 1]$.
-1 è un minorante, pure -2, etc. L'insieme dei minoranti di A è: $(-\infty, 0]$, il più grande è lo 0, che quindi è l'$inf(A)$, ma non è il $min(A)$, perchè non

appartiene ad A.
Se invece l'insieme fosse stato $A = [0, 1]$, l'insime dei minoranti sarebbe ancora $(-\infty, 0]$, l'$inf(A)$ sarebbe ancora 0, ma in questo caso sarebbe anche il $min(A)$.
Linsieme dei maggioranti è invece $[1, +\infty]$, $sup(A) = 1$, $max(A) = 1$.

def. Un punto è detto di **accumulazione** se:

- qualunque intorno di quel punto contiene almeno un punto di A
- ogni intorno di x_0 contiene un punto in A diverso da x_0

def. un punto è detto di **frontiera** se:

- in ogni intorno cadono punti di A e di A^c

def. un punto è detto **isolato** se:

- per qualunque intorno non ci sono altri punti di A

es.

$$A = \{\{-2\} \cup (1, 3]\}$$

-2 è di frontiera e isolato, 1 e 3 sono di frontiera.

def. un insieme è detto **interno** se:

- esiste almeno un intorno con solo punti di A

def. un insieme è detto **aperto** se:

- tutti i punti di A sono punti interni

def. un insieme è detto **chiuso** se:

- tutti i punti di A sono punti di accumulazione

es.

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \in [1, 5]\}$$

che equivale all'insime

$$\{-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq \sqrt{5}\} \cap \mathbb{Q}$$

maggioranti: $(\sqrt{5}, +\infty)$
$sup(B) = \sqrt{5}$, ma non esiste perchè siamo in ıı
$inf(B) = \dots$
$max(B) =$ non esiste
$min(B) = \dots$

01/10/19 - ESERCITAZIONE

[manca prima ora]

es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-9| > |z-9i|\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ arg(w) = \frac{\pi}{4}\}$$

$A \cup B$ è:

- chiuso
- aperto
- nè chiuso nè aperto
- numerabile (cioè se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali)

img 22
I punti che appartengono ad A sono quelli al di sopra della bisettrice, bisettrice non inclusa. L'insieme B è invece la bisettrice che parte dall'origine e taglia il I quadrante.
I punti della semiretta bisettrice che parte dall'origine e taglia il III quadrante è costituita da punti di accumulazione.
La risposta corretta è che l'insieme $A \cup B$ non è nè chiuso nè aperto.

es. TDE

$$A = \{z = x + iy \ \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z-2|}{|z|} < 1\}$$

A è:

- senza punti di accumulazione
- aperto
- chiuso
- limitato

$$z - 2 = x - 2 + iy$$

$$\frac{|z-2|}{|z|} = \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} < 1$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 < x^2 + y^2$$

$$x > 1$$

Ha punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ascisse, non è limitato, non è chiuso perchè non contiene tutti i suoi punti di accumulazione, per esempio quelli sull'asse delle ordinate. La risposta giusta è che è aperto.

es.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = 5 - \frac{2}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

per $n = 1$ abbiamo $x_1 = 3$, poi per $n = 2$ abbiamo $x_2 = 4$, poi $x_3 = 5 - \frac{2}{3}$ etc.
L'idea dell'insieme è che al crescere di n ci avviciniamo sempre di più al valore 5.

$$f(x) = 5 - \frac{2}{x}$$

img23
Troviamo inf e sup di A:

$$inf(A) = 3 = min(A)$$

Per verificare che 3 sia l'inf devo verificare che sia un minorante e sia il massimo dei minoranti.
Verifichiamo che 3 sia un minorante:

$$3 \leq x_n$$

$$3 \leq 5 - \frac{2}{n}$$

$$\frac{2}{n} \leq 2$$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

Ora verifichiamo che sia il massimo dei minoranti, cioè che se salgo sopra il 3, non trovo più un minorante:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ x_n \ : \ x_n < 3 + \epsilon$$

$$5 - \frac{2}{n} < 3 + \epsilon$$

$$\frac{2}{n} > 2 - \epsilon$$

$$n < \frac{2}{2-\epsilon}$$

essendo $\frac{2}{2-\epsilon}$ maggiore di 1 mi basta prendere $n = 1$.
Inoltre 3 è anche minimo perchè appartiene all'insieme.
Verifichiamo ora che 5 è il sup ma non il max di A.

$$sup(A) = 5 \neq max(A)$$

Per essere il sup deve essere maggiorante e il minimo dei maggioranti.

$$5 \geq X_n \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$5 \geq 5 - \frac{2}{n} \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$0 \geq -\frac{2}{n}$$

Ora voglio verificare che sia il minimo dei maggioranti, cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; x_n \; : \; x_n > 5 - \epsilon$$

$$5 - \frac{2}{n} > 5 - \epsilon$$

$$-\frac{2}{n} > -\epsilon$$

$$\epsilon > \frac{2}{n}$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

$$n = \frac{2}{\epsilon} + 3$$

Ora dobbiamo dimostrare che non è il massimo, cioè che non appartiene all'insieme.
Tutti gli elementi dell'insieme hanno la forma

$$5 - \frac{2}{n}$$

Ma siccome non esiste n per cui $5 - \frac{2}{n} = 5$, l'elemento non appartiene all'insieme.
L'insieme è limitato? sì.
Tutti i punti sono isolati? sì, dimostriamolo:

$$x_{\bar{n}} = 5 - \frac{2}{\bar{n}}$$

$$d = dist(x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}) = \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}$$

se quindi prendiamo l'intorno

$$B(x_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{n}(\bar{n}+1)}) \quad (?)$$

abbiamo dimostrato che tutti i punti sono isolati.
Troviamo ora il limite per $n \to \infty$ e dimostriamolo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x_n = 5 - \frac{2}{n} \quad , n \in \mathbb{N} - 0\}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 5$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \ : \ \forall n > \bar{n} \ \ vale \ \ |x_n - 5| < \epsilon$$

$$|x_n - 5| < \epsilon$$

$$|(3 - \frac{2}{n} - 5)| < \epsilon$$

$$\frac{2}{n} < \epsilon$$

$$n > \frac{2}{\epsilon}$$

es. dimsotrare

$$lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 + n}{n^2 - 1} = 3$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \ : \ \forall n > \bar{n} \ \ vale \ \ |\frac{3n^2 + n}{n^2 - 1}| < \epsilon$$

$$|\frac{n+3}{n^2-1}| < \epsilon$$

$$-\epsilon < \frac{n+3}{n^2-1} < \epsilon$$

$$\begin{cases} \frac{n+3}{n^2-1} > -\epsilon \\ \frac{n+3}{n^2-1} < \epsilon \end{cases}$$

La prima disequazione è sempre verificata, per la seconda:

$$\epsilon n^2 - n - (\epsilon + 3) > 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\epsilon(\epsilon+3)}}{2\epsilon}$$
$$n \leq \frac{\alpha??}{2\epsilon} \vee \frac{1+\sqrt{1+4\epsilon(\epsilon+3)}}{2\epsilon}$$

es. descrivere il carattere della seguente successione:

$$a_n = n - 2cosn\frac{\pi}{2} \ \rightarrow n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

notiamo un pattern:

$$cos(1+\frac{\pi}{2}) = 0 \ \ , \ \ cos(2+\frac{\pi}{2}) = -1 \ \ , \ \ cos(3+\frac{\pi}{2}) = 0 \ \ , \ \ cos(4+\frac{\pi}{2}) = 1$$

al crescere di n il pattern si ripete. La nostra successione quindi si muove così:z

$$a_1 = 1 \ \ , \ \ a_2 = 4 \ \ , \ \ a_3 = 3 \ \ , \ \ a_4 = 2$$

quindi a_n è:

$$a_n = \begin{cases} 4k+1 & se \ n = 4k+1 \\ 4k+4 & se \ n = 4k+2 \\ 4k+3 & se \ n = 4k+3 \\ 4k+2 & se \ n = 4k+4 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{N}$
Il limite di a_n per $n \rightarrow +\infty$ é $+\infty$.
dimostriamolo:

$$\forall k > 0 \ \exists \ \bar{n} \ : \ \forall n \geq \bar{n} \ \ vale \ \ a_n > k$$

qualunque k fissato riesco a trovare un $\bar{n}$ per cui tutti i successivi elementi sono maggiori di k.
[manca dimostrazione] ...

es.

$$a_n = (1 - cos\frac{9}{10}\pi)^n$$

E' simile alla successione geometrica ($a_n = q^n$).
Analiziamo la sua ragione:

$$-1 < cos\frac{9}{10} < 0$$

quindi

$$1 < q < 2$$

diverge a $+\infty$