TRIGONOMETRIA

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

$$sin(x)cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$$

$$cos(2x) = \begin{cases} cos^2(x) - sin^2(x) \\ 1 - 2sin^2(x) \\ 2cos^2(x) - 1 \end{cases}$$

$$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x)) \quad ottenuta\ da\ [cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)]$$

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x)) \quad ottenuta\ da\ [cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1]$$

$$Ch^(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Sh^(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1$$

$$Sh(2x) = 2Sh(x)Ch(x)$$

$$Ch(2x) = Sh^2(x) + Ch^2(x)$$

$$SettSh(x) = log(+ + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$SettCh(x) = log(x + \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1})$$

$$Sh(SettCh(a)) = \sqrt{a^2 - 1} \quad ottenuta\ da\ [Ch^2(x) {-} Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Sh(x) = \sqrt{Ch^2(x) - 1}] \rightarrow [x = SettCh(a)]$$

$$Ch(SettSh(a)) = \sqrt{a^2 + 1} \quad ottenuta\ da\ [Ch^2(x) {-} Sh^2(x) = 1] \rightarrow [Ch(x) = \sqrt{1 + Sh^2(x)}] \rightarrow [x = SettSh(a)]$$

$$sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}sin(a + b) + sin(a - b)$$

$$cos(a)sin(b) = \frac{1}{2}sin(a + b) - sin(a - b)$$

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}cos(a + b) + cos(a - b)$$

$$sin(a)sin(b) = -\frac{1}{2}cos(a + b) - cos(a - b)$$

$$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

$$sin(a - b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

$$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Angolo		Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
Radianti	Gradi				
0	0°	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0
π	180°	0	-1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	∞	0
2π	360°	0	1	0	∞

568 × 539

ASINTOTICI

$$\sin(f(x)) \sim f(x) \qquad \ln(1+f(x)) \sim f(x) \qquad \log_a(1+f(x)) \sim \frac{f(x)}{\ln(a)}$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \qquad a^{f(x)} - 1 \sim \ln(a) f(x) \qquad (1+f(x))^c - 1 \sim c f(x)$$

$$1 - \cos(f(x)) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2 \qquad \tan(f(x)) \sim f(x) \qquad \arcsin(f(x)) \sim f(x)$$

$$\arctan(f(x)) \sim f(x) \qquad \sinh(f(x)) \sim f(x) \qquad \cosh(f(x)) - 1 \sim \frac{[f(x)]^2}{2}$$

$$\tanh(f(x)) \sim f(x)$$

DERIVATE

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x) = \text{costante}$	$f'(x) = 0$ Dimostrazione derivata di una costante
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$ Dimostrazione derivata di x
$f(x) = x^s, \quad s \in \mathbb{R}$	$f'(x) = sx^{s-1}$ Dimostrazione derivata di una potenza
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$ Dimostrazione derivata dell'esponenziale
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$ Dimostrazione derivata del logaritmo
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \|x\|$	$f'(x) = \frac{\|x\|}{x}$ Dimostrazione derivata valore assoluto
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$ Dimostrazione derivata del seno
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$ Dimostrazione derivata del coseno
$f(x) = \tan(x)$ [non è elementare]	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ Dimostrazione derivata della tangente
$f(x) = \cot(x)$ [non è elementare]	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ Dimostrazione derivata della cotangente

$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Dimostrazione derivata dell'arcoseno
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Dimostrazione analoga alla precedente
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Dimostrazione derivata dell'arcotangente
$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ Dimostrazione analoga alla precedente
$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \cosh(x)$ Dimostrazione: semplici conti
$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \sinh(x)$ Idem come sopra

SVILUPPI

Alcuni sviluppi di McLaurin notevoli (si sottintende ovunque che i resti sono trascurabili per $x \to 0$)

e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\sinh x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cosh x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$
$\tanh x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$	
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan x$	$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$	
$\arcsin x$ $\arccos x$	$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \left\lvert \binom{-1/2}{n} \right\rvert \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$ $= \frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$= \sum_{k=0}^{n} \left\lvert \binom{-1/2}{k} \right\rvert \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k}x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \binom{-1/2}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k}x^k + o(x^n)$
$\sqrt[3]{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots + \binom{1/3}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{1/3}{k}x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$	$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{7}{81}x^3 + \cdots + \binom{-1/3}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/3}{k}x^k + o(x^n)$

Si ricordi che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si pone $\binom{\alpha}{0} = 1$ e $\binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ fattori}}}{n!}$ se $n \geq 1$.

SERIE

serie geometrica

per $q \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

per $q = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & se \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & se \quad q \geq 1 \\ irregolare & se \quad q \leq -1 \end{cases}$$

serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq log(n+1) \to +\infty$$

per $\alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to +\infty$$

per $\alpha > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = converge$$

per $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} (\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = serie \;\; di \;\; mengoli)$$

serie di mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Serie di potenza

Con a_k costanti reali (o complesse) e x variabile reale (o complessa)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$Sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$Ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad per \;\; |x| < 1$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad per \;\; |x| < 1$$

teor. Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che il termine generale a_n tenda a zero. (Cioè perchè la serie converga, il termine a_n deve tendere a zero, ma non per forza se il termine

a_n tende a zero allora la serie converge)

teor.supponiamo che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga, allora per ogni k anche risulta convergente anche $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

Criterio serie a termini non negativi Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi è convergente o divergente a $+\infty$. Essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata.

Criterio del confronto Siano $\sum an$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi tali che $a_n < b_n$ definitivamente, allora:

- $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.
- $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente.

Criterio del confronto asintotico Se $a_n \sim b_n$, allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere (o entrambe divergenti o entrambe divergenti)

Criterio della radice Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- $l > 1$ la serie diverge $+\infty$
- $l < 1$ la serie converge
- $l = 1$ nulla si può concludere

Spesso utilizzato con termini che hanno come esponente n. **Criterio del rapporto** Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- $l < 1$ diverge $+\infty$
- $l < 1$ converge
- $l = 1$ nulla si può concludere

Spesso utilizzato quando si hanno termini come n^n e $n!$. **Criterio serie a termini di segno variabile** Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_n|$. Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge.

Criterio di Leibniz Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \ \ con \ \ a_n \geq 0 \, \forall \, n$$

Se la successione $\{a_n\}$ è decrescente e se $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, allora la serie è convergente.
Il criterio di Leibniz può essere applicato anche se i termini sono definitivamente di segno alterno e la successione a_n è definitivamente decrescente.
Per verificare la decrescenza bisogna dimostrare che $a_{n+1} < a_n$ oppure mediante il limite a $+\infty$ della derivata prima di a_n o studiano quando la derivata prima di $a_n < 0$.

Criterio della somma di serie convergenti Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converge.

Criterio della somma di serie convergenti e divergenti Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge.

Criterio serie a termini complessi Sia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con a_n complesso, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Criterio di Dirichlet Siano a_n e b_n due succesioni tali che:

- a_n è a valori complessi e la sua successione delle somme parziali è limitata.
- b_n è a valori reali positivi e tende monotonamente a zero

allora la serie $\sum a_n b_n$ è convergente.

INTEGRALI

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Integrali fondamentali:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a\ dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + c$$

$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

$$\int tan(x)dx = -log|cos(x)| + c$$

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + c$$

$$\int cotg(x)dx = log|sin(x)| + c$$

$$\int (1 + tg^2(x))dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + c$$

$$\int (1 + ctg^2(x))dx = \int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cotg(x) + c$$

$$\int Sh(x)dx = Ch(x) + c$$

$$\int Ch(x)dx = Sh(x) + c$$

$$\int Th(x)dx = log(Ch(x)) + c$$

$$\int Coth(x)dx = log|Sh(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c$$

Integrali notevoli:

$$\int sin^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x)+sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x-sin(x)cos(x))+c$$

$$\int cos^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ cos^2(x)+sin^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x+sin(x)cos(x))+c$$

$$\int tan^2(x)dx = tan(x) - x + c$$

$$\int cotan^2(x)dx = -x - cot(x) + c$$

$$\int Sh^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x)-Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{4}(Sh(2x)-2x)+c$$

$$\int Ch^2(x)dx = [integrato\ una\ volta\ per\ parti\ e\ sostituzione\ con\ Ch^2(x)-Sh^2(x) = 1] = \frac{1}{2}(x+Sh(x)Ch(x))+c$$

$$\int Th^2(x)dx = x - Th(x) + c$$

$$\int Coth^2(x)dx = x - Coth(x) + c$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + tan^2(x)dx = -cotan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = [1 = cos^2(x) + sin^2(x)] = \int 1 + cotan^2(x)dx = tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{tan^2(x)}dx = \int cotan^2(x)dx$$

$$\int \frac{1}{cotan^2(x)}dx = \int tan^2(x)dx$$

$$\int \frac{1}{Ch^2(x)}dx = \int (1 - Th^2(x))dx = Th(x) + c$$

$$\int \frac{1}{Sh^2(x)} = \int (-1Coth^2(x))dx = -Coth(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = arcSh(x) + c = log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pm a^2+x^2}}dx = log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 arcsin(\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c$$

Integrali riconducibili:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot cos(f(x))dx = sin(f(x)) + c$$

$$\int f'(x) \cdot sin(f(x))dx = -cos(f(x)) + c$$

$$\int e^{(f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + c$$

Integrazione per sostituzione:

Sostituire alla variabile x una funzione di un'altra variabile t, purchè tale funzione sia derivabile e invertibile.
Ponendo $x = g(t)$ da cui deriva $dx = g'(t)dt$ si ha che:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

Da ricordare è che se si è in presenza di un integrale definito bisogna aggiornare anche gli estremi di integrazione. Se non si volesse cambiare l'intervall odi integrazione si può risostituire il vecchio valore di t.

Integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$$

Per prima cosa se il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, si esegue la divisione di polinomi:

- Si dispongono i polinomi dal termine di grado maggiore a quello minore nella seguente maniera:

  $$P(x) \;\mid\; Q(x)$$

  badando al fatto che se nel polinomio $P(x)$ mancasse qualche termine bisognerebbe scrivere 0 nella sua posizione.

- Si dividono il termine di grado massimo di $P(x)$ con quello di grado massimo di $Q(x)$, riportando il risultato al di sotto di $Q(x)$.

- Moltiplichiamo il termine appena scritto per ogni termine di $Q(x)$, ne invertiamo il segno e lo trascriviamo al di sotto dei termini con lo stesso grado di $P(x)$

- Sommiamo termine per termine $P(x)$ con i valore appena scritti e li riportiamo sotto.

- Ripetiamo questo procedimento finchè il grado più alto fra i termini dell'ultima riga scritta a sinistra è minore (non minore uguale) del termine di grado massimo di $Q(x)$

- Il polinomio a destra è il risultato della divisione $S(x)$, mentre ciò che rimane sulla sinistra è il resto $R(x)$. Possiamo ora riscrivere il numeratore:

  $$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Vediamo ora i vari casi possibili:

- **denominatore di primo grado:** integrale immediato tramite il logaritmo
- **denominatore di secondo grado:** si calcola il segno del discriminante:
  - **due radici distinte:** si scompone in fratti semplici

    $$\frac{N(x)}{D_1(x)\cdot D_2(x)} = \frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$$

    $$\frac{a\cdot D_2(x) + b\cdot D_1(x)}{D_1(x)\cdot D_2(x)} = \frac{N(x)}{D_1(x)\cdot D_2(x)}$$

    $$a\cdot D_2(x) + b\cdot D_1(x) = N(x)$$

    Una volta determinate a e b si riscrive l'integrale come $\frac{a}{D_1(x)} + \frac{b}{D_2(x)}$ e si integra come somma di logaritmi
  - **denominatore quadrato perfetto:** (due soluzioni coincidenti), si procede per sostituzione:

    $$\int \frac{N(x)}{D(x)^2}dx = [D(x) = t,\ \ldots] =\ \ldots$$

    L'utilità della sostituzione è quella di spezzare la frazione in una somma di frazion ida integrare una ad una.
  - **denominatore non si annulla mai:**
    Casi semplici:

    $$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + c$$

    $$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$$

    $$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x+b}{a} + c$$

    Caso generico: Si cerca di dividere l'integrale in una somma di integrali, il primo deve contenere al numeratore la derivata del denominatore, il secondo non deve contenere la x al numeratore, cioè deve essere una costante e quindi riconducibile ai casi semplici sopra riportati. Il denominatore non cambia. Ci si arriva a logica.
- **denominatore di grado maggiore di due:** è sempre possibile scomporlo in prodotti di fattori di primo grado o di secondo grado irriducibili, per farlo si usa Ruffini (o altrimenti si va a tentoni ricordando che PROBABILMENTE una radice della funzione è un dividendo (positivi e negativi) del numero che si ricava moltiplicando il coefficiente del termine massimo e il termine noto).
  Fatto questo si scompone la frazione in fratti semplici con la stessa logica del caso di due radici distinte, ricordando che il numeratore deve essere un espressione di un grado minore del denominatore, per esempio se il denominatore è di grado 2, allora si userà $ax+b$ che è di grado 1.

Funzioni razionali di e^x

Si pone $e^x = t$, $x = log(t)$, $dx = \frac{dt}{t}$ e ci si riconduce a una funzione razionale classica.

Integrazione per parti:

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

La formula deriva dalla formula di derivazione della moltiplicazioni di due funzioni:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Si può vedere la formula di integrazione per parti più facilmente così:

$$\int integranda \cdot derivanda\ dx = primitiva \cdot derivanda - \int primitiva \cdot derivata\ dx$$

L'integrazione per parti si usa:

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^n \cdot f(x)dx \quad f(x) = \begin{cases} cos(x) \\ sin(x) \\ e^x \\ Sh(x) \\ Ch(x) \end{cases}$$

si integra per parti derivando x^n e integrando $f(x)$. Per $n = 1$ l'integrale si riduce a uno immediato, per $n > 1$ si itera il procedimento fino al caso $n = 1$. Si possono svolgere allo stesso modo anche integrali del tipo:

$$\int P_n(x)f(x)dx$$

- dovendo calcolare integrali della forma

$$\int f(x)g(x)dx \quad \begin{cases} f(x) = e^{\alpha x}, Sh(\alpha x), Ch(\alpha x), a^{bx} \\ g(x) = cos(\beta x), sin(\beta x) \end{cases}$$

si eseguono due integrazioni per parti consecutive, nella prima la scelta della funzione da integrare o derivare è indifferente, nella seconda però la scelte deve essere coerente alla prima. Chiamando I l'integrale di partenza si ottiene una funzione della forma

$$I = h(x) - \frac{\beta}{\alpha}^2 I$$

da cui si ricava I.
Se entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono del tipo $cos(x)$ o $sin(x)$ si usano le formule di duplicazione o prostaferesi (vedi più avanti).

- L'integrale del logaritmo, derivando $log(x)$ e integrando 1

$$\int log(x)dx \quad = xlog(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx - \int 1dx = xlog(x) - x + c$$

Più in generale, dovendo calcolare integrali della forma

$$\int x^m log^n(x)dx$$

e ponendo $g' = x^m$ e $f = log^n(x)$ ed eseguendo iterativamente n integrazioni per parti si riesce a calcolare l'integrale del logaritmo. Ancora più in generale si possono risolvere integrali della forma:

$$\int P_m(x) \cdot Q_n(log(x))dx$$

- l'integrale dell'arcotangente, derivando $arctg(x)$ e integrando 1

$$\int arctg(x)dx \quad = xarctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + c$$

Più in generale

$$\int x^n arctg(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}arctg(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{1+x^2}$$

integrazione delle funzioni trigonometriche

- dovendo calcolare

$$\int f(sin(x)) \cdot cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad sin(x) = t, cos(x)dx = dt$$

$$\int f(cos(x)) \cdot sin(x)dx \quad \Rightarrow \quad cos(x))t, -sin(x)dx = dt$$

In particolare per calcolare

$$\int sin^n(x)cos^m(x)$$

se almeno uno degli esponenti è dispari si riesce a riscrivere l'integrale in una delle forme viste sopra utilizzando: $sin^2(x)+cos^2(x)=1$. Se entrambi gli esponenti sono pari si usano le formule trigonometriche per abbassarne il grado: $cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+cos(2x))$ e $sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-cos(2x))$

- per integrali del tipo

$$\int cos(\alpha x)sin(\beta x)dx, \quad \int cos(\alpha x)cos(\beta x)dx, \quad \int sin(\alpha x)sin(\beta x)dx,$$

  si usano le regole di prostaferesi che riconducono a somme di integrali immediati

- integrali di funzioni razionali di $sin(x)$ e $cos(x)$ possono sempre essere ricondotti a integrali di funzioni razionali generiche tramite la sostituzione:

$$t=tg\left(\frac{x}{2}\right), \quad x=2arctg(t), \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

  ne derivano le seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ sin(x)=\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

- integrali definiti notevoli:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} cos^2(kx)dx=\int_0^{n\frac{\pi}{2}} sin^2(kx)dx=n\frac{\pi}{4}$$

- per calcolare integrali razionali con $Sh(x)$ e $Ch(x)$ o si trovano scorciatoie con trasformazioni oppure si usa la sostituzione $e^x=t, x=log(t), dx=\frac{dt}{t}$

Integrazione delle funzioni irrazzionali

- se l'integranda è una funzione razionale di x moltiplicata per solo una delle seguenti

$$\int R(x)\sqrt{a^2-x^2}dx=[x=a{\cdot}sin(t), dx=a{\cdot}cos(t)dt]=\int\sqrt{a^2(1-sin^2(t))}dx=\int|a{\cdot}cos(t)|dx$$

$$\int R(x)\sqrt{a^2+x^2}=[x=a\cdot Sh(t), dx=a\cdot Ch(t)dt]=\int\sqrt{a^2(1-Sh^2(t))}dx=\int a\cdot Ch(t)dx$$

$$\int R(x)\sqrt{x^2-a^2}=[x=a{\cdot}Ch(t), dx=a{\cdot}Sh(t)dt]=\int\sqrt{a^2(Ch^2(t)-1)}dx=\int|a{\cdot}Sh(t)|dx$$

  Negli ultimi due casi per tornare alla variabile x occorre usare le funzioni iperobliche inverse:

$$\begin{cases} x=a\cdot Ch(t)\Rightarrow t=SettCh(\frac{x}{a})=log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) \\ x=a\cdot Sh(t)\Rightarrow t=SettSh\left(\frac{x}{a}\right)=log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) \end{cases}$$

  è utile anche ricordare che $Sh(SettCh(a))=\sqrt{a^2-1}$ e $Ch(SettSh(a))=\sqrt{a^2+1}$

- integrale di una funzione razionale di $x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}$, etc.
  Si pone $x=t^n$ con $n=$ minimo comune multiplo di m_1, m_2, etc. Si ha quindi $dx=n\cdot t^{n-1}dt$ e si ottiene una funzione razionale di t.

- Se l'integranda è una funzione del tipo $R(x^{2n+1},\sqrt{x^2\pm a^2})$

$$\int x^{2n+1}R(\sqrt{x^2\pm a^2})dx=[\sqrt{x^2\pm a^2}=t, xdx=tdt, x^{2n+1}\cdot dx=(t^2\mp a^2)^n t\cdot dt]$$

Simmetrie e valori assoluti nel calcolo di integrali definiti

- se $f(x)$ è **pari**:
$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$$
- se $f(x)$ è **dispari**:
$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$$

Osservazione. Integrale generalizzato di una funzioen dispari su un intervallo simmetrico

Non è corretto affermare l'annullarsi di un integrale dispari per motivi di simmetria in un intervallo simmetrico senza prima verificare la convergenza dell'integrale stesso.

INTEGRALI GENERALIZZATI

Integrazione di funzioni non limitate

Metodo generale di risoluzione:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx \qquad\qquad \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

Criteri di integrabilità al finito

Siano $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$:

- confronto: se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile e f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile.
- confronto asintotico: se $f > 0$ e $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to b^-$, allora f integrabile $\Leftrightarrow$ g integrabile.
- **teor.** (da usare per studiare per esempio funzioni seno e coseno per $x \to \infty$)
$$\int_{a}^{b} |f(x)|dx \ \ convergente \ \ \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx \ \ convergente$$

Integrazione su intervalli illimitati

Metodo generale di risoluzione:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{a}^{\omega} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega\to-\infty}\int_{\omega}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

def. Se il limite dell'integrale di f esiste finito allora f si dice integrabile oppure che l'integrale è convergente.
def. Se il limite dell'integrale è $\pm\infty$, l'integrale si dice divergente.
def. Se il limite non esiste, l'integrale non esiste.
per essere integrabile deve avere limite finito.

Criteri di integrabilità all'infinito

- confronto: se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty)$, allora g integrabile $\Rightarrow f$ integrabile e f non integrabile $\Rightarrow g$ non integrabile.
- confronto asintotico: se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to +\infty$, allora f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile
- **teor.** (da usare per studiare per esempio funzioni seno e coseno per $x \to \infty$)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \ \ convergente \ \ \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \ \ convergente$$

Osservazione. Ordine di annullamento di una funzione derivabile.

Se f è una funzione derivabile in un intervallo I, la formula di Taylor ci dice che se f si annulla in un punto $\alpha \in I$, si annulla almeno del prim'ordine. Precisamente poichè

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha)$$

se $f'(\alpha) \neq 0$ allora f ha uno zero del prim'ordine in α. Se $f'(\alpha) = 0$ ma, ad esempio, $f''(\alpha) \neq 0$, si può concludere che f si annulla del 2^0 ordine, e così via. In ogni caso non può annullarsi di un ordine inore di 1.

Integrali generalizzati notevoli

Caso 1:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \to \begin{cases} converge & se \ \ p < 1 \\ diverge & se \ \ p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \to \begin{cases} converge & se \ \ p < 1 \\ diverge & se \ \ p \geq 1 \end{cases}$$

Caso 2:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \to \begin{cases} converge & se \ \ p > 1 \\ diverge & se \ \ p \leq 1 \end{cases}$$

Caso 3: con $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^a \cdot |ln(x)|^b} \to \begin{cases} converge \ \ se & \begin{cases} a < 1 \ \ e \ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1 \ \ e \ \ b > 1 \end{cases} \\ diverge \ \ se & \begin{cases} a > 1 \ \ e \ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1 \ \ e \ \ b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 4: con $\alpha > 1$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \cdot ln^b(x)} dx \to \begin{cases} converge \ \ se & \begin{cases} a > 1 \ \ e \ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1 \ \ e \ \ b > 1 \end{cases} \\ diverge \ \ se & \begin{cases} a < 1 \ \ e \ \ b \in \mathbb{R} \\ oppure \\ a = 1 \ \ e \ \ b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 5: con $\alpha > 1$

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{ln^p(x)} dx \to \begin{cases} converge \ \ se & p < 1 \\ diverge \ \ se & p \geq 1 \end{cases}$$

FUNZIONI INTEGRALI

teor. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $x_0 \in [a, b]$ e sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Allora:

- La funzione F è continua in $[a, b]$
- Se inoltre f è continua in $[a, b]$, allora F è derivabile in $[a, b]$ e vale

  $$F'(x) = f(x) \;\; per \; ogni \; x \in [a, b]$$

  (Se $f(t)$ non è continua su tutto I, ma è integrabile in senso generalizzato, in tutti i punti in cui $f(t)$ è continua, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$)
  F ha punti di non derivabilità dove f è discontinua.

Conseguenze:

- se f è continua, F è derivabile con continuità
- se f è continua e derivabile con continuità, anche F' è derivabile con continuità, quindi F è due volte derivabile con continuità. Iterando: la funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda
- ogni fuzione continua su I ha una primitiva su I

Logica degli esercizi in cui bisogna trovare l'intervallo di definizione:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

- lo scopo è determinare dove la funzione integranda è integrabile.
- Vedere dove la funzione integranda è continua, una funzione continua è integrabile. Analizzare i punti di discontinuità:
- Se una funzione ha un numero finito di discontinuità limitate in un intervallo, allora è integrabile in quell'intervallo. In poche parole se è una discontinuità a salto è integrabile.
- Per gli altri punti di discontinuità la funzione integranda è illimitat, quindi bisogna studiarla (con i criteri del confronto, del confronto asintotico, col teorema del modulo, calcolando effettivamente la primitiva e il limite, o riducendosi al caso particolare delle funzioni non limitate con gli asintotici o gli sviluppi di Taylor).
- Se la funzione itegranda non è integrabile nel punto x_0 allora l'insieme di definizione di F è vuoto. Ma se x_0 fosse un punto di accumulazione bisogna studiare l'integrale della funione per $t \to x_0$ e vedere se è effettivamente integrabile o meno.

Logica degli esercizi sulla regolarità delle funzioni integrali:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

- si determina l'insieme di definizione. (vedi sopra)
- per determinare i punti di non derivabilità di $F(x)$ studiamo la sua derivata $F'(x) = f(x)$. I punti di non derivabilità sono quelli quelli dove $f(x)$ non è definita, e in $F(x)$ corrispondono a:
  - discontinuità a salto in f è un punto angoloso in F
  - punti di asintoto verticale di f sono cuspidi (verso l'alto o il basso) o flessi a tangente verticale (ascendente o discendente) di F

- Notiamo che tangenti verticali o discontinuità a salto o buchi nella funzione di F non possono essere presenti nel dominio di F, perchè essendo punti di discontinuità non sono derivabili e dunque non presenti nell'intervallo di integrazione di f.
  Dunque la funzione F è (sempre) continua nel suo intervallo di definizione.

Logica degli esercizi sui grafici qualitativi della funzione integrale $F(x)$ a partire dalla funzione integranda $g(x)$

- F è crescente sugli intervalli in cui g è positiva, F è decrescente sugli intervalli in cui g è negativa.
- punti in cui g incrocia l'asse delle x sono punti di massimo o minimo
- discontinuità a salto in g sono punti angolosi
- F è concava verso l'alto (il basso) negli intervalli in cui g è crescente (decrescente)
- punti di cambio massimo e minimo in g sono punti di cambio di concavità in F

Limite all'infinito di una funzione integrale:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ integrale \ \ generalizzato \ \ = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$$

se l'integrale generallizzato converge esiste limite finito (anche se non si riesce a calcolare), se non converge o è divergente o non esiste.
Caso particolare è quello in cui $f(t) \to m$, costante non nulla, per cui $F(x) \sim mx$. Quindi $F(x)$ tende a infinito con crescita lineare e potrebbe avere asintoto obliquo calcolabile come

$$\lim_{x\to\infty} [F(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} [f(t) - m]dt + mx_0$$

Ossia esiste asintoto obliquo se l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{\infty} [f(t) - m]dt$$

converge.

TEORIA

Derivabilità implica continuità

enunciato
Sia

$$f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita come $x \longrightarrow y = f(x)$, allora in un punto $x_0 \in A$ derivabilità $\Rightarrow$ continuità.
dimostrazione
Per definizione di derivabilità in x_0 sappiamo che esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = m$$

allora possiamo dire che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h \cdot m} = 1$$

Che rispecchia la definizione di asintotico, quindi per $h \to 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \sim m \cdot h$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = m \cdot h + o(m \cdot h)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + o(m \cdot h)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [f(x_0) + m \cdot h + o(m \cdot h)] = f(x_0)$$

Dunque il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ vale $f(x_0)$ che soddisfa la definizione di continuità di $f(x)$ in x_0.

Teorema di Fermat

enunciato:
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e x_0 è punto stazionario allora

$$f'(x_0) = 0$$

dimostrazione:
Dimostriamo per il caso in cui x_0 sia un punto di massimo locale (analogamente si procede per dimostrare il caso in cui sia un punto di minimo).
Per ipotesi $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, dunque vale la condizione

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Essendo x_0 punto di massimo relativo, dato un incremento h vale

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0.$$

Dividiamo i casi in cui:

$$\begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad (h > 0) \\ \\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad (h < 0) \end{cases}$$

Passiamo ora ai limiti per $h \to 0$:

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad (h > 0) \\ \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad (h < 0) \end{cases}$$

Questi due limiti sono rispettivamente limite destro e sinistro della derivata prima,

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Per l'ipotesi di derivabilità di f in x_0 i due limiti devono coincidere, quindi essendo

$$f'_+(x_0) \leq 0$$

$$f'_-(x_0) \geq 0$$

L'unico caso possibile è che

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

Cioè

$$f'(x_0) = 0$$

Teorema di Rolle

enunciato
Sia $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se vale $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

dimostrazione
Poiché f è continua, in virtù del teorema di Weierstrass la funzione sull'intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo assoluti (che indichiamo rispettivamente con M e m). Si danno due casi: o il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi dell'intervallo $[a, b]$, oppure almeno uno dei due è raggiunto in un punto appartenente all'intervallo (a, b).

1. Il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi e quindi, poiché per ipotesi si ha che $f(a) = f(b)$, ne segue che $M = m$. Questo implica che la funzione è costante sull'intervallo $[a, b]$ e quindi la derivata è nulla in ciascun punto c dell'intervallo (a, b).
2. Il massimo o il minimo sono raggiunti all'interno dell'intervallo. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui il massimo è raggiunto in un punto c dell'intervallo aperto (a, b), cioè $f(c) = M$. Per il teorema di Fermat allora la derivata è nulla nel punto c.

Teorema di Lagrange o del valor medio

enunciato

Sia f derivabile in $(a,b) in \mathbb{R}$ e continua in $[a,b] \in \mathbb{R}$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dimostrazione

È possibile dimostrare l'asserto mediante un'applicazione del teorema di Rolle.
Sia g la seguente funzione ausiliare:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Si tratta della retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Sia ora h la differenza tra le due funzioni f e g:

$$h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Si verifica immediatamente che

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

La funzione h è continua perché somma di funzioni continue (f per ipotesi e g perché è un polinomio di primo grado); inoltre è derivabile perché somma di funzioni derivabili (f per ipotesi e g in quanto polinomio di primo grado).
Per il teorema di Rolle, se una funzione è continua in un intervallo $[a,b]$, derivabile in (a,b) e assume valori uguali agli estremi dell'intervallo, esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui la sua derivata sia 0.
Applichiamo quindi il teorema di Rolle alla funzione h, dal momento che ne soddisfa tutte le ipotesi:

$$\exists \;\; c \in (a,b) \quad tale \;\; che \quad h'(c) = 0.$$

Segue che

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$$

Ora si osserva che

$$g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

quindi

$$f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e il teorema è così dimostrato.

Test di monotonia su un intervallo

enunciato

Sia $f : (a,b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile. Allora

$$f \ \ crescente \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f \ \ decrescente \Longleftrightarrow f'(x) \leq 0$$

$\forall \ x \in (a,b)$

dimostrazione

Consideriamo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e due punti qualunque $x, z \in (a,b)$. Allora se

$$f \ \ crescente \quad \Longleftrightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0$$

$$f \ \ decrescente \Longleftrightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0$$

Passando al limite per $z \to x$, per il teorema della permanenza del segno, dalle due precedenti relazioni si ottiene

$$f \ \ crescente \quad \Longleftrightarrow \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0$$

$$f \ \ decrescente \Longleftrightarrow \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0$$

E quindi $\ \forall \ x \in (a,b)$

$$f \ \ crescente \quad \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f \ \ decrescente \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

Viceversa , sia, ad esempio, $f'(x) \geq 0$ (si procede in modo analogo per $f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in (a,b)$, e proviamo che allora f è crescente in (a,b). Prendiamo dunque due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ tali che $x_1 < x_2$, mostriamo che $f(x_1) < f(x_2)$. Infatti, applicando il teorema di Lagrange ad f sull'intervallo $[x_1, x_2]$ abbiamo che esiste un $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Poichè per ipotesi $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, ne segue che anche $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè la tesi.

Teorema di Cauchy

enunciato
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora esiste almeno un punto x_0 interno ad (a, b), tale che

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0)$$

dimostrazione
Consideriamo la funzione ausiliaria h

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

e teniamo presente che $[f(b) - f(a)]$ e $[g(b) - g(a)]$ sono valori costanti e che $h(x)$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), poichè differenza di due funzioni continue.
Valutiamo $h(x)$ sugli estremi dell'intervallo $[a, b]$:

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

Dunque

$$h(a) = h(b)$$

Si vede ora che $h(x)$ ha la stessa valutazione agli estremi e quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, applichiamolo: esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$h'(x_0) = 0$$

Calcoliamone ora la derivata di $h(x)$

$$[f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x) = 0$$

e valutandola nel punto x_0 fornitoci dal teorema di Rolle risulta che

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0)$$

Teorema derivata l'Hospital

enunciato (LIBRO)

Siano f, g funzioni derivabili in un intervallo (a, b) con $g, g' \neq 0$ in (a, b). Se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0 \ \ oppure \ \ \pm\infty$$

e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$$

Allora

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \to b^-$ (anziché per $x \to a^+$),con $b \leq +\infty$

dimostrazione (LIBRO)

Caso $f(x), g(x) \to 0$. Sia x_n una successione tendente ad a^+, prolunghiamo per continuità f e g in a ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Allora

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)}$$

Se applichiamo a f, g separatamente il teorema di lagrange sull'intervallo $[a, x_n]$, otteniamo che l'ultimo quoziente scritto è uguale a:

$$\frac{f'(t_n)(x_n - a)}{g'(t_n^*)(x_n - a)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n^*)}$$

dove t_n, t_n^* sono due punti opportuni che cadono nell'intervallo (a, x_n). Poichè quando $x_n \to 0$ anche t_n e $t_n^* \to 0$, sembra "ragionevole" che il limite del quoziente f'/g' sia uguale al limite del quoziente f/g. Tuttavia questo non si può affermare rigorosamente, perchè le successioni t_n, t_n^* sono a priori diverse tra loro. Per aggirare il problema occorre modificare leggermente l'argomentazione seguita. Riprendiamo dunque la dimostrazione della $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}$, e definiamo

$$h(x) = f(x_n)g(x) - g(x_n)f(x)$$

Notiamo che $h(a) = h(x_n) = 0$. La funzione h soddisfa le ipotesi del teorema di lagrange sull'intervallo $[a, x_n]$, dunque esiste $t_n \in (a, x_n)$ tale che

$$h'(t_n) = \frac{f(x_n) - h(a)}{x_n - a} = 0$$

ovvero, calcolando

$$h'(x) = f(x_n)g'(x) - g(x_n)f'(x), \qquad f(x_n)g'(t_n) - g(x_n)f'(t_n) = 0$$

Dunque per ogni x_n esiste un punto $t_n \in (a, x_n)$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

Per $n \to \infty$, $t_n \to a^+$, perciò $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to L$, e di conseguenza anche $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L$, che è quanto volevamo dimostrare.

Formula di Taylor con resto secondo Peano

enunciato (LIBRO)

Sia $f : (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \quad perx \to x_0$$

dove

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n$$

dimostrazione (APPUNTI)

Dimostriamo per induzione su n.
Per $n = 1$. Se $f \in C^1((a, b))$, allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0(x - x_0)$$

Che è vero se il rapporto incrementale tende a 0, quindi verifichiamo:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) \to 0$$

Verificato.
Assunto vero per $n - 1$ verifichiamo per n.
Essendo vera per $n - 1$, abbiamo che per ogni funzione $g \in C^{n-1}((a, b))$, $\frac{g(x) - T^g_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \to 0$. Per verificare per n devo verificare se $f \in C^n((a, b))$, $\frac{f(x) - T^f_n(x)}{(x - x_0)^n} \to_? 0$. Per farlo ci avvaliamo del teorema di De l'Hopital:

$$\frac{[f(x) - T^f_n(x)]'}{[(x - x_0)^n]'} = \frac{f'(x) - [t^f_n(x)]'}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{f'(x) - T^f_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

Dove il termine

$$\frac{f'(x) - T^f_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \to 0$$

per ipotesi di induzione.
Torniam ora alla derivata

$$[t^f_n(x)]' = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right]' =$$

$$= f'(x_0) + f''(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 1)!}(x - x_0)^{n-1} = T^{f'}_{n-1} \qquad f' \in C^{n-1}((a, b))$$

Quindi anche

$$\frac{f(x) - T^f_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0$$

Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

enunciato (LIBRO)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte in $[a, b]$, e sia $x_0 \in [a, b]$. Allora esiste un punto c compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dove

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n$$

dimostrazione (LIBRO)
Proviamo il teorema per $n = 1$. Ponendo per comodità $x_0 = a, x = b$ l'enunciato diventa: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte in $[a, b]$, allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2$$

Poniamo $f(b) - \{f(a) + f'(a)(b. - a)\} = k(b - a)^2$ e cerchiamo di determinare la forma di k.
Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - k(b - x)^2$$

e applichiamo ad essa il teorema del valor medio. Poichèé $g(b) = g(a) = 0$ (la seconda uguaglianza segue dalla definizione di k) si trova che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$0 = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

Ma $g'(x) = -f'(x) - f''(x)(b - x) + f'(x) + 2k(b - x) = (b - x)[2k - f''(x)]$ e quindi $g'(x) = 0$ implica, essendo $c \neq b$:

$$k = \frac{1}{2}f''(c)$$

Con lo stesso metodo possiamo ampliare al caso n qualsiasi.
Definiamo

$$g(x) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)(b - x)^j}{j!}(b - x)^{n+1}$$

con k definito implicatamente dall'identità

$$f(b) - T_{n,a}(b) = k(b - a)^{n+1}.$$

Ora si procede così:

1. Si verifica che $g(b) = g(a) = 0$:

   $g(b) = f(b) - f(b) = 0 \qquad g(a) = f(b) - T_{n,a}(b) - k(b-a)^{n+1} = 0 \quad per\ definizione\ di\ k.$

2. Si applica il teorema di lagrange a g in $[a, b]$, e si mostra che l'affermazione "esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$" è esattamente la tesi. Cominciamo a calcolare g':

$$g'(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)(b - x)^{(j-1)}}{(j - 1)!} + k(n + 1)(b - x)^n =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)(b - x)^j}{j!} + k(n + 1)(b - x)^n =$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(x)(b - x)^n}{n!} + k(n + 1)(b - x)^n$$

   dove nel secondo passaggio abbiamo eseguito una traslazione di indici nella sommatoria).

Allora $g'(c) = 0$ significa:

$$-\frac{f^{(n+1)(c)(b-c)^n}}{n!} + k(n + 1)(b - c)^n = 0$$

ossia

$$k = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n + 1)!}$$

che combinata col risultato precedente $(f(b) - T_{n,a}(b) = k(b - a)^{n+1})$ dimostra la tesi

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

enunciato (APPUNTI)

Sia $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è Riemann-integrabile su $[a, b]$ e sia G una primitiva di f su $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

dimostrazione (LIBRO = APPUNTI)

Siano $x_0 (= a), x_1, \ldots, x_n (= b)$ punti che suddividono l'intervallo $[a, b]$ in modo equilibrato, allora aggiungendo e togliendo $G(x_j)$ per $j = 1, 2, \ldots, n-1$ si ha:

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) =$$

$$= [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + \cdots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [G(x_j) - G(x_{j-1})]$$

Applichiamo ora il teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$. Esiste allora $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1})G'(c_j) = (x_j - x_{j-1})f(c_j)$$

Perchè per ipotesi G è una primitiva di f e perciò $G'(c_j) = f(c_j)$. Ne segue che

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})f(c_j) = S_n$$

dove S_n è una somma n-esima di Cauchy-Riemman di f. L'identità scritta vale per ogni n, possiamo allora far tendere n a $+\infty$, trovando

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Si osservi che questa dimostrazione mostra che una certa (non tutte quelle possibili!) somme di Cachy-Riemann di f tende a $G(b) - G(a)$. Poichè però sappiamo già che f è integrabile, in quanto continua, questo è sufficiente a concludere che ogni altra successione di Cauchy-Riemann converge allo stesso limite, e quindi vale la formula enunciata.

Teorema del valor medio integrale

enunciato (LIBRO)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

dimostrazione (LIBRO)
Essendo f continua in $[a, b]$, per Weierstrass, essa è dotata di massimo($= M$) e minimo ($= m$). Dalla proprietà di monotonia dell'integrale si ha

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M dx = M$$

Essendo quindi il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ è compreso fra il minimo e il massimo, per il teorema di Darboux, tale valore è uguale a $f(c)$ per qualche $c \in [a, b]$.

Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

enunciato (LIBRO) Sia $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato), sia $x_0 \in [a, b]$ e sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Allora

- La funzione F è continua in $[a, b]$
- Se inoltre f è continua in $[a, b]$, allora F è derivabile in $[a, b]$, e vale

  $$F'(x) = f(x)$$

  per ogni $x \in [a, b]$

dimostrazione (LIBRO)
Proviamo il primo punto prima nell'ipotesi in cui f è integrabile in senso proprio, e quindi, in particolare, è limitata. Perciò esiste $k > 0$ per cui è

$$|f(t)| \leq k \quad \forall\, t \in [a, b]$$

Per provare che F è continua in un generico punto $\bar{x} \in [a, b]$, consideriamo ora:

$$|F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f(t)|dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} kdt \right| = k|h|.$$

(procedimenti ottenuti con l'additività dell'integrale e la disuguaglianza del valore assoluto). Perciò per $h \to 0$ si ha $F(\bar{x} + h) \to F(\bar{x})$, e F è continua in $\bar{x}$
Supponiamo ora che f sia integrabile solo in senso generalizzato, e che $\bar{x}$ sia proprio un punto in cui f è illimitata. Abbiamo ancora che:

$$F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt$$

Scriviamo ora:

$$\int_{\bar{x}}^{b} f(t)dt = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt + \int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)dt$$

Poichè per ipotesi f è integrabile in senso generalizzato, si ha, per definizione:

$$\int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)dt \to \int_{\bar{x}}^{b} f(t)dt$$

per $h \to 0^+$.
E quindi per differenza

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt \to 0$$

per $h \to 0^+$.
Ossia $F(\bar{x} + h) \to f(\bar{x})$ per $h \to 0^+$. (Si ragiona in modo analogo per 0^-)

Proviamo ora il secondo punto, partendo dall'uguaglianza, già ottenuta,

$$F(\bar{x} + h) \to F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt$$

Poichè ora per ipotesi f è continua, per il teorema della media si ha

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt = hf(x_h)$$

per qualche $x_h \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$ (supponendo, per fissare le idee, $h > 0$). Ne segue

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(x_h)$$

Per $h \to 0$ si avrà $x_h \to \bar{x}$ e quindi, ancora per la continuità di f, $f(x_h) \to f(\bar{x})$. Pertanto esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x})$$

e il teorema è dimostrato.

Condizione necessaria per la convergenza delle serie

enunciato (LIBRO)

Condizione necessaria affichè una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che il termine $a_n \to 0$

dimostrazione (APPUNTI)

Per la definizione di successione convergente abbiamo che

$$S_n = \sum_{k=...}^{N} a_n \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} S_n = A$$

e abbiamo che anche per la successione $S_{n+1}, \lim_{N\to+\infty} S_{n+1} = A$. Quindi

$$\lim_{N\to+\infty} [S_{N+1} - S_N] = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$$

Criterio del confronto per la convergenza di una serie a termini positivi

enunciato (LIBRO)
Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che

$$a_n \leq b_n$$

definitivamente.
Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente
- $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente

dimostrazione (LIBRO)
Sia

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad s_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Poichè $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k, sommando membro a membro le disuguaglianze per k da 1 a n, si ottiene $0 \leq s_n \leq s_n^*$. Sappiamo già che una serie a termini positivi è regolare, ossia o converge o diverge (non può oscillare). Perciò i due punti dell'enunciato sono logicamente equivalenti e ci basta dimostrarne uno. Dimostriamo la seconda affermazione che è immediata perché: dire che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge significa, per definizione di serie divergente, che $s_n \to +\infty$.
D'altro canto è $s_n \leq s_n^*$ perciò, per il criterio del confronto per le successioni, anche $s_n^* \to \infty$, ossia $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Criterio della radice per la convergenza della serie a termini positivi

enunciato (LIBRO)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esite il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

e se

- $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge,
- $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge,
- $l = 1 \Rightarrow$ nulla si può concludere

dimostrazione (LIBRO)

Supponiamo prima che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

Poichè $\sqrt[n]{a_n} \to l$, allora fissato comunque un $\epsilon > 0$, definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\epsilon}{2}$.
D'altro canto $l < 1$, perciò è ance $l < 1 - \epsilon$ per un $\epsilon > 0$ opportuno.
Per quanto ϵ si ha dunque che, deifnitivamene

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\epsilon}{2} < (1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

e quindi

$$a_n < (1-\epsilon)^n$$

Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n$, la serie di partenza converge.
Se ora, invece, è

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$$

Con un ragionamento simile si deduce che

$$a_n > \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^n$$

definitivamente per un certo $\epsilon > 0$. Dunque $a_n \to +\infty$, e la serie diverge.

Criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

enunciato (LIBRO)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

e se

- $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge,
- $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge,
- $l = 1 \Rightarrow$ nulla si può concludere

dimostrazione (LIBRO)
Simile alla precedente. Supponiamo prima che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

Ragionando come nella dimostrazione precedente, si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

definitivamente, per qualche $\epsilon > 0$. Ciò implica, ragionando iterativamente, che:

$$a_{n+1} < \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) a_n < \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) a_n - 1 < \cdots < \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n a_1$$

Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n a_1$, la serie di partenza converge.
Se ora, invece, è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$$

Con un ragionamento dimile si deduce che

$$a_{n+1} > \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^n a_1$$

definitivamente, per un certo $\epsilon > 0$. Dunque $a_n \to +\infty$, e la serie diverge.

Giustificazione della formula di e con l'esponenziale complesso

enunciato
dimostrazione