ANALISI I

Federico Mainetti Gambera

7 ottobre 2019

Indice

30/09/19 - LEZIONE

Formula di Newton [mancano primi 20 minuti]

es. trovare il coefficiente di b^7 nell espressione $(a^3b^2 - b)^5$

$$(a^3b^2 - b)^5 = b^5(a^3b - 1)^5$$

il coefficiente di b^7 e uguale a quello di b^2 in $(a^3b - 1)^5$

$$(a^3b^2 - b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} [a^3b]^k (-1)^5 - k$$

per ottenere il coefficiente di b^2 devo prendere $k = 2$

$$\binom{5}{2} (a^3)^2 b^2 (-1)^{5-2}$$

$$-\binom{5}{2} a^6 b^2$$

il coefficiente cercato è $-\binom{5}{2} = -\frac{5!}{2!3!} = 10$.

es. dimostrare che la seguente uguaglianza vale

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k = 3^n$$

é possibile dimostrare questa formula per induzione, ma in realtà è molto più semplice usare direttamente la formula di Newton $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. Infatti se poniamo $a = 2$ e $b = 1$ otteniamo esattamente l'equazione della consegna.

es dimostrare che la seguente uguaglianza vale

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k = 1$$

Calcolo combinatorio

dim. dimostrazione combinatoria della formula di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

n.b. $\binom{n}{k} = P^*_{k,n-k}$ dove $P^*_{k,n-k}$ rappresenta il numero delle permutazioni con ripetizione di n oggetti k di un tipo e n-k dell'altro.
$(a+b)^n = (a+b)_1(a+b)_2\dots(a+b)_n$. Nello svolgere questi prodotti avrò scelto k volte a e $n-k$ volte b per ottenere $a^k b^n - k$. E' come avere n caselle di cui le prime k occupate da a e le restanti $n-k$ occupate da b:

$$[a_1]_1[a_2]_2\dots[a_k]_k[b_1]_{k+1}[b_2]_{k+2}\dots[b_{n-k}]_n$$

Ma una configurazione così può presentarsi $P^*_{k,n-k}$ (cioè $\binom{n}{k}$) volte.

def. dato un insieme X di n oggetti distinti, chiamo combinazioni semplici (senza ripetioni) di classe K un qualsiasi sottoinsieme (il cui ordine non importa) di k oggetti estratti da X.
$C_{n,k}$ è il simbolo che rappresenta il numero di combinazioni semplici di k oggetti estratti senza ordine.

teor. $C_{n,k} = \binom{n}{k}$
dim. Immaginiamo di dover inserire elementi in delle caselle per ottenere uno specifico allineamento. abbiamo k caselle e n elementi. Nella prima casella posso scegliere fra n elementi da inserire, nella seconda potrò scegliere fra n-1 elementi e così via.

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Ma questo modo di ragionare rappresenta un allineamento con questo ordine, noi non vogliamo considerare l'ordine. Allora dividiamo il risultato trovato prima per le $k!$ permutazioni possibili.

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n.b. $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cardinalità di un insieme

E' lo studio del numero di oggetti appartenenti a un certo insieme. dato un insieme X di n oggetti, qual è la cardinalità dell'insieme delle parti di X? L'insieme delle parti è l'insime di tutti i sottoinsiemi ed è rappresentato dalla lettera $\mathcal{P}(X)$
teor. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X di cardinalità n ha cardinalità 2^n
dim. X ha certamente come sottoinsiemi quelli banali, cioè $\emptyset$ e X stesso.

Quanti sottoinsiemi di 1 elemento ha X? n (riscrivibile come $C_{n,1}$)
Quanti sottoinsiemi di 2 elemento ha X? $C_{n,2}$
...
Quanti sottoinsiemi di n-1 elemento ha X? $C_{n,n-1}$
Dal teorema precedentemente visto sappiamo che $C_{n,x} = \binom{n}{x}$

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2+\cdots+C_{n,n-1}+1},$$

dove il primo 1 rappresenta l'insieme vuoto e l'ultimo 1 rappresetna X stesso.

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + + \binom{n}{n-1} + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n$$

(l'ultimo passaggio è stato ottenuto tramite l'utilizzo della formula di Newton)
cons. L'insieme delle parti di un insieme finito(!) ha cardinalità sempre maggiore dell insieme stesso.

Teologia in $\mathbb{R}$

def. definizione fondamentale: **Intorno** di un ponto x_0
in $\mathbb{R}$: IMMAGINE
in $\mathbb{R}^2$: IMMAGINE
$B_r(x_0)$ è il simbolo che viene rappresenta l'intorno di raggio r del punto x_0.
$B_r(x_0)$ è l'insieme dei punti con distanza inferiore ($<$) di r dal centro x_0, i punti sul bordo/confine dell'intorno non appartengono all'intorno.
definizioni formali:
in $\mathbb{R}$:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

in $\mathbb{R}^2$:

$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : dist(p, p_0) < r\}$$

dove $dist(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
n.b. in $\mathbb{R}$ una qualunque semiretta è detta "intorno di $\pm\infty$". in $\mathbb{R}^2$, invece, non si parla di "intorno di $\pm\infty$".

def. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^2$, x^* è un punto **interno** ad A se (non solo se $\subset A$, ma anche se è circondato solo da punti di A):

$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A$$

ovviamente se x^* è un punto interno allora $x^* \subset A$
n.b. questa definizione non si occupa di definire l'operatore "$\in$", ma definise il termine "interno".

def. x^* è un punto **esterno** ad A (non solo se non è in A ($\notin A$), ma anche se è circondato solo da punti di A):

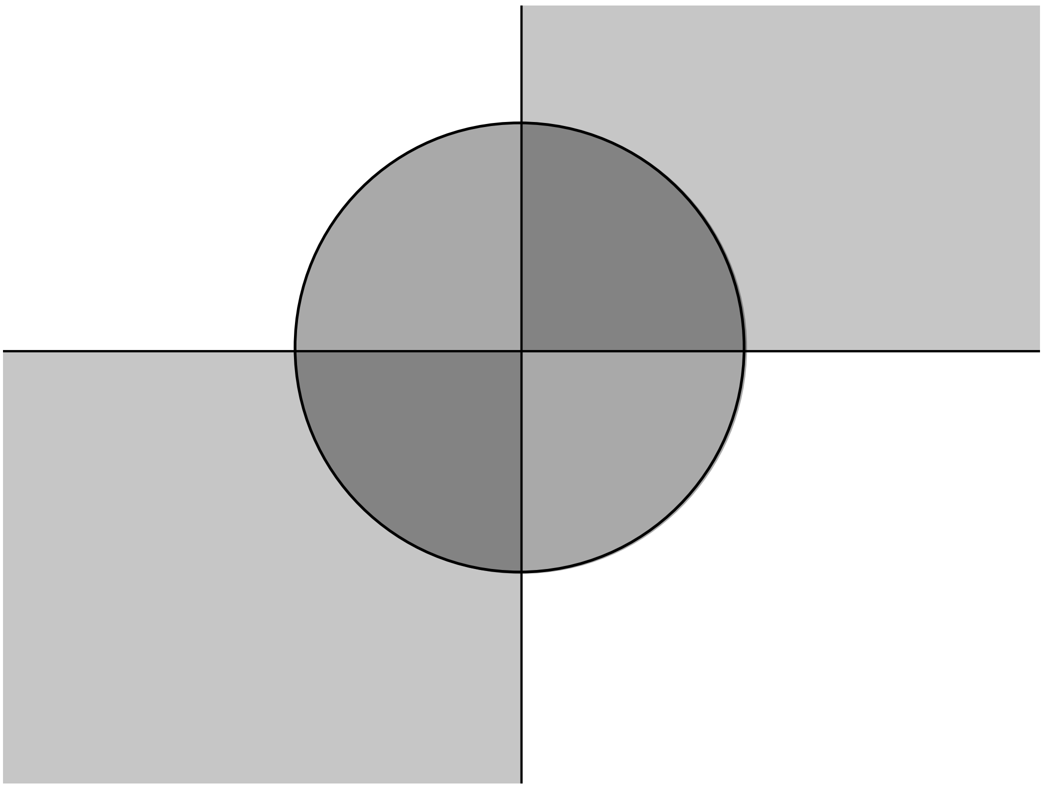
$$\exists B_r(x^*) : B_r(x^*) \subset A^c$$

ovviamente se x^* è un punto esterno allora $x^* \in A^c$ ovvero $x^* \notin A$
def. x^* è un punto di **frorntiera** (se non è né interno né esterno):

$$\forall B_r(x^*), B_r(x^*) \cap a \neq \emptyset \wedge b_r(x^*) \cap A^c \neq \emptyset$$

es.

$$a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge xy > 0\}$$



def. Dato un insieme A (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^2$)

- è **aperto** se è fatto solo da punti interni;
- è **chiuso** se il suo complementare è aperto oppure se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

es. l'insieme"aperto" in $\mathbb{R}$

$$A = (a, b)$$

IMMAGINE
I punti a e b sono di frontiera...
es. ...se, però, cambiamo ambiente e andiamo in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, y = 0\}$$

IMMAGINE
non è aperto, è costituito solo da punti di frontiera, ma non li contiene tutti, quindi non è neanche chiuso.

07/10/19 - LEZIONE

Topologia in $\mathbb{R}$

Piccolo ripasso degli argomenti dell'ultima lezione.asdasdasdasdasdas
def. Un punto $x_0 \in A$ si dice **isolato** per A se $\exists B_r(x_0)\ :\ B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$
img1
es.

$$A = x \in \mathbb{R}\ :\ x = n \in \mathbb{N}$$

img2
A è fatto di punti isolati.
def. Un punto x_0 è un punto di **accumulazione** per A (n.b. può $\in A$ oppure $\in A^c$), se esiste una successione di punti di A, c he raggiunge x_0
img3
il disegno mostra come ci sia un percorso che raggiunge x_0.
Se $\forall B_r(x_0) \exists x \in A\ e\ x \neq x_0$
oss. tutti i punti interni ad un insieme sono di accumulazione.
oss. i punti di frontiera sono di accumulazione purchè non siano isolati
es.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x\ :\ -4 < x \leq e\ \vee\ x = \pi\ \vee\ x > 10\}$$

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

I punti di frontiera sono $-4, e, \pi, 10$. Ma π non è un punto di accumulazione.

Continuiamo con delle definizioni sugli insiemi.

def. Un insieme A è limitato se occupa una porzione con area finita dell'ambiente.
se $\exists y \in \mathbb{R}^2\ e\ B_r(y)$ che contiene A. Spesso per y si prende l'origine degli assi.
es.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x\ :\ -4 < x \leq e\ \vee\ x = \pi\ \vee\ x > 10\}$$

$$(-4, e] \cup \pi \cup (10, +\infty)$$

questo insime non è limitato per via di $(10, +\infty)$.
def. un insieme A è **convesso** se ha queste forme
img4
cioè se $\forall x, y \in A$ il segmento di estremi x e y appartiene ad A
def. un insieme A è **non convesso** se ha queste forme
img5

es. in $\mathbb{R}$ gli insiemi "convessi" che insiemi sono?
$\mathbb{N}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
$\mathbb{Q}$ è convesso in $\mathbb{R}$? no.
Gli insimei "convessi" in $\mathbb{R}$ sono gli insiemi:

- singoletti;
- intervalli;
- semirette.

un insieme A è **compatto** se è chiuso e limitato.
es.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \leq 1 \ e \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

img6
l'insieme è chiuso e limitato, quindi compatto.

Funzioni

def. cos'è una **funzione**?
E' costituita da un insieme di partenza detto **dominio** V e un insieme di arrivo detto **codominio** W. Un elemento del primo insieme lo simboleggiamo con la lettera v, del secondo con la lettera w.

$$w = f(v)$$

$f()$ è la legge che definsice la funzione.
def. si dice **dominio naturale** l'insieme V' contenuto o uguale V il più grande sottoinsieme del dominio dovela legge è ben definita
img7, ma sinceramente saltala...
Si dice che w è l' **immagine** di v attraverso f.
Si dice che v è la **controimmagine** di W attraverso f.
Si parla di **insieme immagine** come la totalità delle immagini e si indica come $im(f)$, spesso si dice anche "immagine della funzione".

$$im(f) = \{w \in W \ : \ \exists \ v \ e \ f(v) = w\}$$

def. una funzione f si dice **iniettiva** se preserva elementi distinti.

$$se \ \ \forall v_1 \neq v_2 \ \rightarrow \ \ f(v_1) \neq f(v_2)$$

def. una funzione è **non iniettiva** se ci sono elementi diversi con la stessa immagine.
def. una funzione è **suriettiva** se "invade" tutto il codominio.

$$im(f) \;\; ugualecontrelineette \;\; W$$

es.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = sin(x)$$

non è iniettiva e non è suriettiva.
es.

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

$$x \to y = sin(x)$$

img8
è iniettiva e suriettiva.
def. una funziona che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biiettia**.

Successioni

Sono funzioni particolari il cui dominio è $\mathbb{N}$

$$f: \;\; V = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \to y = f(n)$$

che spesso si scrive: $n \to y = f_n$, oppure $n \to y = a_n$.
a_n è l'immagine dell'emento n-esimo
img9

def. Una successione si dice **monotona** se hanno un andamento con un trend costante.
def. Una successione di dice monotona **crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente crescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{n_1} < a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

def. Una successione di dice monotona **strettamente decrescente** se

$$\forall n_1 < n_2 \quad \Rightarrow \quad a_{n_1} > a_{n_2}$$

oss. una successione costante è una successione monotona crescente e decrescente.
def. una successione è **limitata** se il suo insieme immagine $im(f)$ è un insieme limitato di $\mathbb{R}$

$$im(f) \;\; contenutoouguale \;\; B_r(x)$$

es.

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

Notiamo che n non può essere 0. La successione oscilla.
img10
Non è monotona, è limitata.
es.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

img11

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > a_1$$
$$a_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} > a_2$$

Questa successione converge a e, è limitata e monotona strettamente crescente.
es.

$$a = ln(n)$$

Non è limitata, ma è limitata inferiormente, ma è monotona strettametne crescente.
es.

$$a_n = (-1)^n$$

img13
è limitata e periodica con periodo 2.
es.

$$a_n = sin(n)$$

img14
è limitata, non è monotona, può sembrare periodica, ma non lo è perchè il periodo sarebbe 2π.
es. successione potenza

$$a_n = n^{\frac{1}{2}}$$

img15
monotona strettamente crescente, limitata inferiormente.
es.

$$a_n = (-1)^n n^{(\frac{1}{2})}$$

img16
es.

$$a_n = (-1)^n n^2$$

img17

def. natura/comportamento di una successione è l'andamento di lungo periodo (posizioni grandi).
def. Si dice che $\{a_n\}$ **converge** a L e lo scrivo

$$a_n \ \rightarrow_{+\infty} \ L$$

$$lim_{n\rightarrow+\infty} = L$$

img18
definizione formale:

$$lim_{n\rightarrow+\infty} a_n = L \ \ se \ \ \forall B_r(L) \ \exists \ M \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(L)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r del limite L esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno del valore L.
img19

def. a_n è **positivamente divergente** o **divergente a** $+\infty$ e lo scrivo

$$a_n \ \rightarrow_{+\infty} \ +\infty$$

$$lim_{n\rightarrow+\infty} a_n = +\infty$$

definizione formale:

$$lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \ \ se \ \ \forall B_r(+\infty) \ \exists \ M \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(+\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img20
def. una successione è **negativamente divergente** o **divergente a** $-\infty$ e lo scrivo

$$a_n \ \to_{+\infty} \ -\infty$$

$$lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

definizione formale:

$$lim_{n \to -\infty} a_n = -\infty \ \ se \ \ \forall B_r(-\infty) \ \exists \ M \quad \forall n > M \quad a_n \in B_r(-\infty)$$

definizione a parole:
per ogni intorno B_r di $+\infty$ esiste una posizione M al di là della quale la successione sta tutta nell'intorno di $+\infty$.
img21

def. Una successione ha una **proprietà definitiva** se la proprietà è valida per la successione da un certo valore in poi.
Le definizioni di convergenza e divergenza possono essere riscritte usando la definizione della proprietà definitiva.
def. Una successioen che non è né divergente né convergente è **irregolare**.
es.

$$a_n = (-1)^n$$

questa successione è irregolare e limitata. **es.**

$$a_n = (-1)^n n^2$$

questa successione è irregolare e illimitata.

La natura di una successione è di tre tipi:

- convergente
- divergente (positivamente o negativamente)
- irregolare

01/10/19 - ESERCITAZIONE

Numeri complessi

es. risolvere

$$|z|^2 - 2z = 0$$

Due soluzioni possibili. La prima:

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

La seconda:

$$z = \rho e * i\theta$$

$$|z| = \rho^2$$

$$\rho^2 - 2\rho e^{i\theta} = 0$$

raccogliamo ρ

$$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rho - 2e^{i\theta} = 0$$

$$\rho = 2e^{i\theta}$$

ρ è il modulo

$$\rho e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$$

$$\theta = 0 \wedge \rho = 2$$

es. determina z_1 e z_2 tali che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \ \wedge \ Im(z_1) = Im(z_2) = 2$

$$z = x + iy = Re(z) + iIm(z)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 y = -2 \end{cases}$$

$$z_1 = -1 - 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

ora verifica che $\bar{z_1} = z_2$

$$\bar{z_1} = -1 + 2i$$

$$-z_2 = -1 + 2i$$

es.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 3\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ Re(w) + Im(w) + 1 = 0\}$$

(IMMAGINE di A e di B)

$$C = \{v \in \mathbb{C} \ : \ v = z - 3 + i, z \in A \cap B\}$$

il termine $v = z - 3 + i$ rappresenta un tranlazione di $(-3, 1)$ da applicare all'insieme che è l'intersezione di A e B:

$$z = x + iy$$

$$z = -3 + i = x + iy - 3 + i$$

$$v = (x - 3) + i(1 + y)$$

es. trovare le soluzioni di

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{i}z = 0$$

Non si può applicare il teorema fondamnetale dell'algebra per via della presenza di $\bar{z}$.
Iniziamo togliendo i dal denominatore

$$-\frac{2}{i}\frac{i}{i} = -\frac{2i}{1} = 2i$$

$$z^2 - z\bar{z} + 2iz = 0$$

$$z(z - \bar{z} + 2i) = 0$$

prima soluzione è $z = 0$
Ora poniamo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$

$$2iy + 2i = 0$$

$$2i(y + 1) = 0$$

Da cui ricaviamo $y = -1$
Definire l'insieme B (A rappresenta le soluzioni del punto precedente):

$$B = \{w \in (C) \ : \ w = z + 3i, z \in A\}$$

Notiamo che $w = z + 3i$ rappresenta una traslazione verso l'alto. Quindi il punto $(0, 0)$ diventa $(0, 3i)$, invece la retta $y = -1$, cioè $Im(z) = -1$, diventa la retta $Im(w) = 2$.

es.

$$i^{255} z^3 = \bar{z}$$

Per risolvere i^{225} si può notare che gli esponenti di i seguono un pattern: $i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$. Inoltre da ricordarsi che i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$
IMMAGINE

$$i^{225} = i^{224+1} = i^{224} i^1 = 1i = i$$

$$iz^3 = \bar{z}$$

Ora risolviamo questa equazione usando la forma esponenziale dei numeri complessi: $z = \rho e^{i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho(\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-i\theta})$$

Che da origine a due soluzioni. La prima:

$$\rho = 0$$

Accettata perchè ρ è un numero reale positivo. La seconda:

$$\rho^2 e^{i(3\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{-i\theta}$$

Modulo:

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = \pm 1$$

Ma essendo ρ un numero reale positivo rifiutiamo -1 come soluzione. Quindi $\rho = 1$.
Argomento:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi$$
$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

per $k = 0, \dots, 3$.
es. TDE

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = \sqrt{3|Im(z)|}\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \ : \ iw^2 \in A\}$$

partendo dal fatto che $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ x = \sqrt{3}|y|\}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & y \geq 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_z e^{i\frac{\pi}{6}} & y \geq 0 \\ \rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}} & y < 0 \end{cases}$$

$$w = \rho_w e^{i\theta_w}$$
$$iw^2 = z$$

moltiplico per $-i$

$$w^2 = -iz$$

Per A^+:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = (-i)(\rho_z e^{i\frac{\pi}{6}})$$
$$\rho_w^2 e^{2i\theta_w} = \rho_z e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$arg(w) = 2\theta_w = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\theta_w = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

per $k = 0, 1$.
Per A^-:

$$\rho_w^2 e^{2i\theta w} = (-i)(\rho_z e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \rho_z e^{-i\frac{2}{3}\pi}$$
$$\rho_w = \sqrt{\rho_z}$$
$$\theta_w = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$$

Permutazioni con e senza ripetizioni

Definiamo il fattoriale di un numero $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)\ldots 2\ 1 & n \geq 1 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

Il fattoriale è tipicamente usato per calcolare il numero di possibili permutazioni. Per esempio il numero di possibili permutazioni (anagrammi) di una parola si ottiene con il fattoriale del numero di lettere.
es. ROMA $\rightarrow 4!$
es. FARFALLA $\rightarrow 8!$, ma se per esempio volessimo eliminare la possibilità di permutare lettere identiche, dovremmo togliere a 8! le possibili permutazioni delle F (2!), delle A (3!), e delle L (2!) e quindi otteremmo:

$$\frac{8!}{2!2!3!}$$

es. In quante configurazioni diverse si possono porre 9 persone in fila indiana?
9!
es. Se le 9 persone dell'esercizio fossero 5 maschi e 4 femmine e noi volessimo avere sempre per prima i tutti i maschi e poi tutte le femmine? 5!4!

Esercizi sui Fattoriali

es. TDE. 3 uomini e 3 donne devono sedersi alternati a un tavolo rotondo, quante sono le diverse possibili configurazioni?
Per risolvere questo esercizio ragioniamo a "coppie" di persone (uomo-donna) che possiamo creare: 3!.
Queste 3! coppie possibili possono essere disposte sul tavolo in 3! modi diversi.
Il numero fino ad ora ottenuto va moltiplicato per due perchè abbiamo solo lavorato con le coppie uomo-donna, ma possiamo rifare lo stesso ragionamento anche per le coppie donna-uomo.
Ultimo fattore da considerare è il fatto che il tavolo sia rotondo, infatti le permutazioni possibili di elementi su un tavolo rotondo non sono $n!$ ma $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Questo accade perchè se avessimo un fila indiana da riempire con gli elementi A,B e C otterremmo tre possibili configurazioni: ABC, CAB, BCA. Ma se disposte su un tavolo rotondo queste tre disposizioni sono esattamente la stessa disposizione.

Risposta:

$$\frac{3!2!2!}{6}$$

(6 sono i posti a tavola)

es. TDE
Possibili anagrammi di ESAME?

$$\frac{5!}{2!} = 5\ 4\ 3 = 60$$

es. TDE
Con 14 partite di una schedina di calcio con 3 pareggi e 2 vittorie in casa, quante possibilità di compilare la schedina ci sono?

$$\frac{14!}{9!2!3!}$$

es. TDE
Quante password di 6 cifre e composte solo dai caratteri "0" "1" "2" esistono?

$$3^6$$

Coefficienti binomiali

def. Coefficiente binomiale con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vediamo alcuni coefficienti binomiali notevoli:
caso $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = 1$$

casp $k = n$:

$$\binom{n}{n} = 1$$

caso k piccolo, comodo perchè risolve il binomiale trasformandolo in una frazione con k fattori sopra e sotto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

dim.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) = (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k!)}$$

caso n e k sono numeri molto simili, comodo perchè riconduce il binomiale alla formula precedente

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dim.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

def. potenza del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

es. ceofficiente di x^7y^3 nello sviluppo di $(2x-y)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^k(-y)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} 2^k(-1)^{10-k}x^k y^{10-k}$$

per x^7y^3 devo prendere $k = 7$:

$$\binom{10}{7} 2^7(-1)^3 = \dots = -30\ 2^9$$

es. TDE. Coefficiente di a^5b^7 nello sviluppo di $(2\sqrt{a}b + 3ab)^7$
Si potrebbe applicare direttamente Newton, ma per semplificare i calcoli sarebbe meglio prima raccogliere ab

$$a^{\frac{7}{2}}b^7(2+3a^{\frac{1}{2}})^7 = a^{\frac{7}{2}}b^7\left[\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k(3a^{\frac{1}{2}})^{7-k}\right]$$

l'intera sommatoria è moltiplicata per b^7 e $a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{7}{2}-\frac{k}{2}}$, quindi per ottenere b^7a^5 devo prendere $k = 4$.

$$k = 4 \rightarrow \binom{7}{4}2^4(3)^3 = \dots$$

es. risolvere la seguente equazione

$$2\binom{x-1}{1} + 3\binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$$

per $x - 1 \geq 1$, per $x + 1 \geq 3$ e $x \geq 2$, quindi solo $x \geq 2$

$$2\frac{(x-1)!}{(x-2)!} + 3\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - \frac{x!}{2!(x-2)!} = 0$$

$$2(x-1)\frac{(x-2)!}{(x-2)!} + 3\frac{x+1}{6} - \frac{x(x-1)}{2} = 0$$

$$(x-1)(2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = 0$$

$x - 1 = 0$ non si accetta.
$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$ è impossibile.
non ci sono soluzioni.

Topologia in $\mathbb{R}$

def.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **maggiorante** di A se $k \geq x, \forall x \in A$.
Preso un insieme $A \in \mathbb{R}$, k é **minorante** di A se $k \leq x, \forall x \in A$.
Un insieme è **limitato superiormente** se ne esiste almeno un maggiorante.
Un insieme è **limitato inferioremente** se ne esiste almeno un minorante.
L'**estremo inferiore** $inf(A)$ è il massimo dei minoranti (non deve per forza appartenere ad A).
L'**estremo superiore** $sup(A)$ è il minimo dei maggioranti (non deve per forza appartenere ad A).
Il **minimo** $min(A)$ è uguale all'$inf(A)$ se esso appartiene ad A. Notare che se esiste il $min(A)$ esso è anche l'$inf(A)$, ma non vale il viceversa.

es. consideriamo l'insieme $A = (0, 1]$.
-1 è un minorante, pure -2, etc. L'insieme dei minoranti di A è: $(-\infty, 0]$, il più grande è lo 0, che quindi è l'$inf(A)$, ma non è il $min(A)$, perchè non

appartiene ad A.
Se invece l'insieme fosse stato $A = [0, 1]$, l'insime dei minoranti sarebbe ancora $(-\infty, 0]$, l'$inf(A)$ sarebbe ancora 0, ma in questo caso sarebbe anche il $min(A)$.
Linsieme dei maggioranti è invece $[1, +\infty]$, $sup(A) = 1$, $max(A) = 1$.

def. Un punto è detto di **accumulazione** se:

- qualunque intorno di quel punto contiene almeno un punto di A
- ogni intorno di x_0 contiene un punto in A diverso da x_0

def. un punto è detto di **frontiera** se:

- in ogni intorno cadono punti di A e di A^c

def. un punto è detto **isolato** se:

- per qualunque intorno non ci sono altri punti di A

es.

$$A = \{\{-2\} \cup (1, 3]\}$$

-2 è di frontiera e isolato, 1 e 3 sono di frontiera.

def. un insieme è detto **interno** se:

- esiste almeno un intorno con solo punti di A

def. un insieme è detto **aperto** se:

- tutti i punti di A sono punti interni

def. un insieme è detto **chiuso** se:

- tutti i punti di A sono punti di accumulazione

es.

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \in [1, 5]\}$$

che equivale all'insime

$$\{-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq \sqrt{5}\} \cap \mathbb{Q}$$

maggioranti: $(\sqrt{5}, +\infty)$
$sup(B) = \sqrt{5}$, ma non esiste perchè siamo in ||
$inf(B) = \dots$
$max(B) =$ non esiste
$min(B) = \dots$