04/05/2020

Percorso:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = f(x,u \end{cases} \xrightarrow{LIN} (A,B,C,D) \to P(s) \Big\} \to R(s) \to \ ? \ \to$$

Specifiche

CODICE + interfacciamento

VOI SIETE QUI

ora vediamo

μP

μC

...

P

TRASFORMATA ZETA

Definizione

Dato un segnale (reale) a TD $v(k)$ $k = 0, 1, 2 \dots$

si definisce la sua trasformata Zeta (TZ)

$V(z)$ come

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(k)] := \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} \qquad z, V(z) \in \mathbb{C}$$

Proprietà (di nostro interesse):

1) la TZ è un operatore lineare

(ovvio)

2) TZ del segnale anticipato di un passo

$$\mathcal{Z}[v(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} v(k+1)\, z^{-k}$$

$$= v(1) + v(2)z^{-1} + v(3)z^{-2} \dots + z\,v(0) - z\,v(0)$$

$$= z\,v(0) + v(1) + v(2)z^{-1} \dots - z\,v(0)$$

$$= z\left(v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} \dots\right) - z\,v(0)$$

$$= z\left(\sum_{k=0}^{\infty} v(k)\, z^{-k}\right) - z\,v(0)$$

$$= z\, \mathcal{Z}[v(k)] - z\,v(0)$$

z è l'operatore "anticipo di 1 passo"

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (SD LTI a TD, SISO)

Partiamo dal SD

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + b u(k) \\ y(k) = c x(k) + d u(k) \end{cases}$$

Convenzione

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(k)]$$

MAIUSCOLO

MINUSCOLO

TZ dell'eq. di stato

$$\underbrace{z\,X(z) - z\,x(0)}_{\mathcal{Z}[x(k+1)]} \overset{\uparrow}{=} A\,X(z) + b\,U(z)$$

LIN della TZ

$$(zI - A)\,X(z) = z\,x(0) + b\,U(z)$$

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1} z\,x(0)}_{\text{TZ del ML di } x} + \underbrace{(zI - A)^{-1} b\,U(z)}_{\text{TZ del MF di } x}$$

TZ dell'eq. d'uscita

$$Y(z) \underset{\uparrow \\ \text{LIN}}{=} c\,X(z) + d\,U(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{c(zI-A)^{-1} z\, x(0)}_{\text{TZ del ML di } y} + \underbrace{\Big[\overbrace{c(zI-A)^{-1} b + d}^{\text{FdT}}\Big] U(z)}_{\text{TZ del MF di } y}$$

$\Rightarrow$ stesse considerazioni del caso a TC

TRASFORMATE ZETA NOTEVOLI

1) impulso

$$\mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[\mathrm{imp}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{imp}(k)\, z^{-k} = 1$$

2) Scalino

$$sca(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[sca(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} sca(k) z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

NB la TZ ha in generale un RAGGIO di convergenza, cioè converge per $|z| >$ tot

3) esponenziale (discreta)

$$v(k) = a^k \operatorname{sca}(k)$$

$$\mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

...

ES 1

Dato il SD

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

calcolarne la FdT $G(z)$

$$G(z) = c\,(zI - A)^{-1}\,b + d$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -0,5 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{z(z-2)} \begin{bmatrix} z-1 & 0,5 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{''} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-0,5 \\ z+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3\cancel{z}}{\cancel{z}(z-2)} = \frac{3}{z-2}$$

$\Uparrow$ cancellazione NON CRITICA (MODULO < 1)

$$\{\text{Poli di } G\} \subseteq \{\text{Autovalori di } A\}$$

Su stabilità / poli / autovalori / p. nascoste ...

TUTTO COME A TC

Raggiungibilità (da zero)

NB SISO

Def. come a TC

Che succede qui?

$x(0) = x_0$ dato (per s.z. è 0)

$$x(1) = \underbrace{A\, x(0)}_{\substack{\text{comb. lin.}\\ \text{delle colonne}\\ \text{di } A \text{ secondo}\\ x(0)}} + b\, u(0)$$

$$x(2) = A^2 x(0) + \underbrace{Ab\,u(0)}_{\text{colonna}} + \underbrace{b\,u(1)}_{\text{colonna}}$$

...

$$x(n-1) = A^{n-1} x(0) + A^{n-2} b\,u(0) \cdots + Ab\,u(n-3) + b\,u(n-2)$$

n ORDINE del SISTEMA

$$x(n) = \underbrace{A^n}\, x(0) + A^{n-1} b\,u(0) \ \dots\ + b\,u(n-1)$$

comb. lineare di $A^{n-1}, A^{n-2} \dots A, I$ per il teo di Cayley-Hamilton

Quindi

SCALARI

$$x(n) = \cancel{A^{n} x(0)} + A^{n-1} b\, u(0) \; \dots \; + A b\, u(n-2) + b\, u(n-1)$$

COLONNE (SISO)

raggiungibilità DA ZERO: $x(0)=0$

$$x(n) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \dots & A^{n-1} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Condizione perché $\forall x(n)$ $\exists$ $u[0, n-1]$ che a partire da $x(0) = 0$ produca tale $x(n)$:

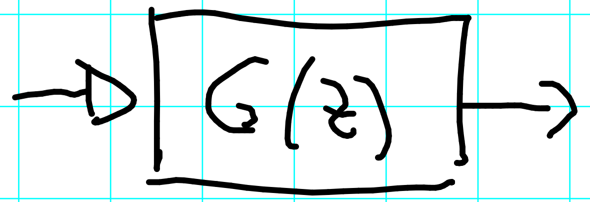
$$M_R = [b \;\; Ab \;\; A^2b \ldots A^{n-1}b]$$

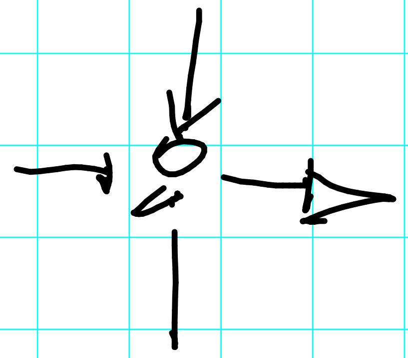
non deve essere singolare (come a TC)

NB ne consegue anche che se uno stato è R lo è al più in n passi

Osservabilità: anche Mo come a TC

SCHEMI A BLOCCHI a TD





. . .

Serie $G = G_1 G_2$

// $G = G_1 + G_2$

. . . .

tutto come a TC

ES2

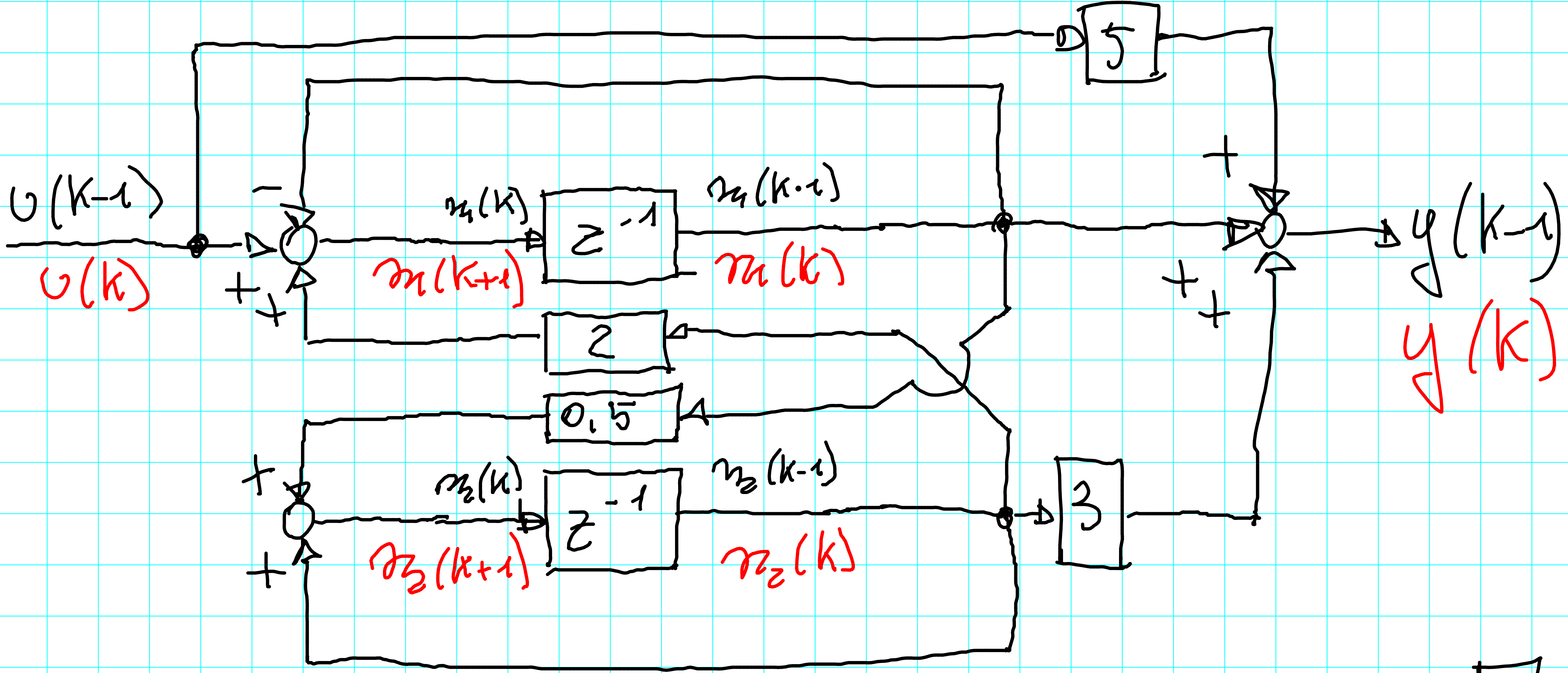
Dato

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} x(k) + 5u(k) \end{cases}$$

Schema a blocchi?

$$\begin{cases} x_1(k) = -x_1(k-1) + 2x_2(k-1) + u(k-1) \\ x_2(k) = 0{,}5\, x_1(k-1) + x_2(k-1) \\ y(k) = x_1(k) + 3x_2(k) + 5u(k) \end{cases}$$

z^{-1} = ritardo unitario (di 1 passo)

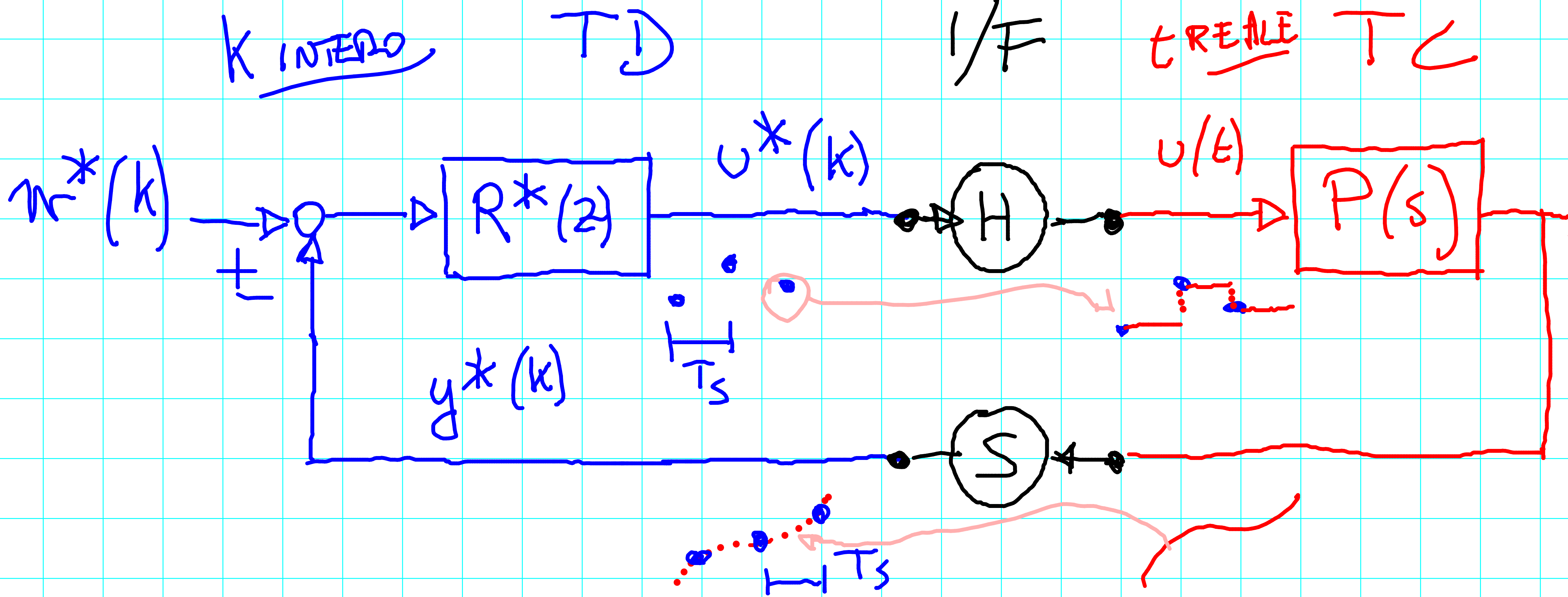


indice
t = 1

□

SCHEMA DI CONTROLLO (loop) IBRIDO

NOTA $* = TD$



T_s: passo di campionamento

H: HOLDER

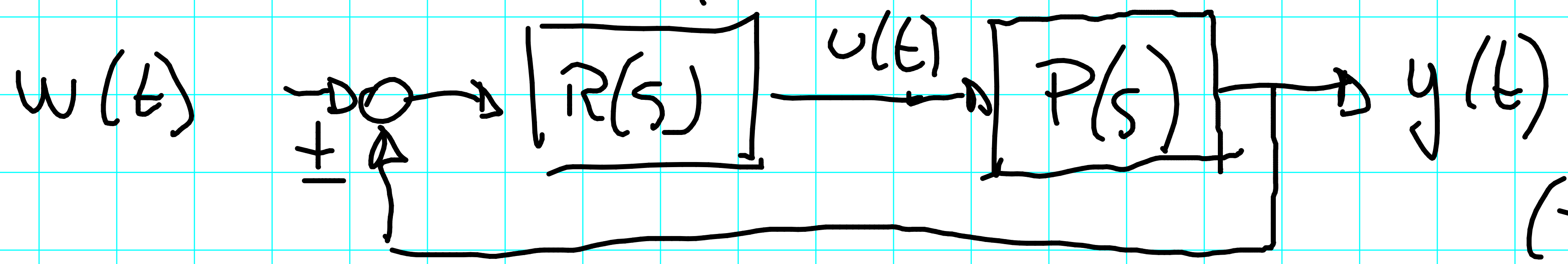
S: SAMPLER

Per noi: campionatore (sampler) ideale $\Rightarrow y^*(k) = y(kT_s)$

mantenitore (holder) di ordine zero (ZOH, zero order holder) $\Rightarrow u(t) = u^*(k)$ per $kT_s \le t < (k+1)T_s$

come polinomio int

Problema: noi progettiamo $R(s)$ pensando alla schema



che è tutto $\to$ TC e poi dobbiamo ottenere $R^*(z)$ e implementare lo schema con S&H (sampling & Holding) della propria funz. e dobbiamo anche scegliere il passo o tempo di campionamento T_s

1. Scelta di T_s
2. $\{R(s), T_s\} \xrightarrow{?} R^*(z)$ DISCRETIZZAZIONE
3. La presenza di S&H ha qualche effetto dinamico? se sì, come ne teniamo conto?

DISCRETIZZAZIONE

Problema:

$$\left.\begin{matrix} R(s) \\ T_s \end{matrix}\right\} \longrightarrow R^*(z)$$

DATI

(1) Discretizzazione "esatta"

Idea: Far evolvere il sistema a TC per un tempo pari a T_s e interpretare ciò come l'evoluzione di un passo a TD

$$\left(t \mathrel{+}= T_s \Rightarrow k \mathrel{+}= 1 \right)$$

Quindi

- $R(s) \longrightarrow (A, b, c, d)$ (realizzazione)

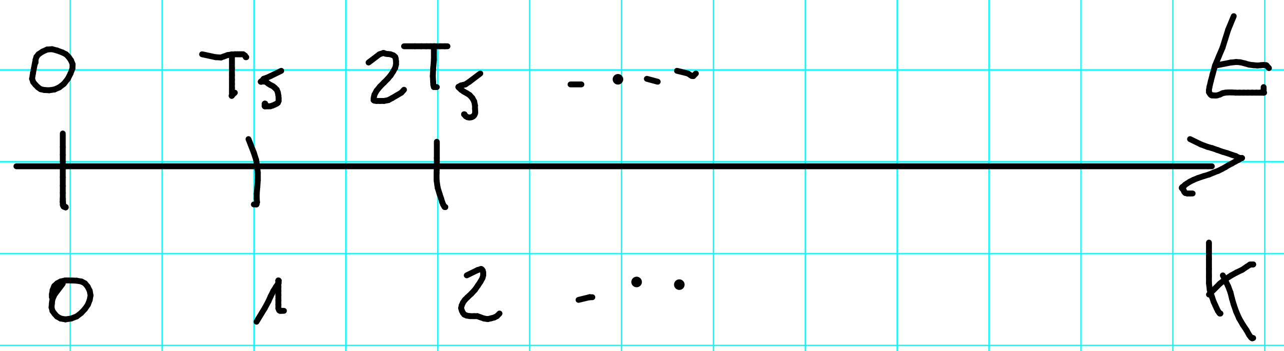
- $x(T_s) = e^{AT_s} x(0) + \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau$ (Lagrange)

APPROX
$u(\tau)$ costante
sul passo $[0, T_s]$
cioè $= u(0)$

$$\simeq \underbrace{\overbrace{e^{AT_s}}^{A^*} x(0)}_{\text{QUI nessuna approssimazione}} + \left(\overbrace{\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} b\, d\tau}^{b^*} \right) u(0)$$

$$= A^* x(0) + b^* u(0)$$

$$x(T_s) = A^* x(0) + b^* u(0)$$



$$x^*(1) = A^* x^*(0) + b^* u^*(0)$$

$$\underbrace{v^*(k)}_{TD} = \underbrace{v(kT_s)}_{TC}$$

$\Downarrow$ TI

$$\begin{cases} x^*(k) = A^* x^*(k-1) + b^* u^*(k-1) \\ y^*(k) = c\, x^*(k) + d\, u^*(k) \end{cases}$$

EQ. d'uscita istantanea
$\Rightarrow$ c e d non cambiano

$$\Rightarrow R^*(z) = c\,(zI - A^*)^{-1}\, b^* + d$$

OSS

1) Quanto al ML la discr. è esatta per davvero

2) Invece non lo è per il MF perchè in generale l'ingresso del SD = TC non rimane costante lungo il passo

3) Dato che $A^* = e^{AT_S}$

se λ è un aut. di A allora $e^{\lambda T_S}$ è un aut. di A^*

$$Re(\lambda) \gtreqless 0 \iff |e^{\lambda T_S}| \gtreqless 1$$

$\Rightarrow$ la discr. esatta preserva le caratteristiche di stabilità del sistema $\forall T_S$

② Discretizzazione approssimata

Motivazioni:

- A^* e b^* possono essere pesanti da calcolare
- per il MF di fatto la discr. non è esatta

Idea: sostituire la derivata temporale
con il rapporto incrementale
calcolato lungo un passo di campionamento

NB questi metodi possono però alterare la stabilità
(cioè per es. TC AS → TDI) se Ts non è scelto
in modo opportuno