MAPPE DI KARNAUGH

lunedì 17 ottobre 2022 20:20

È UN metodo visivo e semplice. SERVE PER LA FORMA MINIMA.

È UN MODO DIFFERENTE DI ORGANIZZARE LA TABELLA DI VERITÀ, CHE MI CONSENTE DI EFFETTUARE DELLE SEMPLIFICAZIONI IMMEDIATE.

> Le mappe di Karnaugh sono un metodo per semplificare un'espressione booleana o, è la stessa cosa, per ridurre il numero delle porte logiche in un circuito combinatorio.

Sono delle tabelle in cui noi andiamo ad organizzare le nostre variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ su delle righe e su delle colonne.

Le tabelle possono avere forma quadrata o rettangolare a seconda del numero di variabili che andiamo a rappresentare.

se ne abbiamo due sarà quadrata, se ne abbiamo tre sarà rettangolare, con quattro quadrata e così via...!

I VALORI CHE POSSONO ASSUMERE LE NOSTRE VARIABILI LE POSIZIONIAMO SU QUESTA TABELLA, SFRUTTANDO UN CODICE DI GRAY, OSSIA UN CODICE CON DISTANZA DI HAMMING = 1.

SE RIESCO A TROVARE DELLE CASELLE IN CUI LA MIA FUNZIONE VALE 1 IN CELLE ADIACENTI, SO CHE LA MIA FUNZIONE VALE 1, INDIPENDENTEMENTE DALLA VARIABILE CHE CAMBIA.

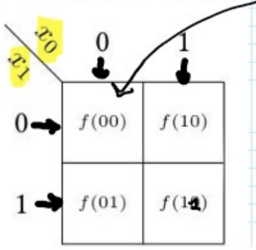
POSSO ELIMINARE TUTTE QUELLE VARIABILI DOVE ALMENO DUE CELLE ADIACENTI VALGONO 1.

↳ SE NE HO UN PAIO CHE SONO VICINE, POSSO SEMPLIFICARE.

> Poiché $(a + \overline{a}) = 1$, è possibile eliminare (semplificare) una variabile se la funzione assume lo stesso valore in gruppi di celle adiacenti

LA FUNZIONE BOOLEANA DEVE ESSERE GIÀ IN FORMA NORMALE CANONICA COMPLETA NON RIDONDANTE.

MAPPA DI KARNAUGH PER 2 VARIABILI → $f(x_0, x_1)$



→ POSSIBILI valori di X_0 (colonne)

X_0	X_1	$f(X_0, X_1)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$

SULLA MIA MAPPA DI KARNAUGH, RIPORTO ESATTAMENTE QUESTI

1	$f(01)$	$f(11)$

2 variabili

Possibili valori di X_1 (RIGHE)

0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

Tabella di verità!

DI KARNAUGH, RIPORTO ESATTAMENTE QUESTI VALORI.

COLONNA 0 RIGA 0, CORRISPONDE A $f(0,0)$

POTEVO METTERE X_0 E X_1 AL CONTRARIO, NON C'È UN ORDINE.

MAPPA DI KARNAUGH PER 3 VARIABILI → $f(x_0, x_1, x_2)$

x_2 \ $x_0 x_1$	00	01	11	10
0	$f(000)$	$f(010)$	$f(110)$	$f(100)$
1	$f(001)$	$f(011)$	$f(111)$	$f(101)$

3 variabili

Sono tutti a distanza di hamming = 1.

Posso utilizzare due, delle tre variabili, insieme.

x_0	x_1	x_2	$f(x_0,x_1,x_2)$
0	0	0	$f(0,0,0)$
0	0	1	$f(0,0,1)$
0	1	0	$f(0,1,0)$
0	1	1	$f(0,1,1)$
1	0	0	$f(1,0,0)$
1	0	1	$f(1,0,1)$
1	1	0	$f(1,1,0)$
1	1	1	$f(1,1,1)$

$\# CAMPI = 2^m$

m = N° delle variabili

QUANDO ASSEGNO I VALORI ALLE COLONNE, DEVO DARE UN VALORE A DISTANZA di HAMMING 1.

POTEVO CAMBIARE I POSTI delle VARIABILI, E L'ORDINE dei BIT lo POTEVO CAMBIARE, L'IMPORTANTE È CHE SIANO A DISTANZA HAMMING 1.

00 10 11 01 (ANDAVA BENE)

MAPPA DI KARNAUGH PER 4 VARIABILI → $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

x_2x_3 \ x_0x_1	00 (x_0x_1)	01 (x_0x_1)	11 (x_0x_1)	10 (x_0x_1)
00 (x_2x_3)	$f(0000)$	$f(0100)$	$f(1100)$	$f(1000)$
01 (x_2x_3)	$f(0001)$	$f(0101)$	$f(1101)$	$f(1001)$
11 (x_2x_3)	$f(0011)$	$f(0111)$	$f(1111)$	$f(1011)$
10 (x_2x_3)	$f(0010)$	$f(0110)$	$f(1110)$	$f(1010)$

4 variabili

x_0	x_1	x_2	x_3	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	$f(0,0,0,0)$
0	0	0	1	$f(0\,0\,0\,1)$
0	0	1	0	$f(0\,0\,1\,0)$
0	0	1	1	$f(0\,0\,1\,1)$
0	1	0	0	$f(0\,1\,0\,0)$
0	1	0	1	$f(0\,1\,0\,1)$
0	1	1	0	$f(0\,1\,1\,0)$
0	1	1	1	$f(0\,1\,1\,1)$
1	0	0	0	$f(1\,0\,0\,0)$
1	0	0	1	$f(1\,0\,0\,1)$
1	0	1	0	$f(1\,0\,1\,0)$
1	0	1	1	$f(1\,0\,1\,1)$
1	1	0	0	$f(1\,1\,0\,0)$
1	1	0	1	$f(1\,1\,0\,1)$
1	1	1	0	$f(1\,1\,1\,0)$
1	1	1	1	$f(1\,1\,1\,1)$

DUE CELLE ATTACCATE IN ORIZZONTALE SONO ADIACENTI PERCHÈ CAMBIA UN SOLO BIT.

$h=1$

x_2x_3 \ x_0x_1	00	01	11	10
00	$f(0000)$	$f(0100)$	$f(1100)$	$f(1000)$
01	$f(0001)$	$f(0101)$	$f(1101)$	$f(1001)$
11	$f(0011)$	$f(0111)$	$f(1111)$	$f(1011)$
10	$f(0010)$	$f(0110)$	$f(1110)$	$f(1010)$

$h=1$

4 variabili

se mi sposto da qui a qui, la distanza di hamming è sempre 1, quindi è come se avessi arrotolato la tabella in orizzontale.

LE CELLE SONO ADIACENTI.

LA STESSA COSA VALE IN VERTICALE!

- È importante notare che l'uso del codice di Gray garantisce che anche le celle agli estremi siano *adiacenti*

MAPPA DI KARNAUGH PER 5 VARIABILI → $f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(00000)	f(01000)	f(11000)	f(10000)
01	f(00010)	f(01010)	f(11010)	f(10010)
11	f(00110)	f(01110)	f(11110)	f(10110)
10	f(00100)	f(01100)	f(11100)	f(10100)

$x_4 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(00001)	f(01001)	f(11001)	f(10001)
01	f(00011)	f(01011)	f(11011)	f(10011)
11	f(00111)	f(01111)	f(11111)	f(10111)
10	f(00101)	f(01101)	f(11101)	f(10101)

$x_4 = 1$

(TAB SOPRA)

$2^5 = 32 \rightarrow 4\times4 = M$, $4\times4 = N$

SONO UNA SOVRAPPOSTA ALL'ALTRA.

LA CELLA ● E LA CELLA ● HANNO DISTANZA 1 PERCHÉ CAMBIA IL VALORE DI X_4.
IN UNA SINGOLA TABELLA TUTTO CONTINUA A FUNZIONARE COME SEMPRE PER LE ADIACENZE.
TUTTE LE CELLE DELLA TABELLA M SONO A DISTANZA 1 NELLE RISPETTIVE CELLE DELLA TABELLA N, PERCHÈ CAMBIA LA QUINTA VARIABILE, OSSIA $X_4 = 1$.

MAPPA DI KARNAUGH PER 6 VARIABILI $\rightarrow f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

- Come nel caso di cinque variabili, anche qui le adiacenze valgono per tabelle sovrapposte

NO ADIACENTI!

due celle attaccate tra loro in orizzontale e verticale sono adiacenti, la prima riga è adiacente con l'ultima riga, l'ultima colonna è adiacente con la prima colonna.

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(000000)	f(010000)	f(110000)	f(100000)
01	f(000100)	f(010100)	f(110100)	f(100100)
11	f(001100)	f(011100)	f(111100)	f(101100)
10	f(001000)	f(011000)	f(111000)	f(101000)

$x_4x_5 = 00$

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(000001)	f(010001)	f(110001)	f(100001)
01	f(000101)	f(010101)	f(110101)	f(100101)
11	f(001101)	f(011101)	f(111101)	f(101101)
10	f(001001)	f(011001)	f(111001)	f(101001)

$x_4x_5 = 01$

si aggiorna la tabella, viene riportato il val.

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(000010)	f(010010)	f(110010)	f(100010)
01	f(000110)	f(010110)	f(110110)	f(100110)
11	f(001110)	f(011110)	f(111110)	f(101110)
10	f(001010)	f(011010)	f(111010)	f(101010)

$x_4x_5 = 10$

$x_2x_3 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10
00	f(000011)	f(010011)	f(110011)	f(100011)
01	f(000111)	f(010111)	f(110111)	f(100111)
11	f(001111)	f(011111)	f(111111)	f(101111)
10	f(001011)	f(011011)	f(111011)	f(101011)

$x_4x_5 = 11$

DA TABELLA DI VERITÀ, A MAPPA DI KARNAUGH!

TABELLA DI VERITÀ

k	x_1	x_2	x_3	$f(k)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0

$f(x_1, x_2, x_3)$

MAPPA DI KARNAUGH

$x_2 \backslash x_0x_1$	00	01	11	10

0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3)$

3 VARIABILI.

2^3 CELLE.

x_2 \ x_0x_1	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

IN CORRISPONDENZA DELLE COORDINATE, CI METTO I VALORI $f(K)$, OSSIA IL VALORE DI g.

QUESTE DUE RAPPRESENTAZIONI SONO UGUALI, L'UNICA COSA CHE CAMBIA È COME ORDINO I VALORI DELLE MIE VARIABILI.

ORA CI INTERESSANO LE ADIACENZE: GUARDANDO QUESTA MAPPA RIUSCIAMO A CAPIRE QUALI CELLE SONO ADIACENTI.

x_2 \ x_0x_1	00	01	11 ($x_0 x_1$)	10 ($x_0 x_1$)
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

DUE CELLE ADIACENTI HANNO SOLO UNA VARIABILE CHE CAMBIA.

→ LA DIFFERENZA STA NELLA VARIABILE x_1

↓

ADIACENTI

11
10
$x_0 \; x_1$

ORA VADO A COSTRUIRE DEGLI INSIEMI DI COPERTURA, OSSIA INSIEMI CHE RICOPRONO LE CELLE CHE HANNO VALORE 1 O VALORE 0, A SECONDA SE STO CERCANDO MINTERMINI O MAXTERMINI.

Costruisco questi insiemi partendo da un singolo valore 1 e poi lo raddoppio, affinché io riesca a coprire tutti i valori identici.
quindi raccolgo due 1, poi ne raccolgo 4, poi 8, 16, 32, 64...

MA SEMPRE RISPETTANDO le adiacenze!

Quando ho coperto con i miei insiemi massimi, tutti gli 1 o gli 0, ho trovato la mia funzione minimizzata! ✓

↳ PERCHÈ LE VARIABILI SULLE CELLE DI ADIACENZA POSSONO ESSERE IGNORATE.

ESEMPIO DI SEMPLIFICAZIONE DA UNA MAPPA DI KARNAUGH IN MINTERMINI. (la tabella di verità è già stata rappresentata sulla seguente mappa di Karnaugh)

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

$f(x,y,z,w) = \sum(0,1,2,7,15)$

IN PROSSIMITÀ di questi indici la funzione vale 1.

VOGLIO COSTRUIRE DEGLI INSIEMI DI COPERTURA;

• PARTO DA questo 1, e ho UN insieme di COPERTURA di dimensione 1.

C'È qualche 1 ADIACENTE CHE MI PERMETTE di RADDOPPIARE A 2 LA MIA COPERTURA?

Si, ne ho 1 SOTTO, E L'INSIEME DI COPERTURA È di DIMENSIONE 2.

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

ORA ne ho 2, PER POTER RADDOPPIARE devo PASSARE a quattro.
NON POSSO RADDOPPIARE IN VERTICALE, perché non ho 1 che mi permettano di arrivare a 4.
SE RADDOPPIO IN ORIZZONTALE nemmeno posso.

questo è UN insieme MINIMO RICOPRENTE.

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

ORA PRENDO questo 1.
Posso Raddoppiare la dimensione del mio insieme RICOPRENTE a destra? Si. E lo prendo.
Non posso Raddoppiare in orizzontale né in verticale, da questo nuovo 1.

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

ORa parto da questo 1 e mi chiedo se posso RADDOPPIARE la dimensione del mio insieme, sì ne ho uno A SINISTRA e non mi interessa che appartiene già ad un insieme, lo prendo.

HO TROVATO 3 INSIEMI.

- A questo punto, identifichiamo gli implicanti primi selezionando degli insiemi di dimensione 1, 2, 4, ... fino a coprire tutti gli 1 almeno una volta (semplificazione con mintermini)

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

∼

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

Questi insiemi li posso UTILIZZARE per fare la mia MINIMIZZAZIONE.

• Prendiamo l'insieme rosso della prima tabella.

Se andiamo a vedere i mintermini che identificano quelle celle li troviamo:

Primo uno: $\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}\ \bar{w}$

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

00
01
↓
CAMBIA w

$x=y=z=w$

$x_i^{a_i} = x_i$ se $a_i = 1$,
$x_i^{a_i} = \bar{x}_i$ se $a_i = 0$!

Secondo uno: $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{w}$

quindi w non mi interessa: $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w$ $(w \vee w' = 1,\ w + w' = 1)$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$ semplificato, per questo insieme!

Ed è proprio w che potrà essere semplificata

QUESTO GRAZIE AL codice di GRAY $=1$, vedo LA VARIABILE CHE PUÒ ESSERE SEMPLIFICATA.

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

Qui si aplica lo stesso ragionamento:

$\bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}yzw$

qui è y quella che posso semplificare e otterrò: $\bar{x}zw$ ✓

00
01 } y cambia

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

sarà la stessa cosa: $\bar{x}yzw + xyzw$

x cambia $\rightarrow$ yzw ✓

↓

• $f(x,y,z,w) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}zw + yzw$ (insiemi di sinistra)

↑

FORMA MINIMA

la stessa cosa per l'insieme di destra:

- $f(x, y, z, w) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}w + yzw$ (insiemi di destra)

FORMA MINIMA

Semplificazione mediante prodotto di somme

- È possibile effettuare la semplificazione creando insiemi che ricoprano gli zeri
  - Le funzioni minime ottenute sono equivalenti
- In questo caso, è necessario esprimere la funzione come prodotto di somme

- Quale usare?
  - Regola pratica: se gli 1 sono meno della metà, si usano i mintermini. Se gli zeri sono meno della metà, si usano i maxtermini

Semplificazione mediante prodotto di somme: esempio

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
11	0	0	0	0
10	0	1	0	1

- In questo caso la forma minima è data da:
  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})(x_3 + x_4)(\overline{x_3} + \overline{x_4})$
- Se avessimo semplificato usando i mintermini, non avremmo potuto semplificare nulla!

Avrei preso la stessa rappresentazione della tabella di verità.