

INTEGRALI MULTIPLI

1. Integrali doppi su rettangoli.

Se $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo contenuto in \mathbb{R}^2 e denotiamo le sue aree con

$$|R| = (b-a)(d-c).$$

Consideriamo una partizione P di R da $m \times n$ rettangoli

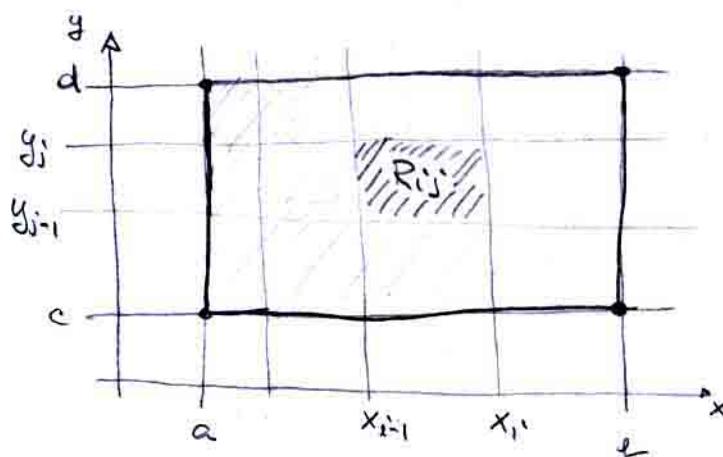
$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

dove

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

e

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = d$$



Sia ora $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e forniamo

$$m_{i,j} = \inf \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{i,j} \},$$

$$M_{i,j} = \sup \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{i,j} \}.$$

Definiamo la SOMMA INTEGRALE INFERIORE
di f relativa alla partizione P le somme

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} |R_{ij}|$$

mentre la SOMMA INTEGRALE SUPERIORE è

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} |R_{ij}|.$$

Si osservi che se P e P' sono due partizioni di R allora

$$s(f, P) \leq S(f, P').$$

Poniamo

$$s(f) = \sup \{ s(f, P) : P \text{ partizione di } R \}$$

$$S(f) = \inf \{ S(f, P) : P \text{ partizione di } R \}$$

allora $s(f) \leq S(f)$.

Diciamo che f è INTEGRABILE su R se

$$s(f) = S(f).$$

Il valore di tale uguaglianza si dice
INTEGRALE DOPPIO di f su R e si indica
con i simboli:

$$\iint_R f(x,y) dx dy \quad o \quad \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x,y) dx dy.$$

2. Integrali doppi su inservi non rettangolari

Sia D un insieme limitato di \mathbb{R}^2 e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

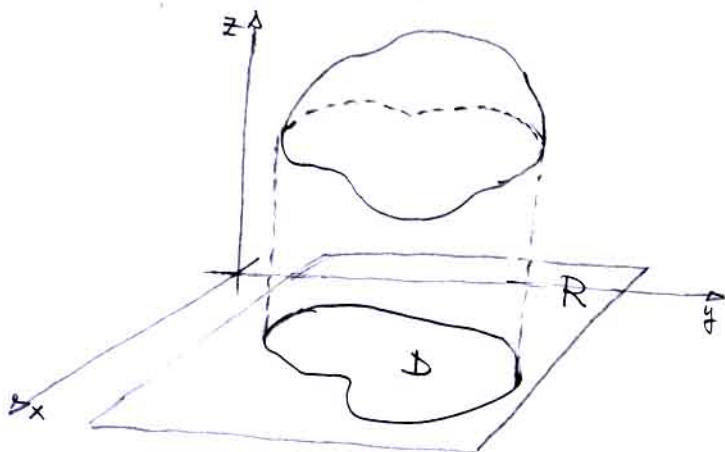
Diciamo che f è INTEGRABILE su D se la funzione "estensione"

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R} \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su R , dove R è un rettangolo sufficientemente grande da contenere D .

Si tiene

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy$$



Si noti che se $f(x,y) \geq 0$ allora $\iint_D f(x,y) dx dy$ è il volume dell'insieme

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } z \in [0, f(x,y)] \right\}.$$

Per individuare delle condizioni di integrabilità abbiamo bisogno qualche altra definizione.

Un insieme limitato $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice MISURABILE se la sua FUNZIONE CARATTERISTICA

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su D .

La MISURA di D si induce con $|D|$ e si tiene

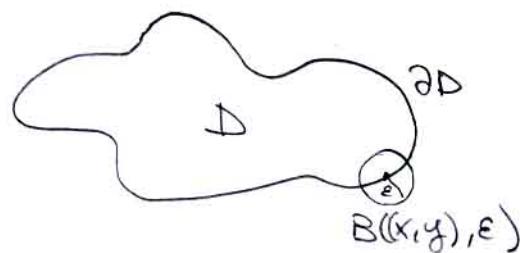
$$|D| = \iint_D \chi_D(x,y) dx dy = \iint_D dx dy.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ allora $|D|$ rappresenta l'area di D .

La FRONTIERA (o il BORDO) di D si induce con ∂D e si definisce come

$$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} B((x,y), \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \\ B((x,y), \varepsilon) \cap D^c \neq \emptyset \end{cases} \right\}$$

dove $B((x,y), \varepsilon)$ è il disco aperto di centro (x,y) e raggio $\varepsilon > 0$.



Un insieme D si dice CHIUSO se $D \supseteq \partial D$.

TEOREMA 1. (Condizione di integrabilità).
 Sia D un insieme chiuso, limitato e misurabile di \mathbb{R}^2 e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in D allora f è integrabile su D .

TEOREMA 2. (Criterio geometrico di misurabilità).
 Un insieme D di \mathbb{R}^2 è misurabile se e solo se $|\partial D| = 0$.

TEOREMA 3. Nelle ipotesi del teorema 1.

1) LINEARITÀ. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy.$$

2) MONOTONIA. Se $f \geq g$ in D allora

$$\iint_D f dx dy \geq \iint_D g dx dy.$$

3) ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE.

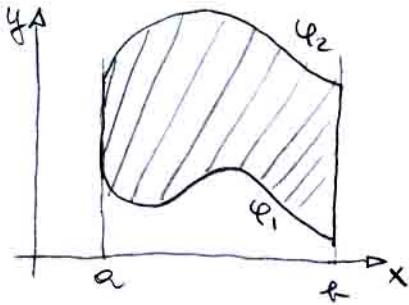
Se $|D_1 \cap D_2| = 0$ allora

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy.$$

3. Domini semplici e formule di integrazione

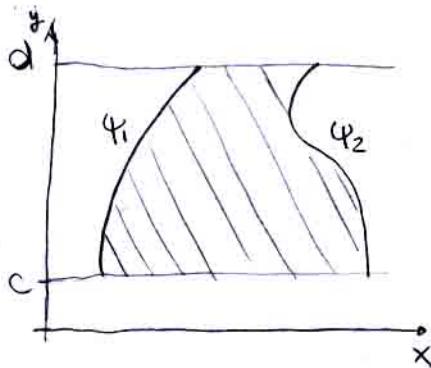
Un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice DOMINIO SEMPLICE RISPETTO ALL'ASSE Y se $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b]) : \varphi_1 \leq \varphi_2$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ e } y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$



Mentre si dice DOMINIO SEMPLICE RISPETTO ALL'ASSE X se $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in C([c, d]) : \varphi_1 \leq \varphi_2$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \text{ e } x \in [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]\}$$



Dato che la frontiera è costituita da grafici di funzioni continue si dimostra che i domini semplici sono misurabili.

Inoltre un dominio semplice è chiuso e limitato.

Le seguenti teoremi illustrano come il calcolo di un integrale doppio si può ridurre al calcolo di due integrali ordinari.

TEOREMA 4. (Formule di riduzione)

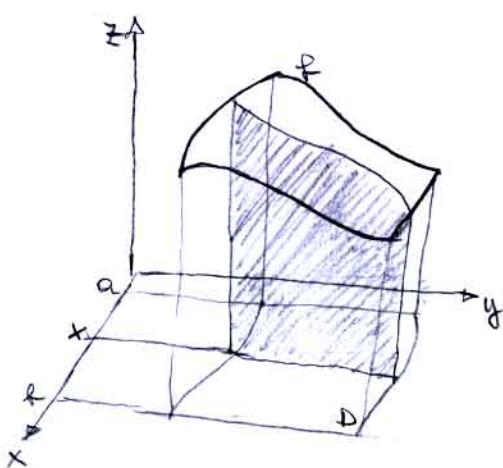
Sia D un dominio un dominio semplice di \mathbb{R}^2 e sia f continua in D .

1) Se D è semplice rispetto all'asse y allora

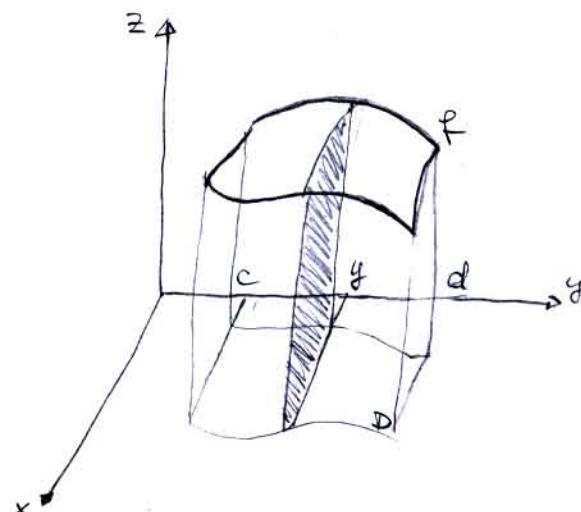
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

2) se D è semplice rispetto all'asse x allora

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right) dy$$



D semplice
rispetto all'asse y



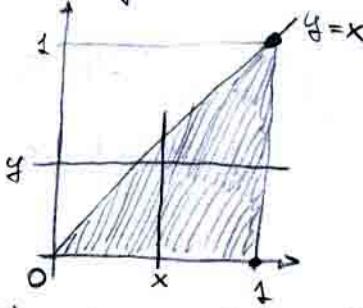
D semplice
rispetto all'asse x

ESEMPIO 1.

$$\iint_D xy \, dx \, dy \quad \text{dove } D \text{ è il triangolo chiuso}$$

di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$

In questo caso D è semplice sia rispetto a x che a y .



Svolgiamo il calcolo in entrambi i modi.

1) Rispetto a y :

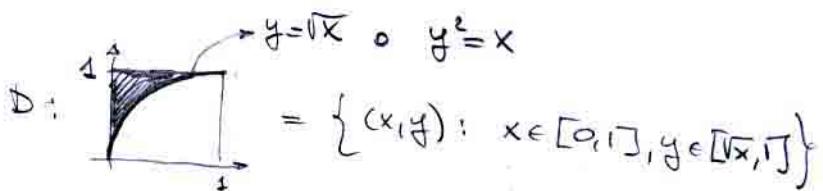
$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{y=x} xy \, dy \right) dx &= \int_0^1 x \left(\int_{y=0}^{y=x} y \, dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8} [x^4]_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2) Rispetto a x :

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y}^{x=1} xy \, dx \right) dy &= \int_0^1 y \left(\int_{x=y}^{x=1} x \, dx \right) dy = \int_0^1 y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2} (1-y^2) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

ESEMPIO 2.

$$\iint_D e^{y^3} \, dx \, dy$$



In questo caso ponendo rispetto a y :

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \, dy \right) dx = ?$$

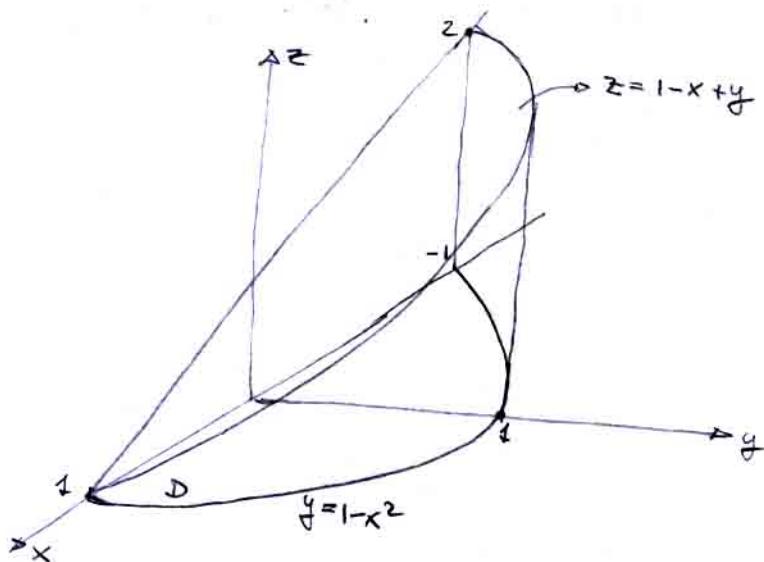
Visto che l'integrale interno $\int e^{y^3} dy$ non si riesce a risolvere proviamo a scrivere rispetto a x

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{y^2} e^{y^3} dx \right) dy &= \int_{y=0}^1 e^{y^3} \left(\int_{x=0}^{y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 e^{y^3} \cdot [x]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3} \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x - y + z \leq 1, y \leq 1 - x^2\}.$$



Consideriamo come dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [0, 1-x^2]\}$$

e come funzione

$$f(x, y) = 1 - x + y$$

Allora

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=-1}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x^2} (1 - x + y) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 \left[y - xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left((1-x^2) - x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right) dx
 \end{aligned}$$

Dato che $(1-x^2)$ e $\frac{(1-x^2)^2}{2}$ sono funzioni pari,
 $x(1-x^2)$ è una funzione dispari e l'intervallo
 $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto a 0 si ha che

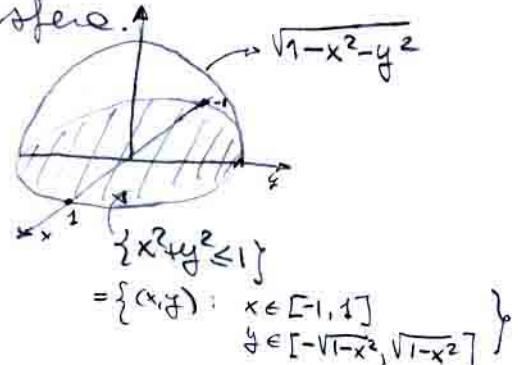
$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^1 \left((1-x^2) + \frac{1}{2} (1-2x^2+x^4) \right) dx \\
 &= 2 \left[\frac{3}{2}x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \right) = \frac{28}{15}
 \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.

Calcolare il volume della sfera di raggio 1.

Poniamo il centro nell'origine e calcoliamo
il doppio del volume della semisfera.

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
 &\quad \{x^2+y^2 \leq 1\} \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \right) dx
 \end{aligned}$$



poniamo $y = \sqrt{1-x^2}$ sent così $dy = \sqrt{1-x^2} \cos t dt$
con t che varia in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt \right) dx \\
 &= 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Il VALORE MEDIO di una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
su D di misure non nulle si definisce come

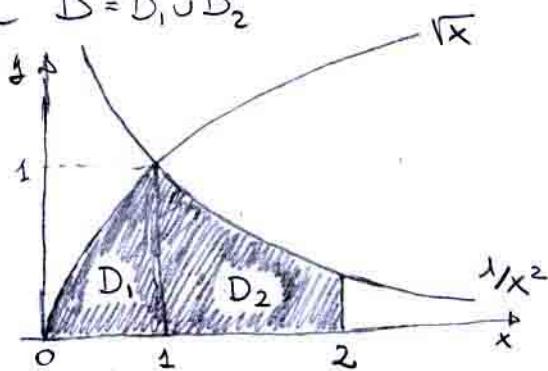
$$\bar{f}_D = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y) dx dy$$

ESEMPIO 5.

Calcolare il valore medio della funzione

$$f(x,y) = (1-2x) \cdot y$$

sull'insieme $D = D_1 \cup D_2$



$$|D| = |D_1| + |D_2| = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (1-2x) \cdot y \, dx dy &= \int_0^1 (1-2x) \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (1-2x) \cdot \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (1-2x) \cdot y \, dx dy &= \int_1^2 (1-2x) \left(\int_0^{1/x^2} y \, dy \right) dx \\ &= \int_1^2 (1-2x) \cdot \frac{1}{2x^4} dx = \left[-\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{2x^2} \right]_1^2 = -\frac{11}{48} \end{aligned}$$

Quindi

$$\bar{f}_D = \frac{1}{7/6} \cdot \left(-\frac{1}{12} - \frac{11}{48} \right) = -\frac{15}{56} .$$

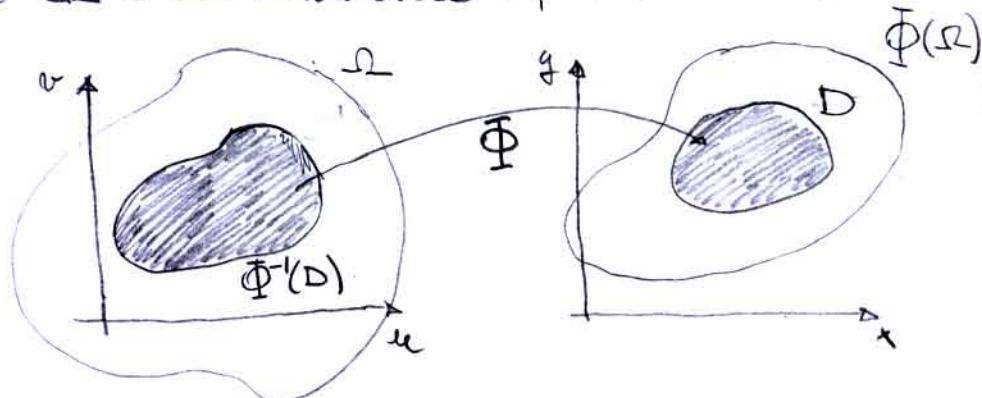
4. Cambiamento di variabili

Alle volte in un integrale doppio le variabili "ognnali" (x,y) possono rendere il calcolo complicato. In questi casi puo' essere utile effettuare un CAMBIAMENTO DI VARIABILI in un nuovo sistema di coordinate (u,v) .

Indichiamo con $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \quad \text{per } (u,v) \in \Omega$$

l'applicazione che realizza il cambiamento dove Ω e' un insieme aperto di \mathbb{R}^2 .



Supponiamo che Φ sia bimolare tra Ω e $\Phi(\Omega)$ e che le sue componenti $x(u,v)$ e $y(u,v)$ siano continue con le derivate parziali continue in Ω .

Inoltre, introduchiamo con

$$J_{\Phi}^{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

la cosiddetta MATRICE JACOBIANA di Φ , e con

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(J_{\Phi}^{(u,v)}).$$

Supponiamo che $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega$, allora
vale il seguente risultato.

TEOREMA 5.

Se D è misurabile e f è integrabile su D allora

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Phi(D)} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

Osservazione: il termine $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ rappresenta
il fattore di trasformazione dell'elemento
infinitesimo d'area $du dv$ a $dx dy$:

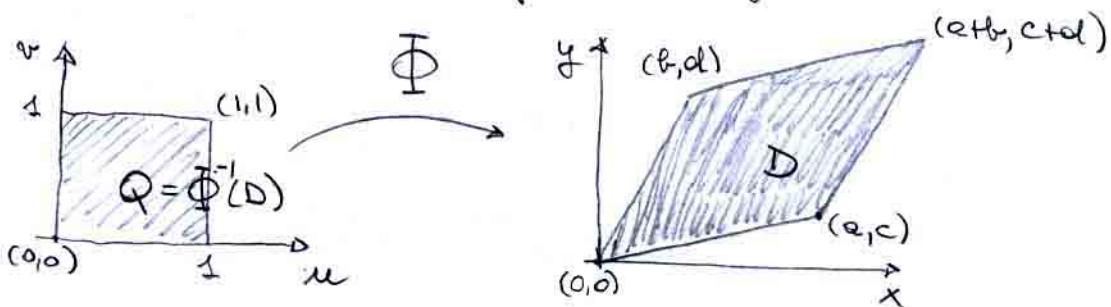
$$dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

Ad esempio se Φ è l'applicazione lineare

$$\Phi(u,v) = (au + bv, cu + dv)$$

con $ad - bc \neq 0$ (Φ deve essere iniettiva)

allora il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ viene trasformato in un parallelogramma D .

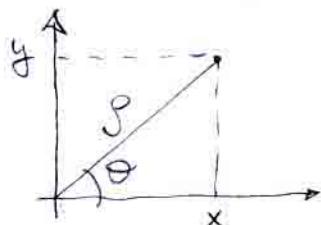


Anche se Φ realizza una corrispondenza biunivoca tra i punti di Q e quelli di D , in genere Φ "non conserva le aree":

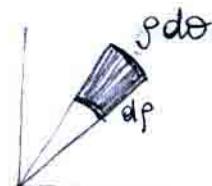
$$|Q|=1 \quad \text{e} \quad |\Phi(Q)|=|D|=|(a,c) \times (b,d)| = \\ = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = |ad - bc|.$$

E' facile verificare dalla definizione che in questo caso $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ è costante e uguale al rapporto delle due aree $|D|/|Q|$.

Un altro esempio importante è il caso delle coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$



$$\text{elemento d'area} = \rho d\rho d\theta$$

Quindi

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \right| = \rho$$

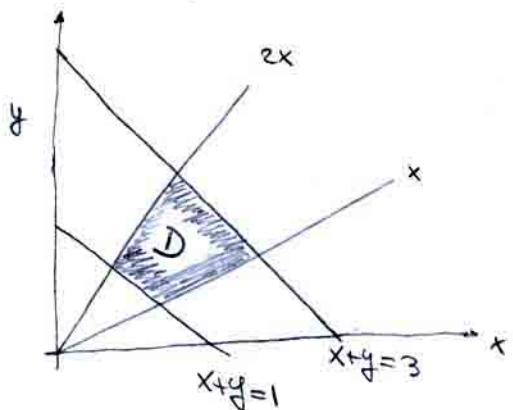
ESEMPIO 6.

Calcolare

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy}$$

dove

ossia



$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq y \leq 2x, 1 \leq x + y \leq 3 \right\}$$

Poniamo $u = \frac{y}{x}$ e $v = x + y$. (*)

In questo modo si è ridotto il dominio nelle nuove coordinate e il rettangolo $[1, 2] \times [1, 3]$.

Per calcolare $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ abbiamo due possibilità

- 1) Trovare x e y in funzione di u , v dalla definizione (*)

$$x = \frac{v}{u+1}, \quad y = \frac{uv}{u+1}$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{u}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{bmatrix} \right| = \frac{v}{(u+1)^2}$$

Così

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy} = \int_{u=1}^2 \int_{v=1}^3 \frac{(u+1)^2}{uv^2} \cdot \frac{1}{(u+1)^2} du dv$$

$$= \int_{u=1}^2 \frac{1}{u} \left(\int_{v=1}^3 \frac{1}{v} dv \right) du = [\log u]_1^2 [\log v]_1^3 = \log(2) \cdot \log(3)$$

2) Ricordando che per una matrice quadrata invertibile M si ha che

$$\det M = \frac{1}{\det(M^{-1})}$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{array} \right|^{-1} = \left| \det \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right|^{-1} \\ &= \left(\frac{y+x}{x^2} \right)^{-1} = \frac{x^2}{y+x} \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{xy} &= \int_{u=1}^2 \int_{v=1}^3 \frac{1}{xy} \cdot \frac{x^2}{y+x} du dv \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{u=1}^2 \int_{v=1}^3 \frac{du dv}{uv} = \log(2) \cdot \log(3), \end{aligned}$$

ESEMPIO 7.

Calcolare il volume della sfera di raggio R .

Come nell'esempio 4 calcoliamo il doppio

del volume delle semi-sfere di centro O .

Questa volta usiamo però le coordinate polari

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dxdy = 2 \int_{\rho=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{R^2-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 4\pi \int_{\rho=0}^R \sqrt{R^2-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_{t=0}^{R^2} \sqrt{t} \cdot dt = 2\pi \left[\frac{2t^{3/2}}{3} \right]_0^{R^2} = \frac{4\pi R^3}{3}. \\ t &= R^2 - \rho^2 \\ dt &= -2\rho d\rho \end{aligned}$$

ESEMPIO 2

Provare che $I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

È interessante notare che tale integrale in una variabile non si può calcolare determinando sue primitive di e^{-x^2} .

Si può dimostrare infatti che tale primitiva non è esprimibile mediante le funzioni elementari. Un modo per aggirare questo problema è quello di considerare la seguente funzione in due variabili

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow e^{-(x^2+y^2)}$$

Calcoliamo ora l'integrale doppio:

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad \text{con } Q_n = [-n, n] \times [-n, n] \\ &= \int_{x=-n}^n \int_{y=-n}^n e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{x=-n}^n e^{-x^2} \left(\int_{y=-n}^n e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{x=-n}^n e^{-x^2} dx \cdot \int_{y=-n}^n e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Sono uguali!

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = I^2.$$

Ora calcoliamo l'integrale doppio:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ con } D_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq m^2\} \\ &= \int_0^m \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^m e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi \left[e^{-r^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^m = \pi (1 - e^{-m^2}). \end{aligned}$$

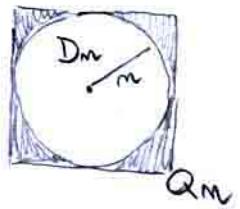
Quindi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-m^2}) = \pi.$$

Ora faremo vedere che i due limiti calcolati sono uguali e dunque $I^2 = \pi$ ossia $I = \sqrt{\pi}$ (se mettiamo I deve essere positivo).

Intuitivamente tale uguaglianza si spiega per il fatto che i domini Q_m e D_m per $m \rightarrow \infty$ "coprono" \mathbb{R}^2 . Per una giustificazione formale è necessario verificare che la differenza tende a 0 per $m \rightarrow +\infty$:

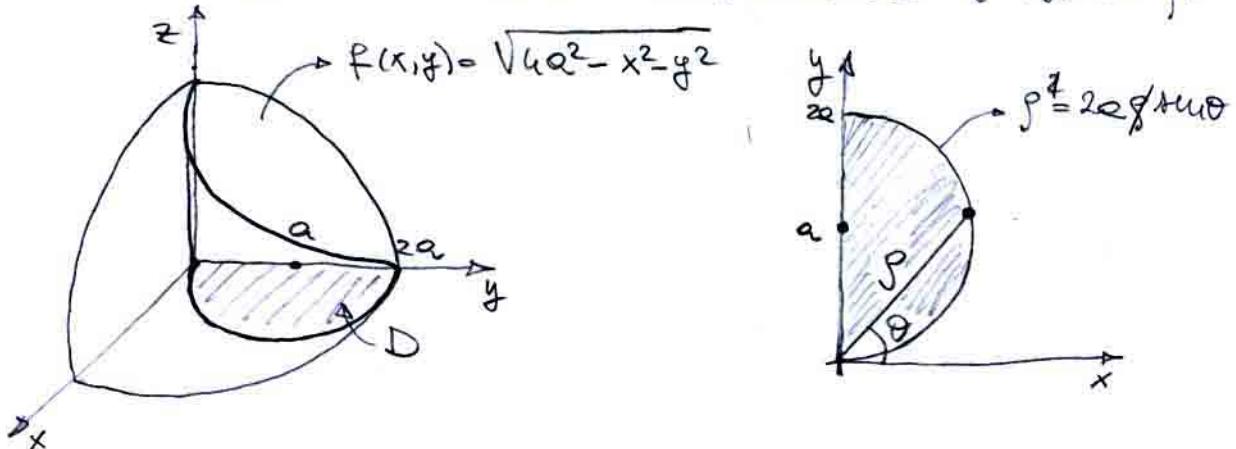
$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{Q_m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy - \iint_{D_m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{Q_m \setminus D_m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \sup_{(x,y) \in Q_m \setminus D_m} e^{-(x^2+y^2)} \cdot |Q_m \setminus D_m| \\ &\leq e^{-m^2} \cdot (\pi - \pi) \cdot m^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$



ESEMPIO 9.

Calcolare il volume dell'intersezione
del cilindro $x^2+y^2 \leq 2ay$ e della sfera
 $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$.

Per simmetria basta considerare 4 volte
il volume contenuto nell'ottante $\{x,y,z \geq 0\}$.



Così utilizzando le coordinate polari

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{\rho=0}^{2a \sin \theta} d\theta - \frac{32}{3} a^3 \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{32}{3} a^3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d(\sin \theta) \right) \quad (\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{32}{3} a^3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \right) \\
 &= \frac{16}{9} \cdot a^3 \cdot (3\pi - 4)
 \end{aligned}$$

5. Integrali triple

Le considerazioni fatte per gli integrali doppi si possono estendere agli integrali triple. Riportiamo di seguito i risultati più importanti utili per il calcolo.

TEOREMA 6. (Formule di riduzione)

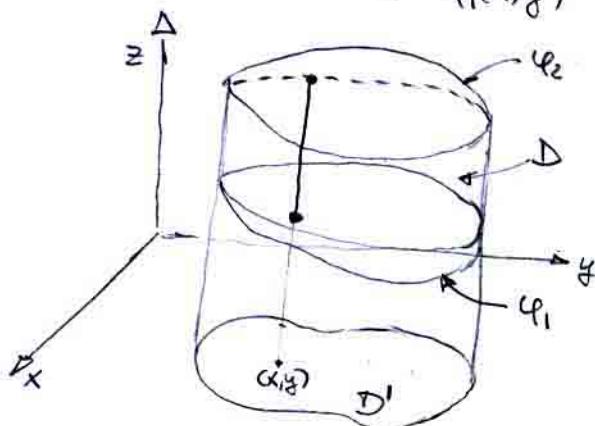
Se D è un dominio di \mathbb{R}^3 e se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

1) INTEGRAZIONE PER "FILI". Se

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D', z \in [\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]\}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2 \in C(D')$, allora

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D'} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$



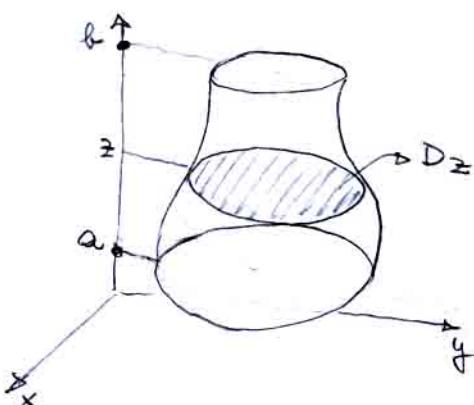
Quando prima si integra in dz lungo i "fili" $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$ e poi si calcola l'integrale doppio in $dx dy$ su D .

2) INTEGRAZIONE PER "SEZIONI". Se

$$D = \{(x_1, y_1, z) : z \in [a, b] \text{ e } (x_1, y_1) \in D(z)\}$$

dove $D(z)$ è un insieme misurabile piano, allora

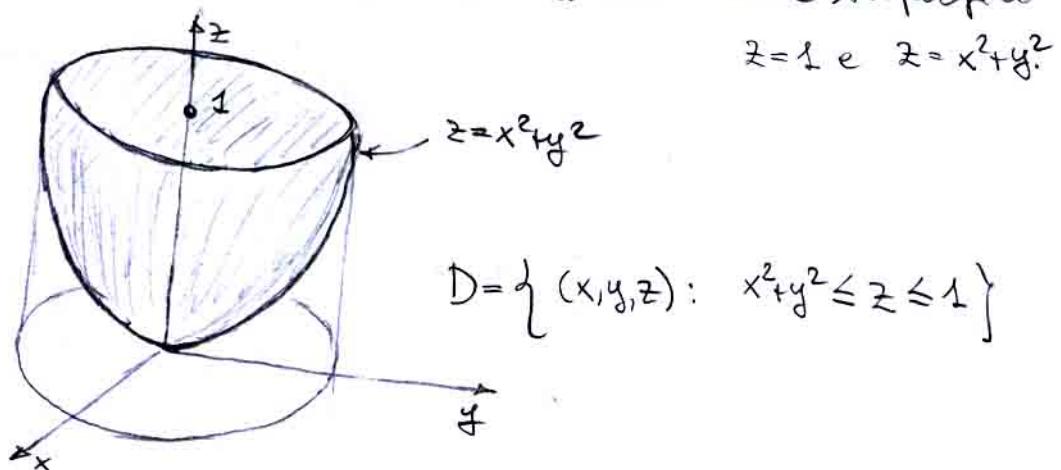
$$\iiint_D f(x_1, y_1, z) dx_1 dy_1 dz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x_1, y_1, z) dx_1 dy_1 \right) dz$$



Quindi si calcola prima l'integrale doppio in $dx_1 dy_1$ sulle "sezioni" $D(z)$ e infine si integra in dz su $[a, b]$.

ESEMPIO 10.

Calcolare $\iiint_D |x|z dx_1 dy_1 dz$ dove D è il paraboloidale troncato delimitato dalle superfici



1. Per feli.

$$\begin{aligned} \iiint_D |x|z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} |x| \left(\int_0^1 z \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} |x| \cdot \frac{1}{2} (1 - (x^2+y^2)^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$

passando a coordinate polari

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |\cos\theta| \cdot \frac{1-\rho^4}{2} \rho d\rho d\theta$$

Dato che $\int_0^{2\pi} |\cos\theta| d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 4 [\sin\theta]_0^{\pi/2} = 4$

$$= \int_0^1 2\rho^2 \cdot (1-\rho^4) d\rho = 2 \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^7}{7} \right]_0^1 = \frac{8}{21}.$$

2. Per sezioni.

$$\begin{aligned} \iint_D |x|z \, dx \, dy \, dz &= \int_{z=0}^1 z \left(\iint_{\{x^2+y^2 \leq z\}} |x| \, dx \, dy \right) \, dz \\ &= \int_{z=0}^1 z \left(\int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho |\cos\theta| \rho d\theta d\rho \right) \, dz \\ &= 4 \int_{z=0}^1 z \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} \, dz = \frac{4}{3} \left[\frac{z^{7/2}}{7/2} \right]_0^1 = \frac{8}{21}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 11.

Calcolare il valore medio delle funzione
 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ nel tetraedro

$$D = \{(x,y,z) : x+y+z \leq 1, x,y,z \geq 0\}$$

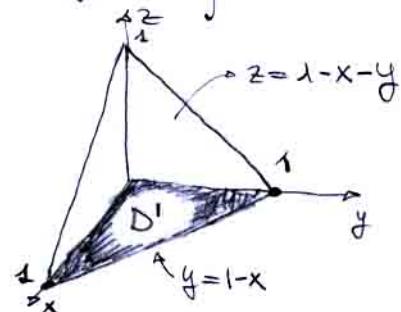
Il volume di D è

$$\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iint_{D'} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dx \, dy$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



Ora calcoliamo $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$.

Per linearità possiamo calcolare l'integrale
di un termine alla volta. Dato che il dominio
D è simmetrico rispetto allo scambio dei
coordinate (se $(x,y,z) \in D$ anche $(x,z,y), (y,x,z) \dots \in D$)
si deduce che i tre integrali sono uguali.

Facciamo il calcolo per x^2 (senza ripetere i passaggi precedenti)

$$\iiint_D x^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^1 x^2 \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

Così

$$\bar{f}_D = \frac{3 \cdot \frac{1}{60}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}.$$

TEOREMA 7. (Cambiamento di variabili)

Sia D un dominio misurabile di \mathbb{R}^3

e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

Se $\Phi: D' \rightarrow D$ è un'applicazione bimivoca

$$\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

tele che le componenti x, y, z e le loro derivate parziali sono continue in un aperto $\Omega \supset D'$, allora

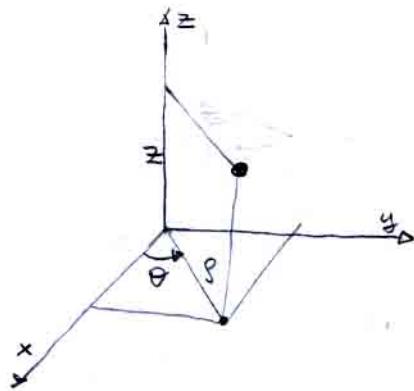
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

dove $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ è il determinante della matrice jacobiana

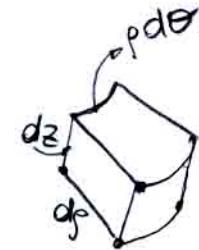
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Nel caso delle COORDINATE CILINDRICHE:



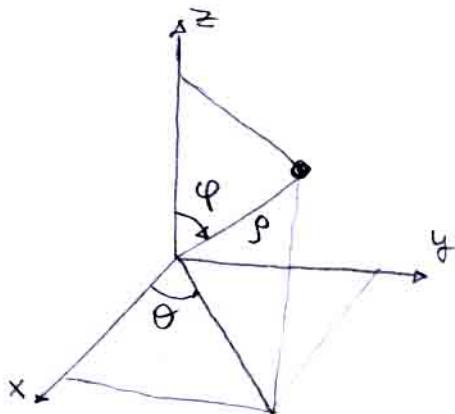
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \geq 0 \end{array}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} \right| = \rho$$



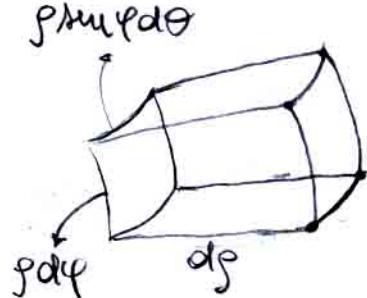
elemento di volume
 $d\rho \cdot dz \cdot \rho d\theta = \rho d\rho d\theta dz$

Invece per le COORDINATE SFERICHE:



$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \rho \geq 0 \end{array}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

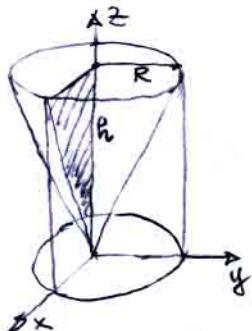


elemento di volume
 $\rho \sin \varphi d\theta \cdot d\varphi \cdot d\rho$
 $= \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$

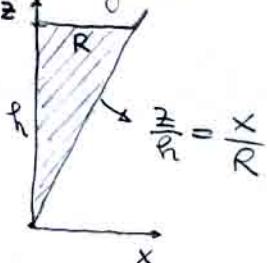
ESEMPIO 12.

Calcolare il volume del cono retto con i raii di base R e altezza h .

$$E = \{(x, y, z) : \left(\frac{z}{h}\right)^2 \geq -\frac{x^2+y^2}{R^2} \text{ e } 0 \leq z \leq h\}.$$



Le triangolo nel piano xz viene rotato attorno all'asse z di 2π .



Per il calcolo usiamo le coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^R \left(\int_{z=0}^h dz \right) \rho \, d\rho \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^R h \left(1 - \frac{\rho}{R} \right) \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} h \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3R} \right]_0^R d\theta = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} \end{aligned}$$

ESEMPIO 13.

Calcolare $\iiint_D |z| \, dx \, dy \, dz$ con $D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$= 2 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^1 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \sin(2\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 14.

Per quali $\alpha > 0$ è fornito il limite $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R$ dove

$$I_R = \iiint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)^\alpha dx dy dz \quad ?$$

$\left\{ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \right\}$

Si ha che per $R \geq 1$

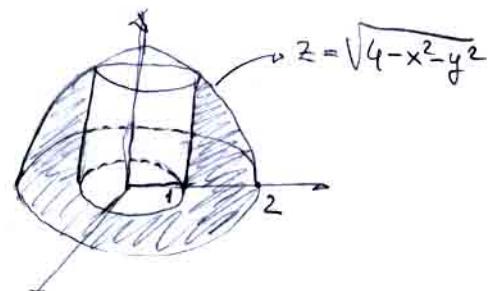
$$I_R = \int_{\rho=1}^R \frac{1}{\rho^\alpha} \cdot \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \rho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = 4\pi \int_{\rho=1}^R \frac{1}{\rho^{\alpha-2}} d\rho$$

Tale integrale in una variabile converge se e solo se $\alpha-2 > 1$ ossia per $\alpha > 3$.

ESEMPIO 15.

Calcolare $\frac{1}{|D|} \iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$

con $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$.



$$\begin{aligned} |D| &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=1}^2 \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz \right) \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_1^2 \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho \\ &= -\pi \left[\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = 2\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=1}^2 \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} \frac{z}{\rho} dz \right) \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_1^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \pi \left[4\rho - \frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$

Quindi il risultato è $(\frac{5}{3}\pi)(2\pi\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{18}$

6. Applicazioni in geometria e in fisica

- Area delle superficie di un grafico.

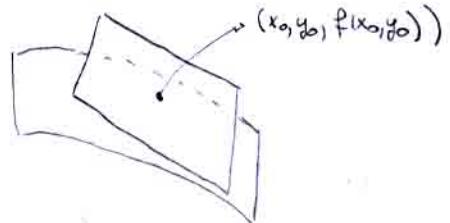
Sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ allora il suo grafico
è dato dall'equazione

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}.$$

Se f è differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \in D$
allora il grafico di f ammette un
PIANO TANGENTE nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
dato dall'equazione:

$$z = P_{(x_0, y_0)}(x, y)$$

dove



$$P_{(x_0, y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

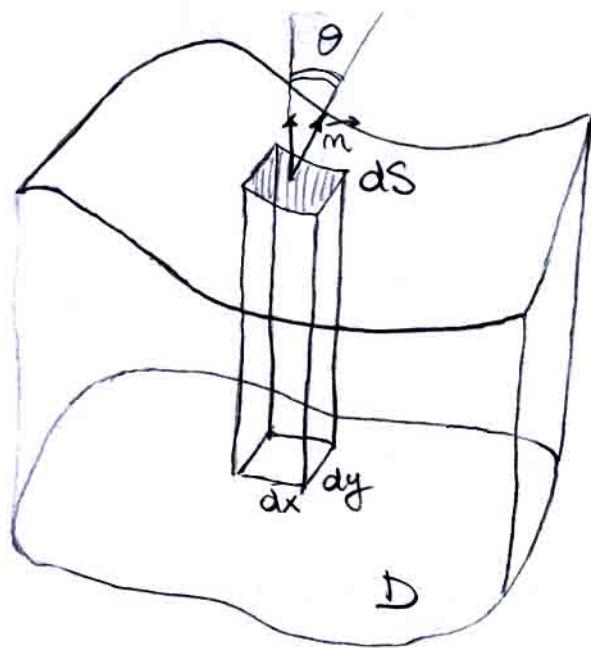
è il polinomio di Taylor del primo ordine
di f centrato nel punto (x_0, y_0) .

Per la differenziabilità il piano tangente
può essere considerato un "approssimazione
lineare" del grafico di f "vicino" a (x_0, y_0) :

$$f(x, y) = P_{(x_0, y_0)}(x, y) + O(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|).$$

Il vettore unitario \vec{m} normale alla superficie del grafico di f in un punto (x_0, y_0) è normale anche al piano tangente in quel punto e dunque è uguale a

$$\vec{m} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)}{\|(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)\|}$$



L'elemento infinitesimo di area è

$$ds = \frac{dx \cdot dy}{\cos \theta}$$

dove θ è l'angolo tra il vettore \vec{m} e il versore dell'asse z , $(0, 0, 1)$. Quindi

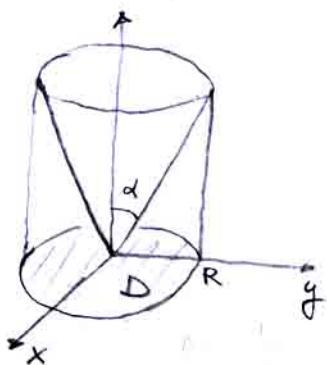
$$\cos \theta = (0, 0, 1) \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Pertanto l'AREA DELLA SUPERFICIE del grafico di $f(x,y)$ sopre D è data da

$$\iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

ESEMPIO 16.

Calcolare l'area della parte di cono data dall'equazione $z = m\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq mR$ dove $m = \frac{1}{\tan \alpha}$.



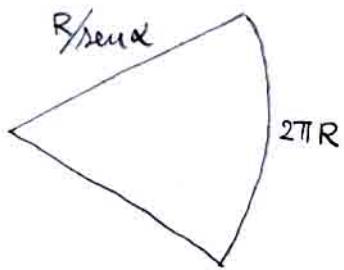
$$f(x,y) = m\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{mx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{my}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \frac{m^2x^2}{x^2+y^2} + \frac{m^2y^2}{x^2+y^2}} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1+m^2} dx dy = \sqrt{1+m^2} \cdot |D| = \frac{\pi R^2}{\tan \alpha}$$

Questa superficie sviluppa nel piano i



$$|S| = \frac{R}{\tan \alpha} \cdot \frac{2\pi R}{2} = \frac{\pi R^2}{\tan \alpha}$$

ESEMPIO 17.

Calcolare l'area della superficie della sfera di raggio 1. Poniamo $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

Quindi

$$|S| = 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = 2 \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\pi \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 = 4\pi$$

$\begin{matrix} t = 1 - \rho^2 & t=0 \\ dt = -2\rho d\rho & \end{matrix}$

ESEMPIO 18.

Calcolare l'area della superficie del paraboloido iperbolico $z = x^2 - y^2$ che si trova all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

Quindi



$$z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

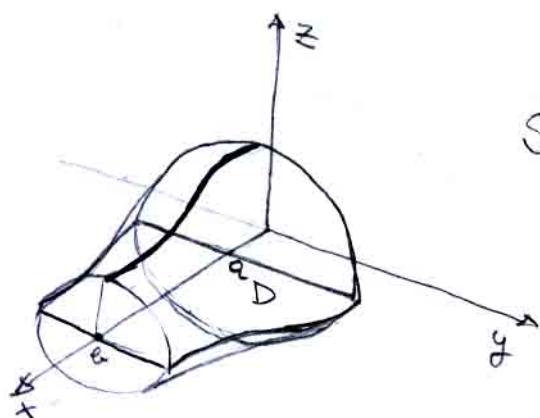
$$|S| = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[t^{3/2} \right]_1^5 = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

$\begin{matrix} t = 1 + 4\rho^2 & t=1 \\ dt = 8\rho d\rho & \end{matrix}$

- Area di una superficie ottenuta per rotazione

Sia S la superficie ottenuta ruotando il grafico di una funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ attorno all'asse x



$$S = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \sqrt{y^2 + z^2} = \varphi(x) \end{array} \right\}$$

La parte di S che sta nel semisfero $\{z \geq 0\}$

e il grafico della funzione

$$z = f(x, y) = \sqrt{\varphi(x)^2 - y^2}$$

sopra il dominio $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, |y| \leq \varphi(x)\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} |S| &= 2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{(\varphi(x), \varphi'(x))^2}{\varphi(x)^2 - y^2} + \frac{(-y)^2}{\varphi(x)^2 - y^2}} dx dy \\ &= 2 \int_{x=a}^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \left(\int_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2}} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{x=a}^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \cdot \varphi(x) \cdot \underbrace{\left[\arcsin\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right) \right]}_{y=-\varphi(x)} \Big|_{y=\varphi(x)} dx \\ &\quad \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \end{aligned}$$

e quindi

$$|S| = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

ESEMPIO 19.

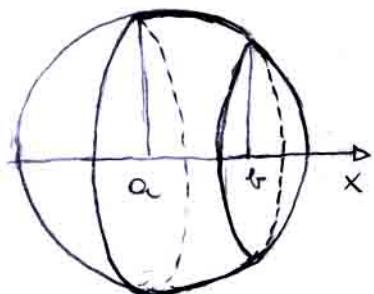
Calcolare l'area della parte delle sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Comprese tra i due piani paralleli

$$x=a \text{ e } x=b$$

$$\text{con } -R \leq a < b \leq R,$$



Possiamo considerare
la funzione
 $\varphi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
e applicare le
formule precedenti.

$$\begin{aligned}|S| &= 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{R^2 - x^2}} dx \\&= 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\&= 2\pi R (b - a)\end{aligned}$$

Quindi tale area dipende solo dalle
distanze dei due piani e dal raggio delle
sfere. Se $b=R$ e $a=-R$ si ottiene l'area
delle sfere $4\pi R^2$.

- Centro di massa e momento d'inerzia.

Per un solido che occupa una regione di spazio D e avente densità continua $\delta(x, y, z)$, il CENTRO DI MASSA $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è dato da

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \cdot \delta \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D \delta \, dx \, dy \, dz},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y \cdot \delta \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D \delta \, dx \, dy \, dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z \cdot \delta \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D \delta \, dx \, dy \, dz}.$$

Analoghe formule valgono per distruzioni di massa 2-dimensionali o 1-dimensionali.

Il MOMENTO D'INERZIA dello stesso solido attorno ad un asse l è dato da

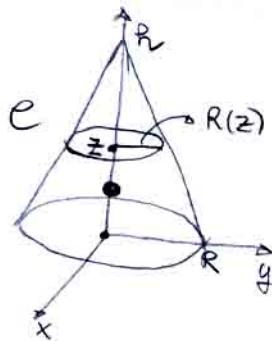
$$I = \iiint_D \text{dist}((x, y, z), l)^2 \cdot \delta \, dx \, dy \, dz$$

dove $\text{dist}((x, y, z), l)$ indica la distanza del punto (x, y, z) dalla retta l .

ESEMPIO 20

Calcolare il centro di massa di un cono omogeneo di altezza h e raggio di base R .

Posizioniamo il cono nel seguente modo.



Possiamo supporre che $\delta=1$.

Per simmetria $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Resta da calcolare \bar{z} .

La sezione circolare ad altezza z ha raggio $R(z)$:

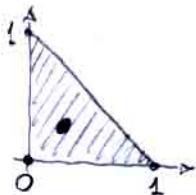
$$\frac{R(z)}{h-z} = \frac{R}{h} \Rightarrow R(z) = R(1 - \frac{z}{h})$$

Dato che $|c| = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ allora

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^h z (\iint_{\{x^2+y^2 \leq R(z)^2\}} dx dy) dz \\ &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h z \cdot \pi R^2(z) dz \\ &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h z \cdot R^2(1 - \frac{z}{h})^2 dz = 3 \cdot h \int_0^1 t(1-t)^2 dt \\ &= 3h \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{h}{4} \end{aligned}$$

ESEMPIO 21.

Calcolare il centro di massa del triangolo.



nei seguenti due casi

$$1) \ S=1, \quad 2) \ S=x,$$

$$4) \ \bar{x} = \frac{1}{1/2} \cdot \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} x \, dx \, dy = 2 \int_{x=0}^1 x(1-x) \, dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Per simmetria $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{3}$.

2) Prima calcoliamo le masse del triangolo

$$m = \iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{6}, \text{ Quindi } \bar{x} \text{ e } \bar{y}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} x^2 \, dx \, dy = 6 \int_0^1 x^2(1-x) \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} y \cdot x \, dx \, dy = 6 \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \frac{1}{4}$$

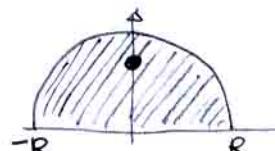
ESEMPIO 22.

Calcolare il centro di massa del semicerchio ($S=1$)

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ e } y \geq 0\}$$

Per simmetria $\bar{x}=0$, Mentre

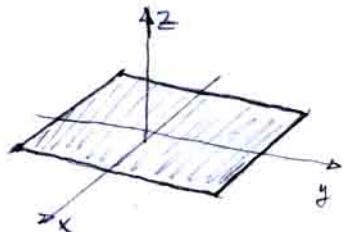
$$\bar{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^R \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta$$



$$= \frac{2}{\pi R^2} \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} (< R)$$

ESEMPIO 23.

Calcolare per il rettangolo $D = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ omogeneo il rapporto $\frac{I}{m}$ rispetto all'asse Z .



$$m = a \cdot b$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \int_{x=0}^{a/2} \int_{y=0}^{b/2} (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{a/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{b/2} dx = \int_0^{a/2} \left(2x^2 b + \frac{b^3}{6} \right) dx = \\ &= \left[\frac{2x^3 b}{3} + \frac{b^3 x}{6} \right]_0^{a/2} = \frac{a^3 b}{12} + \frac{b^3 a}{12} \quad \text{e quindi } \frac{I}{m} = \frac{a^2 + b^2}{12}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 24.

Calcolare per le sfere di raggio R , omogenee il rapporto $\frac{I}{m}$ rispetto a una retta passante per il centro.

Le masse è $m = \frac{4}{3} \pi R^3 (\delta=1)$. Posso supporre che le sfere siano $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ e la retta sull'asse Z .

Così

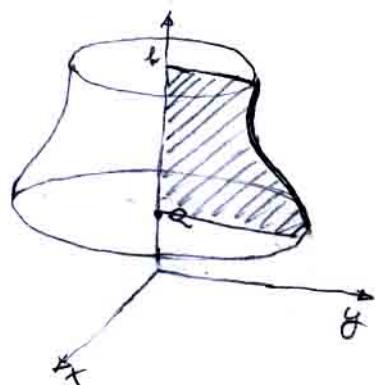
$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R ((\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \cdot \int_{\rho=0}^R \rho^4 d\rho = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{8\pi R^5}{15} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \frac{I}{m} = \frac{2R^2}{5}.$$

$$\left(\int \sin^3 \varphi d\varphi = \int \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi + C \right)$$

- Volume di un solido ottenuto per rotazione.

Sia S il solido ottenuto ruotando il grafico di una funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ attorno all'asse z .



$$S = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} a \leq z \leq b \\ 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varphi(z) \end{array} \right\}$$

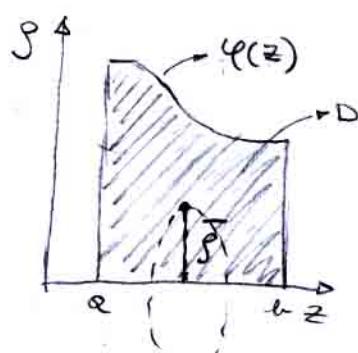
Allora possiamo dire che il volume $|S|$ di S è uguale a

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \right) d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \cdot \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\varphi(z)} dz = \pi \int_a^b (\varphi(z))^2 dz \end{aligned}$$

Inoltre possiamo anche affermare che

$$|S| = 2\pi \int_{z=a}^b \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \right) dz = 2\pi \iint_D \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \bar{\rho} |D| \quad (*)$$

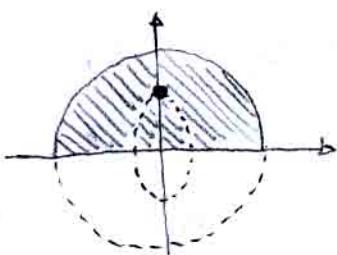
dove $\bar{\rho}$ è la coordinate ρ del centro di massa delle sezioni piane omogenee



La relazione (*) viene spesso indicata come la FORMULA DI PAPPO - GULDINO sui volumi.

ESEMPIO 25.

Il centro di massa del semicerchio dell'esempio 22

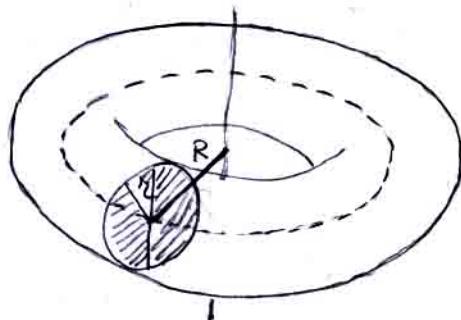


può essere anche calcolato sfruttando il volume della sfera e l'area del semicerchio:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot \left(\frac{\pi R^2}{2}\right) \Rightarrow \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

ESEMPIO 26.

Calcolare il volume del TORO ottenuto ruotando



un cerchio di raggio r
attorno ad un asse
distanti R dal
Centro del disco.

Per le formule del PG, dato che il centro del moto
del cerchio coincide con il centro geometrico
otteniamo

$$V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2$$

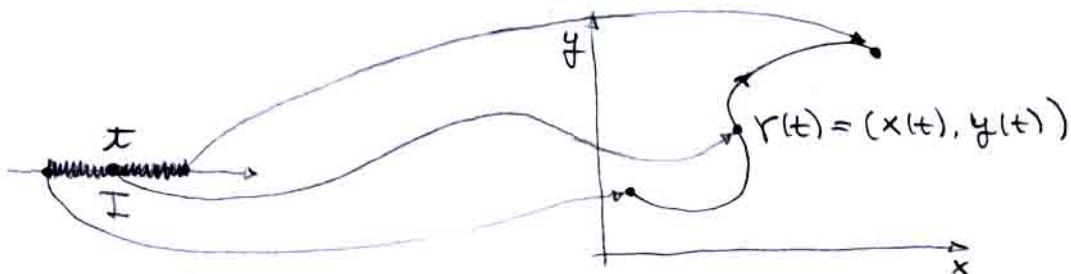
Tale volume è uguale al volume del cilindro
che si ottiene "tagliando" il toro lungo il cerchio
generatore e "raddrizzando".

INTEGRALI CURVILINEI

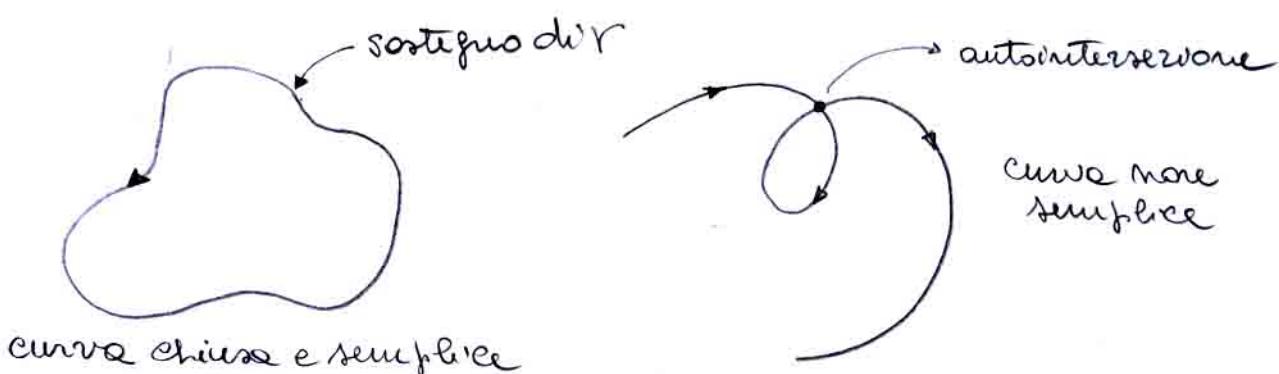
1. Curve nel piano

Una CURVA PIANA è una funzione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove I è un intervallo di \mathbb{R} .

$$I \ni t \xrightarrow{\gamma} (\gamma(t), \gamma(t)) \in \mathbb{R}^2$$



Una curva si dice CHIUSA se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$, mentre si dice SEMPLICE se γ è iniettiva. Il SOSTEGNO delle curve γ è l'insieme $\{(\gamma(t), \gamma(t)) : t \in I\}$.

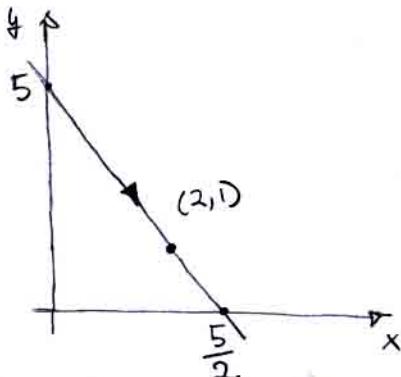


Le frecce sul sostegno indicano il verso di percorrenza delle curve al variare del parametro $t \in I$.

Vediamo qualche esempio esplicito

1) $\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 - 2t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

Sono le equazioni parametriche delle rette



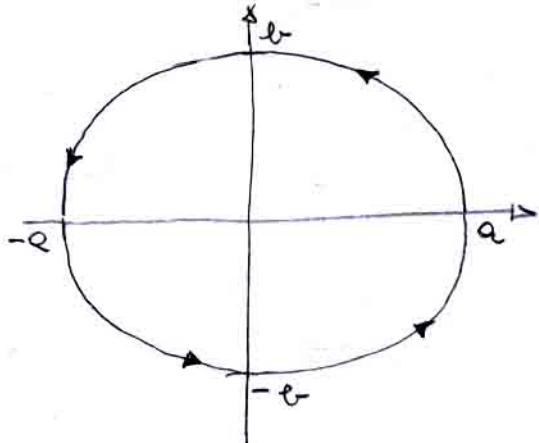
"eliminando" il parametro t si trova l'equazione cartesiana:

$$x = 2, \quad y = 1 - 2(x-2) = 5 - 2x.$$

Se si fa variare il parametro t nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ il segmento corrispondente è dato dal segmento che unisce i punti $(2, 1)$ e $(\frac{5}{2}, 0)$.

2) $\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$

dove a e b sono numeri ≥ 0 sono le equazioni parametriche dell'ellisse con equazione cartesiana



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

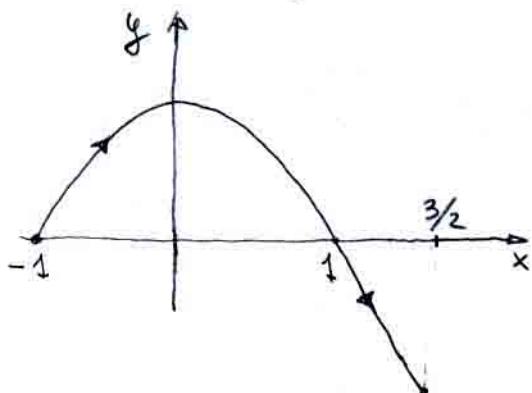
$$3) \begin{cases} x(t) = t & \text{con } t \in [a, b] \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad \text{per } a < b$$

Sono le equazioni parametriche del grafico della funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ad esempio se $f(x) = 1 - x^2$ allora

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1 - t^2 \quad \text{per } t \in [-1, \frac{3}{2}]$$

che come si vede



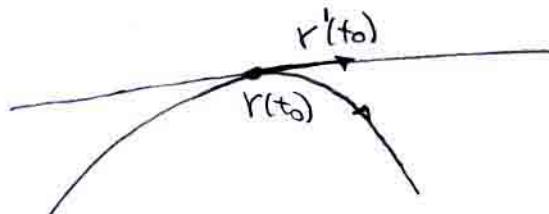
Una curva si dice REGOLARE se le componenti $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili con le derivate continue in I e

$$\gamma'(t) := (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in I.$$

Il vettore $\gamma'(t)$ si dice VETTORE TANGENTE.

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ allora la retta tangente (parametrica) alla curva nel punto $\gamma(t_0)$ è data da

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$



2. Integrali curvilinei del primo tipo

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in Ω insieme aperto di \mathbb{R}^2 .

Sia $r: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva regolare e semplice

$$r(t) = (x(t), y(t)) \text{ per } t \in [a, b]$$

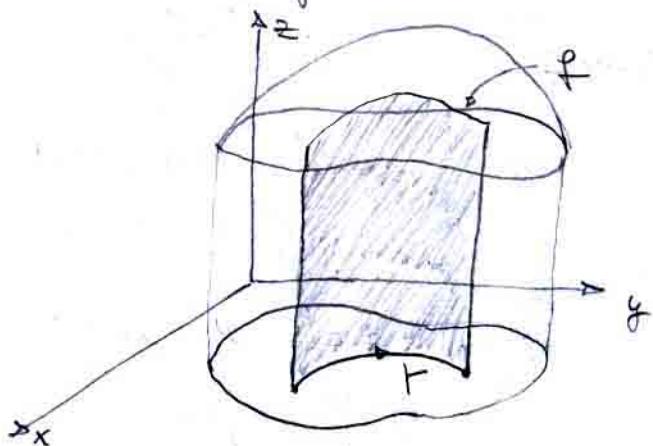
Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di f lungo r è definito come

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

I simboli usati per indicarla possono essere

$$\int_r f ds \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

f si dice INTEGRABILE lungo r se l'integrale curvilineo corrispondente è finito



Se $f(x, y) \geq 0$ lungo r allora $\int_r f ds$ rappresenta l'area della superficie

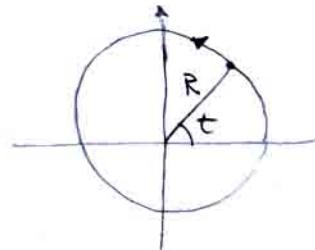
$$\left\{ (x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z \in [0, f(x(t), y(t))], t \in [a, b] \right\}$$

Inoltre $\int ds$ (ossia se $f=1$) rappresenta la LUNGHEZZA delle curve γ e si indica con $|\gamma|$.

ESEMPIO 1.

Calcolare le lunghezze delle circonferenze di raggio $R \geq 0$. Le coordinate parametriche sono:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi)$$



Le vettore tangente ha componenti

$$x'(t) = -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t$$

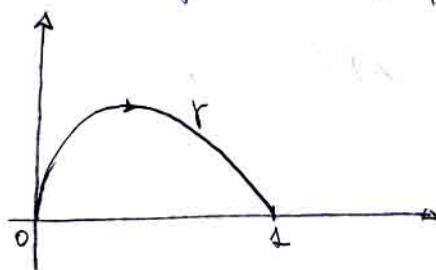
Quindi le lunghezze vale

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

Si noti che il calcolo delle lunghezze di un'ellisse non porta ad una formula "chiusa" perché la funzione da integrare non ammette una primitiva "semplice".

ESEMPIO 2.

Calcolare le lunghezze delle curve γ date da del grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)$ in $[0, 1]$



Le equazioni parametriche sono

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t) = \sqrt{\frac{t}{3}}(1-t)$$

e quindi

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{(1-t)}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}}$$

Così

$$\begin{aligned} |r'| &= \int_0^1 \sqrt{1+(f'(t))^2} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{12t + (1-6t+t^2)}}{2\sqrt{3}\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt + 3 \int_0^1 \sqrt{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\left[2\sqrt{t} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.

Calcolare $\int_r f ds$ dove $f(x,y) = \frac{xy \sin y}{\sqrt{1+x^2}}$
e r è il rame della parabola $r(t) = (t, t^2/2)$
per $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$.

Il vettore tangente è $(1, t)$ e $\|(1,t)\| = \sqrt{1+t^2}$.

$$\int_r f ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t \cdot t^2/2 \cdot \sin(t^2/2)}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \sqrt{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} u \cdot \sin(u) du = \left[\sin(u) - u \cos(u) \right]_0^\pi = \pi \quad \text{per parti.} \\ u &= \frac{t^2}{2} \\ du &= t dt \end{aligned}$$

Due curve $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dicono EQUIVALENTI se $\exists \varphi: I_2 \rightarrow I_1$ biiavoce, derivabile con derivata continua in I_2 e tale che $\varphi'(t) \neq 0$ in I_2 per cui

$$\gamma_1(\varphi(t)) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in I_2.$$

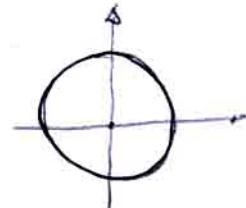
Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno. Inoltre hanno lo stesso verso di percorrenza se $\varphi' > 0$ in I_2 oppure hanno verso opposto se $\varphi' < 0$.

Ad esempio

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\gamma_2(t) = (\cos 2t, -\sin 2t) \quad \text{per } t \in [0, \pi]$$



Sono equivalenti e sono due parametrizzazioni diverse della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio unitario. γ_1 e γ_2 hanno verso opposto.

TEOREMA 1.

Se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti allora

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$$

ossia l'integrale curvilineo non dipende dalle parametrizzazioni scelte per le curve ma solo dal suo sostegno.

Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva lungo la quale è distribuita delle masse con densità lineare $f(x, y)$ allora il CENTRO DI MASSA (\bar{x}, \bar{y}) è dato da:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot f ds}{\int f ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot f ds}{\int f ds}.$$

ESEMPIO 4.

Calcolare il centro di massa di una semicirconferenza omogenea ($f=1$) di raggio R .

Svolgiamo il calcolo usando due parametrizzazioni:

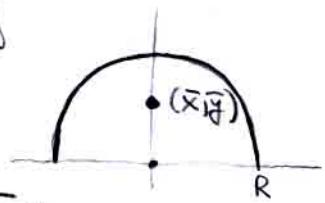
1) $\gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$

$$\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} = R$$

Per simmetria $\bar{x}=0$. Calcoliamo \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \int_0^\pi (R \sin t) \cdot \|\gamma_1'(t)\| dt =$$

$$= \frac{1}{R\pi} \cdot R^2 \left[-\cos t \right]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}.$$



2) $\gamma_2(t) = (Rt, R\sqrt{1-t^2})$ con $t \in [-1, 1]$

$$\|\gamma_2'(t)\| = R \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{1-t^2}}$$

Con $\bar{x}=0$ e

$$\bar{y} = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \int_{-1}^1 (R\sqrt{1-t^2}) \cdot \|\gamma_2'(t)\| dt$$

$$= \frac{1}{R\pi} \int_{-1}^1 R \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2R}{\pi}.$$

Se la curva γ è data da coordinate parametriche polari $\rho(t), \theta(t)$ per $t \in I$ allora è necessario qualche calcolo in più per scrivere il vettore tangente:

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = \rho(t) \cdot \sin \theta(t)$$

e derivando rispetto a t ottengono

$$x'(t) = \rho'(t) \cdot \cos \theta(t) + \rho(t) \cdot (-\sin \theta(t)) \cdot \theta'(t)$$

$$y'(t) = \rho'(t) \cdot \sin \theta(t) + \rho(t) \cdot (\cos \theta(t)) \cdot \theta'(t)$$

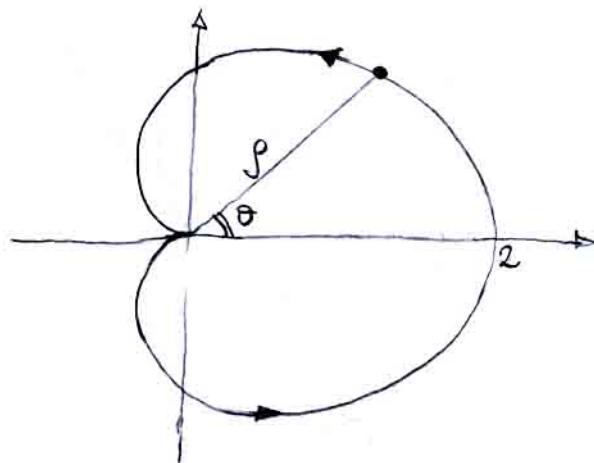
e così

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t) \cdot \theta'(t))^2}.$$

ESEMPIO 5.

Calcolare la lunghezza della CARDIOIDE data dalle equazioni parametriche polari

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 + \cos t \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Quindi

$$\begin{aligned}\sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t) \cdot \theta'(t))^2} &= \sqrt{(-\sin t)^2 + ((1+\cos t) \cdot 1)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + 1 + 2\cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos t} = 2 |\cos(t/2)|\end{aligned}$$

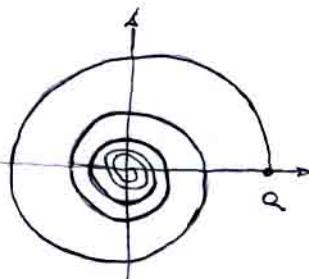
$$|r| = \int_0^{2\pi} 2 |\cos(t/2)| dt = 4 \int_0^\pi \cos(t/2) dt = 8 [\sin(t/2)]_0^\pi = 8.$$

ESEMPIO 6.

Calcolare $\int r (x^2+y^2)^2 ds$ dove r è l'arco della spirale data dalle equazioni polari

$$\rho(t) = a e^{-t} \quad \theta(t) = t \quad \text{per } t \in [0, +\infty) \text{ con } a > 0,$$

$$\begin{aligned}\int_r (x^2+y^2)^2 ds &= \int_0^{+\infty} \rho^4 \sqrt{\rho'^2 + (\rho\theta')^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} a^4 e^{-4t} \sqrt{(-a e^{-t})^2 + (a e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} a^5 e^{-5t} \sqrt{2} dt = a^5 \sqrt{2} \left[e^{-5t} \right]_0^{+\infty} = \frac{a^5 \sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$



3. Integrali curvilinei del secondo tipo

Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un CAMPO VETTORIALE in \mathbb{R}^2
insieme aperto di \mathbb{R}^2

$$F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

con le componenti $A(x,y), B(x,y)$ continue

A F associamo l'espressione formale

$$\omega(x,y) = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

detta FORMA DIFFERENZIALE.

Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ una curva regolare e semplice

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{per } t \in [a,b].$$

Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di F lungo γ
è definito come

$$\int_a^b (A(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + B(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt$$

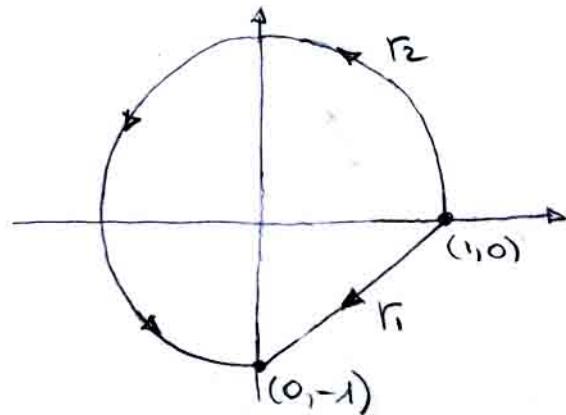
I simboli usati per indicarlo possono essere

$$\int_{\gamma} \omega \quad \text{oppure} \quad \int_{\gamma} F \cdot dr$$

Se F rappresenta un campo di forze piano
allora il suo integrale curvilineo lungo γ
rappresenta il lavoro compiuto per muoversi
da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ lungo γ .

ESEMPIO 7.

Sia $F(x,y) = (-y, x)$ e consideriamo due curve γ_1 e γ_2 che partono da $(1,0)$ e arrivano in $(0,-1)$.



$$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = -t \end{cases} \text{ con } t \in [0,1]$$

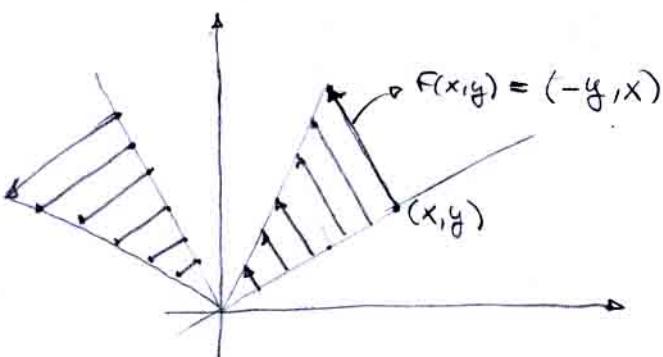
$$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \text{ con } t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$$

Allora

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_0^1 (t)(1-t)' + (1-t) \cdot (-t)' dt \\ = - \int_0^1 (\cancel{t} + 1 - \cancel{t}) dt = -1$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin t) \cdot (\cos t)' + (\cos t) \cdot (\sin t)' dt \\ = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{3\pi}{2}$$

In questo caso, vista la semplicità del campo vettoriale, possiamo provare anche a rappresentarlo graficamente:



Per ogni punto (x,y) , il vettore applicato $(-y, x)$ è ortogonale alla retta passante per $(0,0)$ e (x,y) e di lunghezza uguale alla distanza di (x,y) da $(0,0)$.
Con queste osservazioni è immediato concludere

Che

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$$

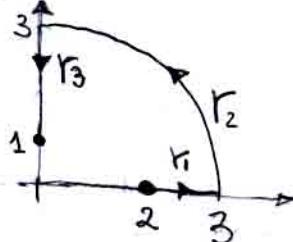
se C è un segmento lungo una retta passante per $(0,0)$.
(in tal caso $(x',y') \perp \mathbf{F}(x,y)$).

ESEMPIO 8.

Rappresentare graficamente il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

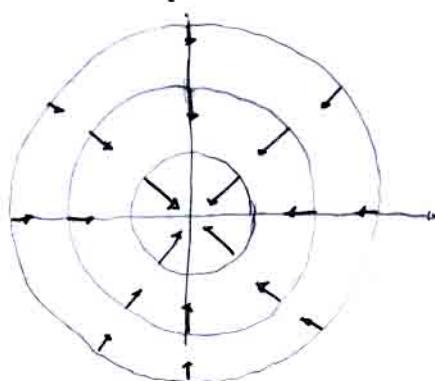
e calcolare l'integrale curvilineo di \mathbf{F} lungo $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ da $(2,0)$ a $(0,1)$.



Il modulo del vettore $F(x,y)$ è

$$\|F(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

dunque diminuisce con il reciproco del quadrato delle distanze da $(0,0)$. Inoltre $F(x,y)$ giace lungo le rette passanti per $(0,0)$ e (x,y) e punta verso $(0,0)$.



$$1) \int_{r_1} F dr = \int_2^3 -\frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t} \right]_2^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

perché $r_1 = (t,0) : t \in [2,3]$

$$2) \int_{r_2} F dr = 0 \quad (F \perp r_2)$$

perché $r_2 = (3 \cos t, 3 \sin t) : t \in [0, \pi/2]$

$$3) \int_{r_3} F dr = \int_3^1 -\frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t} \right]_3^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Quindi

$$\int_{\gamma} F dr = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

A differenza dell'integrale curvilineo del primo tipo, l'integrale curvilineo del secondo tipo dipende dal verso in cui viene percorso il sostegno delle curve γ .

TEOREMA 2.

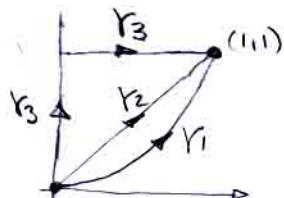
Se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti allora

$$1) \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2 \quad \text{se } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ hanno lo stesso verso}$$

$$2) \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2 \quad \text{se } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ hanno verso opposto}$$

ESEMPIO 9.

Sia $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ e calcoliamo $\int_F dr$ lungo tre curve che vanno da $(0,0)$ a $(1,1)$



$$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 : t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t : t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\gamma_3: \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t : t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\cup \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 : t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr_1 = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + 2t^3 \cdot 2t) dt = [t^5]_0^1 = 1$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dr_2 = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + 2t^2 \cdot 1) dt = [t^3]_0^1 = 1$$

infine

$$\int_{\Gamma_3} F dr_3 = \int_0^1 (t^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0) dt + \int_0^1 (1 \cdot 1 + 2t \cdot 0) dt = 1.$$

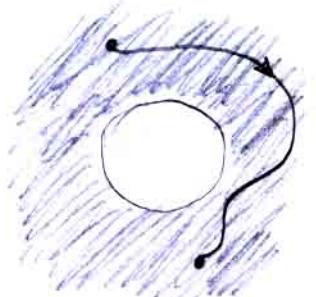
In questo caso i tre calcoli hanno dato lo stesso valore. Se definiscono le curve chiuse $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, dove γ_2^- è il la curva γ_2 con l'orientazione opposta, possono dire che

$$\int_{\gamma} F dr = \int_{\gamma_1} F dr_1 + \int_{\gamma_2^-} F dr_2 = \int_{\gamma_1} F dr_1 - \int_{\gamma_2} F dr_2 = 1 - 1 = 0$$

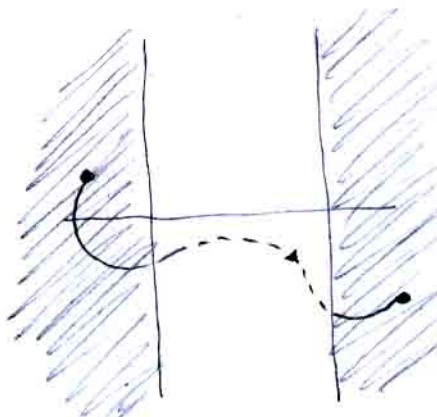
4. Forme differenziali esatte e chiuse

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ si dice CONNESSO (PER ARCHI) se $\forall P, Q \in S \exists$ curva $r: [a, b] \rightarrow S$ tale che $r(a) = P$ e $r(b) = Q$

Ad esempio



$\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
è connesso



$\{x \geq 1\}$
non è connesso

Sia Ω un insieme aperto e connesso di \mathbb{R}^2 .

Una forma differenziale

$$\omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

con le componenti A, B continue in Ω

si dice ESATTA in Ω se esiste una funzione, detta POTENZIALE, $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile con le derivate continue tale che

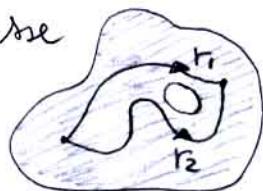
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = A(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = B(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

I seguenti teoremi riporta una caratterizzazione delle forme differenziali esatte.

TEOREMA 3.

ω è esatta in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso se

$$\int_{r_1}^{r_2} \omega = \int_{r_2} \omega$$



per ogni coppia di curve r_1, r_2 contenute in Ω e con gli stessi punti iniziali e finali.
dove.

Se ω è esatta allora su ogni curva $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(t) \right) dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(U(x(t), y(t)))}{dt} dt = \left[U(x(t), y(t)) \right]_{\alpha}^{\beta} = U(r(\beta)) - U(r(\alpha))$$

Questo significa che $\int \omega$ dipende solo dal punto iniziale e finale e non dalle particolare curve in Ω che li congiunge.

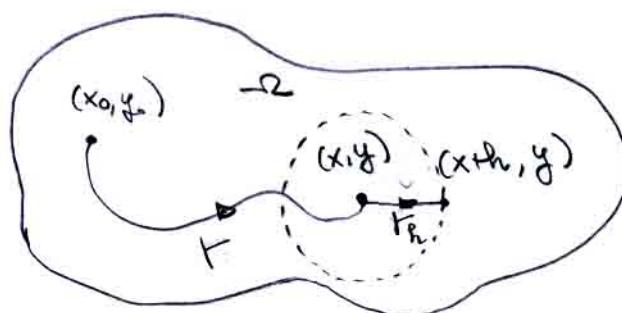
Ora supponiamo che $\int \omega = \int \omega + \int_{r_1}^{r_2} \omega$ (*)
 con gli stessi punti r_1 e r_2 iniziali e finali e dimostriamo che ω è esatta.

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e definiamo una funzione $U(x, y)$ nel seguente modo

$$U(x, y) = \int_r \omega$$

dove r è una qualunque curva in Ω che parte da (x_0, y_0) e arriva in (x, y) .

Tale funzione U è ben definita perché per ipotesi Ω è aperto e连通的 e quindi esiste almeno una curva che congiunge (x_0, y_0) e (x, y) . Inoltre per (*) il valore di $\int \omega$ non dipende delle particolare curve scelte.



In tal modo

$$U(x, y) = \int_r \omega \quad \text{e} \quad U(x + \delta x, y) = \int_{r + \delta r_h} \omega = \int_r \omega + \int_{\delta r_h} \omega$$

dove γ è una curva da (x_0, y_0) a (x, y)

e $\gamma_h(t) = (x+t, y)$ per $t \in [0, h]$

($h > 0$ è scelto sufficientemente piccolo in modo che il sostegno di γ_h , un segmento, sia contenuto in Ω). Quindi

$$\frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=0}^h w = \frac{1}{h} \int_{t=0}^h A(x+t, y) dt \\ = A(x+t_h, y) \quad \text{per qualche } t_h \in [0, h]$$

Teorema delle
medie integrali

Passando al limite per $h \rightarrow 0$ abbiamo che $t_h \rightarrow 0$.

Così per le continuità di A :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A(x+t_h, y) = A(x, y).$$

In modo simile si può far vedere che

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = B(x, y),$$

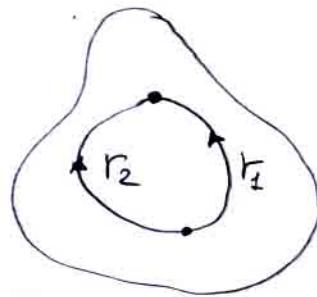
ovia w è esatta ed ha U come funzione potenziale associata. \square

Osservazioni:

- 1) Se U è una funzione potenziale di w allora lo è anche $U + \text{costante}$.

2) Se γ e' una curva chiusa e ω e' esatta allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\gamma} \omega = 0$$



dove $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$. (γ_2^- e' la curva γ_2 con il senso di percorrenza invertito).

ESEMPIO 10.

Le forme differenziali associate al campo

vettoriale $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ dell'esempio 9
e' esatta in \mathbb{R}^2 :

$$U(x,y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy.$$

ESEMPIO 11.

La forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

non e' esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ poiché se γ e' la curva chiusa data dalle circonferenze

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{con } R > 0$$

allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} -\frac{R \sin t}{R^2} (R \cos t)' + \frac{R \cos t}{R^2} (R \sin t)' dt = 2\pi \neq 0$$

In modo simile si verifica che anche la forma
 $\omega = -y dx + x dy$ dell'esempio 7 non e' esatta in \mathbb{R}^2 .

Le difficoltà di riconoscere una forma differenziabile esiste sta nella "costruzione" delle funzioni polinomiali. Le seguenti definizioni permettono di stabilire dei criteri di esattezza.

Una forma differenziabile

$$\omega(x,y) = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

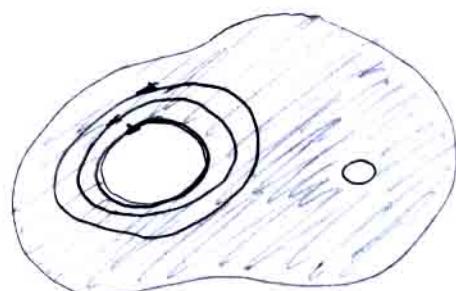
con A e B differenziali e con le loro derivate parziali continue su Ω aperto e connesso, si dice CHIUSA se

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Inoltre un insieme aperto e connesso Ω si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa contenuta in Ω può essere ridotta mediante una deformazione continua a un punto senza uscire da Ω .



Ogni insieme
chiuso e
sempliemente
connesso



Ogni insieme con uno o
più "buchi" non è
sempliemente connesso

Vale il seguente risultato.

TEOREMA 4.

Se Ω è un aperto connesso e w una forma differenziale differenziabile in Ω con le derivate continue,

- 1) Se w è esatta in Ω allora w è chiusa in Ω .
- 2) Se w è chiusa in Ω e Ω è semplicemente connesso allora w è esatta in Ω .

dim.

Dimostriamo solo il punto 2).

Se w è esatta allora $\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$w = Adx + Bdy \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

Quindi per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

□

ESEMPIO 12.

Le forme differenziali in \mathbb{R}^2

$$w = (y^2 + \cos x) dx + (2xy + y^2) dy$$

è chiusa perché

$$\frac{\partial(y^2 + \cos x)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial(2xy + y^2)}{\partial x}$$

Dato che \mathbb{R}^2 è semplicemente connesso, w è anche esatta. Per calcolare il potenziale U possiamo procedere nel seguente modo.

Dato che $\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + \cos x$, se integriamo rispetto a x otteniamo che

$$U = xy^2 + \sin x + c(y)$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y (è la costante additiva dovuta all'integrazione in x)

Siccome $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + y^2$, si ha che

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + c'(y) = 2xy + y^2$$

ovviamente $c'(y) = y^2$ e $c(y) = \frac{y^3}{3} + C$

(questa volta C è la "solita" costante additiva). Quindi,

$$U(x,y) = xy^2 + \sin x + \frac{y^3}{3} + C.$$

ESEMPIO 13

Nell'esempio 8 la forma differenziale ω associata al campo vettoriale F è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con potenziale

$$U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Quindi

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \omega = U(0,1) - U(2,0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ESEMPIO 14

Nell'esempio 11 la forma differenziale ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

ω non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ poiché

$$\int_C \omega = 2\pi \neq 0 \quad \text{con} \quad \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{---} \\ r \end{array}$$

mo dato che w è chiusa possiamo concludere
che w è esatta se qualunque curva semplicemente connessa contiene in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Ad esempio w è esatta nel semipiano $\{x > 0\}$
e in tale insieme ammette la funzione
potenziale

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

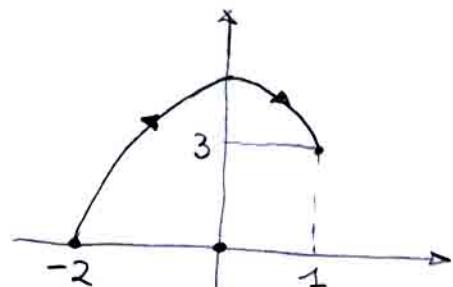
ESEMPIO 15.

Sia $w = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x^2\right) dy$ per $(x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Calcolare $\int w$ dove γ è l'arco delle parabole
 $y = 4 - x^2$ per $x \in [-2,1]$ da $(-2,0)$ a $(1,3)$.

Si noti che $w = w_1 + w_2$ con

$$w_1 = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy \text{ e } w_2 = x^2 dy$$



Consideriamo prima la forma w_1 .

w_1 è chiusa in Ω :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

Dato che Ω non è semplicemente connesso non
è detto che w_1 sia esatta in Ω .

L'eventuale funzione potenziale U è tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad (*)$$

e integrando la prima equazione rispetto a x otteniamo

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + c(y)$$

derivando rispetto a y concludiamo che $c'(y)=0$.

Quindi,

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \text{cost.}$$

Visto che U soddisfa $(*)$ $\forall (x,y) \in \Omega$, possiamo affermare che ω_1 è effettivamente esatta in Ω .

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega_1 &= U(1,3) - U(-2,0) \\ &= \frac{1}{2} \log 10 - \frac{1}{2} \log 4 = \frac{1}{2} \log(5/2) \end{aligned}$$

ω_2 non è chiusa (e dunque nonché esatta)

$$\frac{\partial}{\partial y}(0) = 0 \neq 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

Così il calcolo di $\int_{\Gamma} \omega_2$ va fatto esplicitamente

$$\int_{\Gamma} \omega_2 = \int_{-2}^1 (0 \cdot t^1 + t^2 \cdot (4-t^2)^1) dt = \int_{-2}^1 (-2t^3) dt = \left[-\frac{t^4}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{15}{2}$$

perché $\Gamma(t) = (t, 4-t^2)$ per $t \in [-2,1]$.

Infine

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} \omega_1 + \int_{\Gamma} \omega_2 = \frac{1}{2} \log(5/2) + \frac{15}{2}.$$

5. Il teorema di GAUSS-GREEN nel piano

TEOREMA 5.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto
alle x e y . Si è

$$\omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

una forma differenziabile con A, B e le loro derivate
continue in un aperto $\Omega \supset D$.

Allora vale le formule di GAUSS-GREEN

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D^+} (A dx + B dy)$$

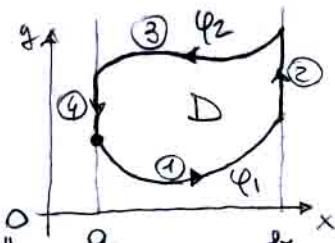
dove ∂D^+ induce la curva chiusa che ha per sostegno
le frontiere di D percorse in senso antiorario.

dove

Se $D = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$ con φ_1, φ_2

funzioni continue, allora

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial A}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial A}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left[A(x, y) \right]_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b (A(x, \varphi_2(x)) - A(x, \varphi_1(x))) dx \end{aligned}$$



mentre

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} A dx + B dy &= \int_a^b A(t, \varphi_1(t)) \cdot (\varphi_1'(t)) dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} A(b, t) \cdot (b') dt \\ &\quad + \int_b^a A(t, \varphi_2(t)) \cdot (\varphi_2'(t)) dt + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} A(a, t) \cdot (a') dt \end{aligned}$$

de cui

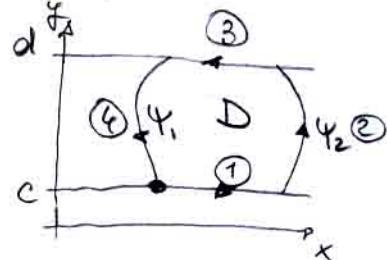
$$-\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\partial^+ D} A dx \quad (1)$$

In modo simile se $D = \{(x,y) : y \in [c,d], x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$ con ψ_1, ψ_2 funzioni continue, allora

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial B}{\partial x} dx dy &= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=c}^d [B(x,y)]_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy \\ &= \int_c^d (B(\psi_2(y), y) - B(\psi_1(y), y)) dy \end{aligned}$$

mentre

$$\int_{\partial^+ D} B dy = \int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} B(t, c) \cdot (c') dt \quad \text{"0"}$$



$$\begin{aligned} &+ \int_c^d B(\psi_2(t), t) \cdot (t') dt + \int_{\psi_2(d)}^{\psi_1(d)} B(t, d) \cdot (d') dt \quad \text{"0"} \\ &+ \int_d^c B(\psi_1(t), t) \cdot (t') dt \quad \text{"0"} \end{aligned}$$

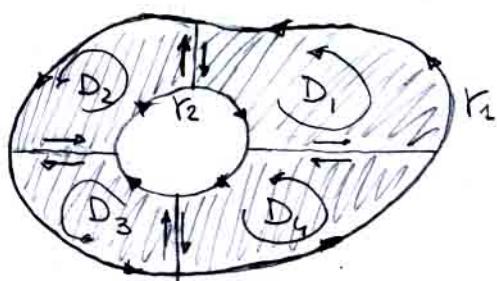
de cui'

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} B dy \quad (2)$$

Visto che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi
volgono le (1) che le (2) e sommando
membro a membro ottengono la tesi. \square

Osservazione.

Il teorema di GAUSS-GREEN vale per domini più generali. È sufficiente che il dominio sia decomponibile in domini per cui vengono le ipotesi del teorema precedente. Ad esempio il dominio $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.



è unione dei 4 domini D_k che sono semplici rispetto ad entrambi gli assi. Quindi

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^4 \iint_{D_k} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$
$$\stackrel{AG}{=} \sum_{k=1}^4 \int_{\partial D_k^+} (A dx + B dy) = \int_{T_1} A dx + B dy + \int_{T_2} A dx + B dy$$

I segmenti vengono percorsi in entrambe le direzioni
dunque il loro contributo è nullo.

Si noti che la frontiera di ∂D è data da
ti orientate in senso antiorario e da T_2
orientate in senso orario.

ESEMPIO 16.

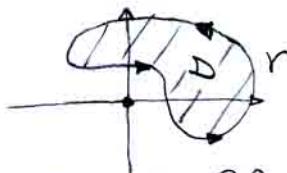
Mostrare che se γ è una curva chiusa semplice orientata positivamente non passante per $(0,0)$ allora

$$\int_{\gamma} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } (0,0) \notin D \\ 2\pi & \text{se } (0,0) \in D \end{cases}$$

dove D è l'insieme delimitato da γ .

Dall'esempio 14 supponiamo che le forme differenziabili siano chiuse su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

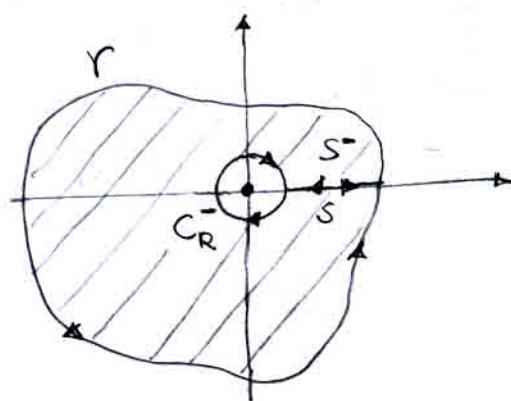
Quindi se $(0,0) \notin D$



per il teorema di GAUSS-GREEN

$$\int_{\gamma} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} \stackrel{\text{gg}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy \stackrel{\substack{\text{f.d.} \\ \text{chiusa}}}{=} 0.$$

Se $(0,0) \in D$ allora il teorema di GAUSS-GREEN non puo' essere applicato direttamente perche' in $(0,0)$ la forma differenziabile non e' definita. Questo problema puo' essere evitato considerando il percorso chiuso $\gamma \cup C_R^-$



dove C_R è una circonferenza di centro $(0,0)$
e raggio R sufficientemente piccolo in modo che
 $C_R \subset D$, mentre S è un segmento che unisce
 C_R a Γ . Dato che questo muove percorso delimita
un insieme che non contiene $(0,0)$, per quanto
detto prima, si ha che

$$0 = \int_{\Gamma} \omega .$$

~~$\Gamma = S \cup C_R \cup S$~~

Esempio
11

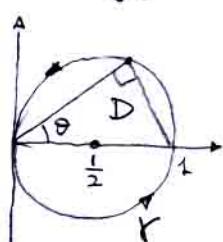
$$= \int_{\Gamma} \omega - \cancel{\int_S \omega} - \cancel{\int_{C_R} \omega} + \cancel{\int_S \omega} = \int_{\Gamma} \omega - 2\pi$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

ESEMPIO 17.

Calcolare $\int_{\Gamma} \omega$ per $\omega = (x-y^3)dx + (y^3+x^3)dy$
dove Γ è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, 0)$
e raggio $\frac{1}{2}$ percorso in senso antiorario.

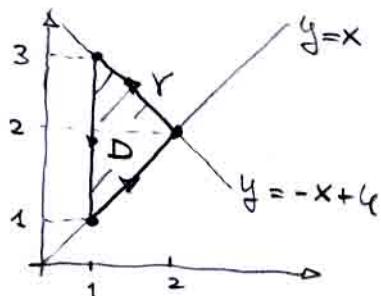


$$\int_{\Gamma} \omega \stackrel{def}{=} \iint_D \left(\frac{\partial(y^3+x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x-y^3)}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned} &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\cos \theta} r^2 \cdot r dr d\theta = 6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{4} d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9\pi}{32}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 18.

Calcolare $\int \omega$ dove $\omega = 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$ e γ è il perimetro del triangolo di vertici $(1,1), (2,2), (1,3)$ percorso in senso antiorario.

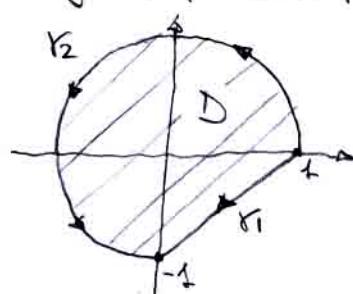


Dato che il calcolo diretto sembra piuttosto tedioso, poniamo "convergere" l'integrale curvilineo in un integrale doppio usando le formule di GAUSS-GREEN

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &\stackrel{\text{GG}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial((x+y)^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2(x^2+y^2))}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D (x-y) dx dy = 2 \int_{x=1}^2 \left(\int_{y=x}^{-x+4} (x-y) dy \right) dx \\ &\stackrel{\substack{t=x-y \\ dt=-dy}}{=} 2 \int_{x=1}^2 \left(-\int_{t=0}^{2x-4} t dt \right) dx = -2 \int_{x=1}^2 \frac{4(x-2)^2}{2} dx = -4 \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

ESEMPIO 19.

Dall'esempio 7 si ricava facilmente che se $\omega = -ydx + xdy$ e $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^-$ con



$$\text{allora } \int\limits_{r_1}^r \omega = \int\limits_{r_2}^r \omega - \int\limits_{r_1}^{r_2} \omega = \frac{3\pi}{2} + 1$$

Allo stesso risultato si puo' arrivare usando il teorema di GAUSS-GREEN

$$\begin{aligned} \int\limits_r \omega &= \iint_D \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = 2 \int dx dy \\ &= 2|D| = 2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Osservazione: l'esempio precedente induce che la formula di GAUSS-GREEN permette di esprimere il calcolo di un'area come un integrale curvilineo

$$|D| = \iint_D dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} x dy - y dx$$



Inoltre se una curva chiusa e' espressa in coordinate parametriche polari $\rho(t)$, $\theta(t) = t \in [\alpha, \beta]$ allora l'area delle parti di piano delimitate dalla curva e date da:

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} (x dy - y dx) & \begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos t \\ y(t) = \rho(t) \sin t \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(t) \cos t) (\rho(t) \sin t)' - (\rho(t) \sin t) (\rho(t) \cos t)' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho \cos t (\rho' \sin t + \rho \cos t) - \rho \sin t (\rho' \cos t - \rho \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt. \end{aligned}$$

ESEMPIO 20.

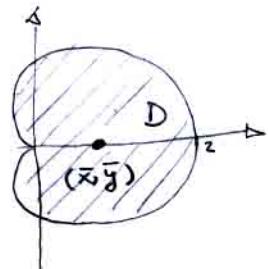
Calcolare il centro di massa delle parti di piano delimitate dal CARDIOIDE

$$g(t) = 1 + \cos t, \quad \theta(t) = t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

nel caso omogeneo ($\delta = 1$)

Calcoliamo prima la massa

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



Per simmetria $\bar{y} = 0$. Calcoliamo \bar{x} :

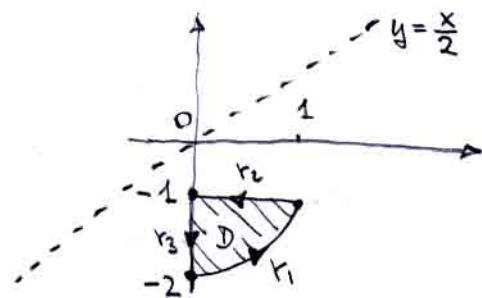
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{2}{3\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1+\cos\theta} \rho \cdot \cos\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{0}^{1+\cos\theta} \cos\theta \, d\theta = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^3 \cos\theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta) \, d\theta \\ &= \frac{2}{3\pi} \left(0 + 3 \cdot \frac{2\pi}{2} + 0 + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 21.

Calcolare $\int_{\Gamma} \omega$ dove

$$\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx + \left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + 3x^2 \right) dy$$

e Γ è il percorso chiuso



con r_2, r_3 segmenti e
 r_1 un arco della parabola
 $y = x^2 - 2$

Per GAUSS-GREEN

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + 3x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)}{(x-2y)^{3/2}} + 6x \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)}{(x-2y)^{3/2}} + 0 \right) \right) dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2-2}^{-1} 6x \, dy \, dx = 6 \int_0^1 x(1-x^2) \, dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Si osservi che

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx + \left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}} \right) dy$$

è esatta nel semipiano $\{y \leq \frac{x}{2}\}$ e una sua funzione potenziale è

$$U(x,y) = 2\sqrt{x-2y} + \arctan x$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{r_1 \cup r_2 \cup r_3} 3x^2 dy = \int_{r_1} 3x^2 dy = \int_0^1 3t^2(2t) dt = \left[\frac{3}{2} t^4 \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

ANALISI COMPLESSA

1. Introduzione alle funzioni olomorfe

Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{C} . Una funzione $f(z)$ che associa ad ogni numero complesso $z \in \Omega$ un numero complesso $f(z)$ si dice

FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA e si indica con

$$\Omega \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}.$$

Ogni funzione di questo tipo puo' essere pensata come una funzione di un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 : posto $z = x + iy \in \Omega$ con x, y numeri reali si ha che

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

dove

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$$

sono rispettivamente la FUNZIONE PARTE REALE e la FUNZIONE PARTE IMMAGINARIA associate a f . Ad esempio la funzione reciproca $f(z) = \frac{1}{z}$ e' definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

e si può scrivere come

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

In tal caso $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ con

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Altri esempi di funzione di variabili complesse che possono essere considerate "elementari" sono:

1) Il coniugio

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

2) I polinomi

$$f(z) = q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \dots + q_0 \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

con i coefficienti $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}$.

3) Le funzioni razionali

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z)=0\}$$

con P e Q polinomi e coefficienti in \mathbb{C} .

4) L'esponenziale complesso

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

5) Il seno complesso e il coseno complesso

$$\begin{aligned}
 f(z) = \sin z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\
 &= e^y (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{1}{2i} \\
 &- e^y (\cos x - i \sin x) \cdot \frac{1}{2i} \\
 &= \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \sinh y
 \end{aligned}$$

dove

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

sono rispettivamente il coseno iperbolico
e il seno iperbolico (sono funzioni reali!)

Si noti che

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{e} \quad \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1.$$

La definizione del coseno complesso e'

$$f(z) = \cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

6) Il logaritmo complesso

L'idea della definizione e' di estendere il
logaritmo reale. Se $z = |z| e^{i\theta} \neq 0$ allora
"formalmente":

$$\log z = \log(|z| e^{i\theta}) = \log |z| + i\theta$$

Il termine $\log |z|$ e' il "solito" logaritmo
reale valutato in $|z| > 0$.

Le parte immaginaria è invece uguale a θ .

Ora nella notazione esponenziale $z = |z|e^{i\theta}$

l'angolo θ ha infiniti valori possibili:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

dove $\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ si dice ARGOMENTO

PRINCIPALE. Questo comporta che ci sono infiniti modi di definire il logaritmo complesso.

Uno dei modi è il cosiddetto LOGARITMO

PRINCIPALE;

$$\log z \stackrel{\text{def}}{=} \log |z| + i\arg(z) \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

7) Le radice n-esime complesse

Anche in questo caso il problema è che dato un numero complesso $z \neq 0$ ci sono n radice n-esime distinte (se $z=0$ c'è una sola radice ossia 0): le soluzioni dell'equazione $w^n = z = |z| e^{i\arg(z)}$ sono,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

per $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

Si definisce la radice n-esima complessa PRINCIPALE come

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg(z)}{n}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Anche per le funzioni di variabile complesse possiamo introdurre il concetto di limite, continuità e derivabilità.

Sia Ω un insieme aperto di \mathbb{C} e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Se $z_0 \in \Omega$ si dice che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $0 < |z - z_0| < \delta$ e $z \in \Omega$ allora $|f(z) - w| < \varepsilon$. Questo è equivalente a dire che

se $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$; $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$

e $w = a + ib$ allora

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b.$$

f si dice CONTINUA in z_0 se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

f si dice DERIVABILE (in senso complesso) in z_0

se esiste finito il limite

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ovvero, per $z \rightarrow z_0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + O(|z - z_0|).$$

Come nel caso reale, se una funzione è derivabile in z_0 , allora in z_0 è anche continua.

Inoltre per la derivata in senso complesso

valgono delle regole di calcolo analoghe al caso reale.

TEOREMA 1.

Se f, g sono derivabili in $z_0 \in \mathbb{C}$ allora anche $f+g, f \cdot g$ e f/g ($\text{se } g(z_0) \neq 0$) lo sono e

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

Se f e' derivabile in z_0 e g e' derivabile in $f(z_0)$ allora $g(f(z))$ e' derivabile in z_0 e

$$(g(f(z)))' = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Tra le funzioni elementari, i polinomi, le funzioni razionali, e^z , $\sin z$, $\cos z$ sono derivabili nel loro insieme di definizione con i "soliti" risultati. Ad esempio

$$(z^2)' = 2z, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}, \quad (e^z)' = e^z,$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$\log z$ e \sqrt{z} sono derivabili in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ con

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$



La funzione $\frac{\bar{z}}{z}$ non è invece derivabile in nessun punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Ad esempio, per $z_0 = 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{(x,y) \rightarrow 0} -\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

e tali limiti in due varie direzioni non esistono.

Vediamo alla definizione "centrale" dell'analisi complessa.

Sia Ω aperto di \mathbb{C} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f si dice OLOMORFA in Ω se f è derivabile in ogni punto $z \in \Omega$.

Le seguenti teoremi permette di riconoscere una funzione olomorfa $f = u + iv$ attraverso le verifiche di alcune condizioni per u, v .

TEOREMA 2.

Una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ è olomorfa in Ω se e solo se u, v sono differenziabili con le loro derivate parziali continue in Ω e si verificano le condizioni di CAUCHY-RIEMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{in ogni punto di } \Omega.$$

Inoltre se f è olomorfa

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

dove $z = x + iy \in \Omega$.

dimm.

Dimostriamo solo che la derivabilità in un punto $z_0 \in \Omega$ implica la verifiche delle condizioni di CAUCHY-RIEMANN.

Riscrivendo il rapporto incrementale $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ quando l'incremento $z - z_0 = \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ è solo reale (ossia se $\Delta y = 0$), abbiamo che

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Quando fa $z \rightarrow z_0$ si ha che $\Delta x \rightarrow 0$ e ottengono

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (1)$$

In modo simile, se l'incremento è solo immaginario (ossia $\Delta x = 0$), si ha che

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i \Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i \Delta y}$$

e ponendo per $z \rightarrow z_0$, $\Delta y \rightarrow 0$ e

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2)$$

Confrontando le parti reali e immaginarie delle (1) e le (2), otteniamo la tesi. \square

ESEMPIO 1.

Verificare le condizioni di CAUCHY-RIEmann

fu $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (e^x \sin y)}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \sin y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\text{e } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La funzione coniugata $f(z) = \bar{z} = x - iy$ (che non è derivabile e dunque non olomorfa) non soddisfa entrambe le condizioni in nessun punto di \mathbb{C} :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Analogamente, anche $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ non è olomorfa in nessun aperto di \mathbb{C} . Infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

implica che le condizioni sarebbero soddisfatte soltanto nel punto $z=0$.

Osservazione. Se $f = u + iv$ è olomorfa e u e v hanno le derivate seconde continue allora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \stackrel{\text{SCHWARZ}}{\uparrow} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ossia $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, una funzione che soddisfa tale condizione si dice FUNZIONE ARMONICA.

In modo simile si verifica che anche v e' armonica.

2. Integrali curvilinei per funzioni di v.c.

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di variabile complessa continua in Ω aperto di \mathbb{C} . Sia $r = (x(t), y(t))$ con $t \in [\alpha, \beta]$ una curva semplice e regolare allora

$$\begin{aligned} \int_r f(z) dz &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_a^b f(x(t) + iy(t)) \cdot \underbrace{(x'(t) + iy'(t))}_{z'(t)} dt \\ &= \int_r (u dx - v dy) + i \int_r (v dx + u dy) \end{aligned}$$

dove $f = u + iv$.

TEOREMA 3.

Nelle ipotesi delle definizioni precedenti vengono le seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_r (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_r f(z) dz + \beta \int_r g(z) dz$$

2) ADDITIVITÀ: se $r = r_1 \cup r_2$

$$\int_r f(z) dz = \int_{r_1} f(z) dz + \int_{r_2} f(z) dz$$

3) Se r^- è la curva fucorsa in direzione opposta rispetto a r

$$\int_{r^-} f(z) dz = - \int_r f(z) dz$$

4) Se $M > 0$ e $|f(z)| \leq M$ per z appartenente al segmento di Γ allora

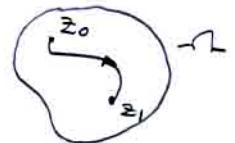
$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot |\Gamma|$$

dove $|\Gamma|$ rappresenta la lunghezza di Γ .

5) (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI V.C.) Sia Ω aperto e connesso.

Se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω e $f(z) = F'(z)$
allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$



dove Γ è una qualunque curva semplice regolare in Ω con punto iniziale z_0 e punto finale z_1 .

dim.

Diamo solo le dimostrazioni di 4) e 5).

Per quanto riguarda la 4)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(x(t) + iy(t))| \cdot |x'(t) + iy'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = M |\Gamma| \end{aligned}$$

Per la 5), posto $z(t) = x(t) + iy(t)$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F(z(t))) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0) \end{aligned}$$

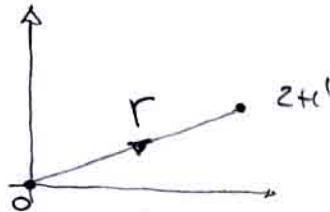
dove $z_0 = z(a)$ e $z_1 = z(b)$.

ESEMPIO 2.

Calcolare

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz, \int_{\Gamma} z^2 dz, \int_{\Gamma} e^{\pi z} dz$$

dove Γ è il percorso rettilineo da 0 a $2+i$.



Γ puo' essere parametrizzato come $z(t) = x(t) + iy(t)$
 $= (2+i) \cdot t$ con $t \in [0,1]$. Così $z'(t) = x'(t) + iy'(t) = 2+i$ e

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{(2+i)t} \cdot (2+i) dt = |2+i|^2 \int_0^1 t dt = 5 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2}.$$

In modo simile

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^1 (2+i)^2 \cdot t^2 \cdot (2+i) dt = (2+i)^3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2+11i}{3}.$$

Allo stesso risultato si puo' arrivare avendo
che $(\bar{z}/3)' = z^2$ e quindi

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \left[\frac{\bar{z}^3}{3} \right]_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2+11i}{3}.$$

Inoltre l'esistenza delle primitive complesse implica
che $\int_{\Gamma} z^2 dz = \frac{2+11i}{3}$ per qualsiasi percorso che unisce
0 a $2+i$. allo stesso modo $(e^{\pi z})' = e^{\pi z}$

$$\int_{\Gamma} e^{\pi z} dz = \left[\frac{e^{\pi z}}{\pi} \right]_0^{2+i} = \frac{e^{2\pi+i\pi}}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{e^{\pi}-1}{\pi}.$$

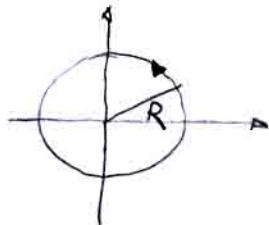
ESEMPIO 3.

Calcolare $\int \gamma^n dz$ per $n \in \mathbb{Z}$

dove γ è la circonferenza di raggio R
centrata in 0 percorsa in senso anti-orario.

Per γ possiamo usare la parametrizzazione

$$z(t) = Re^{it} = R \cos t + i R \sin t \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$



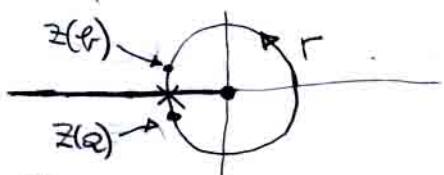
$$\text{Allora } z'(t) = Rie^{it} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot Rie^{it} dt \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= \begin{cases} iR^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{se } n \neq -1, \\ i \cdot R^0 \cdot 2\pi i = 2\pi i & \text{se } n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si può arrivare alla medesima conclusione osservando che per $n \neq -1$ $\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n$ lungo tutto il percorso se dato che γ è una curva chiusa, la variazione delle primitive agli estremi vale 0.

Per $n = -1$ si ha che $(\log z)' = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

e quindi tale relazione non vale sull'intero



percorso γ . Tenendo conto di questo fatto si può considerare il seguente integrale "improprio":

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \lim_{\substack{a \rightarrow -\pi \\ b \rightarrow \pi}} \int_a^b \frac{1}{z(t)} \cdot z'(t) dt =$$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow -\pi \\ b \rightarrow \pi}} (\log(z(b)) - \log(z(a)))$$

$$= (\log R + i\pi) - (\log R - i\pi) = 2\pi i.$$

Osservazione: se γ è una curva regolare, semplice e chiusa percorse in senso antiorario allora

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = 2\pi i |D|$$



Inoltre:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} (x dx + y dy) + i \int_{\gamma} (-y dx + x dy)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dx dy = 2\pi i |D|.$$

Si noti che \bar{z} non è olomorfa.

3. Il teorema di CAUCHY e sue applicazioni

TEOREMA 3. (teorema di CAUCHY)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e semplicemente连通的. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in Ω e Γ è una curva semplice, regolare e chiusa contenuta in Ω allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

d.m.



Sia $f = u + iv$. Per il teorema 2, le funzioni u e v sono differenziali e le loro derivate sono continue in Ω .

Dato che le ipotesi del teorema di GAUSS-GREEN sono soddisfatte possiamo concludere che

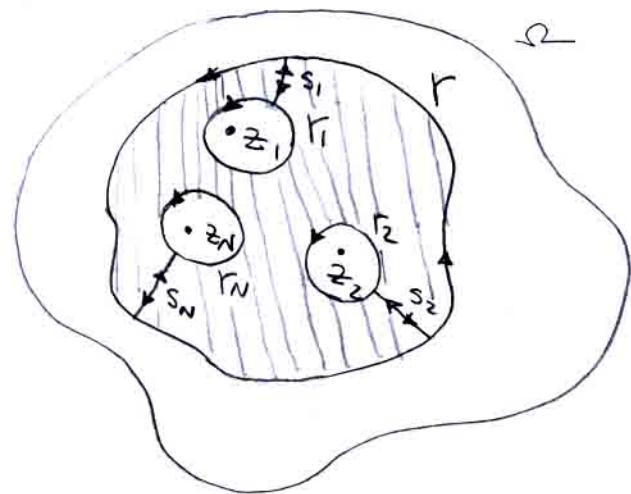
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy) \\ &\stackrel{\text{GG}}{=} \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se f è olomorfa in Ω allora valgono le condizioni di CAUCHY-RIEMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{in } D \subset \Omega .$$

Osservazione

1) Le ipotesi del TEOREMA di CAUCHY puo' essere estesa a domini piu' generali e a curve chiusse ma necessariamente semplici e regolari: In particolare se Ω e un aperto semplicemente连通的, f e olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ dove $z_k \in \Omega$ per $k=1, 2, \dots, N$ allora



$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

con

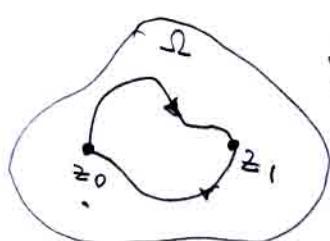
$$\begin{aligned}\Gamma = & r \cup s_1 \cup r_1 \cup s_1^- \\ & \cup s_2 \cup r_2 \cup s_2^- \\ & \dots \\ & \cup s_N \cup r_N \cup s_N^-\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{r_k} f(z) dz$$

dove r, r_1, r_2, \dots, r_N sono curve semplici, regolari chiusse percorse nel senso antiorario tali che Γ contiene tutti i punti z_1, \dots, z_N mentre r_k contiene solo z_k per $k=1, 2, \dots, N$.

2) Nelle ipotesi del teorema di CAUCHY, se $z_1, z_0 \in \Omega$ allora



$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{r_1} f(z) dz + \int_{r_2} f(z) dz$$

r_1, r_2 curve in Ω che partono da z_0 e arrivano in z_1

ESEMPIO 4.

Verificare che per $z_0 \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

dove γ è una curva semplice, regolare chiusa che contiene al suo interno il punto z_0 .

Per il punto 1) dell'osservazione precedente

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \int_{C_R} (z-z_0)^n dz$$



dove C_R è una circonferenza centrale in z_0 di raggio $R > 0$ percorsa in senso antiorario.
La conclusione deriva dall'esempio 3 tenendo conto della traslazione da 0 in z_0 .

Si osservi che se le curve γ non "gira" intorno al punto z_0 , allora, per il teorema di CAUCHY, dato che $(z-z_0)^n$ è olomorfo "dentro" γ ,

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0$$

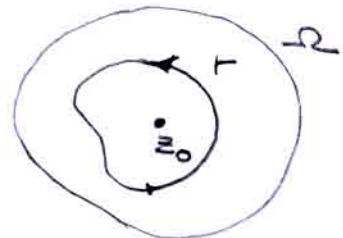


le formule fornite fornisce una formula integrale che generalizza la situazione descritta in questo esempio.

TEOREMA 4 (FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e semplicemente连通的. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in Ω e γ è una curva semplice, regolare e chiusa contenuta in Ω e orientata positivamente allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$



per ogni punto z_0 all'interno di γ .

dove

Sia C_R una circonferenza orientata positivamente centrata in z_0 con $0 < R < R_0$ dove R_0 è tale che C_R sta "dentro" γ . Allora per il teorema di CAUCHY (vedi osservazione 1),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Aggiungendo e togliendo $f(z_0)$ al numeratore otteniamo

$$= \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \int_{C_R} \frac{1}{z-z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz. \quad (1)$$

Per l'esempio 4 il primo termine di (1) vale $f(z_0)$.

Per quanto riguarda il secondo termine di (1), dato che f è olomorfa in Ω , f' è olomorfa in z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

Questo dimostra che esiste M tale che

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq M \quad \text{per } |z - z_0| < R_0$$

(una funzione che ammette un limite in un punto è limitata in un intorno di quel punto).

Dunque per $0 < R < R_0$

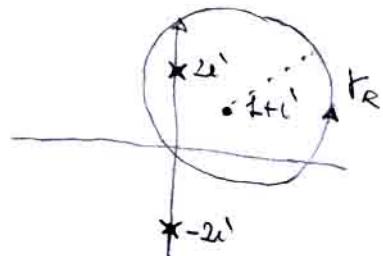
$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot |C_R| = M \cdot R \xrightarrow[R \rightarrow 0]{} 0,$$

e il secondo termine di (*) vale 0. \square

ESEMPIO 5.

calcolare

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^2 + 4} dz$$



dove Γ_R è la circonferenza centrale in $1+i$ di raggio R percorsa in senso antiorario.

La funzione

$$\frac{z^2}{z^2 + 4} = \frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{\frac{1}{2}z}{z+2i} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-2i}$$

è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$.

Dato che $|1+i-2i|= \sqrt{2}$ e $|1+i-(-2i)|= \sqrt{10}$,

se $0 < R < \sqrt{2}$ allora Γ_R non contiene né $2i$ né $-2i$ e per il teorema di CAUCHY

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^2 + 4} dz = 0$$

Se $\sqrt{2} < R < \sqrt{10}$ allora γ_R contiene solo w e

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^2+4} dz &= \int_{\gamma_R} \frac{\frac{z^2}{2}}{z+w} dz + \int_{\gamma_R} \frac{\frac{z^2}{2}}{z-w} dz \\ &= 0 + \underbrace{2\pi i \cdot \left(\frac{w}{2}\right)}_{\text{Per le formule}} = -2\pi\end{aligned}$$

In modo simile, se $\sqrt{10} < R$ allora γ_R contiene solo $-w$ che $-2i$ e quindi

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^2+4} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{w}{2}\right) + 2\pi i \cdot \left(\frac{w}{2}\right) = 0$$

Per $R = \sqrt{2}$ o $R = \sqrt{10}$ il calcolo non puo' essere fatto perche' γ_R attraversa uno dei punti dove la funzione $\frac{z^2}{z^2+4}$ non e' definita.

ESEMPIO 6.

Calcolare $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z+\frac{\pi}{2})} dz$ dove si intende che $|z|=1$ indica la circonferenza centrata in 0 di raggio 1 percorsa in senso positivo.

$|z|=1$ contiene 0 e $f(z) = \frac{\cos z}{z+\frac{\pi}{2}}$ e' olomorfa in $|z| < 1$ (perche' $|-\frac{\pi}{2}| > 1$). Quindi per le formule integrali

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i.$$

Osservazione. Nelle ipotesi del teorema 4 si puo' dimostrare che se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω allora non solo esiste la derivata prima in senso compleso in ogni punto di Ω , ma pure tutte le derivate di ordine $n \geq 1$.

Inoltre vale le formule integrale per le derivate

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

dove Γ e' una curva chiusa semplice che "gira" in senso positivo intorno a z_0 .

Le formule si puo' ottenere da quelle del teorema "dividendo sotto il segno di integrale" rispetto a z_0 .

ESEMPIO 7.

Calcolare $\int_{|z-1|=2} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$ e $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$

Posto $f(z) = e^{2z}$ e $z_0=0$ abbiamo che

$$\int_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(z_0) = \frac{2\pi i \cdot 8}{6} = \frac{8\pi i}{3}$$

$\stackrel{z_0=0}{\text{"dentro"}}$ $|z-1|=2$

mentre

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{z^4} dz = 0 \quad (\text{per il teorema di CAUCHY}).$$

$\stackrel{z_0=0 \text{ e "fuori"}}{\text{de } |z-1|=\frac{1}{2}}$

Osservazione. Nelle ipotesi del teorema 4 abbiamo che per le funzioni olomorfe vale la PROPRIETÀ DELLA MEDIA: sia $z_0 \in \Omega$ e una $\gamma: z(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ ossia la circonferenza $|z - z_0| = R$ con $R > 0$ sufficientemente piccolo in modo che γ sia contenuta in Ω . allora

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} \cdot \underbrace{(z_0 + Re^{it})'}_{iRe^{it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Tale uguaglianza puo' essere letta nel seguente modo: $f(z_0)$ e' la media dei valori della f lungo ogni circonferenza di centro z_0 , contenute in Ω .

ESEMPIO 8.

Verificare la proprietà della media per $f(z) = z^2$.

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it})^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_0^2 + 2Re^{it} + R^2e^{2it}) dt \\ &= z_0^2 + \frac{R}{\pi} \left[\frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} + \frac{R^2}{2\pi} \left[\frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{2\pi} = z_0^2 \end{aligned}$$

Per $f(z) = |z|$ (che non e' olomorfa) la proprietà della media non vale perché per $R > 0$ e $z_0 = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Re^{it}| dt = R \neq |z_0| = 0.$$

4 Serie numeriche e serie di potenze.

Data una successione di numeri complessi $\{z_n\}_{n \geq 0}$ consideriamo la somma finita

$$S_N = z_0 + z_1 + \dots + z_N = \sum_{m=0}^N z_m$$

detta SOMMA PARZIALE. Se esiste il $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = l \in \mathbb{C}$
si dice che la SERIE NUMERICA

$$\sum_{m=0}^{\infty} z_m = l \quad (\text{converge a } l).$$

Si osserva facilmente che se una serie converge allora il suo termine generico è infinitesimo

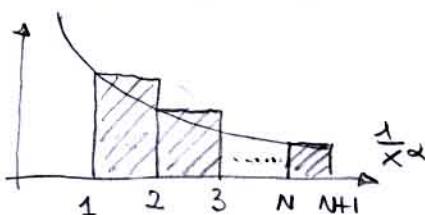
$$z_N = S_N - S_{N-1} \rightarrow l - l = 0.$$

In generale non vale il viceversa ossia se $z_n \rightarrow 0$ non è detto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sia convergente.

ESEMPIO 9.

Se $\alpha > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.
(si noti che $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$ per $\alpha > 0$). Inf

Infatti se $0 < \alpha \leq 1$ allora

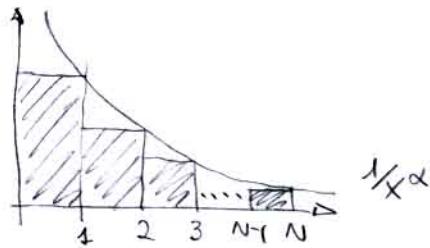


e quindi

$$\sum_{m=1}^N \frac{1}{m^\alpha} = \text{somme aree} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{-1}{\alpha} x^{-\alpha} \right]_1^{N+1} & \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{N+1} & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \rightarrow +\infty$$

è un confronto $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} = +\infty$.

Se invece $\alpha > 1$ allora



e quindi

$$\sum_{m=1}^N \frac{1}{m^\alpha} = \text{somme aree rettangoli} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^N \rightarrow 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

e per confronto la somma normale $S_N = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^\alpha}$

è crescente e limitata e dunque converge.

Uno strumento utile per verificare se una serie converge è il CRITERIO DEL CONFRONTO:

Se $\exists m_0 \geq 0$: $\forall n \geq m_0$ $|z_n| \leq c_n$

e la serie reale a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

converge allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge.

Osservazione. Anche se le serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = +\infty$

le serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$ converge (si noti che $\left| \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right| = \frac{1}{m}$)

Inoltre se $S_N = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m-1}}{m}$ allora

$$S_{2N} = \left(\overset{>0}{1 - \frac{1}{2}} + \overset{>0}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)} + \overset{>0}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)} \right) = \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \right) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2m(2m-1)}$$

$$\leq \sum_{m=1}^N \frac{1}{(2m-1)^2} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty \quad (\text{perché } \alpha = 2 > 1)$$

Quindi $S_{2N} \rightarrow l$ e $S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \rightarrow l + 0 = l$

Così $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} = l$. Si può dimostrare che $l = \log 2$.

Una SERIE DI POTENZE è una funzione $f(z)$ di
variabile complessa che a $z \in D \subset \mathbb{C}$ associa
la somma delle serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n$$

con $\{a_n\}$ successione di numeri complessi
detti COEFFICIENTI DELLA SERIE mentre $z_0 \in \mathbb{C}$
è detto CENTRO DELLA SERIE.

L'insieme D si dice DOMINIO DI CONVERGENZA DELLA
SERIE e contiene i numeri complessi z per cui
la serie numerica converge.

La SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ è una particolare
serie di potenze di centro $z_0=0$ e con tutti
i coefficienti $a_n=1$. Dato che

$$(1-z)(z^N + z^{N-1} + \dots + z + 1) = 1 - z^{N+1}$$

si ottiene facilmente una formula esplicita per
la somma parziale

$$S_N = \sum_{n=0}^N z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{N+1}}{1-z} & \text{se } z \neq 1, \\ N+1 & \text{se } z=1. \end{cases}$$

Quindi, siccome la successione z^{N+1} converge se e
solo se $|z|<1$, abbiamo che il dominio di
convergenza della $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ è $D = \{z : |z|<1\}$ e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{per } |z|<1$$

TEOREMA 5.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze
di dominio $D \subset \mathbb{C}$.

Sia

$$\frac{l}{R} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{se il limite esiste})$$

con le convenzioni che se il limite vale $+\infty$
allora $R=0$ e se il limite vale 0 allora $R=+\infty$.

R si dice RAGGIO DI CONVERGENZA. (notre)

1) $\frac{l}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (\text{se il limite esiste})$

2) Le serie converge per $|z-z_0| < R$ ovve

$$\{z : |z-z_0| < R\} \subset D$$

3) Le serie non converge per $|z-z_0| > R$ ovve

$$D \subset \{z : |z-z_0| \leq R\}$$

oltrm.

Dimostriamo solo la 2).

La dimostrazione della 3) è simile.

Per definizione del limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 0: \frac{l}{R} - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(*)}{<} \frac{l}{R} + \varepsilon \quad \text{per } n \geq n_\varepsilon$$

$$\text{Sia } |w| < R \text{ allora } \exists \varepsilon > 0: \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|w|}{R} + \varepsilon |w| < 1$$

$$\frac{|w|}{R} + \varepsilon |w| < 1$$

e quindi, per (*), abbiamo che se $w = z-z_0$ allora

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n w^n| < \left(\frac{|w|}{R} + \varepsilon |w| \right)^n = \delta^n \quad \text{per } n \geq n_\varepsilon.$$

Per confronto con le serie geometriche convergenti
 $\sum_{n=m_0}^{\infty} f^n$ anche la serie $\sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n(z-z_0)|^n$ è convergente
ossia la serie $\sum_{n=m_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente.
Dato che la convergenza assoluta implica la
convergenza semplice, otteniamo la tesi. \square

Prima di vedere degli esempi completiamo il
quadro teorico con due altri teoremi.

TEOREMA 6.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con
raggio di convergenza $R > 0$ allora

- 1) f è olomorfa in $\{z : |z-z_0| < R\}$ e la derivata
(complexe) di ordine K è ancora una serie
di potenze con lo stesso raggio di convergenza

$$f^{(K)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-K+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$$

(FORMULA DI DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE)

- 2) se γ è una curva semplice, contenuta in $\{z : |z-z_0| < R\}$
allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1} \right]_{z_1}^{z_2}$$

dove z_1 e z_2 sono rispettivamente il punto iniziale
e finale della curva.

(FORMULA DI INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE)

TEOREMA 7.

Sia Ω un aperto connesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω . Allora $\forall z_0 \in \Omega$, $f(z)$ è esprimibile come una serie di potenze centrata in z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Tale serie è detta SERIE DI TAYLOR di f in z_0 e ha come raggio di convergenza il raggio del più grande cerchio centrato in z_0 e contenuto in Ω . Inoltre lo sviluppo in z_0 è unico ovvero se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ in $\{z : |z-z_0| < r\}$ allora necessariamente $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Osservazione.

Alcune delle serie di Taylor valide nel campo reale si estendono nel piano compleso:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z_0=0, R=\infty;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z_0=0, R=\infty;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z_0=0, R=\infty;$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad z_0=0, R=1.$$

5. Serie di LAURENT

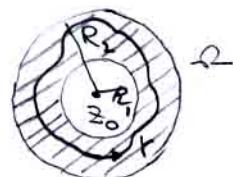
Se una funzione f è olomorfa in un insieme aperto Ω meno un suo punto z_0 allora, per quanto visto nel teorema 7, f è sviluppabile in ogni punto di $\Omega \setminus \{z_0\}$, ma non in z_0 . Nel teorema seguente si descrive in modo di rappresentare la funzione f in un intorno di z_0 , che estende la nozione di Serie di TAYLOR.

TEOREMA 8. (SVILUPPO DI LAURENT)

Se f è olomorfa nell'ANELLO $\Omega = \{ z : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$

con $0 < R_1 < R_2$. Allora per ogni $z \in \Omega$ si ha che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$



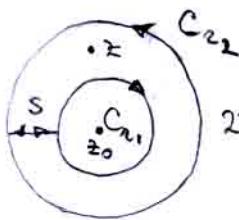
dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}.$$

e C è una qualunque curva chiusa semplice e regolare contenuta in Ω e percorsa in senso antiorario.

dim.

Se $z \in \Omega$ con $r = |z - z_0|$ e siamo r_1, r_2 tali che $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$. Per le formule integrale di CAUCHY applicata al percorso $C_{r_2} \cup S \cup C_{r_1}^- \cup S^-$ abbiamo che



$$2\pi i f(z) = \int_{C_{r_2} \cup S \cup C_{r_1}^- \cup S^-} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw (*)$$

Per $w \in C_{r_2}$ si ha che $r_2 = |w - z_0| > |z - z_0| = r$ ovvero
 $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$. Quindi il primo integrale dw (*)
 diventa

$$\begin{aligned} \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw \\ &\text{se ne segue} \\ &\downarrow \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^m dw \end{aligned}$$

e i integrali terminano a termine (vedi teorema 6)
 otteniamo

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^m \cdot \overbrace{\int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}} dw}^{2\pi i \cdot a_m}$$

Analogamente, se $w \in C_r$ si ha che $r_1 = |w - z_0| < |z - z_0| = r$
 ovvero $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| < 1$. Quindi il secondo integrale dw (*)
 diventa

$$\begin{aligned} - \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dw \\ &= \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^m dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \overbrace{\int_{C_{r_1}} f(w) (w-z_0)^n dw}^{2\pi i a_{-(n+1)}} \end{aligned}$$

Infine riunendo i risultati abbiamo la tesi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^m + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

□

Osservazione. Se Ω è un insieme aperto, lo sviluppo di LAURENT in un punto z_0 di una funzione $f(z)$ olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ è la somma delle due serie univocamente determinate:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

PARTE OLOMORFA PARTE PRINCIPALE

Se $f(z)$ è olomorfa in Ω allora la parte principale vale 0 e la parte olomorfa coincide con la serie di TAYLOR in z_0 . Se almeno uno dei coefficienti a_{-m} della parte principale è diverso da 0 allora si dice che f ha una SINGOLARITÀ (isolate) in z_0 . Se solo un numero finito dei coefficienti a_{-m} è diverso da 0 allora si dice che f ha una singolarità di ORDINE d dove $d \geq 1$ è l'indice più grande tale che $a_{-d} \neq 0$. Se ci sono infiniti coefficienti a_{-m} diversi da 0 allora la singolarità si dice ESSENZIALE.

Vediamo qualche esempio esplicito di serie di LAURENT.

ESEMPIO 10.

Ecco un elenco di funzioni e il loro sviluppo di LAURENT in certi punti

$$1) \frac{(z+1)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z \quad \text{per } |z| > 0$$

quindi $z_0 = 0$ è una singolarità di ordine 1.

$$2) \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{per } 0 < |z| < 1,$$

quindi $z_0 = 0$ è una singolarità di ordine 2.

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{-1}{(1+(z-1))^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+(z-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{z-1} \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \right)$$

$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n (z-1)^{n-1}$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(-1)^n (z-1)^{n-2}$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(-1)^n (z-1)^n \quad \text{per } 0 < |z-1| < 1$$

quindi $z_0 = 1$ è una singolarità di ordine 1.

$$3) \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \quad \text{per } |z| > 0,$$

quindi $z_0 = 0$ non è una singolarità. Formalmente la funzione $\sin z/z$ non è definita per $z_0 = 0$ e allora si può anche dire che z_0 è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE.

$$4) e^{z/2} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{4}{2z^2} + \frac{8}{3!z^3} + \dots$$

quindi $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale.

Osservazione.

Ogni funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con P e Q polinomi è olomorfa in \mathbb{C} meno i punti che annullano $Q(z)$.

Se $Q(z) = a \cdot (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} \cdots (z-z_r)^{\alpha_r}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ interi positivi, allora possiamo dire z_k è un singolare per f di ordine α_k per $k=1, \dots, r$. (stiamo supponendo che P non abbia fattori in comune con Q ossia che $P(z_k) \neq 0$ per $k=1, \dots, r$).

6. Residui e il loro calcolo

Scegli f olomorfa su $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ per un certo $R > 0$ si consideri lo sviluppo di LAURENT di f in z_0 .

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{per } 0 < |z-z_0| < R.$$

Allora il coefficiente a_{-1} si dice RESIDUO di f in z_0 e si indica con $\text{Res}(f, z_0)$.

Dal teorema S seppiamo che

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz,$$

dove C_r è la circonferenza centrata in z_0 di raggio $0 < r < R$ percorso nel senso antiorario.

ESEMPIO 11.

Dall'esempio 10 si deduce che

$$1) \text{Res}\left(\frac{(z+1)^2}{z}, 0\right) = 1$$

- 2) $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}, 0\right) = 1$, $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}, 1\right) = -1$.
- 3) $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$
- 4) $\text{Res}(e^{z/2}, 0) = 2$

Si noti che se z_0 non è una singolarità ossia se f è olomorfa in $\{z : |z - z_0| < R\}$ allora $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

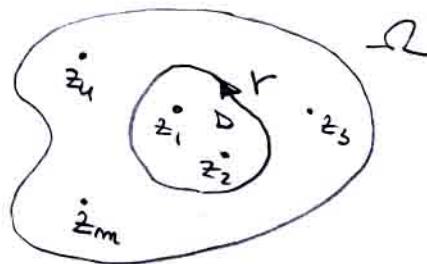
Il seguente risultato illustra come un integrale circolare di una funzione olomorfa è meno di un certo numero di singolarità perse essendo scritto un termine di residui.

TEOREMA 3. (DEI RESIDUI)

Sia Ω un aperto semplicemente connesso e siano $z_1, z_2, \dots, z_m \in \Omega$. Se f è una funzione olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ e γ è una curva chiusa semplice percorsa in senso antiorario che non attraversa nessuno dei punti z_k con $k=1, \dots, m$. allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res}(f, z_k)$$

dove la somma è fatta su tutti i punti z_k con $k=1, \dots, m$ che sono contenuti nell'insieme D delimitato da γ .



dove.

Per l'osservazione fatta dopo il teorema 3 (CAUCHY) abbiamo che

$$\int \limits_r f(z) dz = \sum_{\substack{z_k \in D \\ C_{r_k}(z_k)}} \int \limits_{C_{r_k}(z_k)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res}(f, z_k)$$

dove $C_{r_k}(z_k)$ è una circonferenza di centro z_k e raggio $r_k > 0$ sufficientemente piccolo in modo che $C_{r_k}(z_k)$ sia dentro D e non abbia al suo interno altre singolarità oltre a z_k . \square

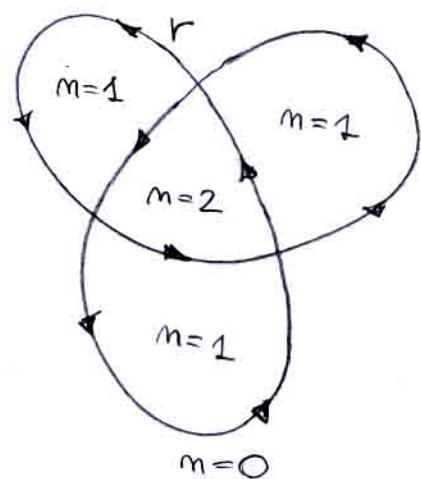
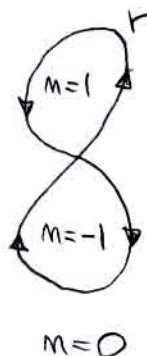
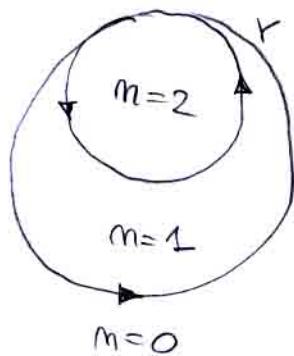
Osservazione.

Nelle ipotesi del teorema precedente vale una formula più generale nel caso le curve non siano semplice:

$$\int \limits_r f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m m(r, z_k) \text{Res}(f, z_k)$$

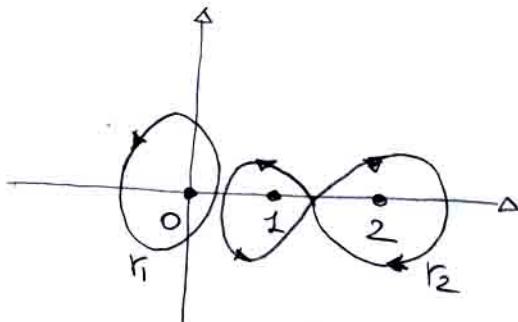
dove $m(r, z_k) \in \mathbb{Z}$ indica il numero di volte che r si "avvolge" intorno a z_k contando positivamente il "giri" un senso antiorario e negativamente il "giri" un senso orario.

Ad esempio



ESEMPIO 12.

Sia $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Calcolare $\int_{r_1} f(z) dz$ e $\int_{r_2} f(z) dz$
dove



0, 1, 2 sono
le singolarità
di f (ordine 1)

La funzione razionale $f(z)$ si può decomporre
come

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$$

e quindi

Parte principale in $z=0$

Esempio 4

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0(0)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0(0)} \frac{1/2}{z} dz = \frac{1}{2}$$

dove r è sufficientemente piccolo.

Analogamente si trova che

$$\text{Res}(f, 1) = -1 \quad \text{e} \quad \text{Res}(f, 2) = 1/2$$

Dunque, dato che le curve r_1 si avvolge 1 volta
in senso positivo attorno a 0 e 0 volte attorno
a 1 e a 2:

$$\int_{r_1} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$$

Inoltre, dato che le curve r_2 si avvolge 1 volta
in senso positivo attorno a 1, 1 volta in senso
negativo attorno a 2 e 0 volte attorno a 0:

$$\begin{aligned} \int_{r_2} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 1) - \text{Res}(f, 2)) \\ &= 2\pi i \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -3\pi i. \end{aligned}$$

Le seguenti teoremi forniscono un metodo di calcolo alternativo alla definizione per i residui di singolarità di ordine finito.

TEOREMA 10.

Sia z_0 una singolarità isolata di ordine m per $f(z)$ olomorfa in $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ per un certo $R > 0$. Allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right)_{z=z_0}$$

dove

$$\text{Sia } f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

lo sviluppo di LAURENT in z_0 .

Se si moltiplica $f(z)$ per $(z-z_0)^m$ si ottiene una funzione olomorfa in $\{z : |z - z_0| < R\}$ (è stata "eliminata" la singolarità):

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-m+n} (z-z_0)^n$$

e per il teorema 7 per $n \geq 0$

$$a_{-m+n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right)_{z=z_0}$$

Per ottenere il residuo a_{-1} basta scegliere $n = m-1$ da cui la tesi. \square

Osservazione. Se $f(z) = g(z)/h(z)$ con g, h olomorfe e z_0 una singolarità di ordine 1 per f , allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \left[(z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right]_{z=z_0}^{\frac{h(z_0)=0}{h'(z_0)}} \stackrel{t}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

ESEMPIO 13.

Sia $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$. Calcolare i residui di f nelle singolarità 0 e 1.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z^2(1-z)} \right) \right)_{z=0} \quad (0 \text{ è di ordine 2}) \\ &= \left(-\frac{1}{(1-z)^2} \cdot (-1) \right)_{z=0} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{0!} \left(\frac{z-1}{z^2(1-z)} \right)_{z=1} = \left(\frac{-1}{z^2} \right)_{z=1} = -1$$

I risultati ottenuti confermano quanto già visto nell'esempio 10.

ESEMPIO 14.

La funzione $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ha singolarità nei punti $z = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ tutte di ordine 1.

Calcolare i residui in tali punti.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, k\pi) &= \left(\frac{z-k\pi}{\sin z} \right)_{z=k\pi} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin z} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \left(\frac{(z-k\pi)'}{(\sin z)'} \right)_{z=k\pi} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k. \end{aligned}$$

Osservazione. Se f e g sono due funzioni olomorfe in un aperto contenente z_0 e $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g' \neq 0$, allora vale una versione "complessa" del teorema dell'HÔPITAL. Se ad esempio $g'(z_0) \neq 0$ allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)}{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

ESEMPIO 15.

La funzione $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4 + z^2}$ ha singolarità nei punti in cui si annulla $z^4 + z^2 = z^2(z+1)(z-i)$ ossia in 0 di ordine 2 e in $\pm i$ di ordine 1. I residui in tali punti sono:

$$\text{Res}(f, 0) = \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1} \right) \right)_{z=0} = \left(\frac{\pi e^{\pi z}(z^2+1) - 2z e^{\pi z}}{(z^2+1)^2} \right)_{z=0} = \pi,$$

$$\text{Res}(f, i) = \left(\frac{e^{\pi z}}{z^2(z+i)} \right)_{z=i} = \frac{e^{i\pi}}{(i^2)(2i)} = -\frac{i}{2},$$

$$\text{Res}(f, -i) = \left(\frac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)} \right)_{z=-i} = \frac{e^{-i\pi}}{(-i)^2(-2i)} = \frac{i}{2}.$$

Osservazione.

La nozione di resido si può estendere anche per il PUNTO ALL'INFINITO ∞ . (nel piano complesso non si fa distinzione tra $\pm\infty$).

$$\text{Res}(f(z), \infty) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

dove f è una funzione olomorfa in $\{z: |z|>R\}$ per un certo $R>0$. Vale il seguente risultato.

TEOREMA 11.

Se $f = P/Q$ è una funzione razionale allora

$$\sum_{k=1}^m \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0,$$

dove z_1, z_2, \dots, z_m sono i POLI di f ossia gli zeri del polinomio Q .

ESEMPIO 16.

S.e. $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ allora

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$= \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2}}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}, 0\right)$$

$$= \text{Res}\left(\frac{-\frac{1}{z^2}}{z-1}, 0\right) = 0$$

Inoltre per l'esempio 13 possiamo verificare che la somma di "tutti" i residui (anche ∞) è nulla

$$\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, \infty) = -1 + 0 = 0$$

ESEMPIO 17.

S.e. $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$ allora $z^2-z-2 = (z+1)(z-2)$ e

$$\text{Res}(f, -1) = \left(\frac{2z+1}{z-2}\right)_{z=-1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{Res}(f, 2) = \left(\frac{2z+1}{z+1}\right)_{z=2} = \frac{5}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \infty) &= \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \text{Res}\left(\frac{-(2+2)}{z(1-z-2z^2)}, 0\right) \\ &= \left(\frac{-(2+2)}{1-z-2z^2}\right)_{z=0} = -2. \end{aligned}$$

Così possiamo verificare che

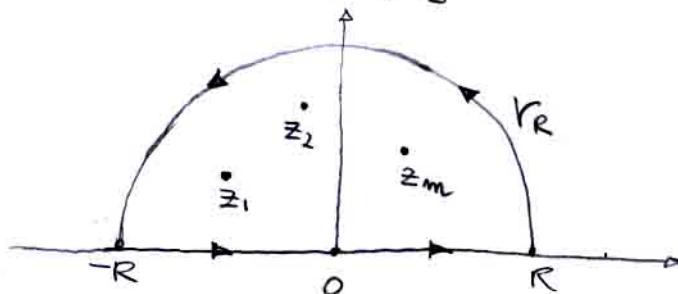
$$\text{Res}(f, -1) + \text{Res}(f, 2) + \text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0.$$

7. Calcolo di integrali reali con i residui

Alcuni integrali definiti reali possono essere calcolati senza la determinazione di una primitiva, riconducendosi a integrali complessi lungo curve chiuse particolari. In questa lezione verranno descritti tre esempi tipici di questo tipo di calcolo.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con P, Q polinomi tali che $\deg(Q) > \deg(P) + 1$ e $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si pone $f(z) = P(z)/Q(z)$ e si considera il percorso chiuso $\gamma_R \cup [-R, R]$



dove γ_R è la semicirconferenza di centro O e raggio $R > 0$ tale che $|z_k| < R$ per ogni zero di Q z_k con $k=1,..,m$, nel semipiano $\operatorname{Im}(z) > 0$. Allora su il teorema 9

$$\int_{\gamma_R \cup [-R, R]} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Per $1 < \alpha < \text{grado}(Q) - \text{grado}(P)$ si ha che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z^\alpha f(z)| = 0$$

e dunque $\exists R_0 > 0$ e $\exists M > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \quad \text{per } |z| > R_0.$$

Quindi per $R > R_0$

$$\left| \int_R^{\infty} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^\alpha} \cdot |Y_R| = \frac{M \cdot \pi}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow[\text{per } R \rightarrow \infty]{} 0.$$

Inoltre

$$\int_{[R, \infty)} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx \xrightarrow[\text{per } R \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Possiamo così concludere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right).$$

2) $\int_0^{2\pi} g(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$ dove $g(x, y)$ è una funzione razionale nelle variabili x e y .

$$\text{Se } z = e^{i\theta} \text{ allora } \sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \text{ e } \cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

Allora $f(z) \stackrel{\text{Def}}{=} g\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)$ è una funzione razionale in z .

Dato che $dz = e^{i\theta} \cdot i \cdot d\theta = iz d\theta$

$$\int_0^{2\pi} g(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \int_{|z|=1} f(z) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

dove z_1, \dots, z_m sono le singolarità (poli) di $\frac{f(z)}{iz}$ contenute in $\{z : |z| < 1\}$.

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \cos(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx$$

dove $a > 0$, P e Q sono polinomi tali che
 $\deg(Q) - \deg(P) > 0$ e $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
 Con considerazioni simili a quelle fatte
 per il punto 1), e osservando che

$$e^{ax} = \cos(ax) + i \sin(ax)$$

si dimostra che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{az}, z_k \right) \right)$$

e

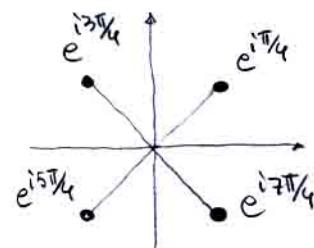
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{az}, z_k \right) \right)$$

dove z_1, \dots, z_m sono gli zeri di $Q(z)$
 contenuti nel semipiano $\operatorname{Im}(z) > 0$.

ESEMPIO 18.

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. Le singolarità di
 $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ sono date dalle soluzioni di $z^4+1=0$
 ossia le 4 radici quarte di -1 :

$$e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$$



Le singolarità contenute nel $\operatorname{Im}(z) > 0$
 sono $e^{i\pi/4}$ e $e^{i3\pi/4}$ e sono tutte di ordine 1.

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{-i\pi/4}\right) \right)$$

Dato che

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right) = \left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{(4z^3)}_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{-i\pi/4}\right) = \left(\frac{1}{(4z^3)}\right)_{z=e^{-i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i9\pi/4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{2\pi i}{4} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ESEMPIO 19. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Posto $\cos\theta = (z+1/z)/2$ per $z = e^{i\theta}$ ottieniamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+1} dz$$

Dato che $z^2+4z+1=0$ per $z=-2+\sqrt{3}$ e $z=-2-\sqrt{3}$ e
solo $| -2+\sqrt{3} | < 1$ possiamo concludere che

$$= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right)$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2z+4}\right)_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

ESEMPIO 20.

$$\text{Calcolare } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 + 3} dx.$$

I punti di $z^2 + 3$ sono $z = i\sqrt{3}$ e $z = -i\sqrt{3}$
e solo $i\sqrt{3}$ è contenuto nel $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{2ix}}{x^2 + 3} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{2iz}}{z^2 + 3}, i\sqrt{3}\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{ze^{2iz}}{z + i\sqrt{3}} \right) \Big|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{2\pi i \cdot i\sqrt{3} e^{-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \\ &= i\pi e^{-2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx = \pi e^{-2\sqrt{3}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 + 3} dx = 0.$$

S'nota che la funzione $\frac{x \sin 2x}{x^2 + 3}$ è pari e dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$$

Il fatto che $\frac{x \cos 2x}{x^2 + 3}$ sia pari (e che il suo integrale su $(-\infty, +\infty)$ è convergente) conferma che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 + 3} dx = 0.$$

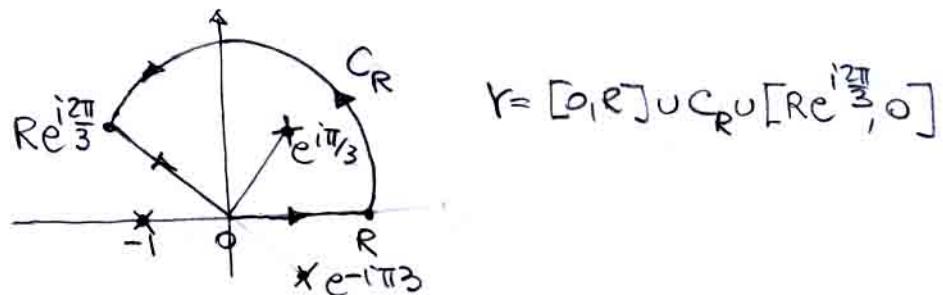
Le "strategie" di calcolo illustrate in questa sezione hanno molteplici varianti che dipendono dalle caratteristiche della funzione da integrare e dell'intervallo di integrazione.

Il prossimo esempio descrive una di queste varianti.

ESEMPIO 21.

Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$.

La funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ ha 3 singolarità di ordine 1: $-1, e^{i\pi/3}$ e $e^{-i\pi/3}$. Il percorso "conveniente" è il seguente:



Allora

$$\begin{aligned} \int_Y f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/3}) = 2\pi i \left(\frac{1}{3z^2} \right)_{z=e^{i\pi/3}} \\ &= -\frac{2\pi i}{3}, e^{i\pi/3} \end{aligned}$$

Ma d'altra parte

$$\int_Y f(z) dz = \int_0^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{t=R}^{Re^{i\pi/3}} f(te^{i\pi/3}) d(te^{i\pi/3})$$

Per $R \rightarrow \infty$ abbiamo che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

In modo simile a quanto visto per gli integrali del tipo 1)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Infine

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{t=R}^0 f(te^{i\frac{2\pi}{3}}) dt e^{i\frac{2\pi}{3}} = - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Così

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx + 0 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = -\frac{2\pi i}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = -\frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{2i \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

1. Definizione e prime proprietà

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ allora la TRASFORMATA

DI LAPLACE di f che si indica con $\mathcal{L}[f] = F$

è definita come

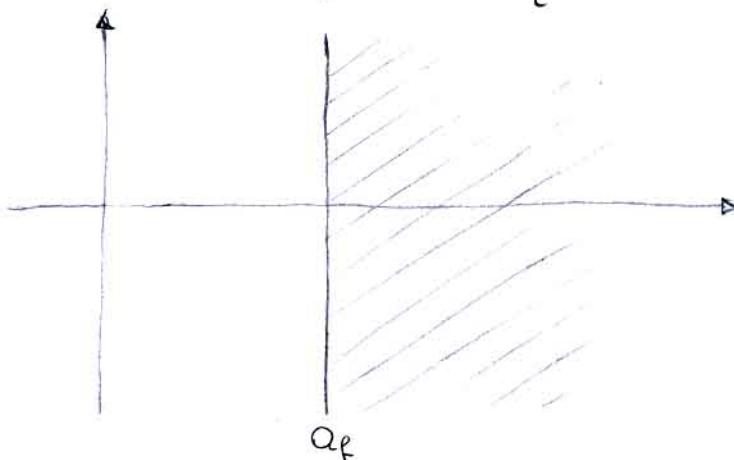
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

per $s \in \mathbb{C}$ tale che l'integrale è assolutamente convergente.

Se esiste una costante $M > 0$ e un numero $a_f \in \mathbb{R}$ tale che $|f(t)| \leq M e^{a_f t}$ per $t \in [0, +\infty)$ allora

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt &\leq M \int_0^{\infty} |e^{-(s-a_f)t}| dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-(Re(s)-a_f)t} dt < +\infty \end{aligned}$$

se $Re(s) > a_f$ e quindi $\mathcal{L}[f](s)$ è definita in tutto il semipiano $\{s \in \mathbb{C}: Re(s) > a_f\}$.



a_f si dice ASCISSA DI CONVERGENZA di f .

Le trasformate di Laplace è un'applicazione lineare: se $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con ascisse di convergenza a_f, a_g allora

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per $\operatorname{Re}(s) > \max\{a_f, a_g\}$.

Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Vediamo il calcolo delle trasformate di alcune funzioni elementari:

$$1) \quad \mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \quad \text{e } a \in \mathbb{C}$$

dim.

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a};$$

$$2) \quad \mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \text{e } a \in \mathbb{R}$$

dim.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s) = \frac{i}{2i} \left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2+a^2}; \end{aligned}$$

$$3) \quad \mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \text{e } a \in \mathbb{R}$$

dim.

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{s}{s^2+a^2};$$

4) $\mathcal{L}[\sinh(at)](s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$ per $\operatorname{Re}(s) > |a|$ e $a \in \mathbb{R}$
 dim.

$$\mathcal{L}[\sinh(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2};$$

5) $\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$ per $\operatorname{Re}(s) > |a|$ e $a \in \mathbb{R}$
 dim.

$$\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2};$$

dim.

6) $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per $\operatorname{Re}(s) > 0$ e $n \geq 0$.

Per induzione. Se $n=0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Inoltre per $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n](s) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t^n d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) \\ &= \left[t^n \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s} n t^{n-1} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot n t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}](s). \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \mathcal{L}[t^{n-2}](s) = \dots = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}[1](s) \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ora esamineremo alcune proprietà che sono utili nel calcolo delle trasformata di funzioni non elementari.

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con area di convergenza a_f
 per comodità si indichino con F le trasformate
 di Laplace di f . Allora vengono le seguenti
 proprietà:

1) PRIMA PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a) \quad \text{per } \operatorname{Re}s > a_f + \operatorname{Re}a$$

dim.
 $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a).$

2) SECONDA PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s) \quad \text{per } \operatorname{Re}s > a_f, a > 0$$

$$\text{dove } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (\text{FUNZIONE GRADINO})$$

dim

$$\int_0^{+\infty} u(t-a) f(t-a) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} u(t-a) f(t-a) e^{-st} dt$$

$\stackrel{\tau=t-a}{=} \int_0^{+\infty} u(\tau) f(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-as} F(s).$

3) PROPRIETÀ DI CAMBIO DI SCALA

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{per } \operatorname{Re}s > a \cdot a_f \text{ e } a > 0$$

dim.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(at) dt \stackrel{\tau=at}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

4) PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER t^n con $n \geq 0$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}(F(s)) \quad \text{per } \operatorname{Re}s > a_f$$

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(e^{-st}) f(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s)).$$

5) PROPRIETÀ DELLA DERIVATA n-sima

Se f è derivabile n -volte in $[0, +\infty)$ e $f^{(k)}$ ha
orscose di convergenza $\alpha_{f^{(k)}}$ per $k=0, 1, \dots, n-1$ allora

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+) \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max_{k=0,1,\dots,n-1} \{\alpha_{f^{(k)}}\}$$

dove

Per induzione, se $n=0$ allora $\mathcal{L}[f^{(0)}(t)](s) = F(s)$.

Se $n \geq 1$ allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt (f^{(n-1)}(t)) \\ &= \left[e^{-st} f^{(n-1)}(t) \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f^{(n-1)}(t) e^{-st} dt \\ &= -f^{(n-1)}(0^+) + s \mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](s) \\ &= -f^{(n-1)}(0^+) - s f^{(n-2)}(0^+) + s^2 \mathcal{L}[f^{(n-2)}(t)](s) = \dots = \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+). \end{aligned}$$

6) PROPRIETÀ DEL VALORE INIZIALE E DEL VALORE FINALE

Se i limiti esistono allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s)$$

dove.

$$\text{Da 5)} \quad \mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s F(s) - f(0^+)$$

$$\text{Se } s \rightarrow +\infty \text{ allora } 0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s) - f(0^+).$$

$$\text{Se } s \rightarrow 0^+ \text{ allora } \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s) - f(0^+).$$

7) PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right](s) = \frac{F(s)}{s} \quad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\alpha_f, 0\}$$

dove

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(x) dx\right)\right](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) \stackrel{5)}{=} s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right](s) - 0.$$

ESEMPIO 1.

Calcolare le seguenti trasformate.

$$1) \mathcal{L}[t^n e^{at}](s) \stackrel{!}{=} \frac{n!}{(s-a)^{n+1}};$$

$$2) \mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t)](s) \stackrel{!}{=} \frac{\omega}{\omega^2 + (s-a)^2};$$

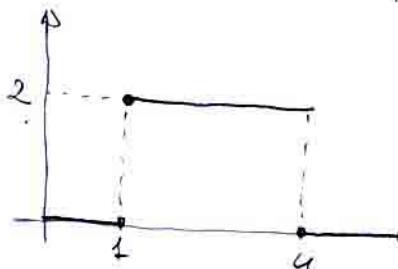
$$3) \mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t)](s) \stackrel{!}{=} \frac{s-a}{\omega^2 + (s-a)^2};$$

$$4) \mathcal{L}[t \sin(\omega t)](s) \stackrel{!}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s)$$
$$= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \right) = +\frac{2\omega s}{(\omega^2 + s^2)^2};$$

$$5) \mathcal{L}[t \cos(\omega t)](s) \stackrel{!}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s)$$
$$= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{\omega^2 + s^2} \right) = -\frac{\omega^2 + s^2 - s \cdot 2s}{(\omega^2 + s^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(\omega^2 + s^2)^2}.$$

ESEMPIO 2.

Calcolare le trasformate delle funzioni



$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [1, 4) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora $f(t) = (\mu(t-1) - \mu(t-4)) \cdot 2$ e quindi

$$F(s) = 2 \mathcal{L}[\mu(t-1)](s) - 2 \mathcal{L}[\mu(t-4)](s)$$

$$\stackrel{!}{=} 2 e^{-s} \mathcal{L}[1](s) - 2 e^{-4s} \mathcal{L}[1](s)$$

$$= \frac{2}{s} (e^{-s} - e^{-4s}).$$

2. Trasformate di Laplace di alcune funzioni specifiche.

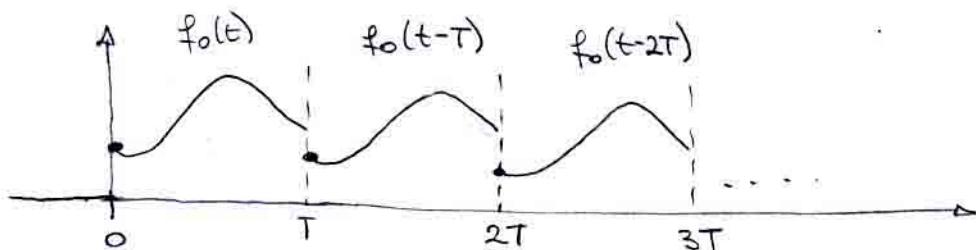
Eseminiamo tre casi tipici: funzione periodica, delta di Dirac, prodotto di convoluzione.

1) Funzioni periodiche.

Sia $f_0(t)$ una funzione in $[0, T]$ con $T > 0$ estesa a 0 in $\mathbb{R} \setminus [0, T]$.

Allora la funzione periodica "generata" da f_0 è

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nT)$$

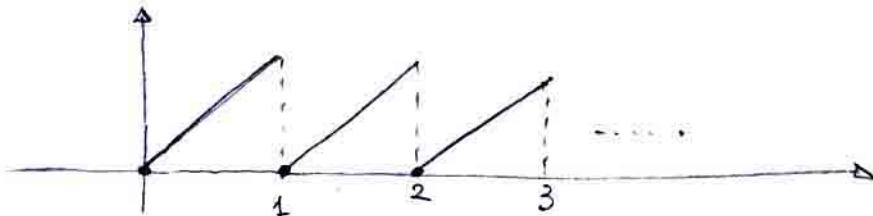


Allora

$$\begin{aligned} L[f(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} L[f_0(t-nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nts} L[f_0](s) = \\ &= F_0(s) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nts} = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-Ts}}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.

Calcolare la trasformata della funzione



In questo caso $f_0(t) = t(u(t) - u(t-1))$
 Così $= t u(t) - (t-1) u(t-1) - u(t-1)$

$$F_0(s) = \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)](s) - \mathcal{L}[u(t-1)](s)$$

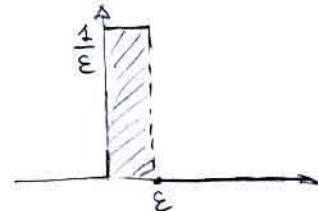
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2}$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}.$$

2) Delta di Dirac.

Poniamo $I_\varepsilon(t) = \frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$



Tale funzione vale $\frac{1}{\varepsilon}$ nell'intervallo $[0, \varepsilon]$ e 0 altrove e

inoltre $\int_{\mathbb{R}} I_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$.

P.e. $t \in \mathbb{R}$, abbiamo che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t=0, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$

Questo limite non rappresenta una funzione, ma è possibile definire una cosiddetta DISTRIBUZIONE $\delta(t)$ tale che

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1.$$

Tale $\delta(t)$ è detta DELTA DI DIRAC e serve a descrivere fenomeni impulsivi.

S'nota che per ogni funzione continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha che $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0).$$

Quindi per $t_0 \geq 0$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}.$$

3) Prodotto di convoluzione.

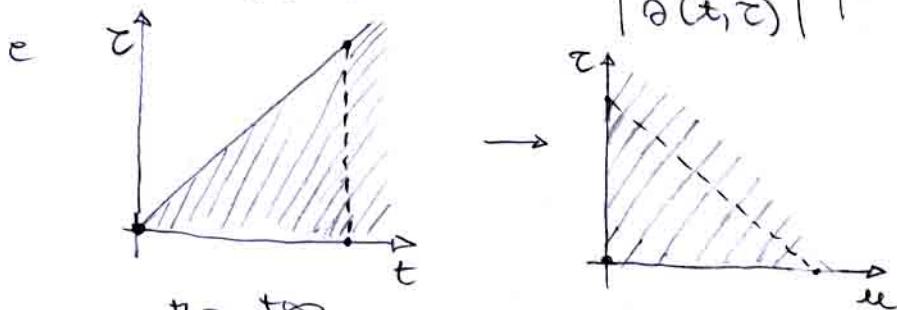
Siamo $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ allora il PRODOTTO DI CONVOLUZIONE delle funzioni f e g , che si induce con $f * g$, è una funzione definita per $t \geq 0$ come

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

La trasformata di Laplace di $f * g$ vale

$$\begin{aligned} L[f * g](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-st} \left(\int_{\tau=0}^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

Poniamo $\begin{cases} u = t - \tau \\ \tau = \tau \end{cases}$ così $\left| \frac{\partial(u, \tau)}{\partial(t, \tau)} \right| = \left| \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1$



$$= \int_{u=0}^{+\infty} \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f(u) g(\tau) d\tau du$$

$$= \int_{u=0}^{+\infty} e^{-su} f(u) du \cdot \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau = L[f](s) \cdot L[g](s).$$

Si noti che $f * g = g * f$ e che lo delta di Dirac δ è l'elemento neutro di questo prodotto

$$(f * \delta)(t) = \int_0^t f(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = f(t-0) = f(t)$$

$$\text{ovvero } f * \delta = \delta * f = f.$$

ESEMPIO 4.

Calcolare $f = t \cdot t$ e $\mathcal{L}[f]$.

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau) \cdot \tau d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{6}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = (\mathcal{L}[t](s))^2 = \left(\frac{1}{s^2} \right)^2 = \frac{1}{s^4}.$$

ESEMPIO 5.

Siano $f(t) = e^{at}$ e $g(t) = e^{bt}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcolare $f * g$ e $\mathcal{L}[f * g]$.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} e^{b\tau} d\tau = e^{at} \int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau \\ &= \begin{cases} e^{at} \left[\frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a} \right]_0^t = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} & \text{se } b \neq a, \\ t e^{at} & \text{se } a = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre $\mathcal{L}[f * g](s) = \frac{1}{(s-a)^2}$.

3. Antitrasformate di Laplace

Come si vedrà nelle applicazioni, spesso è necessario individuare quale sia la funzione $f(t)$ tale che le sue trasformate di Laplace sia una funzione assegnata $F(s)$.

L'anti-trasformata \mathcal{L}^{-1} realizza questa corrispondenza

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad \text{e} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

TEOREMA 1.

Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$,
 Sia $M > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che $|f(t)| \leq M e^{at}$ per
 $t \in [0, +\infty)$ allora $F(s)$ è una funzione olomorfa
 nel semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > a\}$. Inoltre
 se f è continua su $[0, +\infty)$ allora per $a > a_f$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F(s) e^{st} ds \quad t \geq 0 \quad (1)$$

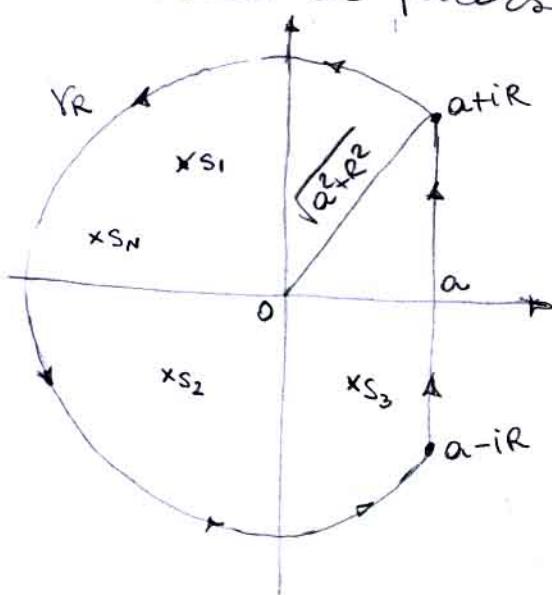
Se $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ è una funzione razionale con
 il grado di Q maggiore del grado di P , allora

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F(s) e^{st}, s_k) \quad t \geq 0 \quad (2)$$

dove s_1, \dots, s_n sono le singolarità di $F(s)$,
 pure.

Dimostriamo subito che le (1) è un'implicazione della (2).

Consideriamo il percorso chiuso $\gamma_{RU} [a-iR, a+iR]$



dove γ_R è l'arco della circonferenza centrale in O , da $a+iR$ a $a-iR$ indicato nelle figure.
 Si dimostra che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} F(s) e^{st} ds = 0.$$

Mentre per $R > R_0$, con R_0 sufficientemente grande, il dominio delimitato dal percorso chiuso contiene tutte le singolarità di $F(s)$. (F è olomorfa in $\{\operatorname{Re}(s) > \alpha\}$). Allora per il teorema dei residui

$$\int_{\gamma_R \cup [a-iR, a+iR]} F(s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(F(s) e^{st}, s_k).$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} F(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(F(s) e^{st}, s_k)$$

e ponendo al limite per $R \rightarrow \infty$ dalla (1) si ottiene la (2). \square

ESEMPIO 6.

Determinare $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$ per $\omega > 0$.

La funzione $\frac{se^{st}}{(s^2+\omega^2)^2}$ ha due singolarità ree ia e $-i\omega$ di ordine 2. Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{se^{st}}{(s^2+\omega^2)^2}, ia\right) &= \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s+i\omega)^2}\right)\right)_{s=i\omega} \\ &= \left(\frac{se^{st}}{(s+i\omega)^2} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{t e^{st}}{e^{st}} - \frac{2(s+i\omega)}{(s+i\omega)^2}\right)\right)_{s=i\omega} \\ &= \frac{i\omega e^{iat}}{-4\omega^2} \left(\frac{1}{i\omega} + t - \frac{2}{i\omega}\right) = -\frac{i e^{iat} \cdot t}{4\omega}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{se^{st}}{(s^2+\omega^2)^2}, -i\omega\right) = +\frac{i e^{-iat} \cdot t}{4\omega}.$$

Quando

$$f(t) = -\frac{i e^{iat}}{4\Omega} + \frac{i e^{-iat}}{4\Omega} = \frac{t}{2\Omega} \cdot \left(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \right) = \frac{t}{2\Omega} \cdot \sin(at),$$

ESEMPIO 7.

Determinare $L^{-1}\left[\frac{2}{s^3+3s^2+2s}\right]$.

$s^3+3s^2+2s = s(s+1)(s+2)$ quando le singolarità
di $\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}$ sono 0, -1, -2 tutte di ordine 1.

$$\text{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, 0\right) = \left(\frac{2e^{st}}{(s+1)(s+2)}\right)_{s=0} = 1,$$

$$\text{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -1\right) = \left(\frac{2e^{st}}{s(s+2)}\right)_{s=-1} = \frac{2e^{-t}}{(-1)1} = -2e^{-t},$$

$$\text{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -2\right) = \left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)}\right)_{s=-2} = \frac{2e^{-2t}}{(-2)(-1)} = e^{-2t}$$

Quando

$$f(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} = (1 - e^{-t})^2$$

Allo stesso risultato si puo' anche arrivare nel seguente modo: si decomponga la funzione razionale in funzioni razionali semplici che ha un antitrasformo.

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^3+3s^2+2s} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \\ &= L[1] - 2L[e^{-t}] + L[e^{-2t}] \\ &= L[1 - 2e^{-t} + e^{-2t}] = L[(1 - e^{-t})^2] \end{aligned}$$

da cui la tesi.

4 Applicazioni: equazioni differenziali lineari.

Uno degli impieghi più comuni delle trasformata di Laplace è nella risoluzione del PROBLEMA DI CAUCHY per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

determinare la funzione $x(t)$ (per questo tipo di problema, la soluzione esiste ed è unica) che risolve l'equazione

$$(*) \quad a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0$$

con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ una funzione data, e soddisfa le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

con $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$, l'ordine di (*) è n .

L'idea dell'applicazione è quella di calcolare le trasformate di (*). In questo modo, grazie alle proprietà delle derivate n-ime, il problema originale di natura "differenziale" si trasforma in un problema di natura "algebrica", ovvero (*) diventa un'equazione algebrica per $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Quando si determina $X(s)$ e con l'antitrasformata si ottiene

la soluzione cercata $x(t)$.

ESEMPIO 8.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

Dato che $\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2X(s) - s \cdot x(0) - x'(0) = s^2X - s$ allora

$$s^2X - s + 9X = \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow X = \frac{s}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} \\ = \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+4}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t) + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t) \\ = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t) \quad \text{per } t \geq 0,$$

ESEMPIO 9.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \delta(t-1) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

Allora

$$s^2X + X = e^{-s} \cdot 1 \Rightarrow X = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

e quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = \sin(t-1) u(t-1) \quad \text{per } t \geq 0.$$

ESEMPIO 10.

Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = u(t-2) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

Allora

$$s^2 X + X = \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow X = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}.$$

Calcoliamo $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$ con il metodo dei residui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \text{Res}\left(\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}, 0\right) + \text{Res}(\dots, i) + \text{Res}(\dots, -i) \\ &= \left(\frac{e^{st}}{s^2+1}\right)_{s=0} + \left(\frac{e^{st}}{s(s+i)}\right)_{s=i} + \left(\frac{e^{st}}{s(s-i)}\right)_{s=-i} \\ &= 1 + \frac{e^{it}}{-2} + \frac{e^{-it}}{-2} = 1 - \cos(t). \end{aligned}$$

Quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = u(t-2) \cdot (1 - \cos(t-2)) \quad \text{per } t \geq 0.$$

La stessa strategia può essere applicata per risolvere SISTEMI di equazioni differenziali lineari e coefficienti costanti. Per semplificare consideriamo solo sistemi 2×2 del primo ordine

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + f(t) \\ -y'(t) = cx(t) + dy(t) + g(t) \end{cases} \quad \text{per } t \geq 0$$

con le condizioni iniziali $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

ESEMPIO 11.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0)=0, y(0)=1.$$

Allora

$$\begin{cases} SX = Y \\ SY - 1 = -X \end{cases} \quad \begin{cases} SX - Y = 0 \\ X + SY = 1 \end{cases}$$

Che è in forma matriciale nr semplice

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui, su le regole di CRAMER,

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{1}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \sin(t),$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{s}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \cos(t).$$

ESEMPIO 12.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 9t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0)=0, y(0)=9.$$

Allora

$$\begin{cases} SX = 2X + Y + \frac{9}{s^2} \\ SY - 9 = X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/s^2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Case

$$X = \frac{g \begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & -1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix}}{(s-2)^2 - 1} = \frac{g(s-2+s^2)}{s^2(s-1)(s-3)} = \frac{g(s+2)}{s^2(s-3)}$$

$$Y = \frac{g \begin{vmatrix} s-2 & \frac{1}{s^2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s-2)^2 - 1} = \frac{g(s^3 - 2s^2 + 1)}{s^2(s-1)(s-3)} = \frac{g(s^2 - s - 1)}{s^2(s-3)}$$

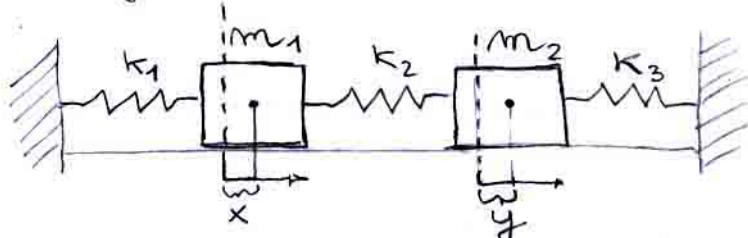
e quindi

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{Res}\left(\frac{g(s+2)e^{st}}{s^2(s-3)}, 0\right) + \text{Res}\left(\frac{g(s+2)e^{st}}{s^2(s-3)}, 3\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s+2)e^{st}}{(s-3)} \right) \right)_{s=0} + \left(\frac{g(s+2)e^{st}}{s^2} \right)_{s=3} \\ &= \left(\frac{g(s+2)e^{st}}{s-3} \cdot \left(\frac{1}{s+2} + \frac{t e^{st}}{e^{st}} - \frac{1}{s-3} \right) \right)_{s=0} + \frac{g(5)}{g} e^{3t} \\ &= \frac{g \cdot 2}{-3} \left(\frac{1}{2} + t - \frac{1}{-3} \right) + 5e^{3t} - -5 - 6t + 5e^{3t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \text{Res}\left(\frac{g(s^2 - s - 1)e^{st}}{s^2(s-3)}, 0\right) + \text{Res}\left(\frac{g(s^2 - s - 1)e^{st}}{s^2(s-3)}, 3\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{g(s^2 - s - 1)e^{st}}{s-3} \right) \right)_{s=0} + \left(\frac{g(s^2 - s - 1)e^{st}}{s^2} \right)_{s=3} \\ &= \left(\frac{g(s^2 - s - 1)e^{st}}{s-3} \cdot \left(\frac{2s-1}{s^2 - s - 1} + t - \frac{1}{s-3} \right) \right)_{s=0} + \frac{g(9-3-1)}{g} e^{3t} \\ &= \frac{g(-1)}{-3} \left(-\frac{1}{-1} + t - \frac{1}{-3} \right) + 5e^{3t} = 4 + 3t + 5e^{3t}. \end{aligned}$$

Nel prossimo esempio applichiamo il metodo delle trasformata di Laplace a un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine che deriva da un problema di fisica.

Due masse m_1, m_2 sono unite con tre molle, con costanti di elasticità k_1, k_2, k_3 , a due pareti nel seguente modo



x indica lo spostamento delle masse m_1 rispetto alla posizione a riposo, mentre y indica l'analogo spostamento per le masse m_2 .

Considerando le forze che agiscono sulle due masse, in assenza di attrito, si ha che

$$\begin{cases} m_1 x''(t) = -k_1 x(t) + k_2(y(t)-x(t)) \\ m_2 y''(t) = -k_2(y(t)-x(t)) - k_3 y(t) \end{cases} \quad (*)$$

Se al tempo $t=0$, gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali delle due masse sono rispettivamente $x(0), y(0)$ e $x'(0)$ e $y'(0)$, qual è

Sono le equazioni del moto $x(t) \leftarrow y(t)$ delle due masse per $t \geq 0$?

Rispondere a queste domande significa risolvere il sistema (*) con le condizioni iniziali assegnate.

Nel prossimo esempio risolviamo il problema in un caso particolare.

ESEMPIO 13.

Risolvere (*) nel caso in cui $m_1 = m_2 = 1$, e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ con $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -y'(0) = 3$.

$$\begin{cases} x''(t) = -2x(t) + y(t) \\ y''(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{con } x(0) = 0, x'(0) = 3 \\ \text{con } y(0) = 0, y'(0) = -3 \end{array}$$

Allora

$$\begin{cases} s^2X - 3 = -2X + Y \\ s^2Y + 3 = X - 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e così per $t \geq 0$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & s^2+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{vmatrix}} = \frac{3(s^2+1)}{(s^2+3)(s^2+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t),$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s^2+2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{vmatrix}} = \frac{-3(s^2+1)}{(s^2+3)(s^2+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t).$$