ALGEBRA DI BOOLE

sabato 15 ottobre 2022 09:20

ALGEBRA DI BOOLE

È un tipo di algebra definita dal matematico George Boole (1815 - 1864).

- Somma logica: $(+) = (\vee) =$ OR ;
- Prodotto logico: $(\cdot) = (\wedge) =$ AND ;
- Negazione: NOT, dato un valore x, il suo negato è $\bar{x}$;

ASSIOMI:

1. $\forall a, b \in S: a+b \in S,\ a \cdot b \in S.$ (Chiusura)
2. $\exists 0 \in S : a+0 = a$
   $\exists 1 \in S : a \cdot 1 = a$ (Elemento neutro) $xyz + xyz' = \underset{1}{(z+z')}\, xy = xy$
3. $a+b = b+a$ (Proprietà commutativa)
4. $a+(b+c) = (a+b)+c,\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (Proprietà associativa)
5. $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c),\ a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ (Proprietà distributiva)
6. $a+\bar{a} = 1,\ a\cdot\bar{a} = 0$ (Complemento)

E infine $|S| = 2^m$. $\rightarrow \bar{0} = 1$ e $\bar{1} = 0$

LEGGE DI DUALITÀ: ogni identità booleana rimane invariata scambiando + con $\cdot$ e 0 con 1.

PROPRIETÀ DI IDEMPOTENZA: $\boxed{a+a = a \quad \text{E} \quad a\cdot a = a}$

$$a = a+0$$
$$a = a+(a\cdot\bar{a})$$
$$a = (a+a)\cdot(a+\bar{a})$$
$$a = (a+a)\cdot 1 = a+a$$

$(\bar{a}+a)(\bar{a}+b)$

$\bar{a}+(ab) = b+\bar{a}$

E per la legge di dualità vale anche $a = a\cdot a$.

ANNICHILATORI FUNZIONALI: $\boxed{a+1 = 1 \quad \text{E} \quad a\cdot 0 = 0}$ $\rightarrow$ Limitatezza

$$a+1 = a+a+\bar{a}$$
$$a+1 = a+\bar{a}$$
$$a+1 = 1$$

LEGGE DI ASSORBIMENTO: $\boxed{a+(a\cdot b) = a \quad \text{E} \quad a\cdot(a+b) = a}$ Pellegrini

$\boxed{(R\wedge S)\vee R \sim R \quad \forall R,S \in P_m}$

$\boxed{(R\vee S)\wedge R \sim R \quad \forall R,S}$ Gavarini

LEGGE DI DE MORGAN : $\boxed{\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad e \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}}$ Pellegrini

$\boxed{(r \vee s)' \overset{\text{DE MORGAN}}{\sim} r' \wedge s', \quad (r \wedge s)' \overset{\text{DE MORGAN}}{\sim} r' \vee s',}$ Garavini

$(\omega \vee \omega' = 1, \ \omega + \omega' = 1)$