3/03/25

ANALISI MATEMATICA (O-Z)

ALESSANDRO GOFFI alessandro.goffi@unifi.it

- Testo di riferimento: Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli
  Epsilon 2, Mc Graw Hill
  Secondo corso di Analisi Matematica
- Tutorato: Mercoledì 16:30-18:00, aula 102 Morgagni
- Prove d'esame: vedi moodle — 5-12-19-26/03, 2-9/04, 7-14-21/05
- ESERCIZI "PERIODICI" (CON SOLUZIONE "GUIDATA" CARICATA DOPO 1-2 SETTIMANE)
- LEZIONE CON TABLET E PDF DISPONIBILE DOPO LA LEZIONE SU MOODLE

ARGOMENTI:

1. FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI: LIMITI E CONTINUITÀ
2. CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI + ESTREMI IN $\mathbb{R}^n$
3. INTEGRALI MULTIPLI
4. CURVE, CAMPI VETTORIALI E FUNZIONI DA $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}^m$
5. TEOREMI DELLA DIVERGENZA E DEL ROTORE ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$)
6. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI: LIMITI E CONTINUITÀ

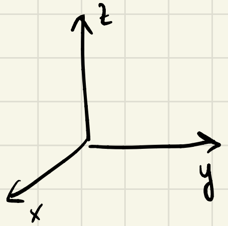
Struttura di $\mathbb{R}^n$

[Rif. Capitolo 1 B-DA-G]

Dal corso di geometria

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad , i = 1, \dots, n \}$$

in $\mathbb{R}^3$



è uno spazio vettoriale sul campo dei reali con le operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione per scalare

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \dots, 0)$ vettori base canonica

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{norma di } \underset{\substack{\| \\ (x_1, \dots, x_n)}}{x} \in \mathbb{R}^n$$

misura la lunghezza del vettore che congiunge $(x_1, \dots, x_n)$ con l'origine

La norma soddisfa le proprietà

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\qquad |x|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (dis. triangolare)

$x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|x\| = 1$ versore

- $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Funzioni reali di più variabili reali: alcune proprietà

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ si dice funzione reale di più variabili reali

Es. ① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (n = 3)$

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz + zy + z^2 x^2$$

② $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (n = 2)$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Oss. nel caso di una variabile (cfr. 1° parte del corso) è possibile visualizzare la funzione tramite il grafico cartesiano in $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^n$ $\qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$G(f) = \{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in A \}$$
$$\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Possiamo visualizzare f se è def. in $\mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^2$

<u>ES.</u> $f(x,y) = \log(1+x+y)$

$$G(f) = \{ (x, y, \log(1+x+y)) : x+y+1 > 0 \} \subset \mathbb{R}^3$$

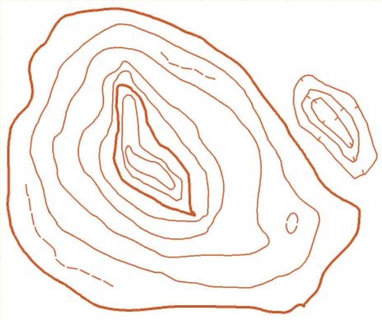
Altro modo : curve di livello

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma_c = \{ x \in A : f(x) = c \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

"ES."

Il rilievo di una montagna è il grafico della funzione che ad ogni punto della sup. terrestre, al di sotto della montagna, associa la quota della montagna sopra quel punto



Gli insiemi di livello si ottengono "tagliando" a quota c il grafico

(nelle cartine delle passeggiate le "curve" disegnate sono gli insiemi di livello della funzione "quota della montagna"; simile per le isobare nelle carte meteorologiche)

ESEMPI

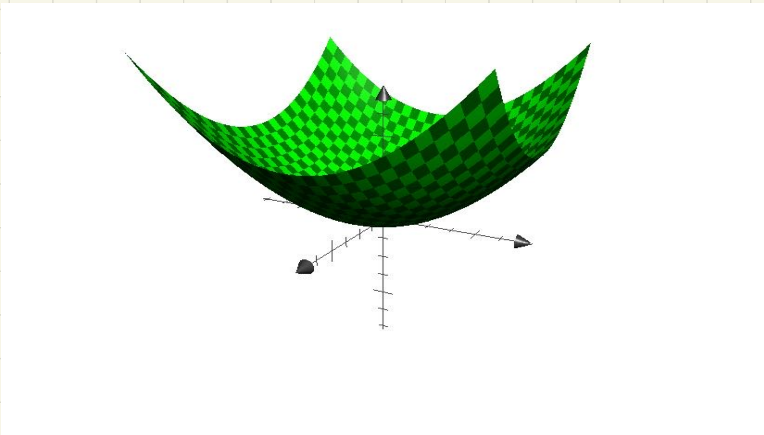
$f(x,y) = x^2 + y^2$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$
è ≥ 0

$$\Gamma_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c \} \quad , \ c \in \mathbb{R}$$

$c = 1, 2, \ldots$

sono le curve di livello (sono circ. centrate in $(0,0)$ e raggio $1, \sqrt{2}, \ldots$)

GRAFICO: PARABOLOIDE



DOMINIO

$n = 1 \rightsquigarrow D_f = I$ o unione di intervalli

Es. in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(x+y)}$$

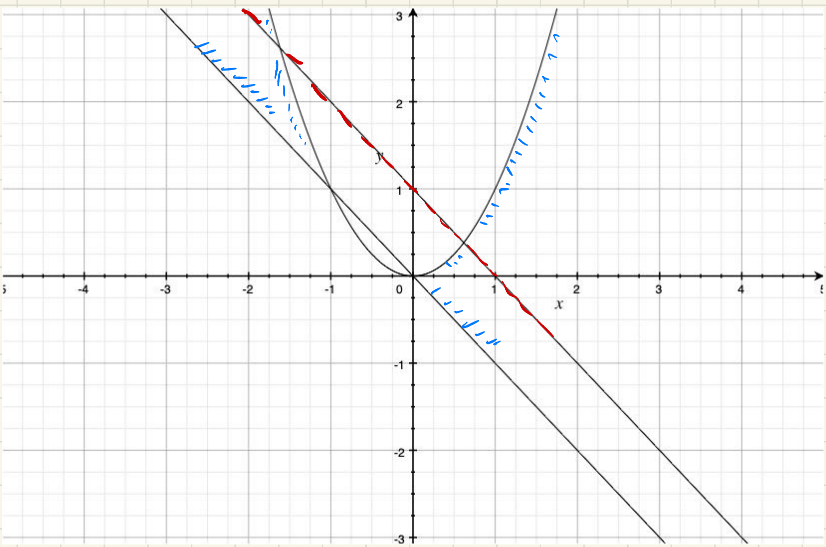
L'insieme di definizione

ⓐ $x^2 - y \geq 0$ (radicando non neg.)

ⓑ $x + y > 0$ (argomento del log > 0)

ⓒ $x + y \neq 1$ (denominatore ≠ 0)

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underset{a}{y \leq x^2},\ \underset{b}{y > -x},\ \underset{c}{y \neq -x+1}\}$$



ES! PER CASA Determinare il dominio e rappresentarlo graficamente

$$f_1(x,y) = 3x^2y + \sin(x \log y)$$

$$f_2(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{x^5 + x^3y^2 - x^3y - xy^3 - x^3 + xy}$$

SIMMETRIE DI $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (vedi p. 18 [B-DA-G])

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

D simmetrico rispetto a $y=0$ se $(x,-y) \in D$ per ogni $(x,y) \in D$

" " " " $x=0$ se $(-x,y) \in D$

" " " " O se $(-x,-y) \in D$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

è pari (dispari) rispetto a $y=0$ se D è simmetrico rispetto a $y=0$ e

$$f(x,-y) = f(x,y) \quad (f(x,-y) = -f(x,y)) \quad \forall (x,y) \in D$$

è pari (dispari) rispetto a $x=0$ se D è simmetrico rispetto a $x=0$ e

$$f(-x,y) = f(x,y) \quad (f(-x,y) = -f(x,y))$$

è pari (dispari) rispetto a O se D è simmetrico rispetto a O e

$$f(-x,-y)=f(x,y) \quad \left(f(-x,-y)=-f(x,y) \right)$$

ES.

$f(x,y)= x \sin(xy)$

- pari rispetto a $x=0$
- dispari rispetto a $y=0$
- dispari rispetto a O

Altro modo per rappresentare i grafici (p. 19 [B-DA-G])

<u>Def.</u> $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha simmetria di rotazione rispetto a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste $g: D_g \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = g(\|x - x_0\|) \quad \forall x \in D$$

es. il paraboloide di prima

$$\left.\begin{aligned} & f(x,y) = x^2 + y^2 \\ & x_0 = (0,0) \\ & g(t) = t^2 \end{aligned}\right\} \quad f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = x^2 + y^2$$

Fissata g, il grafico di f si ottiene tracciando il grafico di $g(t)$ nel semipiano $\{(x,0,z) : x \geq 0\}$, cioè disegnando i punti $(t, 0, g(t))$ e facendo ruotare il semipiano intorno all'asse z.

LIMITI

<u>Def.</u> (LIMITI PER VETTORI) Data una successione a valori in $\mathbb{R}^n$ $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $x^{(k)}$ tende a x_0, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\|x^{(k)} - x_0\| \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$

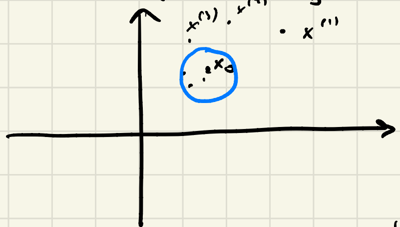
si scrive $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x_0$ o $x^{(k)} \to x_0$ per $k \to +\infty$

(per ogni intorno $B_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| < \varepsilon\}$

INTORNO SFERICO DI CENTRO x e RAGGIO ε

$x^{(k)} \in B_\varepsilon(x_0)$ definitivamente per $k \to +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{R}$ t.c. $\| x^{(k)} - x_0 \| < \varepsilon \quad \forall k > \nu$



<u>OSS.</u> si verifica che una successione di vettori converge se e solo se converge componente per componente al vettore x_0.

<u>Def.</u> Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice <u>punto di accumulazione</u> di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se esiste una successione $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ t.c.

- $x^{(k)} \in A \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $x^{(k)} \neq x_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x_0$

<u>Def.</u> (LIMITI PER FUNZIONI) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ punto di accumulazione (al finito $x_0 \in \mathbb{R}^n$)

Diciamo che f tende a ℓ per x tendente a x_0 se per ogni successione $\{x^{(k)}\}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ con

$\{x^{(k)}\} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x_0$ si ha

$$\lim_{k \to +\infty} f(x^{(k)}) = \ell$$

si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{o} \quad f(x) \to \ell \text{ per } x \to x_0$$

OSS. In più variabili possiamo dare la definizione "immediatamente" solo quando $x_0 \in \mathbb{R}^n$

"∞" non c'è un ordinamento $\Rightarrow$ non posso definire il limite a $+\infty$ nel modo classico

"∞" come il punto infinitamente lontano dall'osservatore in qualunque direzione.

nel caso $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (con la def. usuale)

① $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in A$
$\|x - x_0\| < \delta$

② se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è definita per $\|x\|$ abbastanza grande

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = L$$

$(\|(x,y)\|)$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| > R$

si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$

Definizioni simili quando $L = \pm\infty$ $\qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ ($n=1$)

ES $\displaystyle \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} (2x^2 + 5y^2) = +\infty$

Fissato $M > 0$, dobbiamo trovare $R > 0$ t.c. se $\|(x,y)\| > R$ si ha

$$f(x,y) > M$$

$$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 \geq 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2+y^2) \underset{\uparrow}{>} M$$

Ricorda: $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

basta prendere $R = \sqrt{\frac{M}{2}}$

Oss. [p. 22-23 [B-DA-G]]

- Unicità del limite
- Permanenza del segno
- Teorema dei carabinieri (se $g \leq f \leq h$ defin. per $x \to x_0$
  e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$
  $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
- Regole algebra dei limiti
- Definizione di continuità $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right)$

[p. 27 B-DA-G]

CALCOLO DEI LIMITI

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{2^{y+1} \cos x}{x^2+4}}_{f_a(x,y)}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}}_{f_b(x,y)}$

(a) f_a è continua in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y) = f(0,0) = \frac{2\cos 0}{0+4} = \frac{1}{2}$$

(b) $\left[\frac{0}{0}\right]$

1° tentativo SBAGLIATO !!!

$$f_b(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$$

• per $x \to 0$ $\quad \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} \to \frac{y^4}{y^2} = y^2$

poi $y \to 0$ $\quad y^2 \to 0$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f_b(x,y)\right) = 0$$

• per $y \to 0$ $\quad f_b \to \frac{1}{x^2}$

poi $x \to 0$ $\quad \frac{1}{x^2} \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_b(x,y)\right) = +\infty$$

N.B. non si possono calcolare i limiti in 2 variabili facendo tendere f al punto limite separatamente

2° tentativo SBAGLIATO!

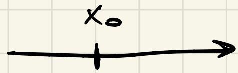
Per $(x,y) \to (0,0)$ $\quad x^2+y^4 \sim x^2$

$$f_b \sim \frac{x^2}{x^4+y^2}$$

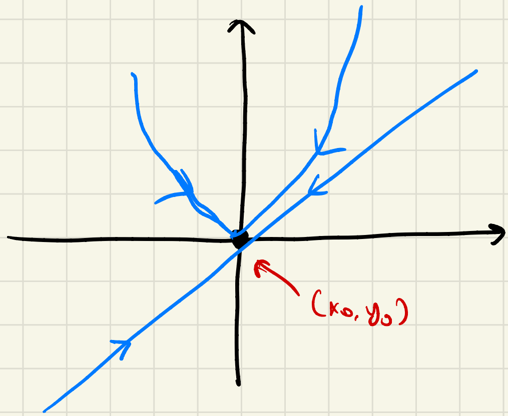
NON FAREMO USO DI STIME ASINTOTICHE

Oss. (A)

dim. 1



dim. 2



Possiamo avvicinarci a (x_0, y_0) da più direzioni e in più modi.

Oss. (B) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, questo valore si deve ottenere lungo qualsiasi direzione / percorso

Prop. Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, allora per ogni sottoinsieme C del dominio di f si deve avere

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C}} f(x,y) = L \qquad f(x,y)\Big|_{y=x} = \underset{x\to 0}{f(x,x)}$$

$f(x,0)$

$f(0,y)$

Utile per 2 motivi

1. Individuare il candidato limite
2. Dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \ell \,?$$

$y = mx$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$

$\uparrow$

longo le rette per $(0,0)$ $\qquad$ dipende da $m\in\mathbb{R}$

2 Se $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ esiste ma dipende da $m\in\mathbb{R}$

$$\underset{\text{Prop.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

fornisce un candidato limite, cfr 1

<u>Corollario</u> (Condizione necessaria) affinché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esista è necessario (ma non suff.) che esistano e siano uguali $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ al variare di $m\in\mathbb{R}$

<u>Es.</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = 0 \qquad \forall m\in\mathbb{R}$$

se $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Questo dimostra che la condizione del corollario è necessaria ma non suff. per l'esistenza del limite

N.B. La scelta della restrizione $y = x^2$ per trovare un limite $\neq 0$ non è casuale: sostituendo $y = x^2$ ristabilisco il rapporto tra x e y.

(sia al num. che al den. il rapporto tra il grado di x e di y è 2 a 1).