4/03/25

TECNICHE PER DIM. ESISTENZA DEI LIMITI

① COORDINATE POLARI

<u>Ricorda</u> P si può rappresentare tramite le coordinate polari

$$(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\vartheta = \frac{y}{x}$$

<u>Prop.</u> Se esiste $L \in \mathbb{R}$ e $\varphi(\rho)$ (INDIPENDENTE DA ϑ!)

t.c.

$$|f(\underbrace{\rho\cos\vartheta}_{x}, \underbrace{\rho\sin\vartheta}_{y}) - L| \leq \varphi(\rho), \quad \varphi(\rho) \to 0 \text{ per } \rho \to 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$

<u>ES.</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \qquad \frac{2x^2(mx)}{x^2+m^2x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad L$$

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{2\rho^2\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - L| = \frac{2\rho^3|\cos^2\theta\sin\theta|}{\rho^2}$$

$$= 2\rho\,|\cos^2\theta\sin\theta|$$

$$\underset{\uparrow}{\leq}\ 2\rho \xrightarrow{\rho\to 0^+} 0$$

$$2\rho = \varphi(\rho)$$

$\cos^2\theta \cdot \sin\theta \leq 1$

$|ab| \leq |a||b|$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \qquad \rho\to 0^+ \iff (x,y)\to(0,0)$$

<u>Oss.</u> $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Si dimostra anche la non-esist. del limite se φ dipende anche da θ.

② MAGGIORAZIONI + T. DEL CONFRONTO

$$0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y) \to 0 \qquad (x,y)\to(0,0)$$

$$e^z \geq 1+z, \quad \log z \leq z-1, \quad |\sin t| \leq |t| \quad t\in\mathbb{R}$$

$$a,b>0 \qquad ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2); \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

YOUNG

$p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1$$

ES. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3 - 2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2} = L \ ?$$

$$L = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}}_{L_1} - \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2}}_{L_2}$$

purché L_1, L_2 esistono e non diano luogo e f. i. $[\infty - \infty]$

L_1

$$0 \leq \overbrace{\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right|}^{|f(x,y)|} = \left|\frac{y^2\, xy}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leq y^2 \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Young} \\ p=q=2 \\ a=|x| \\ b=|y|}}{\leq} y^2 \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}y^2}_{g(x,y)} \to 0$$

$g(x,y) = \frac{1}{2}y^2$ è continua

$L_1 = 0$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$

$\boxed{L_2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2}}^{f_2}$$

$$|\cos(x+2y)| \le 1$$

$$|f_2(x,y)| \le 2\frac{|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2}$$

$$\underset{|\sin t|\le|t|}{\le} \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} = 2|x|\frac{|x||y|}{x^2+y^2}$$

$$\underset{\text{Young}}{\le} 2|x|\,\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \to 0$$

$$\frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \underset{x^2\le x^2+y^2}{\le} \frac{2(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = 2|y| \to 0$$

RIASSUNTO

- Per calcolare il valore di un limite, la tecnica delle restrizioni consente solo di provare la non-esist. o trovare un candidato ℓ.

Per calcolare i limiti

(1) COORDINATE POLARI (anche per mostrare la non esistenza)

② T. DEL CONFRONTO

ES. X CASA

(i) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y) + x^2 + y^2}{x^2+y^2} = ?$$

Usare ① e ② e confrontare i risultati

(ii) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2}$$

OSS.

- Se la funzione è continua è suff. usare la def.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \underset{\substack{\shortparallel \\ f(2,3)}}{\frac{2^2-3^2}{2^2+3^2}} = -\frac{5}{13}$$

- Se la funzione ha una struttura dove posso separare delle componenti, conviene studiarle separatamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(|x|+y^2)}{|x|+y^2}$$

$$f(x,y) = g(h(x,y)) \qquad h(x,y) = |x| + y^2$$

$$g(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$h(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$

$\left(\underset{\text{continua}}{h(0,0)} \right)$

$$\lim_{t \to 0} \underset{\frac{\sin t}{t}}{\underset{\|}{g(t)}} = 1$$

- Nelle coordinate polari si cerca

$$\boxed{\varphi(\rho)}$$

Per eliminare la dipendenza da θ studiando la funzione risp. a θ come in Analisi 1

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+xy}$$

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = ? \qquad \rho \to +\infty$$

$$\left| f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right| = \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}$$

$$\leq \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{1}{|1+\sin\theta\cos\theta|}}_{\leq C\ ?} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

Cerco $\tilde{C} > 0$ t.c. $\qquad |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \frac{\tilde{C}}{\rho} \to 0$

$$h(\theta) = \frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta} \leq \tilde{C} = h(\tilde{\theta})$$ se $\exists \tilde{\theta}$ $h(\theta) \leq h(\tilde{\theta})$

$$z(\theta) = 1 + \sin\theta\cos\theta \geq \frac{1}{\tilde{C}} > 0 \qquad \theta \in (0, 2\pi)$$

se $z(\theta)$ ha un min. globale $\bar{\theta}$

$$z(\theta) \geq \underbrace{z(\bar{\theta})}_{=\frac{1}{\tilde{C}}} \qquad \forall \theta \in (0, 2\pi)$$

ALCUNI CONCETTI DI TOPOLOGIA

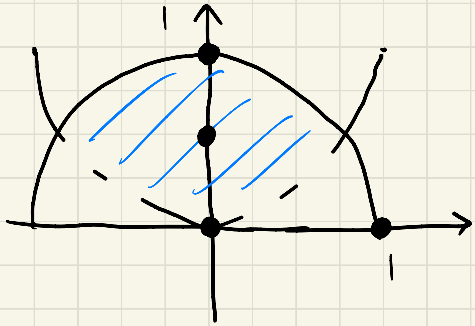
__Def.__ Si dice INTORNO SFERICO di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| < r \}$$

__Def.__ $E \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice

- INTERNO ad E se esiste un intorno sferico di x_0 contenuto in E
- ESTERNO ad E " " " " " " " contenuto in E^c
- PUNTO DI FRONTIERA se ogni intorno sferico di x_0 contiene almeno un punto di E e uno di E^c

Es. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 , y > x^2\}$



$(0,\frac{1}{2})$ è interno a E;

$(1,0)$ è esterno a E

$(0,0)$ è di frontiera (non appartiene a E)

$(0,1)$ è di frontiera (appartiene a E)

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$

opeṙto, se ogni punto è interno a E

chiuso, se il complementare è aperto

ESEMPI $E_i \subseteq \mathbb{R}^2$

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ è aperto

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ " "

$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ è chiuso

$E_4 = \mathbb{R}^2$ è aperto ($\emptyset$ chiuso)

$E_5 = \emptyset$ è aperto ($\mathbb{R}^2$ chiuso)

$n=1$ (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ aperti di $\mathbb{R}$

$[a,b]$ chiusi di $\mathbb{R}$

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$

<u>Def.</u> Si dice INTORNO di x_0 un qualsiasi aperto contenente x_0

(U)

<u>OSS.</u> Un intorno sferico $B_r(x_0)$ è un intorno di x_0

Ogni intorno U contiene almeno un intorno sferico di x_0

<u>Prop.</u> $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- interno a E se esiste un intorno di x_0 contenuto in E

esterno

frontiera

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

f continua in $x_0 \in A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A \text{ t.c. } \|x - x_0\| < \delta$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x + y + 2 = g & x \geq 0 \qquad x \in I_1 \\ x^2 + 3y = h & x < 0 \qquad x \in I_2 \end{cases}$$

$(x, y) \quad x \neq 0$

$(\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}}, y_0)$ $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)}$

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \\ L & \end{cases}$$

$$\cancel{3x_0} + y_0 + 2 = \cancel{x_0^2} + 3y_0$$

$$2y_0 = 2 \implies y_0 = 1 \qquad (0, 1)$$

$(0, y_0)$

$y_0 \neq 1$

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ E si dice LIMITATO se esiste una costante $K > 0$ t.c.

$$\boxed{\|x\| \leq K \quad \forall x \in E}$$

Un insieme chiuso e limitato si dice COMPATTO

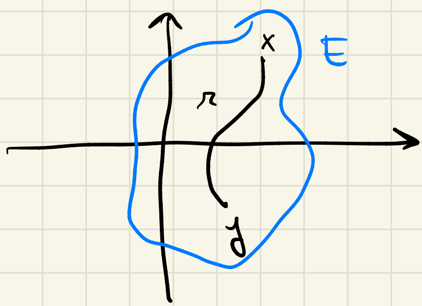
Teorema (di Weierstrass) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $f: E \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette max e min su E (x_m e x_M) $\quad x_m \in \mathbb{R}^n \quad ((x_m)_1, \dots, (x_m)_n)$

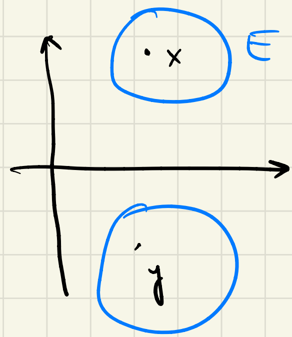
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in E$$

<u>Def.</u> $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONNESSO (PER ARCHI) se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una funzione continua $r: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ (arco) t.c.

$r(0) = x$
$r(1) = y$

$r(t) \in E \quad \forall t \in [0,1]$ (r è contenuto in E)





<u>Teorema</u> (degli zeri) $E \subset \mathbb{R}^n$ connesso per archi

$f: E \to \mathbb{R}$. Se $x, y \in E$ t.c.

$$f(x) > 0 \qquad f(y) < 0$$

$$\Rightarrow \exists z \in E \text{ t.c. } f(z) = 0$$

ES. X CASA

ⓐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$ $\qquad [0]$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3+x^5}{x^2+y^4}$ [$\nexists$]

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2 + 2y^{1/3}\sin^2 x}{x^2+y^2} \right) e^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ [0]

CALCOLO DIFFERENZIALE

(1) Derivate parziali, piano tangente, differenziabilità

$\boxed{n=1}$ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Domanda: cosa significa "incremento" in più variabili?

Soluzione: $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Tengo costante

Idea: fisso $y=y_0$

(a) $x \longmapsto f(x,y_0)$ risp. a x

fisso $x=x_0$

(b) $y \longmapsto f(x_0,y)$ " " y

(a) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

$\boxed{f_x \quad \partial_x f \quad D_x f \quad D_1 f}$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A y

NAVIER - STOKES CLAY INSTITUTE

<u>Def.</u> Il vettore che ha per componenti le derivate parziali di f rispetto a (x_0,y_0) si dice GRADIENTE di f in (x_0,y_0)

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0) \right)$$

$$\partial_x f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

<u>Es.</u> $f(x,y) = x^2 y^3$

$\partial_x f(x,y)$?

$$\partial_x (x^2 y^3) = 2xy^3 \left[\Big|_{(x,y)=(1,2)} = 16 \right]$$

$\partial_x f(1,2)$?

$$\partial_x f(1,2) = \partial_x f(x,2)\Big|_{x=1} = \partial_x (x^2 8)\Big|_{x=1}$$

$$= 16x \Big|_{x=1} = 16$$

ES. / OSS. In alcuni casi è necessario applicare la def.

$f(x,y) = y\sqrt{x}$ $\qquad\qquad$ $\partial_x f(0,0)$?

$$\partial_x (y\sqrt{x}) = \frac{y}{2\sqrt{x}} \qquad \text{in } (0,0) \qquad "\left[\frac{0}{0}\right]"$$

In questo caso devo usare la def.

$$\partial_x (y\sqrt{x})\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \partial_x(\underbrace{0\cdot\sqrt{x}}_{f(x,0)})\Big|_{x=0} = \partial_x(0) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

(x,y) $\quad$ (x,y,z) $\quad$ $(x_1,\dots,x_n)$

$\boxed{n > 1}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underset{\in\mathbb{R}^n}{x^0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + he_i) - f(x^0)}{h}$$

$e_i = (0 \; \dots \; 1 \; 0 \; 0)$

$e_1 = (1,0) \qquad \partial_{x_1}$

$e_2 = (0,1) \qquad \partial_{x_2}$

$x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_n)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, \overbrace{x_i^0 + h\cdot 1}^{he_i}, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

(*)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto

$\Downarrow$

$f(x_0 + he_i)$ $\qquad x_0 + he_i \in A$

Def. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice DERIVABILE in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se in quel punto esistono tutte le derivate parziali

Se f è derivabile

$$\underbrace{\nabla f(x)}_{\in \mathbb{R}^n} = \left(\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x)\right)$$

ES. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\bullet$ $f(x) = e^{-\|x\|^2} = e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$

$$\partial_{x_i} f = \partial_{x_i}\left(e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) = -2x_i\, e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$= -2x_i\, e^{-\|x\|^2} \qquad (1)$$

f derivabile in $\mathbb{R}^n$

- $f(x) = e^{\|x\|}$

$$\partial_{x_i} f = \partial_{x_i}\left(e^{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}\right) = \frac{\cancel{2}x_i}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}\, e^{\|x\|} \qquad (2)$$

$$= \frac{x_i}{\|x\|}\, e^{\|x\|} \qquad \text{deriv. in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

in $x = 0$

$$\partial_{x_i} f = \partial_{x_i} \left(e^{\|x\|}\right)\Big|_{x=0} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{e^{|h|}-1}{h} \quad \nexists$$

Simile

$e^{-\|x\|}$

$n=1$ $\quad g(t) = e^{-t^2}$ è deriv. ovunque su $\mathbb{R}$

$g(t) = e^{-|t|}$ " " " su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ES.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\partial_x f(0,0)$?

$f(0,0) = 1 \Rightarrow \partial_x f(0,0) = 0$

NOOOO!!

$$\partial_x f(0,0) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0)}^{f(h,0)} - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2-1}{h} \quad \nexists$$

$n=1$ $\quad f$ deriv. $\Rightarrow f$ continua

Domanda: è vero in $n=2$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(h,0)}} - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = 0 \qquad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ? \qquad f(0,0) = 0$$

$$f|_{y=x} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

OSS. f def. in precedenza è un esempio di funzione non continua in un punto e per la quale esistono le derivate parziali

$\Rightarrow$ la nozione di derivabilità è troppo debole per avere le proprietà di Analisi 1

ⓐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$

$$\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| \leq g(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \left|\frac{x^3}{\underbrace{x^2+y^4}_{\geq 0}}\right| + \left|\frac{y^5}{\underbrace{x^2+y^4}_{\geq 0}}\right|$$

dis. triangolare

$$x^2 \leq x^2+y^4 \qquad \frac{1}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{x^2} \qquad \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y^5|}{y^4}$$

$$y^4 \leq x^2+y^4 \qquad \frac{1}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{y^4} \qquad = \underbrace{|x| + |y|}_{g(x,y)\to 0}$$

$g(0,0)$

$$\Rightarrow f \to 0 \quad (x,y)\to(0,0)$$

ⓑ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3+x^5}{x^2+y^4}$

$$\left|\frac{y^3+x^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{y^3}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{x^5}{x^2+y^4}\right|$$

$$\leq \frac{1}{|y|} + |x|^3$$

$$f(x,x) \underset{\underset{y=x}{\uparrow}}{=} \frac{x^3+x^5}{x^2+x^4} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$f(y^2,y) \underset{\underset{x=y^2}{\uparrow}}{=} \frac{y^3+y^{10}}{y^4+y^4} \sim \frac{y^3}{2y^4} = \frac{1}{2y} \to \pm\infty$$

$\nexists$ lim.