



Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

A3 - Sistemas y señales I

Trabajo práctico Nro.1: Introducción a Matlab

Federico, Scheytt - Joaquín, Gonzalez Targon

Mayo 2023

Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol es un circuito compuesto por una inductancia L , un capacitor C , una fuente de corriente continua I_0 y un diodo túnel conectados en paralelo.

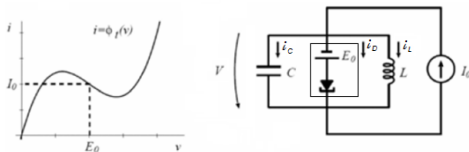


Figura: Circuito oscilador de Van der Pol

La relación VA del diodo es de tipo cubica, de la forma:

$$i_D = \gamma v^3 - \alpha v$$

La principal característica de este circuito es su respuesta oscilatoria con amortiguamiento **no lineal**, debido al comportamiento no lineal del diodo túnel.

Oscilador de Van der Pol

La evolución temporal de este circuito oscilador puede determinarse por la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{1}{C}(3\gamma\nu^2 - \alpha)\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{LC}\nu = 0$$

Para un determinado juego de valores de parámetros, la **ecuación diferencial no lineal homogénea de segundo orden** anterior puede escribirse como:

$$\ddot{\nu} - \varepsilon(1 - \nu^2)\dot{\nu} + \nu = 0$$

Podemos a su vez expresar esta ecuación como dos ecuaciones diferenciales de primer orden, definiendo las variables de estado $x_1 = \nu$ y $x_2 = \dot{\nu}$, como se expresa a continuación:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Oscilador de Van der Pol

Una forma de discretizar una ecuación diferencial de primer orden para que puedan ser implementada en un algoritmo es discretizar el tiempo continuo de la forma $t = nT$ (donde n es entero y T representa el periodo de muestreo) y aproximar la derivada respecto al tiempo por el cociente incremental.

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(n+1) - x(n)}{T}$$

Esta aproximación es conocida como la **aproximación de Euler** de primer orden. Dicha aproximación mejora a medida que T se hace más pequeño.

Por lo tanto las **ecuaciones en diferencias** asociadas al sistema de ecuaciones en tiempo continuo resultan:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + T \cdot x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_2(n) + T \cdot (\varepsilon(1 - x_1(n)^2)x_2(n) - x_1(n)) \end{cases}$$

Oscilador de Van der Pol

Los puntos de equilibrio del sistema son valores de x_1 y x_2 que verifican simultáneamente que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Remplazando dichos valores en la ecuación de estados hallada obtenemos que:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $P(0,0)$ representa un punto de equilibrio del sistema.

$$P_{\text{equilibrio}} = (0,0)$$

Oscilador de Van der Pol

Realizamos un script-file usando Matlab que implemente el sistema en tiempo discreto que determinamos anteriormente, para un paso de integración T , condiciones iniciales $(0, 1)$ y $\varepsilon = [0, 1, 10, 50]$.

```
%% Implementacion del metodo
for i = 1:length(T)
    % Discretizacion
    t = 0:T(i):tf-T(i);
    x1 = [x1i, zeros(1,length(t)-2)];
    x2 = [x2i, zeros(1,length(t)-2)];
    for j = 1:length(e)
        for n = 1:length(t)-1
            % Aproximacion de Euler
            x1(n+1) = x1(n) + T(i).*x2(n);
            x2(n+1) = x2(n) + T(i).*(e(j).*((1-(x1(n)).^2).*x2(n)) - x1(n));
        end
        % Graficos
        f_plot(i,j,x1,x2,e,t);
    end
end
```

Figura: Implementación del método

Oscilador de Van der Pol

En particular para $\mathbf{T} = \mathbf{0,001s}$ obtuvimos los siguientes resultados.

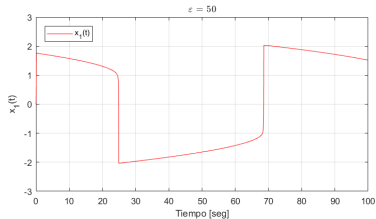
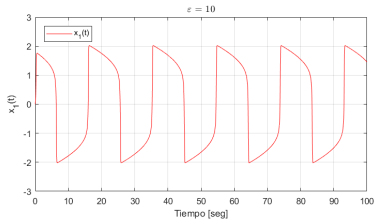
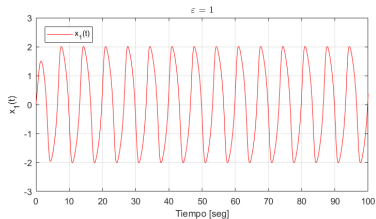
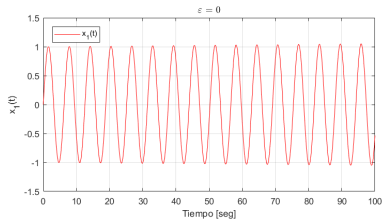


Figura: Diferentes respuestas en función de ε

Oscilador de Van der Pol

Podemos ver que para $T = 0,001s$ la señal de salida presenta un comportamiento periódico, donde a medida que ε aumenta el periodo de la señal de salida aumenta. Sabemos que cuando $\varepsilon = 0$ el sistema es denominado como Oscilador Armónico, para el cual las trayectorias periódicas son sinusoidales, lo cual es apreciable en la gráfica obtenida.

Oscilador de Van der Pol

Ahora para $T = 0,1s$ obtuvimos los siguientes resultados.

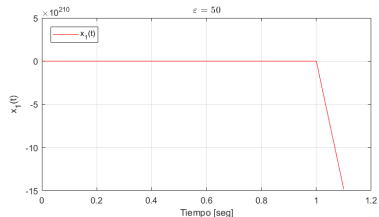
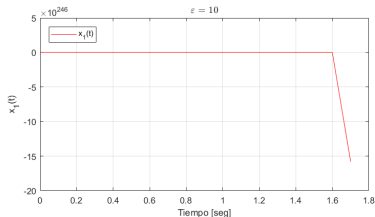
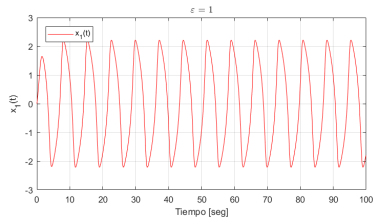
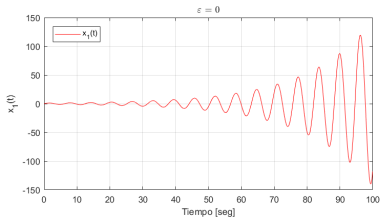


Figura: Diferentes respuestas en función de ε

Oscilador de Van der Pol

Podemos observar que la aproximación de la derivada por el cociente incremental es buena si el paso de integración numérica T es pequeño. Para el caso de que $T = 0,1s$ vemos que se produce una pérdida de información de la respuesta al sistema. Notamos además que el método tiende a diverger para valores de ε grandes, en cada iteración se comete un error de aproximación de la derivada, que se va acumulando. Entonces si el tiempo total de integración numérica es grande, el error acumulado va a ser grande y los resultados serán poco confiables.

Oscilador de Van der Pol

Luego implementar nuestro sistema en forma de *function* — *file*.

```
% function_P1(x1i, x2i, T, e, tf): Funcion que simula el comportamiento de un Oscilador de Van der
% Pol, mediante la implementacion del metodo de Euler para la aproximacion de las derivadas de
% primer orden correspondientes al sistema de ecuaciones de estado que representan la dinamica
% fisica del sistema.
%
% EDO no lineal que caracteriza la respuesta del sistema:
%      v''(t) - e(1-v(t)^2)v'(t) + v(t) = 0
%
% Ecuaciones de estado:
%      x1(t) = v(t)
%      x2(t) = v'(t)
%
% EDO en funcion de las variables de estado:
%      x1'(t) = x2
%      x2'(t) = e(1-x1(t)^2)x2'(t) + x1(t)
%
% INPUT:
%      x1i: Valor inicial de x1
%      x2i: Valor inicial de x2
%      T:   Periodo de muestreo en segundos
%      e:   Parametro asociado al amortiguamiento del sistema
%      tf:  Tiempo total de la simulacion en segundos
%
% OUTPUT:
%      x1: Vector de resultados x1
%      x2: Vector de resultados x2
%
% Author: Federicio Scheytt - Joaquin Gonzalez Targon
% Date: Mayo 2023
```

Figura: Help del la función

El **plano de fase** de un sistema es una representación geométrica en un plano de un par de variables para distintos instantes de tiempo, es decir, cada punto de un plano de fase representa el valor de ese par de variables en un instante de tiempo dado. Así, si representamos los valores de dicho par de variables para distintos instantes de tiempo en un intervalo, por ejemplo $t \in [0, t_f]$, obtendremos una trayectoria. Para el caso de sistemas no lineales, como el que se estudia en este problema dicha trayectoria podría ser una curva cerrada periódica o tender luego de un tiempo suficientemente largo a una trayectoria cerrada. Si esta trayectoria cerrada es aislada se denomina **ciclo límite**.

Mediante la función descrita anteriormente nos proponemos dibujar las trayectorias en el plano de fase $x_2 = f(x_1)$, inicializando el sistema desde 4 diferentes condiciones iniciales, para los valores conocidos de T y ε .

Oscilador de Van der Pol

Para las condiciones iniciales dadas obtenemos:

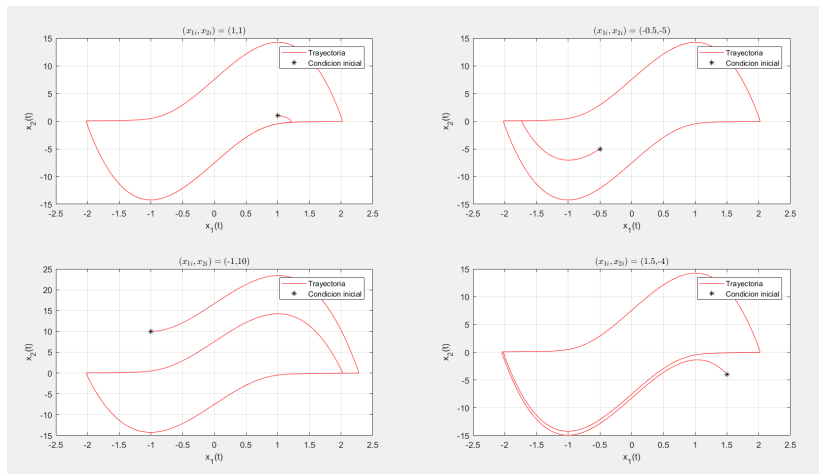


Figura: Representación en plano de fase

Oscilador de Van der Pol

Realizando todas las curvas en la misma grafica:

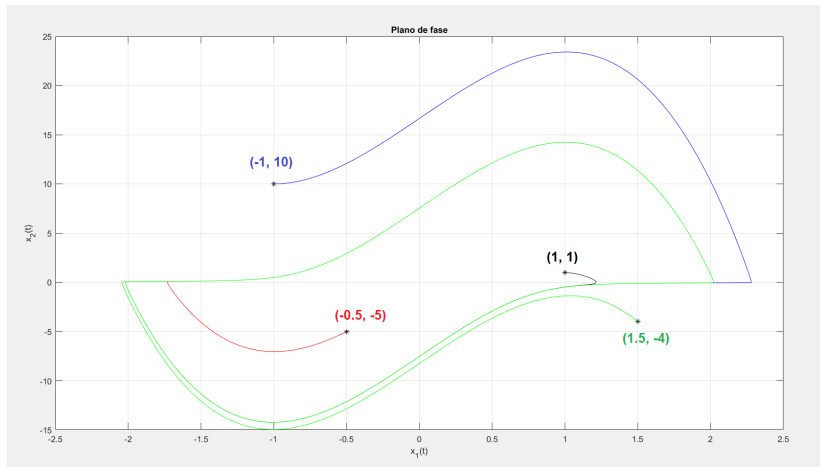


Figura: Representación en plano de fase

Oscilador de Van der Pol

Las trayectorias que describen los puntos obtenidos por la función a partir de la iteración de Euler, tienden a estabilizarse en lo que denominamos **ciclo límite**, que es una trayectoria cerrada y aislada. Por lo tanto podemos decir que este ciclo límite es estable y funciona como atractor de las trayectorias.

En el caso de tomar como condiciones iniciales las coordenadas $(0,0)$, es decir el punto de equilibrio encontrado anteriormente, obtenemos que el sistema ya está estable y no va a tener una trayectoria que se estabilice en el ciclo límite. En el caso de tomar un punto cercano al equilibrio, la trayectoria no se va a estabilizar en el $(0,0)$, sino que también va a tender a estabilizarse en el ciclo límite.

Radar para medición de velocidad de vehículos

En los dispositivos usados para sensar el exceso de velocidad en vehículos se utiliza el principio del radar para medir la distancia al vehículo en dos instantes de tiempo T_1 y T_2 separados un intervalo conocido $\Delta T = T_2 - T_1$. Esto permite computar la velocidad del vehículo, ya que se conoce la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

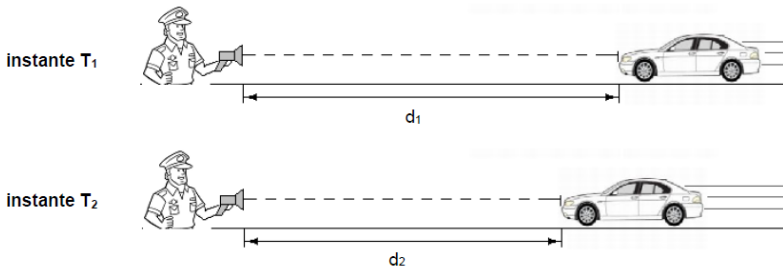


Figura: Sensado de velocidad de vehículos

Radar para medición de velocidad de vehículos

En el radar, la señal recibida y es una versión retrasada y atenuada de la señal transmitida x , corrupta por ruido, es decir:

$$y(n) = \alpha x(n - D) + w(n)$$

donde:

- $w(n)$ es una componente de ruido aditivo no correlacionado con la señal transmitida.
- D es el tiempo (expresado en muestras) que tarda la señal en alcanzar el vehículo y volver al radar.
- α es un coeficiente de atenuación ($0 < \alpha < 1$).

Consideramos que la frecuencia de muestreo del radar es $F_s = 100 \text{ MHz}$, que la velocidad de propagación de la onda electromagnética es $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, y que $\Delta T = 16\text{s}$

Radar para medición de velocidad de vehículos

Para calcular cuales son las distancias d_1 y d_2 planteamos la siguiente correlación:

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha x(n+l-D) + w(n+l)]x(n)$$

$$r_{yx}(l) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l-D)x(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n+l)x(n)$$

$$r_{yx}(l) = \alpha r_{xx}(l-D) + r_{wx}(l)$$

Como la señal $x(n)$ no esta correlacionada con el ruido $w(n)$ entonces:

$$r_{wx}(l) \approx 0$$

Por lo tanto resulta que:

$$r_{yx}(l) \approx \alpha r_{xx}(l-D)$$

Radar para medición de velocidad de vehículos

Esta metodología es implementable para ambas señales x_1 y x_2 por lo que a continuación se muestra como realizamos la representación de la correlación para cada una de las señales.

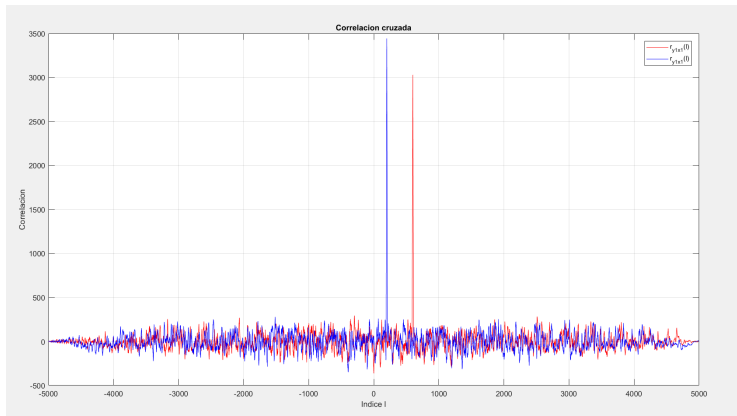


Figura: Gráfico de correlación

Radar para medición de velocidad de vehículos

Además representamos las auto correlaciones correspondientes ($r_{xx}(l)$) para ambas señales:

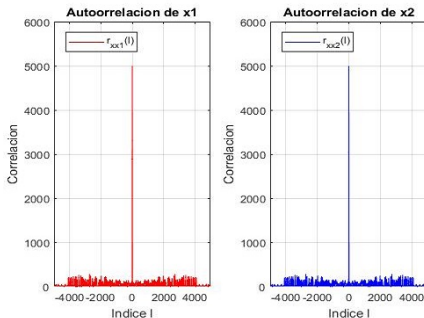


Figura: Gráfico de autocorrelación

La autocorrelación tiene un máximo en cero, lo cual está relacionado con la energía de la señal, por lo que vemos la correlación cruzada tendrá un máximo en D.

Radar para medición de velocidad de vehículos

La correlación cruzada entre la señal reflejada y la transmitida ($r_{yx}(l)$):

$$r_{yx}(l) \approx \alpha r_{xx}(l - D)$$

resulta una versión atenuada α y desplazada el retardo de transmisión D , de la autocorrelación de la señal transmitida $r_{xx}(l)$. Como $r_{xx}(l)$ tiene un máximo en cero, la correlación cruzada tendrá un máximo en D , por lo que este retardo en muestras puede medirse en la gráfica de $r_{yx}(l)$.

Luego la distancia al vehículo puede calcularse como:

$$d = \frac{cDT_s}{2}$$

Calculando para cada una de las señales x_1 y x_2 obtenemos:

$$\begin{cases} d_1 = 900 \text{ m} \\ d_2 = 600 \text{ m} \end{cases}$$

Radar para medición de velocidad de vehículos

Determinamos cual es la velocidad del vehículo de la siguiente manera:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Por lo tanto a continuación obtenemos el valor de la variación de distancia entre los dos instantes.

$$\Delta d = d_1 - d_2$$

Conocido el valor de la variación temporal entre ambas señales.

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = 37,5 \text{ m/s} = 135 \text{ Km/h}$$

$$v = 135 \text{ Km/h}$$