

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

Teoría de Sistemas y Señales – (A3)



UNR Universidad
Nacional de Rosario

Problema 1:	3.40
Problema 2:	4.00
Formato:	1.50
Nota:	8.90
Corrigió:	GDS

Cisana, Joaquín – C-6756/3
Dimaio, Bruno – D-4079/7

13-6-2022

ÍNDICE

Introducción.....	2
Problema N° 1: Sistema Mecánico Rotacional.....	3
Análisis matemático del problema.....	3
Obtención de las ecuaciones de estado.....	4
Implementación numérica del problema	5
Ode-File “SMR.m”	6
Script “Respuesta.m”	6
Script “Funcion_Transferencia.m”	8
Script “Polos_Ceros.m”	10
Script “Comparacion_1.m”	12
Problema N° 2: Sistema de Suspensión Magnética	15
Análisis matemático del problema.....	15
Implementación numérica del problema	16
Script “Datos_1.m”	17
Diagrama de Bloques en Simulink.....	17
Script “Datos_2.m”	21
Diagrama de Bloques Lineal en Simulink	22
Script “Comparacion_2.m”	25
Obtención de la función transferencia	27
Script “Bode.m”	30
Conclusión.....	34



Introducción

Mediante el software de simulación y análisis matemático Matlab podremos ver y experimentar acerca de cómo van a ser las respuestas de un sistema ante distintas excitaciones. Para los problemas que vamos a estudiar, aprovecharemos de él, las herramientas que nos brinda para la manipulación de matrices, realización de gráficos y análisis de señales, entre otros.

En el desarrollo del siguiente trabajo práctico nos propusimos los siguientes objetivos:

- Conocer y experimentar los comandos de Matlab que posibilitan la representación y cálculo matricial.
- Generación y visualización de señales.
- Creación de programas en Matlab (llamados M-files y ODE-files) en las modalidades function-files y script-files.
- Ingreso de datos y almacenamiento de los resultados.
- Conocer y experimentar con las distintas funciones que nos ofrece Matlab y con la aplicación Simulink para simular la evolución de un sistema dado.

En dicho trabajo se realizan dos problemas. El primero consta de conocer y analizar los aspectos relacionados con la respuesta en frecuencia de un sistema conformado por dos masas y dos resortes de torsión. En el segundo problema, se pretende determinar la respuesta de un sistema de suspensión electromagnética a través de la realización del diagrama de bloques correspondiente.



Problema N° 1: Sistema Mecánico Rotacional



Ilustración 2: Sistema Mecánico Rotacional. Modelo 205a ECP.

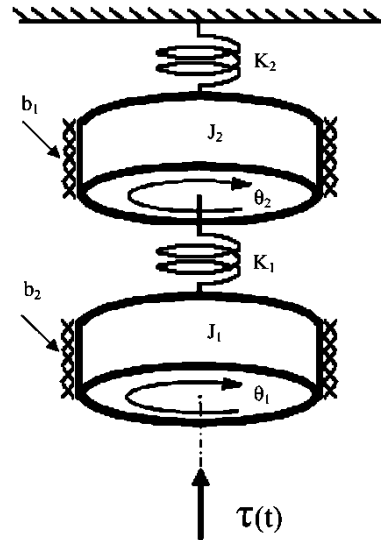


Ilustración 1: Modelo simplificado del sistema.

Se dispone de un sistema mecánico rotacional que permite formar varias configuraciones a partir de la conexión, a través de resortes de torsión, de hasta tres discos cuyas masas se pueden modificar y un servomotor que permite simular la aplicación de distintos torques a dicha conexión.

La idea de este problema es estudiar la respuesta de nuestro sistema a una excitación dada por una función del tiempo que representa el torque del servomotor sobre el mismo.

Análisis matemático del problema

En primer lugar, procedemos a realizar un estudio matemático del problema y de las variables que involucra.

En este problema contamos con dos masas y dos resortes de torsión, por lo que, no se trata de un sistema **SISO** (**Single Input - Single Output**), sino que tenemos cuatro posibles salidas. Debido a esto, vamos a estudiarlo a partir de la representación en espacio de estados.

Obtención de las ecuaciones de estado

Recurrimos a la física Newtoniana para encontrar la sumatoria de torques sobre cada una de las masas y así desarrollar las demás ecuaciones. Las constantes que tendremos en cuenta son: las constantes de los resortes de torsión K_1 y K_2 tales que $K_1 = K_2 = 2,7114 \frac{Nm}{rad}$, las constantes de rozamiento b_1 y b_2 tales que $b_1 = b_2 = 0,02 \frac{Nms}{rad}$ y las inercias J_1 y J_2 tales que $J_1 = J_2 = 0,009 \frac{Nms^2}{rad}$.

$$\sum \tau_{1i} = \tau(t) - K_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - b_1\dot{\theta}_1(t) = \ddot{\theta}_1(t)J_1 \quad (1.1)$$

$$\sum \tau_{2i} = K_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - K_2\theta_2(t) - b_1\dot{\theta}_2(t) = \ddot{\theta}_2(t)J_2 \quad (1.2)$$

Procedemos a realizar un cambio de variables de forma tal que

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta_1(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) = \theta_2(t) \\ x_4(t) = \dot{x}_3(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

y, a continuación, convertimos las ecuaciones (1.1) y (2.2) en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{J_1}(\tau(t) - K_1(x_1(t) - x_3(t)) - b_2x_2(t)) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{J_2}(K_1(x_1(t) - x_3(t)) - K_2x_3(t) - b_1x_4(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

Distribuimos la ecuación (1.4) y nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{\tau(t)}{J_1} - \frac{K_1}{J_1}x_1(t) - \frac{b_2}{J_1}x_2(t) + \frac{K_1}{J_1}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{K_1}{J_2}x_1(t) - \frac{(K_1 + K_2)}{J_2}x_3(t) - \frac{b_1}{J_2}x_4(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Para obtener la representación en espacio de estados de un sistema es necesario obtener las siguientes dos ecuaciones matriciales

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.6)$$



$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.7)$$

donde la matriz A es la llamada **matriz de transición**, la matriz B es la **matriz de entradas**, la matriz C es la **matriz de salida** y la matriz D es la **matriz de transferencia directa**.

Podemos reordenar el sistema (1.5) para que nos quede de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (0) \cdot x_1(t) + (1) \cdot x_2(t) + (0) \cdot x_3(t) + (0) \cdot x_4(t) + (0) \cdot \tau(t) \\ \dot{x}_2(t) = \left(-\frac{K_1}{J_1}\right) \cdot x_1(t) + \left(-\frac{b_2}{J_1}\right) \cdot x_2(t) + \left(\frac{K_1}{J_1}\right) \cdot x_3(t) + (0) \cdot x_4(t) + \left(\frac{1}{J_1}\right) \cdot \tau(t) \\ \dot{x}_3(t) = (0) \cdot x_1(t) + (0) \cdot x_2(t) + (0) \cdot x_3(t) + (1) \cdot x_4(t) + (0) \cdot \tau(t) \\ \dot{x}_4(t) = \left(\frac{K_1}{J_2}\right) \cdot x_1(t) + (0) \cdot x_2(t) + \left(-\frac{(K_1 + K_2)}{J_2}\right) \cdot x_3(t) + \left(-\frac{b_1}{J_2}\right) \cdot x_4(t) + (0) \cdot \tau(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

a) 0.5

Así, se ve más claro que existe una representación matricial de (1.8) y es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1/J_1 & -b_2/J_1 & K_1/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1/J_2 & 0 & -(K_1 + K_2)/J_2 & -b_1/J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau(t) \quad (1.9)$$

Además, podemos representar el vector de salidas que nos va a servir para obtener la función transferencia más adelante.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tau(t) \quad (1.10)$$

Notar que el vector de (1.9) que contiene a $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$ es, justamente,

$$x(t) = [\theta_1(t), \omega_1(t), \theta_2(t), \omega_2(t)]^T \quad (1.11)$$

y se denomina **vector de estados**.

Implementación numérica del problema

b) 0.40

Para encontrar el vector de estados mencionado anteriormente debemos hacer uso de un algoritmo que resuelva ecuaciones diferenciales. De esta forma, usaremos la subrutina de Matlab llamada "ode45()".

A esta subrutina dispone de tres argumentos. El primero se trata de un Ode-File, que es un archivo en donde definiremos la función de entrada y, en nuestro caso, el vector de ecuaciones de (1.9). El segundo argumento se trata del intervalo en el cual queremos



integrar las ecuaciones. El tercer y último argumento hace referencia al vector de condiciones iniciales de cada ecuación.

Ode-File “SMR.m”

```
function dx=SMR(t,x)

K1=2.7114; % [(N*m)/rad]
K2=2.7114; % [(N*m)/rad]
b1=0.02; % [(N*m*s)/rad]
b2=0.02; % [(N*m*s)/rad]
J1=0.009; % [(N*m*s^2)/rad]
J2=0.009; % [(N*m*s^2)/rad]

D=4;% Tiempo de finalizacion del pulso.

if t<D
    tau=0.5;
else
    tau=0;
end

dx=[x(2);
    (tau/J1)-(K1/J1)*(x(1)-x(3))-(b2/J1)*x(2);
    x(4);
    (K1/J2)*(x(1)-x(3))-(K2/J2)*x(3)-(b1/J2)*x(4)];
```

Entonces, una vez que tengamos listo el Ode-File, desarrollamos un Script que haga uso del mismo y nos plotee las funciones correspondientes al vector de estados.

Script “Respuesta.m”

```
close all;
clc;

[t,x]=ode45('SMR',[0,10],[0;0;0;0]);
%{
El segundo argumento que necesita la subrutina ode45 se refiere al
intervalo de tiempo en el que queremos integrar.
El ultimo argumento es un vector de condiciones iniciales,
correspondiendo
cada una a cada variable de estado.
%}

%Grafica de Theta1:
subplot(221), plot(t,x(:,1));
ylabel('x_1(t)=Theta_1(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')
%Grafica de Omega1:
subplot(222), plot(t,x(:,2));
ylabel('x_2(t)=Omega_1(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')
```



```

%Grafica de Theta2:
subplot(223), plot(t,x(:,3));
ylabel('x_3(t)=Theta_2(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')
%Grafica de Omega2:
subplot(224), plot(t,x(:,4));
ylabel('x_4(t)=Omega_2(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')

% Graficas para comparar los angulos Theta1 y Theta2.
%{
subplot(211),plot(t,x(:,1));
hold on
subplot(211),plot(t,x(:,3));
legend('Ángulo 1 simulado', 'Áng 1 medido');
%}
% Graficas para comparar las velocidades angulares Omega1 y Omega2.
%{
subplot(212),plot(t,x(:,2));
hold on
subplot(212),plot(t,x(:,4));
%}

```



Podemos observar las curvas obtenidas en la subrutina ode45 en la **Ilustración 3**.



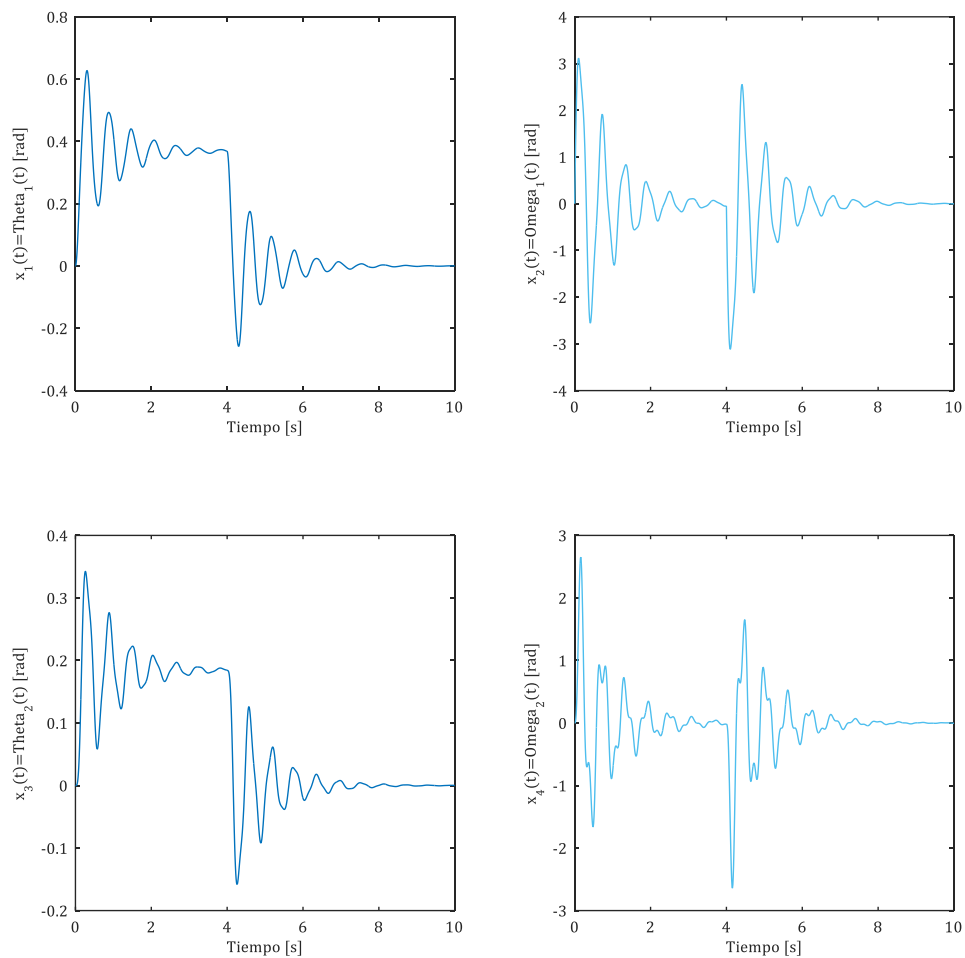


Ilustración 3: Gráficas de las respuestas pertenecientes al vector de estados.

No interpreta físicamente el problema

Ahora, seguimos con la búsqueda de la función transferencia del sistema entre la entrada $\tau(t)$ y tomando como salida $x_1(t)$.

Script “Funcion_Transferencia.m”

c) 0.50 Para encontrar la función transferencia implementamos el siguiente Script.

```
close all;
clc;

K1=2.7114; % [(N*m)/rad]
K2=2.7114; % [(N*m)/rad]
b1=0.02; % [(N*m*s)/rad]
b2=0.02; % [(N*m*s)/rad]
J1=0.009; % [(N*m*s^2)/rad]
```

```
J2=0.009; % [(N*m*s^2)/rad]

A=[0,1,0,0;
   -(K1/J1), -(b2/J1), K1/J1, 0;
   0,0,0,1;
   K1/J2, 0, -(K1+K2)/J1, -b1/J2]; % Matriz de transición.
B=[0;1/J1;0;0]; % Matriz de entrada.
C=[1,0,0,0]; % Matriz de salida.
D=[0]; % Matriz de transferencia directa.

[NUM,DEN]=ss2tf(A,B,C,D);
%{
Esta funcion se encarga de devolvernos el numerador y denominador de
la
funcion transferencia a partir de la representacion del sistema en
espacio
de estados, obtenido a partir de las Matrices declaradas
anteriormente.
%}

G=tf(NUM,DEN);
%{
Nos crea la funcion transferencia a partir de los coeficientes del
numerador y denominador de la funcion transferencia.
%}

bode(G);
%{
Nos crea y grafica el diagrama de Bode para representar la respuesta
en
amplitud y fase del sistema.
%}
```

A partir de este código nos resultó la siguiente función transferencia:

$$\frac{111,1s^2 + 246,9s + 6,695 \times 10^4}{s^4 + 4,444s^3 + 908,7s^2 + 2008s + 9,076 \times 10^4} \quad (1.12)$$

Si nos fijamos en las raíces del polinomio denominador encontraremos los polos de la función transferencia y, al estar todos estos en el lado del semieje real negativo, concluimos que el sistema es **BIBO estable (Bounded Input – Bounded Output)**.

También obtuvimos el **diagrama de Bode**, representado en la **Ilustración 4**.



d) y e) 0.75

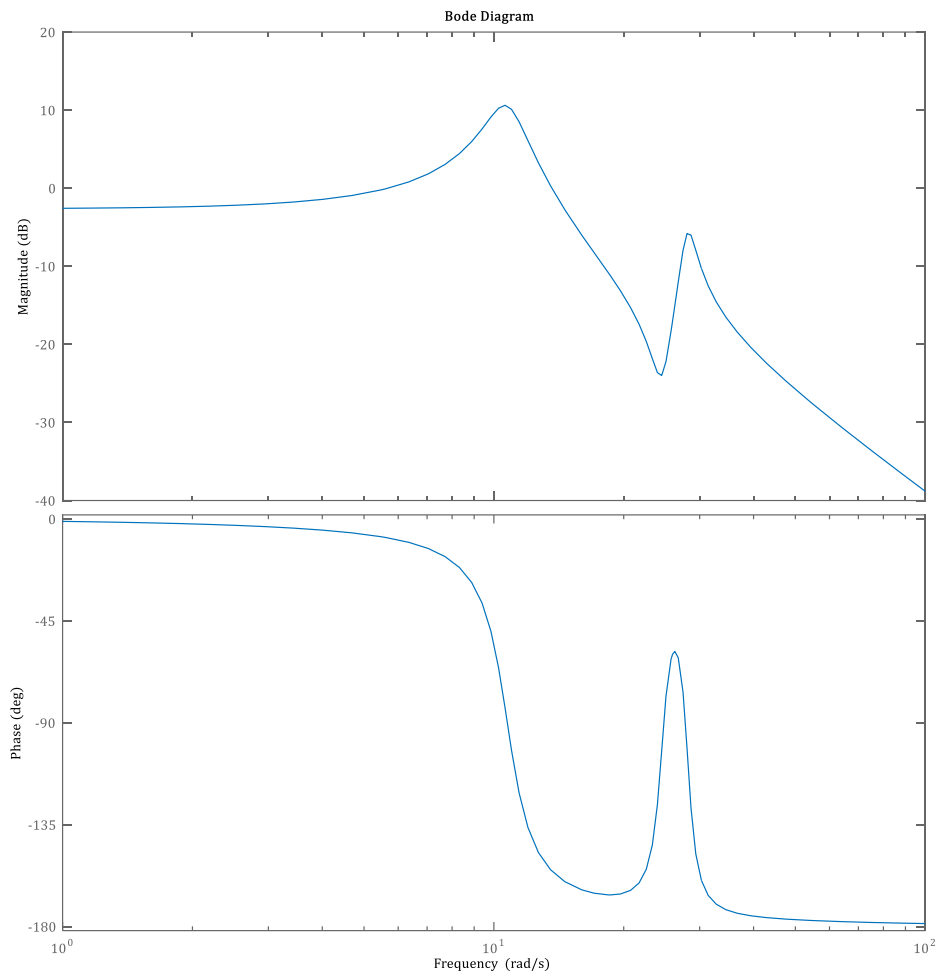


Ilustración 4: Diagrama de Bode.

Script “Polos_Ceros.m”

A continuación, escribimos un Script que nos permita mapear los polos y los ceros de la función transferencia.

```
close all;
clc;

%{
En caso de no haber ejecutado anteriormente el Script
'Funcion_Transferencia.m', debera agregar la linea de código:
Funcion_Transferencia;
%}

%{
Los polos y los ceros de la Funcion transferencia se calculan con el
comando roots().
}
```



```

%}
Ceros=roots (NUM)
Polos=roots (DEN)
%{
A partir del objeto 'G' de tipo tf, es decir, funcion
transferencia, obtenido en el script 'Funcion_transferencia.m', el
comando
pzmap nos realiza un mapa de polos y ceros.
%}
pzmap (G)

```

El mapa de polos y ceros obtenidos se puede observar en la **Ilustración 5**.

Los resultados obtenidos con este Script fueron los siguientes:

Ceros =

$$-1.1111 + 24.5214i$$

$$-1.1111 - 24.5214i$$

Polos =

$$-1.1111 + 28.0623i$$

$$-1.1111 - 28.0623i$$

$$-1.1111 + 10.6695i$$

$$-1.1111 - 10.6695i$$

Si nos fijamos, vemos que los polos que se obtuvieron, que son dos pares de polos complejos conjugados, coinciden con lo representado en el diagrama de Bode, es decir, los dos máximos que tiene la curva en función de la frecuencia. También coincide el cero complejo conjugado obtenido con el mínimo local ubicado entre ambos máximos.

Hubiese sido interesante analizar las pendientes y asíntotas del diagrama de bode de amplitud, comparando con las ubicaciones de los polos y ceros. Por otro lado, no analiza la el diagrama de bode de fase.



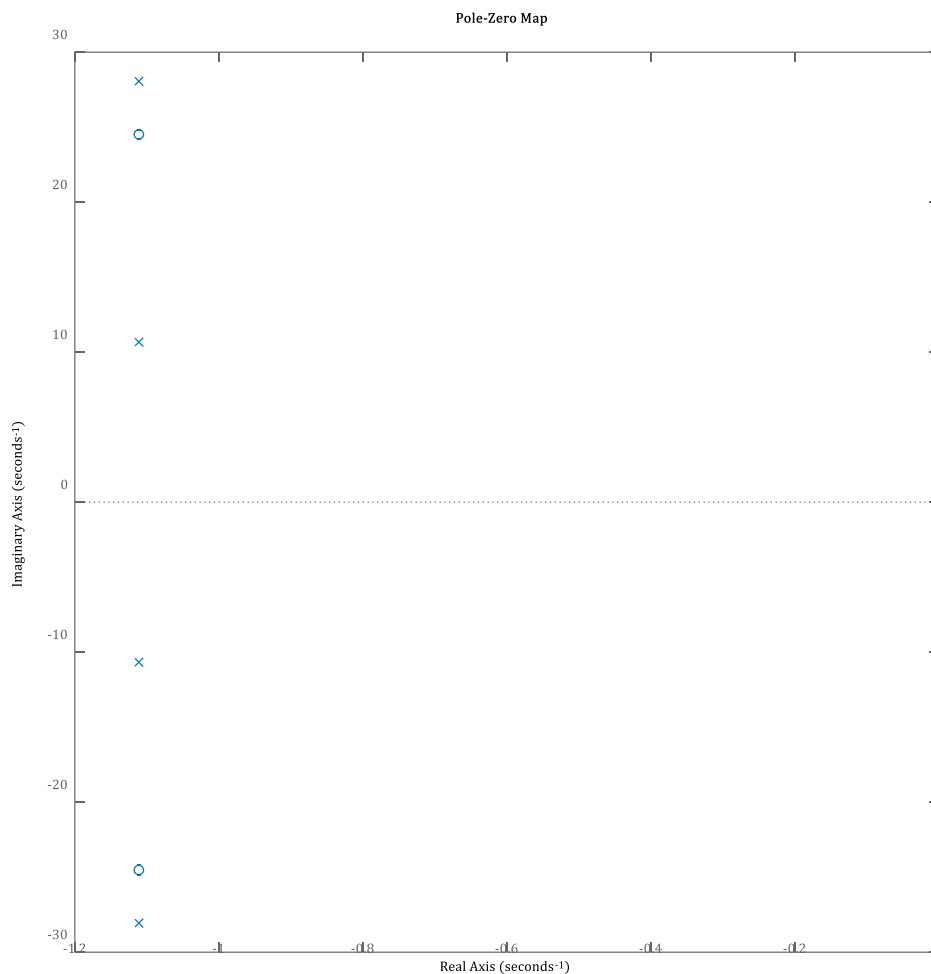


Ilustración 5: Mapa de polos y ceros

Script “Comparacion_1.m”

f) 1.25

Lo único que nos queda es realizar una comparación entre la simulación realizada y las mediciones reales del sistema. Para esto escribimos el siguiente código.

```
close all;
clc;

datos_TP2_P1_2020; % Cargamos los datos correspondientes a las
mediciones.
%{
En caso de no haber ejecutado anteriormente el Script
'Respuesta.m', encargado de integrar la ecuacion diferencial, debera
agregar
la linea de código:
Respuesta;
%}}
```



```

% Graficamos el ángulo 1 simulado y el ángulo 1 medido:
subplot(211),plot(t,x(:,1),'g');
hold on
subplot(211),plot(evol(:,2),evol(:,4)/2544);
title('Comparación ángulo 1')
ylabel('x_1(t)=Theta_1(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')
legend('Ángulo 1 simulado', 'Ángulo 1 medido');
% Graficamos el ángulo 2 simulado y el ángulo 2 medido:
subplot(212),plot(t,x(:,3),'r');
hold on
subplot(212),plot(evol(:,2),evol(:,5)/2544);
title('Comparación ángulo 2')
ylabel('x_3(t)=Theta_2(t) [rad]'),xlabel('Tiempo [s]')
legend('Ángulo 2 simulado', 'Ángulo 2 medido');

```

En la Ilustración 6 podemos ver la comparación entre los ángulos medidos y simulados.

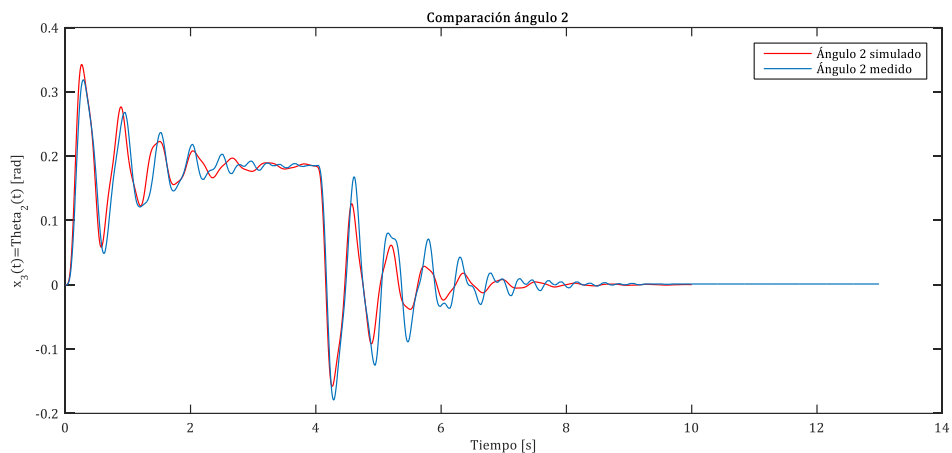
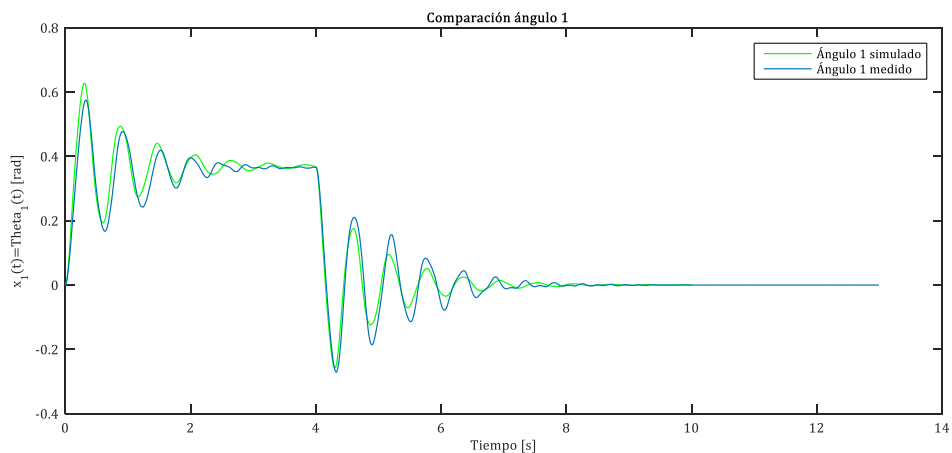


Ilustración 6: Comparación entre ángulos medidos y simulados.

Se puede concluir que los resultados obtenidos son fieles a las mediciones realizadas. Es razonable que haya una diferencia entre ambas gráficas, debido, en primer lugar, a que nosotros estamos utilizando un modelo simplificado del sistema. Obviamente hay muchos factores que condicionan el funcionamiento del mismo, como su arquitectura, sus componentes, etc. En segundo lugar, la diferencia se debe al error que acumula la subrutina de integración.



Problema N° 2: Sistema de Suspensión Magnética

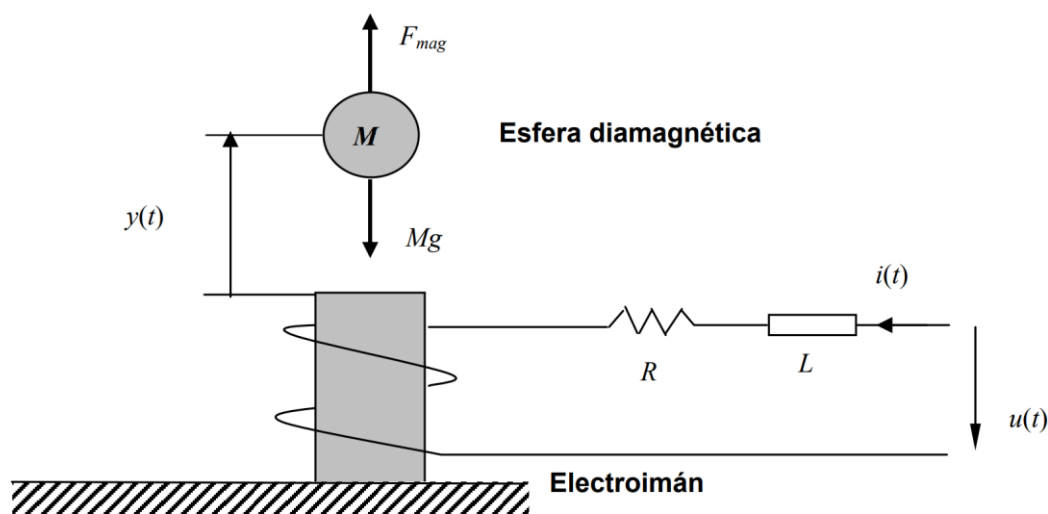


Ilustración 7: Sistema de suspensión magnética de una esfera.

En este ejercicio debemos realizar el análisis de un sistema de suspensión magnética de una esfera diamagnética. El objetivo es lograr que dicha esfera quede suspendida a una distancia $y(t)$ vertical del extremo del electroimán a través de la regulación de la corriente mediante el control de la tensión $u(t)$ de entrada.

Análisis matemático del problema

La fuerza magnética sobre la esfera se puede modelar de la siguiente manera:

$$F_{mag}(t) = \frac{ki^2(t)}{y(t)} \quad (2.1)$$

a) 0.25

donde k es una constante de proporcionalidad tal que $k = 2 \frac{Nm}{A^2}$. Además, también tenemos las constantes $R = 20 \Omega$, $L = 0,01 H$, $M = 0,2 Kg$, $b = 0,5 \frac{Nm}{s}$ y $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.

En primer lugar, buscaremos las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del sistema. Comenzaremos por el análisis de las fuerzas que actúan sobre la esfera. A partir de un análisis clásico podemos determinar que la sumatoria de fuerzas es

$$\sum F_{esfera}(t) = \frac{ki^2(t)}{y(t)} - Mg - b \frac{dy(t)}{dt} = M \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (2.2)$$

en donde el término $-b\dot{y}(t)$ se refiere a la fuerza de fricción que ejerce el aire.

Por otro lado, tenemos el análisis del circuito que permite el funcionamiento del electroimán. Aplicando **LKT** determinamos que

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Redistribuyendo las ecuaciones (2.2) y (2.3) y usando una notación más compacta nos queda

$$y''(t) = \frac{1}{M} \left(\frac{ki^2(t)}{y(t)} - Mg - by'(t) \right) \quad (2.4)$$

$$i'(t) = \frac{1}{L} (u(t) - i(t)) \quad (2.5)$$

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.5) podemos realizar un diagrama de bloques que represente la evolución del sistema.

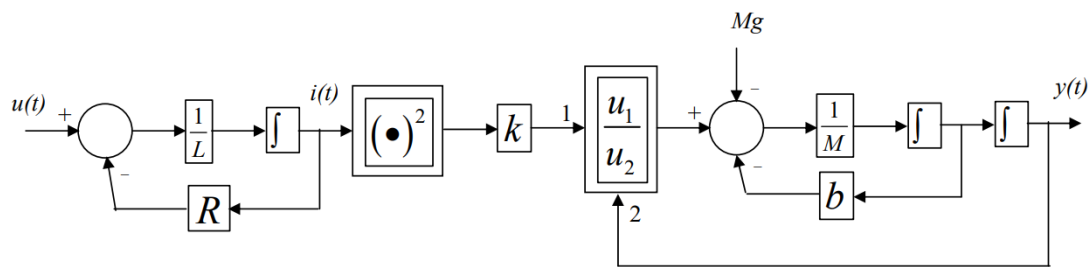


Ilustración 8: Diagrama de bloques del sistema.

Implementación numérica del problema

c) 0.25

Para implementar numéricamente este problema, debemos encontrar los valores de equilibrio \bar{i} e \bar{y} de las variables $i(t)$ e $y(t)$ correspondientes a una tensión de alimentación constante de $u(t) = \bar{u} = 10 \text{ V}$.

Para una tensión de entrada constante los valores de las variables del sistema alcanzan un equilibrio. Esto se traduce en una derivada igual a cero, por lo que podemos usar las ecuaciones (2.2) y (2.3) de forma que:

$$\frac{k\bar{i}^2}{\bar{y}} - Mg = 0 \quad (2.6)$$

por lo que

$$\bar{y} = \frac{k\bar{i}^2}{Mg} \quad (2.7)$$

y

$$\bar{u} = \bar{i}R \quad (2.8)$$

y, por lo tanto,

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{R} \quad (2.9)$$

Sabemos que $\bar{u} = 10 \text{ V}$, entonces

$$\bar{y} = 0,2551 \text{ m} \quad (2.10)$$

$$\bar{i} = 0,5 \text{ A} \quad (2.11)$$

Ahora implementamos el diagrama de bloques en Simulink.

Script "Datos_1.m"

Escribimos estas líneas de código para inicializar las constantes que vamos a usar en Simulink:

```
% Constantes:
R = 20;
b = 0.5;
L = 0.01;
k = 2;
M = 0.2;
g = 9.8;
```

Diagrama de Bloques en Simulink

El diagrama de bloques nos quedo de la siguiente manera:



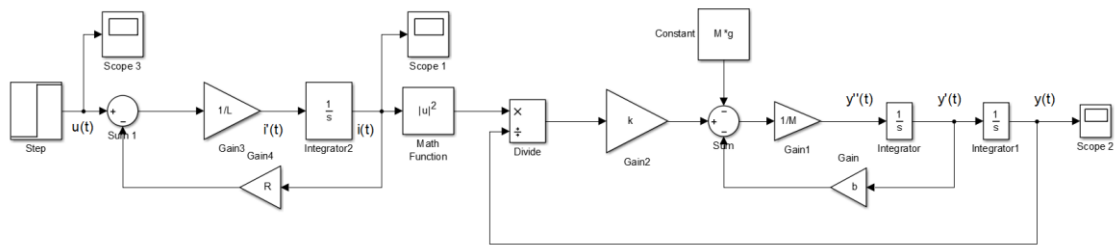


Ilustración 9: Diagrama de bloques implementado en Simulink.

Las curvas obtenidas son:



Ilustración 10: Curva de la tensión de entrada aumentada en 0,2 V.

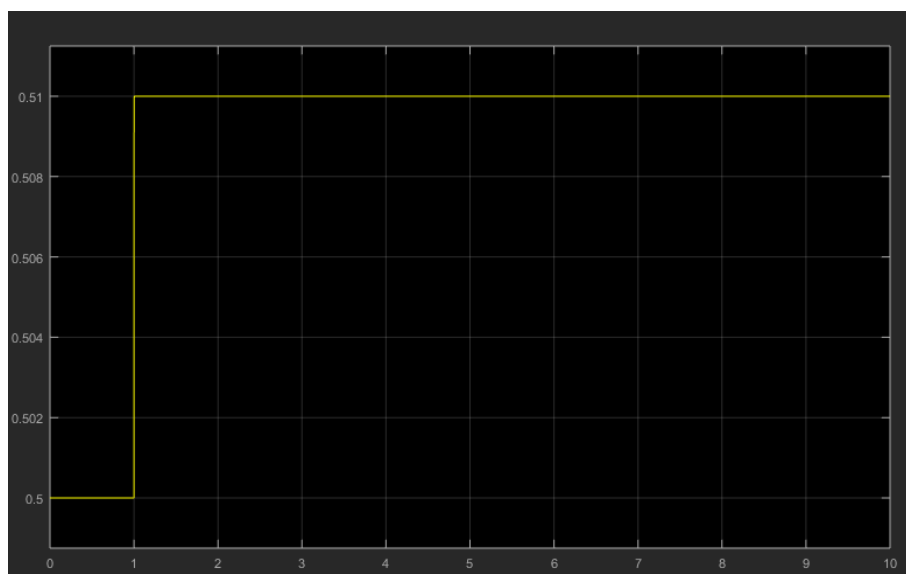


Ilustración 11: Curva de la corriente (con aumento de tensión de 0,2 V).

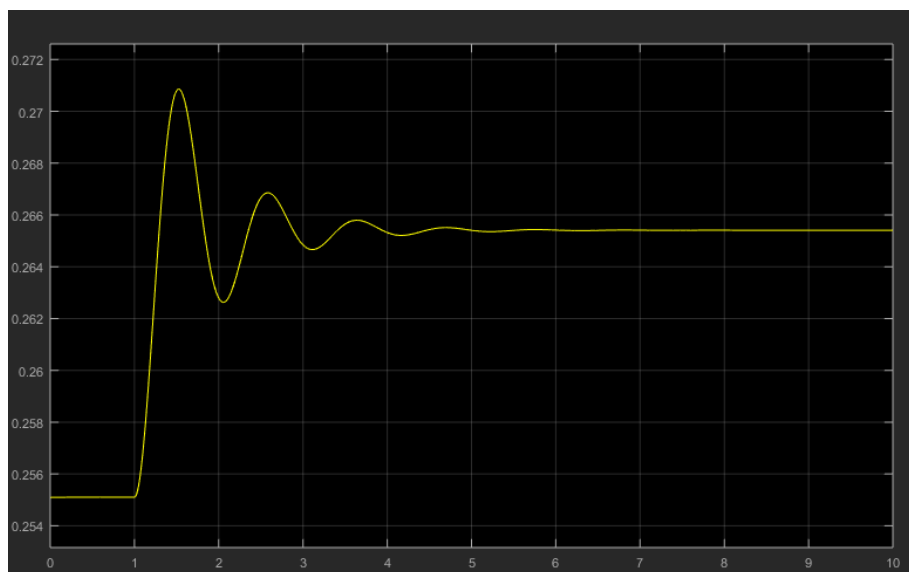


Ilustración 12: Curva de la altura $y(t)$ (con aumento de tensión de 0,2 V).



Ilustración 13: Curva de la tensión de entrada aumentada en 2 V.

No analiza los resultados obtenidos.
Por ejemplo, según sus gráficas, $i(t)$ posee un salto muy grande al inicio... es discontinua? Puede serlo?



Ilustración 14: Curva de la corriente (con aumento de tensión de 2 V).

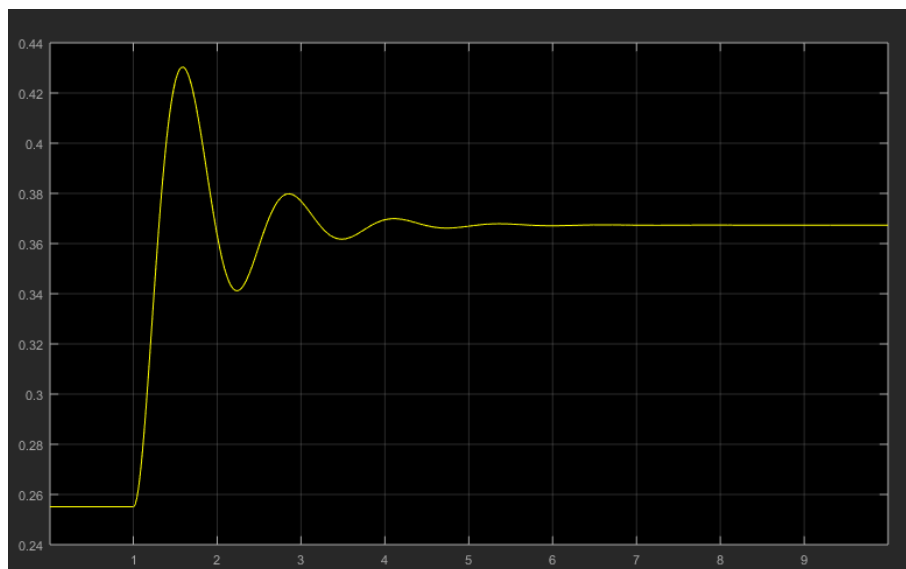


Ilustración 15: Curva de la altura $y(t)$ (con aumento de tensión de 2 V).

Debido a que el diagrama de bloques resultante cuenta con bloques no lineales, el sistema es no lineal. De esta forma, implementaremos un diagrama de bloques que cuente solo con bloques lineales, haciendo algunas aproximaciones.

f) 0.50

Primero podemos aproximar la fuerza magnética como sigue

$$F_{mag} \approx \bar{F}_{mag} + k_i \Delta i(t) + k_y \Delta y(t) \quad (2.12)$$

donde



$$\bar{F}_{mag} = \frac{k_i \bar{i}^2}{\bar{y}} \quad (2.13)$$

$$k_i = \frac{\partial F_{mag}(t)}{\partial i} \quad i(t)=\bar{i}, y(t)=\bar{y} \quad (2.14)$$

$$k_y = \frac{\partial F_{mag}(t)}{\partial y} \quad i(t)=\bar{i}, y(t)=\bar{y} \quad (2.15)$$

$$\Delta i(t) = i(t) - \bar{i} \quad (2.16)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y} \quad (2.17)$$

A partir de (2.14) y de (2.15) calculamos los valores de las constantes k_i y k_y

$$k_i = \frac{2ki(t)}{y(t)} \quad i(t)=\bar{i}, y(t)=\bar{y} \quad (2.18)$$

$$k_i = \frac{2k\bar{i}}{\bar{y}} = \frac{2,2 \frac{Nm}{A^2} \times 0,5 A}{0,2551 m} = 7.84 \frac{N}{A} \quad (2.19)$$

$$k_y = -k \left(\frac{i(t)}{y(t)} \right)^2 \quad i(t)=\bar{i}, y(t)=\bar{y} \quad (2.20)$$

$$k_y = -k \left(\frac{\bar{i}}{\bar{y}} \right)^2 = -2 \frac{Nm}{A^2} \times \left(\frac{0.5 A}{0.2551 m} \right)^2 = -7.683 \frac{N}{m} \quad (2.21)$$

Ahora procedemos a realizar el diagrama de bloques reemplazando la expresión (2.1) por la expresión (2.12) y pasivando las entradas correspondientes a los valores de equilibrio en el diagrama de bloques anterior y obtener las curvas correspondientes a través de los Scope.

Script "Datos_2.m"

Para ejecutar el diagrama hay que correr las siguientes líneas de código:

```
% Constantes:
R = 20;
b = 0.5;
L = 0.01;
k = 2;
M = 0.2;
g = 9.8;
```

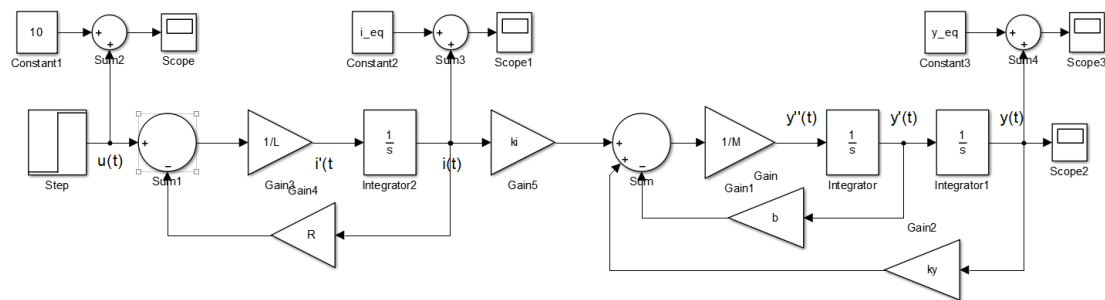


```

u_eq = 10;
i_eq = u_eq/R;
y_eq = (k*(i_eq)^2) / (M*g);
ki = (2*k*i_eq) / y_eq;
ky = -k*(i_eq/y_eq)^2;

```

Diagrama de Bloques Lineal en Simulink



g-h) 0.75

Ilustración 16: Diagrama de Bloques Lineal.

Se consideraron nulas las condiciones iniciales de los integradores. La entrada del sistema es un escalón de valor inicial 0 V y valor final 0,2 V o 2 V. Se le suman los valores de equilibrio a las variables incrementales del sistema para poder visualizarlas y compararlas con el diagrama de anterior (**Ilustración 9**).

Las curvas obtenidas fueron las siguientes.



Ilustración 17: Curva de la tensión de entrada aumentada en 0,2 V.

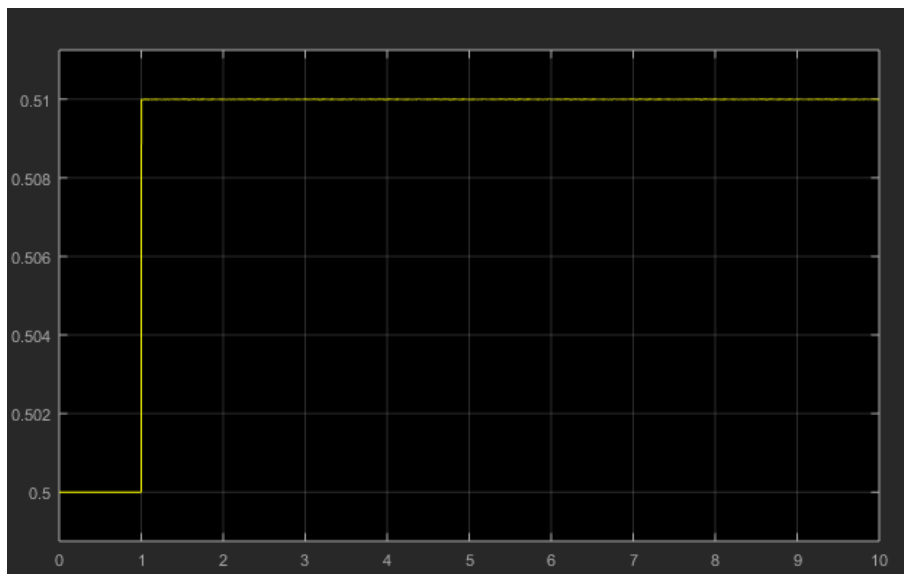


Ilustración 18: Curva de la corriente (con aumento de tensión de 0,2 V).

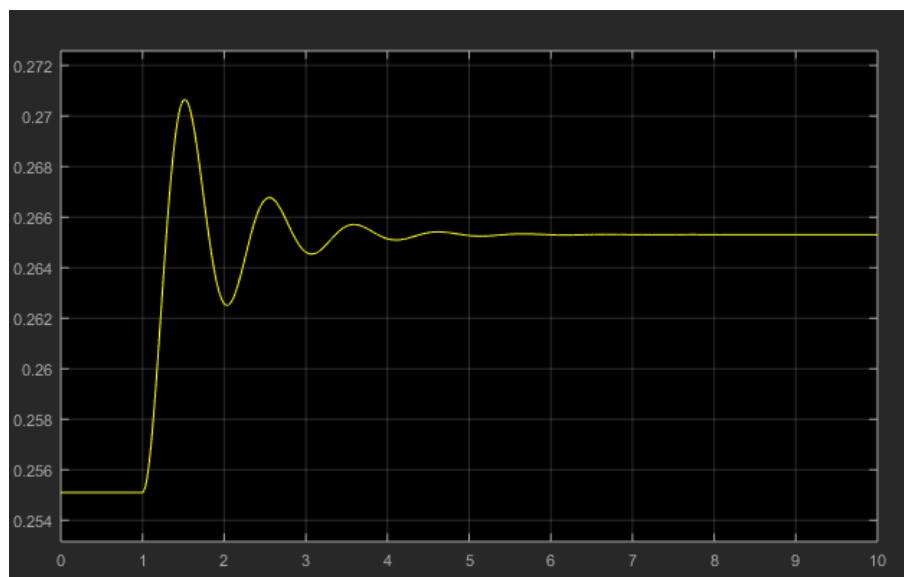


Ilustración 19: Curva de la altura $y(t)$ (con aumento de tensión de 0,2 V).

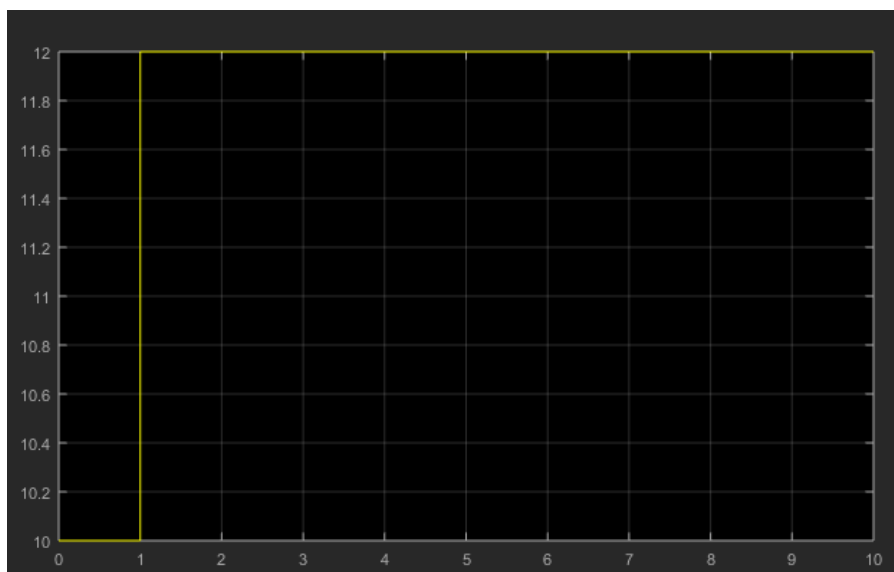


Ilustración 20: Curva de la tensión de entrada aumentada en 2 V.

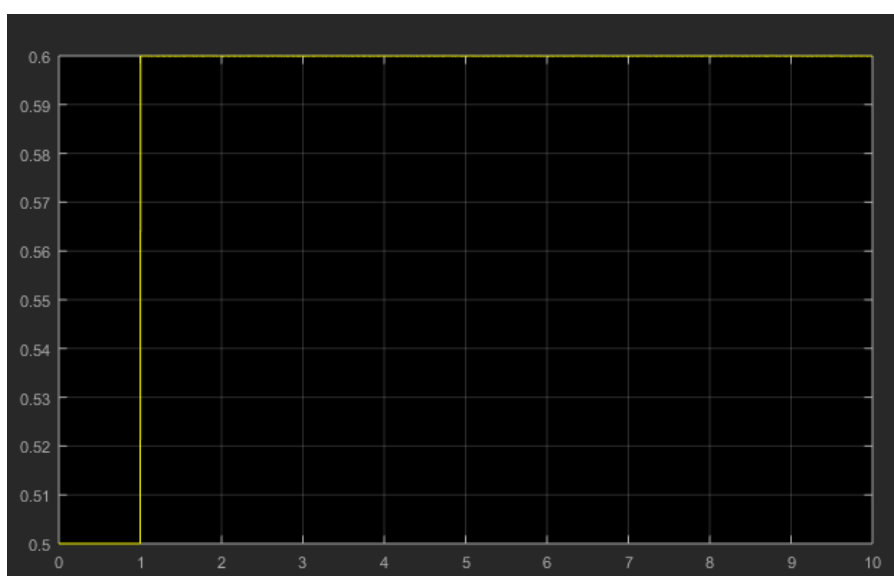


Ilustración 21: Curva de la corriente (con aumento de tensión de 2 V).

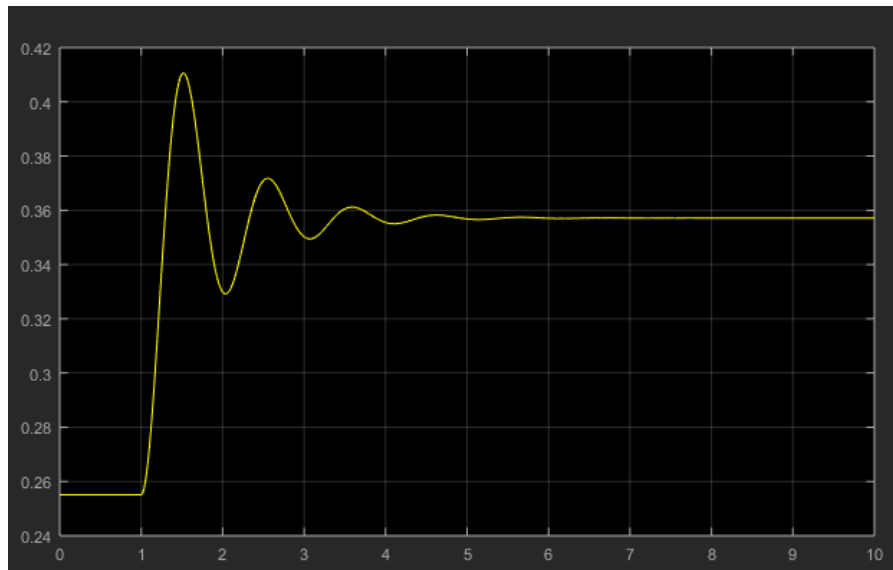


Ilustración 22: Curva de la altura $y(t)$ (con aumento de tensión de 2 V).

A simple vista, las curvas obtenidas a partir de ambos diagramas de bloques resultan muy similares. De hecho, con un solo vistazo no podemos encontrar ninguna diferencia. Por esta razón, mostramos una comparación entre las curvas $y(t)$ obtenidas mediante el sistema no lineal y las curvas $y(t)$ obtenidas mediante el sistema lineal.

Script “Comparacion_2.m”

```
close all;
clc;

Datos_2;

%{
figure,
plot(y_lineal.time,y_lineal.signals.values)
hold on
plot(y_no_lineal.time,y_no_lineal.signals.values)
title('Comparación de Respuestas para aumento de 0,2 V')
ylabel('y(t) [m]'),xlabel('Tiempo [s]')
legend('DG Lineal', 'DG no Lineal');
%}

figure,
plot(y_lineal.time,y_lineal.signals.values)
hold on
plot(y_no_lineal.time,y_no_lineal.signals.values)
title('Comparación de Respuestas para aumento de 2 V')
ylabel('y(t) [m]'),xlabel('Tiempo [s]')
legend('DG Lineal', 'DG no Lineal');
```

En la **Ilustración 23** se puede observar una diferencia casi despreciable en cuanto a las curvas, pero si nos fijamos en la **Ilustración 24** vemos un cambio notable.

Lo que sucede aquí es que este último modelo incremental difiere en gran medida de la solución “real” del diagrama de bloques no lineal cuando queremos calcular la respuesta para un valor muy alejado de \bar{u} . Esto explica que haya más diferencia entre gráficas en la comparación de la **Ilustración 24** que en la comparación de la **Ilustración 23**.

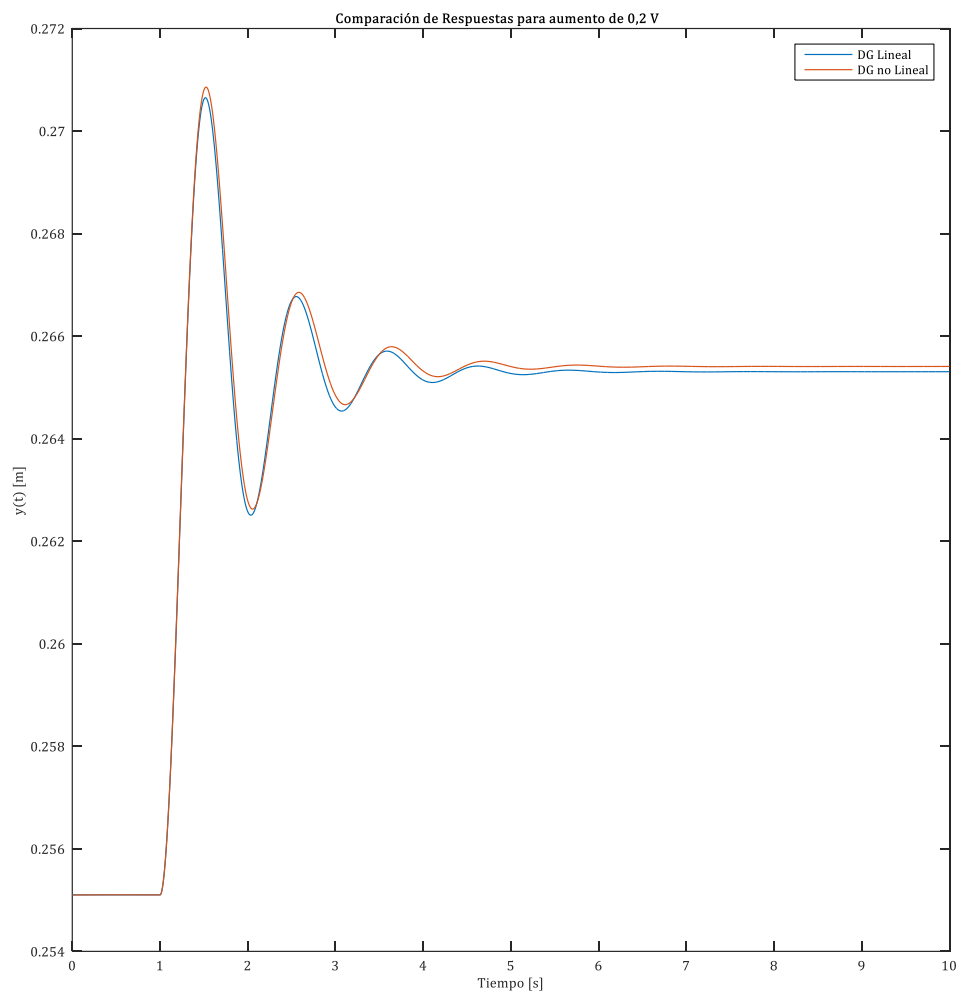


Ilustración 23: Comparación de gráficas para un aumento de 0,2 V.

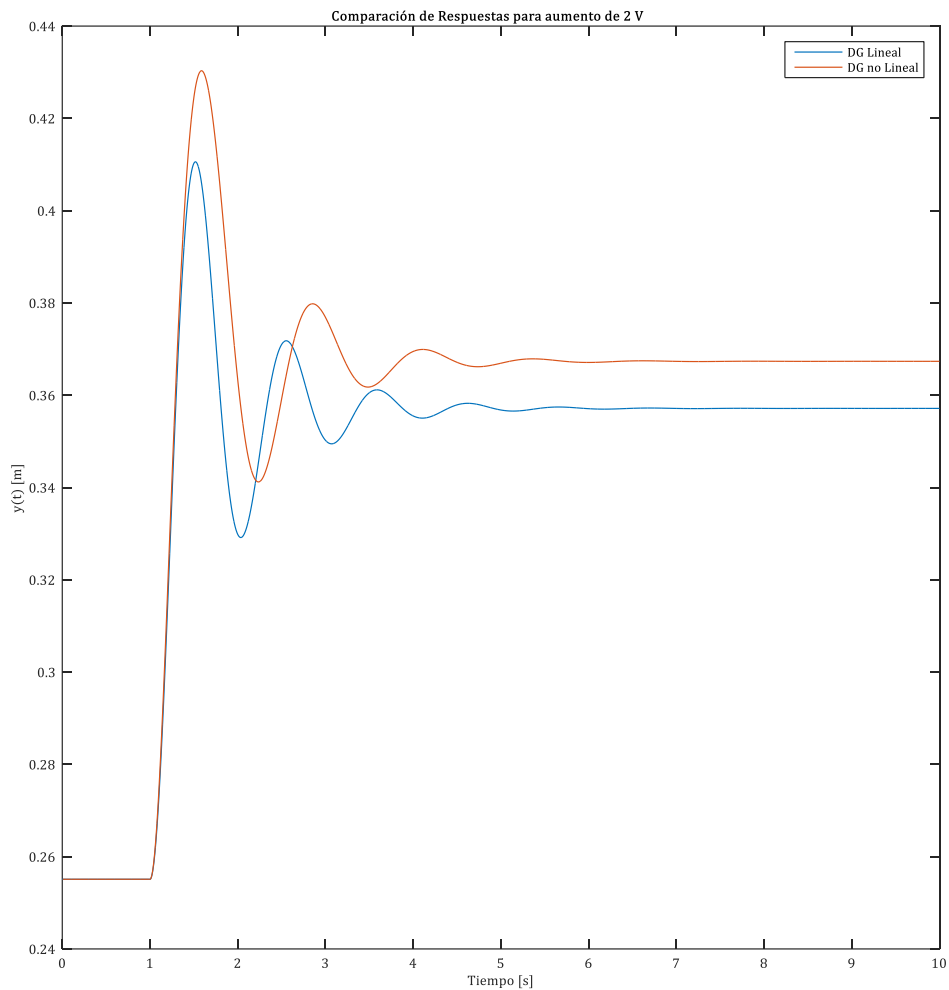


Ilustración 24: Comparación de gráficas para un aumento de 2 V.

j) 0.25 Obtención de la función transferencia

Calcularemos la función transferencia del sistema a partir del diagrama de bloques. Primero separamos el sumador que se encuentra en el centro en dos, obteniendo lo siguiente.

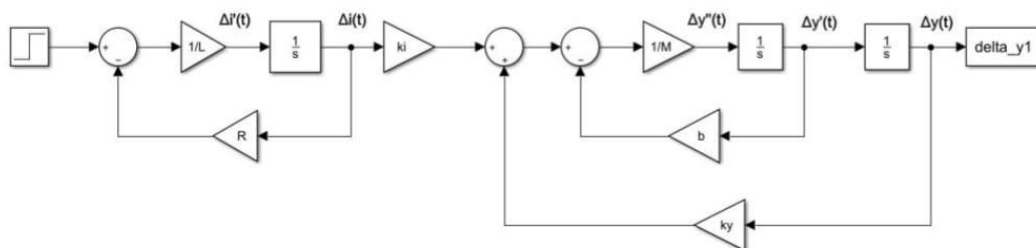


Ilustración 25: Diagrama de Bloques.

Visto de esta forma, se puede lograr visualizar dos subsistemas de retroalimentación, a los cuales llamaremos, $G1(s)$ y $G2(s)$:

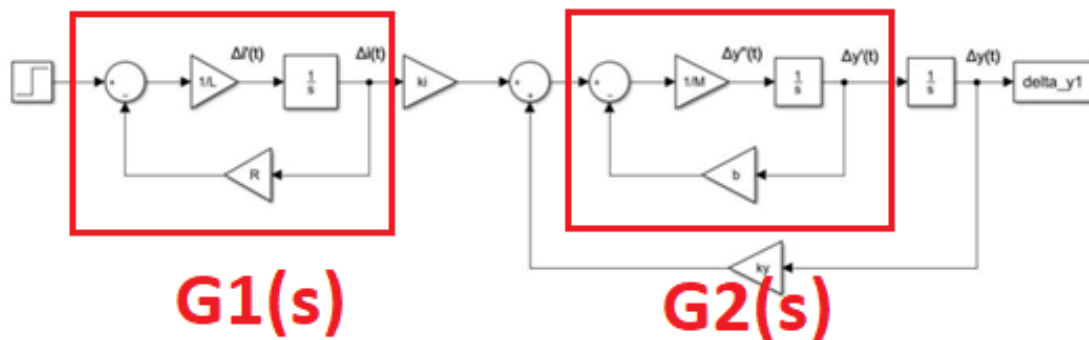


Ilustración 26: Diagrama de Bloques reducido.

Procedemos a hacer los cálculos de dichos bloques:

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{L \times s}}{1 + \frac{R}{L \times s}} = \frac{\frac{1}{L \times s}}{\frac{L \times s + R}{L \times s}} = \frac{1}{L \times s + R} \quad (2.22)$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{M \times s}}{1 + \frac{b}{M \times s}} = \frac{\frac{1}{M \times s}}{\frac{M \times s + b}{M \times s}} = \frac{1}{M \times s + b} \quad (2.23)$$

Hecho los cálculos, pasamos a mostrar cómo quedaría el diagrama de bloques resultante, en el cual inmediatamente se puede reconocer un nuevo subsistema llamado $G3(s)$:

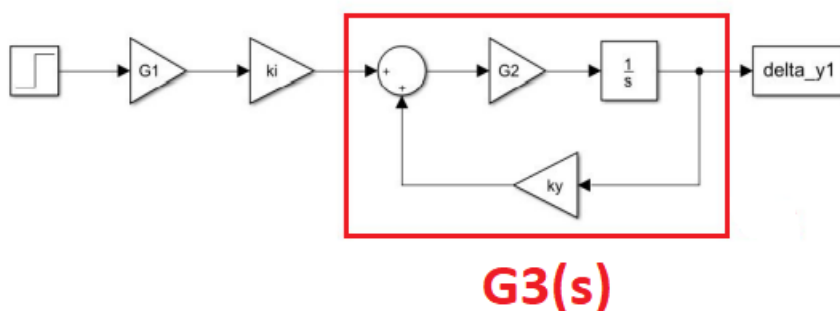


Ilustración 27: Diagrama de Bloques reducido.

$$G_3(s) = \frac{\frac{G_2(s)}{s}}{1 - \frac{G_2(s) \times k_y}{s}} = \frac{\left(\frac{1}{M \times s + b}\right) \times \frac{1}{s}}{1 - \left(\frac{1}{M \times s + b}\right) \times \frac{k_y}{s}} = \frac{\frac{1}{M \times s^2 + b \times s}}{\frac{M \times s^2 + b \times s - k_y}{M \times s^2 + b \times s}} \quad (2.24)$$

$$G_3(s) = \frac{1}{M \times s^2 + b \times s - k_y} \quad (2.25)$$

Con este último resultado solo nos quedan unos tres bloques de ganancia estática para obtener $G(s)$:

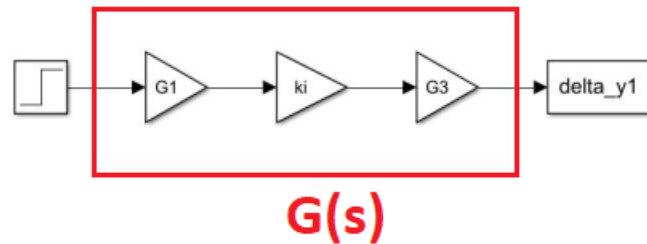


Ilustración 28: Diagrama de Bloques reducido.

$$G(s) = G_1(s) \times k_i \times G_3(s) = \frac{1}{L \times s + R} \times k_i \times \frac{1}{M \times s^2 + b \times s - k_y} \quad (2.26)$$

$$G(s) = \frac{k_i}{(L \times s + R) \times (M \times s^2 + b \times s - k_y)} \quad (2.25)$$

$$G(s) = \frac{k_i}{(ML \times s^3 + MR \times s^2 + L \times b \times s^2 - L \times k_y \times s + R \times b \times s - R \times k_y)} \quad (2.27)$$

$$G(s) = \frac{k_i}{(L \times s + R) \times (M \times s^2 + b \times s - k_y)} \quad (2.28)$$

Finalmente, obtenemos el ultimo diagrama:

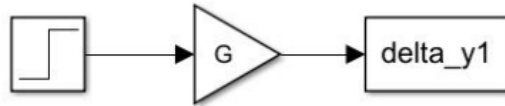


Ilustración 29: Diagrama de Bloques final.

Mediante la siguiente línea de código, utilizando la función **tf()**, se calcula la función transferencia y, a partir de la función **roots()**, obtendremos los polos que nos ayudaran a analizar su **BIBO** estabilidad además de luego mostrar por pantalla el diagrama de **Bode** de dicha función transferencia.

Script “Bode.m”

```

% Constantes:
R = 20;
b = 0.5;
L = 0.01;
k = 2;
M = 0.2;
g = 9.8;

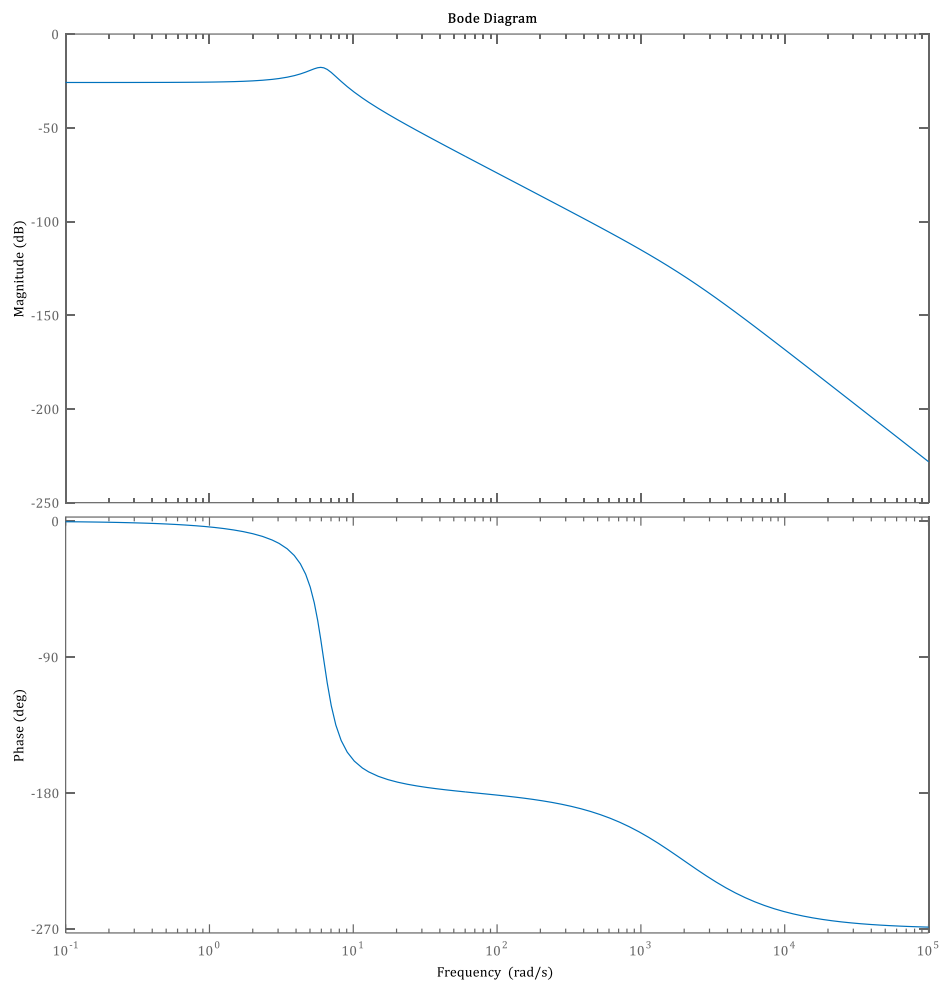
u_eq = 10;
i_eq = u_eq/R;
y_eq = (k*(i_eq)^2) / (M*g);
ki = (2*k*i_eq) / y_eq;
ky = -k*(i_eq/y_eq)^2;

G = tf([ki], [M*L, L*b+M*R, R*b-L*ky, -R*ky])
%{
Nos crea la funcion transferencia a partir de los coeficientes del
numerador y denominador de la funcion transferencia.
%}
DEN= [M*L, L*b+M*R, R*b-L*ky, -R*ky];
Polos=roots(DEN)
bode(G);
%{
Nos crea y grafica el diagrama de Bode para representar la respuesta
en amplitud y fase del sistema.
%}
  
```

Obtuvimos el siguiente diagrama.

No indica si es BIBO estable

k) 0.35



Análisis y comentarios?

Ilustración 30: Diagrama de Bode del sistema.

l) 0.25

Supongamos ahora que queremos implementar un control por realimentación de salida de **tipo P (Proporcional)** para el modelo incremental realizado anteriormente como se indica en la **Ilustración 31**.

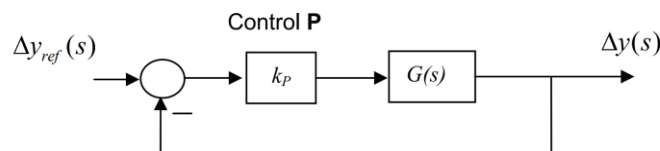


Ilustración 31: Control de tipo P.



Para determinar el rango de valores de la constante k_p que asegura que el sistema en lazo cerrado de la Figura anterior sea BIBO estable, tenemos que hacer lo siguiente:

En primer lugar, la función transferencia del sistema de retroalimentación es

$$G_p(s) = \frac{G(s) \times k_p}{1 + G(s) \times k_p} \quad (2.29)$$

Desarrollando (2.29) obtenemos

$$G_p(s) = \frac{\frac{k_i k_p}{(ML \times s^3 + (MR + Lb) \times s^2 - (Lk_y + Rb) \times s - Rk_y)}}{1 + \frac{k_i k_p}{(ML \times s^3 + (MR + Lb) \times s^2 - (Lk_y + Rb) \times s - Rk_y)}} \quad (2.30)$$

$$G_p(s) = \frac{k_i k_p}{ML \times s^3 + (MR + Lb) \times s^2 - (Lk_y + Rb) \times s + k_p k_i - Rk_y} \quad (2.31)$$

Reemplazando los valores numéricos de cada constante en (2.31) obtenemos

$$G_p(s) = \frac{7,84 \times k_p}{0,002s^3 + 4,005s^2 + 10,08s + 7,84 \times k_p + 153,7} \quad (2.32)$$

El polinomio denominador, al ser un polinomio sin coeficientes cero (polinomio completo), nos permite aplicar el criterio de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 0,002 & 10,08 \\ s^2 & 4,005 & 7,84 \times k_p + 153,7 \\ s^1 & 10 - 0,003915 \times k_p & \\ s^0 & 7,84 \times k_p + 153,7 & \end{array} \quad (2.33)$$

De (2.33) obtenemos que, para que se cumpla el criterio de estabilidad, se deben satisfacer las condiciones

$$\begin{cases} 10 - 0,003915 \times k_p > 0 \\ 7,84 \times k_p + 153,7 > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

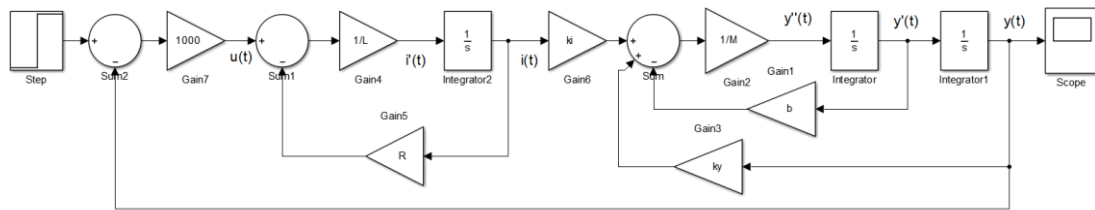
Es decir,

$$\begin{cases} k_p < 2554,27 \\ k_p > -19,06 \end{cases} \quad (2.35)$$

k_p debe ser menor a 2554,27 y mayor a -19,06 para asegurar que en el sistema en lazo cerrado se de la BIBO estabilidad.



El diagrama de bloque implementado en Simulink fue el siguiente:



m) 0.25

Ilustración 32: Diagrama de Bloque con retroalimentación.

Con un valor de $k_p = 1000$ y una entrada escalon de 0,2 V obtuvimos la siguiente respuesta:

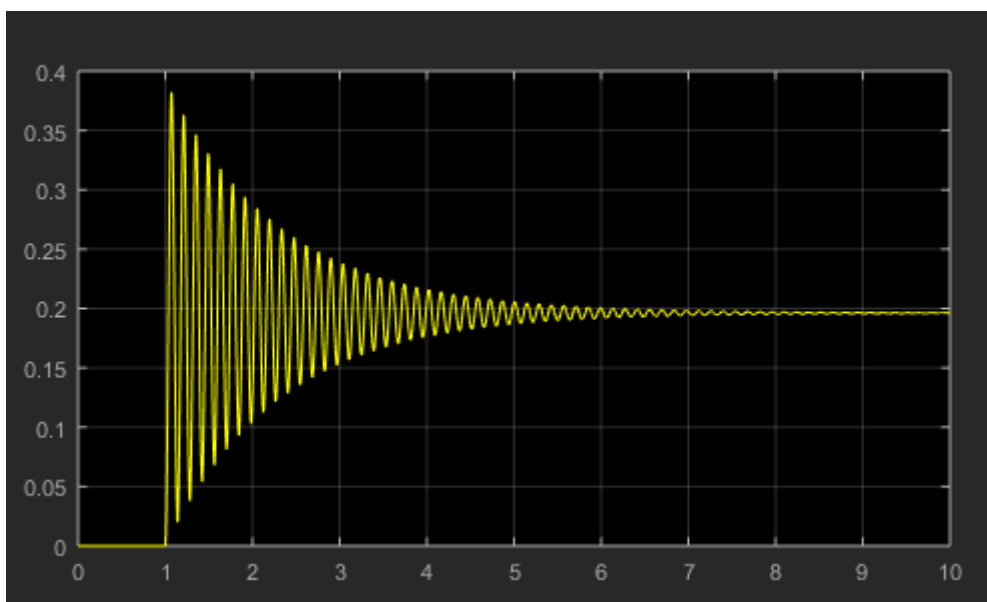


Ilustración 33: Gráfica de salida con control de tipo P.

En la gráfica se observa cómo, mediante el sistema de retroalimentación de control de tipo **P**, se lleva la salida del sistema hacia la referencia de entrada.

Conclusión

Con las herramientas que el software Matlab y su aplicación Simulink nos proveen somos capaces de analizar sistemas complejos y lograr ver cómo sus distintas variables evolucionan a través del tiempo o cuando se varía la frecuencia y, claramente, analizar si nuestro sistema presenta casos en que pierde estabilidad.

Cabe destacar la gran utilidad que presenta Simulink al permitirnos trabajar mediante diagramas de bloque, evitando de este modo tener que resolver ecuaciones diferenciales. También, se notó la utilidad que presenta el modelo incremental lineal para poder trabajar con sistemas no lineales de una forma más simple. Sin embargo, se debe tener en cuenta que este modelo solo sirve para valores cercanos al punto de equilibrio donde fue calculado, como se ha demostrado mediante la comparación de gráficas.

Es de suma importancia saber si los sistemas electrónicos que deseamos implementar van a tener respuestas naturales estables. Sabemos que, si una entrada acotada produce una salida no acotada, el sistema es inestable. Físicamente hablando, un sistema es inestable si la salida crece ilimitadamente y la misma puede causar daño al sistema. En cambio, si una entrada acotada produce una salida acotada, que tiende a un valor fijo, el sistema estable. Para que un sistema sea estable en muchos casos es necesario realizar una retroalimentación negativa. La retroalimentación negativa en la mayoría de los sistemas de ingeniería tiende a mejorar la estabilidad.

A lo largo la realización de este trabajo práctico se reafirmaron conceptos dados durante el curso de la materia a situaciones reales. Se comprobó la eficacia de tanto el software Matlab como de Simulink para poder simular, con gran precisión, evoluciones de sistemas físicos reales. Esto es de gran comodidad, e importancia, para poder predecir el comportamiento de un sistema, o verificarlo.

Durante el desarrollo, se encontraron funciones de Matlab desconocidas, en las cuales hubo que indagar sobre su uso y utilidad. A su vez, debimos investigar para poder comprender correctamente la aplicación del modelo incremental lineal. Se cree que se alcanzaron los objetivos planteados sobre el inicio del trabajo, adquiriendo conocimientos que servirán en un futuro en diversas aplicaciones a la hora de estudio de sistemas físicos.

