Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ingeniería Electrónica

Sistemas y Señales I

Trabajo Práctico Nº 1
Introducción a Matlab

Problemas a Incluir en el Informe del TP

Autores: Cátedra SyS-I

Febrero de 2023

<u>Problema 1:</u> Oscilador de Van der Pol

Balthasar Van der Pol fue un físico e ingeniero holandés que nació en Utrecht, en 1889 y murió en Wassenar en 1959. Van der Pol propuso el siguiente circuito:

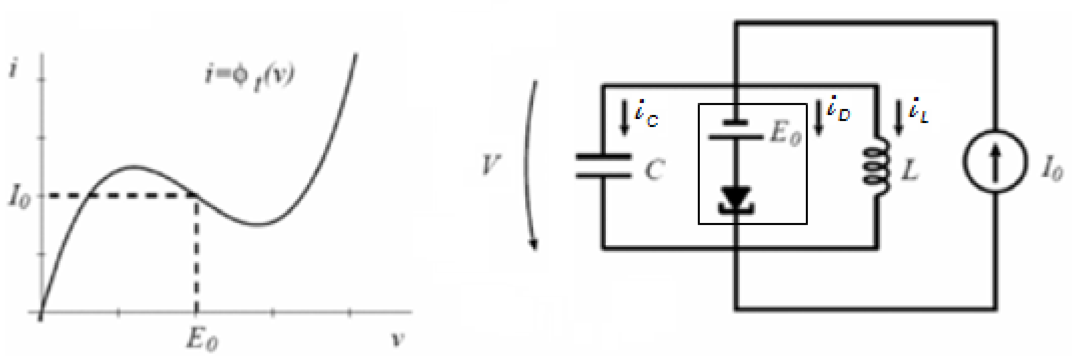

Figura 1: Oscilador de Van der Pol.

El mismo está compuesto por un inductancia *L*, un capacitor *C*, una fuente de corriente continua I_0 y un diodo túnel (elemento activo no lineal) conectados en paralelo. La relación V-A del diodo es de tipo cúbica, de la forma:

$$i_D = \gamma v^3 - \alpha v$$

A partir de la LKC en el circuito se obtiene:

$$I_0 = i_C + i_D + i_L$$

$$I_0 = C\frac{dv_C}{dt} + \left(\gamma v^3 - \alpha v\right) + i_L$$

Derivando esta ecuación respecto del tiempo se obtiene:

$$0 = C\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\gamma 3v^2 \frac{dv}{dt} - \alpha \frac{dv}{dt}\right) + \frac{1}{L} v_L$$

y como los elementos están en paralelo $v_C = v_L = v$; con lo que se obtiene:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\gamma 3v^2 - \alpha\right)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}\ v = 0$$

Para un determinado juego de valores de parámetros, la ecuación diferencial no lineal homogénea de segundo orden anterior puede escribirse como:

$$\ddot{v} - \varepsilon\left(1 - v^2\right)\dot{v} + v = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden puede expresarse fácilmente como 2 ecuaciones diferenciales de primer orden, definiendo las variables de estado $x_1 = v \;\; y \;\; x_2 = \dot{v}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon\left(1 - x_1^2\right) x_2 - x_1 \end{cases} \qquad (2)$$

La dinámica no lineal de este sistema está caracterizada por trayectorias periódicas cuyas características dependen del parámetro ε. El caso ε = 0 corresponde al denominado **Oscilador Armónico**, para el cual las trayectorias periódicas son senoidales.

a) Usando la **aproximación de Euler** de primer orden para la derivada, escriba las **ecuaciones en diferencias** (tiempo discreto) asociadas al sistema de ecuaciones en tiempo continuo descripto mediante (2).

b) Calcule los puntos de equilibrio del sistema. Los mismos son los valores de x_1 y x_2, que verifican simultáneamente $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

c) Escriba un *script-file* usando Matlab que implemente el sistema en tiempo discreto determinado en a), donde puedan especificarse condiciones iniciales dadas en la forma de pares (x_1i , x_2i). Adopte como paso de integración numérica $T = 0{,}001$ seg. y simule el sistema durante un tiempo igual a 100 segundos a partir de las condiciones iniciales (0,1), para los siguientes valores del parámetro ε :

$$\varepsilon = 0$$
$$\varepsilon = 1$$
$$\varepsilon = 10$$
$$\varepsilon = 50$$

Utilizando los comandos `subplot` y `plot` grafique la evolución temporal de x_1 vs. t del sistema para c/u de los valores del parámetro ε . ¿Cómo influye ε en el carácter oscilatorio de las variables?

d) Repita las simulaciones del punto anterior pero en este caso utilizando paso de integración $T = 10^{-1}$ seg. ¿Qué conclusión puede sacar respecto a la elección del paso de integración para la aproximación de la derivada utilizada en la discretización de la ecuación diferencial?

e) Escriba ahora un *function-file* usando Matlab que tenga como argumentos de salida los valores de x_1 y x_2 tomando como argumentos de entrada:
   - Las condiciones iniciales del sistema (x_1i , x_2i)
   - El paso de integración
   - El tiempo final de simulación (t_F).

   Incluya un `help` que explique cómo se utiliza la función.

f) El **plano de fase** de un sistema es una representación geométrica en un plano de un par de variables para distintos instantes de tiempo, es decir, cada punto de un plano de fase representa el valor de ese par de variables en un instante de tiempo dado. Así, si representamos los valores de dicho par de variables para distintos instantes de tiempo en un intervalo, por ejemplo t $\in [0, t_F]$, obtendremos una trayectoria. Para el caso de sistemas no lineales, como el que se estudia en este problema dicha trayectoria podría ser una curva cerrada periódica o tender luego de un tiempo suficientemente largo a una trayectoria cerrada; Si esta trayectoria cerrada es aislada se denomina **ciclo límite**.

   Utilizando la función del punto **e)** obtenga los valores y dibuje las trayectorias con colores diferentes (en el plano de fase $x_2 = f(x_1)$), inicializando el sistema desde 4 diferentes condiciones iniciales y para los valores $\varepsilon = 10$, $T = 0{,}001$ seg. y $t_F = 50$ seg :

A)	B)	C)	D)
$x_{1i} = 1$	$x_{1i} = -0.5$	$x_{1i} = -1$	$x_{1i} = 1.5$
$x_{2i} = 1$	$x_{2i} = -5$	$x_{2i} = 10$	$x_{2i} = -4$

g) Analice el comportamiento de las trayectorias que inician dentro y fuera del ciclo límite ¿El ciclo límite es estable, funcionando como atractor de las trayectorias? Analice el comportamiento del punto de equilibrio calculado en el apartado **b)** ¿Que sucede al inicializar el sistema desde cualquier punto tan cercano como se desee al punto de equilibrio?

<u>Problema 2:</u> Radar para medición de velocidad de vehículos

En los dispositivos usados para sensar el exceso de velocidad en vehículos se utiliza el principio del radar para medir la distancia al vehículo en dos instantes de tiempo T_1 y T_2 separados un intervalo conocido $\Delta T = T_2 - T_1$, como se representa en la Figura 2. Esto permite computar la velocidad del vehículo, ya que se conoce la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

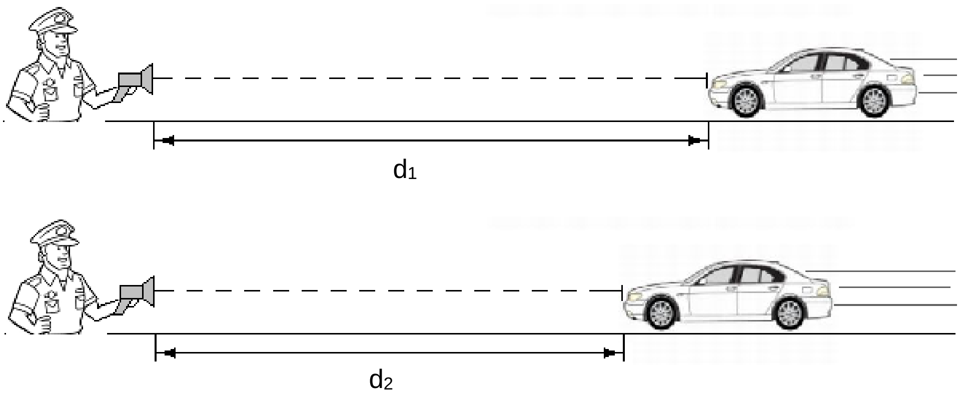

Figura 2: Sensado de velocidad de vehículos.

En el radar, la señal recibida y es una versión retrasada y atenuada de la señal transmitida x, corrupta por ruido, es decir

$$y(n) = \alpha\, x(n-D) + w(n)$$

donde $w(n)$ es una componente de ruido aditivo no correlacionado con la señal transmitida, D es el tiempo (expresado en muestras) que tarda la señal en alcanzar el vehículo y volver al radar, y α es un coeficiente de atenuación ($0< \alpha <1$).

Considere que la frecuencia de muestreo del radar es F_s = 100 MHz, que la velocidad de propagación de la onda electromagnética es $V = 3 \times 10^8$ m/s, y que ΔT = 16 s. Las señales x_1 e y_1 para el instante T_1, y x_2 e y_2 para el instante T_2, junto con el vector de tiempos t se encuentran en el archivo `datosProb2.mat`.

- **a.** Grafique en una misma ventana de figura, con dos colores diferentes, las secuencias de correlación cruzada $r_{y_1x_1}(\ell)$, y $r_{y_2x_2}(\ell)$, incluyendo un eje de abscisas apropiado.
- **b.** Determine las distancias d_1 y d_2. Justifique su respuesta.
- **c.** Determine la velocidad de circulación del vehículo detectada por el radar. Justifique su respuesta.