



Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

A3 - Sistemas y Señales 1

Trabajo Práctico N° 2:

Simulación Digital de Sistemas Dinámicos

Integrantes:

Gruboy, Iván - G-5561/1

Rodriguez, Javier - R-4326/5

Fecha de realización: 5 de Junio de 2023

Fecha de entrega: 14 de Junio de 2023

PRESENT.....	1,25
PROB. 1.....	4,00
PROB. 2.....	4,25

9,5

Junio 2023

1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.....	3
2.1. Problema 1: Sistema mecánico rotacional.....	3
2.1.1. Planteo.....	3
2.1.2. Interpretación física y ecuaciones de estados:.....	4
2.1.3. Ecuaciones de estados en forma matricial.....	5
2.1.4. Implementación en Matlab.....	6
2.1.5. Obtención de función transferencia y bode en Matlab.....	9
2.1.6. Comparación de datos.....	12
2.2. Problema 2: Sistema de Levitación magnética.....	13
2.2.1. Planteo.....	13
2.2.2. Interpretación física.....	14
2.2.3. Diagrama de bloques.....	15
2.2.4. Valores en el equilibrio.....	15
2.2.5. Simulación en Simulink.....	16
2.2.6. Modelo incremental lineal.....	19
2.2.7. Función Transferencia y Bode en Matlab.....	24
2.2.8. Control Proporcional.....	26
2.2.9. Simulación en Simulink del Control Proporcional.....	28
3. CONCLUSIONES.....	29

1. INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo práctico modelizaremos dos sistemas físicos a partir de ecuaciones diferenciales basándonos en sus leyes fundamentales. En función de dicho análisis, podremos visualizar el comportamiento de estos sistemas ante diferentes señales de entrada y salida. Esto lo lograremos aprovechando las rutinas de integración numérica que ofrece el software de cálculo Matlab y Simulink, los cuales dan solución a las ecuaciones diferenciales de forma más simple y la posibilidad de simular los sistemas, modificando las entradas y visualizando las señales donde se desee, para tener un mayor entendimiento del sistema.



2. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

2.1. Problema 1: Sistema mecánico rotacional

2.1.1. Planteo

En este ejercicio se analiza el funcionamiento de un sistema mecánico rotacional, cuyo modelo es 205a ECP, el cual se encuentra en el Laboratorio de Automatización y Control. Dicho sistema consta de 3 discos de masa variable, resortes de torsión para poder tener varias configuraciones, y un servo motor que permite simular diferentes torques aplicados al sistema. Esto se puede visualizar en las siguientes imágenes.



Figura 1: Modelo 205a ECP.

2.1.2. Interpretación física y ecuaciones de estados:

Este sistema mecánico rotacional, consta de dos inercias y dos resortes, con rozamiento tipo viscoso en ambas inercias. A continuación se puede ver un diagrama general del mismo:

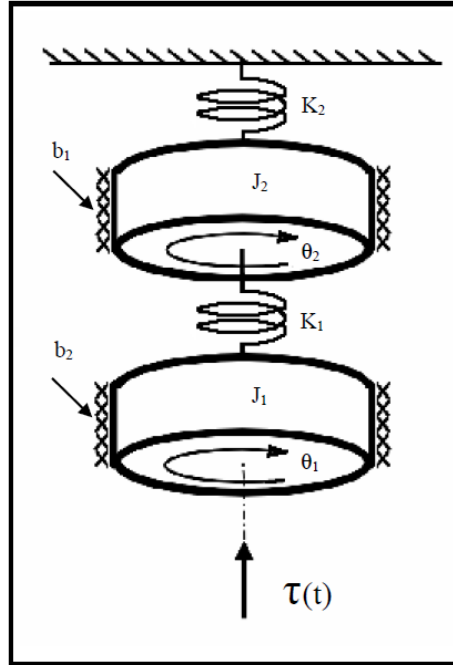


Figura 2: Diagrama para el sistema de dos inercias y dos resortes.

Según el diagrama que se muestra en la Figura 2, a partir de las leyes de Newton, se escribe el siguiente sistema de ecuaciones:

- Para el diagrama de la Figura 3:

$$\sum \tau = \tau(t) - \tau_{K1} - \tau_{b2} = J1 \cdot \dot{\omega}_1$$

$$J1 \cdot \dot{\omega}_1 = \tau(t) - k1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) - b2 \cdot \omega_1 \quad (1)$$

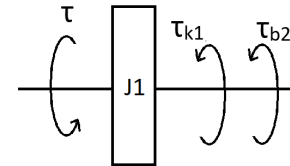


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre 1.

- Para el diagrama de la Figura 4:

$$\sum \tau = -\tau_{K1} - \tau_{K2} - \tau_{b1} = J2 \cdot \dot{\omega}_2$$

$$J2 \cdot \dot{\omega}_2 = -k1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) - K2 \cdot \theta_2 - b1 \cdot \omega_2 \quad (2)$$

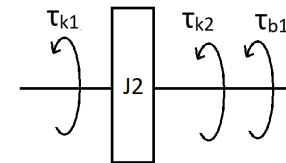


Figura 4: Diagrama de cuerpo libre 2.

Despejando la variable de mayor orden de las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_1} \cdot [\tau(t) - K_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) - b_2 \cdot \omega_1] \quad (3)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2} \cdot [K_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) - K_2 \cdot \theta_2 - b_1 \cdot \omega_2] \quad (4)$$

Se puede definir como variables de estados las distancias de giro y las velocidades de ambos discos en el siguiente vector x , el cual es:

$$[x] = \begin{cases} x_1 = \theta_1 \\ x_2 = \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ x_3 = \theta_2 \\ x_4 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases}$$

Reemplazando con las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J_1} \cdot [\tau(t) - K_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) - b_2 \cdot \omega_1] \\ \dot{x}_3 = \omega_2 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{J_2} \cdot [-K_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) - K_2 \cdot \theta_2 - b_1 \cdot \omega_2] \end{cases} \quad (5)$$

El sistema (5) se lo conoce como ecuaciones de estado, donde se describe la evolución dinámica de un sistema en función del tiempo relacionando las variables de estado con sus derivadas. Estas ecuaciones son una herramienta muy útil para poder analizar sistemas complejos.

2.1.3. Ecuaciones de estado en forma matricial

La forma matricial de las ecuaciones de estados tiene varias ventajas a la hora de querer interpretar la respuesta del sistema. Entre ellas, ayuda a poder analizar y resolver los sistemas dinámicos complejos utilizando métodos algebraicos. Además se puede, a partir de esta forma, simular y predecir el comportamiento del sistema en función del tiempo, el cual se realiza con Software de cálculo, como puede ser Matlab, en función de métodos de integración numérica.

Como este caso es un sistema lineal, las ecuaciones de estado se pueden escribir de forma matricial, como se muestra a continuación:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u(t)$$

Donde A es la matriz de transición y B es la matriz de entrada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K1}{J1} & \frac{-b2}{J1} & \frac{K1}{J1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K1}{J2} & 0 & \frac{-K1-K2}{J2} & \frac{-b1}{J2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando

$$\begin{bmatrix} \dot{x1} \\ \dot{x2} \\ \dot{x3} \\ \dot{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K1}{J1} & \frac{-b2}{J1} & \frac{K1}{J1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K1}{J2} & 0 & \frac{-K1-K2}{J2} & \frac{-b1}{J2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tau(t)$$

Tomando como ecuación de salida la posición de J1, la forma matricial sería:

$$y = C \cdot x + D \cdot u(t)$$

Donde C es la matriz de salida y D es la matriz de transferencia directa

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Reemplazando

$$y = \theta1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} + 0 \cdot \tau(t)$$

2.1.4. Implementación en Matlab

A continuación se hace uso del Software de cálculo Matlab, para poder hacer una interpretación física del sistema.

Primero se genera un *function-file*, con todos los valores de los parámetros y ecuaciones de estados

Se determinan los siguientes parámetros:

- $J1 = J2 = 0.009 [Nms^2/rad]$
- $K1 = K2 = 2.7114 [Nm/rad]$
- $b1 = b2 = 00.02 [Nms/rad]$

```

%=====SISTEMAS Y SEÑALES 1=====
% TRABAJO PRÁCTICO N°2
% Problema 1: Sistema mecánico rotacional
% Apartado 1-b)
% Se realiza una descripción de los parámetros del sistema mecánico
% rotacional
% Datos:
% T = Torque del sistema [N m]
% J1 y J2 = Inercias de los discos [N m s^2/rad]
% k1 y k2 = Constante elástica de los resortes [N m/rad]
% b1 y b2 = Rozamiento tipo viscoso en ambas inercias [N m s/rad]
% D = Duración [segundos]
function [dx] = Funcion_ej2(D,x)
J1=0.009;
J2=J1;
k1=2.7114;
k2=k1;
b1=0.02;
b2=b1;
if D<4
T=0.5;
else
T=0;
end
dx = [x(2);
(1/J1)*(T-k1*(x(1)-x(3))-(b2*x(2)));
x(4);
(1/J2)*(-k1*(x(3)-x(1))-(k2*x(3))-(b1*x(4)))] ;
end

```

Código 1: function-file con todos los parámetros y ecuaciones de estados del sistema

Al igual que en todos los programas, en el inicio de todos los códigos se agrega un help, donde se comenta que es lo que hace el mismo y el significado de cada variable.

En el Código 1 se crea la función llamada `Funcion_ej2`, la cual tiene como argumento la variable “D”, que indica la duración en la que se quiere analizar el sistema y “x”, la cual es la variable de estado. La función devuelve dx, que es un vector con las soluciones de las ecuaciones de estados.

Una vez que se tiene la función con las ecuaciones, se implementa un *script-file*, el cual se le da el tiempo, con una duración de 4 segundos y todas sus condiciones iniciales nulas, obteniendo así la respuesta del sistema a partir de subplots.

Para poder resolver el sistema, se utiliza la rutina de integración “ode45”, el cual resuelve EDOs no rígidas de orden 4 y 5. Las EDOs no rígidas se refiere cuando la relación entre la variable dependiente y sus derivadas es generalmente continua.

```

%=====SISTEMAS Y SEÑALES 1=====
% TRABAJO PRÁCTICO N°2
% Problema 1: Sistema mecánico rotacional
% Apartado 1-b)
% Se representa la respuesta al impulso con las siguientes
% características:
% x = condiciones iniciales
% D = Duración
[D,x] = ode45('Funcion_ej2',[0 8],[0;0;0;0]);
subplot(411)
plot(D,x(:,1));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x1 = d1');grid;
subplot(412)
plot(D,x(:,2));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x2 = v1');grid;
subplot(413)
plot(D,x(:,3));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x3 = d2');grid;
subplot(414)
plot(D,x(:,4));xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('x4 = v2');grid;

```

Código 2: Implementación del sistema

En *Código 2* se llama a la función anterior a partir de la rutina ode45, la cual se le da como argumento dos vectores,

- El primer vector indica el intervalo del tiempo, que va desde 0 a 8 segundos para que se pueda ver la respuesta del sistema aplicando por 4 segundos un torque de 0,5 Nm y después otros 4 segundos más con el sistema liberado.
- El otro vector indica las condiciones iniciales, las cuales son todas nulas.

Después de resolver las ecuaciones se grafica mediante subplots las 4 respuestas.

La respuesta obtenida al pulso τ , con condiciones iniciales nulas se representa en la siguiente figura.

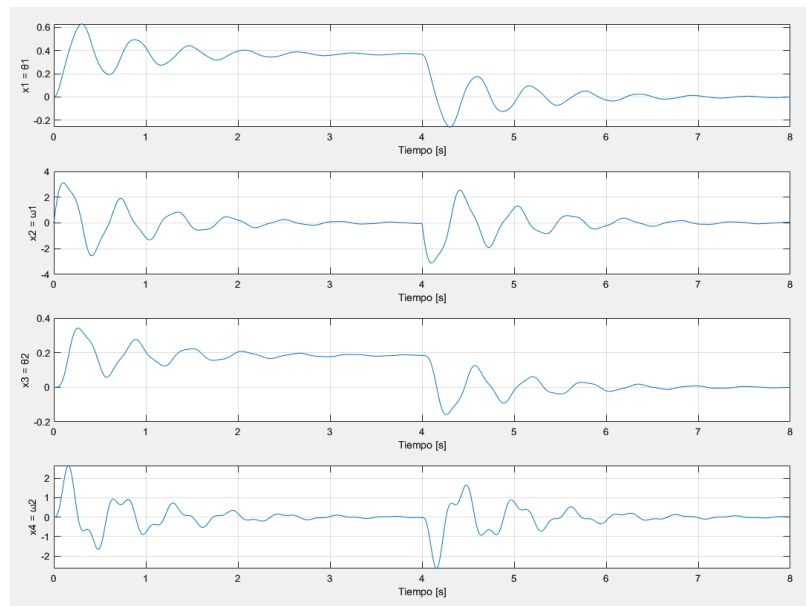


Figura 5: Respuesta a un pulso de amplitud 0,5 Nm y duración de 4 segundos.

En la *Figura 5* se aprecian los desplazamientos angulares y sus respectivas velocidades angulares. Del primer gráfico el desplazamiento de θ_1 donde se ve el movimiento subamortiguado producto del impulso proporcionado y de la fuerza de roce y la fuerza restitutiva, del resorte de torsión, que se oponen al impulso. También se ve la incidencia del momento que entrega el segundo disco, que también se ve afectado por el momento generado por el resorte de torsión. Una vez terminado el pulso, el momento actuante es el producido por la fuerza de restitución del resorte. Dicha fuerza genera un desplazamiento en sentido opuesto al realizado en primera instancia.

En el segundo gráfico, se muestra la velocidad angular del primer disco ω_1 . Mediante este gráfico podemos explicar los cambios en el desplazamiento, visto en el gráfico anterior. Analizando los valores del gráfico de la *Figura 3* podemos saber por qué se detiene el desplazamiento y comienza a desplazarse en sentido contrario. También en este caso, cuando finaliza el pulso, se comienza a visualizar una velocidad con sentido opuesto al dado al comienzo, producto de la fuerza restitutiva que queda ejerciendo un momento.

Para el tercer gráfico, analizamos el desplazamiento del segundo disco θ_2 . El cuál comienza a desplazarse luego de que comenzara el primer disco, esto es por efecto de la fuerza restitutiva del resorte. En este caso, contamos con la acción de dos resortes, que llamamos k_1 y k_2 . Donde K_1 genera el torque, que comienza a mostrar el desplazamiento en el segundo disco. Por esta misma razón es que se ve el cambio en el desplazamiento, luego de finalizado el pulso, con una leve diferencia temporal. Por otro lado, k_2 genera la fuerza restitutiva, entregando un momento en sentido opuesto al del primer resorte. El último momento generado, es producto de la fuerza de roce.

En última instancia, vemos el gráfico de la velocidad angular en el segundo disco ω_2 . Donde se ve una trayectoria similar a la de ω_1 . Aunque se muestra un más irregular que la primera, esto es debido a la acción de las fuerzas restitutivas en mayor medida. Y el efecto de atenuación será referido al rozamiento.

2.1.5. Obtención de función transferencia y bode en Matlab

A partir de los valores de los parámetros y de las matrices del sistema A,B,C y D, se podrá calcular la función transferencia en Matlab, utilizando distintas funciones como se muestra a continuación:

```
%=====SISTEMAS Y SEÑALES 1=====
% TRABAJO PRÁCTICO N°2
% Problema 1: Sistema mecánico rotacional
% Apartado 1-c)-d)
% Se calcula la función transferencia del sistema mecánico rotacional
% Datos:
% T = Torque del sistema [N m]
% J1 y J2 = Inercias de los discos [N m s^2/rad]
% k1 y k2 = Constante elástica de los resortes [N m/rad]
% b1 y b2 = Rozamiento tipo viscoso en ambas inercias [N m s/rad]
% D = Duración [segundos]
J1=0.009;
J2=J1;
k1=2.7114;
k2=k1;
b1=0.02;
b2=b1;
A=[0 1 0 0; (-k1/J1) (-b2/J1) (k1/J1) 0; 0 0 0 1; (k1/J2) 0 (-k1-k2/J2) (-b1/J2)];
B=[0; (1/J1); 0; 0];
C=[1 0 0 0];
D=0;
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
den(5)=0;
H=tf(num,den)
bode(H)
grid on
```

Código 3: Obtención de la función transferencia y diagrama de bode

El *Código 3* muestra como se puede obtener la función transferencia y el diagrama de bode, empezando con la función “ss2tf”, la cual toma como entrada las matrices del sistema, devuelve los coeficientes numéricos de la función transferencia correspondientes. Dichos coeficientes están separados en dos variables, los que están en el numerador “num” y los que están en el denominador “den”.

La función “tf” utiliza los coeficientes numéricos obtenidos anteriormente para poder obtener la ecuación de la función transferencia, que es la representada con la variable H.

Contando con la variable H, se puede calcular el diagrama de bode usando “bode”, la cual necesita como argumento la función transferencia.

Dicha función se puede visualizar a continuación

$H =$

$$\frac{111.1 s^2 + 246.9 s + 6.695e04}{s^4 + 4.444 s^3 + 908.7 s^2 + 2008 s + 9.076e04}$$

Luego se muestra el diagrama de Bode obtenido.

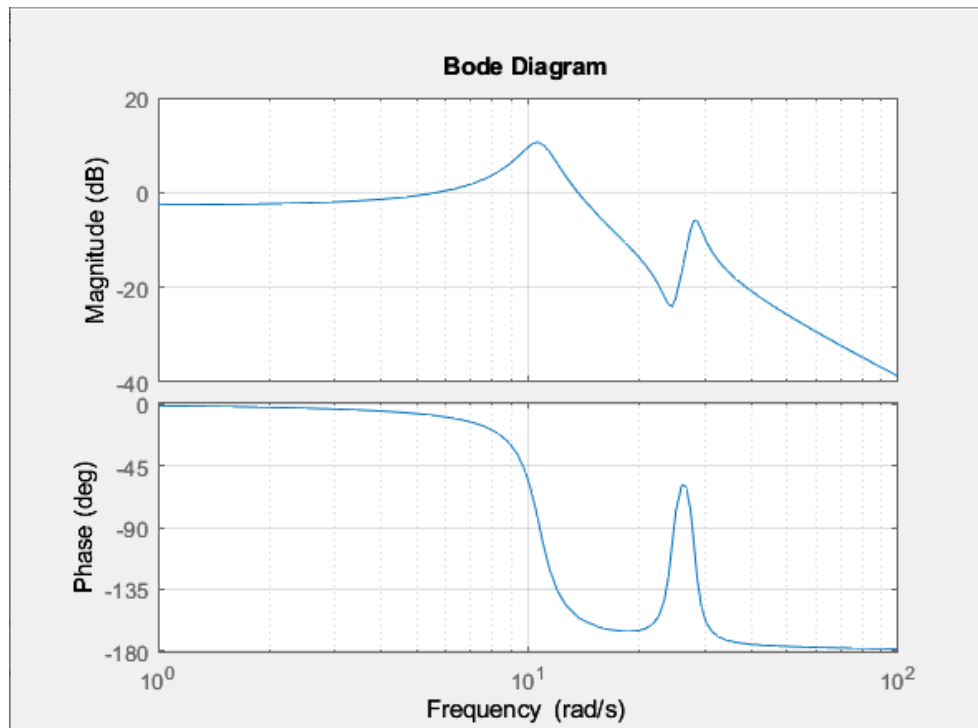


Figura 6: Diagrama de bode

Para poder obtener los polos y ceros, se utilizaron las funciones “pole” y “roots” respectivamente.

```
polos=pole(H)
```

Código 4: Obtención de polos

```
polos =  
  
-1.1111 +28.0623i  
-1.1111 -28.0623i  
-1.1111 +10.6695i  
-1.1111 -10.6695i
```

```
ceros=roots(num)
```

Código 5: Obtención de ceros

```
ceros =  
  
-1.1111 +24.5214i  
-1.1111 -24.5214i
```

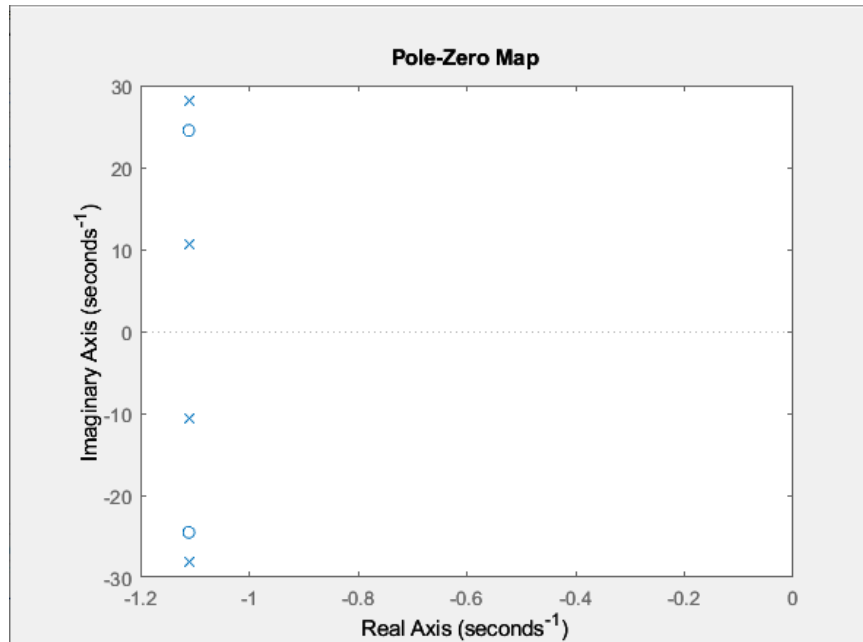


Figura 7: Diagrama de polos y ceros

Dado que la función transferencia es propia, ya que los coeficientes de mayor orden respetan la desigualdad $m \leq n$, y los polos resultan ser complejos conjugados, con su parte real negativa. Siendo estas condiciones necesarias y suficientes para probar la BIBO estabilidad del sistema, concluimos que el sistema es BIBO estable.

Tomando el diagrama de bode, que se muestra en la Figura 6, y los polos y ceros mostrados en la Figura 5. Vemos que se trata de una respuesta sub-amortiguada. ✓

Luego mediante la función damp, obtendremos los valores de ω_n y ξ para cada caso.

```
[Wn, zeta] = damp(H)
```

Código 6: Obtención de ceros

```
[wa, seta] = damp(num)
```

Código 7: Obtención de ceros

Obteniendo:

- Primer polo:
 $\omega_{nP1} = 28.0843$
 $\xi_{P1} = 0.1036$
- Segundo polo:
 $\omega_{nP2} = 10.7272$
 $\xi_{P2} = 0.0396$
- Cero:
 $\omega_{nZ} = 24.5466$
 $\xi_Z = 0.0453$

Analizando la gráfica de la *Figura 6*, vemos que muestra picos y valles. El primero de ellos se da a la frecuencia de $\omega_n = 10,7$ rad/s, la cual se corresponde con el segundo polo. Luego, si seguimos recorriendo los ω_n crecientes, nos encontramos con un valle en $\omega_n = 24,5$ rad/s, producto del cero. Finalmente nos encontramos con el último pico que se da en $\omega_n = 28,1$ rad/s, que muestra una correspondencia con el primer polo encontrado. /* ver la caída de db*/.

Para el diagrama de fase, notamos que la fase va a tender a -180 en el primer polo el paso por -90 para la frecuencia de $\omega_n = 10,7$ rad/s. Luego para la frecuencia $\omega_n = 24,5$ rad/s, comienza a aumentar, por la tendencia del cero a llevar la fase a 180. Pero la acción del primer polo y del segundo van a hacer que tienda a -180.

2.1.6. Comparación de datos

A continuación se comparan los datos calculados con los pasos anteriores con los datos obtenidos a partir del equipo de laboratorio ECP Model 205a. Estos últimos datos están volcados a través de una tabla en el archivo llamado “datos_TP2_P1_2020.m”, esto se hace a partir del *Código 8*:

```
%=====SISTEMAS Y SEÑALES 1=====
% TRABAJO PRÁCTICO N°2
% Problema 1: Sistema mecánico rotacional
% Apartado 1-f)
% Se compara los resultados con los datos calculados y medidos

datos_TP2_P1_2020 % Archivo con datos medidos
[T,x]=ode45('Funcion_ej2',[0 8],[0 0 0 0]);
subplot(211),
plot(T,x(:,1), 'r'), hold on % Posición de  $\theta_1$  calculado
plot(evol(:,2),(evol(:,4))/2544, 'b'),grid on % Posición de  $\theta_1$  medido
title('Respuesta a un pulso de amplitud 0.5 Nm y duracion 4 seg')
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Ángulo 1')
legend('Ángulo 1 calculado','Ángulo 1 medido')
subplot(212),
plot(T,x(:,3), 'r'), hold on % Posición de  $\theta_2$  calculado
plot(evol(:,2),(evol(:,5))/2544, 'b'),grid on % Posición de  $\theta_2$  medido
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Ángulo 2')
legend('Ángulo 2 calculado','Ángulo 2 medido')
```

Código 8: Comparación datos medidos y calculados

Lo primero que se hace es llamar al archivo donde se tienen los datos medidos, las cuales están distribuidas en 5 columnas:

- Columna 1: Muestras
- Columna 2: Tiempo
- Columna 3: Se ignora porque son todos 0
- Columna 4: Posición del encoder 1 (inercia 1)
- Columna 5: Posición del encoder 2 (inercia 2)

Luego calcular las ecuaciones mediante la rutina ode45, para así tener también los datos calculados.

Con estos dos datos se generan dos subplots, uno para el ángulo θ_1 y el otro para el θ_2 . Para cada subplots se genera dos plots, donde el primero se toma los datos calculados ($x_1=\theta_1$ y $x_3=\theta_2$) y el segundo con los datos medidos. Para este último se usan las columnas 2 y 4, estas indican el tiempo y el ángulo de la primera inercia respectivamente y las columnas 2 y 5 para el tiempo y ángulo de la inercia 2.

Para seleccionar todos los datos de la columna se escribe (:,nº de columna).

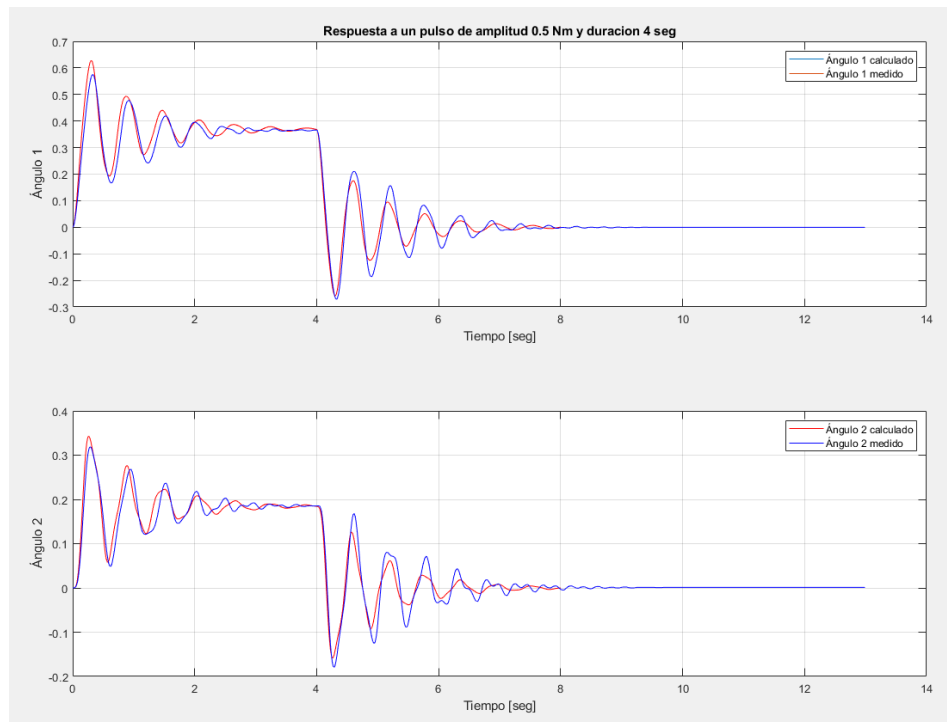


Figura 8: Gráfica comparativa entre datos calculados y medidos.

En la Figura 8 se puede ver que hay una pequeña diferencia entre la respuesta del sistema con datos reales y los calculados. Esto se debe a varias razones:

- Puede ser que el modelo físico no tenga rozamiento viscoso sino de otro tipo y esto no se esté considerando, esto es un parámetro que difiere de la realidad.
- La rutina ode45 que se usó para calcular las ecuaciones puede tener errores de discretización, a partir del tiempo en el que se integra la ecuación diferencial, y de truncamiento, al realizar aproximaciones y cálculos utilizando una cantidad finita de dígitos de precisión.

2.2. Problema 2: Sistema de Levitación magnética.

2.2.1. Planteo

En este problema se tiene una esfera diamagnética, donde el objetivo es lograr que la misma quede suspendida a una distancia $y(t)$ del extremo de un electroimán. Esto se realiza a través de una regulación de la corriente $i(t)$ que pasa por el electroimán mediante el control de la tensión de alimentación $u(t)$. El sistema se puede visualizar en la siguiente imagen:

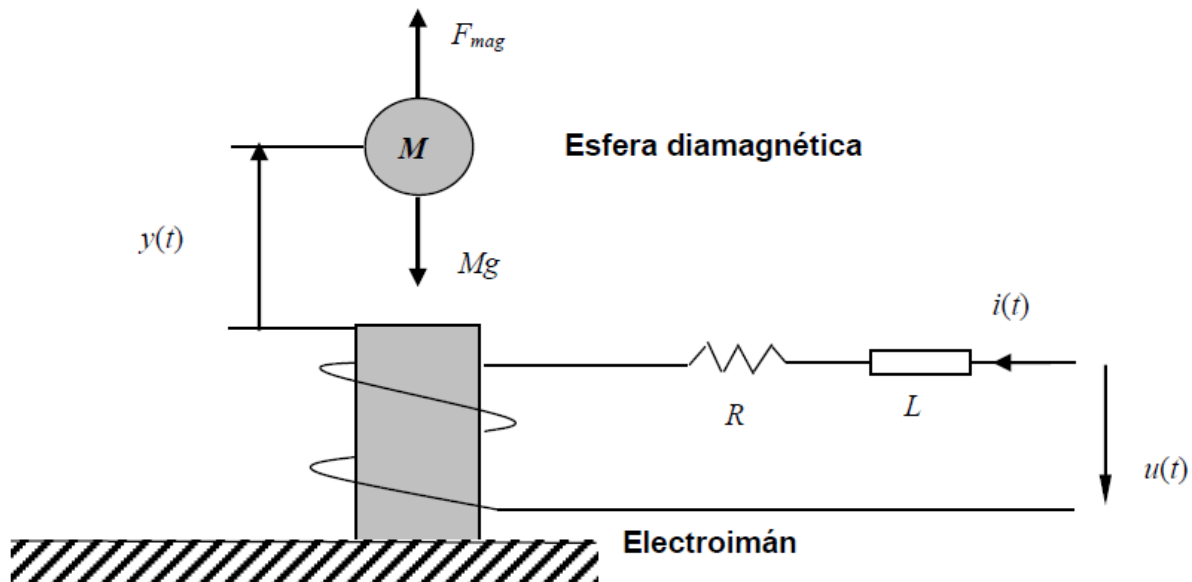


Figura 9: Diagrama esquemático de un sistema de suspensión magnética de una esfera.

2.2.2. Interpretación física

A continuación se realiza el análisis físico del problema, donde se estudia primero las fuerzas de la esfera diamagnética y luego las características eléctricas del circuito.

Para el análisis de la esfera se aplica la segunda Ley de Newton a partir de la Figura 10:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_{mag} - \bar{F}_b - \bar{P}$$

$$\bar{F}_{mag} - \bar{F}_b - \bar{P} = m \cdot a$$

Reemplazando

$$k \cdot \frac{i^2(t)}{y(t)} - b \cdot \dot{y}(t) - m \cdot g = m \cdot \ddot{y}$$

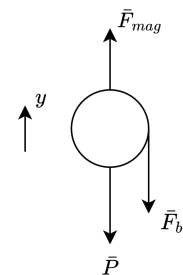


Figura 10: Diagrama de cuerpo libre esfera.

Despejando la variable de mayor orden nos queda:

$$\left[k \cdot \frac{i^2(t)}{y(t)} - b \cdot \dot{y}(t) - m \cdot g \right] \cdot \frac{1}{m} = \ddot{y} \quad (6)$$

Para el análisis del circuito se aplica la segunda Ley de Kirchhoff, a partir de la *Figura 11*:

$$u(t) = V_L + V_R$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$u(t) = L \cdot \dot{i}(t) + R \cdot i(t)$$

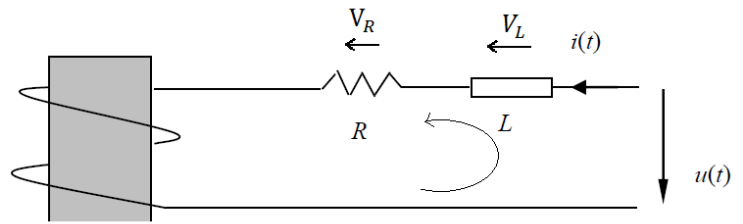


Figura 11: Circuito eléctrico.

Despejando la variable de mayor orden nos queda:

$$\dot{i}(t) = \frac{1}{L} [u(t) - R \cdot i(t)] \quad (7)$$

2.2.3. Diagrama de bloques

Partiendo de las ecuaciones físicas analizadas anteriormente, se realiza el diagrama en bloques del sistema, uniendo la parte eléctrica con la mecánica, cuya entrada es la tensión $u(t)$ del circuito y la salida es la posición $y(t)$ de la esfera con respecto al electroimán, como se muestra en la *Figura 12*.

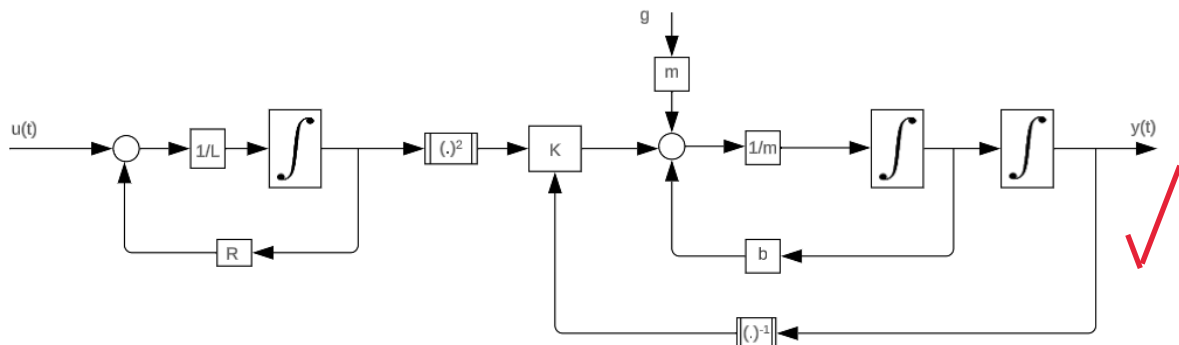


Figura 12: Diagrama en bloques del sistema.

2.2.4. Valores en el equilibrio

Tomando las ecuaciones obtenidas, se quiere obtener los valores de $y(t)$ e $i(t)$ en el equilibrio. Considerando una tensión de alimentación constante $u(t) = 10V$.

En las condiciones de equilibrio, se deben tomar todas las derivadas de todas las variables del sistema como nulas.

Para poder calcularlas se tienen los siguientes parámetros:

- $R = 20\Omega$
- $b = 0.5Ns/m$
- $L = 0.01Hy$
- $k = 2Nm/A^2$
- $M = 0.2kg$
- $g = 9.8m/s^2$

Se calcula la condición de equilibrio a partir de la ecuación (6), la cual se despeja la distancia de la siguiente forma:

$$k \cdot \frac{i^2(t)}{y(t)} - m \cdot g = 0$$

$$k \cdot \frac{i^2(t)}{y(t)} = m \cdot g$$

$$\frac{i^2(t)}{y(t)} = g \cdot \frac{m}{k}$$

$$y(t) = \frac{k}{m \cdot g} \cdot i^2(t)$$

Para calcular dicha condición de equilibrio, se necesita el dato de la corriente, la cual se saca a partir de la ecuación (7), cuyo despeje es:

$$\dot{i}(t) = \frac{1}{L} \cdot (u(t) - R \cdot i(t))$$

$$0 = u(t) - R \cdot i(t)$$

$$R \cdot i(t) = u(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Como se fijó que la tensión de entrada a 10V y se sabe el valor de la resistencia, la corriente es:

$$i(t) = \frac{10V}{20\Omega} \Rightarrow i(t) = 0.5A \quad (8) \quad \checkmark$$

Reemplazando con los parámetros anteriores se tiene un equilibrio en:

$$y(t) = \frac{2Nm/A^2}{0.2kg \cdot 9.8m/s^2} \cdot (0.5A)^2 = 0.255m \quad (9)$$

2.2.5. Simulación en Simulink.

De acuerdo al diagrama en bloques de la *Figura 12* se crea el diagrama en Simulink mostrado a continuación. Tomando como valores de iniciales para los integradores del subsistema eléctrico el valor de la ecuación (8) y del subsistema mecánico el valor de la ecuación (9)

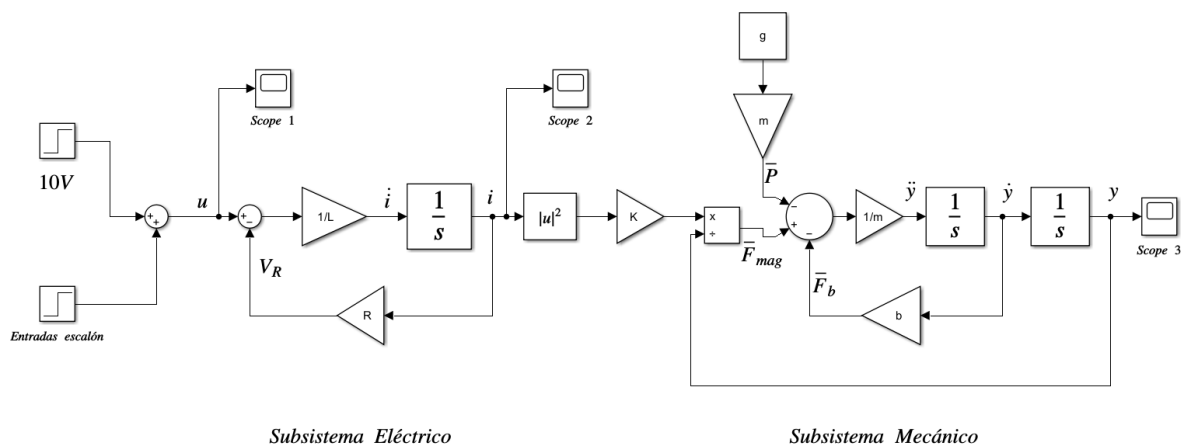


Figura 13: Diagrama en bloques del sistema en Simulink.

Según el diagrama de la *Figura 13*, se obtuvieron las siguientes respuestas de los osciloscopios respectivos.

El osciloscopio 1 visualiza la señal de entrada $u(t)$ (*Figura 14*), la cual está representada por los 10V, que se activa en a los 0 segundos y una entrada de escalón, en este caso es de 2V, que se activa 1 segundo después, haciendo que la tensión de entrada después de un segundo es de 12V.

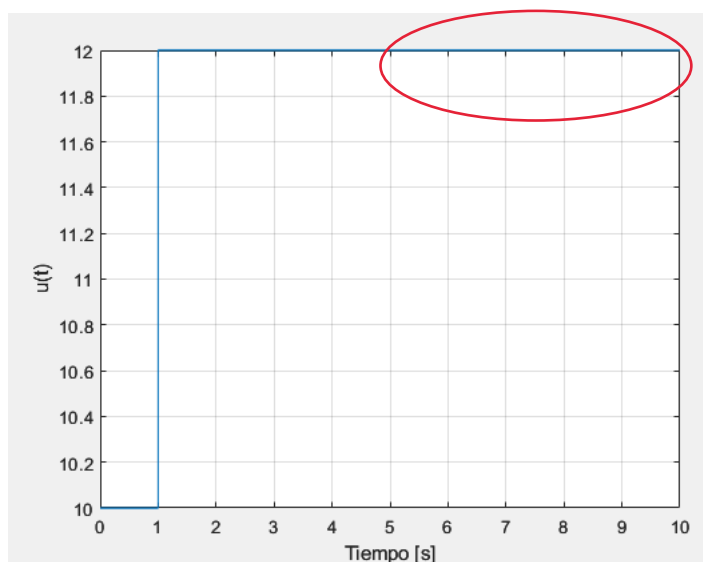


Figura 14: Gráfico del comportamiento de la tensión respecto al tiempo(para un escalón de 2V).

El osciloscopio 2 visualiza la señal de salida del subsistema eléctrico (*Figura 15*), cuya variable es $i(t)$, donde se puede ver que en el primer segundo se tiene la corriente de equilibrio calculada en la ecuación 8. Después de ese tiempo aumenta la corriente por la entrada de 2V, esta corriente es el nuevo valor de equilibrio de corriente.

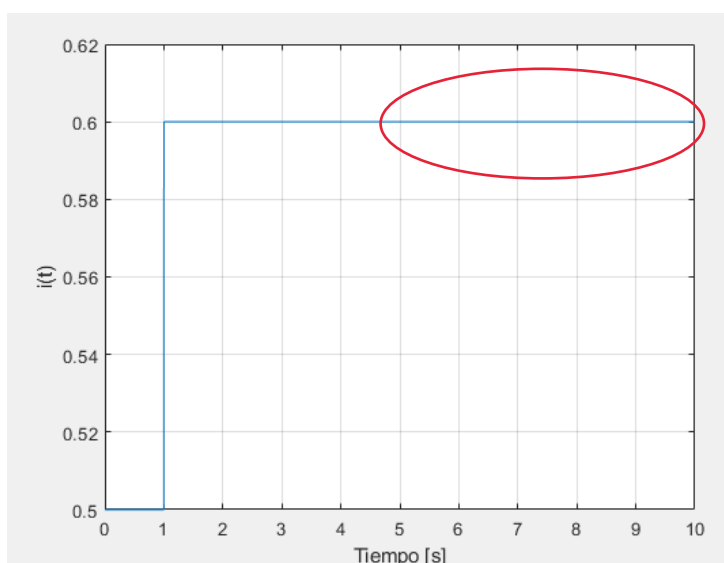


Figura 15: Gráfico del comportamiento de la corriente respecto al tiempo(para un escalón de 2V).

El osciloscopio 3 visualiza la señal de salida del subsistema mecánico (salida del sistema), cuya variable es $y(t)$. Esto representa el movimiento de la esfera diamagnética, donde se puede ver un movimiento subamortiguado, empezando desde su punto de equilibrio a los 0.255m.

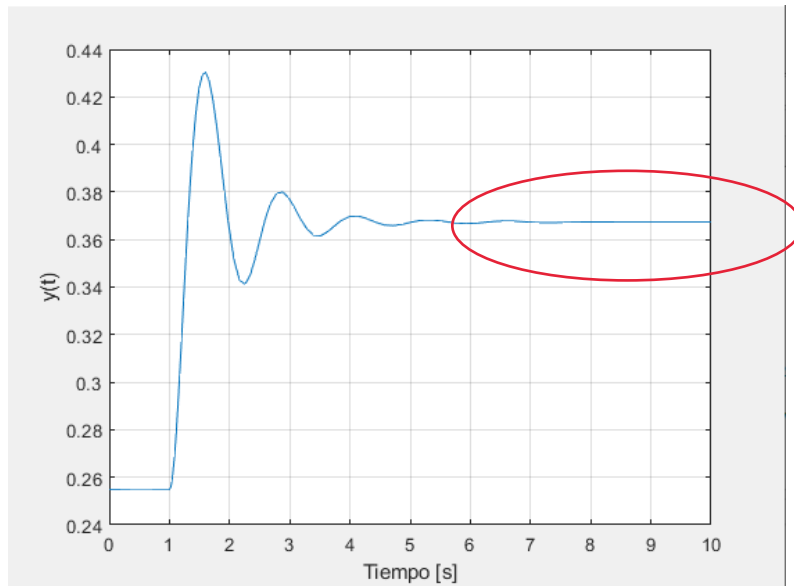


Figura 16: Gráfico del comportamiento de la posición respecto al tiempo(para un escalón de 2V).

En la Figura 16 se puede ver qué la esfera se mantiene constante en la posición de equilibrio calculada en la ecuación 9 durante el primer segundo.

Luego de ese tiempo se aleja de dicha posición, ya que aumenta 2V en la entrada. Este aumento llega hasta un punto máximo, el cual depende del rozamiento del aire, donde a partir de allí empieza a caer por su propio peso. Luego se vuelve a elevar por el electroimán y se repite este proceso, cada vez con menor amplitud, hasta que se llegue a un nuevo equilibrio, que debería ser más alto que los 0.255m ya que se aplica una entrada de mayor tensión.

Luego se hace el mismo ensayo pero con un escalón de entrada de 0.2V. A continuación se muestra la nueva señal del osciloscopio 1 visualizando la señal $u(t)$ en la Figura 17.

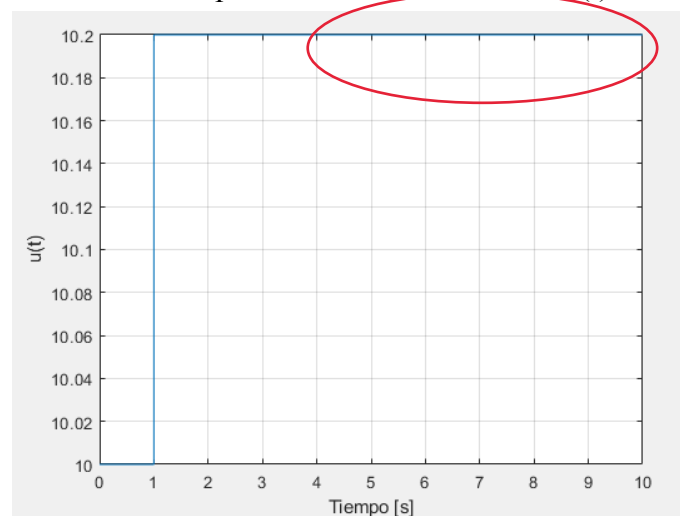


Figura 17: Gráfico del comportamiento de la tensión respecto al tiempo(para un escalón de 0.2V).

Se muestra la nueva señal del osciloscopio 2 en la *Figura 18*, donde se ve el mismo efecto que en la entrada anterior.

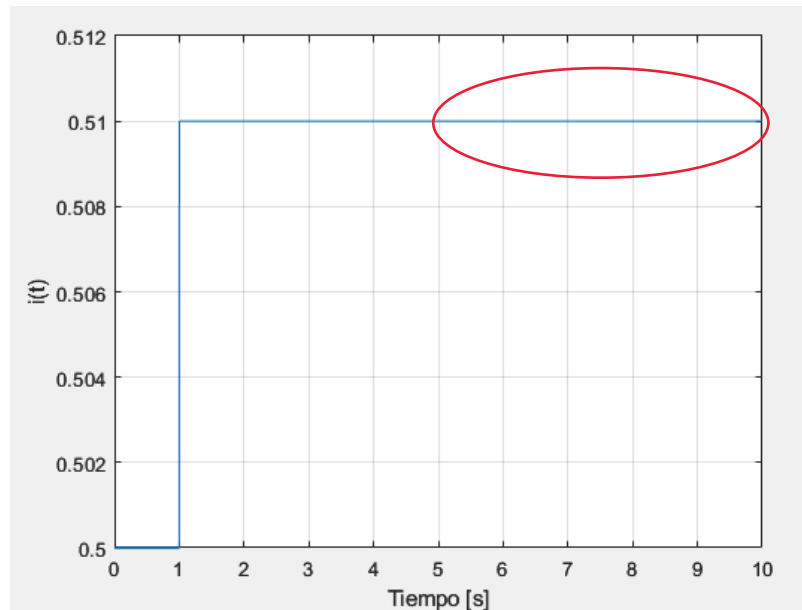


Figura 18: Gráfico del comportamiento de la corriente respecto al tiempo(para un escalón de 0.2V).

Ahora se tiene la respuesta visualizada en el osciloscopio 3 (*Figura 19*). Donde ahora se pueden ver algunas diferencias.

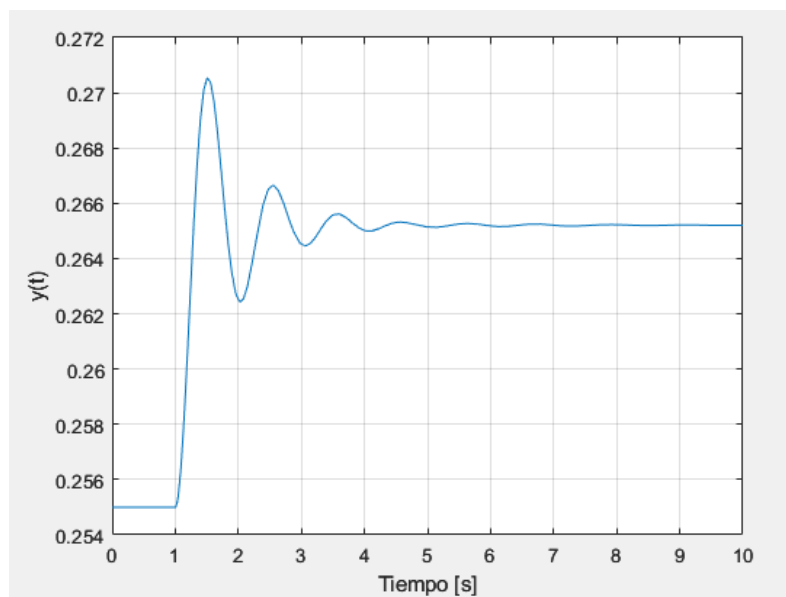


Figura 19: Gráfico del comportamiento de la posición respecto al tiempo(para un escalón de 0.2V).

En esta imagen se puede ver que la esfera repite la respuesta que en el ensayo anterior, donde el primer segundo sigue siendo continuo en la posición de equilibrio, pero después de este tiempo la esfera se eleva a una distancia menor. Esto se debe a que la tensión aplicada en el escalón fue menor, esto llevará a que la nueva posición de equilibrio sea menor también.

En las Figs. 14, 15, 16, 17, 18, y 19 no tiene sentido incluir tantos segundos de simulación donde la variable se mantiene constante. Es preferible acortar el tiempo de simulación o la parte de las gráficas que se muestra para que tenga mayor rango de variación los instantes de tiempo donde la variable varía.

2.2.6. Modelo incremental lineal.

A partir de la relación que se tiene para la fuerza magnética de la esfera, la cual vincula la corriente del circuito con la posición de la esfera, hace que el sistema resulte no lineal.

Para pequeñas variaciones alrededor de una posición de equilibrio (correspondiente a un valor constante de $u(t)$) la relación para la fuerza magnética se puede aproximar por una ecuación lineal de la forma:

$$F_{mag} \approx \bar{F}_{mag} + k_i \Delta i(t) + k_y \Delta y(t) \quad (10)$$

Partiendo de la fórmula (10), se tiene que la fuerza magnética y los coeficientes k_i y k_y se calculan de la siguiente manera:

$$\bar{F}_{mag} = \frac{k \cdot \bar{i}^2}{\bar{y}} \quad k_i = \frac{\partial F_{mag}}{\partial i} \quad k_y = \frac{\partial F_{mag}}{\partial y}$$

Teniendo los datos de todos los parámetros se calcula el valor de los coeficientes de la siguiente forma:

$$k_i = \frac{\partial F_{mag}}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{k \cdot \bar{i}^2}{\bar{y}} \right) = \frac{k \cdot 2 \cdot \bar{i}}{\bar{y}} = \frac{2Nm/A^2 \cdot 2 \cdot 0.5A}{0.255m} = 7.84N/A$$

$$k_y = \frac{\partial F_{mag}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k \cdot \bar{i}^2}{\bar{y}} \right) = -\frac{k \cdot \bar{i}^2}{\bar{y}^2} = \frac{2Nm/A^2 \cdot (0.5A)^2}{(0.255m)^2} = -7.68N/A$$

A partir de la ecuación (6), reemplazando \bar{F}_{mag} por (10) y pasivando las entradas correspondientes a los valores de equilibrio, se obtiene la siguiente ecuación.

$$[\bar{F}_{mag} + k_i \Delta i(t) + k_y \Delta y(t) - b \cdot \dot{y}(t)] \cdot \frac{1}{m} = \ddot{y}$$

Debido al cambio al modelo incremental lineal. Se obtiene el siguiente diagrama de bloques.

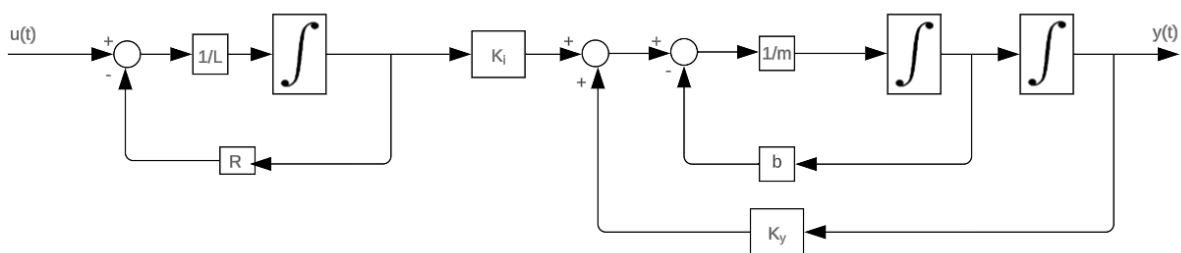


Figura 20: Diagrama en bloques del sistema.

Una vez obtenido el diagrama de bloques, se implementó en Simulink. Para obtener las respuestas del sistema.

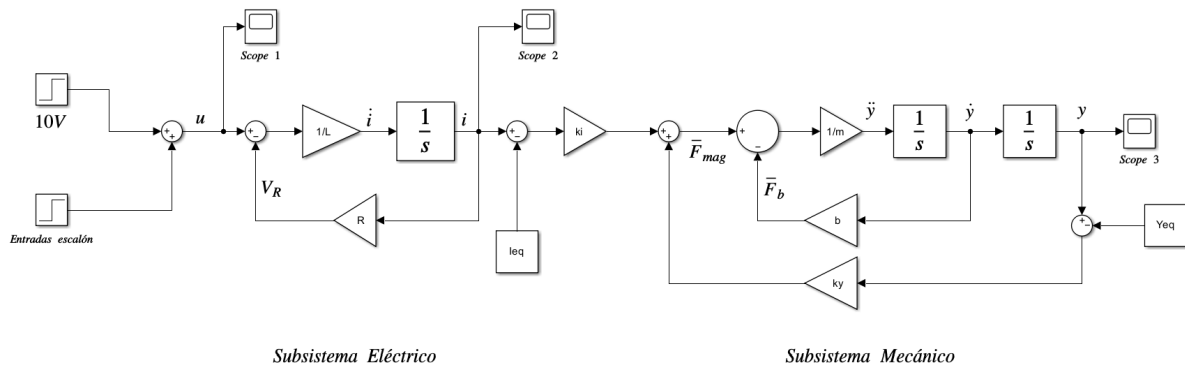


Figura 21: Diagrama en bloques del sistema en Simulink.

Mediante la implementación del diagrama de bloques de la *Figura 21*, se obtuvieron las siguientes gráficas de los respectivos osciloscopio, teniendo la misma entrada, con una tensión de 10V en el tiempo 0 y después de un segundo el escalón de 2V y 0.2V.

Las señales de los primeros dos osciloscopios es la misma que la que se tenía en el diagrama anterior ya que no se modifica nada en esa etapa, como se ven en la *Figura 22* y *Figura 23*.

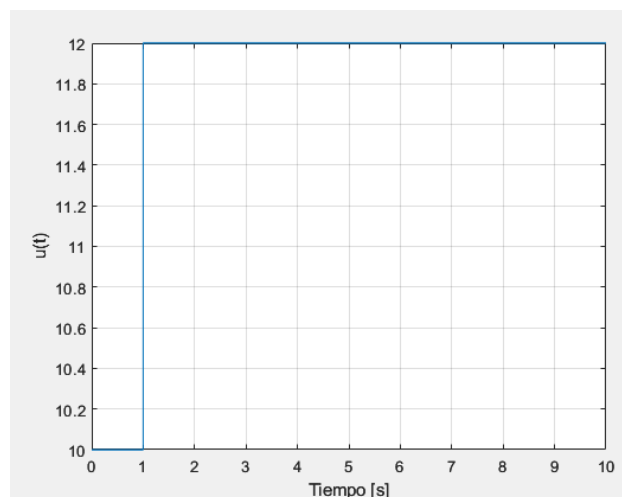


Figura 22: Gráfico del comportamiento de la tensión respecto al tiempo, segundo diagrama (para un escalón de 2V).

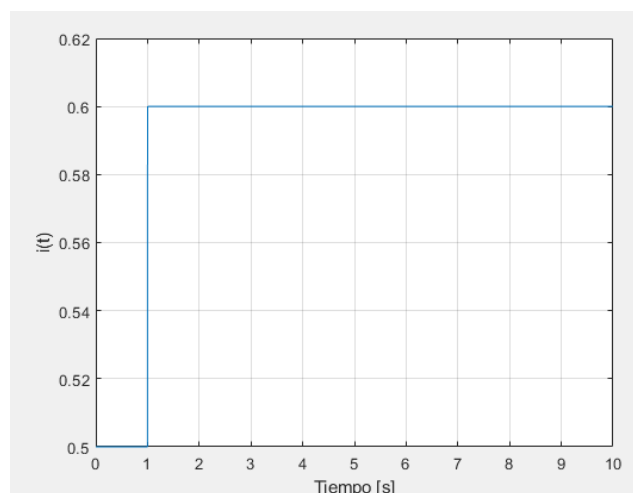


Figura 23: Gráfico del comportamiento de la corriente respecto al tiempo, segundo diagrama (para un escalón de 2V).

En la *Figura 24*, se puede ver un resultado similar que con el bloque anterior, pero con una distancia menor tanto en el movimiento como en la posición de equilibrio.

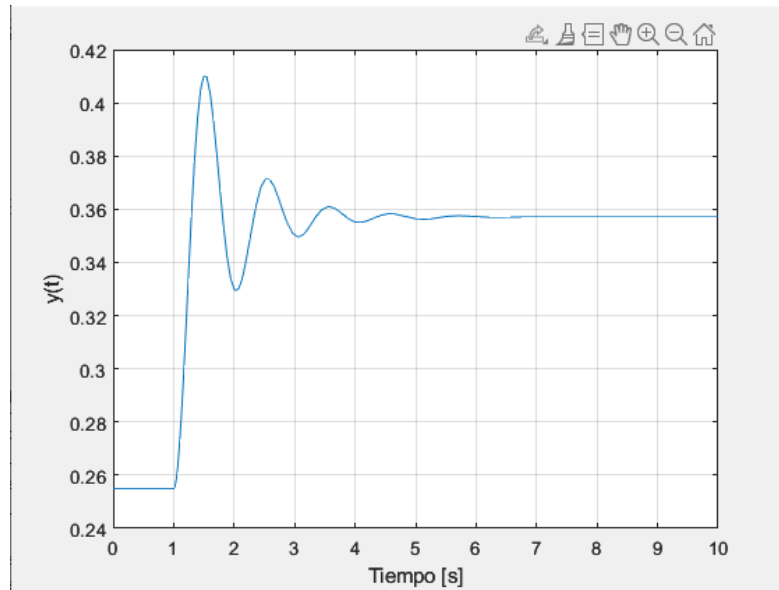


Figura 24: Gráfico del comportamiento de la posición respecto al tiempo, segundo diagrama (para un escalón de 2V).

Ahora se ven las respuestas con la entrada de escalón de 0.2V.

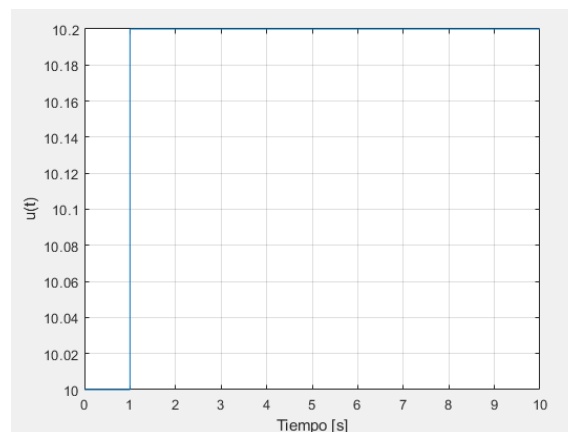


Figura 25: Gráfico del comportamiento de la tensión respecto al tiempo, segundo diagrama (para un escalón de 0.2V).

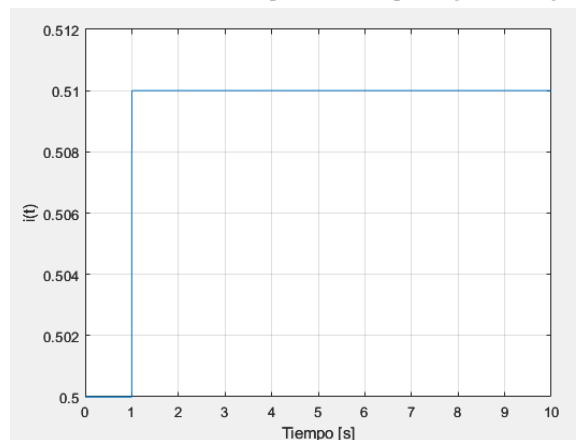


Figura 26: Gráfico del comportamiento de la corriente respecto al tiempo, segundo diagrama (para un escalón de 0.2V).

En la *Figura 24*, se puede ver el mismo resultado que con el bloque anterior, los movimientos y la posición de equilibrio no varía mucho.

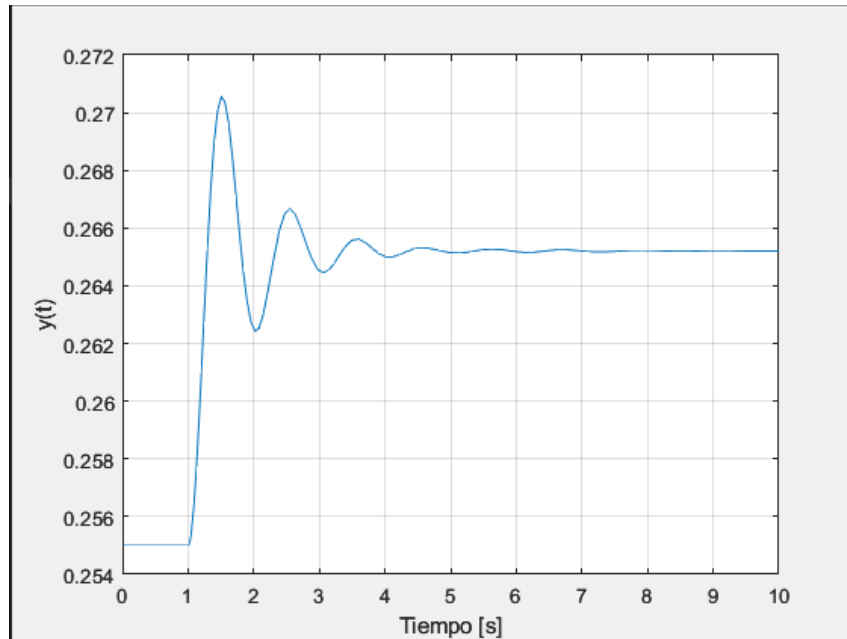


Figura 27: Gráfico del comportamiento de la posición respecto al tiempo (para un escalón de 0.2V).

Una vez realizada las simulaciones para los casos de entrada al escalón de 2V y 0.2V, se visualizan en la misma gráfica las distintas posiciones con la misma entrada en ambos bloques. Esto se hace para que se puedan apreciar las diferencias con las simulaciones previamente realizadas de una mejor fórmula.

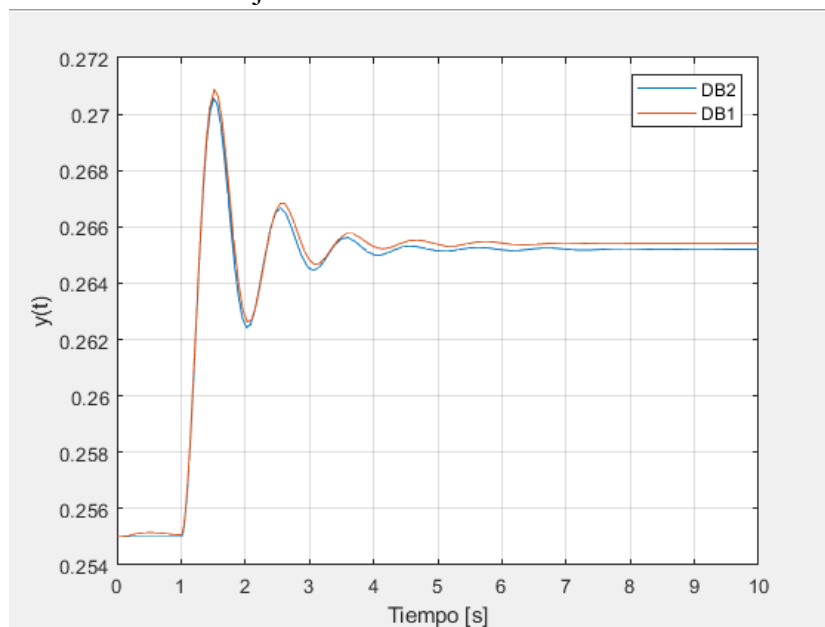


Figura 28: Gráfico comparativo de la posición en función del tiempo para los dos diagramas implementados (para el escalón de 0.2V).

En la *Figura 28*, se analiza el caso del escalón 0.2V en el cual la variación con respecto a la posición de equilibrio es pequeña. Se ve que la diferencia entre los dos modelos es mínima.

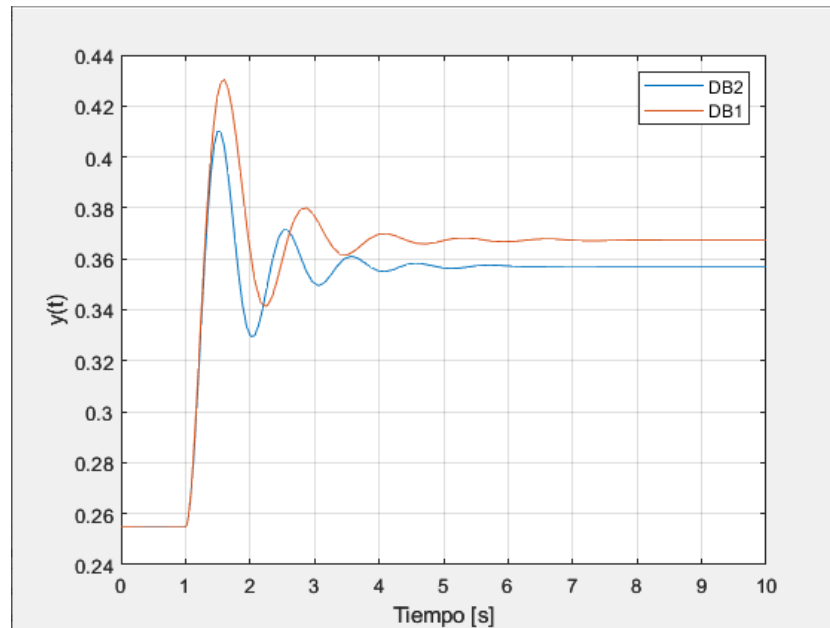


Figura 29: Gráfico comparativo de la posición en función del tiempo para los dos diagramas implementados (para el escalón de 2V).

Para el caso de la *Figura 29*, se analiza el caso del escalón 2V, donde las diferencias entre ambos bloques es mayor.

Recuerden que linealizaron el sistema entorno del punto de equilibrio, cuanto más se aparten peor será la aproximación !

Como conclusión se puede llegar que cuanto más baja sea la variación de tensión de entrada con respecto a la del equilibrio (en este caso la de 10V) se tienen diferencias menores en la respuesta del sistema que a entradas más alejadas a la misma. Esto se debe a que en el segundo diagrama, se tienen valores prefijados de equilibrio, tanto en la corriente como en la posición, afectando así la respuesta del sistema cuando se aleje del equilibrio.

Algo que se tiene en común, es que a mayor tensión de entrada, mayor va a ser el movimiento de la esfera con respecto al punto de equilibrio a 10V, y el nuevo equilibrio va a tener una posición más alta.

2.2.7. Función Transferencia y Bode en Matlab.

Siguiendo el diagrama en bloques de la *Figura 20*, se calcula la función transferencia con los valores de las constantes calculadas anteriormente. Para que el cálculo sea más sencillo, se separa en tres funciones tomando todas las retroalimentaciones del sistema.

La primer función transferencia que se calcula es la del subsistema eléctrico, dicha función se llama G1

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{L} \cdot s}{1 + \frac{1}{L} \cdot s \cdot R} \cdot k_i = \frac{\frac{1}{L} \cdot s}{1 + \frac{R}{L} \cdot s} \cdot k_i = \frac{k_i}{1 + \frac{R}{L} \cdot s}$$

Las otras dos funciones son a partir del subsistema mecánico, se calculan dos ya que se tienen dos retroalimentaciones. La función llamada G2 es la retroalimentación de la fuerza de roce.

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{m} \cdot s}{1 + \frac{1}{m} \cdot s \cdot b} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{m \cdot s + b}$$

La G3 es el conjunto de las retroalimentaciones del subsistema mecánico, depende de G2.

$$G_3(s) = \frac{G_2}{1 - G_2 \cdot k_y} = \frac{\frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s}}{\frac{m \cdot s^2 + b \cdot s - k_y}{m \cdot s^2 + b \cdot s}} = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s - k_y}$$

Quedando así dos funciones equivalentes G1 y G3. Estas se multiplican para llegar a la función transferencia del sistema

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_3(s) = \frac{k_i}{L \cdot s + R} \cdot \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s - k_y} = \frac{k_i}{(L \cdot s + R) \cdot (m \cdot s^2 + b \cdot s - k_y)}$$

Desarrollando un poco más se llega a la siguiente función.

$$G(s) = \frac{k_i}{(L \cdot s + R) \cdot (m \cdot s^2 + b \cdot s - k_y)} = \frac{k_i}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y}$$

Reemplazando la fórmula anterior con los parámetros queda

$$G(s) = \frac{7.84N/A}{(0.2kg \cdot 0.01Hy) \cdot s^3 + (0.5Ns/m \cdot 0.01Hy + 20\Omega \cdot 0.2kg) \cdot s^2 + (20\Omega \cdot 0.5Ns/m - (-7.68N/A)) \cdot s - 20\Omega \cdot (-7.68N/A)}$$

$$G(s) = \frac{7.84}{0.002 \cdot s^3 + 4.005s^2 + 10.08 \cdot s + 153.6}$$

Calculando ahora los polos

$$G(s) = \frac{7.84}{(s+2000) \cdot (s+(-1.25+j6.06)) \cdot (s+(-1.25-j6.06))}$$

Se puede ver que un polo es real negativo y los otros dos polos son complejos conjugados, cuya parte real es negativa, Por lo tanto todos sus polos están en el semiplano negativo, esto indica que el sistema es BIBO estable.

A continuación se pasaron todos los parámetros y datos de las función transferencia del sistema a Matlab para poder graficar el diagrama de Bode

```
%=====SISTEMAS Y SEÑALES 1=====
% TRABAJO PRÁCTICO N°2
%Problema 2: Sistema de Levitación magnética
%Apartado 2- j)
%Se calcula la función transferencia del sistema
% Datos:
% R = Resistencia del circuito eléctrico [Ω]
% b = Coeficiente de rozamiento del aire [Ns/m]
% L = Inductancia del circuito eléctrico [Hy]
% m = Masa del material [Kg]
% g = Aceleración de la gravedad [m/s^2]
% ki = Coeficiente producto de la linealización de la fuerza [N/A]
% ky = Coeficiente producto de la linealización de la fuerza [N/A]
R=20;
b=0.5;
L=0.01;
m=0.2;
g=9.8;
ki=7.84;
ky=-7.68;
kp = 1000;
num = ki;
den = [m*L (b*L + R*m) (R*b-L*ky) -R*ky];
H=tf(num,den)
figure(1);
bode(H)
grid on
```

Código 9: Comparación datos medidos y calculados

En el *Código 9* al igual que el *Código 3* se ⁿgráfico el diagrama de Bode a través de la función `tf`, cargando primero los coeficientes del numerador y denominador (`num` y `dem` respectivamente)

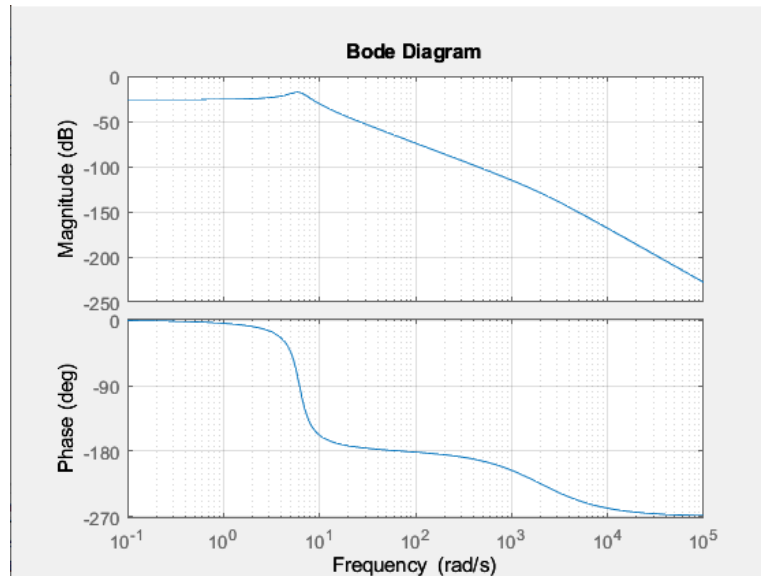


Figura 30: Diagrama de Bode obtenido en Matlab.

Al igual que el *Código 4* se obtieneⁿ los polos

```
polos =

    1.0e+03 *

    -2.0000 + 0.0000i
    -0.0012 + 0.0061i
    -0.0012 - 0.0061i
```

Al igual que el *Código 3* se obtiene la función transferencia desde Matlab

```
H =

    7.84
-----
0.002 s^3 + 4.005 s^2 + 10.08 s + 153.6
```

2.2.8. Control Proporcional.

Se implementa un control por retroalimentación de salida del tipo P (Proporcional) para el modelo del diagrama de bloques de la *Figura 20*

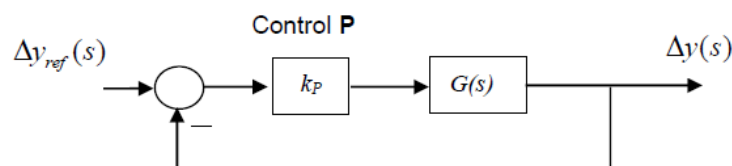


Figura 31: Control Proporcional.

Primero se calcula la función transferencia de este nuevo sistema representado en la *Figura 32*.

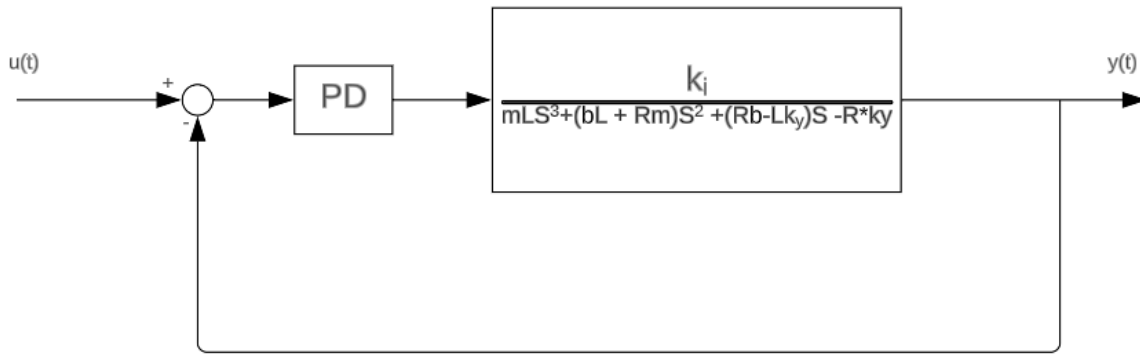


Figura 32: Control Proporcional con función transferencia reemplazada.

$$G_{eq} = \frac{\frac{k_p \cdot k_i}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y}}{1 + \frac{k_p \cdot k_i}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y}} = \frac{k_p \cdot k_i}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y} \cdot \frac{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y + k_p \cdot k_i}$$

$$G_{eq} = \frac{k_p \cdot k_i}{m \cdot L \cdot s^3 + (b \cdot L + R \cdot m) \cdot s^2 + (R \cdot b - L \cdot k_y) \cdot s - R \cdot k_y + k_p \cdot k_i}$$

Para saber la BIBO estabilidad del sistema, se calcula la constante k_p con el método de Routh

$$\begin{array}{ccc} s^3 & m \cdot L & R \cdot b + L \cdot k_y \\ s^2 & (b \cdot L + R \cdot m) & -R \cdot k_y + k_p \cdot k_i \\ s^1 & b_2 & 0 \\ s^0 & b_3 & \end{array}$$

Para simplificar la resolución se reemplazan las variables por:

$$\begin{aligned} m \cdot L &= a_1 \\ R \cdot b - L \cdot k_y &= a_2 \\ b \cdot L + R \cdot m &= b_1 \\ -R \cdot k_y &= c \end{aligned}$$

Quedando el siguiente Routh:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & a_1 & a_2 \\ s^2 & b_1 & c \\ s^1 & b_2 & 0 \\ s^0 & b_3 & \end{array}$$

Calculando los coeficientes se tiene:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{-(a_1 \cdot (c + k_i \cdot k_p) - (a_2 \cdot b_1))}{b_1} \\ b_2 &> 0 \\ -(a_1 \cdot (c + k_i \cdot k_p) - (a_2 \cdot b_1)) &> 0 \\ (a_2 \cdot b_1) - a_1 \cdot (c + k_i \cdot k_p) &> 0 \\ a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot c &> a_1 \cdot k_i \cdot k_p \\ \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot c}{a_1 \cdot k_i} &> k_p \end{aligned}$$

Reemplazando por los valores de los parámetros, se calcula k_p :

$$\frac{4.005 \cdot 10.077 - 0.002 \cdot 153.6}{0.002 \cdot 7.84} > k_p$$

$$2554.28 > k_p$$

$$b_3 > 0$$

$$c + k_i \cdot k_p > 0$$

$$k_i \cdot k_p > -c$$

$$k_p > -\frac{c}{k_i}$$

$$k_p > -\frac{153.6}{7.84}$$

$$k_p > -19.59$$

Se puede ver que la constante k_p queda dentro del intervalo

$$-19.59 < k_p < 2554.28$$



2.2.9. Simulación en Simulink del Control Proporcional.

Utilizando la función transferencia calculada anteriormente, se ensaya el sistema en el Simulink

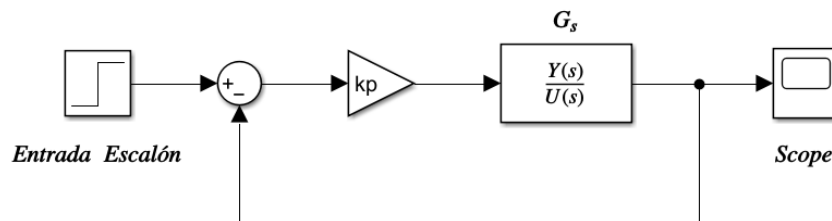


Figura 33: Diagrama en bloques del sistema en Simulink.

Se presenta en la Figura 34 la señal del osciloscopio, representando la posición de la esfera

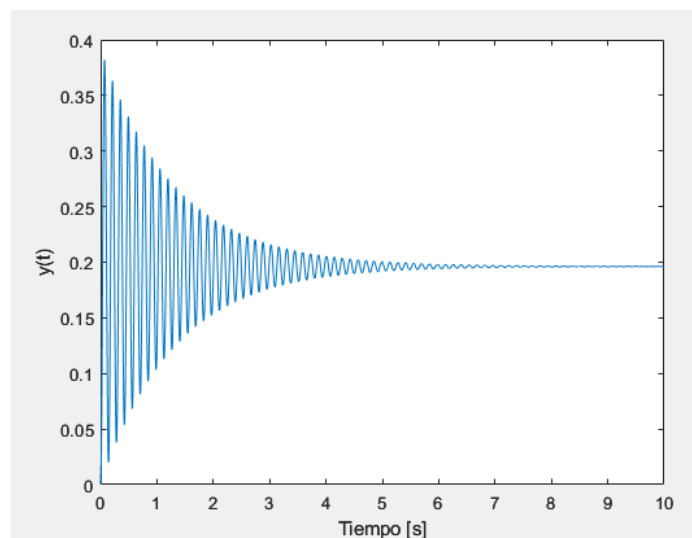


Figura 34: Respuesta del bloque Control Proporcional.

Comentarios ?

Los polos del sistema se calcularon usando la función pole en Matlab y dio como resultado

```
polos =  
  
1.0e+03 *  
  
-2.0010 + 0.0000i  
-0.0008 + 0.0447i  
-0.0008 - 0.0447i
```

Se puede ver que el primer polo, real negativo, tiene una evolución mucho más rápida que los otros dos polos complejos conjugados, por esta razón casi no tienen influencia en la salida, extinguiéndose rápidamente. Con respecto a los polos complejos, tienen una parte real muy chica, por eso tarda más tiempo en extinguirse

Podrían implementar el control sobre el sistema sin linealizar y ver si el control realmente sirve

3. CONCLUSIONES

Mediante el desarrollo del trabajo práctico, pudimos entender cómo modelar un sistema físico, y mediante el uso del software de control numérico, podíamos llegar a obtener respuestas consistentes con lo planteado teóricamente. Esto resulta de gran utilidad, debido a que permite aplicar ciertas variaciones a los parámetros del sistema, para obtener una respuesta. Gracias a la obtención de dicha respuesta, podemos tener más precisiones a la hora de llevar a cabo la construcción de este sistema.

En el caso del sistema mecánico rotacional, partiendo de las leyes físicas que lo gobernaban, se llegó a una modelización del sistema. La cuál nos permitió conocer su comportamiento a un pulso y su respuesta en frecuencia, además de poder probar su BIBO estabilidad. Se pudo llegar a la modelización, valiéndonos de herramientas como “ode45” para obtener la solución a las ecuaciones diferenciales obtenidas mediante las ecuaciones de estado. Las cuales fueron planteadas para poder simplificar las ecuaciones diferenciales de segundo orden propias del planteo de las leyes físicas antes mencionadas.

Para la situación siguiente, se presenta una esfera diamagnética elevada por la fuerza magnética, que es controlada por un circuito eléctrico. Para la resolución de este problema se recurrió al uso de diagramas de bloque. Obtenidos del planteo de las leyes de Kirchoff y Newton, dependiendo de si se trataba del circuito o de la acción de fuerzas. Para simular el sistema se utilizó el software Simulink. En el cuál pudimos volcar los diagramas de bloques y conocer la respuesta al escalón entregado, la estabilidad del sistema y su respuesta en frecuencia. En la modelización del sistema nos encontramos con la dificultad que significó la no linealidad de la fuerza magnética. En el Simulink se resolvió ingresando un bloque que pudiera elevar al cuadrado a la entrada de ese bloque. Luego se obtuvo una forma lineal de la fuerza. Al ingresar esta forma linealizada, teniendo en cuenta de que era necesario incluir las condiciones de equilibrio del sistema, se obtuvo una respuesta consistente en primera instancia. Al comparar las dos respuestas obtenidas, la altura de la esfera diamagnética en ambos casos, se notó que a medida que la variación entre la condición de equilibrio y el escalón ingresado era mayor, los factores adicionales de la linealización tomaban mayor partido y generaban modificaciones en los valores de la salida.

A lo largo del desarrollo del trabajo práctico. Han surgido complicaciones, las cuales fueron solucionadas recurriendo a la documentación de matlab y el material de clase.