HOJA DE EJERCICIOS NÚMEROS REALES. MATEMÁTICAS I

1) Indica cuales de estos números son racionales y cuales irracionales. Los racionales exprésalos como una fracción:

a) $4{,}56565656\ldots$ b) π c) $0{,}123456789101112\ldots$ d) $5{,}2311111\ldots$

e) $\sqrt{2}$ f) $84{,}246$ g) -5 h) $0{,}12112111211112\ldots$ i) $\sqrt{7+\sqrt{4}}$

2) Expresa en forma de conjunto y de intervalo:

a) Números comprendidos entre 2 y 5 sin incluirlos.

b) Números mayores o iguales que – 4.

c) Números mayores que 0 pero menores o iguales que 7.

d) Números que no son más pequeños que 2.

3) Calcula las siguientes uniones e intersecciones de intervalos:

a) $(1,5)\cap(3,6)$ b) $[-7,0)\cap[-3,+\infty]$ c) $(4,9)\cap[3,9]$ d) $(-\infty,1)\cap(2,8)$

e) $[2,5)\cup(4,7]$ f) $(-\infty,2)\cup(-2,5]$ g) $(-\infty,13)\cup(3,+\infty)$ h) $(0,8)\cup[8,10)$

4) El diámetro de la tierra es de 12756820 metros, y la longitud de un glóbulo rojo es aproximadamente de 0,006513 cm. Contesta:

a) Redondea la primera medida a las decenas de millar y la segunda a las milésimas.

b) Calcula en ambos casos el error absoluto y relativo de la aproximación.

c) ¿Qué aproximación es mejor?

5) Calcula una cota del error relativo que se comete al realizar las siguientes aproximaciones:

a) Al aproximar $\sqrt{3}$ por 1,7 ($\sqrt{3}\approx 1{,}73205080756\ldots$)

b) Al aproximar el número e por 2,72 ($e\approx 2{,}71828182459\ldots$)

6) Escribe en notación científica los siguientes valores:

A =540000 B = 0,0168 C = 5000000 D = 0,000002 E = $452\cdot10^{5}$ F = $0{,}035\cdot10^{-2}$

7) Con los valores del apartado anterior puestos en notación científica, realiza estas operaciones y expresa en notación científica el resultado:

a) A + C b) D – F c) B·E d) A:C

8) Realiza estas operaciones combinadas y expresa el resultado en notación científica

a) $\left(4{,}5\cdot10^{-6}+8\cdot10^{-7}\right):\left(6{,}4\cdot10^{-3}\right)$ b) $7{,}82\cdot10^{4}-\left(1{,}8\cdot10^{-9}\right)\left(2{,}5\cdot10^{15}\right)$

9) Expresa en forma de potencia las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[8]{3^5}$ c) $\sqrt{13}$ d) $\sqrt[4]{x^7}$ e) $\sqrt{z^n}$

10) Reduce el índice de las siguientes raíces lo máximo posible:

a) $\sqrt[6]{3^9}$ b) $\sqrt[10]{2^6}$ c) $\sqrt[15]{8}$ d) $\sqrt[16]{9^2}$ e) $\sqrt[20]{32}$ f) $\sqrt[12]{7^4 \cdot 49}$

11) Reduce a índice común los siguientes pares de raíces:

a) $\sqrt{7}$ y $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ y $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[12]{5}$ y $\sqrt[8]{7}$ d) $\sqrt[10]{27}$ y $\sqrt[4]{32}$ e) $\sqrt[4]{8}$ y $\sqrt[6]{32}$

12) Ordena las siguientes raíces de menor a mayor valor (sin aproximar con la calculadora)

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[6]{2^4},\quad \sqrt[10]{2^3},\quad \sqrt[15]{2^7}$$

13) Extrae fuera de las siguientes raíces todos los factores posibles:

a) $\sqrt{288}$ b) $\sqrt[3]{2160}$ c) $\sqrt[7]{\dfrac{5^{10}\cdot 3^{15}}{2^8}}$ d) $\sqrt[4]{4\cdot 2^3 x^{10}}$

e) $\sqrt[5]{a^5 b^6 c^7}$ f) $\sqrt{\dfrac{2^9 \cdot 4^3}{8}}$ g) $\sqrt[3]{a^7 \cdot (a^4)^2}$ h) $\sqrt[4]{9^3 \cdot 27}$

14) Introduce dentro de las raíces los factores que están fuera:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\cdot 5\sqrt[3]{5}$ c) $a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$ d) $2^5 \cdot 3^6 \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3^2}$ e) $2a^2 x \cdot \sqrt[5]{a \cdot x^4}$

15) Reduce las siguientes expresiones lo máximo posible:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{300}$ b) $-3\sqrt[3]{56} + 9\sqrt[3]{189}$ c) $2\sqrt{40} + \sqrt[4]{3} - \sqrt{90} - \sqrt[4]{48}$

d) $5\sqrt{44b^2} - 7\sqrt{99b^2} + b\sqrt{11}$ e) $5\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{49}$ f) $8\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x} + \sqrt[6]{64x^2}$

16) Reduce las siguientes expresiones hasta dejarlas en una única raíz:

a) $\sqrt{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}}$ b) $\dfrac{\sqrt[10]{32}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$ e) $\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}$ f) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{5}} : \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ g) $\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt[4]{2}}}$

17) Racionaliza las siguientes expresiones y simplifícalas todo lo posible:

a) $\dfrac{-2}{\sqrt{14}}$ b) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{10}{2\sqrt[3]{4}}$ e) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$

f) $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$ g) $\dfrac{6}{\sqrt[6]{32}}$ h) $\dfrac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{27}}$ i) $\dfrac{-8}{6-\sqrt{6}}$ j) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

18) Demuestra que el número $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{3\sqrt[3]{4}}$ es un número entero de dos formas distintas: racionalizando y extrayendo factores.

19) Realiza las siguientes sumas y restas.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} + 5\sqrt{12}$ b) $\dfrac{22}{2\sqrt{5}-3} - 7\sqrt{45} - 6$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

20) Calcula el valor de x en las siguientes expresiones con logaritmos:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_5 x = 3$ d) $\log_{\frac{1}{5}} x = 2$

e) $\log_x 100 = 2$ f) $\log_{10} 100000 = x$ g) $\log_x 121 = 4$ h) $\log_{\sqrt{2}} 16 = x$

21) Con un cambio de base apropiado, calcula los siguientes logaritmos sin usar la calculadora:

a) $\log_{0,1} 1000$ b) $\log_{25} \sqrt[6]{5}$ c) $\log_{0,5} 16$ d) $\log_{49} 343$

22) Desarrolla los siguientes logaritmos lo máximo posible:

a) $\log(3\cdot x)$ b) $\log(x^2 \cdot y^5)$ c) $\log(\frac{6x}{5a})$ d) $\log(\sqrt{2x})$

23) Pasar a base decimal y calcular con la calculadora:

a) $\log_3 7$ b) $\log_2 10$ c) $\log_{0,6} 13$ d) $\log_4 0,85$

24) Apoyándote en que log5 = 0,7 y en que log3 = 0,48, calcula los siguientes logaritmos decimales sin uso de la calculadora:

a) $\log 15$ b) $\log 75$ c) $\log \frac{3}{5}$ d) $\log 0,03$

e) $\log 30$ f) $\log \frac{125}{9}$ g) $\log \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ h) $\log 0,\widehat{5}$

25) Usando las propiedades, pero en sentido inverso, reduce las siguientes expresiones a un solo logaritmo:

a) $\log_2(3) + \log_2(11)$ b) $3\cdot\log(7) - \log(2)$ c) $\log_5 10 + \frac{\log_5(9)}{4}$

d) $4\cdot\log_7(9) - 3\cdot\log_7(5)$ e) $-\ln(4) + \frac{\ln(3)}{2}$ f) $\frac{\log_3(8)}{5} - 4\cdot\log_3(6) - \frac{1}{2}\cdot\log_3(10)$

26) Si usar la calculadora deduce el valor de $\log_7 5 \cdot \log_5 7$

27) Sabiendo que $\log_b(x) = 0,8$ y que $\log_b(y) = -1,2$, calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_b(x^2 y)$ b) $\log_b\left(\frac{x}{y^3}\right)$ c) $\log_b(b^5 \cdot x^3)$

d) $\log_b\left(\frac{1}{by}\right)$ e) $\log_b(\sqrt{xy})$ f) $\log_b\left(\frac{x}{\sqrt[4]{y^3}}\right)$

28) Comprime las siguientes expresiones para dejarlas en un solo logaritmo.

a) $\log(x) - \log(y) + \log(z)$ b) $3\log(a) - \frac{\log(b)}{7}$

c) $-5\log(x) + \frac{9}{2}\log(z)$ d) $\log(a) - 3\log(b) - 2$

29) Con el uso de la calculadora despeja x en las siguientes igualdades.

a) $5^x = 80$ b) $2\cdot 3^x = 100$ c) $3\cdot 7^x - 42 = 0$ d) $7 + 8\cdot 6^{x-3} = 105$

30) Una ciudad tiene este año 4200 habitantes, pero cada año la población crece multiplicándose aproximadamente por 1,05. Calcula aproximadamente cuantos años deben pasar para que se superen los 7000 habitantes.

31) ¿Cuántos años deben pasar para que, al ingresar 2000 euros al 3% de interés, nos generen al menos 2600 €?

32) La Ley del enfriamiento de Newton establece que si un objeto está a una temperatura T_0 y se pone en un lugar donde la temperatura ambiente es T_a, al pasar t minutos la temperatura se transforma según esta fórmula:

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}$$

Donde k es una constante que depende del objeto. Para una taza de café esa constante vale -0,069315. Si ese café está a 80º y la temperatura ambiente es de 20º, ¿cuántos minutos deben pasar para que la temperatura del café baje a 60º?

33) Hemos comprado un coche por 20000 €. Cada año que pasa, el valor del coche disminuye en un 4%. Calcula cuántos años deben transcurrir para que el valor del coche se haya reducido a la mitad del valor inicial. ¿Cambiaría ese tiempo si el valor del coche es distinto?

34) Un bebé recién nacido pesa 3,5 kg. Se estima que durante sus primeros meses de vida su peso va aumentando un 3% cada semana. Calcula cuántas semanas deben transcurrir para que el bebé supere los 8 kg.

35) Según la curva del olvido del filósofo Ebbinghaus, si a día de hoy nos estudiamos una serie de contenidos y desde hoy no los repasamos más, el porcentaje de contenidos que recordaremos al transcurrir t días viene dado por la fórmula $P = 100 \cdot e^{-\frac{t}{1,62}}$. Calcula cuántos días deben transcurrir para que solamente recordemos el 15% de los contenidos estudiados.

36) Imagina un folio tan grande que podamos doblar por la mitad todas las veces que queramos. Si el grosor de un folio es de 0,1 mm y la distancia hasta la luna es de 384400 km, calcula cuántas veces deberíamos doblar el folio para que llegara a la luna.

37) (Ampliación). El matemático hindú Brahmagupta pensó que el valor exacto de π coincidía con la raíz cuadrada de 10. Calcula una cota del error que cometió con esta aproximación.

38) (Ampliación). Racionaliza la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

39) (Ampliación). Si a < b son dos números positivos, deduce quién es mayor, si $\log_a b$ o $\log_b a$.

40) (Ampliación). Calcula el valor de esta fórmula, debida al físico Paul Dirac.

$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\ldots.\sqrt{2}}}$, donde el número de raíces cuadradas es N.

Soluciones:

1) Los irracionales son b, c, e y h. Para los otros, a = $\frac{452}{99}$, d = $\frac{4708}{900}$, f = $\frac{84246}{1000}$, g = $\frac{-5}{1}$, i = $\frac{3}{1}$

2) a) $\{x / 2 < x < 5\} = (2,5)$ b) $\{x / -4 \le x\} = [-4,+\infty)$ c) $\{x / 0 < x \le 7\} = (0,7]$ d) $\{x / 2 \le x\} = [2,+\infty)$

3) a) $(3,5)$ b) $[-3,0)$ c) $(4,9)$ d) $\varnothing$ e) $[2,7]$ f) $(-\infty,5]$ g) $(-\infty,+\infty)$ h) $(0,10)$

4) a) 12760000 y 0,007 b) Los errores absolutos son 3180 m y 0,000487 cm y los errores relativos son 0,00025 y 0,075. c) La aproximación del diámetro de la tierra es mejor.

5) a) 0,055 b) 0,00369

6) a) $5{,}4 \cdot 10^5$ b) $1{,}68 \cdot 10^{-2}$ c) $5 \cdot 10^6$ d) $2 \cdot 10^{-6}$ e) $4{,}52 \cdot 10^7$ f) $3{,}5 \cdot 10^{-4}$

7) a) $5{,}54 \cdot 10^6$ b) $-3{,}48 \cdot 10^{-4}$ c) $7{,}5936 \cdot 10^5$ d) $1{,}08 \cdot 10^{-1}$

8) a) $8{,}28125 \cdot 10^{-4}$ b) $-4{,}4218 \cdot 10^6$

9) a) $7^{\frac{1}{3}}$ b) $3^{\frac{5}{8}}$ c) $13^{\frac{1}{2}}$ d) $x^{\frac{7}{4}}$ e) $z^{\frac{n}{2}}$

10) a) $\sqrt{3^3}$ b) $\sqrt[5]{2^3}$ c) $\sqrt[5]{2}$ d) $\sqrt[4]{3}$ e) $\sqrt[4]{2}$ f) $\sqrt{7}$

11) a) $\sqrt[4]{7^2}$ y $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[30]{a^{12}}$ y $\sqrt[30]{a^{15}}$ c) $\sqrt[24]{5^2}$ y $\sqrt[24]{7^3}$ d) $\sqrt[20]{27^2}$ y $\sqrt[20]{32^5}$ e) $\sqrt[12]{2^9}$ y $\sqrt[12]{2^{10}}$

12) $\sqrt[10]{2^3} < \sqrt[15]{2^7} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{2^4}$

13) a) $2^2\cdot 3\sqrt{2}$ b) $2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2\cdot 5}$ c) $\frac{5\cdot 3^2}{2}\cdot\sqrt[7]{\frac{5^3\cdot 3}{2}}$ d) $2x^2\cdot\sqrt[4]{2x^2}$ e) $abc\sqrt[5]{bc^2}$ f) 2^6 g) a^5 h) $3^2\cdot\sqrt[4]{3}$

14) a) $\sqrt{2^3}$ b) $\sqrt[3]{3^3\cdot 5^4}$ c) $\sqrt[4]{a^9}$ d) $\sqrt{2^{13}\cdot 3^{14}}$ e) $\sqrt[5]{2^5\cdot a^{11}\cdot x^9}$

15) a) $-18\sqrt{3}$ b) $21\cdot\sqrt[3]{7}$ c) $\sqrt{10}-\sqrt[4]{3}$ d) $-10b\sqrt{11}$ e) $9\sqrt{7}$ f) $40\cdot\sqrt[3]{x}$

16) a) $\sqrt[4]{360}$ b)1 c) $\sqrt[21]{25}$ d) $\sqrt[9]{243}$ e) $\sqrt[20]{32}$ f) $\sqrt[24]{2560}$ g) $\sqrt[12]{\frac{400}{162}}$

17) a) $\frac{-\sqrt{14}}{7}$ b) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{2\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{3})}{7}$ d) $\frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$ e) $\sqrt[4]{5^3}$ f) $\sqrt{5}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{8})$ g) $3\cdot\sqrt[6]{2}$ h) $\frac{\sqrt[4]{21}}{3}$ i) $\frac{-4\cdot(6+\sqrt{6})}{15}$ j) $-\sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot(1-\sqrt{2})$

18) En ambos casos es 1. 19) a) $12\sqrt{3}$ b) $-17\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$

20) a) x = 6 b) x = 3 c) x = 125 d) x = 1/25 e) x = 10 f) x = 5 g) $x = \sqrt{11}$ h) x = 8

21) a) -3 b) 1/12 c) -4 d) 3/2

22) a) $\log(3)+\log(x)$ b) $2\log(x)+5\log(y)$ c) $\log(6)+\log(x)-\log(2)-\log(a)$ d) $\frac{\log(2)+\log(x)}{2}$

23) a) 1,77 b) 3,32 c) -5,02 d) -0,12

24) a) 1,18 b) 1,88 c) – 0,22 d) -1,52 e) 1,48 f) 1,14 g) – 0,175 h) – 0,26

25) a) $\log_2(33)$ b) $\log(\frac{343}{2})$ c) $\log_5(10\cdot\sqrt[4]{9})$ d) $\log_7\left(\frac{9^4}{5^3}\right)$ e) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ f) $\log_3\left(\frac{\sqrt[5]{8}}{6^4\cdot\sqrt{10}}\right)$

26) 1 27) a) 0,4 b) 4,4 c) 7,4 d) 0,2 e) – 0,2 f) 1,7

28) a) $\log(\frac{xz}{y})$ b) $log\left(\frac{a^3}{\sqrt[7]{b}}\right)$ c) $log\left(\frac{\sqrt{z^9}}{x^5}\right)$ d) $log\left(\frac{a}{100b^3}\right)$

29) a) 2,72 b) 3,56 c) 1,36 d) 4,4

30) 10,47 años 31) 8,88 años 32) 5,85 minutos 33) Unos 17 años. No

34) Unas 28 semanas. 35) Unos 3 días 36) 41,8 ≈ 42 veces.