ОМСС...

SFS

28 декабря 2024 г.

Билеты

1. Основные понятия и законы классической механики

   (a) Тела, масса. Взаимодействия тел. Система сил, результирующая сила. Сбалансированность и попарная уравновешенность системы сил.

   (b) Мир событий как модель вместилища для реального мира движущихся и взаимодействующих тел, системы отсчета. Родственные системы отсчета, замена системы отсчета. Движение, актуальные конфигурации тел. Основные характеристики движений и взаимодействий. Преобразование кинематических характеристик при замене системы отсчета.

   (c) Основные законы классической механики: закон сохранения массы, закон соотнесенности сил и конфигураций тел, закон независимости мощности работы результирующих сил от системы отсчета. Теорема о сбалансированности системы сил и следствие о попарной уравновешенности сил и моментов сил этой системы.

   (d) Большая система активно взаимодействующих тел. Инерциальные системы отсчета. Законы инерции Ньютона. Активные силы и силы инерции, даламберово равновесие. Первый и второй законы движения Эйлера.

2. Основные гипотезы механики сплошной среды. Способы описания движения сплошной среды

   (a) Основные гипотезы механики сплошной среды: гипотеза сплошности (гладкости движения), гипотеза распределенности массы, гипотезы распределенности массовых и поверхностных сил; контактный характер поверхностных сил. Законы движения Коши—Эйлера в механике сплошной среды.

   (b) Способы описания движения: материальное описание, лагранжевы способы (отсчетное и относительное описание), эйлеров способ (пространственное описание), — их эквивалентность.

   (c) Материальные производные скалярных, векторных и тензорных механических характеристик по времени. Представление вектора ускорения и уравнения неразрывности в лагранжевой и эйлеровой формах. Кинематический смысл дивергенции поля скоростей в эйлеровом описании. Изохорические движения, несжимаемость.

   (d) Траектории движения, линии тока. Установившееся (стационарное) движение. Вихрь поля скоростей (в эйлеровом описании), вихревые линии, вихревые поверхности. Кинематические теоремы Гельмгольца о вих-ревых трубках. Безвихревые (потенциальные) движения.

3. Теория деформаций

(a) Понятие деформации элементарных материальных частиц по Коши. Аффинор деформации, однородная деформация. Полярное разложение аффинора деформации: правый и левый тензоры растяжений (чистой деформации), тензор вращений (поворота), правые и левые главные оси деформации, главные удлинения. Примеры: жесткое движение, чистая деформация.

(b) Кратности удлинений элементарных материальных волокон и изменение углов между ними в процессе деформации. Подходы Коши—Грина и Коши—Альманси к описанию деформаций. Меры деформаций Коши и Альманси, тензоры деформаций Грина и Альманси. Представление аффинора и тензоров деформаций в лагранжевых базисах.

(c) Ориентированные элементарные площадки и элементарные объемы. Деформации элементарных площадок и объемов.

(d) Тензоры дисторсий. Выражение тензоров деформаций Грина и Альманси через вектор перемещений, компонентные представления.

(e) Аддитивные тензоры растяжений и поворота. Случаи малых деформаций, малых дисторсий, классический случай «малых деформаций» (малые дисторсии и перемещения). Линейный тензор деформаций Коши.

(f) Относительное удлинение материального волокна, (угловой) сдвиг двух материальных волокон, относительное изменение объема в случаях малых деформаций и малых дисторсий (а также в классическом случае малых деформаций). Кинематический смысл декартовых компонент линейного тензора деформаций Коши.

(g) Замена отсчетной конфигурации. Актуальная конфигурация в качестве новой отсчетной (относительное описание). Тензоры скоростей дисторсий, скоростей деформаций и скоростей вращений (спин), их связь с тензорами дисторсий, деформаций и вращений относительного описания.

(h) Кинематический смысл спина и тензора скоростей деформаций, скорость относительного удлинения волокна, скорость (углового) сдвига двух волокон, скорость относительного изменения объема.

(i) Связь тензоров скоростей деформаций и скоростей вращений с тензорами растяжений и поворота отсчетного (лагранжева) описания. Аналогия теории скоростей деформаций и классического случая малых деформаций.

4. Теория напряжений. Уравнения баланса (локальная форма). Основные системы соотношений начальнокраевых задач

   (a) Напряженное состояние среды. Постулат Коши. Основная лемма о попарной уравновешенности контактных усилий, следствия для массовых и контактных сил и их моментов. Фундаментальная теорема Коши о существовании тензора напряжений.

   (b) Тензор истинных напряжений Коши. Нормальные и касательные напряжения, смысл декартовых компонент тензора напряжений. Теорема взаимности Коши, свойство парности касательных напряжений (декартовых компонент напряжений). Главные оси напряжений, главные напряжения. Пример напряженного состояния при одноосном растяжении.

   (c) Тензоры условных напряжений Пиолы—Кирхгофа первого и второго рода, «энергетический» тензор напряжений Ильюшина. Лагранжево и смешанное описание напряженного состояния (вектора напряжений). Связь компонент тензоров напряжений в лагранжевых (в отстчетной и актуальной конфигурациях) и смешанном базисах. Связь между различными тензорами напряжений в случаях малых деформаций и малых дисторсий.

   (d) Общее уравнение баланса и общее уравнение поля в механике сплошной среды. Пример: баланс удельного объема и уравнение неразрывности. Результирующие массовые силы и их моменты как векторные меры на телах большой системы и их подтелах. Учет внутренних массовых сил в активных взаимодействиях тел большой системы (и их частей). Независимость суммарной плотности (внешних и внутренних) активных массовых сил от выбора тела данной большой системы.

(e) Баланс количества движения и первое уравнение движения Коши. Баланс момента количества движения и второе уравнение движения Коши (симметричность тензора напряжений). Представление уравнений движения через тензоры условных напряжений в лагранжевом описании.

(f) Граничные и начальные условия. Основная система соотношений (начально-) краевой задачи механики сплошной среды в лагранжевом описании и в классическом случае "малых деформаций". Динамика, квазистатика, статика, необходимые условия статического равновесия. Основная система соотношений (начально-) краевой задачи в эйлеровом описании. Динамика, квазистатика, стационарные движения.

5. Основы теории определяющих соотношений

   (a) Внешние воздействия и динамические процессы в телах. Преобразование компонент динамического процесса при замене системы отсчета. Понятия механических свойств сопротивления тел деформированию и определяющих соотношений.

   (b) Основные принципы общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды: упрощающие предположения о внутренних массовых взаимодействиях; предыстория движения, принцип детерминизма и причинности; принцип локальности; принцип материальной независимости от системы отсчета. Гипотеза макроскопической определимости механических свойств материалов, простые материалы. Рамки классической механики сплошной среды.

   (c) Совместные следствия гипотезы макроскопической определимости и основных принципов теории определяющих соотношений. Общие приведенные формы определяющих соотношений классической механики сплошной среды А.А.Ильюшина и У.Нолла, их эквивалентность.

   (d) Материалы с простейшими (простыми мгновенными) внутренними кинематическими связями: принцип детерминизма и определяющие соотношения. Примеры: несжимаемость, нерастяжимость, абсолютная твердость.

6. Простейшие среды и задачи

   (a) Простейшие жидкости: текучесть, изотропия. Соответствие определяющим соотношениям У.Нолла и А.А.Ильюшина. Сжимаемость и несжимаемость. Простейшие жидкости с линейными определяющими соотношениями: эйлерова (идеальная) жидкость, ньютонова (линейно вязкая) жидкость. Гидростатика, непроявление вязкости.

   (b) Упругое тело. Гиперупругость, изотропия, линейность определяющей функции. Несжимаемость. Основные предположения классической теории упругости. Закон Гука. Аналогия определяющих соотношений ньютоновой жидкости и классического изотропного линейно упругого тела.

   (c) Задачи гидромеханики идеальных жидкостей. Уравнения Эйлера. Случай несжимаемых однородных жидкостей.

   (d) Задачи гидромеханики линейно-вязких жидкостей. Уравнения Навье—Стокса. Гидростатика: совпадение с поведением идеальной жидкости.

   (e) Задачи классической линейной теории упругости. Уравнения Ламе.

Билет 1.1

Билет 1.2

Билет 1.3

Билет 1.4

Билет 2.1

Основные гипотезы механики сплошной среды: гипотеза сплошности (гладкости движения), гипотеза распределенности массы, гипотезы распределенности массовых и поверхностных сил; контактный характер поверхностных сил. Законы движения Коши—Эйлера в механике сплошной среды.

1. Гипотеза сплошности
   В любой системе отсчета Φ, в любом движении $\bar{\chi}$ для любого тела $\mathscr{B}$ любые две актуальных конфигурации (t-конфигурация и t'-конфигурация) $\bar{\chi}(\mathscr{B},t)$ и $\bar{\chi}(\mathscr{B},t')$ связаны отображением, диффеоморфным по отношению к материальным внутренностям этих конфигураций, а именно: пусть $\bar{x} = \bar{\chi}(b,t)$, $\bar{x}' = \bar{\chi}(b,t')$, $\Omega_t = \bar{\chi}(\mathscr{B},t)$, $\Omega_{t'} = \bar{\chi}(\mathscr{B},t')$. Тогда $\bar{x}' = \bar{\chi}(b,t') = \bar{\chi}(\bar{\chi}^{-1}(\bar{x},t),t') = \bar{\varphi}_{t,t'}(\bar{x})$ $\forall t,t'$ отображает $\Omega_t \to \Omega_{t'}$ с диффеоморфным сужением $\bar{\varphi}_{t,t'} : \bar{\chi}(\mathscr{B},t) \to \bar{\chi}(\mathscr{B},t')$.
   Замечание. Диффеоморфизм потребуется первого и второго порядков.
   Вывод: Таким образом, движение в МСС есть гладкая по времени смена актуальных конфигураций тел, диффеоморфная по отношению к внутренностям тел.

2. Гипотеза неразрывности (распределенности массы)
   Масса является абсолютно непрерывной мерой по отношению к мере объема объекта в какой-либо одной (а в силу гипотезы сплошности и в любой другой) актуальной конфигурации тела.
   Теорема Родона-Никодима:
   Пусть (X,F,μ) – пространство с мерой и мера μ σ-конечна. Тогда если мера $\nu : F \to R$ абсолютно непрерывна относительно μ ($\nu << \mu$), то $\exists$ измеримая функция $f : X \to R$: $\nu(A) = \int\limits_A f(x)\mu(dx)$ $\forall A \in F$ (интеграл Лебега).
   По теореме Родона-Никодима существует плотность ρ :
   $M(\mathscr{B}) = \int_{\bar{\chi}(\mathscr{B},t)} \rho(\bar{x},t)dV = \int_{\bar{\chi}(\mathscr{B},t')} \rho(\bar{x},t')dV$
   $dM = \rho(\bar{x},t)dV_t = \rho(\bar{x},t')dV_{t'} \Rightarrow \rho_t dV_t = \rho_{t'} dV_{t'}$
   $V(\bar{\chi}(\mathscr{B},t)) = \int_{\bar{\chi}(\mathscr{B},t)} dV$, $V(\bar{\chi}(\mathscr{B},t')) = \int_{\bar{\chi}(\mathscr{B},t')} dV = \int_{\bar{\chi}(\mathscr{B},t)} J_{t,t'} dV$, где J – якобиан смены конфигурации.
   Следствие. $dV_{t'} = J_{t,t'} dV_t$, и потому $\rho_t dV_t = \rho_{t'} J_{t,t'} dV_{t'} \Rightarrow \rho(\bar{x}_t,t) = \rho(\bar{x}_{t'},t')J_{t,t'}$ – уравнение неразрывности в форме Лагранжа.

3. Гипотеза распределенности сил.
   Система сил в классической МСС $\vec{f}$ есть сумма двух систем сил:

   - Массовых сил ($\vec{f}_B$)
   - Контактных (поверхностных) сил ($\vec{f}_C$)

   $\vec{f} = \vec{f}_B + \vec{f}_C$

   Определение

   Массовая сила $\vec{f}_B(e,\mathscr{B},t)$ воздействия любого фиксированного тела $\mathscr{B}$ на произвольное отделенное от него тело e (в любой момент времени t) – есть векторная мера $f_{B,\mathscr{B},t}(\cdot)$, абсолютно непрерывная относительно меры массы $M(\cdot)$

Определение

Компактная (поверхностная) сила $\vec{f}_C(e,\mathscr{B},t)$ воздействия для любого фиксированного тела $\mathscr{B}$ на произвольное отделенное от него тело e (для любого момента t):

(a) Зависит только от контактной поверхности актуальной конфигурации этих тел

(b) есть векторная мера $\vec{f}_{C,\mathscr{B},t}(\cdot)$ на подмножествах контактной поверхности, абсолютно непрерывная относительно меры площади $S_t(\Delta\Gamma_{cont}(t))$ подмножеств $\Delta\Gamma_{cont}(t)$ общей контактной части границ $(\Delta\Gamma_{cont}(t) = \partial\bar{\chi}(\mathscr{B},t) \cap \partial\bar{\chi}(e,t))$

Билет 2.2

Билет 2.3

Билет 2.4

Билет 3.1

Билет 3.2

Билет 3.3

Билет 3.4

Билет 3.5

Билет 3.6

Билет 3.7

Билет 3.8

Билет 3.9

Билет 4.1

Билет 4.2

Билет 4.3

Билет 4.4

Билет 4.5

Билет 4.6

Билет 5.1

Билет 5.2

Билет 5.3

Билет 5.4

Билет 6.1

Билет 6.2

Билет 6.3

Билет 6.4

Билет 6.5