ТЧ-8 2024

SFS

24 июня 2024 г.

Этот документ – попытка создания АнтиРочева. Решения задач частично с семинаров, частично придуманы "on fly". решения содержат опечатки, ошибки, глупости и неточности. !ПОЛЬЗУЙТЕСЬ НА СВОЙ СТРАХ И РИСК! При нахождении ошибок обращайтесь @fedorrrMM

Содержание

1 Раздел 1. Аналитическая теория чисел: Элементарные методы

1.1 Вокруг оценок Чебышёва

По понятиям: Рассмотрим функции $\pi(x) = \sum_{p\le x} 1, \theta(x) = \sum_{p\le x} \ln(p), \psi(x) = \sum_{p^\alpha \le x} \ln(p)$. (Если не сказано противное, то $x \in [1,+\infty), n \in \mathbb{N} = 1,2,\dots,$ p — простое число; в формуле p^α подразумевается $\alpha \in \mathbb{N}$.)

Задача 1

Доказать, что для функции $\psi(x)$ справедливы представления:

$$\psi(x) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor = \ln([1,2,\dots,\lfloor x \rfloor]) = \sum_{n\le x} \Lambda(n),$$

где $[a_1,\dots,a_n]$– наименьшее общее кратное чисел $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}$, $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, т. е.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & n = p^\alpha \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Решение задачи 1

По определению $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \le x} \ln(p)$. Теперь рассмотрим эту сумму и вынесем все общие $\ln(p)$. Получим: $\sum_{p^\alpha \le x} \ln(p) = \sum_{p\le x} \ln(p) \cdot \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$ – это такое число, что $p^\alpha \le x, p^{\alpha+1} > x$ $[1,2,\dots \lfloor x \rfloor] = \prod_{p\le x} p^{m_p}$, $m_p : p^{m_p} \le x$, $p^{m_p+1} > x$. Логарифмируем и получаем $\ln([1,2,\dots \lfloor x \rfloor]) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$

$\sum_{p^\alpha \le x} \ln(p) = \sum_{p^\alpha \le x} \ln(p) + \sum_{\text{не степени простых} \le x} 0 = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$

Задача 2

Доказать равенство $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.

Решение задачи 2

Сначала рассмотрим случай $n = p^m$. Тогда $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^\alpha \le n} \ln(p) = m \cdot \ln(p) = \ln(p^m) = \ln(n)$

Теперь пусть $n = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$. $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p_i^\alpha \le n} \ln(p)$/*т.к. при делителе d, содержащем разные простые $\Lambda(d) = 0$*/$= \sum_{i=1}^{n} \ln(p_i^{m_i}) = \ln(p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}) = \ln(n)$

Задача 3

Доказать равенства:

1. $\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$, причём количество ненулевых слагаемых в сумме справа равно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$;

2. $\ln(\lfloor x \rfloor !) = \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \cdots$. (Указание. Использовать задачу 1.2.)

Решение задачи 3

1.a По определению $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha \le x} \ln(p), \theta(x) = \sum\limits_{p \le x} \ln(p)$.

Рассмотрим $\theta(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum\limits_{p \le x^{\frac{1}{\alpha}}} \ln(p)$. Теперь распишем сумму из условия: $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum\limits_{p \le x} \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor \cdot \ln(p)$ – перегруппировали по простым, не превосходящим x. Число такое, т.к. в сумме будет ровно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$ элементов таких, что $p \le x^\alpha$

1.b Как отмечено выше, в сумме будет ровно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$ элементов таких, что $p \le x^\alpha$. Максимально это число при $p = 2$ и равно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$;

2 $\ln(\lfloor x \rfloor !) = \sum\limits_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} \ln(i) = \sum\limits_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} \sum\limits_{d|i} \Lambda(d) = \sum\limits_{d \le x} \sum\limits_{d \le \frac{x}{i}} \Lambda(d) = \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \cdots$

(обратно переставили порядки суммирования и сумму заменили на многоточие.)

Задача 4

Используя каноническое разложение на простые множители числа $n!$ и формулу Стирлинга, доказать равенства:

1. $\sum\limits_{p \le n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \ln(p) = n\ln(n) + O(n)$

2. $\sum\limits_{p \le n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln(p) = n\ln(n) + O(n)$

Решение задачи 4

Для тех, кто как я в танке. Формула Стирлинга: $n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} e^{O(\frac{1}{n})}$

1. $e^{\Sigma} = n! = n^n + O(e^n)$, а почему это очевидно я не знаю...
$\ln(n!) = \ln(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n} e^{O}(\frac{1}{n})) = \ln(n^n) + \ln(\sqrt{2\pi n}) + O(\frac{1}{n}) - \ln(e^n) = n\ln(n) + O(n)$

2. Фактически осталосб доказать, что все кроме главного члена в первой сумме есть $O(n)$.
$\sum\limits_{p \le n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \right) \ln(p) \le \sum\limits_{p} \left(\frac{n}{p^2} + \cdots \right) \ln(p) \le \sum\limits_{p} \frac{n}{p^2} \ln(p) \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots \right) = \sum\limits_{p} \frac{n}{p^2} \ln(p) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = n \sum\limits_{p \le n} \frac{\ln(p)}{p^2 - p} = O(n)$

Задача 5

Доказать оценки

1. $\sum\limits_{p\leq 2n}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor\right)\ln(p) = O(n)$

2. $\sum\limits_{n\leq p\leq 2n}\ln(p) = O(n)$

3. $\theta(x) = O(x)$

Решение задачи 5

1. $\sum\limits_{p\leq 2n}\left\lfloor \frac{2n}{p}\right\rfloor \ln(p) = 2n\ln(2n) + O(2n)$
   $\sum\limits_{p\leq 2n}\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor \ln(p) = \sum\limits_{p\leq n}\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor \ln(p) = n\ln(n) + O(n)$
   $2n\ln(2n) - 2n\ln(n) + O(n) = 2n(\ln(2n) - \ln(n)) + O(n) = 2n\ln(2) + O(n) = O(n)$

2. Очевидно, т.к. $[2x] - 2[x] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ и это то же самое что и предыдущая сумма.

3. $\sum\limits_{p\leq x} = O(x)$

   Почему?: $\sum\limits_{k\leq \log_2 x}\left(\sum\limits_{2^{k-1}<p\leq 2^k}\ln(p)\right) = \sum\limits_k O(2^k) = O(x)$

Задача 6

Используя задачи 1.4 и 1.5, доказать равенство

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln(p)}{p} = \ln(x) + O(1)$$

Решение задачи 6

$$\sum_{p\leq x}\left[\frac{n}{p}\right]\ln(p) = n\ln(n) + O(1)$$

$$\sum_{p\leq [x]}\frac{[x]}{p}\ln(x) + \sum_{p\leq [x]} O\left(\frac{1}{p}\right) =$$

$$\sum_{p\leq [x]}\left(\left[\frac{[x]}{p}\right] + \left\{\frac{[x]}{p}\right\}\right)\ln(p) = [x]\ln([x]) + O([x])$$

Теперь разделим на $[x]$ и получим искомое.

Задача 7

Доказать, что существуют положительные постоянные C_i, такие что справедливы утверждения:

1. $\forall x \geq 1, \alpha \geq 1$ выполнено неравенство $\left| \sum\limits_{x<p\leq \alpha x} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(\alpha) \right| \leq C_1$
2. $\theta(x) \geq C_2 x, x \geq 2$
3. $\forall x \geq 1 : \exists p \in (x, C_3 x)$

Решение задачи 7

1. $\sum\limits_{p\leq \alpha x} \frac{\ln(p)}{p} - \sum\limits_{p\leq x} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(\alpha x) - \ln(x) + O(1) = \ln(\alpha) + O(1) \Rightarrow \exists C_1$
2. $\left| \sum\limits_{x<p\leq \alpha x} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(\alpha) \right| \leq C_1$
   $N = [\log_a x]$
   $a^0 \sum\limits_{a^0<p\leq a} \frac{\ln(p)}{p} + \cdots a^N \sum\limits_{a^{N-1}<p\leq a^N} \frac{\ln(p)}{p}$... и я хз че дальше ...
3. :-(

а после этого моя прилежность дала сбой и я ничего не записал... всем спасибо за внимание