ТЧ-8 2024

SFS

24 июня 2024 г.

При нахождении ошибок обращайтесь @fedorrrMM

Содержание

1 Раздел 1. Аналитическая теория чисел: Элементарные методы

1.1 Вокруг оценок Чебышёва

По понятиям: Рассмотрим функции $\pi(x) = \sum\limits_{p\le x} 1, \theta(x) = \sum\limits_{p\le x} \ln(p), \psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha\le x} \ln(p)$. (Если не сказано противное, то $x\in[1,+\infty), n\in\mathbb{N} = 1,2,\dots,$ p — простое число; в формуле p^α подразумевается $\alpha\in\mathbb{N}$.)

Задача 1

Доказать, что для функции $\psi(x)$ справедливы представления:

$$\psi(x) = \sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right\rfloor = \ln([1,2,\dots,\lfloor x\rfloor]) = \sum_{n\le x}\Lambda(n),$$

где $[a_1,\dots,a_n]$– наименьшее общее кратное чисел $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}$, $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, т. е.

$$\Lambda(n) = \begin{cases}\ln(p), & n = p^\alpha\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Решение задачи 1

По определению $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha\le x}\ln(p)$. Теперь рассмотрим эту сумму и вынесем все общие $\ln(p)$. Получим: $\sum\limits_{p^\alpha\le x}\ln(p) = \sum\limits_{p\le x}\ln(p)\cdot\left\lfloor\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right\rfloor$ – это такое число, что $p^\alpha\le x, p^{\alpha+1}>x$
$[1,2,\dots\lfloor x\rfloor] = \prod_{p\le x}p^{m_p}$, $m_p : p^{m_p}\le x$, $p^{m_p+1}>x$. Логарифмируем и получаем $\ln([1,2,\dots\lfloor x\rfloor]) = \sum\limits_{p\le x}\left\lfloor\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right\rfloor$
$\sum\limits_{p^\alpha\le x}\ln(p) = \sum\limits_{p^\alpha\le x}\ln(p) + \sum\limits_{\text{не степени простых}\le x} 0 = \sum\limits_{n\le x}\Lambda(n)$

Задача 2

Доказать равенство $\sum\limits_{d|n}\Lambda(d) = \ln(n)$.

Решение задачи 2

Сначала рассмотрим случай $n = p^m$. Тогда $\sum\limits_{d|n}\Lambda(d) = \sum\limits_{p^\alpha\le n}\ln(p) = m\cdot\ln(p) = \ln(p^m) = \ln(n)$

Теперь пусть $n = p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n}$. $\sum\limits_{d|n}\Lambda(d) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{p_i^\alpha\le n}\ln(p)$/*т.к. при делителе d, содержащем разные простые $\Lambda(d) = 0$*/$= \sum\limits_{i=1}^{n}\ln(p_i^{m_i}) = \ln(p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n}) = \ln(n)$

Задача 3

Доказать равенства:

1. $\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$, причём количество ненулевых слагаемых в сумме справа равно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$;
2. $\ln(\lfloor x \rfloor !) = \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \cdots$. (Указание. Использовать задачу 1.2.)

Решение задачи 3

1.a По определению $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha \leq x} \ln(p), \theta(x) = \sum\limits_{p \leq x} \ln(p)$.

Рассмотрим $\theta(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum\limits_{p \leq x^{\frac{1}{\alpha}}} \ln(p)$. Теперь распишем сумму из условия: $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum\limits_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor \cdot \ln(p)$ – перегруппировали по простым, не превосходящим x. Число такое, т.к. в сумме будет ровно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$ элементов таких, что $p \leq x^\alpha$

1.b Как отмечено выше, в сумме будет ровно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor$ элементов таких, что $p \leq x^\alpha$. Максимально это число при $p = 2$ и равно $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$;

2 t