

ТЧ-8 2024

SFS

21 июня 2024 г.

## Содержание

1	Билеты	2
2	Определения и формулировки	28

# 1 Билеты

1. Билет 1 Простейшие свойства делимости. Представление наибольшего общего делителя  $d$  чисел  $a$  и  $b$  в форме  $d = au + bv$ . Теорема о существовании и единственности разложения на простые сомножители. Бесконечность множества простых чисел.
2. Билет 2 Лемма о равенстве верхних и нижних пределов функций  $(\theta(x)/x, \psi(x)/x$  и  $(\pi(x) \ln(x))/x$ ). Связь между асимптотическим поведением функции Чебышева  $\psi(x)$  и сходимостью интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$$

3. Билет 3 Оценки Чебышева функции  $\pi(x)$ . Оценки  $n$ -го простого числа. Расходимость ряда  $\sum_p \frac{1}{p}$ .
4. Билет 4 Аналитичность дзета-функции Римана в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Представление дзета-функции в виде бесконечного произведения.
5. Билет 5 Преобразование Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область  $\sigma > 0$ .
6. Билет 6 Отсутствие нулей дзета-функции в области  $\sigma \geq 1$ .
7. Билет 7 Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел. Сведение его доказательства к исследованию некоторого комплексного интеграла.
8. Билет 8 Доказательство асимптотического распределения простых чисел. Асимптотическая формула  $n$ -го простого числа.
9. Билет 9 Простейшие свойства сравнений. Группа  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Элементарные доказательства бесконечности множества простых чисел в прогрессиях вида  $4n + 1$  и  $4n + 3$ .
10. Билет 10 Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Вычисление сумм  $\sum_{a \in G} \chi(a)$  и  $\sum_{\chi} \chi(a)$  для характеров  $\chi$  группы  $G$ . Определение и свойства числовых характеров.
11. Билет 11 Аналитичность функции Дирихле  $L(s, \chi)$  в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Отсутствие нулей  $L$ -функции в области  $\sigma > 1$ . Представление  $L$ -функции в виде бесконечного произведения. Аналитическое продолжение функции  $L(s, \chi_0)$  в область  $\sigma > 0$ .
12. Билет 12 Теорема о почленном дифференцировании ряда Дирихле. Область аналитичности функции  $L(s, \chi)$  при  $\chi \neq \chi_0$ .
13. Билет 13 Теорема об области сходимости ряда Дирихле с неотрицательными коэффициентами.
14. Билет 14 Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  для действительного характера  $\chi$ .
15. Билет 15 Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  при  $\chi^2 \neq \chi_0$ .
16. Билет 16 Доказательство теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

17. Билет 17 Свойства минимального многочлена алгебраического числа. Целые алгебраические числа. Лемма Гаусса и ее следствия, относящиеся к целым алгебраическим числам.
18. Билет 18 Формулировка основной теоремы о симметричных многочленах. Теорема о симметричном многочлене от нескольких систем сопряженных алгебраических чисел. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.
19. Билет 19 Алгебраическое числовое поле конечной степени. Каноническая форма представления его элементов. Теорема о числах, сопряженных в алгебраическом числовом поле. Теорема о примитивном элементе.
20. Билет 20 Две теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями. Построение чисел, имеющих заданный порядок приближений.
21. Билет 21 Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел. Построение трансцендентных чисел при помощи теоремы Лиувилля.
22. Билет 22 Обобщение теоремы Лиувилля на многочлены от нескольких алгебраических чисел.
23. Билет 23 Теорема Бореля о характере приближений “почти всех” действительных чисел.
24. Билет 24 Иррациональность и трансцендентность числа  $e$ .
25. Билет 25 Иррациональность числа  $\pi$ .
26. Билет 26 Лемма Зигеля об оценках решений систем линейных уравнений с целыми коэффициентами.
27. Билет 27 Формулировка теоремы Линдемана. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Линдемана, оценки ее порядка нуля.
28. Билет 28 Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Линдемана. Ее связь с проблемой квадратуры круга.
29. Билет 29 Седьмая проблема Гильберта. Формулировка теоремы Гельфонда-Шнейдера. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера, оценки ее порядка нуля.
30. Билет 30 Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера.

Простейшие свойства делимости. Представление наибольшего общего делителя  $d$  чисел  $a$  и  $b$  в форме  $d = au + bv$ . Теорема о существовании и единственности разложения на простые сомножители. Бесконечность множества простых чисел. Простейшие свойства делимости.

Определение 1  $b|a$ , если  $\exists q \in \mathbb{Z} : a = bq$

Свойства делимости:

1.  $b|a_1, \dots, b|a_n \Rightarrow b|(a_1 + \dots + a_n)$
2.  $b|a_1, \dots, b|a_{n-1}, b \nmid a_n \Rightarrow b \nmid (a_1 + \dots + a_n)$
3.  $c|a, d|b \Rightarrow cd|ab$ , в частности,  $\forall b : c|a \Rightarrow c|ab$

Теорема 1 (Основная теорема арифметики)

1. всякое  $a \in \mathbb{N}, a > 1$  представляется в виде  $a = p_1 \cdots p_n$ , где  $p_i$  простые.
2. это представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

► 1) индукция по  $a$ :

для  $a = 2$  верно

пусть верно для всех чисел, меньших  $a$

если  $a$  простое, то очевидно

иначе  $a = bc$ , где  $1 < b, c < a$ , откуда по предположению индукции получаем

$$a = \underbrace{q_1 \cdots q_n}_{=b} \underbrace{p_1 \cdots p_m}_{=c}$$

2) Предположим, что существуют числа, которые не единственным образом раскладываются на простые сомножители. В не пустом подмножестве натурального ряда существует минимальный элемент. Пусть это будет  $a = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$

Если  $p_i = q_i$ , то  $\frac{a}{p_i}$  раскладывается двумя способами  $\Rightarrow$  противоречие

Без ограничения общности пусть  $p_1 > q_1$

$$\text{Рассмотрим } b = \overbrace{(p_1 - q_1)}^{>0} p_2 \cdots p_m = p_1 \cdots p_m - q_1 p_2 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n - q_1 p_2 \cdots p_m = q_1 (q_2 \cdots q_n - p_2 \cdots p_m)$$

$$\text{Пусть теперь } p_1 - q_1 = u_1 \cdots u_s \quad q_2 \cdots q_n - p_2 \cdots p_m = v_1 \cdots v_t$$

$b = u_1 \cdots u_s p_2 \cdots p_m = v_1 \cdots v_t q_1$  — два различных разложения. в первое не входит  $q_1$ , т.к.  $(p - q) \nmid q$

$b < a$ , что противоречит минимальности  $a$ . ◀

Определение 2  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! q, r : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$  — деление с остатком

$$\exists : \frac{a}{b} = \left[ \frac{a}{b} \right] + \underbrace{\left\{ \frac{a}{b} \right\}}_r \Rightarrow a = b \underbrace{\left[ \frac{a}{b} \right]}_q + \underbrace{\left\{ \frac{a}{b} \right\}}_r b$$

! : все определено однозначно.

$(a, b)$  – НОД

Теорема 2 (Теорема о представлении НОД)

$$(a, b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : d = au + bv$$

►

$$\mu = \{k | k = ax + by > 0, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

1.  $\mu \neq \emptyset$ , т.к.  $\pm a; b \in \mu$

2.  $d$  – наименьший элемент  $\mu$

3. Докажем, что  $d|a$  и  $d|b$

Пусть  $d \nmid a \Rightarrow a = dq + r, 0 < r < d, r = a - dq = a - (qu + bv)q = a(1 - qu) + b(-qu) \in \mu$ , но  $r < d$  противоречие.

4.  $d = (a, b)$ , т.к. если  $\exists d_1 : d_1|a, d_1|b \Rightarrow d_1|d \Rightarrow d_1 \leq d$

◄

Следствия:

$$1. c|ab, (c, a) = 1 \Rightarrow c|b \quad \blacktriangleright \exists u, v : au + cv = 1 \Rightarrow \underbrace{ab}_{:c} u + \underbrace{bc}_{:c} v = b : c \blacktriangleleft$$

$$2. b|a, c|a, (b, c) = 1 \Rightarrow bc|a \quad \blacktriangleright \exists u, v : bu + cv = 1 \quad u \underbrace{(ab)}_{:bc} + \underbrace{(ac)}_{:bc} v = a : bc \blacktriangleleft$$

Другая формулировка теоремы единственности:  $a = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} = p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n} \Rightarrow \forall i : k_i = l_i$

Утверждение 1 Пусть  $a = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}, b = p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}$ . Тогда  $b|a \iff \forall i: l_i \leq k_i$

►⇒:  $b|a \Rightarrow a = bc, c = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n} \Rightarrow a = p_1^{l_1+m_1} \cdots p_n^{l_n+m_n} \Rightarrow \forall i: k_i = l_i + m_i \geq l_i$

⇐:  $a = b \cdot p_1^{k_1-l_1} \cdots p_n^{k_n-l_n} \Rightarrow a:b \blacktriangleleft$

Утверждение 2  $(a, b) = p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ , где  $s_j = \min\{k_j, l_j\}$

$[a, b] = p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$ , где  $t_j = \max\{k_j, l_j\}$

►

1.  $d|a, d|b, d = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n} \Rightarrow r_i \leq k_i, r_i \leq l_i \Rightarrow r_i \leq \min\{k_j, l_j\} \Rightarrow \max r_i = \min\{k_j, l_j\}$

2. Аналогично.

◀

Теорема 3 (Теорема о бесконечности простых чисел)

Простых чисел бесконечно много.

►

Пусть простых чисел конечное множество:  $p_1, \dots, p_n$ . Рассмотрим  $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$  – составное

По теореме о разложении должно существовать  $p: p|N$ , но по построению  $N$ , оно не делится на все  $p_i$  ◀

Лемма о равенстве верхних и нижних пределов функций  $(\theta(x)/x, \psi(x)/x$  и  $(\pi(x)\ln(x))/x$ . Связь между асимптотическим поведением функции Чебышева  $\psi(x)$  и сходимостью интеграла  $\int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^2} dx$

$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1$  – число простых не превосходящих  $x$

$\Theta(x) := \sum_{p \leq x} \ln(p)$  – функция Чебышева

$\psi(x) := \sum_{p^k \leq x} \ln(p) = \sum_{p \leq x} \left[ \frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln(p) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$

$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), n = p^k \\ 0 \end{cases}$  – функция Мангольта.

$e^{\psi(n)} = [1, \dots, n]$

Обозначим

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = L_1, \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = l_1$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = L_2, \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = l_2$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = L_3, \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = l_3$$

Лемма 1  $0 \leq l_1 = l_2 = l_3 \leq L_1 = L_2 = L_3 \leq +\infty$

►  $\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\ln(x)}{x}$  – очевидно, значит  $L_1 \leq L_2 \leq L_3$

Докажем, что  $L_3 \leq L_1$

Выберем  $0 < \alpha < 1$

$$\theta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \ln(p) \geq (\ln(x^\alpha)) \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 = (\alpha \ln(x)) (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \geq \ln(x) (\pi(x) - x^\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(x)}{x} \geq \alpha \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} - \alpha \overbrace{\frac{\ln(x)}{x^{1-\alpha}}}^{\rightarrow 0}. \text{ При переходе к пределу: } L_1 \geq \alpha L_3, \text{ при } \alpha \rightarrow 1 : L_1 \geq L_3 \Rightarrow L_1 = L_2 = L_3$$

С нижними пределами аналогично. ◀

Утверждение 3  $f(x)$  неубывающая на  $[1; \infty] \Rightarrow$  если  $\int_1^\infty \frac{f(x)-x}{x^2} dx$  сходится то

$$f(x) \sim x, x \rightarrow \infty$$

► Предположим противное.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall A > 1 \exists y > A : a) f(y) > (1 + \delta)y; b) f(y) < (1 - \delta)y$

$$a) \int_y^{(1+\delta)y} \frac{f(x)-x}{x^2} dx \geq \int_y^{(1+\delta)y} \frac{f(y)-x}{x^2} dx > \int_y^{(1+\delta)y} \frac{(1+\delta)y-x}{x^2} dx = \int_1^{1+\delta} \frac{(1+\delta)y-ty}{t^2 y^2} y dt =$$

$$\int_1^{1+\delta} \frac{1+\delta-t}{t^2} dt = \varepsilon > 0 \Rightarrow \text{отрицание критерия Коши.}$$

$$b) \int_{(1-\delta)y}^y \frac{f(x)-x}{x^2} dx \leq \int_{(1-\delta)y}^y \frac{f(y)-x}{x^2} dx \leq \int_{(1-\delta)y}^y \frac{(1-\delta)y-x}{x^2} dx = \int_{1-\delta}^1 \frac{1-\delta-t}{t^2} dt = -\varepsilon < 0$$

Критерий Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 1 : \forall y : |\int dx| < \varepsilon$ , тогда интеграл сходится.



$$\text{Таким образом, } \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^2} dx \text{ сходится} \Rightarrow \psi(x) \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$



Оценки Чебышева функции  $\pi(x)$ . Оценки  $n$ -го простого числа. Расходимость ряда  $\sum_p \frac{1}{p}$

Теорема 4 (Теорема Чебышева)

$$\exists a, b > 0 : \forall x \geq 2 : a \frac{x}{\ln(x)} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln(x)}$$

► Сверху:  $2^{2n} > C_{2n}^n = \frac{(n+1) \cdots (n+n)}{n!} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p$ , в числитель входят все простые  $n < p \leq 2n$

$$\Rightarrow 2n \ln(2) > \sum_{n < p \leq 2n} \ln(p) = \theta(2n) - \theta(n). \text{ Рассмотрим } n = 2^k$$

$$\theta(2^k) = \sum_{k=0}^{m-1} (\theta(2^{k+1}) - \theta(2^k)) < \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \ln(2) < \ln(2) \cdot 2^{m+1}$$

$$\theta(x) \text{ неубывающая} \Rightarrow \theta(x) \leq \theta(2^m) < 2^{m+1} \ln(2) = 4 \cdot 2^{m-1} \ln(2) \leq 4 \ln(2)x \Rightarrow \text{подойдет } b = 4 \ln(2)$$

$$\text{Снизу: } 0 < I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx < \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad x^n (1-x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots +$$

$$a_{2n} x^{2n} \Rightarrow I_n = \frac{a_0}{1} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2n+1}$$

$$\text{Пусть } Q_{2n+1} := [1, 2, \dots, 2n+1] \Rightarrow Q_{2n+1} I_n \in \mathbb{Z}, Q_{2n+1} I_n > 0 \Rightarrow 1 \leq Q_{2n+1} I_n \leq e^{\psi(2n+1)} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \psi(2n+1) > 2 \ln(2), \quad \psi(x) \geq \psi(2\left(\frac{x}{2}\right) - 1) + 1 \geq 22\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \ln(2) \geq (x-4) \ln(2) \Rightarrow \text{подойдет } a = \ln(2) \blacktriangleleft$$

Теорема 5 (Теорема Эйлера)

$\sum_p \frac{1}{p}$  расходится.

$$\text{► } S_N = \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \sum_{\substack{p \leq N \\ p|n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \text{частичная сумма}$$

гармонического ряда.

$$\Rightarrow S_N \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(S_N) = \infty$$

$$\sum_p \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right] \text{ расходится.}$$

При  $p \rightarrow \infty : -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{1}{p}$ , значит по признаку сравнения ряды сходятся и расходятся одновременно.  $\blacktriangleleft$

Следствие – бесконечность множества простых чисел.

Оценки  $n$ -того простого числа.  $\pi(p_n) = n$

Утверждение 4  $\alpha n \ln(n) < p_n < \beta n \ln(n)$

$$\blacktriangleright a^{\frac{p_n}{\ln(p_n)}} < \pi(p_n) < b^{\frac{p_n}{\ln(p_n)}}$$

$$\ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) + \ln(a) < \ln(n) < \ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) + \ln(b)$$

$$\Rightarrow p_n < a^{\frac{p_n}{\ln(p_n)}} (\ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) + \ln(a)) < n \ln(n) < b^{\frac{p_n}{\ln(p_n)}} (\ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) + \ln(b))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} n \ln(n) < p_n < \frac{1}{a} n \ln(n) \blacktriangleleft$$

Аналитичность дзета-функции Римана в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Представление дзета-функции в виде бесконечного произведения.

Определение 3 Дзета-функция Римана:  $s = \sigma + it, \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

1. при  $\sigma > 1$  ряд сходится абсолютно  

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
2.  $\forall \delta > 0$  ряд равномерно сходится при  $\sigma > 1 + \delta$  (по признаку Вейерштрасса)
3.  $\zeta(s)$  – аналитическая функция при  $\sigma > 1$   
 по теореме Вейерштрасса из равномерной сходимости следует что можно почленно дифференцировать.

Теорема 6

$$\sigma > 1 : -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$



Лемма 2

$$f(n) \text{ – вполне мультипликативная, } A = \sum_{k=1}^{\infty} f(k); \quad B = \sum_{d=1}^{\infty} f(d)\Lambda(d) \text{ – абсолютно}$$

$$\text{сходятся. Тогда } AB = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\ln(n)$$

$$\blacktriangleright AB = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} f(k)f(d)\Lambda(d) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^m \sum_{t_j}^{r_j} \Lambda(p_j^{t_j}) = r_1 \ln(p_1) + \dots + r_m \ln(p_m) = \ln(n) \blacktriangleleft$$

$$\zeta(s) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = -\zeta'(s) \blacktriangleleft$$

Теорема 7

$$\text{В области } \sigma > 1 : \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$



Лемма 3

$$f(n) \text{ – вполне мультипликативная, ряд } \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \text{ абсолютно сходится } \Rightarrow S = \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}$$

►  $P(x) = \prod_{p \leq x} (1 - f(p))^{-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| < 1$ , иначе  $|f(n^k)| = |f(n)|^k$  и сумма расходится

$$P(x) = \prod_{p \leq x} (1 + f(p) + f^2(p) + \dots) = \sum_{p_i \leq x} f(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}) = \sum'_{\forall p | n \Rightarrow p \leq x} f(n)$$

$$|S - P(x)| \leq \sum''_{\exists p | n : p > x} |f(n)| \leq \sum_{n \geq x} |f(n)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = S \blacktriangleleft$$

$$f(n) = \frac{1}{n^s}, s = \sigma + it, \sigma > 1 \Rightarrow \text{по лемме все доказано.} \blacktriangleleft$$

Преобразование Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область  $\sigma > 0$ .

Теорема 8 Преобразование Абеля.  $\sum_{n \leq x} a_n g(n), a_n \in \mathbb{C}, g(x)$  – комплекснозначная функция действительного аргумента.

$x \in [1, +\infty); \exists$  непрерывная  $g'(x), \sum_{n \leq x} a_n = A(x)$

$$1. \sum_{n \leq x} a_n g(n) = A(x)g(x) - \int_1^x A(t)g'(t)dt$$

$$2. \text{ если } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)g(x) = 0, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(n) = \int_1^{\infty} A(t)g'(t)dt$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1) x \in \mathbb{Z} \sum_{n=1}^N a_n g(n) &= \sum_{n=1}^N (A(n) - A(n-1))g(n) = \sum_{n=1}^N A(n)g(n) - \sum_{n=0}^{N-1} A(n)g(n+1) = \\ &= A(N)g(N) - \sum_{n=1}^{N-1} (g(n+1) - g(n))A(n) = A(N)g(N) - \int_1^N A(t)g'(t)dt \\ &A(0) = 0 \end{aligned}$$

$$2) x \notin \mathbb{Z} : N = [x]$$

Достаточно проверить, что при вычитании с обеих сторон одного и того же числа

$$\sum_{n \leq x} a_n g(n) - \sum_{n=1}^{[x]} a_n g(n) = 0$$

$$A(N)(g(x) - g(N)) = \int_N^x A(N)g'(t)dt = A(N) \int_N^x dg(t) \Rightarrow \text{всё} \blacktriangleleft$$

Аналитическое продолжение дзета-функции.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =$$

$$// g(x) = x^{-s}, a_n = 1, A(x) = [x]$$

$$= s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = s \int_1^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{s+1}} dx \Rightarrow \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

$$\text{Рассмотрим } \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x) - \text{сходится в области } \sigma > \delta > 0,$$

т.к.  $|I_n(s)| \leq \frac{1}{n^{\delta+1}}$  сходится по признаку Вейерштрасса.

$$I_n(s) \rightarrow \ln \frac{n+1}{n} \text{ при } s \rightarrow 1$$

В точке  $s = 1$  полюс первого порядка. Функция аналитична в области  $\sigma > 0$  за исключением одной особой точки 1.  $\blacktriangleleft$

Отсутствие нулей дзета-функции в области  $\sigma \geq 1$ .

Лемма 4  $\forall 0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow M = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leq 1$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \ln(M) &= 3\ln(1-r) + 4\ln(|1-re^{i\varphi}|) + \ln(|1-re^{2i\varphi}|) = \operatorname{Re}(3\ln(1-r) + 4\ln(1-re^{i\varphi}) + \ln(1-re^{2i\varphi})) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \operatorname{Re}(3 + 4e^{in\varphi} + e^{2in\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (3 + 4\cos(n\varphi) + \cos(2n\varphi)) \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (\cos(n\varphi) + 1)^2 \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Лемма 5 При  $\sigma > 1 : |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \zeta(s) &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ \prod_p \left( \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma+2it}}\right) \right)^{-1} \\ r = \frac{1}{p^\sigma}; e^{i\varphi} &= p^{-it} \text{ и по предыдущей лемме } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Теорема 9 При  $\sigma \geq 1 \quad \zeta(s) \neq 0$

При  $\sigma > 1 : \zeta(\sigma+it) \neq 0, \dots 0 \geq 1$

Допустим, что  $\zeta(1+it) = 0; t \neq 0$

Тогда  $|\zeta(\sigma)| \leq \frac{C_1}{\sigma-1}, 2 \geq \sigma > 1$  в окрестности полюса.

$$\zeta'(1+it) = \lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{\zeta(\sigma+it) - \zeta(1+it)}{\sigma-1} \Rightarrow \left| \frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1} \right| \leq C_2$$

$$|\zeta(\sigma+2it)| \leq C_3$$

$$\Rightarrow |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \leq \left(\frac{C_1}{\sigma-1}\right)^3 (C_2(\sigma-1))^4 C_3 \rightarrow 0. \text{ Противоречие с } |\cdot| > 1 \blacktriangleleft$$

Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел. Сведение его доказательства к исследованию некоторого комплексного интеграла.

Теорема 10 (Асимптотический закон распределения простых чисел.)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, x \rightarrow \infty$$

► План доказательства путём сведения к исследованию интеграла.

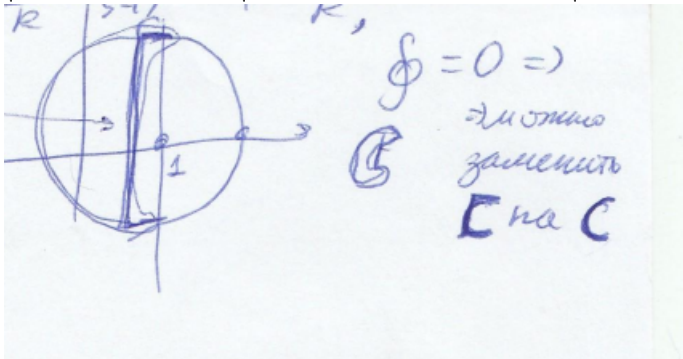
1. Обозначим  $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ . Она аналитическая при  $\sigma \geq 1$ .

2. В области  $\sigma > 1 : f(s) = \int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx$  – из преобразования Абеля.

3. Обозначим  $f_u(s) = \int_1^u \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx$ . Она целая при  $u > 1$

4.  $f(1) - f_u(1) = \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\Gamma(\theta, R)} (f(s) - f_u(s)) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds = \frac{1}{2\pi i R} \int F_k(s) ds$  вычет в точке  $s = 1$

$$5. \left| \frac{1}{2\pi i R} \int_{C_R} F_k(s) ds \right| \leq \frac{B}{R} \Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i R} \int_{(R)} f_u(s) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds \right| \leq \frac{B}{R}$$



$$6. J(u) = \frac{1}{2\pi i R} \int f_u(s) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} J(u) = 0$$

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i R} f(s) \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) \text{ ограничено на контуре, значит } \int_{\theta+iR}^{1+iR} g(s) u^{s-1} ds \leq \frac{\epsilon}{\delta}$$

Значит  $\left| \int_{BC} g(s) u^{s-1} ds \right| \leq M 2Ru^{\theta-1} \rightarrow 0, u \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} f_u(1) = f(1) \Rightarrow$  интеграл сходится  $\Rightarrow$  асимптотический закон. ◀

Доказательство асимптотического распределения простых чисел.  
Асимптотическая формула  $n$ -го простого числа.

1. Утверждение 5  $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$  аналитическая при  $\sigma \geq 1$

► Интересует  $\sigma = 1$ , т.к. при  $\sigma > 1$  все ок.

$\exists$  окрестность, в которой функция аналитична.

$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + g(s)$ ,  $g(s)$  аналитичная.

$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = -\frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + g'(s)}{s(\frac{1}{s-1} + g(s))} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1 - \overbrace{(s-1)^2}^{\rightarrow 0} g'(s)}{s(1 + (s-1)g(1))} = \frac{1}{s-1} + f(s)$ , в  $s = 1$  полюс первого порядка. ◀

2. Из преобразования Абеля  $\sigma > 1$ :  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx \Rightarrow f(s) = \int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx$

3.  $f_u(s) = \int_1^u \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx$  — целая,  $u > 1$

► 1)  $\int_a^b \frac{dx}{x^{s+k}} = \frac{x^{-s-k+1}}{-s-k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{-s-k+1} - a^{-s-k+1}}{-s-k+1} = \frac{1 + (-s-k+1)\ln(b) + (-s-k+1)^2 g(s) - 1 - (-s-k+1)\ln(a)}{-s-k+1}$

— нет особенностей, значит целая. ( $\pm 1$  сокращаются, а дальше числитель делится на знаменатель ура). ◀

4. Считаем вычет  $\frac{1}{2\pi i R} \cdot \oint_{\Gamma(\theta, R)} (f(s) - f_u(s)) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds = \frac{1}{R} \cdot (f(1) - f_u(1)) \cdot 1 \cdot R$

5.  $\left| \frac{1}{2\pi i R} \int_{C_R} F_k(s) ds \right| \leq \frac{B}{R}$ ;  $\psi(x) \leq Cx, |\psi(x) - x| \leq (C+1)x = Bx$

►  $|f(s) - f_u(s)| = \left| \int_u^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx \right| \leq \int_u^\infty \frac{Bx}{x^{s+1}} dx = B \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_u^\infty = \frac{Bu^{1-\sigma}}{\sigma-1}$   
 $\Rightarrow \left| \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right| = 2 \left| \operatorname{Re} \frac{s-1}{R} \right| = 2 \frac{\sigma-1}{R}$  ◀

6.  $\left| \frac{1}{2\pi i R} \int_{\Gamma} f_u(s) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) \right| \leq \frac{B}{R}$

При этом можно заменить  $\Gamma$  на  $($ , т.к. интеграл по  $([$  равен 0.

$|f_u(s)| = \left| \int_1^u \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}} dx \right| \leq B \frac{u^{1-\sigma}}{1-\sigma}$

$\left| \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right| = 2 \left| \operatorname{Re} \frac{s-1}{R} \right| = 2 \frac{1-\sigma}{R}$



7. Рассмотрим  $J(u) = \frac{1}{2\pi i R} \int_{\Gamma} f(s) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds$

Утверждается что предел равен 0.

7) Рассмотрим  $y(u) = \frac{1}{2\pi i R} \int_{\Gamma} f(s) u^{s-1} \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right) ds$ .

$\lim_{u \rightarrow \infty} y(u) = 0$ .

Рассмотрим  $g(s) := \frac{1}{2\pi i R} f(s) \left( \frac{s-1}{R} + \frac{R}{s-1} \right)$  - оц. на контуре

тогда 1)  $\int_{\sigma + iR}^{\sigma + i\infty} g(s) u^{s-1} ds \leq M \frac{u^{\sigma-1}}{\ln u} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{M}{\ln u} < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad (u > u_1)$

2)  $\left| \int_{BC} g(s) u^{s-1} ds \right| \leq M \cdot 2R u^{\theta-1} \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow +\infty)$

т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists u_0: \forall u > u_0 \quad |f(u) - f_n(u)| < \varepsilon$ .

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u)$ , т.е. интеграл ок-ся.

Утверждение 6  $p_n \sim n \ln(n)$  – закон распределения  $n$ -того простого.

►  $n = \pi(p_n) = \frac{p_n}{\ln(p_n)} (1 + \alpha_n)$

$\ln(n) = \ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) + \ln(1 + \alpha_n) = \ln(p_n) (1 + \beta_n)$

$\Rightarrow n \ln(n) = p_n (1 + \alpha_n) (1 + \beta_n) \blacktriangleleft$

Простейшие свойства сравнений. Группа  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Элементарные доказательства бесконечности множества простых чисел в прогрессиях вида  $4n+1$  и  $4n+3$ .

Определение 4 (Сравнения)

$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b) \iff a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $m$

Свойства:

$$0. a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$$

$$1. a \equiv b \pmod{m} \iff a+c \equiv b+c \pmod{m}$$

$$2. a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m} \text{ !!!ТОЛЬКО В ОДНУ СТОРОНУ!!!}$$

$$3. \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$$

$$4. \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

$$5. ac \equiv bc \pmod{mc} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

$$6. ac \equiv bc \pmod{m}, (m,c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

Уравнение в факторкольце.

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{a} : \bar{a} = a + mt, t \in \mathbb{Z}\} \quad a \equiv b \iff \bar{a} = \bar{b}$$

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{\bar{a} : \bar{a} = a + mt, (a,m) = 1\} \text{ !!ЭТО НЕ КОЛЬЦО, (т.к. нет сложения)!!!}$$

Но это группа по умножению: 1)  $\exists 1$ , 2)  $\exists a^{-1}$

$$\text{Лемма 6 } ax \equiv b \pmod{m}, (a,m) = 1 \Rightarrow \exists! c < m : x \equiv c \pmod{m}$$

$$\blacktriangleright 1) ax \equiv b \pmod{m}$$

$$\exists u, v : au + mv = 1 \Rightarrow au \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a(bu) \equiv b \pmod{m}$$

$$x \equiv c \equiv bu \pmod{m}$$

$$2) \text{ пусть их два разных: } x_1 \neq x_2$$

$$ax_1 \equiv b \pmod{m}, ax_2 \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{m} \blacktriangleleft$$

$$\text{Теорема 11 (Теорема Эйлера)} \quad (a,m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\text{Теорема 12 (Малая теорема Ферма)} \quad p\text{-простое}, (p,a) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Утверждение 7  $p|(a^2 + b^2), p \nmid a, p \neq 2 \Rightarrow p = 4m + 1$

►  $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$

$$a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}, (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \Rightarrow 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \Rightarrow \frac{p-1}{2} = 2m \Rightarrow p = 4m + 1 \blacktriangleleft$$

Утверждение 8 Бесконечность множества простых вида  $4n - 1$ .

► Пусть их конечное число. Пусть  $p_n$  – максимальное из них.

Рассмотрим  $p = 4(p_1 \cdots p_n) - 1$  не простое.  $\exists q|p : q = 4k - 1$ , т.к. если все делители имеют вид  $4k + 1$ , то и  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , но  $q \neq p_j$  противоречие. ◀

Утверждение 9 Бесконечность множества простых вида  $4n + 1$ .

► Пусть  $p_1, \dots, p_n$  – все простые числа такого вида.

$(2p_1 \cdots p_n)^2 + 1^2 = q_1 \cdots q_m \Rightarrow q_i = 4m_i + 1$  по лемме, значит  $q_i = p_j$  – противоречие. ◀

Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Вычисление сумм  $\sum_{a \in G} \chi(a)$  и  $\sum_{\chi} \chi(a)$  для характеров  $\chi$  группы  $G$ . Определение и свойства числовых характеров.

Определение 5 (Определение характера)

Пусть  $G$  – конечная группа, коммутативная по умножению.

$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  – характер

1.  $\chi(g) \neq 0$
2.  $\chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2)$

Свойства характеров.

1.  $\chi(e) = 1 \quad \blacktriangleright \chi(e \cdot e) = \chi(e) \cdot \chi(e) \blacktriangleleft$
2.  $g^h = e \Rightarrow (\chi(g))^h = 1 \Rightarrow$  характеры принимают значения только корней из 1.
3.  $\chi(g^{-1}) = \frac{1}{\chi(g)}$
4.  $\chi_0(g) \equiv 1$  – главный характер.
5.  $\chi_1 \chi_2(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$

Характеры образуют группу.  $\blacktriangleright$

1.  $\chi_1 \chi_2(g_1 g_2) = \chi_1(g_1) \chi_1(g_2) \chi_2(g_1) \chi_2(g_2) = \chi_1 \chi_2(g_1) \chi_1 \chi_2(g_2)$
2.  $\exists \chi^{-1} : \chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1}) = \frac{1}{\chi(g)}$
3.  $\exists 1 : \chi \chi^{-1}(g) = 1$

Пусть  $G = G_1 \otimes \dots \otimes G_n$ , где все  $G_i$  циклические.  $\text{ord } g_i = h_i$

$\text{ord } G = h = h_1 \dots h_n$

$\forall g \in G \quad g = g_1^{r_1} \dots g_n^{r_n}, \quad 0 \leq r_i \leq h_i$  и такое представление единственно.

Рассмотрим набор корней из 1:  $\zeta_1, \dots, \zeta_n : \zeta_i^{h_i} = 1$

$\chi(g) = \zeta_1^{r_1} \dots \zeta_n^{r_n}$

Утверждение 10 Это характер и любой характер можно записать так.

$\blacktriangleright 1) g = g_1^{k_1} \dots g_n^{k_n} \quad k_j = r_j + a_j h_j \Rightarrow g = g_1^{r_1} \dots g_n^{r_n}$  а дальше рассмотрим характер и такие ого записался.

$2) a = g_1^{a_1} \dots g_n^{a_n}; \quad b = g_1^{b_1} \dots g_n^{b_n}$

$ab = g_1^{a_1+b_1} \dots g_n^{a_n+b_n}$  и получаем что характер произведения равен произведению характеров. Проверили.  $\blacktriangleleft$

Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $\exists g : \chi(g) \neq 1$

Если  $g \neq e$ , то  $\exists \chi : \chi(g) \neq 1$

## Утверждение 11

$$1. S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} h, \chi = \chi_0 \\ 0, \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

$$2. \sigma = \sum_{\chi} \chi(g) = \begin{cases} h, g = e \\ 0, g \neq e \end{cases}$$

► Сначала рассмотрим тривиальные случаи:

$$\chi = \chi_0 \Rightarrow \chi(g) = 1 \Rightarrow S = |G| = h$$

$$g = e \Rightarrow \chi(e) = 1 \Rightarrow \sigma = |G| = h$$

Теперь остальные:

$$\chi \neq \chi_0 \Rightarrow \exists a \in G : \chi(a) \neq 1$$

$$\chi(a)S = \sum_{g \in G} \chi(a)\chi(g) = S \Rightarrow (\chi(a) - 1)S = 0 \Rightarrow S = 0$$

$$g \neq e \Rightarrow \exists \chi_1 : \chi_1(g) \neq 1$$

$$\chi_1(g)\sigma = \sigma \Rightarrow \sigma = 0 \blacktriangleleft$$

Числовые характеры.

$$\mathbb{Z}_m^* = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{\bar{a} : \bar{a} = a + mt, \quad (a, m) = 1\}, \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(\bar{x}), (x, m) = 1 \\ 0, (x, m) \neq 1 \end{cases}$$

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1, (x, m) = 1 \\ 0, (x, m) \neq 1 \end{cases}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \chi(a) = \chi(b)$$

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

$$\chi(a) \neq 0 \iff (a, m) = 1$$

$$\sum_{x=1}^m \chi(x) = \begin{cases} \varphi(m), \chi = \chi_0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi} \chi(x) = \begin{cases} \varphi(m), x = 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\left| \sum_{x=1}^{mq+r} \chi(x) \right| = \left| \sum_{x=mq+1}^{mq+r} \chi(x) \right| \leq r \leq m$$

Аналитичность функции Дирихле  $L(s, \chi)$  в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Отсутствие нулей  $L$ -функции в области  $\sigma > 1$ . Представление  $L$ -функции в виде бесконечного произведения. Аналитическое продолжение функции  $L(s, \chi_0)$  в область  $\sigma > 0$ .

Определение 6  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  – функция Дирихле.

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ; если  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = A$ ,  $\sum_{d=1}^{\infty} f(d)\Lambda(d) = B$  – абсолютно сходящийся ряд.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), n = p^k \\ 0 \end{cases} \Rightarrow AB = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ln(n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1} \text{ Если } f(n) = \frac{\chi(n)}{n^s} \Rightarrow L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$L(s, \chi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\ln(n)}{n^s} = -L'(s, \chi) \Rightarrow \text{в области } \sigma > 1 : L(s, \chi) \neq 0$$

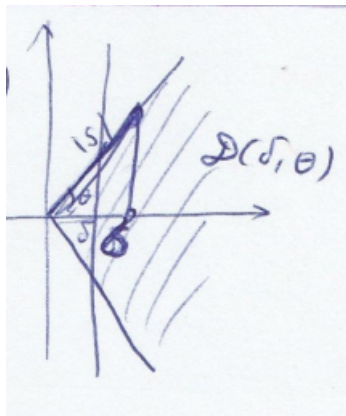
$$\chi_0(p) = \begin{cases} 1, (m, p) = 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow L(s, \chi) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{s-1} + f(s)\right) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{a_m}{s-1} + f_m(s), \quad a_m =$$

$$\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\varphi(m)}{m} > 0 \Rightarrow L(s, \chi_0) \text{ аналитична в области } \sigma > 0$$

Теорема о почленном дифференцировании ряда Дирихле. Область аналитичности функции  $L(s, \chi)$  при  $\chi \neq \chi_0$ .

Рассмотрим область  $D(\delta, \theta) = \begin{cases} \sigma > \delta > 0 \\ |\arg(s)| < \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$



Утверждение 12

1. Ряд  $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$  равномерно сходится в  $D(\delta, \theta)$
2.  $f(s)$  аналитична в области  $\sigma > 0$ , где  $f(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$

► Определение равномерной сходимости:  $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) : \forall N > M, \forall s \in D(\delta, \theta) :$   
 $|R_N(s)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right| < \varepsilon$

Перепишем:  $R_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{N+k}}{(N+k)^s}$      $A(x) = \sum_{k \leq x} a_k; g(x) = \frac{1}{(N+x)^s}$

$|A(x)| \leq 2C; \quad g(x) \rightarrow 0 \Rightarrow A(x)g(x) \rightarrow 0$

$g'(x) = -s(N+x)^{-s-1}, s \int_1^{\infty} A(t)(N+t)^{-s-1} dt$  сходится, значит можно использовать преобразование Абеля.

$\sum_{k=1}^{\infty} g(k)a_k = - \int_1^{\infty} A(t)g'(t)dt = -s \int_1^{\infty} A(t)(N+t)^{-s-1} dt = R_N(s)$

$|R_N(s)| \leq |s| \int_1^{\infty} 2C(N+t)^{-s-1} dt = |s| \cdot 2C \left. \frac{(N+t)^{-\sigma}}{-\sigma} \right|_1^{\infty} = 2C \frac{(N+1)^{-\sigma}}{\sigma} |s|$

В области  $D(\delta, \theta) : \quad |R_N(s)| \leq 2CN^{-\delta} \frac{1}{\cos(\theta)} < \varepsilon \Rightarrow$  выполняется равномерная сходимость.

Для любой точки правее нуля можно подобрать такие  $\delta$  и  $\theta$ , чтобы она попала в область. Раз в таких областях ряд сходится равномерно, значит его можно дифференцировать бесконечное число раз, значит функция аналитична. ◀

Теорема об области сходимости ряда Дирихле с неотрицательными коэффициентами.

Пусть есть ряд  $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ ,  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_0$

Теорема 13 Пусть функция  $f(s)$  :

1.  $f(s)$  аналитична при  $\sigma > \sigma_1$

2.  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ,  $(\sigma > \sigma_2)$

3.  $a_n \geq 0$

Тогда  $f(s)$  раскладывается в ряд Дирихле при  $\sigma > \sigma_1$  и его можно почленно дифференцировать. */// < WTF?*

► Если  $f(s) \sum \frac{a_n}{n^s}$  сходится при  $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ , то ряд Дирихле задаёт функцию, аналитичную в области  $\sigma > \sigma_0 \Rightarrow$  можно дифференцировать.

$\Rightarrow$  есть прямая, разделяющая области сходимости и расходимости.

Рассмотрим  $\sigma_0 > \sigma_2$ , разложим в ряд Тейлора:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\sigma_0)}{k!} (s - \sigma_0)^k$$

Берем  $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$  и подставляем вместо  $s$ . (анализируем сходимость в  $\sigma > \sigma_1$ )

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\sigma_0)}{k!} (\sigma - \sigma_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-\ln(n))^k}{n^{\sigma_0}} \frac{1}{k!} (\sigma - \sigma_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma_0)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-\ln(n))^k}{n^{\sigma_0}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((\sigma_0 - \sigma) \ln(n))^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} e^{(\sigma - \sigma_0) \ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}} \end{aligned}$$

Ряд задает аналитическую функцию по теореме единственности аналитического продолжения функции заданной этим рядом при  $\sigma > \sigma_1$  ◀



Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  для действительного характера  $\chi$ .

Определение 7 Характер  $\chi$  действительный, если  $\chi^2 = \chi_0 = 1$

Лемма 7  $f(s) := \zeta(s)L(s, \chi) \Rightarrow$

$$1. f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \sigma > 1$$

$$2. a_n \geq 0$$

$$3. a_{n^2} \geq 1$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \text{ расходится.}$$

$$\blacktriangleright f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} \chi(d)$$

$$\text{Если } n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}, \text{ то } a_n = \sum_{d|n} \chi_d \prod_{j=1}^n (1 + \chi(p_j) + \chi(p_j^2) + \cdots) = \prod_{j=1}^n (1 + \chi(p_j) +$$

$$\chi(p_j^2) + \cdots) = \prod_{j=1}^n (1 + \chi(p_j) + \chi^2(p_j) + \cdots)$$

$$\text{где } a_{n_j} = \begin{cases} 1, \chi(p_j) = 0 \\ k_j + 1, \chi(p_j) = 1 \\ 1, \chi(p_j) = -1, k_j \% 2 == 0 \\ 0 \end{cases}$$

Если  $n = k^2$ , то все  $k_j \% 2 == 0 \Rightarrow$

$$\prod_{j=1}^r a_{n_j} \geq 1 \Rightarrow 1) + 2) + 3) \text{ } \text{//////} < \text{WTF??}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k^2}}{k} \Rightarrow \text{расходится.} \blacktriangleleft$$

Теорема 14  $\chi$ - действительный характер, тогда  $L(1, \chi) \neq 0$

$$\blacktriangleright L(1, \chi) = 0 \Rightarrow L(s, \chi) = (s-1)g(s), \quad g(s) \text{ аналитичная}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s) - \text{тоже аналитичная}$$

$f(s) = \zeta(s)L(s, \chi) = g(s) + g(s)h(s)(s-1)$  представляется сходящимся рядом Дирихле в  $\sigma > 0$  а это противоречие с пунктом 4 леммы  $\blacktriangleleft$

**Билет 15**

Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  при  $\chi^2 \neq \chi_0$ .

Лемма 8 Пусть  $s \in \mathbb{R}, s > 1$ , тогда  $A := |L^3(s, \chi_0) \cdot L^4(s, \chi) \cdot L(s, \chi^2)| \geq 1$

$$\blacktriangleright L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$A = \prod_{p|m} \left| \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^3 \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^4 \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^s}\right)^3 \right|^{-1}$$

$$\text{Из билета 6 } |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leq 1 \quad \Rightarrow r = \frac{1}{p} \Rightarrow \blacktriangleleft$$

Теорема 15 При  $\chi \neq \chi_0 : L(1, \chi) \neq 0$

$$\blacktriangleright L(1, \chi) = 0 \Rightarrow L'(1, \chi) = \lim_{s \rightarrow 1+0} \frac{L(s, \chi) - L(1, \chi)}{s-1} = \lim_{s \rightarrow 1+} \frac{L(s, \chi)}{s-1} \Rightarrow \left| \frac{L(s, \chi)}{s-1} \right| \leq C_1$$

$$L(s, \chi_0) = \sum_{(m,n)=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \zeta(s) \leq \frac{2}{s-1}$$

$$L(s, \chi) = (s-1)g_m(s)$$

$$|L(s, \chi)| \leq C_1(s-1) \quad |L(s, \chi^2)| \leq C_2$$

$$1 \leq A \leq \left| \left(\frac{2}{s-1}\right)^3 (C_1(s-1))^4 C_2 \right| \rightarrow 0 \text{ противоречие. } \blacktriangleleft$$

Доказательство теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

Теорема 16 (Теорема Дирихле) Пусть  $m \geq 2$ . В прогрессии  $mx + l, (m, l) = 1$  бесконечно много простых.

►  $F(s) = \sum_{\chi} \chi(u) \left( -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right), \quad s \in \mathbb{R}, s > 1$

$u$  выбрали так, что  $lu \equiv 1 \pmod{m}$

1. На  $(1, 2)$   $F(s)$  не ограничена

$$F(s) = -1 \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(u) \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi)} = \frac{1}{s-1} + G(s), \quad G(s) \text{ ограничена при } \sigma > 1$$

2. Если количество простых конечно, то  $F(s)$  ограничена на  $(1, 2)$

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s} \Rightarrow F(s) = \sum_{\chi} \chi(u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{\chi} \chi(un) =$$

$$\varphi(m) \sum_{un \equiv 1 \pmod{m}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \varphi(m) \sum_{n \equiv l \pmod{m}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \varphi(m) \sum_{p \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln(p)}{p^s} + R(s)$$

$$0 \leq R(s) = \varphi(m) \sum_p \sum_{k=2, p^k \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln(p)}{p^s} \leq \varphi(m) \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq C$$

$$\text{То есть } F(s) = \varphi(m) \sum_{p \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} + O(1)$$

Если число простых конечно, то  $F(s)$  ограничена. Противоречие. ◀

## 2 Определения и формулировки

Определение 1  $b|a$ , если  $\exists q \in \mathbb{Z} : a = bq$

Теорема 1 (Основная теорема арифметики)

1. всякое  $a \in \mathbb{N}, a > 1$  представляется в виде  $a = p_1 \cdots p_n$ , где  $p_i$  простые.
2. это представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

Определение 2  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! q, r : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$  – деление с остатком

Теорема 2 (Теорема о представлении НОД)

$$(a, b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : d = au + bv$$

Утверждение 1 Пусть  $a = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}, b = p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}$ . Тогда  $b|a \iff \forall i : l_i \leq k_i$

Утверждение 2  $(a, b) = p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ , где  $s_j = \min\{k_j, l_j\}$   
 $[a, b] = p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$ , где  $t_j = \max\{k_j, l_j\}$

Теорема 3 (Теорема о бесконечности простых чисел)

Простых чисел бесконечно много.

Лемма 1  $0 \leq l_1 = l_2 = l_3 \leq L_1 = L_2 = L_3 \leq +\infty$

Утверждение 3  $f(x)$  неубывающая на  $[1; \infty] \Rightarrow$  если  $\int_1^\infty \frac{f(x)-x}{x^2} dx$  сходится то  
 $f(x) \sim x, x \rightarrow \infty$

Теорема 4 (Теорема Чебышева)

$$\exists a, b > 0 : \forall x \geq 2 : a \frac{x}{\ln(x)} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln(x)}$$

Теорема 5 (Теорема Эйлера)

$\sum_p \frac{1}{p}$  расходится.

Утверждение 4  $\alpha n \ln(n) < p_n < \beta n \ln(n)$

Определение 3 Дзета-функция Римана:  $s = \sigma + it, \zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$

Теорема 6

$$\sigma > 1 : -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Лемма 2

$f(n)$  – вполне мультипликативная,  $A = \sum_{k=1}^\infty f(k); \quad B = \sum_{d=1}^\infty f(d)\Lambda(d)$  – абсолютно сходятся. Тогда  $AB = \sum_{n=1}^\infty f(n)\ln(n)$

Теорема 7

В области  $\sigma > 1 : \zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$

Лемма 3

$f(n)$  – вполне мультипликативная, ряд  $\sum f(n)$  абсолютно сходится  $\Rightarrow S = \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}$

Теорема 8 Преобразование Абеля.  $\sum_{n \leq x} a_n g(n), a_n \in \mathbb{C}, g(x)$  – комплекснозначная функция действительного аргумента.

$x \in [1, +\infty); \exists$  непрерывная  $g'(x), \sum_{n \leq x} a_n = A(x)$

$$1. \sum_{n \leq x} a_n g(n) = A(x)g(x) - \int_1^x A(t)g'(t)dt$$

$$2. \text{ если } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)g(x) = 0, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(n) = \int_1^{\infty} A(t)g'(t)dt$$

Лемма 4  $\forall 0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow M = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leq 1$

Лемма 5 При  $\sigma > 1 : |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1$

Теорема 9 При  $\sigma \geq 1 \quad \zeta(s) \neq 0$

Теорема 10 (Асимптотический закон распределения простых чисел.)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, x \rightarrow \infty$$

Утверждение 5  $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$  аналитическая при  $\sigma \geq 1$

Утверждение 6  $p_n \sim n \ln(n)$  – закон распределения  $n$ -того простого.

Определение 4 (Сравнения)

$a \equiv b \pmod{m} \iff m|(a-b) \iff a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $m$

Лемма 6  $ax \equiv b \pmod{m}, (a, m) = 1 \Rightarrow \exists! c < m : x \equiv c \pmod{m}$

Теорема 11 (Теорема Эйлера)  $(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

Теорема 12 (Малая теорема Ферма)  $p$ -простое,  $(p, a) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Утверждение 7  $p|(a^2 + b^2), p \nmid a, p \neq 2 \Rightarrow p = 4m + 1$

Утверждение 8 Бесконечность множества простых вида  $4n - 1$ .

Утверждение 9 Бесконечность множества простых вида  $4n + 1$ .

Определение 5 (Определение характера)

Пусть  $G$  – конечная группа, коммутативная по умножению.

$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  – характер

1.  $\chi(g) \neq 0$
2.  $\chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2)$

Утверждение 10 1.  $S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} h, \chi = \chi_0 \\ 0, \chi \neq \chi_0 \end{cases}$

$$2. \sigma = \sum_{\chi} \chi(g) = \begin{cases} h, g = e \\ 0, g \neq e \end{cases}$$

Определение 6  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  – функция Дирихле.

Утверждение 11

1. Ряд  $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$  равномерно сходится в  $D(\delta, \theta)$
2.  $f(s)$  аналитична в области  $\sigma > 0$ , где  $f(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$

Теорема 13 Пусть функция  $f(s)$ :

1.  $f(s)$  аналитична при  $\sigma > \sigma_1$
2.  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad (\sigma > \sigma_2)$
3.  $a_n \geq 0$

Тогда  $f(s)$  раскладывается в ряд Дирихле при  $\sigma > \sigma_1$  и его можно почленно дифференцировать.

Определение 7 Характер  $\chi$  действительный, если  $\chi^2 = \chi_0 = 1$

Лемма 7  $f(s) := \zeta(s)L(s, \chi) \Rightarrow$

1.  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \sigma > 1$
2.  $a_n \geq 0$
3.  $a_{n^2} \geq 1$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  расходится.

Теорема 14  $\chi$ - действительный характер, тогда  $L(1, \chi) \neq 0$

Лемма 8 Пусть  $s \in \mathbb{R}, s > 1$ , тогда  $A := |L^3(s, \chi_0) \cdot L^4(s, \chi) \cdot L(s, \chi^2)| \geq 1$

Теорема 15 При  $\chi \neq \chi_0 : L(1, \chi) \neq 0$

Теорема 16 (Теорема Дирихле) Пусть  $m \geq 2$ . В прогрессии  $mx + l, (m, l) = 1$  бесконечно много простых.