Отчёт по задаче 10°.

Задача $\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ Сдвиг сетки вправо "0100"

Возьмём сетку на $[0, 1]$ с шагом $h = \frac{2}{2N-1}$;
вторую производную представим в виде
$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}; \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Переходим к разностной схеме:

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k \\ y_0 = 0 \quad (1) \\ y_{N-1} = -y_N \quad (2) \end{cases}$$

Решаем стандартно, заменой $y_k = \mu^k$:

$$\mu^{k+1} - 2\mu^k + \mu^{k-1} = -\lambda h^2 \mu^k \,\Big|\, \div \mu$$

$$\mu^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)\mu + 1 = 0$$

Пусть $1 - \frac{\lambda h^2}{2} = p$; $\Rightarrow$

$$\mu^2 - 2\mu p + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1} \Rightarrow \boxed{y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k}$$

• По Th Виета: $(**)\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2p \Rightarrow p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}; \\ \mu_1 \cdot \mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\mu_2}; \end{cases}$

(1) $y_0 = 0$

$$y_0 = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{C_1 = -C_2}_{(*)}$$

(2) $-y_{N-1} = y_N$

$$-C_1\mu_1^{N-1} - C_2\mu_2^{N-1} = C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N$$

$$C_1\mu_1^{N-1}(\mu_1 + 1) + C_2\mu_2^{N-1}(\mu_2 + 1) = 0$$

$$(*) \Rightarrow C_1\mu_1^{N-1}(\mu_1 + 1) - C_1\mu_2^{N-1} \cdot \mu_2\left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right) = 0$$

$$(**) \Rightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 + 1) - \mu_2^N(1 + \mu_1) = 0$$

$$\mu_1^{N-1} = \mu_2^N \Rightarrow \mu_1^{N-1} = \frac{1}{\mu_1^N} \quad \Big| \cdot (\mu_1^N)$$

$$\mu_1^{2N-1} = 1$$

$$\Rightarrow \mu_1^{(n)} = \sqrt[2N-1]{1} = e^{2\pi i n \cdot \frac{1}{2N-1}} = e^{\frac{2\pi i n}{2N-1}} = e^{i\pi h n}$$

т.к. $h = \frac{2}{2N-1}$

тогда $\mu_2^{(n)} = e^{-i\pi h n}$; где $n = 1, \dots, N-1$;

$$\Rightarrow y_k = c_1 \mu_1^k + c_2 \mu_2^k = c_1 \left(\mu_1^k - \mu_2^k\right) =$$

$$= c_1 \left(e^{i\pi h n k} - e^{-i\pi h n k}\right) \cdot \frac{2i}{2i} = \underbrace{c_1 \cdot 2i}_{\tilde{c}} \cdot \left(\frac{e^{i\pi h n k} - e^{-i\pi h n k}}{2i}\right) =$$

$$= \underline{\tilde{c} \cdot \sin(\pi k n h)}; \quad \begin{matrix} n = 1, \dots, N-1 \\ k = 1, \dots, N-1 \end{matrix}$$

(от 0 нет смысла; не беру)

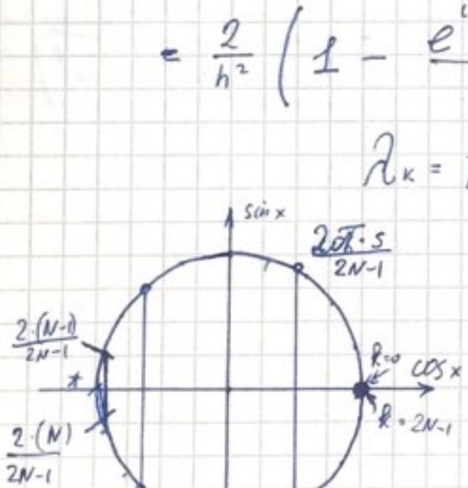
Собственные значения находим из замены для ρ, используя Th Виета:

$$1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \rho \Rightarrow \lambda = \frac{2 - 2\rho}{h^2}, \quad 2\rho = \mu_1 + \mu_2$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{2 - \left(\mu_1^{(k)} + \mu_2^{(k)}\right)}{h^2} = \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h^2}\left(\frac{\mu_1^{(k)} + \mu_2^{(k)}}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{h^2}\left(1 - \frac{e^{i\pi h k} + e^{-i\pi h k}}{2}\right) = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos \pi k h\right);$$

$$\lambda_k = \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h^2}\cos(\pi k h), \quad k = 0, \dots, N-1;$$



$$\cos\left(\frac{2\pi \cdot s}{2N-1}\right) = \cos \frac{2\pi \cdot (2N-1-s)}{2N-1}$$

$$\underline{s = 0, \dots, N-1.}$$

В результате работы программы Task0.cpp в консоль и в файл output.txt выводятся матрица скалярного произведения, вектор отклонений от каждого собственного значения; $\max\limits_{m \neq n} (y^{(m)}, y^{(n)})_h$ = maxMatr, и $\max\limits_{m} \frac{\| A y^{(m)} - \lambda^{(m)} y^{(m)} \|_h}{\lambda^{(m)}}$ = maxLam.