Выполнил Дементьев Ф.А
студент 409 группы.

Отчет.

Задача 3.1. Постановка задачи

Для задачи

$$(*)\begin{cases} u_t(t,x) - u''(t,x) + b(x)\,u(t,x) = f(t,x); \\ u(t,0) = u(t,1) = 0; \\ u(0,x) = u^0(x); \end{cases} \qquad (t,x) \in [0,1]\times[0,T],\ b(x) \geq 0$$

на сетке $\overline{D}_{h,\tau} = \{x_m = m\cdot h;\ m = \overline{0,M},\ h = \frac{2}{2M-1}\} \times \{t_n = n\cdot\tau;\ n = \overline{0,N};\ N\tau = T\}$

построить явную, неявную схемы и схему Кранка-Николсона. Найти порядок аппроксимации, доказать устойчивость, обосновать сходимость. На примерах задач с известным решением подтвердить теоретические выкладки численными расчётами.

Теоретические выкладки:

Th Филиппов А.Ф. ("о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости")

Пусть выполнены условия:

1° Операторы L, l, L_h, l_h – линейные

2° Решение дифф. задачи ② $\exists!$

3° Разностная схема ① $\begin{cases} L_h^u u_h^u = f_h^u & \text{в } D_h \\ l_h^u u_h^u = f_h & \text{в } \Gamma_h \end{cases}$ аппроксимирует на решении дифф. задачу ② $\begin{cases} Lu = f; \\ lu = \varphi; \end{cases}$ с порядком p

4° Разностная схема устойчива.

Тогда решение разностной схемы u_h сходится к решению дифференциальной задачи с порядком $\geq p$

Данную Th будем использовать при анализе сходимости решения.

Определение*: Разностная схема устойчива в равном. метрике, если выполняется нер-во: $\max\limits_{0\leq n\leq N} \|u^n\| \leq \|u^0\| + c\cdot \max\limits_{0\leq n\leq N} \|f^n\|$, где $\|u^n\| = \max\limits_{0\leq m\leq M} |u_m^n|$.

$\boxed{\text{I}}$ Явная схема.

Рассмотрим схему:

$$\text{I}\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + b_m u_m^n = f_m^n, & n=\overline{0,N-1},\ m=\overline{1,M-1}. \\ u_0^n = u_M^n = 0,\ n=\overline{0,N}; & b_m = b(x_m) \\ u_{M-1}^n = -u_M^n,\ n=\overline{0,N}; & f_m^n = f(t_n,x_m) \\ u_m^0 = u^0(x_m),\ m=\overline{0,M}; & \end{cases}$$

шаблон сетки:

1° Аппроксимация на решении:

$\exists\, u_{h\tau}(t,x)$ - решение задачи ⊛. Разложим необходимые слагаемые в ряд Тейлора в точке (t_n, x_m) и оценим вектор ошибки:

$$u_m^{n+1} = u(t_{n+1}, x_m) = u(t_n+\tau, x_m) = u(t_n,x_m) + \tau u_t(t_n,x_m) + \underline{O}(\tau^2)$$

$$u_{m\pm1}^n = u(t_n, x_m\pm h) = u(t_n,x_m) \pm h\, u_x(t_n,x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n,x_m) \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n,x_m) + \underline{O}(h^4)$$

$$\Rightarrow u_m^{n+1} - u_m^n = \tau u_t(t_n,x_m) + \underline{O}(\tau^2)$$

$$u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n = h^2 u_{xx}(t_n,x_m) + \underline{O}(h^4)$$

Подставляю:

$$\|r_m^n\| = \left\| \frac{\tau u_t(t_n,x_m) + \underline{O}(\tau^2)}{\tau} - \frac{h^2 u_{xx}(t_n,x_m) + \underline{O}(h^4)}{h^2} + b(x_m)u(t_n,x_m) - f(t_n,x_m)\right\| =$$

$$= \Big\| \underbrace{u_t(t_n,x_m) - u_{xx}(t_n,x_m) + b(x_m)u(t_n,x_m) - f(t_n,x_m)}_{=0 \text{ т.к. на решении.}} + \underline{O}(\tau) + \underline{O}(h^2) \Big\| = \underline{O}(\tau+h^2)$$

$\Rightarrow$ порядок аппроксимации равен $\underline{O}(\tau+h^2)$.

Для краевых имеем точные значения.

2° Устойчивость:

Сперва выразим
$$u_m^{n+1} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}\cdot\tau - \tau b_m u_m^n + \tau f_m^n + u_m^n =$$

$$= u_m^n\left(1 - \tau b_m - \frac{2\tau}{h^2}\right) + \frac{\tau}{h^2}\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right) + \tau f_m^n.$$

Оцениваю норму вектора $(n+1)$-го слоя:

$$\|u^{n+1}\| = \left\| u^n\left(1-\tau b_m - \frac{2\tau}{h^2}\right) + \frac{\tau}{h^2}(u^n + u^n) + \tau f^n \right\| \le$$

$$\le \left\| u^n\left(1-\tau b_m - \frac{2\tau}{h^2}\right)\right\| + \left\|\frac{\tau}{h^2}(u^n+u^n)\right\| + \|\tau f^n\| =$$

$$= \left\|u^n\left(1-\tau b_m - \frac{2\tau}{h^2}\right)\right\| + 2\frac{\tau}{h^2}\|u^n\| + \tau\|f^n\| \le$$

$$\le \max_{0\le m\le M} \left(\underbrace{1}-\underbrace{\tau b_m} - \frac{2\tau}{h^2}\right)\|u^n\| + 2\frac{\tau}{h^2}\|u^n\| + \tau\|f^n\| =$$

$$= \max_{0\le m\le M} (1-\tau b_m)\|u^n\| \underbrace{- 2\frac{\tau}{h^2}\|u^n\| + 2\frac{\tau}{h^2}\|u^n\|} + \tau\|f^n\| =$$

$$= \overbrace{\max_{0\le m\le M} (1-\underbrace{\tau b_m}_{\ge 0})}^{\le 1}\|u^n\| + \tau\|f^n\| \le \|u^n\| + \tau\|f^n\|$$

$$\|u^{n+1}\| \le \|u^n\| + \tau\|f^n\|$$

$$\|u^n\| \le \|u^{n-1}\| + \tau\|f^{n-1}\|$$

$$\dots$$

$$\|u^1\| \le \|u^0\| + \tau\|f^0\|$$

$\Rightarrow$

$$\|u^{n+1}\| \le \|u^n\| + \tau\|f^n\| \le \|u^{n-1}\| + \tau\|f^{n-1}\| + \tau\|f^n\| \le$$ применяю ещё $(n-2)$ раза

$$\dots \le \|u^0\| + \tau\underbrace{\left(\|f^0\| + \|f^1\| + \dots + \|f^n\|\right)}_{\text{выбираю max из (n+1) слагаемых}} \le \|u^0\| + \tau(n+1)\max_{0\le k\le n}\|f^k\|$$

цель: оценить $\|u^0\| + C\cdot\max\limits_{0\le k\le n}\|f^k\|$ — сводим к определению*

$$\tau(n+1) = \underbrace{\tau n}_{n\le N} + \tau \le T + \tau \;\Rightarrow \text{ с запасом } \tau(n+1) < \underline{2T = C}$$

$\Rightarrow \|u^{n+1}\| \le \|u^0\| + C\cdot\max\limits_{0\le k\le n}\|f^k\|$. Имеем устойчивость по определению*.

<u>3° Сходимость</u>: в силу выполнения условий Т. Филиппова, разностная схема I даёт решение, которое сходится к решению задачи ⊛ с порядком не ниже $O(\tau + h^2)$.

2°° <u>Ещё раз об устойчивости</u>:

по опыту семинаров: $u_m^n = \sum\limits_{k=1}^{M-1} c_k^n \sin \pi k h m$ — разложение по базису,

подставлю: $$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + b_m u_m^n = f_m^n$$

$$\sum_k \frac{c_k^{n+1} - c_k^n}{\tau}\sin(\pi k h m) - \frac{1}{h^2}\sum_k \left(c_k^n \sin \pi k h(m+1) - 2c_k^n \sin \pi k h m + c_k^n \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sin \pi k h(m-1)\right) + b_m \sum_k c_k^n \sin \pi k h m = \sum_k d_k^n \sin \pi k h m$$

$$\Rightarrow \sin \pi k h(m+1) - 2\sin \pi k h m + \sin \pi k h(m-1) =$$

$$= \sin(\pi k h m + \pi k h) - 2\sin \pi k h m + \sin(\pi k m h - \pi k h) =$$

$$= \sin \pi k h m \cos \pi k h + \underline{\sin \pi k h \cos \pi k h m} - 2\sin \pi k h m +$$

$$+ \sin \pi k m h \cos \pi k h - \underline{\sin \pi k h \cdot \cos \pi k m h} =$$

$$= 2\sin(\pi k m h)\cos(\pi k h) - 2\sin(\pi k h m) = \sin(\pi k h m)\cdot(2\cos(\pi k h) - 1) =$$

$$= -\sin(\pi k h m)\cdot(1 - 2\cos(\pi k h)) = -\sin(\pi k h m)\cdot 2\cdot 2\sin^2\frac{\pi k h}{2} =$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= -\sin(\pi k h m)\cdot 4\sin^2\frac{\pi k h}{2}; \quad \Rightarrow \text{ получено}$$

$$\sum_k \frac{c_k^{n+1} - c_k^n}{\tau}\sin(\pi k m h) + \sum_k c_k^n \sin(\pi k m h)\cdot\underbrace{\frac{4}{h^2}\sin\frac{\pi k h}{2}}_{\lambda_k} +$$

$$+ b_m \sum_k c_k^n \sin(\pi k m h) = \sum_k d_k^n \sin \pi k h m$$

λ_k – собственное число оператора L_h;

$\Rightarrow$ при фиксиров. k:

$$\frac{c_k^{n+1} - c_k^n}{\tau} + c_k^n \lambda_k + b_m c_k^n = d_k^n$$

$$c_k^{n+1} = \tau\cdot d_k^n - \tau c_k^n \lambda_k - \tau b_m c_k^n + c_k^n$$

$$c_k^{n+1} = c_k^n(1 - \tau b_m - \tau\lambda_k) + \tau d_k^n$$

$$c_k^n = c_k^{n-1}(1 - \tau b_m - \tau\lambda_k) + \tau d_k^{n-1}$$

и т.д. $\Rightarrow$

$$c_k^{n+1} = c_k^0(1 - \tau b_m - \tau\lambda_k)^n + \tau\underbrace{(d_k^0 + \ldots + d_k^n)}_{n+1\text{ слагаемое}} \le c_k^0(1 - \tau b_m - \tau\lambda_k)^n + \tau \max_{0\le k\le N} d_k^n\cdot(n+1)$$

$\tau(n+1)\max\limits_k d_k^n \le \underbrace{2T}_{const}\max\limits_k d_k^n$; Условие устойчивости:

$|(1 - \tau b_m - \tau\lambda_k)^n| \le 1$; $\quad -1 \le 1 - \tau b_m - \frac{4\tau}{h^2} \le 1$; беру $\underline{\max b_m}$:

$|1 - \tau b_m - \tau\cdot\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\pi k h m}{2})| \le 1$; $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{2\tau}{h^2} + \max\limits_m\left(\frac{\tau\cdot b_m}{2}\right) \le 1}$

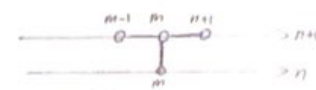
II Неявная схема

Рассмотрим схему, в которой u_{xx} будем приближать оператором по $(n+1)$-му слою:

$$
\text{II}\quad
\begin{cases}
\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + b_m u_m^{n+1} = f_m^{n+1}; \quad n=\overline{0,N-1},\ m=\overline{1,M-1} \\
u_0^n = u_M^n = 0,\ n=\overline{0,N} \\
u_{M-1}^n = -u_M^n,\ n=\overline{0,N} \\
u_m^0 = u^0(x_m)
\end{cases}
$$

$b_m = b(x_m)$

$f_m^{n+1} = f(t_{n+1}, x_m)$



шаблон сетки.

1° Аппроксимация на решении

Аналогично предыдущей схеме, будем производить разложение слагаемых, но точку берём иную: (t_{n+1}, x_m):

$$u_m^n = u(t_{n+1}-\tau, x_m) = u(t_{n+1}, x_m) - \tau u_t(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(\tau^2)$$

$$u_{m\pm1}^{n+1} = u(t_{n+1}, x_m \pm h) = u(t_{n+1}, x_m) \pm h u_x(t_{n+1}, x_m) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_{n+1}, x_m) \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(h^4);$$

Числители дробей: $u_m^{n+1} - u_m^n = \tau u_t(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(\tau^2)$

$$u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} = h^2 u_{xx}(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(h^4)$$

Подставим:

$$\|\tau_m^n\| = \left\| \frac{\tau u_t(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(\tau^2)}{\tau} - \frac{h^2 u_{xx}(t_{n+1}, x_m) + \underline{O}(h^4)}{h^2} + b(x_m)\, u(t_{n+1}, x_m) - \right.$$

$$\left. - f(t_{n+1}, x_m) \right\| = \Big\| \underbrace{u_t(t_{n+1}, x_m) - u_{xx}(t_{n+1}, x_m) + b(x_m)\, u(t_{n+1}, x_m) - f(t_{n+1}, x_m)}_{=0 \text{ т.к. на решении}} + \underline{O}(\tau) + \underline{O}(h^2) \Big\|$$

$\Rightarrow$ порядок аппроксимации равен $\underline{O}(\tau + h^2)$.

2° Устойчивость:

Действия аналогичные: стремимся получить нер-во из определения *.

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + b_m u_m^{n+1} = f_m^{n+1} \quad \Big| \cdot \tau h^2$$

$$\underline{h^2(u_m^{n+1}-u_m^n)} - \tau(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + \underline{\tau h^2 u_m^{n+1} b_m} = f_m^{n+1} \cdot \tau h^2$$

$$u_m^{n+1}(h^2 + \tau h^2 b_m) + \tau(-u_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) = f_m^{n+1} \cdot \tau h^2 + u_m^n h^2$$

в равномерной метрике $\|u^k\| = \max\limits_{0 \le m \le M} |u_m^k|$;

Зафиксирую такой номер $m=j$, при котором на $(n+1)$-ом слое

$\|u^{n+1}\| = |u_j^{n+1}|$; тогда он больше соседних с ним в слое элементов: $|u_j^{n+1}| > |u_{j\pm1}^{n+1}|$, тогда из

$$u_j^{n+1}(h^2 + \tau h^2 b_j) - \tau(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = f_j^{n+1}\tau h^2 + u_j^n h^2 \quad | \div h^2$$

$$u_j^{n+1}(1 + \tau b_j) - \underbrace{\frac{\tau}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})} = f_j^{n+1}\tau + u_j^n \qquad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$|u_{j+1}^{n+1}| - |2u_j^{n+1}| + |u_{j-1}^{n+1}| < 0 \quad \text{т.к. } 2|u_j^{n+1}| > |u_{j-1}^{n+1}| + |u_{j+1}^{n+1}|$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} < 0, & \text{при } u_j^{n+1} < 0 \\ 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} > 0, & \text{при } u_j^{n+1} > 0 \end{cases}$$

Оцениваем норму вектора $(n+1)$-го слоя: (учитывая номер j)

$$\|u^{n+1}\| = |u_j^{n+1}| \;\; (<)$$

$$|\underbrace{(1+\tau b_j)}_{>1} u_j^{n+1}| > |u_j^{n+1}| \text{ и учитывая (3),}$$

$(1+\tau b_j)u_j^{n+1}$ и $\frac{\tau}{h^2}(2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1})$ -одного знака, $\Rightarrow$

$$(<) \left|(1+\tau b_j)u_j^{n+1} + \frac{\tau}{h^2}(2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1})\right| \overset{(4)}{=} |f_j^{n+1}\tau + u_j^n| \leq$$

$$\leq \tau|f_j^{n+1}| + |u_j^n| \leq \tau\|f^{n+1}\| + \|u^n\|; \quad \Rightarrow \text{ получим,}$$

берём max и получим нормы

что $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \tau\|f^{n+1}\| \leq \|u^{n-1}\| + \tau\|f^n\| + \tau\|f^{n+1}\| \leq$ делаю n шагов

$$\leq \|u^0\| + \tau\underbrace{(\|f^1\| + \ldots + \|f^{n+1}\|)}_{\text{беру max}} \leq \|u^0\| + \tau\cdot(n+1)\cdot \max_{1\leq k\leq n+1}\|f^k\|$$

Принимая $c = 2T \geq \tau(n+1)$, получу $\|u^{n+1}\| \leq \|u^0\| + c\cdot\max_{1\leq k\leq n+1}\|f^k\|$

$\Rightarrow$ схема устойчива по определению,* при любых h и τ

3° Сходимость: Выполнены условия Th Филиппова $\Rightarrow$ решение разностной схемы II сходится к решению задачи ⊛ с порядком не ниже $O(\tau + h^2)$.

III Схема Кранка - Николсона

От явной и неявной схемы, мы перешли к схемам с весами: θ и $(1-\theta)$, которые представляют собой сумму явной схемы с весом $(1-\theta)$ и неявной с весом $(1-\theta)$:

$$(1-\theta)\cdot\left[\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + b_m u_m^n = f_m^n\right]$$

$$\theta\cdot\left[\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + b_m u_m^{n+1} = f_m^{n+1}\right]$$

в сумме имеем

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \left[\theta\cdot\Lambda u^{n+1} + (1-\theta)\Lambda u^n\right] + b_m\left[(1-\theta)u_m^n + \theta u_m^{n+1}\right] = (1-\theta) f_m^n + \theta f_m^{n+1}.$$

сеточный оператор Лапласа

Наилучшее усреднение происходит в середине отрезка, и значит при $\theta = \frac{1}{2}$ => получим схему Кранка - Николсона:

$$\text{III}\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} - \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2h^2} + \dfrac{b_m}{2}\left(u_m^n + u_m^{n+1}\right) = \dfrac{f_m^{n+1}+f_m^n}{2} & n=\overline{0,N-1} \\ & m=\overline{1,M-1} \\ u_0^n = u_M^n = 0,\ u_{M-1}^n = -u_M^n,\ n=\overline{0,N}; \\ u_m^0 = u^0(x_m),\ m=\overline{0,M}; & b_m = b(x_m),\ f_m^n = f(t_n, x_m). \end{cases}$$

1° Аппроксимация на решении:

$\exists\ u(t,x)$ - решение; Разложим всё в точке (t_n, x_m):

$$u_m^{n+1} = u(t_n+\tau, x_m) = u(t_n, x_m) + \tau u_t(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(t_n, x_m) + O(\tau^4)$$

$$u_{m\pm1}^{n+1} = u(t_n+\tau, x_m\pm h) = u(t_n, x_m) \pm h u_x(t_n, x_m) + \tau u_t(t_n, x_m) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[u_{tt}(t_n, x_m)\tau^2 \pm 2u_{tx}(t_n, x_m)\tau h + u_{xx}(t_n, x_m)h^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\pm h^3 u_{xxx}(t_n, x_m) + 3u_{xxt}(t_n, x_m)h^2\tau \pm 3u_{ttx}(t_n, x_m)\tau^2 h + u_{ttt}(t_n, x_m)\tau^3\right] + O(\tau^4, h^4)$$

$$u_{m\pm1}^n = u(t_n, x_m) \pm h u_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n, x_m) \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n, x_m) + O(h^4)$$

Тогда в числителях будут получать:

$$\Bigg\| \frac{\tau U(t_n, x_n) + \frac{\tau}{2} U_t(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6} U_{ttt}(t_n, x_n) + O(\tau^4)}{\tau} -$$

$$- \frac{2\tau U_t(t_n x_m) + U_{tt}(t_n x_m)\tau^2 + U_{xx}(t_n x_m) h^2 + U_{xxt}(t_n, x_m) h^2 \tau + \frac{1}{3} U_{ttt}(t_n x_m)\tau^3 + O(\tau^4 h^4)}{h^2} =$$

$$= \frac{h^2 U_{xx}(t_n, x_n) + O(h^4)}{h^2} + \frac{b_m}{2}\left[2U(t_n, x_m) + \tau U_t(t_n, x_m) + O(\tau^2)\right] -$$

$$- \frac{2f(t_n, x_m) + f_t(t_n, x_m))\tau + O(\tau^2)}{2} \Bigg\| = O(\tau^2 + h^2)$$

учитывая что мы действуем на решении;

=> порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

<u>2° Устойчивость</u> При разложении вида $U_m^n = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^n \sin(Akmh)$ и подстановке в схему, в числителях преобразования для $\sin(\cdot)$ будут аналогичны, => для матрицы линейного оператора, соответсвующей данной схеме, и собвенных чисел λ_k будем иметь:

$$\sum_k \frac{C_k^{n+1} - C_k^n}{\tau} \sin(Akmh) + \frac{1}{2} \sum_k C_k^{n+1} \sin(Akmh) \underbrace{\frac{4}{h^2} \sin \frac{Akh}{2}}_{\lambda_k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum C_k^n \sin(Akmh) \underbrace{\frac{4}{h^2} \sin \frac{Akh}{2}}_{\lambda_k} + \frac{b_m}{2} \sum_k \frac{C_k^n + C_k^{n+1}}{1} \sin(Akmh) =$$

$$= \sum_k \frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2} \sin(Akmh)$$

$$\Rightarrow \frac{C_k^{n+1} - C_k^n}{\tau} + \frac{C_k^{n+1} + C_k^n}{2} \lambda_k + \frac{b_m}{2}(C_k^{n+1} + C_k^n) = \frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2}$$

$$C_n^{n+1}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{\lambda_k}{2} + \frac{b_m}{2}\right] = \frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2} + C_k^n\left[\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_k}{2} - \frac{b_m}{2}\right]$$

$$C_k^{n+1} = \left[\frac{\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_k}{2} - \frac{b_m}{2}}{\frac{1}{\tau} + \frac{\lambda_k}{2} + \frac{b_m}{2}}\right] C_k^n + \left[\frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{\frac{2}{\tau} + \lambda_k + b_m}\right]; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k^{n+1} = \left[\frac{1 - \lambda_k\tau - b_m\tau}{1 + \lambda_k\tau + b_m\tau}\right] C_k^n + \left[\frac{(d_k^{n+1} + d_k^n)\tau}{2 + \lambda_k\tau + b_m\tau}\right] =$$

$$= \left[\frac{1 - \lambda_k\tau - b_m\tau}{1 + \lambda_k\tau + b_m\tau}\right]^2 C_k^{n-1} + \frac{(d_k^n + d_k^{n-1})\tau + (d_k^{n+1} + d_k^n)\tau}{2 + \lambda_k\tau + b_m\tau} =$$

$$= \ldots = \left[\frac{1 - \lambda_k\tau - b_m\tau}{1 + \lambda_k\tau + b_m\tau}\right]^n C_n^0 + \frac{\tau(d_k^0 + 2d_k^1 + \ldots + 2d_k^{n-1} + d_k^n)}{2 + \lambda_k\tau + b_m\tau} \le$$

$$\le \underbrace{\left[\frac{1 - \lambda_k\tau - b_m\tau}{1 + \lambda_k\tau + b_m\tau}\right]^n}_{\le 1} C_k^0 + \frac{\overset{\le 4T}{2\tau(n+1)}}{2 + \lambda_k\tau + b_m\tau} \cdot \max_{0 \le s \le n} |d_k^s|$$

$\Rightarrow$ имеем устойчивость схемы при любых τ и h;

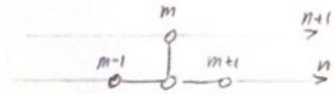
3° Сходимость: Воспользуемся Th Филиппова: выполнены её условия $\Rightarrow$ имеем сходимость решения сеточной задачи к решению дифференциальной задачи с порядком $O(\tau^2 + h^2)$.

Работа программы:

Во всех трёх схемах при вычислении затрагиваются 2 слоя: n-ый и $(n+1)$-ый.

Рационально было бы создать 2 массива, в одном держать точки n-го слоя, через которые считать значения для вычисления сеточной ф-ии в точках $(n+1)$-го слоя. Назовём их next[ ] и prev[ ].

I°. Реализация Явной схемы довольно проста: в ней представляется возможным считать точки по рекуррентной формуле



$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{\tau} - \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + U_m^n b_m = f_m^n$$

$$\hookrightarrow U_m^{n+1} = \frac{\tau}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \tau U_m^n b_m + f_m^n \tau + U_m^n; \quad (1)$$

края: при $t=0$ заполняю массив значениями $U_m^0 = u^0(x_m)$; далее запускаем цикл с формулой (1), вызывая функцию explicit_fun. Для записи результата каждого шага использую файл output.txt.

II°. Каждый шаг неявной схемы буду считать используя прогонку. Её реализация уже имеется из задачи Task2. Функцию для прогонки напишем отдельно. Функция implicit_fun будет вызывать её N раз и каждый раз считать новый слой через предыдущий, и записывать его в файл output.txt

Самое главное: верно задать матрицу, по которой пойдёт прогонка. В случае с моими краевыми условиями:

$$-\frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + b_m U_m^n = f_m^{n+1} \quad \Big| \cdot \tau$$

$$\hookrightarrow -\frac{\tau}{h^2} \cdot U_{m+1}^{n+1} + \left[1 + \tau b_m + \frac{2\tau}{h^2}\right] U_m^{n+1} - \frac{\tau}{h^2} U_{m-1}^{n+1} = \tau f_m^{n+1} + U_m^n \quad \Big| \div \tau$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{h^2} \cdot U_{m+1}^{n+1} + \left[\frac{1}{\tau} + b_m + \frac{2}{h^2}\right] U_m^{n+1} - \frac{1}{h^2} \cdot U_{m-1}^{n+1} = f_m^{n+1} + \frac{1}{\tau} U_m^n$$

=> матрица оператора

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & & & & \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & & & & \\ 0 & -a_2 & c_2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -a_{M-2} & c_{M-2} & -b_{M-2} & 0 \\ & & & 0 & -a_{M-1} & c_{M-1} & -b_{M-1} \\ & & & 0 & 0 & -a_M & c_M \end{pmatrix} = A;$$

$$f[m] = f(t_n+\tau, x_m) + \frac{1}{\tau} U(t_n, x_m)$$

так как $U_0^n = U_M^n = 0$

$U_{M-1}^n = -U_M^n$

то при $A\cdot\vec{u} = \vec{f}$

$a(M) = -1$ $\quad a_i = \frac{1}{h^2}$, $i = 1,\dots,M-1$

$c(0) = 1$ $\quad b_i = \frac{1}{h^2}$; $i = 1,\dots,M-1$

$c(M) = 1$

$b(0) = 0$ $\quad f(M) = f(0) = 0.$

$$c_m = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + b(x_m); \quad i = \overline{1, M-1}.$$

III° Каждый шаг считаю снова прогонкой, но формулы будут иные. Найдём матричный вид:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} - \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{2h^2} - \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h^2} + b_m(U_m^{n+1} + U_m^n)\frac{1}{2} = \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}$$

$$-\frac{1}{2h^2}U_{m+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{b_m}{2} + \frac{1}{\tau}\right)U_m^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_{m-1}^{n+1} = \frac{U_m^n}{\tau} + \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h^2} + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2} - \frac{b_m}{2}U_m^n$$

=> для прогонки: $a[i] = \frac{1}{2h^2}$; $i = \overline{1, M-1}$ $\quad a(M) = -1$ $\quad a(0) = b(M) = 0$

$b(i) = \frac{1}{2h^2}$; $i = \overline{1, M-1}$ $\quad c(0) = 1$ — их нет в матр. но в массиве есть.

$c(i) = \frac{1}{h^2} + \frac{b_i}{2} + \frac{1}{\tau}$ $\quad c(N) = 1$

$b(0) = 0$

$$f(m) = \frac{1}{2h^2}\left(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right) + U_m^n\left(\frac{1}{\tau} - \frac{b_m}{2}\right) + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}$$

Каждый шаг считается прогонкой в функции krank_nikolson. Каждый новый массив записывается в файл output.txt.

По итогу работы выводим число $res = \frac{\|Lu - L_h u_h\|}{\tau + h^2}$ — для явной и неявной схем, и $res = \frac{\|Lu - L_h u_h\|}{\tau^2 + h^2}$ — для Кранка-Николсона.

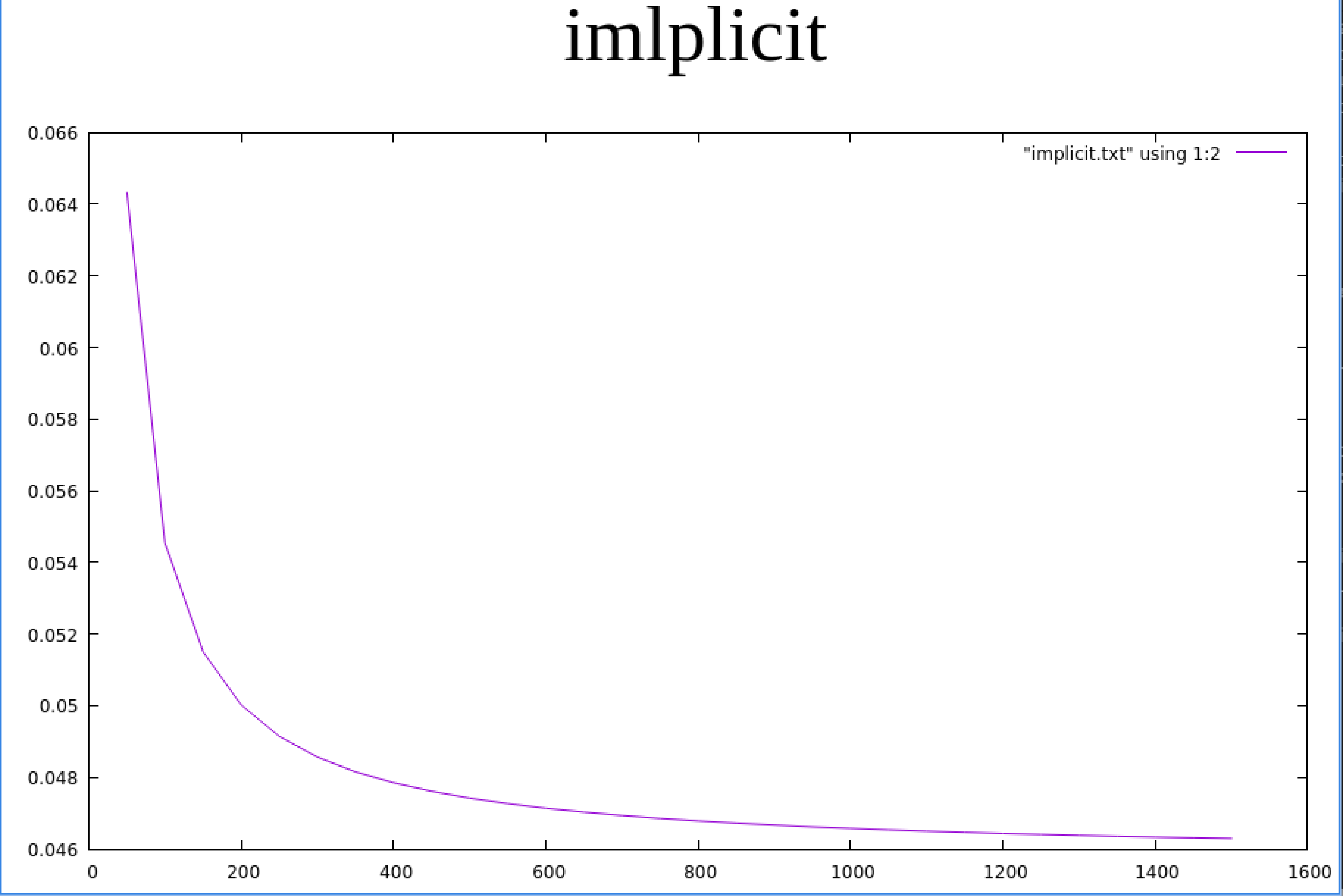
Вычисления провёл при $b(x) = b\_m(x) = e^{-x}$

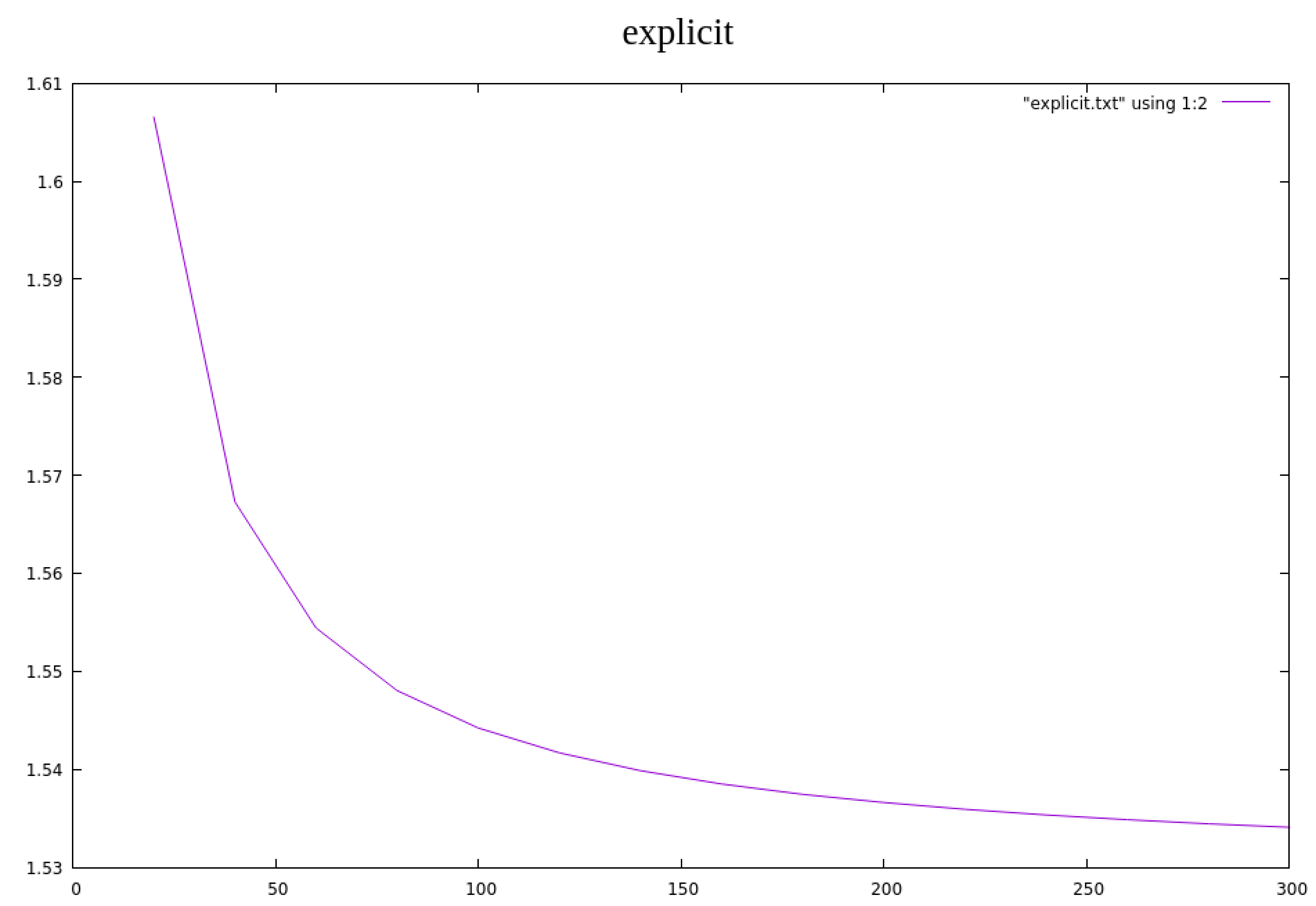
точное решение = exact$(t, x) = e^t \cdot x(1 - x^2)$

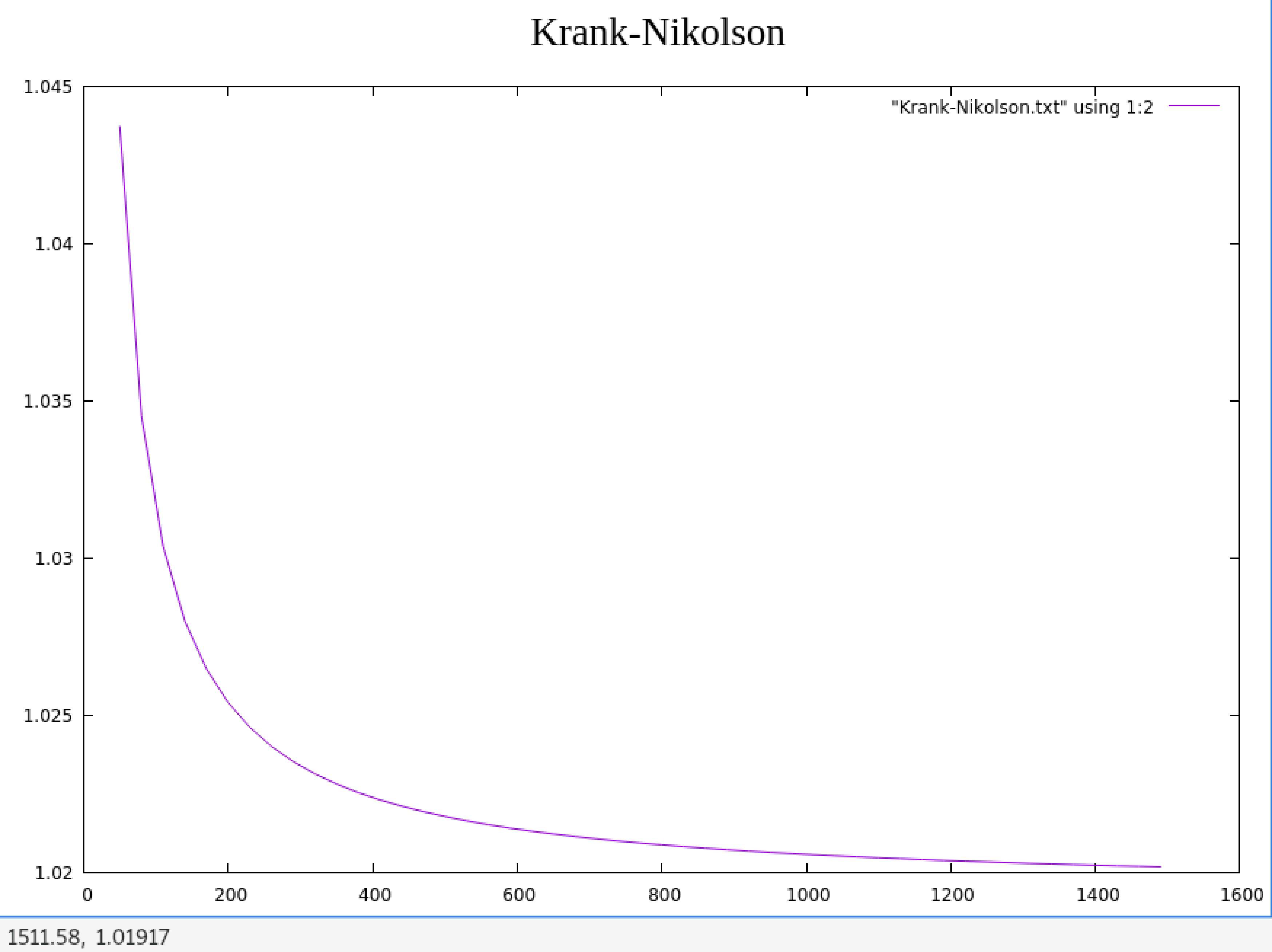
правая часть $f(t, x) =$ right_part$(t, x) = e^t \cdot x(1 - x^2 + 6 - e^{-x}(1 - x^2))$.

В силу ограничений на τ и h в явной схеме, для неё принимал $N = 3M^2$. Для других схем $M = N$.

Графики показывают приближение к const.


imlplicit
"implicit.txt" using 1:2
0.066
0.064
0.062
0.06
0.058
0.056
0.054
0.052
0.05
0.048
0.046
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600


explicit
"explicit.txt" using 1:2
1.61
1.6
1.59
1.58
1.57
1.56
1.55
1.54
1.53
0
50
100
150
200
250
300


Krank-Nikolson
"Krank-Nikolson.txt" using 1:2
1.045
1.04
1.035
1.03
1.025
1.02
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1511.58, 1.01917