Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

МФТИ

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа электроники, фотоники и молекулярной физики (ФЭФМ)

для студентов 2 курса на весенний семестр 2024–2025 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2025

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2024–2025 учебного года. Физтех-школа электроники, фотоники и молекулярной физики (ФЭФМ). – Москва : МФТИ, 2025. – 40 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А.А. Воронов
16 января 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: оптика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
16.03.01 «Техническая физика»
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **для всех физтех-школ, кроме ФБВТ, ВШПИ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 4 семестр
Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. С.В. Виноградов
д.ф.-м.н., проф. С.Л. Клёнов
к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский
к.ф.-м.н., проф. В.А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. П.В. Попов
к.ф.-м.н., доц. Ю.Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 04 декабря 2024 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. В. Гавриков

ОПТИКА

1.* Волновое уравнение. Монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны. Показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет, степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера, полное внутреннее отражение. Поток энергии волны, импульс волны, давление света. Эффект Доплера.

2. Основы геометрической оптики. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Тонкая линза. Центрированные оптические системы. Фокусы и главные плоскости оптической системы. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических аберрациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения. Теорема о сохранении яркости в оптической системе.

Современные применения геометрической оптики в пределе коротких длин волн (рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением).

3. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность. Функция временной когерентности, её связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера–Хинчина) и с видностью интерференции. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределённостей.

4. Интерференция при использовании протяжённых источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности. Функция пространственной когерентности, её связь с распределением интенсивности излучения по источнику. Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах.

Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

5. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля. Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов, теорема Бабинэ. Дифракция на краю полубесконечного экрана, спираль Корню.

---

* Повторение материала курса «Электричество и магнетизм»

6. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

7. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких плёнках и многослойных структурах. Просветление оптики. Зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

8. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённостей. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

9. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга–Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

10. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Показатель преломления плазмы. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Групповая скорость. Уравнение движения волнового пакета в приближении геометрической оптики в неоднородных средах.

Различные диапазоны длин волн, их особенности. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Понятие о метаматериалах.

11. Элементы кристаллооптики. Дихроизм, поляроиды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векторов k, E, D, B, направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии (наведённое двулучепреломление). Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц. Рэлеевское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света. Понятие о комбинационном рассеянии света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм, роль симметрии среды. Оптическое выпрямление. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка. Фазовая самомодуляция.

14. * Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Список литературы

<u>*Основная*</u>

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5 т. Т. 4. Оптика. – М. : Физматлит, 2018.
2. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I. Ч. III – Москва : Физматлит, 2001, 2007.
4. Сборник задач по общему курсу физики. В 3 частях. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина (7-е изд., испр. и доп.). – М. : Физматкнига, 2021.
5. Лабораторный практикум по общей физике. В 3 т. Том 2. Оптика: учебное пособие / под ред. А. В. Максимычева. – Москва : МФТИ, 2014.

<u>*Дополнительная*</u>

1. *Бутиков Е.И.* Оптика : учебное пособие. 3-е изд., доп. – СПб. : Издательство «Лань», 2019, (электронная версия 2021).

2. *Ахманов С.А. Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : изд. МГУ, 2004.
3. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959, 2007.
4. *Ландсберг Г.С.* Оптика. – Москва : Физматлит, 2017, (электронная версия 2021.).

<u>*Литература для самостоятельного изучения*</u>

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — Москва : Наука, 1973.
2. *Кольер Р.* Оптическая голография. — Москва : Мир, 1973.
3. *Матвеев А.Н.* Оптика. учебное пособие. — Москва : Высшая школа, 1985.
4. Введение в когерентную оптику и голографию : учебно-метод. пособие по курсу: Общая физика / сост. С. М. Козел [и др.]; М. : МФТИ, 2000.
5. *Крымский К.М.* Аберрации центрированных оптических систем — теория и расчёт. — Москва : МФТИ, 2015.
6. *Петухов В.А.* Оптические волокна: учебно-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2019.
7. *Попов П.В.* Рассеяние света: учебно-метод. пособие. — Москва : МФТИ, в печати.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 2-го курса
на весенний семестр 2024/2025 учебного года

Дата	**№ сем**	**Тема семинарских занятий**	**Задачи**		
			0	**I**	**II**
01.02–07.02	**1**	Законы преломления и отражения. Формулы Френеля. Поток энергии и давление света.	$^{0}1$ 2.3 11.7	2.1 2.8 2.27 2.33	2.11 2.37 2.45
08.02–14.02	**2**	Геометрическая оптика. Оптические инструменты. Элементы фотометрии.	$^{0}1$ $^{0}2$ 1.7	1.22 1.29 Т1 1.57	1.25 1.41 Т2 Т3 1.52
15.02–21.02	**3**	Интерференция монохроматических волн	3.3 $^{0}1$ $^{0}2$	3.18 3.14 3.32 Т4	3.16 3.11 3.35 5.23

22.02– 28.02	**4**	Временная и пространственная когерентность	$^{0}1$ 4.2 5.3 $^{0}2$	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 Т5 5.13 5.30
01.03– 07.03	**5**	Дифракция Френеля. Зонные пластинки	$^{0}1$ $^{0}2$ 6.1	6.15 6.20 6.59 6.43	6.16 Т6 6.50 6.64
08.03– 14.03	**6**	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов	7.5 $^{0}1$ $^{0}2$	7.16 7.48 7.55 7.83	7.10 7.53 7.59 Т7
15.03– 21.03	**7**	Спектральные приборы	8.2 $^{0}1$ $^{0}2$	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 Т8 8.87
22.03– 28.03	**8**	Контрольная работа (по группам).			
29.03– 04.04	**9**	Сдача 1-го задания			
05.04– 11.04	**10**	Дифракция на синусоидальных решётках. Элементы Фурье-оптики	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.1 9.15 9.22 9.45	9.11 9.17 9.28 9.66
12.04– 18.04	**11**	Голография	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.32 9.35 9.46 9.52	9.33 9.36 9.51 9.78
19.04– 25.04		Дисперсия волн. Фазовая и групповая скорости	$10.5^{(1,2,5)}$ $^{0}1$ 10.2	10.4 10.67 10.77 10.75	10.21 10.25 Т9 10.36
26.04– 02.05	**13**	Поляризация света. Элементы кристаллооптики	11.12 11.1 11.17	11.9 11.16 Т10 11.54	Т11 11.60 11.96 Т12

03.05–09.05	**14**	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики	^{0}1 ^{0}2 ^{0}3	Т13 11.89 11.126 Т14	11.88 11.128 11.125 11.90
10.05–23.05	**15** **16**	Сдача 2-го задания			

<u>Примечание</u>

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина (7-е изд., испр. и доп.). – М. : Физматкнига, 2021». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на три группы:

0 – задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;

I – задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

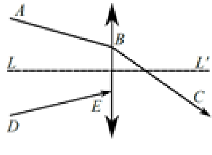
II – задачи для самостоятельного решения.

Задачи группы 0

<u>Семинар 1</u>

^{0}1. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n, через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0.

<u>Семинар 2</u>



^{0}1. На рисунке показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC. Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.

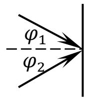
^{0}2. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 3

[0]**1.** Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10$ МГц ($\lambda > 30$ м).

Семинар 4



[0]**1.** На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0{,}01$ рад. Длина волны $\lambda = 500$ нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см. на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рисунок).

Ответ: 25 мкм.

[0]**2.** На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{\text{мин}}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

[0]**1.** В двухлучевом интерференционном опыте используется источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей $\Delta_{\max}$ и максимальное число интерференционных полос $m_{\max}$, которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

[0]**2.** Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n, если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

[0]**1.** Щель шириной $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

[0]**2.** На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ. Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

[0]**1.** Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

⁰2. Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ – длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0{,}05$.

Семинар 8

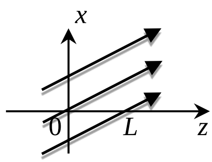
⁰1. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

Ответ: $\delta\varphi \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ рад.

⁰2. Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11



⁰1. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости *xz* под углом α к оси *z*. Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости $z = 0$. Найти разность фаз между колебаниями в точках $z = 0$ и $z = L$, лежащих на оси *z* (см. рисунок).

⁰2. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A. Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

⁰3. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b.

Семинар 12

⁰1. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

⁰2. Голограмму точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластинки, записали по схеме Габора на длине волны λ. Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ?

⁰3. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

^{0}1. Почему небо голубое, закат красный, а облака белые?

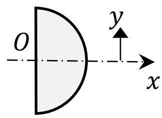
^{0}2. Убывание интенсивности пучка света при рассеянии аналогично убыванию плотности потока направленного пучка частиц, движущегося в газе. Считая известной формулу сечения рассеяния Рэлея $\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{c^4}\left(\frac{n-1}{2\pi N}\right)^2$, где N – концентрация рассеивающих центров, оцените «длину свободного пробега» света в воздухе для λ = 400 нм (фиолетовый свет). Показатель преломления воздуха $n \approx 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $l \sim 20$ км.

^{0}3. Лазерный пучок проходит сквозь поглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

Текстовые задачи

Т1. (2А-2024) Половинка стеклянного шарика радиусом $R = 2$ см с показателем преломления $n = 5/3$ используется в качестве лупы. Определите оптическую силу такой лупы и её увеличение при наблюдении предмета с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см.



Ответ: а) $f = 3$см, $D \approx$ 33,3 дптр, б) $\Gamma = 3$.

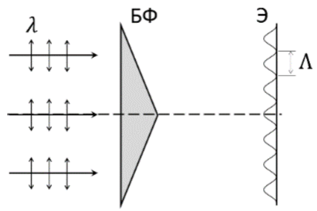
Т2. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для L_d = 0,5 м.

б) У некоторого дальнозоркого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» L_0 = 25 см. Провести расчет для L_b = 1 м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

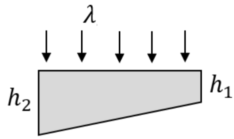
Т3. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера. гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля (БФ) плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ. Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ. Определите видность V интерференционной картины.



Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$.

Т5. (2023) Толщина клиновидной стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$ изменяется от величины $h_1 = 0{,}358$ мм у одного края до $h_2 = 0{,}398$ мм у другого. Сколько интерференционных полос будет фиксироваться на поверхности клина при наблюдении под прямым углом в отражённом свете длины волны $\lambda = 655$ нм и степенью монохроматичности $\lambda/\Delta\lambda = 500$?



Ответ: 0 .

Т6. (2023) На пути плоского волнового фронта интенсивности I_0 оказался прозрачный экран, на котором непрозрачной краской нарисован знак, предупреждающий о радиоактивной опасности (см. рис). Определите интенсивность в точке, расположенной на оси симметрии за знаком на таком расстоянии, что радиус «кружка» совпадает с радиусом 1-й зоны Френеля, а внутренний и внешний радиусы «лепестков» равны радиусам 2-й и 9-й зон Френеля соответственно. Углы между радиальными сторонами «лепестков» равны 60°.

Ответ: $I_k = 4I_0$.

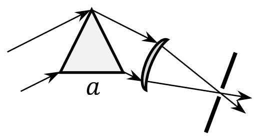
Т7. Заметив свет от маяка с расстояния 20 км невооруженным глазом, моряк затем рассматривает его через подзорную трубу с 12-кратным увеличением. Оценить, во сколько раз при этом меняется кажущаяся яркость маяка. Диаметр зрачка d = 3 мм, длина волны λ = 0.5 мкм, радиус линзы маяка считать равным R = 0.5 м. *Примечание*: зрительное ощущение "яркости" определяется освещенностью сетчатки глаза.

Ответ: Увеличится в 64 раза.

Т8. Спектральная линия H_α атомарного водорода (λ = 6563 Å) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda$ ≈ 0,16 Å. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности ρ = = 0,9, чтобы с его помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

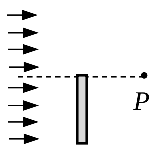
Ответ: $L = 0{,}4$ мм, $\Delta\lambda = 5$ Å, $\theta_1 = 2{,}3°$, $D = 4 \cdot 10^{-3}$ Å^{-1}.

Т9. Параллельный пучок света ультракороткой длительности $\tau_0 = 50$ фс падает на стеклянную призму и после фокусируется тонкой линзой на очень узкую щель (ширина щели меньше размера дифракционного пятна). Длина волны излучения $\lambda = 600$ нм, дисперсия материала призмы $dn/d\lambda = -10^3$ см$^{-1}$, длина основания призмы $a = 3$ см, пучок заполняет всю призму. Оцените длительность τ и спектральную ширину $\Delta\nu$ прошедшего через щель импульса. Дисперсией в линзе пренебречь.

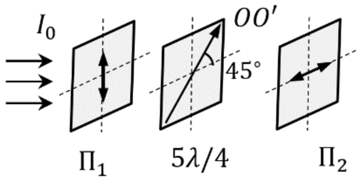


Ответ: $\tau \approx -\frac{a\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda} \approx 6$ пс.

Т10. Плоская волна круговой поляризации (длина волны λ) падает на полубесконечный экран, изготовленный из поляроида с показателем преломления для разрешенного направления n ($n - 1 \ll 1$) и толщиной a = λ/[4(n −1)]. Найти отношение полуосей эллипса поляризации света в точке наблюдения P.



Т11. Двоякопреломляющая пластинка в $5\lambda/4$ для зелёного света $\lambda = 540$ нм помещена между скрещенными поляроидами, при этом оптическая ось пластинки лежит в плоскости поляроидов и повернута на угол 45° относительно их осей пропускания. Падающий на систему свет состоит из трёх узких спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 540$ нм, $\lambda_2 = 675$ нм и $\lambda_3 = 450$ нм, имеющих одинаковую интенсивность I_0 и круговую поляризацию. Найдите интенсивности на выходе для всех трёх компонент.



Ответ: $I_1 = I_0/4$, $I_2 = 0$, $I_3 = I_0/2$.

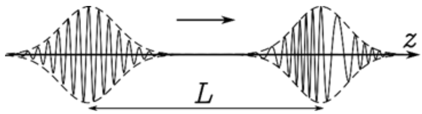
Т12. Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией нормально падает на экран с двумя узкими параллельными щелями. Одну из щелей перекрыли пластинкой $\lambda/4$, а другую — поляроидом. Разрешённое направление поляроида и оптическая ось пластинки параллельны щелям. Определите видность V интерференционной картины на экране за щелями.

Ответ: $V = 2/3$.

Т13. Найти коэффициент пропускания атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного (λ = 700 нм) и фиолетового (λ = 400 нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: для λ = 400 нм $I_{пр}/I_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$, для λ = 700 нм $I_{пр}/I_0 = 0{,}27$.

Т14. (2021) Нелинейный эффект «фазовая самомодуляция» обусловлен уменьшением фазовой скорости в окрестности пика интенсивности светового импульса, из-за чего частота сигнала уменьшается на переднем фронте импульса и увеличивается за ним (см. рисунок). Оцените спектральную ширину $\Delta\nu$ импульса длительностью $\tau_0 = 10$ пс после прохождения $L = 50$ м кварцевого оптоволокна, если пиковая интенсивность составляет $J_0 = 2$ ГВт/см^2. Длина волны света $\lambda = 1$ мкм (в вакууме). Показатель преломления кварца имеет вид $n = n_0 + n_2 J$, где $n_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ см^2/Вт. Считать, что огибающая импульса имеет форму симметричного «колокола», а начальная спектральная ширина минимальна (*спектрально ограниченный* импульс). Дисперсией и изменением формы огибающей пренебречь.



Ответ: $\Delta\nu \sim \frac{4Ln_2J}{\lambda\tau} \approx 6 \cdot 10^{12}$ Гц.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: **для всех, кроме ФПМИ, ФБВТ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент М. О. Сизых

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.

2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.

4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортономированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.

6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета- функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: равномерная непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

Список литературы

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 3. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2006.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Лаборатория знаний, 2020.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2001, 2003, 2006, 2007. — Москва : Физматлит : Лаб. знаний, 2003. — Москва : Физматлит, 2003, 2005, 2008.

ЗАДАНИЯ

Список литературы

1. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т. 2. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2021. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т. 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003, 2012. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 110; 111(1,4).

С.2. §22: 1(1); 8; 12; 24; 25; 28; 41; 45. В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 65; 66; 68; 72.

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функций $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x \in [0; \pi/2]$ и $g(x) = \operatorname{sh} x + 1,\ x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

б) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^{2025}; б) x^{2024}; в) $(x^2 - \pi^2)^3$.

С.2. §22: 115; 116. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

3. а) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, такая что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Указание: воспользоваться неравенством Парсеваля.

б) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2(x)dx.$$

Указание: после сдвига продолжить функцию нечётным образом.

в)* Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, такая что $f(a)=0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx.$$

С.2. §16: 47*(2); 48(1, 2).

II. Функциональные пространства

4. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится}\\ \text{равномерно к } f\end{array}} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_2 \text{ к } f\end{array}} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left, "/" marking] & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_1 \text{ к } f\end{array}} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift left, "/" marking] \\
\boxed{\{f_n\} \text{ сходится поточечно к } f} \arrow[u, shift left, "/" marking] \arrow[ur, phantom, ""] & \arrow[u, shift left, "/" marking] & \arrow[u, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

С.3. §18: 97; 98.
С.3. §20: 20*; 23*.

5. Полна ли система $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ в пространствах

а) $C[-\pi,\pi]$; б) $CL_1[-\pi,\pi]$; в) $C[-1,1]$?

6. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

С.3. §19: 116.

7. Полна ли система функций $\left\{x^{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[1;10]$; б) $C[0;2]$?

8. Полна ли система функций $\{1\} \cup \left\{x^{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0;2]$?

9. Полна ли система функций $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[0;\pi/4]$; б) $C[\pi/4;\pi/2]$; в) $C[-\pi/8;\pi/8]$?

$\boxed{43+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(1); 4; 14(5); 17; 18(1*, 3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1) — исследуйте также на множестве $(1; +\infty)$.
1(2) — исследуйте также на множестве $(0; 1)$.

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3; 4; 6).

1. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = [a_0, +\infty)$ $a_0 > 0$ и $E_2 = (0, +\infty)$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

2. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\text{а)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \qquad \text{б)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \qquad \text{в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §15: 2(3); 3(1); 1(3) (с помощью дифференцирования по параметрам); 6(1, 3, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 1(3, 4); 7(2); 9(2); 12(8); 13(6)*.

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248, 249.

С.3. §17: 1(1); 2(3); 5(1); 6(1).

3. Найдите преобразование Фурье:

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \ \alpha > 0;$ б) $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \ \alpha > 0;$

С.3. §17: 8(1, 2, 5); 10(2,3); 13; 14(1, 3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58; 60.

4. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{a}{a^2 + x^2} = \pi\delta(x);$ б) $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{x}{a} = \pi\delta(x).$

С.3. §21: 68; 70; 71; 72; 73; 84.

5. Найдите в D'

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}.$$

6. Упростите в D' выражения:

а) $\left(\cos x+e^{2x}\right)\delta(x)$;

б) $\left(\cos x+e^{2x}\right)\delta'(x)$;

в) $\left(\cos x+e^{2x}\right)\delta''(x)$.

$\boxed{59+3^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., ст.преп. А. Ю. Головко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Список литературы

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, ЛЕНАНД, 2023.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : URSS : Ленанд, 2022, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : URSS, 2022.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2020.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, 2023.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 2005.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2015.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЯ

Список литературы

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ : Физматлит, 2002, 2006. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : ЛКИ, 2008; — Москва : ЛИБРОКОМ, 2011, 2013. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Зависимость решений от параметра и начальных условий

Ф.: 1064 <u>1068</u>; 1070*.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: <u>667</u>; 668; 677.

С. §9: 6; 16; 53; 47*; 73 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

Ф. §22: 47.

<u>1</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=\mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

2*. Доказать, что для решения задачи Коши $y''+e^{\frac{2}{x+1}}y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ выполнено неравенство: $|y(x)|\leq e^{\frac{x}{x+1}}$ при $x\geq 0$.

III. Теорема сравнения Штурма

Ф.: <u>723</u>; 726.

С. §10: <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

<u>3</u>. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x)\leq 0$. Доказать, что краевая задача $y''+q(x)y=0, y(x_1)=a$, $y(x_2)=b$, при любых $a,b,x_1\neq x_2$ имеет решение и это решение единственно.

<u>4</u>. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y''+2x^2y'+(2x+1)y=0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

5. Доказать, что для любого решения уравнения

$$y''+(2+\cos 3x)y=0$$

существует точка $\xi\in[-1;6]$ такая, что $y'(\xi)=0$.

6. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\mathrm{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0,+\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1}-x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \to +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 976*.
С. §13: 39; 48; 57.
Ф. §25: 161.

V. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 894; 920; 889*.

$\boxed{32+6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 2; 12.
Ф.: 1164.

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

С. §16: 6; 26.

3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; <u>16</u>; 45; 79; 85.

<u>**4**</u>. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

5*. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ох в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 12; 33; 75; <u>102</u>.
С. §20.1: 2; <u>9</u>; 14.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 5.
С. §21: 7.

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a:
а) $J[y] = \int_0^{\pi/2}(y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;
б)* $J[y] = \int_0^{\pi/2}(y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$.

IV. Повторение

С. §6: 35.
С. §7: 56.
С. §8: 126.
С. §9: 34.
С. §11: 55.
С. §13: 49.
С. §17: 84.
С. §20.1: 8.

$\boxed{34{+}3^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлениям подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
к.ф.-м.н., доцент И. Е. Зараменских
к.ф.-м.н., ст. преп. А. С. Дробышева

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
25 сентября 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил).

   Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина – Красовского об условиях асимптотической устойчивости и теорема Красовского о неустойчивости.

   Теорема Лагранжа – Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

   Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса – Гурвица (без доказательства). Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби – Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно-консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нётер.

Интегральные инварианты Пуанкаре – Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. **Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона – Якоби**

Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Критерий каноничности в терминах производящих функций.

Преобразования, допускающие $(q, \tilde{q})$-описание (свободные преобразования). Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона – Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Список литературы

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика : учебник для высших учебных заведений. — Изд. 5-е, испр. и доп. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2024.

4. *Амелькин Н. И.* Курс аналитической механики : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2023.

5. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010, 2012, 2014.

6. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2009, 2010, 2012, 2014.

7. *Трухан Н. М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

8. *Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В.* Теоретическая механика. — Москва : Издательский центр «Академия», 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 17 по 22 марта 2025 г.)

Контрольная работа с 10 марта по 15 марта 2025 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
   14.10, 14.20, 14.29, 14.40

2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
   17.8

   Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

   T1.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

   T2.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

   T3.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

   Примечание к задаче T3

   Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

3. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   15.2, 15.13, 15.26
   Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):
   $$z = \sin(x + y) - \cos y.$$
   Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

4. **Малые колебания консервативных систем**
   16.6, 16.17, 16.30, 16.51, 16.70

5. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем**
   17.1, 17.26, 17.30
   Т5. Исследуйте на устойчивость все положения равновесия системы при всех значениях параметра a:
   $$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

6. **Вынужденные колебания**
   18.3, 18.26, 18.38, 18.43(д)

Второе задание

(срок сдачи с 12 по 17 мая 2025 г.)

Контрольная работа с 5 по 10 мая 2025 г.

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   19.12, 19.21, 19.23 *(найти решение в квадратурах)*, 19.47, 19.51

8. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

9. **Принцип Гамильтона**
   21.10, 21.13, 21.23, 21.32

10. **Интегральные инварианты**
    22.6, 22.20, 22.29, 22.31

11. **Канонические преобразования**
    23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97

12. **Уравнение Гамильтона – Якоби**
    24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Практика программирования с использованием С++**
по направлению: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 15 часов	Экзамен – нет
практические (семинарские) занятия – нет	Диф. зачет – 4 семестр
лабораторные занятия – 60 часов	Самостоятельная работа – 105 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 75

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доцент Д. И. Петров

Программа принята на заседании кафедры
информатики и вычислительной математики
28 августа 2024 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент Н. И. Хохлов

Структура преподавания дисциплины

Повторение. Стандартная библиотека. Библиотеки Boost. Другие библиотеки. Настройка проекта в IDE Microsoft Visual Studio. Этапы жизненного цикла программного обеспечения. Система контроля версий GIT. SmartGit. Continuous Integration и Continuous Deployment.

Интеллектуальные указатели. Аллокаторы. Итераторы. Категории итераторов. Особенности использования итераторов. Класс ratio. Библиотека chrono. Интервал времени. Момент времени. Эпоха. Часы. Разработка хронометра для измерения времени выполнения блока кода.

Последовательные контейнеры STL. array, vector, deque, list, forward list. Специальные контейнеры. Адаптеры контейнеров. stack, queue, priority queue. Битовое множество. valarray. Циклический буфер Boost. Многомерный массив Boost. Кортеж. Гетерогенные контейнеры.

Ассоциативные контейнеры STL. Множество. Отображение. Двустороннее отображение Boost. Неупорядоченные контейнеры STL. Хэш-таблица. Хэш-функция. Способы разрешения коллизий. Метод цепочек. Метод открытой адресации. Рехэширование. Boost Multi-index.

Алгоритмы STL. Итераторы. Адаптеры итераторов. Итераторы вставки. Потоковые итераторы. Функциональные объекты, функции и лямбда-функции. Классификация алгоритмов STL. Генерация случайных чисел. Seed. Генератор. Распределение. Boost Graph Library.

Обработка текста. Строки. Интернационализация и локализация. Локали. Фацеты. Кодирование и наборы символов. Многобайтовые и широкие кодировки. Стандарт Unicode. Регулярные выражения. Грамматика регулярных выражений ECMAScript. Построение паттернов.

Библиотека IOStream. Иерархия классов потоков ввода-вывода. Буферизация. Форматирование. Манипуляторы. Файловые потоки ввода-вывода. Строковые потоки ввода-вывода. Библиотека filesystem. Путь. Операции с директориями. Форматы обмена данными. JSON. XML.

Параллельное программирование. Организация параллелизма. Многопоточное исполнение. Контекстное переключение. Фоновые задачи. Разработка параллельных программ. Синхронное и асинхронное исполнение. Механизм будущих результатов. Параллельные алгоритмы. Пул потоков.

Примитивы синхронизации. Состояние гонки. Мьютексы. Гранулярность блокировки. Взаимоблокировка. Условные переменные.

Потокобезопасные структуры данных с блокировками. Стек. Очередь. Модель памяти. Атомарные типы данных. Атомарные операции.

Межпроцессное взаимодействие. Boost Interprocess. Shared memory. Memory mapped files. Управляемая разделяемая память. Создание контейнеров в разделяемой памяти. Анонимные и именованные примитивы синхронизации. Схема consumer-producer. Использование DLL.

Сетевое взаимодействие. Стек протоколов TCP/IP. Особенности протоколов TCP и UDP. Sockets API. Boost ASIO. IP адрес. Стандарты IPv4 и IPv6. Локальная сеть. Порт. Endpoint. Система DNS. Активный сокет. Пассивный сокет. Буферизация. Операции ввода-вывода.

Графическая библиотека SFML (разработка игр и математическое моделирование) - дополнительная тема.

Список литературы

Основная

1. *Страуструп Б.* Программирование. Принципы и практика с использованием С++. – 2 изд. – Москва : Диалектика, 2019.
2. *Страуструп Б.* Язык программирования С++ (стандарт С++11): Краткий курс. – Москва : Бином, 2017.
3. *Джосаттис Н.* Стандартная библиотека С++: справочное руководство (второе издание). – Москва : Addison-Wesley, 2017

Дополнительная

1. *Мейерс С.* Эффективное использование С++. 55 верных способов улучшить структуру и код ваших программ. – Москва : ДМК-Пресс, 2017.
2. *Мейерс С.* Наиболее эффективное использование С++. 35 новых рекомендаций по улучшению ваших программ. – Москва : ДМК-Пресс, 2016.
3. *Мейерс С.* Эффективный и современный С++. 42 рекомендации по использованию С++11 и С++14. – Москва : Диалектика, 2019.

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа электроники, фотоники и молекулярной физики (ФЭФМ)
для студентов 2 курса на весенний семестр 2024–2025 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *В.А. Дружининой, Н.Е. Кобзевой*

Подписано в печать 16.01.2025. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,5. Тираж 85 экз. Заказ № 21.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок