Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Matematika (4): Logika pre informatikov

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2020/2021

Posledná aktualizácia: 1. marca 2021

Obsah

1. prednáška

Úvod

Atomické formuly

0 Úvod

0.1 O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

Príklad 0.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „V akých zostavách môžu noví známi prísť na párty tak, aby boli všetky podmienky splnené?"

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n				
n	n	p				
n	p	n				
n	p	p				
p	n	n				
p	n	p				
p	p	n				
p	p	p				

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

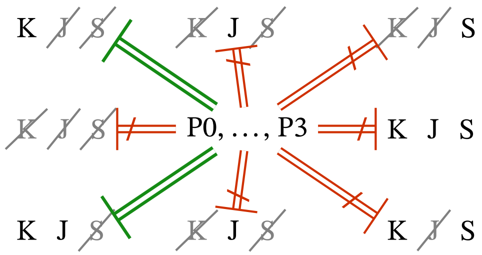
Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

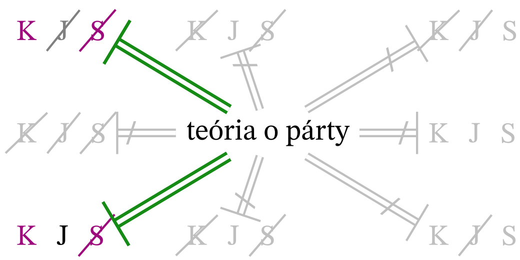
Príklad 0.2. Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.



Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé *vždy, keď* je pravdivá teória?

V našom príklade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky P0, . . . , P3 splnené?



Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie P0, P1, P2, P3 sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.

- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.

- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.

⋮

Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 0.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.

2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.

3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver *je logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;

- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;

- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú predpoklady pravdivé, ale záver je nepravdivý.

Príklad 0.5. Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.
Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim" nie je pravdivý.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v poslucharni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

> Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; …
>
> — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím umelých *formálnych* jazykov.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam).
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …

- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *formalizovať*, a potom naň môžeme použiť logický aparát.
- Formalizácia vyžaduje cvik, trocha veda, trocha umenie.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária. Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. Koľko rokov majú Karol a Mária?	$\rightsquigarrow$	$k = 3 \cdot m$ $k + m = 12$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — Gottlob Frege, Guiseppe Peano, Charles Sanders Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* ∀ a ∃.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$$

Logika prvého rádu a informatika

Informatika sa vyvinula z logiky (John von Neumann, Alan Turing, Alonzo Church, …)

Prvky logiky prvého rádu obsahuje väčšina *programovacích jazykov*:

- `all(x > m for x in arr)`,
- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú priamo podmnožinou FOL.

Vo FOL sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa FOL používa na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení, …) simulovaním usudzovania.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky,

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (kalkul elementárnej aritmetiky),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

⋮

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

0.2 O tomto kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky
- Jazykmi logiky prvého rádu (FOL), jeho syntaxou a sémantikou
- Správnymi úsudkami v ňom a dôvodmi ich správnosti
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizáciou usudzovania

Prakticky
- Vyjadrovaním problémov vo FOL
- Dokazovaním konkrétnych logických dôsledkov
- Automatizovaním riešenia problémov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky
- Zamýšľanými a nezamýšľanými významami tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

V tomto kurze sa budeme snažiť byť *presní*.

▶ *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito

Pojmy z logiky budeme *definovať matematicky*

▶ ako množiny, postupnosti, funkcie, atď., ⇠ Matematika (1), (3)

na praktických cvičeniach aj *programami*

▶ ako reťazce, slovníky, triedy a metódy. ⇠ Programovanie (1), (2)

Budeme sa pokúšať *dokazovať* ich vlastnosti.

Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky — *meta* matematika logiky, matematika ***o*** logike.

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia predmetu — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — sú popísané na oficiálnej webovej stránke predmetu:

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

1 Atomické formuly

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.
Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *pozitívnym jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *jednotlivých pomenovaných* objektov.

Príklady 1.1.

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Niekto je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

Príklady 1.2. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduové konštanty a objekty

Indivíduová konštanta

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt

- *môže* byť pomenovaný aj *viacerými* indivíduovými konštantami (napr. Prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- *nemusí* mať žiadne meno.

Predikátové symboly

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu vidí, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): indivíduové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Dohoda 1.3. Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad $\mathsf{beží}^1$, $\mathsf{vidí}^2$, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4.

$\mathsf{pes}(x)$	x je pes
$\mathsf{čierne}(x)$	x je čierne
$\mathsf{beží}(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 1.5.

$\mathsf{vidí}(x, y)$	x vidí y
$\mathsf{dal}(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

Príklad 1.6. Predikát $\mathsf{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne.

Predikát $\mathsf{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$predik\acute{a}t(argument_1, argument_2, \dots, argument_k),$$

alebo

$$argument_1 \doteq argument_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a $argument_1, \dots, argument_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

Vopred daný prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 1.7. Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší[2] výroky:

A_1: Jarka je vyššia ako Milo. $\rightsquigarrow$ vyšší(Jarka, Milo)

A_2: Evka je nižšia ako Milo. $\rightsquigarrow$ vyšší(Milo, Evka)

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, …: x je vyšší/vyššia/vyššie ako y $\rightsquigarrow$ vyšší(x, y).

Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s *návrhom vlastného jazyka* je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 1.8. A_1: Jarka dala Milovi Bobíka.

$\rightsquigarrow$ ~~dalaMiloviBobíka(Jarka)~~ ~~dalBobíka(Jarka, Milo)~~ dal(Jarka, Milo, Bobík)

A_2: Evka dostala Bobíka od Mila.

$\rightsquigarrow$ ~~dalBobíka(Milo, Evka)~~ dal(Milo, Evka, Bobík)

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

$\rightsquigarrow$ ~~dalCilku(Evka, Jarka)~~ dal(Evka, Jarka, Cilka)

A_4: Bobík je pes.

$\rightsquigarrow$ pes(Bobík)

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred dalBobíka^2 a dalCilku^2).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

1.1 Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, …;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.9. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:
Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).
Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).
Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\operatorname{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \textbf{(}, \textbf{)}, \textbf{,}\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka $\mathcal{L}$* hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka $\mathcal{L}$* alebo len *symboly jazyka $\mathcal{L}$*.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.10. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, v ktorom

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathsf{Bobík}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\},$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1.$$

Príklad 1.11. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\text{party}}$, kde

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\},$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\mathsf{príde}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{party}}}(\mathsf{príde}) = 1.$$

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.12. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.13. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a c_1, …, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$
\begin{aligned}
&\{\, c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\} \\
&\qquad\qquad \cup \{\, P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\}.
\end{aligned}
$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

Príklady atómov jazyka

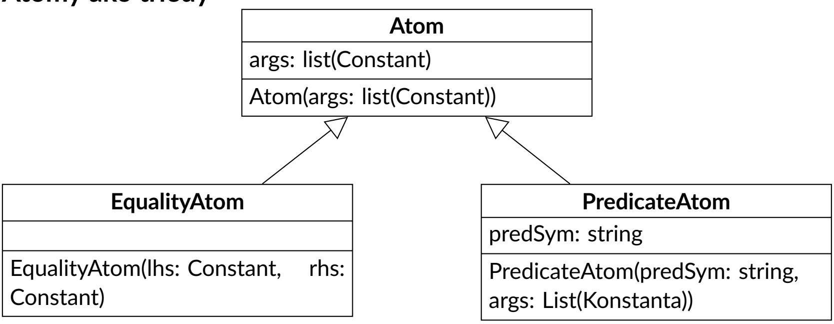
Príklad 1.14. V jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{Bobík}, \textsf{Cilka}, \textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{dal}, \textsf{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$
\begin{array}{cc}
\textsf{Bobík} \doteq \textsf{Bobík} & \textsf{Cilka} \doteq \textsf{Bobík} \\
\textsf{Evka} \doteq \textsf{Jarka} & \textsf{Bobík} \doteq \textsf{Cilka}
\end{array}
$$

a predikátové atómy:

$$
\textsf{pes}(\textsf{Cilka}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Cilka}, \textsf{Milo}, \textsf{Bobík}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Jarka}, \textsf{Evka}, \textsf{Milo}).
$$

Atómy ako triedy



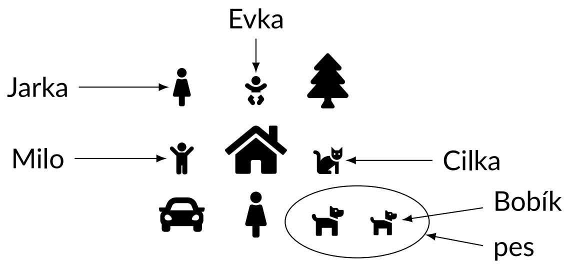
1.2 Sémantika atomických formúl

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula pes(Bobík) pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenúva konštanta Bobík;
2. akú vlastnosť p označuje predikát pes;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?

Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
- ▶ *interpretačná funkcia*;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý *objekt* z domény konštanta c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria *podmnožinu* domény;
- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,
- ▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne.

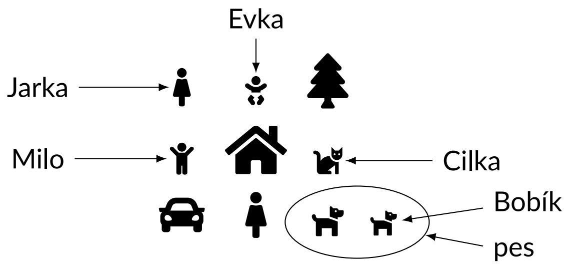
Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.15. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

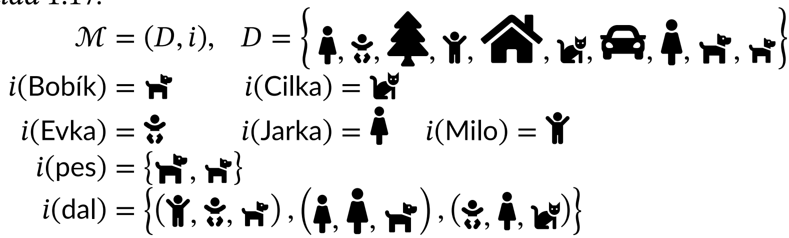
- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 1.16. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ...

Príklad štruktúry



Príklad 1.17.



Štruktúra ako informatický objekt

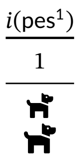
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

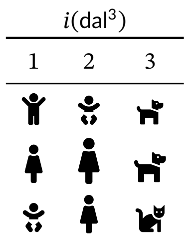
Aký *informatický* objekt zodpovedá štruktúre?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka ∼ veľmi zjednodušená schéma DB (arita ∼ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov ∼ konkrétne tabuľky s dátami





Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.
Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Príklad 1.18 (Štruktúra s nekonečnou doménou). $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$ $i(\text{pes}) = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$ $i(\text{dal}) = \{ (n, m, n + m) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$
$i(\text{Bobík}) = 0$ $i(\text{Cilka}) = 1$ $i(\text{Evka}) = 3$ $i(\text{Jarka}) = 5$ $i(\text{Milo}) = 0$

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.19. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

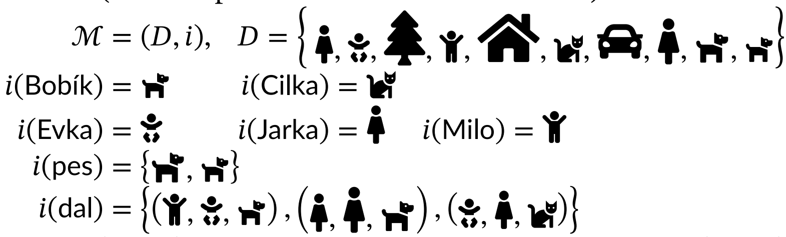
Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \dots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom A*.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že *$A$ je nepravdivý* v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ *nie je modelom A*.

Príklad 1.20 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).



Atóm pes(Bobík) *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ pes(Bobík), lebo objekt i(Bobík) = je prvkom množiny $\{\ ,\ \}$ = i(pes).

Atóm dal(Evka, Jarka, Cilka) *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ dal(Evka, Jarka, Cilka), lebo (i(Evka), i(Jarka), i(Cilka)) = $(\ ,\ ,\ ) \in i$(dal).

Atóm Cilka $\doteq$ Bobík *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models$ Cilka $\doteq$ Bobík, lebo i(Cilka) = $\neq$ = i(Bobík).

1.3 Zhrnutie

Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnou množinou indivíduových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$ (predikátové) a $c_1 \doteq c_2$ (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.
- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.

- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná n-tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.

2. prednáška

Výrokovologické spojky

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme sa naučili:

- Čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu.
- Čo sú atomické formuly.
- Čo sú štruktúry.
  - Neprázdna doména + interpretačná funkcia.
  - Konštanty označujú objekty.
  - Predikáty označujú vzťahy a vlastnosti.
- Kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
  - Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.
  - Veľa sme vyjadrovali približne.

2 Výrokovologické spojky

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení *výrokovologickými spojkami*.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy *boolovská funkcia*, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad
Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz. Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby nakŕmil psa Bobíka, ktorý by inak bol hladný až do 19:30, keď sa Jarka vráti zo školy, kde má cvičenia od 17:20 do 18:50.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna. *Nezávisí* iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu *príčina-následok* medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je *funkciou* na pravdivostných hodnotách. □

2.1 Boolovské spojky

Negácia

Negácia ¬ je *unárna* spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že …* “, predpone *ne*-.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa *nezátvorkuje*.

Okolo argumentu negácie *nepridávame* zátvorky, ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2.

¬doma(Karol)	Karol *nie* je doma.
¬Jarka ≐ Karol	Jarka *nie* je Karol.
¬¬¬poslúcha(Cilka)	*Nie* je pravda, že *nie* je pravda, že Cilka *ne*poslúcha.
~~(¬doma(Karol))~~	nesprávna
~~¬(doma(Karol))~~	syntax

Konjunkcia

Konjunkcia ∧ je *binárna* spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …
Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma *aj* Karol je doma.
  (doma(Jarka) ∧ doma(Karol))

- Jarka je v škole, *no* Karol je doma.
  (v_škole(Jarka) ∧ doma(Karol))

- *Ani* Jarka nie je doma, *ani* Karol tam nie je.
  (¬doma(Jarka) ∧ ¬doma(Karol))

- *Nielen* Jarka je chorá, *ale aj* Karol je chorý.
  (chorý(Jarka) ∧ chorý(Karol))

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- *Jarka aj Karol* sú doma.
  (doma(Jarka) ∧ doma(Karol))

- Karol *sa potkol a spadol*.
  (potkol_sa(Karol) ∧ spadol(Karol))

- Jarka dostala Bobíka *od mamy a otca*.
  (dostal(Jarka, Bobík, mama) ∧ dostal(Jarka, Bobík, otec))

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je *ruský špión*.
  (Rus(Eismann) ∧ špión(Eismann))

- Bobík je *malý čierny psík*.
  ((malý(Bobík) ∧ čierny(Bobík)) ∧ pes(Bobík))

Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť, ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu *stráca*:

- Jarka a Karol sa stretli *a* išli do kina. $\big(\text{stretli\_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}) \land \big(\text{do\_kina}(\text{Jarka}) \land \text{do\_kina}(\text{Karol})\big)\big)$
- Jarka a Karol išli do kina *a* stretli sa. $\big(\big(\text{do\_kina}(\text{Jarka}) \land \text{do\_kina}(\text{Karol})\big) \land \text{stretli\_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol})\big)$

Disjunkcia

Disjunkcia $\lor$ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či*, „*buď …, alebo …* “ v *inkluzívnom* význame (môžu nastať aj obe možnosti).

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia:

- Jarka je doma *alebo* Karol je doma.
  $(\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{doma}(\text{Karol}))$
- Buď je Karol doma, *alebo* je Jarka v škole.
  $(\text{doma}(\text{Karol}) \lor \text{v\_škole}(\text{Jarka}))$

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol. $(\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole. $(\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{v\_škole}(\text{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy alebo otca. $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{mama}) \lor \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{otec}))$
- Bobík je čierny či tmavohnedý psík. $\big((\text{čierny}(\text{Bobík}) \lor \text{tmavohnedý}(\text{Bobík})) \land \text{pes}(\text{Bobík})\big)$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcia *buď …, alebo … neznamená* nutne exkluzívnu disjunkciu.

- Bobík a Cilka sa pobili. Buď Bobík pohrýzol Cilku, alebo Cilka poškrabala Bobíka. (Mohlo sa stať jedno aj druhé.)

Niekedy samotné *alebo* znamená exkluzívnu disjunkciu.

- Jarka je doma alebo v škole. (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou: $\big((\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{v\_škole}(\text{Jarka})) \land \neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \land \text{v\_škole}(\text{Jarka}))\big)$.

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované. Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
  - ? $\big((\text{doma}(\text{Karol}) \land \text{doma}(\text{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
  - ? $\big(\text{doma}(\text{Karol}) \land (\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Bobík je šťastný.
  - ? $\big((\text{doma}(\text{Karol}) \lor \text{doma}(\text{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
  - ? $\big(\text{doma}(\text{Karol}) \lor (\text{doma}(\text{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Bobík šťastný.
  $\big((\text{doma}(\text{Karol}) \land \text{doma}(\text{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
- Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Bobík šťastný. Aj Karol je doma, aj je doma Jarka alebo je Bobík šťastný.
  $\big(\text{doma}(\text{Karol}) \land (\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$

- Doma je Karol alebo Jarka a Bobík je šťastný.
  Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Bobík je šťastný.
  $((\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

- Buď je doma Karol, alebo je doma Jarka a Bobík je šťastný.
  $(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor (\mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

Príslušnosť výrokov k spojkám vyjadrujú viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*) a kombinácie spojok *buď* …, *alebo* …; *aj* …, *aj* …; *ani* …, *ani* …; atď.

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na *najkratšiu nasledujúcu formulu* — *oblasť platnosti* tohto výskytu.

- $((\neg\, \mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
- $(\neg\, (\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))$

Argument negácie je *uzátvorkovaný práve vtedy*, keď je *priamo* vytvorený binárnou spojkou:

✓ $\neg\neg(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}))$

✗ $\neg(\neg(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})))$

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

✓ $\neg\, \mathrm{Jarka} \doteq \mathrm{Karol}$ — Jarka *nie* je Karol.

✗ $\neg(\mathrm{Jarka} \doteq \mathrm{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie „*«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol*“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu. Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.

2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách. Konštanty označujú objekty domény. Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3. Formulu $\neg \tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

2.2 Implikácia

Implikácia

Implikácia $\rightarrow$ je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak ..., tak ...*.

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A *antecedent* a podformule B *konzekvent*.

Formula vytvorená implikáciou je *nepravdivá* v *jedinom* prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

⚠ Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak ..., tak ...*. Napr. výrok „*Ak* by *Sarah prišla, Jim* by *prišiel tiež*" je nepravdivý, keď ním chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje ani prípady, keď *ak ..., tak ...* vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

Keď ..., potom ... má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, *ak* príde Kim.	Jim príde, *iba ak* príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú *podmienkami* hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi *podstatný rozdiel*:

Jim príde, *ak* príde Kim.	Jim príde, *iba ak* príde Kim.
postačujúca podmienka	*nutná* podmienka

Postačujúca podmienka
Jim príde, *ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *stačí*, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim *ne*príde.
- Zodpovedá teda (príde(Kim) → príde(Jim)).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \to A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *pokiaľ* príde Kim.

Nutná podmienka
Jim príde, *iba ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *je nevyhnutné*, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim *ne*príde.
- Zodpovedá teda (príde(Jim) → príde(Kim)).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \to B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *iba pokiaľ* s Kim.
- Jim príde *iba* spolu s Kim.
- Jim *ne*príde *bez* Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

> Logikou prejdete, *ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

Stačilo by odovzdať úlohy a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

> Logikou prejdete, *iba ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

Odovzdať úlohy *je nutné*, ale na prejdenie to *nestačí*.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \rightarrow B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A, tak B.
- Ak A, tak aj B.
- Ak A, B.
- Pokiaľ A, [tak (aj)] B.
- A, iba/len/jedine ak/pokiaľ(/keď) B.
- A nastane iba spolu s B.
- A nenastane bez B.
- B, ak/pokiaľ(/keď) A.

2.3 Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim. (príde(Jim) $\leftrightarrow$ príde(Kim))
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne. (párne(n) $\leftrightarrow$ párne(n^2))
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus. (Nemec(Müller) $\leftrightarrow$ Rus(Stirlitz))

Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu, že A je nutnou *aj* postačujúcou podmienkou B.

Budeme ju preto považovať za *skratku* za formulu

$$\big((A \to B) \land (B \to A)\big).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je Bobík s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenie a považovať aj ako skratky, podobne ako ekvivalenciu.

2.4 Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme *zadefinovať* — presne a záväzne — ich *syntax* (skladbu) a *sémantiku* (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.4. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu* sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* $\doteq$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a c_1, …, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{príde}^1\}$.
Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$.
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \land \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) \to (\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?
Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - ▶ Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - ▶ Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Formuly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$* je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju *negácia* formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame *formulou* jazyka $\mathcal{L}$.

Dohody · Vytvorenie formuly

Dohoda 2.7. Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8. Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ funkcia na formulách definovaná ako $(A \leftrightarrow B) = \big((A \to B) \land (B \to A)\big)$ pre každé dve formuly A a B.

Príklad 2.9. Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $\big(\neg\text{príde}(\text{Kim}) \to (\text{príde}(\text{Jim}) \lor \text{príde}(\text{Sarah}))\big)$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli *vytvoriť*?

Indukcia na konštrukciu formuly

Veta 2.10 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly). *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P,*

2.1. *ak formula A má vlastnosť P, tak aj $\neg A$ má vlastnosť P,*

2.2. *ak formuly A a B majú vlastnosť P, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.11. *Vytvárajúcou postupnosťou* nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12. *Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A.*

Osnova dôkazu. ($\Rightarrow$) *Indukciou na konštrukciu formuly*
($\Leftarrow$) *Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti* □

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly" takto?

Definícia „formúl"

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Množina $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ „formúl" jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ je „formulou" z $\mathcal{E}_\mathcal{L}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosti symbolov $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ patria do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$.

2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_\mathcal{L}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ nazývame „formulou" jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula" (príde(Jim) → príde(Kim) → ¬príde(Sarah))?

Formulu by sme mohli čítať ako $A = (\text{príde(Jim)} \to (\text{príde(Kim)} \to \neg\text{príde(Sarah)}))$ alebo ako $B = ((\text{príde(Jim)} \to \text{príde(Kim)}) \to \neg\text{príde(Sarah)})$.

Čítanie A hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

Čítanie B hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí *v aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)**.** *Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- *X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna spojka $b \in \{\land, \lor, \to\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$$\begin{aligned}&\text{príde(Jim)}, \text{príde(Sarah)}, \neg\text{príde(Jim)}, \text{príde(Kim)},\\ &\neg\text{príde(Sarah)}, (\neg\text{príde(Jim)} \land \text{príde(Kim)}),\\ &((\neg\text{príde(Jim)} \land \text{príde(Kim)}) \to \neg\text{príde(Sarah)})\end{aligned}$$

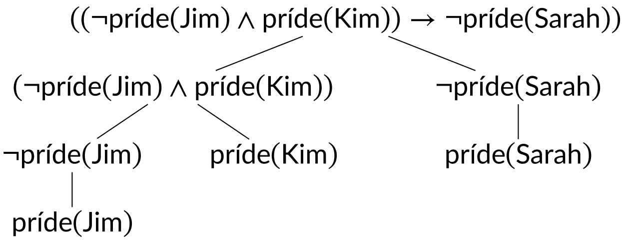
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

Vytvárajúci strom formuly

Definícia 2.14. *Vytvárajúci strom T* pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A\ b\ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \land \text{príde}(\text{Kim})) \to \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$$

Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), (\neg \text{príde}(\text{Jim}) \land \text{príde}(\text{Kim})), \ldots$$

Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne*/*priamo* vznikla?

$$(\neg\text{príde}(\text{Jim}) \land \text{príde}(\text{Kim})) \quad \text{a} \quad \neg\text{príde}(\text{Sarah})$$

Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

Priame podformuly

Definícia 2.15 (Priama podformula)**.** Pre všetky formuly A a B:

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Podformuly

Definícia 2.16 (Podformula)**.** Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X, Y a Z:

- X je podformulou X.
- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Formula X je *vlastnou podformulou* formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly

– pridanie negácie,
– spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17. Aký je stupeň formuly ((príde(Jim)∨¬príde(Kim))∧¬(príde(Sarah) → pr

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?
Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)**.** Pre všetky formuly A a B a všetky n, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)**.** *Stupeň* $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)**.** *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť P,*
2. indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

2.5 Sémantika výrokovologických formúl

Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou *štruktúr*.

Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry takmer nemení:

Definícia 2.20. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia 2.21. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu *formula A je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$* ($\mathcal{M} \models A$) definujeme *induktívne* pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n$, a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

kde *vtt* skracuje *vtedy a len vtedy* a $\mathcal{M} \not\models A$ skracuje A *nie je pravdivá v* $\mathcal{M}$.

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathsf{Kim}) = 1$, $i(\mathsf{Jim}) = 2$, $i(\mathsf{Sarah}) = 3$, $i(\mathsf{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $\mathcal{M} \not\models (\neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \vee \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))$
  - $\mathcal{M} \models \neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \vee \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))$
    - $\mathcal{M} \not\models (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \vee \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))$
      - $\mathcal{M} \not\models \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})$
        - $2 \notin i(\mathsf{príde})$
      - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$
        - $\mathcal{M} \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$
          - $1 \in i(\mathsf{príde})$
  - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$
    - $\mathcal{M} \models \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$
      - $3 \in i(\mathsf{príde})$

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre). Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathsf{Kim}) = 1$, $i(\mathsf{Jim}) = 2$, $i(\mathsf{Sarah}) = 3$, $i(\mathsf{príde}) = \{1, 3\}$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	$p(J)$	$p(K)$	$\neg p(K)$	$(p(J) \vee \neg p(K))$	$\neg(p(J) \vee \neg p(K))$
$\mathcal{M}$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$

…

	$p(S)$	$\neg p(S)$	$(\neg(p(J) \vee \neg p(K)) \rightarrow \neg p(S))$
$\mathcal{M}$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

kde $p =$ príde, $K =$ Kim, $J =$ Jim a $S =$ Sarah.

Všimnite si, že v záhlaví tabuľky je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá). *V akej štruktúre* $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula $\mathcal{M} \models \big(\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah})\big)$ vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Kim})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $i(\text{Jim}) \in i(\text{príde})$ alebo $i(\text{Kim}) \notin i(\text{príde})$ alebo $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

2.6 Správnosť a vernosť formalizácie

Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula, ktorá je pravdivá *za tých istých okolností* ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto *za tých istých okolností* znamená *v tých istých štruktúrach*.

Vernosť formalizácie

Výrok „*Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma*“ sa dá *správne* formalizovať ako

$$\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol})),$$

ale rovnako *správna* je aj formalizácia

$$(\neg\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \neg\text{doma}(\text{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň *uprednostňujeme* formalizácie, ktoré *vernejšie* zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu, a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so *znalosťami na pozadí* (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie *samostatnými formulami*.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia *vyznievajú* silnejšie, ako naozaj sú:

- „*Prílohou sú* buď *zemiaky* alebo *šalát*“ znie ako exkluzívna disjunkcia.
- „*Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.*“ znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočnú časť významu tvrdenia *nemôžeme poprieť* v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu „*Karol a Jarka sú doma*“ dodáme „*Ale Karol nie je doma,*“ dostaneme sa do sporu.

  Takže „*Karol je doma*“ je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú *môžeme poprieť* dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva *konverzačná implikatúra* (H. P. Grice). *Nie je skutočnou časťou významu* pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú buď zemiaky alebo šalát. *Ale môžete si dať aj oboje.*

  Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením. Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %. *Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.*

  Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete,* iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %,*“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením. Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.

3. prednáška

Výrokovologické vyplývanie

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme hovorili o tom,

- čo sú výrokovologické spojky,
- ako zodpovedajú slovenským spojkám,
- čo sú symboly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
- čo sú formuly tohto jazyka,
- kedy sú formuly pravdivé v danej štruktúre.

3 Výrokovologické vyplývanie

Logické dôsledky

Na 1. prednáške:

- Hovorili sme o tom, že logiku zaujíma, čo a prečo sú zákonitosti správneho usudzovania.
- Správne úsudky odvodzujú z predpokladov (teórií) závery, ktoré sú ich logickými dôsledkami.
- *Logickými dôsledkami* teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Minulý týždeň sme začali pracovať s *výrokovologickou* časťou logiky prvého rádu.

Čo sú v nej: teórie, modely, logické dôsledky?

3.1 Teórie a ich modely

Príklad teórie

Neformálne je teória súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 3.1. Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.

Príklad 3.2.

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{&((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\} \end{aligned}$$

Definícia 3.3. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta, v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 3.4 (Model teórie o party).

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i),\\
&i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}, \qquad i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}, \qquad i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s},\\
&i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models ((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\
\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\
\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))\\
\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))
\end{array}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Model teórie

Definícia 3.5 (Model)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je *pravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt *každá* formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je *modelom* T.

Teória T je *nepravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

3.2 Výrokovologické teórie a ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model, má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}\}, i_1) & \mathcal{M}_1' = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, 0\}, i_1') & \mathcal{M}_1'' = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, 0, 1\}, i_1'') & \cdots\\
i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & i_1'(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & i_1''(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & \\
i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & i_1'(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & i_1''(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & \\
i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & i_1'(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & i_1''(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & \\
i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} & i_1'(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} & i_1''(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} &
\end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathsf{kj}, \mathsf{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}$	$i_2(\mathsf{Kim}) = 1$	$i_3(\mathsf{Kim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}$	$i_2(\mathsf{Jim}) = 2$	$i_3(\mathsf{Jim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$	$i_2(\mathsf{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$
$i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}$	$i_2(\mathsf{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti *všetkých predikátových* atómov príde(Kim), príde(Jim), príde(Sarah).

V T_{party} *na ničom inom nezáleží.*

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathsf{kj}, \mathsf{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}$	$i_2(\mathsf{Kim}) = 1$	$i_3(\mathsf{Kim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}$	$i_2(\mathsf{Jim}) = 2$	$i_3(\mathsf{Jim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$	$i_2(\mathsf{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$
$i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}$	$i_2(\mathsf{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{kj}\}$

môžeme skonštruovať to isté *ohodnotenie predikátových atómov*:

$$
\begin{aligned}
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) &= t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}),\\
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) &= t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}),\\
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) &= f && \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}).
\end{aligned}
$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Výrokovologické formuly, teórie a ohodnotenia

Definícia 3.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré neobsahujú symbol rovnosti. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 3.7. Nech (f, t) je usporiadaná dvojica *pravdivostných hodnôt*, $f \neq t$, kde f predstavuje *nepravdu* a t predstavuje *pravdu*. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene *ohodnotením*, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 3.8. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu *výrokovologická formula A je pravdivá v ohodnotení v* ($v \models_{\mathrm{p}} A$) definujeme *induktívne* pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_{\mathrm{p}} a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_{\mathrm{p}} \neg A$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} A$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \land B)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} A$ a zároveň $v \models_{\mathrm{p}} B$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \lor B)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} A$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} B$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \to B)$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} A$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} B$,

kde *vtt* skracuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_{\mathrm{p}} A$ skracuje *A nie je pravdivá vo v*.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 3.9. Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\text{príde(Jim)} \lor \neg\text{príde(Kim)}) \to \text{príde(Sarah)})$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\text{príde(Kim)} \mapsto t,\ \text{príde(Jim)} \mapsto t,\ \text{príde(Sarah)} \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	p(Kim)	p(Jim)	p(Sarah)	¬p(Kim)	(p(Jim) ∨ ¬p(Kim))	X
v	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$

príde sme skrátili na p.

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou

Definícia 3.10. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné na S* vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné* vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 3.11. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:*

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz. Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:

($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.

($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. □

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 3.12 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením). Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) = t \qquad v(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) = t \qquad v(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky, je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{Kim} \qquad i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{Jim} \qquad i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{Sarah}$$

predikát $\mathsf{príde}$ ako množinu tých c, pre ktoré $v(\mathsf{príde}(c)) = t$:

$$i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}\}$$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia tak, aby boli zhodné, pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 3.13. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.*

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_\mathcal{L}$ a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou n takto:

$$
\begin{aligned}
i(c) &= c \\
i(P) &= \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_\mathcal{L}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}
\end{aligned}
$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Zhoda ohodnotenia a štruktúry je definované iba na *atómoch*.
Ako sa správajú na *zložitejších* formulách?

Zhoda na *všetkých* výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.14. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_\mathcal{L}$ platí, že $v \models_\mathrm{p} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.*

Dôkaz indukciou na konštrukciu formuly. 1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.

1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_\mathrm{p} X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X. Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_\mathrm{p} \neg X$ vtt $v \not\models_\mathrm{p} X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.

2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Dokážme ho pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické.

Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_\mathrm{p} (X \to Y)$ vtt $v \not\models_\mathrm{p} X$ alebo $v \models_\mathrm{p} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$.

Ďalej $v \models_\mathrm{p} (X \land Y)$ vtt $v \models_\mathrm{p} X$ a $v \models_\mathrm{p} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \models X$ a $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \land Y)$.

Nakoniec $v \models_\mathrm{p} (X \lor Y)$ vtt $v \models_\mathrm{p} X$ alebo $v \models_\mathrm{p} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \lor Y)$. □

3.3 Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Výrokovologické teórie

Vráťme sa naspäť k teóriám, modelom a vyplývaniu.

Definícia 3.15. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Každú množinu výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *výrokovologickou teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 3.16. Výrokovologickou teóriou je

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{&((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\}, \end{aligned}$$

ale nie

$$T_{\text{party}} \cup \{\mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Sarah}\}.$$

Príklad výrokovologického modelu

Príklad 3.17 (Výrokovologický model teórie o party).

$$v = \{\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \mapsto t, \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \mapsto t, \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \mapsto f\}$$

$$\left.\begin{aligned} &v \models_{\text{p}} ((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &v \models_{\text{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &v \models_{\text{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))\\ &v \models_{\text{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \end{aligned}\right\} v \models_{\text{p}} T_{\text{party}}$$

Výrokovologický model

Definícia 3.18 (Výrokovologický model)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je *pravdivá* v ohodnotení v, skrátene $v \models_{\text{p}} T$, vtt *každá* formula X z T je pravdivá vo v (teda $v \models_{\text{p}} X$ pre každú $X \in T$).

Hovoríme tiež, že v je *výrokovologickým modelom* T.

Teória T je *nepravdivá* vo v, skrátene $v \not\models_{\text{p}} T$, vtt T nie je pravdivá vo v.

Zrejme $v \not\models_{\text{p}} T$ vtt $v \not\models_{\text{p}} X$ pre *nejakú* $X \in T$.

Model teórie, splniteľnosť a nesplniteľnosť

Definícia 3.19 (Splniteľnosť a nesplniteľnosť)**.** Teória je *výrokovologicky splniteľná* vtt má aspoň jeden výrokovologický model.

Teória je *výrokovologicky nesplniteľná* vtt nemá žiaden výrokovologický model.

Zrejme teória nie je splniteľná vtt keď je nesplniteľná.

Príklad 3.20. T_{party} je evidentne splniteľná.

Výrokovologické vyplývanie

Ak sú množiny konštánt a predikátových symbolov jazyka konečné, jazyk má konečne veľa predikátových atómov a teda aj *konečne veľa* ohodnotení.

Uvažovať o všetkých ohodnoteniach a modeloch teórie nie je také odstrašujúce. Napríklad si ľahšie predstavíme logický dôsledok:

Definícia 3.21. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je *výrokovologickým dôsledkom* teórie T vtt pre každé ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že ak $v \models_{\text{p}} T$, tak $v \models_{\text{p}} X$.

Hovoríme tiež, že X *vyplýva* z T a píšeme $T \models_{\text{p}} X$.

Ak X *ne*vyplýva z T, píšeme $T \not\models_{\text{p}} X$.

Príklad výrokovologického vyplývania

Príklad 3.22. Vyplýva príde(Kim) výrokovologicky z T_{party}? Pretože vieme vymenovať všetky ohodnotenia pre $\mathcal{L}_{\text{party}}$, zistíme to ľahko:

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(K)
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_{\text{p}}$				$\not\models_{\text{p}}$	
v_1	f	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	
v_2	f	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$		$\not\models_{\text{p}}$	
v_3	f	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$		$\not\models_{\text{p}}$	
v_4	t	f	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$	
v_6	t	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$	

Skrátili sme príde na p, Kim na K, Jim na J, Sarah na S.

Logický záver: Formula príde(Kim) výrokovologicky vyplýva z T_{party}.

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky splnené, Kim *musí* prísť na párty.

Príklad nezávislosti

Príklad 3.23. Vyplýva príde(Jim) výrokovologicky z T_{party}?

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(J)
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_{\text{p}}$				$\not\models_{\text{p}}$	
v_1	f	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	
v_2	f	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$		$\not\models_{\text{p}}$	
v_3	f	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$		$\not\models_{\text{p}}$	
v_4	t	f	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$	
v_6	t	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$	

Logický záver: Formula príde(Jim) *nevyplýva* z T_{party}.

Výrokovologická nezávislosť

Vzťahu medzi príde(Jim) a T_{party} hovoríme *nezávislosť*.

Definícia 3.24. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je *výrokovologicky nezávislá* od teórie T vtt existujú také ohodnotenia v_0 a v_1 pre jazyk $\mathcal{L}$, že $v_0 \models_p T$ aj $v_1 \models_p T$, ale $v_0 \not\models_p X$ a $v_1 \models_p X$.

Príklad 3.25 (pokračovanie príkladu 3.23). *Logický záver:* Formula príde(Jim) je *nezávislá* od T_{party}.

Praktický záver: Všetky požiadavky budú naplnené *bez ohľadu na to*, či Jim príde alebo nepríde na párty. *Nie je nutné*, aby bol prítomý ani aby bol neprítomý. *Môže, ale nemusí* prísť. Jeho prítomnosť od požiadaviek *nezávisí*.

Príklad vyplývania negácie

Príklad 3.26. Je príde(Sarah) výrokovologickým dôsledkom T_{party} alebo nezávislá od T_{party}?

	v_i			((p(K) ∨ p(J))	(p(K) →	(p(J) →	(p(S) →		
	p(K)	p(J)	p(S)	∨ p(S))	¬p(S))	p(K))	p(J))	T_{party}	p(S)
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Logický záver: Formula príde(Sarah) *nevyplýva* z T_{party}, ale ani *nie je nezávislá* od T_{party}.

Vyplývanie negácie

Tvrdenie 3.27. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.*

Formula X nevyplýva z teórie T a nie je výrokovologicky nezávislá od T vtt $\neg X$ vyplýva z T.

Príklad 3.28 (pokračovanie príkladu 3.26). *Logický záver:* Z T_{party} vyplýva ¬príde(Sarah).

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky naplnené, Sarah *nesmie* prísť na party.

Vzťahy teórií a formúl

Medzi *ohodnotením a formulou* sú iba *dva vzájomne výlučné* vzťahy:

$$\text{Buď } v \models_{\text{p}} X\text{, alebo } v \not\models_{\text{p}} X.$$

Medzi *teóriou a formulou* je *viac* možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_{\text{p}} T$ a $v \models_{\text{p}} X$	pre všetky v, ak $v \models_{\text{p}} T$, tak $v \not\models_{\text{p}} X$
existuje v také, že $v \models_{\text{p}} T$ a $v \not\models_{\text{p}} X$	X je nezávislá od T $T \not\models_{\text{p}} X$ a $T \not\models_{\text{p}} \neg X$	$T \models_{\text{p}} \neg X$ a $T \not\models_{\text{p}} X$
pre všetky v, ak $v \models_{\text{p}} T$, tak $v \models_{\text{p}} X$	$T \models_{\text{p}} X$ a $T \not\models_{\text{p}} \neg X$	T je *nesplniteľná* $T \models_{\text{p}} X$ aj $T \models_{\text{p}} \neg X$

Nesplniteľná teória

Príklad 3.29. Je teória $T'_{\text{party}} = T_{\text{party}} \cup \{$(¬príde(Sarah) → ¬príde(Kim))$\}$ splniteľná?

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	(¬p(S) → ¬p(K))	T'_{party}
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_{\text{p}}$					$\not\models_{\text{p}}$
v_1	f	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$		$\not\models_{\text{p}}$
v_2	f	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$
v_3	f	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$			$\not\models_{\text{p}}$
v_4	t	f	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$				$\not\models_{\text{p}}$
v_6	t	t	f	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\text{p}}$	$\not\models_{\text{p}}$				$\not\models_{\text{p}}$

Logický záver: T'_{party} je nesplniteľná, vyplýva z nej každá formula.

Praktický záver: T'_{party} *nemá* praktické dôsledky, lebo *nevypovedá o žiadnom stave sveta*. Na jej základe *nevieme rozhodnúť*, kto musí alebo nesmie prísť na párty.

Vyplývanie a nesplniteľnosť

Nesplniteľnosť ale nie neužitočná vlastnosť.

Tvrdenie 3.30. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.*

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt $T \cup \{\neg X\}$ je výrokovologicky nesplniteľná.

Podľa tohto tvrdenia sa rozhodnutie vyplývania dá *zredukovať* na rozhodnutie splniteľnosti.

Výrokovologickú splniteľnosť rozhoduje SAT solver.

Množina atómov formuly a teórie

Definícia 3.31. *Množinu atómov* $\operatorname{atoms}(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\operatorname{atoms}(A) = \{A\}$, ak A je atóm,
- $\operatorname{atoms}(\neg A) = \operatorname{atoms}(A)$,
- $\operatorname{atoms}((A \land B)) = \operatorname{atoms}((A \lor B)) = \operatorname{atoms}((A \to B)) = \operatorname{atoms}(A) \cup \operatorname{atoms}(B)$.

Množinou atómov teórie T je

$$\operatorname{atoms}(T) = \bigcup_{X \in T} \operatorname{atoms}(X).$$

Ohodnotenia zhodné na atómoch teórie

Definícia 3.32. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $M \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa *zhodujú* na množine M vtt $v_1(A) = v_2(A)$ pre každý atóm $A \in M$.

Tvrdenie 3.33. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú teóriu T a formulu X jazyka $\mathcal{L}$ a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine* $\text{atoms}(T) \cup \text{atoms}(X)$ *platí*

- $v_1 \models_p T$ *vtt* $v_2 \models_p T$,
- $v_1 \models_p X$ *vtt* $v_2 \models_p X$.

Ohodnotenia postačujúce na skúmanie teórií

Inak povedané: Pravdivosť formuly/teórie v ohodnotení závisí *iba* od pravdivostných hodnôt tých atómov, ktoré sa v nej vyskytujú.

Takže na zistenie vyplývania, nezávislosti, splniteľnosti stačí preskúmať všetky ohodnotenia, ktoré sa *líšia* na atómoch *vyskytujúcich* sa vo formule a teórii.

Pokiaľ je teória je konečná, stačí skúmať konečne veľa ohodnotení, aj keby bol jazyk nekonečný.

Rekapitulácia

Rekapitulácia

Dnes sme sa naučili:

- ako zjednodušiť štruktúry na výrokovologické ohodnotenia,
- čo je logické vyplývanie z teórie a logický dôsledok teórie,
- čo je nezávislosť formuly od teórie,
- štyri situácie vo vzťahoch teórií a formúl a ich praktické dôsledky,
- čo sú splniteľné a nesplniteľné teórie,
- ako súvisí nesplniteľnosť a vyplývanie.

Literatúra