
Matematika 4 — Logika pre informatikov

2. sada teoretických úloh

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **1. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu02¹. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel².

Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**².

Ak pri riešení použijete prieskumník štruktúr³, odovzdajte (povinne) **aj export** z neho. **Pozor!** Informácie nachádzajúce sa **iba v exporte**, ale nie v PDF **nepovažujeme za súčasť riešenia**. Export však výrazne urýchli hodnotenie riešenia.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky⁴, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť nový experimentálny prieskumník štruktúr³s Henkinovou-Hintikkovou hrou.

¹ <https://forms.gle/fbPMaE9KyGm6Tnk17>

² https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course/Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

³ <https://ricsitoh.github.io/structure-explorer/>

⁴ <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

Cvičenie 2.1. (2.1.1, 2.1.2) Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \wedge \text{muž}(\text{Alex}))$
- b) $\neg(\text{má_rād}(\text{Alex}, \text{Alex}))$
- c) $(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \rightarrow (\neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo})))$
- d) $(\text{Alex} \vee \neg \text{oco})$
- e) $(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \wedge \text{žena}(\text{Alex})) \rightarrow (\neg \text{muž}(\text{Alex}) \vee \neg \text{žena}(\text{Alex})))$
- f) $(\neg \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg \wedge \text{muž}(\text{Edo})))$

Cvičenie 2.2. (2.1.3, 2.1.4) Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\ ((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))$$

Cvičenie 2.3. (2.2.1, 2.2.2) V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\ i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\ i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\ i(\text{má_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\}, \\ i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\ i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\ i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\}, \end{aligned}$$

zistite postupom *zhora nadol* (viď príklad 2.2.1 v zbierke), či je pravdivá formula A_1 , a postupom *zdola nahor*, či sú pravdivé formuly A_2 a A_3 .

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & \text{starší}(\text{Bruno}, \text{Alex}) \rightarrow \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \\ (A_2) \quad & (\neg \text{má_rád}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \leftrightarrow \neg \text{má_rád}(\text{Bruno}, \text{Alex})) \\ (A_3) \quad & ((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\ & ((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza}))) \end{aligned}$$

Cvičenie 2.4. (2.2.3, 2.2.4) Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & \text{titul}(\text{Sofiina_voľba}) \\ (A_2) \quad & \text{kniha}(\text{k325}) \\ (A_3) \quad & \text{má_autora}(\text{Sofiina_voľba}, \text{Styron}) \\ (A_4) \quad & (\text{titul}(\text{Kto_chytá_v_žite}) \wedge \text{má_autora}(\text{Kto_chytá_v_žite}, \text{Salinger})) \\ (A_5) \quad & (\neg(\text{číta}(\text{Adam}, \text{k325}) \wedge \text{obdivuje}(\text{Dana}, \text{Adam})) \rightarrow \\ & \neg(\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofiina_voľba}) \vee \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite}))) \\ (A_6) \quad & (\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite}) \leftrightarrow \neg \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofiina_voľba})) \end{aligned}$$



Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

Cvičenie 2.5. (2.3.1) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- (A₁) Lucia a jej kamarát sú deti.
- (A₂) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka.
- (A₃) Obe jeho obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je červená.
- (A₄) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, napriek tomu, že je dievča.
- (A₅) Jej autíčko je ale červené.
- (A₆) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou, ktorá má červené šaty, alebo s kamarátovým čiernym koníkom.
- (A₇) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.
- (A₈) Lucia sa preto hrá buď so svojím autíčkom alebo s Petrovým, ale s oboma naraz sa hrať nemôže.
- (A₉) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.
- (A₁₀) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.
- (A₁₁) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.
- (A₁₂) Psa venčí, ak je pekne.
- (A₁₃) S Luciou sa hrá jedine, ak nie je pekne.
- (A₁₄) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.



Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko a koník Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

Hodnotená časť

Úloha 2.6. (2.3.3) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

- (A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, čašník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)
- (A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.
- (A_2) Gigi je žena.
- (A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.
- (A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.
- (A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.
- (A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.
- (A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.
- (A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.
- (A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.
- (A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.
- (A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.
- (A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým nekamaráti.
- (A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.
- (A_{14}) Bonus (0,25 b.): Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.
- (A_{15}) Bonus (0,25 b.): Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

💡 Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne a osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.