

# Matematika (4): Logika pre informatikov

Poznámky z prednášok

Ján Kl'uka, Jozef Šiška

Letný semester 2020/2021

Posledná aktualizácia: 15. februára 2021

## Obsah

<b>P1</b>	<b>Úvod. Atomické formuly</b>	<b>2</b>
<b>0</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
0.1	O logike . . . . .	2
0.2	O kurze . . . . .	9
<b>1</b>	<b>Atomické formuly</b>	<b>10</b>
1.1	Syntax atomických formúl . . . . .	14
1.2	Sémantika atomických formúl . . . . .	18
1.3	Zhrnutie . . . . .	22

## 1. prednáška

# Úvod

## Atomické formuly

---

### 0 Úvod

#### 0.1 O logike

##### Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

##### Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

**Jazyk** zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

*Syntax* pravidlá zápisu tvrdení

*Sémantika* význam tvrdení

**Usudzovanie (inferencia)** odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

##### Jazyk, poznatky a teórie

*Jazyk* slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

*Príklad 0.1* (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

### Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „V akých zostavách môžu noví známi prísť na párty tak, aby boli všetky podmienky splnené?“

Priamočiaro (aj keď pracne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n					P0: Niekoľko z Kim, Jima, Sarah príde na párty.
n	n	p					P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
n	p	n					P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
n	p	p					P3: Sarah nepôjde bez Jima.
p	n	n					
p	n	p					
p	p	n					
p	p	p					

### Možné stavy sveta a modely

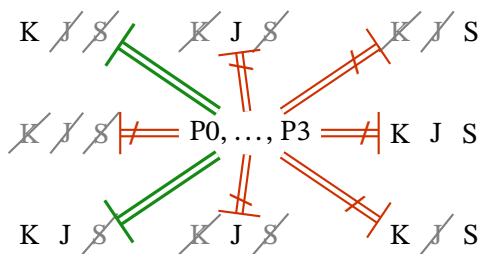
Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

✔ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,

✘ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

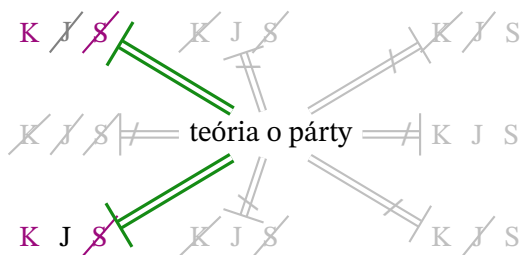
*Príklad 0.2.* Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.



### Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé vždy, keď je pravdivá teória?

V našom prípade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky  $P_0, \dots, P_3$  splnené?



### Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.

- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.
- 

### Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním (inferovať)*.

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

*Príklad 0.4.* Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

### Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver *je logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

*Dedukcia* je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

## Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú predpoklady pravdivé, ale záver je nepravdivý.

*Príklad 0.5.* Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

## Ťažkosti s prirodzeným jazykom

*Prirodzený jazyk* je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s d'alekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ...

— Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: Nikto *nie* je dokonalý.

## Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím umelých *formálnych* jazykov.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam).
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, ...

- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *formalizovať*, a potom naň môžeme použiť logický aparát.
- Formalizácia vyžaduje cvik, trocha veda, trocha umenie.

### Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.		$k = 3 \cdot m$
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.	$\rightsquigarrow$	$k + m = 12$
Koľko rokov majú Karol a Mária?		

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

*Príklad 0.6.* Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Nieкто z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

### Logika prvého rádu

*Jazyk logiky prvého rádu* (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — Gottlob Frege, Guisepe Peano, Charles Sanders Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory*  $\forall$  a  $\exists$ .

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \dots$$

## Logika prvého rádu a informatika

Informatika sa vyvinula z logiky (John von Neumann, Alan Turing, Alonzo Church, ...)

Prvky logiky prvého rádu obsahuje väčšina *programovacích jazykov*:

- `all(x > m for x in arr),`
- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25,`

niektoré (Prolog) sú priamo podmnožinou FOL.

Vo FOL sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa FOL používa na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení, ...) simulovaním usudzovania.

## Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

**korektné** — odvodzujú iba logické dôsledky,

**úplné** — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (kalkul elementárnej aritmetiky),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

⋮

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.



## 0.2 O tomto kurze

### Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

- Teoreticky**
- Jazykmi logiky prvého rádu (FOL), jeho syntaxou a sémantikou
  - Správnymi úsudkami v ňom a dôvodmi ich správnosti
  - Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
  - Automatizáciou usudzovania
- Prakticky**
- Vyjadrovaním problémov vo FOL
  - Dokazovaním konkrétnych logických dôsledkov
  - Automatizovaním riešenia problémov
  - Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov – formúl a termov)
  - Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov
- Filozoficky**
- Zamýšľanými a nezamýšľanými významami tvrdení
  - Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

### Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje* jazyk výrokov od jeho významu a vlastne ani jednu stránku *redefinuje jasne*.

V tomto kurze sa budeme snažiť byť *presní*.

- *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito

Pojmy z logiky budeme *definovať* *matematicky*

- ako množiny, postupnosti, funkcie, atď., ← Matematika (1), (3)

na praktických cvičeniach aj *programami*

- ako reťazce, slovníky, triedy a metódy. ← Programovanie (1), (2)

Budeme sa pokúšať *dokazovať* ich vlastnosti.

Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky – *meta* matematika logiky, matematika **o** logike.

## Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia predmetu — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — sú popísané na oficiálnej webovej stránke predmetu:

[https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4)

## 1 Atomické formuly

### Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

### Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *pozitívnym jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *jednotlivých pomenovaných objektov*.

*Príklady 1.1.*

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Nieкто je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

## Individuové konštanty

*Individuové konštanty* sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniám, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

*Príklady 1.2.* Jarka, 2, Zuzana\_Čaputová, sobota,  $\pi$ , ...

## Individuové konštanty a objekty

Individuová konštantá

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

## Objekt

- *môže byť* pomenovaný aj *viacerými* individuovými konštantami (napr. Prezidentka\_SR a Zuzana\_Čaputová);
- *nemusi mať* žiadne meno.

## Predikátové symboly

*Predikátové symboly* sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú (subjekt)* a *prísudkovú časť (predikát)*:

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu *vidí*, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): individuové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozíčné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

## Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

*Dohoda 1.3.* Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad beží<sup>1</sup>, vidí<sup>2</sup>, dal<sup>4</sup>, <<sup>2</sup>.

## Zamýšľaný význam predikátových symbolov

*Unárny* predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

*Príklady 1.4.*

$\text{pes}(x)$	$x$ je pes
$\text{čierne}(x)$	$x$ je čierne
$\text{beží}(x)$	$x$ beží

*Binárny, ternárny, ...* predikátový symbol (s aritou 2, 3, ...) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

*Príklady 1.5.*

$\text{vidí}(x, y)$	$x$ vidí $y$
$\text{dal}(x, y, z, t)$	$x$ dal(a/o) objektu $y$ objekt $z$ v čase $t$

## Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

*Príklad 1.6.* Predikát mladší<sup>2</sup> môže označovať vzťah „ $x$  je mladší ako  $y$ “ presne.

Predikát mladý<sup>1</sup> zodpovedá vlastnosti „ $x$  je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

## Atomické formuly

*Atomické formuly* majú tvar

$$\text{predikát}(\text{argument}_1, \text{argument}_2, \dots, \text{argument}_k),$$

alebo

$$\text{argument}_1 \doteq \text{argument}_2,$$

pričom  $k$  je arita *predikátu*, a  $\text{argument}_1, \dots, \text{argument}_k$  sú (nateraz) individuové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a individuové konštanty jednoznačne označujú objekty.

## Formalizácia jednoduchých výrokov

*Formalizácia* je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

*Nie je to jednoznačný proces.*

*Vopred daný* prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

*Príklad 1.7.* Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší<sup>2</sup> výroky:

$A_1$ : Jarka je vyššia ako Milo.  $\rightsquigarrow$  vyšší(Jarka, Milo)

$A_2$ : Evka je nižšia ako Milo.  $\rightsquigarrow$  vyšší(Milo, Evka)

Zanedbávame nepodstatné detaily – pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, ...:  $x$  je vyšší/vyššia/vyššie ako  $y \rightsquigarrow$  vyšší( $x, y$ ).

## Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s *návrhom vlastného jazyka* je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

*Príklady 1.8.*  $A_1$ : Jarka dala Milovi Bobíka.

↪ ~~dalaMilo~~viBobíka(Jarka) ~~dalBobíka~~(Jarka, Milo) dal(Jarka, Milo, Bobík)

A<sub>2</sub>: Evka dostala Bobíka od Mila.

↪ ~~dalBobíka~~(Milo, Evka) dal(Milo, Evka, Bobík)

A<sub>3</sub>: Evka dala Jarke Cilku.

↪ ~~dalCilku~~(Evka, Jarka) dal(Evka, Jarka, Cilka)

A<sub>4</sub>: Bobík je pes.

↪ pes(Bobík)

### Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal<sup>3</sup> pred dalBobíka<sup>2</sup> a dalCilku<sup>2</sup>).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

## 1.1 Syntax atomických formúl

### Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoločné a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, ...).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadať napríklad

- *matematicky* ako množiny, *n*-tice, relácie, funkcie, postupnosti, ...;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

## Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

## Symbole jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

**Definícia 1.9.** *Symbolmi jazyka  $\mathcal{L}$  atomických formúl logiky prvého rádu sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:*

*Mimologickými symbolmi sú*

- *individuové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- *a predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

Jediným *logickým symbolom* je  $\doteq$  (symbol rovnosti).

*Pomocnými symbolmi* sú  $(, )$  a  $,$  (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  ani  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ . Každému symbolu  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  je priradená *arita*  $\text{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$ .

## Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že *abecedou* jazyka  $\mathcal{L}$  atomických formúl logiky prvého rádu je  $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (, ), ,\}$ .

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka  $\mathcal{L}$*  hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka  $\mathcal{L}$*  alebo len *symboly jazyka  $\mathcal{L}$* .

Na zápise množiny  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

## Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

*Príklad 1.10.* Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku  $\mathcal{L}_{dz}$ , v ktorom

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{dz}} &= \{\text{Bobík, Cilka, Evka, Jarka, Milo}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{dz}} &= \{\text{dal, pes}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{dz}}(\text{dal}) = 3, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{dz}}(\text{pes}) = 1.\end{aligned}$$

*Príklad 1.11.* Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku  $\mathcal{L}_{party}$ , kde

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{party}} &= \{\text{Kim, Jim, Sarah}\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{party}} &= \{\text{príde}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{party}}(\text{príde}) = 1.\end{aligned}$$

## Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku  $\mathcal{L}$ , často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť o (po grécky *meta*) týchto symboloch.

*Dohoda 1.12.* Individuové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými  $a, b, c, d$  s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými  $P, Q, R$  s prípadnými dolnými indexmi.

## Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

**Definícia 1.13.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

*Rovnostný atóm* jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $c_1 \doteq c_2$ , kde  $c_1$  a  $c_2$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .

*Predikátový atóm* jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $P(c_1, \dots, c_n)$ , kde  $P$  je predikátový symbol z  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  s aritou  $n$  a  $c_1, \dots, c_n$  sú individuové konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .

*Atomickými formulami* (skrátene *atómami*) jazyka  $\mathcal{L}$  súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka  $\mathcal{L}$ .

Množinu všetkých atómov jazyka  $\mathcal{L}$  označujeme  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ .



## Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk  $\mathcal{L}$  atomic-  
kých formúl logiky prvého rádu nad abecedou  $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (, ), \cdot\}$  je  
množina slov

$$\{c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\} \\ \cup \{P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \text{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

## Príklady atómov jazyka

*Príklad 1.14.* V jazyku  $\mathcal{L}_{\text{dz}}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\text{Bobík, Cilka, Evka, Jarka, Milo}\}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\text{dal, pes}\}$ ,  $\text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\text{dal}) = 3$ ,  $\text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\text{pes}) = 1$ , sú *okrem iných* rovnostné atómy:

Bobík  $\doteq$  Bobík

Cilka  $\doteq$  Bobík

Evka  $\doteq$  Jarka

Bobík  $\doteq$  Cilka

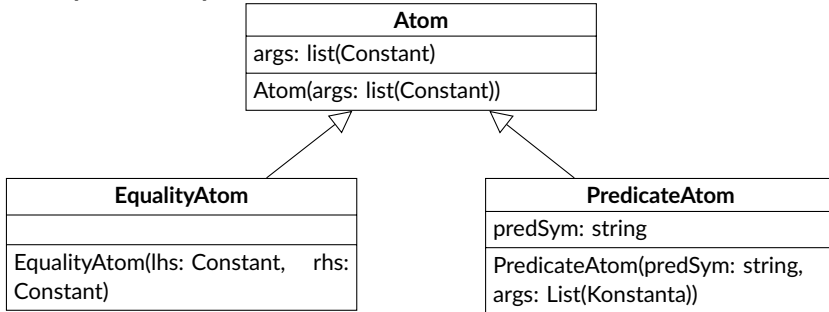
a predikátové atómy:

pes(Cilka)

dal(Cilka, Milo, Bobík)

dal(Jarka, Evka, Milo).

## Atómy ako triedy



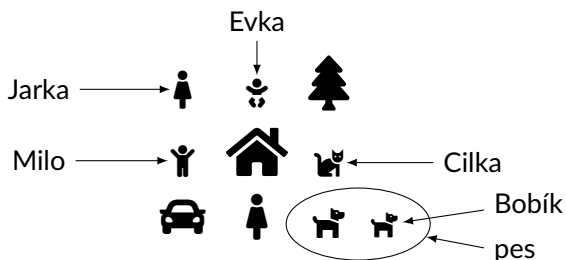
## 1.2 Sémantika atomických formúl

### Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula  $\text{pes}(\text{Bobík})$  pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarka a Míla na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt  $b$  pomenúva konštanta Bobík;
2. akú vlastnosť  $p$  označuje predikát pes;
3. či objekt  $b$  má vlastnosť  $p$ .



### Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať? Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

### Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ ?

## Matematický model stavu sveta

Potrebuje vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;
- jednoznačné priradenie významu všetkým individuovým konštantám a predikátom z jazyka  $\mathcal{L}$
- ▶ *interpretačná funkcia*;
- pre každú individuovú konštantu  $c$  z jazyka  $\mathcal{L}$ , ktorý *objekt* z domény konštanty  $c$  pomenúva,
- pre každý unárny predikát  $P$  z jazyka  $\mathcal{L}$ , ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom  $P$ ,
- ▶ tvoria *podmnožinu* domény;
- pre každý  $n$ -árny predikát  $R$  z jazyka  $\mathcal{L}$ ,  $n > 1$ , ktoré  $n$ -tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred.  $R$ ,
- ▶ tvoria  $n$ -árnu *reláciu* na doméne.

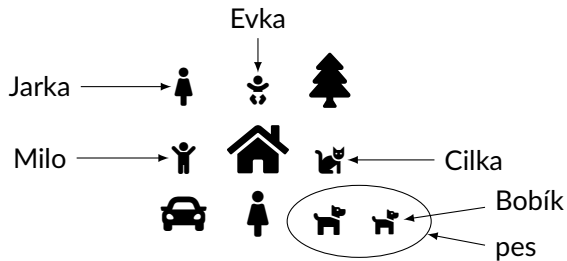
## Štruktúra pre jazyk

**Definícia 1.15.** Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk  $\mathcal{L}$  nazývame dvojicu  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D$  je ľubovoľná neprázdna množina nazývaná *doména* štruktúry  $\mathcal{M}$ ;  $i$  je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry  $\mathcal{M}$ , ktoré

- každej individuovej konštante  $c$  jazyka  $\mathcal{L}$  prirad'uje prvok  $i(c) \in D$ ;
- každému predikátovému symbolu  $P$  jazyka  $\mathcal{L}$  s aritou  $n$  prirad'uje množinu  $i(P) \subseteq D^n$ .

*Dohoda 1.16.* Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$

## Príklad štruktúry



Príklad 1.17.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (D, i), \quad D = \left\{ \text{person}, \text{tree}, \text{house}, \text{car}, \text{cat}, \text{dog}, \text{dog} \right\} \\ i(\text{Bobík}) &= \text{dog} & i(\text{Cilka}) &= \text{cat} \\ i(\text{Evka}) &= \text{person} & i(\text{Jarka}) &= \text{person} & i(\text{Milo}) &= \text{person} \\ i(\text{pes}) &= \{ \text{dog}, \text{dog} \} \\ i(\text{dal}) &= \{ (\text{person}, \text{person}, \text{dog}), (\text{person}, \text{person}, \text{dog}), (\text{person}, \text{person}, \text{cat}) \} \end{aligned}$$

## Štruktúra ako informatický objekt

Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt zodpovedá štruktúre?

*Databáza:*

Predikátové symboly jazyka  $\sim$  veľmi zjednodušená schéma DB (arita  $\sim$  počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov  $\sim$  konkrétne tabuľky s dátami

$i(\text{pes}^1)$	$i(\text{dal}^3)$		
1	1	2	3

## Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konstante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konstante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

**Príklad 1.18** (Štruktúra s nekonečnou doménou).  $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$        $i(\text{pes}) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 $i(\text{dal}) = \{(n, m, n + m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$   
 $i(\text{Bobík}) = 0$        $i(\text{Cilka}) = 1$        $i(\text{Evka}) = 3$        $i(\text{Jarka}) = 5$        $i(\text{Milo}) = 0$

## Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

**Definícia 1.19.** Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$  atomických for-  
múl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm  $c_1 \doteq c_2$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *pravdivý v štruktúre  $\mathcal{M}$*  vtedy a len  
vtedy, keď  $i(c_1) = i(c_2)$ .

Predikátový atóm  $P(c_1, \dots, c_n)$  jazyka  $\mathcal{L}$  je *pravdivý v štruktúre  $\mathcal{M}$*  vtedy  
a len vtedy, keď  $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$ .

Vzťah *atóm  $A$  je pravdivý v štruktúre  $\mathcal{M}$*  skráteno zapisujeme  $\mathcal{M} \models A$ .  
Hovoríme aj, že  $\mathcal{M}$  je *modelom  $A$* .

Vzťah *atóm  $A$  nie je pravdivý v štruktúre  $\mathcal{M}$*  zapisujeme  $\mathcal{M} \not\models A$ . Hovoríme  
aj, že  $A$  je *nepravdivý v  $\mathcal{M}$*  a  $\mathcal{M}$  *nie je modelom  $A$* .

Príklad 1.20 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (D, i), \quad D = \left\{ \text{ľudia, strom, dom, mačka, auto, pes, pes, pes} \right\} \\ i(\text{Bobík}) &= \text{ľudia} & i(\text{Cilka}) &= \text{mačka} \\ i(\text{Evka}) &= \text{ľudia} & i(\text{Jarka}) &= \text{ľudia} & i(\text{Milo}) &= \text{ľudia} \\ i(\text{pes}) &= \{ \text{pes, pes} \} \\ i(\text{dal}) &= \{ (\text{ľudia, strom, pes}), (\text{ľudia, ľudia, pes}), (\text{ľudia, ľudia, mačka}) \} \end{aligned}$$

Atóm  $\text{pes}(\text{Bobík})$  je pravdivý v štruktúre  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \models \text{pes}(\text{Bobík})$ , lebo objekt  $i(\text{Bobík}) = \text{ľudia}$  je prvkom množiny  $\{ \text{pes, pes} \} = i(\text{pes})$ .

Atóm  $\text{dal}(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$  je pravdivý v  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \models \text{dal}(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$ , lebo  $(i(\text{Evka}), i(\text{Jarka}), i(\text{Cilka})) = (\text{ľudia, ľudia, mačka}) \in i(\text{dal})$ .

Atóm  $\text{Cilka} \doteq \text{Bobík}$  nie je pravdivý v  $\mathcal{M}$ , t.j.,  $\mathcal{M} \not\models \text{Cilka} \doteq \text{Bobík}$ , lebo  $i(\text{Cilka}) = \text{mačka} \neq \text{ľudia} = i(\text{Bobík})$ .

## 1.3 Zhrnutie

### Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnu množinou individuových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov  $P(c_1, \dots, c_n)$  (predikátové) a  $c_1 \doteq c_2$  (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.
- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.

- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná  $n$ -tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.

## Literatúra