
Matematika 4 — Logika pre informatikov

3. sada teoretických úloh

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **8. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu03¹. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel².

Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**³.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky³, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

¹ <https://forms.gle/TODO>

² https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

³ <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

Cvičenie 3.1. (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3; Def. 3.10, tvrdenia 3.11 a 3.13)

- a) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack, Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned}D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\i(\text{Jack}) &= s3, \\i(\text{Corona}) &= p1, \\i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\}\end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné so štruktúrou \mathcal{M} .

- b) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy, Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned}v &= \{\text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, & \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\& \text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, & \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\& \text{hrá_sa}(\text{Andy, Woody}) \mapsto t, & \text{hrá_sa}(\text{Woody, Andy}) \mapsto f\}\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

Cvičenie 3.2. (3.2.1, 3.2.2) Majme výrokovologickú teóriu T :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{tancuje}_s(A, B) \rightarrow (\text{tancuje}_s(A, B) \vee \text{spieva}(A))), \\ A_2: (\neg \text{tancuje}_s(A, B) \vee \neg \text{spieva}(A)), \\ A_3: (\neg \text{spieva}(A) \rightarrow \text{frajer}(A)) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl X_1 – X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T , b) je nezávislá od T , alebo c) ani z nej nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

(X_1) $(\text{tancuje}_s(A, B) \rightarrow \text{frajer}(A))$,

(X_2) $\neg \text{spieva}(A)$,

(X_3) $(\text{spieva}(A) \rightarrow \text{tancuje}_s(A, B))$.

 Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

Cvičenie 3.3. (3.2.3, 3.2.2) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z krádeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Roberta. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné skutočnosti:

(A_1) Miles je určite vinný.

(A_2) Miles nikdy nepracuje sám, je teda vinný, iba ak je vinný aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.


(A_3) Davies vždy pracuje s Robertsom.

(A_4) Roberts sa s Milesom neznáša, vinný je preto nanajvýš jeden z nich.

(A_5) Na lúpeži sa mohli podieľať len títo traja podozriví a nikto iný.


Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

 **Pomôcka.** Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

Hodnotená časť

Úloha 3.4. (2.2.5) Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojками \rightarrow (implikácia) so štandardným významom a \vee (XOR), pričom neformálny význam ($A \vee B$) je: pravdivá je práve jedna z formúl A a B . Formuly nebudú obsahovať *žiadne iné spojky*.

 Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

V definícii pravdivosti formuly v štruktúre vyjadrite význam spojok iba pomocou slovenských spojok *a* a *alebo* a pomocou pravdivosti a nepravdivosti priamych podformúl.

Úloha 3.5. (3.2.6, 3.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Ak minister nie je schopný, premiér ho odvolá. Alebo je premiérov kamarát.
- (A_2) Minister je premiérov kamarát, ak ho premiér neodvolal.
- (A_3) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémie, je schopný.
- (A_4) Premiér ministra neodvolal, napriek tomu, že minister proti pandémie účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov $A_1 - A_4$:

- (C_1) je minister schopný,
- (C_2) premiér ministra odvolá,
- (C_3) minister je premiérov kamarát.

 **Pomôcka.** Uvedomte si, že v tomto zadaní sú minister a premiér konkrétne osoby.