

---

# Matematika 4 — Logika pre informatikov

## 1. sada teoretických úloh

---

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **22. februára 2020 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu01<sup>1</sup>. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel<sup>2</sup>.

**Odovzdávajte jeden dokument vo formáte PDF** s dodatočnými obmedzeniami uvedenými vo formulári. Dokument musí obsahovať **celé riešenie** v textovej forme. Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**<sup>2</sup>.

Ak pri riešení použijete prieskumník štruktúr<sup>3</sup>, odovzdajte (povinne) **aj export** z neho. **Pozor!** Informácie nachádzajúce sa **iba v exporte**, ale nie v PDF **nepovažujeme za súčasť riešenia**. Export však výrazne urýchli hodnotenie riešenia.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>4</sup>, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> <https://forms.gle/X97j2FkqdfssPm1C6>

<sup>2</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/vw/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/vw/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

<sup>3</sup> <https://bl96.github.io/structure-explorer/>

<sup>4</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

**Cvičenie 1.1.** (1.1.1, 1.1.5) Uvažujme jazyk  $\mathcal{L}$  logiky prvého rádu s množinami symbolov  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco}\}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$ , pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	$x$ je žena
$\text{rodič}(x, y)$	$x$ je rodičom $y$
$\text{dieťa}(u, x, y)$	$u$ je dieťaťom matky $x$ a otca $y$
$\text{starší}(x, y)$	$x$ je starší ako $y$

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

$(A_1)$ žena(Beáta)	$(B_1)$ žena(Alex)
$(A_2)$ žena(Dana)	$(B_2)$ dieťa(Beáta, Gabika, oco)
$(A_3)$ rodič(Dana, Alex)	$(B_3)$ rodič(Edo, Edo)
$(A_4)$ rodič(Dana, Beáta)	$(B_4)$ starší(Beáta, Cyril)
$(A_5)$ dieťa(Cyril, Gabika, Edo)	$(B_5)$ starší(Gabika, Cyril)
$(A_6)$ dieťa(Alex, Dana, Cyril)	$(B_6)$ Cyril $\doteq$ oco
$(A_7)$ starší(Dana, Cyril)	

**Cvičenie 1.2.** (1.1.2, 1.1.6) Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku  $\mathcal{L}$  z úlohy 1.1?

**Cvičenie 1.3.** (1.1.3, 1.1.7) Uvažujme jazyk  $\mathcal{L}$  a atomické formuly z úlohy 1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl  $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_6$  sú pravdivé v štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde

$$\begin{aligned}
 D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\
 i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
 i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
 i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\
 i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
 i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\
 i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}.
 \end{aligned}$$

💡 Všimnite si, že hoci každá individuová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero individuových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

**Cvičenie 1.4.** (1.1.4, 1.1.8) Uvažujme opäť jazyk  $\mathcal{L}$  a atomické formuly z úlohy 1.1. Zostrojte štruktúry  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_3$  pre jazyk  $\mathcal{L}$  tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl  $A_1, \dots, A_7$ , ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl  $B_1, \dots, B_6$  a aby *zároveň*:

- doména štruktúry  $\mathcal{M}_1$  mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry  $\mathcal{M}_2$  mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry  $\mathcal{M}_3$  mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

**Cvičenie 1.5.** (1.2.1, 1.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

( $A_1$ ) Peter je muž.

( $A_2$ ) Peter je študent.

( $A_3$ ) Lucia je žena a študentka.

( $A_4$ ) Lucia je staršia ako Peter.

( $A_5$ ) Matematiku učí Eugen.

( $A_6$ ) Peter a Lucia sú od neho mladší.

( $A_7$ ) Peter má rád Matematiku.

( $A_8$ ) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

( $A_9$ ) Eugen má rád Luciu.

( $A_{10}$ ) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

( $A_{11}$ ) Znáмка „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

( $A_{12}$ ) Lucia má rada Petra.

( $A_{13}$ ) Eugen sa má rád.

( $A_{14}$ ) Je Učiteľom roka 2020.

( $A_{15}$ ) Matematika je povinný predmet.

( $A_{16}$ ) Telocvik je voliteľný predmet.

( $A_{17}$ ) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

( $A_{18}$ ) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

## Hodnotená časť

### Úloha 1.6. (1.2.1, 1.2.3)

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

( $A_1$ ) Janko je chlapec.

( $A_2$ ) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

( $A_3$ ) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

( $A_4$ ) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

( $A_5$ ) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

( $A_6$ ) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

( $A_7$ ) Čarodejnica má bradavicu na nose.

( $A_8$ ) Janko sa bojí čarodejnice.

( $B_1$ ) Marienka je chlapec.

( $B_2$ ) Marienka sa bojí čarodejnice.

( $B_3$ ) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

( $B_4$ ) Čarodejnica Janka zjedla.

( $C_1$ ) Mário je chlapec.

- b) Vytvorte štruktúru  $\mathcal{M}$  pre jazyk  $\mathcal{L}$  tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny  $A$ , boli v  $\mathcal{M}$  pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny  $B$ , v  $\mathcal{M}$  nepravdivé.

- c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny  $A$  pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z  $B$  nepravdivé a formula pre výrok ( $C_1$ ) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.