

# Семинар 7. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 1.

## 1. Инвариантные подпространства

Будем работать только с преобразованиями.

### 1.1. Определение

**Определение 1.1.** Подпространство  $L' \subset L$  называется **инвариантным относительно преобразования  $\varphi$** , если

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in L' \text{ или } \varphi(L') \subset L'.$$

Например:

- $\mathbf{o}, L$  — вырожденные случаи.
- Поворот  $\mathbb{R}^3$  вокруг  $\mathbf{e}_3$  на  $\pi/2$ . Инвариантные подпространства:  $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$ .
- Ядро преобразования  $\varphi$  ( $\ker \varphi$ ) всегда инвариантно относительно этого преобразования  $\varphi$ .
- $\operatorname{Im} \varphi$

**Теорема 1.1.** Если какое-то подпространство содержит в себе образ, то  $L'$  инвариантно относительно  $\varphi$ .

*Доказательство.*

$$\forall \mathbf{x} \in L' \mapsto \varphi(\mathbf{x}) \in \operatorname{Im} \varphi \subset L'$$

□

### 1.2. Свойства инвариантных подпространств

**Предложение 1.1.** Сумма инвариантных подпространств инвариантна.

*Доказательство.*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{y} \in L_2, \varphi(\mathbf{y}) \in L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \in L_1 + L_2$$

□

**Предложение 1.2.** Пересечение инвариантных подпространств инвариантно.

*Доказательство.*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in L_1, \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \\ \mathbf{x} \in L_2, \varphi(\mathbf{x}) \in L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in L_1 \cap L_2$$

□

## 2. Матрица преобразования

### 2.1. Вид матрицы преобразования

Рассмотрим линейное пространство  $L$ ,  $\dim L = n$ . Пусть  $L' \subset L$ ,  $\dim L' = k$  — инвариантное подпространство относительно  $\varphi$ , базис в  $L' : \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ , базис в  $L : \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .

Напомним, что матрица преобразования  $A$  строится из образов базисных векторов:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{array} \right)$$

Т.о. матрица преобразования в выбранном базисе имеет следующий вид:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array} \right)^{\square} \text{ — клеточно-треугольный вид.}^1$$

Пусть теперь  $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s, \forall i L_i$  — инвариантное подпространство относительно  $\varphi$ . Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \boxed{A_1} & O & \cdots & O \\ O & \boxed{A_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \boxed{A_s} \end{array} \right)^{\square} \text{ — клеточно-диагональный вид.}$$

Ширина и высота каждой клетки равны размерности инвариантного подпространства.

### Пример 1

Найти инвариантные подпространства в  $\mathbb{R}^3$  относительно  $\varphi$ .

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Из вида  $A$  видно, что существует два не пересекающихся инвариантных подпространства.  $\mathbf{o}, \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3 \rangle$ .

## 2.2. Геометрический смысл матрицы преобразования

Поговорим о геометрии. Научимся определять по внешнему виду матрицы ее геометрический смысл.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ — отражение относительно } \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — проекция.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — растяжение вдоль } \mathbf{e}_2 \text{ в 3 раза.}$$

Нам интересны матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ — обобщённое растяжение } \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

---

<sup>1</sup>Квадрат над матрицей значит, что матрица блочная.

### 3. Собственный вектор

#### 3.1. Определение

Рассмотрим преобразование  $\varphi$  с матрицей  $A$ , тогда ненулевой вектор  $\mathbf{x}$  называется собственным вектором, если  $\varphi(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}$ ;  $\lambda$  — собственное значение.

Множество собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует собственное пространство.

#### 3.2. Свойства

**Предложение 3.1.** *Собственный вектор (и только он) порождает одномерное инвариантное подпространство.*

*Доказательство.* Рассмотрим инвариантное подпространство  $\langle \mathbf{x} \rangle \Rightarrow \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) = \alpha \lambda \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x} \rangle$ . □

### 4. Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

Рассмотрим тождественное преобразование  $Id$ , матрица его преобразования  $E$ .

$$(\varphi - \lambda Id)(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

Перейдём к матричному виду:

$$(\varphi - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (*)$$

Итак, мы получили СЛУ размеров  $n \times n$ . Она имеет либо одно решение (нулевое), но оно нам не интересно, т. к.  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ , либо бесконечно много решений  $\Rightarrow A$  должна быть вырожденной  $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \rightarrow \lambda_i$  — собственное значение  $\rightarrow (*) \rightarrow \mathbf{x}$  — собственный вектор.

#### Пример 2

Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём  $\lambda$  из условия  $\det(A - \lambda E) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda + 15 = 0$$

Ответ:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$  Далее подставим числа  $\lambda$  в  $(*)$ :

$$1. \lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow \text{Собственный вектор, перейдёт сам в себя т.к. } \lambda = 1.$$

$$2. \lambda_2 = 3 : L_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$3. \lambda_3 = 5 : L_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Лемма 4.1.** Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно линейно независимы.

$$\text{Соберём базис } \mathbf{f} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{f}_1) &= \mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) &= 3\mathbf{f}_2 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \mathbf{f}. \\ \varphi(\mathbf{f}_3) &= 5\mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

## 5. Диагонализированность матрицы

### Пример 3

Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0:$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -2 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

Не забывайте про свойства детерминанта

$\lambda = 1$  — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = 2$  — корень алгебраической кратности 1 (простой корень).

$$1. \lambda = 1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right), L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{формирует плоскость}}$$

$\dim L_1 = 2$  — геометрическая кратность (размерность собственного подпространства).

$$2. \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Выберем базис: } \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Поэтому } \varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1, \varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2, \varphi(\mathbf{f}_3) = 2\mathbf{f}_3$$

$$\text{Ответ: } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Геометрическая кратность  $\leq$  алгебраическая кратность

• Если геометрическая кратность строго меньше ( $<$ ) алгебраической кратности хотя бы для одного  $\lambda$ , то преобразование **недиагонализуемо**.

#### Пример 4

Диагонализировать матрицу:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 = 0$$

Получаем, что  $\lambda = 2$  алгоритмической кратности 3

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Получили, что геометрическая кратность (равна 1) меньше алгебраической кратности (равна 3). Тогда матрица недиагонализуема (не хватило собственных векторов).

#### Пример 5

Диагонализировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \underbrace{\lambda = \pm i}_{\text{отвечают за инвариантную плоскость}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

#### Условие диагонализуемости матрицы:

1. В частности:  $A_{n \times n}$  диагонализуема, если  $A$  имеет  $n$  различных вещественных собственных значений.
2. В общем случае:  $A$  диагонализуема  $\Leftrightarrow L$  раскладывается в прямую сумму собственных подпространств.