

Семинар 11. Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Для построения ортонормированного базиса, каждый вектор нужно разделить на его длину, т.е.

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|}.$$

Пример 1

Ортонормировать систему векторов со стандартным (т.е. «школьным») скалярным произведением

$$\mathbf{f}_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T, \quad \mathbf{f}_2 = (4 \ 0 \ 4 \ 1)^T, \quad \mathbf{f}_3 = (1 \ 13 \ -1 \ -3)^T.$$

Решение:

На первом шаге возьмем вектор \mathbf{f}_1 за основу нового базиса, т.е. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T$, $|\mathbf{h}_1| = \sqrt{10}$.

На втором шаге найдем следующий вектор по рекуррентной формуле, полученной выше

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{h}_2| = \sqrt{23}.$$

Можно убедиться, что $(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$.

Далее, найдем третий вектор

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2} \mathbf{h}_2 = (2 \ 7 \ 0 \ -8)^T, \quad |\mathbf{h}_3| = \sqrt{17}.$$

Осталось только нормировать полученный базис, т.е. разделить каждый вектор на его длину.

Ответ: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}} (3 \ -2 \ 3 \ -1)^T$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} (2 \ 7 \ 0 \ 8)^T$.

Пример 2

В пространстве многочленов, степени не выше второй, задано скалярное произведение в таком виде:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Построить ортогональный базис в этом пространстве.

Решение:

За основу возьмем стандартный базис $\{1, t, t^2\}$. Пусть первый вектор в нашем новом базисе $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$

$\mathbf{f}_1 = 1$. Найдем длину \mathbf{h}_1 ¹:

$$|\mathbf{h}_1|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2.$$

Для ортогонализации необходимо найти скалярное произведение \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 . Будем искать их по заданному определению:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int_{-1}^1 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 1 \perp t.$$

¹Как может показаться длина единицы равна 1. Но т.к. по определению длина вектора — корень из его скалярного произведения самого на себя, это не так.

Теперь подставим числа в рекуррентную формулу и получим второй вектор базиса:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_2 \quad |\mathbf{h}_2|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Т.к. $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2) = 0$,

$$(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_3) = \int_{-1}^1 1 \cdot t^2 = \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2} \mathbf{h}_2 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2} \mathbf{h}_1,$$

то

$$\mathbf{h}_3 = t^2 - \frac{2}{3 \cdot 2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$.

С. А. Жестков, [VK](#)

Команда [BOTAY!](#):

Д. Георгий, [VK](#)

К. Алексей, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

С. Паша, [VK](#)

М. Матвей, [VK](#)