

1. Про матрицы

Уже умеем

- сложение и умножение на число (поэлементно)
- транспонировать
- умножать

Свойства умножения

- 1.° $A \cdot B \neq B \cdot A$ (если $A \cdot B = B \cdot A$, то A, B — перестановочные матрицы)
- 2.° $A \cdot E = E \cdot A = A$
- 3.° $(AB)C = A(BC)$
- 4.° $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$
- 5.° $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- 6.° $(AB)^T = B^T A^T$

Пример 1

Верно ли:

а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Проверка:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Т.о. в общем случае выражение неверно.

б) $(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

Проверка:

$$A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$$

Т.о. в общем случае выражение верно.

2. Элементарные преобразования строк

- умножение строки на число, отличное 0
- сложение строк

Также, элементарными преобразованиями являются:

- добавление к строке другой строки, умноженной на число
- перестановка строк

Очевидно, что элементарные преобразования обратимы.

Рассмотрим: $SA = A'$, где S — матрица элементарного преобразования.

- умножение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

- сложение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$

Элементарная матрица получается элементарными преобразованиями из единичной.

Для преобразования столбцов элементарную матрицу нужно умножать справа.

Запись нескольких преобразований: S_1, \dots, S_N , то $S_N \cdot \dots \cdot S_1 A$.

Строки a_1, \dots, a_k матрицы A называются ЛНЗ (линейно-независимыми), если

- ЛНЗ: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$,

называются ЛЗ (линейно-зависимыми), если

- ЛЗ: $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$

Все свойства из анализа.

- Если есть нулевая строка, то матрица ЛЗ
- Если часть строк ЛЗ, то и матрица ЛЗ
- Любая часть ЛНЗ — ЛНЗ

Квадратная матрица вырожденная, если она содержит ЛЗ строки.

Элементарные преобразования *не нарушают* линейных зависимостей в матрице.

В частности: вырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в вырожденную матрицу, а невырожденная матрица при элементарных преобразованиях перейдёт в невырожденную матрицу.

Теорема 2.1. Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований может быть превращена в единичную

Пример 2

Привести к E .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(2)(1)]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатый вид матрицы}$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.2. Матрица невырождена \Leftrightarrow раскладывается в произведение элементарных матриц.

Доказательство. (\Rightarrow): см. метод Гаусса (пример 2).

$\exists T_1, \dots, T_M$ — элементарные преобразования строк: $T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E$

Элементарные преобразования обратимы $\Rightarrow \exists S_1, \dots, S_M : S_M \cdot \dots \cdot S_1 E = A \Leftrightarrow S_M \cdot \dots \cdot S_1 = A$

(\Leftarrow): $A = S_M \cdot \dots \cdot S_1 E$

Т.к. единичная матрица невырождена, а элементарные преобразования вырожденности не меняют $\Rightarrow A$ невырождена. \square

3. Обратная матрица

Определение 3.1. Матрица X обратная к матрице A , если

$$XA = AX = E,$$

где A — невырождена, X — единственна.

Свойства:

$$1.^{\circ} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$2.^{\circ} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Метод Жордана-Гаусса

$$T_M \cdot \dots \cdot T_1 A = E \quad | \cdot A^{-1}$$

$$T_M \cdot \dots \cdot T_1 E = A^{-1}$$

Пример 3

Доказать, что A невырождена и найти обратную, если

$$A^2 + A + E = O$$

Доказательство:

$$A^2 + A + E = O$$

$$A(A + E) + E = O$$

$$A(-A - E) = E$$

$$\det E = 1, \quad \det(A(-A - E)) = \det A \cdot \det(-A - E) \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Отсюда же следует, что

$$A^{-1} = -A - E$$

Пример 4

$A^m = O$ — нильпотентная матрица

Доказать

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{m-1}$$

Доказательство:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{m-1} \quad | \cdot (E - A)$$

$$E = E - A + A - A^2 + A^2 + \dots + A^{m-1} - A^m = E$$

Пример 5

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{а) } AX = B \quad A^{-1} \cdot |$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\text{б) } XA = B \quad | \cdot A^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Найдём A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)-5/2 \times (2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Т.о. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ б) } X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Ранг матрицы

Пусть у матрицы A r — ЛНЗ строк и нет ЛНЗ системы строк большего числа. Тогда r — строчный ранг матрицы.

Определение 4.1. Строчный ранг матрицы — максимальное число ЛНЗ строк.

Теорема 4.1. Система из r строк ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная подматрица порядка r .

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Первые две строки ЛНЗ. Вычерченный фрагмент содержит непропорциональные строки.

Определение 4.2. Подматрица порядка r называется базисной, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка вырождены.

Определение 4.3. Ранг матрицы — порядок базисной подматрицы.

Ранг матрицы равен строчному рангу. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях.
Свойства:

$$\text{Rg } AB \leq \min(\text{Rg } A, \text{Rg } B)$$

4.1. Алгоритм поиска ранга

Приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг — число ненулевых строк.

Пример 6

Найти Rg .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3)-3(1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (2)-(1) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} = 2$$

Пример 7

Найти Rg .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (4) \leftrightarrow (1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1/5 \times (4) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (4)-2(1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (3)-(1) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 и 4 строчку можно вычеркнуть, т.к. они ЛЗ. Т.о. $\text{Rg} = 2$.

Пример 8

Найти Rg в зависимости от параметра.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 & -4 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2)-3/2 \times (1) \\ (3)+3/2 \times (1)}]{(2)-3/2 \times (1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7 & \beta + 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \\
\xrightarrow[\substack{(3)-5/7 \times (2) \\ (4)+2/5 \times (1)}]{(3)-5/7 \times (2)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & 5 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Rg} = 2$ при $\alpha = -\beta = 1$.

$\text{Rg} = 3$ в остальных случаях.

Пример 9

Верно ли $\forall A, B$:

а) $\text{Rg}(A + B) = \text{Rg } A + \text{Rg } B$

Неверно, например:

$$A = B = E_2$$

б) $\text{Rg}(A + B) \leq \text{Rg } A + \text{Rg } B$

Верно. Докажем:

$$\text{Rg}(A + B) \leq \text{Rg}(\underbrace{A + B}_{\text{ЛЗ}} | A | B) = \text{Rg}(A | B)$$

$$r = \text{Rg } A, \quad s = \text{Rg } B$$

$$\text{Rg}(A | B) \leq r + s$$

Т.е.

$$\text{Rg}(A + B) \leq \text{Rg } A + \text{Rg } B.$$