Семинар 4. Замена базиса. Сумма и пересечение подпространств.

1. Замена базиса.

Рассмотрим базис $\overline{e}(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Координаты x в базисе $\overline{e}$: $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \overline{\xi}$

Тогда: $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \overline{e}\overline{\xi}$.

Пусть есть два базиса $\overline{e}, \overline{e'}$. Выразим один базис через другой:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n \\ e_2' &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' &= a_{n1}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_i' = \sum_{n}^{j=0} a_{ij}e_j$$

S — матрица перехода от $\overline{e}$ к $\overline{e'}$ ($\det S \neq 0$).

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overline{e'} = \overline{e}S}$$

Связь координат:

$$\begin{aligned} x &= \overline{e}\overline{\xi} \\ x &= \overline{e'}\overline{\xi'} = \overline{e}\,\underbrace{S\overline{\xi'}}_{\xi} \Rightarrow \boxed{\overline{\xi} = S\overline{\xi'}} \end{aligned}$$

Пример 1

Доказать, что $F: \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ и $G: \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ — базис в $\mathbb{R}^3$

1. Найти S от F к G.
2. Зная $\overline{\xi'}$ в G, найти $\overline{\xi}$ в F.

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det G = -47 \neq 0 \Rightarrow G \text{ — базис}$$

1. $G = FS \quad F^{-1}|\cdot$

   $F^{-1}G = S$

   Пусть F — невырожденная, тогда $\exists T_1,\dots,T_n$ (элементарные преобразования матриц):

   $T_n \dots T_1 F = E \quad | \cdot F^{-1}G$

   $T_n \dots T_1 G = F^{-1}G = S$

   Т.е. преобразования, которые переведут F в E, переведут G в S.

   $(F|G) \to (E|S)$

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $\overline{\xi} = S\overline{\xi'}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi_1 + 4\xi_3 \\ -4\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 \\ 13\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

Пример 2
(Условие то же, что и в примере 1)
$F :< \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) >$ $\quad G :< \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{smallmatrix}\right) >$
Заметим, что перед нами кососимметричные матрицы.

Определение 1.1. Кососимметричная (кососимметрическая) матрица — квадратная матрица A, удовлетворяющая соотношению:

$$A^{\mathrm{T}} = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что $\dim L' = 3$. Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
Тогда координаты наших векторов F и G в этом базисе:

$$F \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \quad G \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

Выполним действия аналогично примеру 1 и получим:

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим линейные подпространства L_1 и L_2.

Определение 2.1. Пересечением L_1 и L_2 называется множество векторов принадлежащих и L_1, и L_2.

$L_1 \cap L_2$ — линейное подпространство.

Определение 2.2. Суммой L_1 и L_2 называется линейная оболочка их объединения.

Определение 2.3. Если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то пишут так:

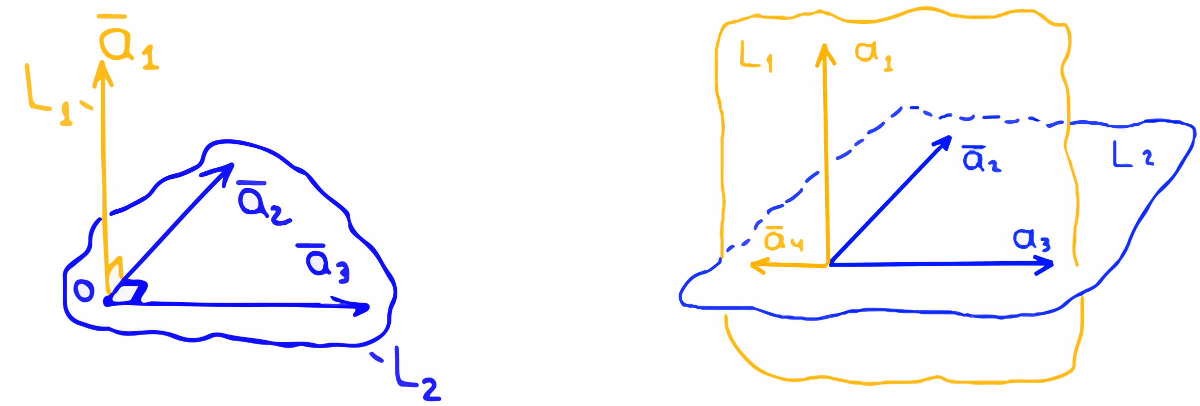
$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2,$$

а сумму называют прямой суммой.

Если $L = L_1 \oplus L_2$, то говорят, что L_1 и L_2 — прямые дополнения друг друга.

Примеры:
а) $L_1 :< \overline{a}_1 >$ $\qquad \dim L_1 = 1$
$L_2 :< \overline{a}_2, \overline{a}_3 >$ $\qquad \dim L_2 = 2$
В данном случае вектора некомпланарны.
$L_1 + L_2 =< \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 >= \mathbb{R}^3$
$\dim(L_1 + L_2) = 3 = \dim L_1 + \dim L_2$
Т.о.

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$$



а)

б)

Рис. 1. Рисунки подпространств к примерам а) и б)

б) $L_1 :< \overline{a}_1, \overline{a}_4 >$ $\quad\quad \dim L_1 = 2$
$L_2 :< \overline{a}_2, \overline{a}_3 >$ $\quad\quad \dim L_2 = 2$
$L_1 + L_2 :< \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4 >: \mathbb{R}^3$
Но $\dim(L_1 + L_2) = 3$, т.к. $\overline{a}_4$ можно выкинуть.

В общем случае:

$$\dim(L_1 + L_2) \leqslant \dim L_1 + \dim L_2$$

Ответ о размерности даёт формула Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

3. Понятие проекции вектора на подпространство

Определение 3.1. Пусть $\exists a \in L_1,\ b \in L_2,\ x \in L_1 + L_2 :\ \exists! x = a + b \Leftrightarrow L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$. При этом вектор a называется проекцией вектора x на L_1 параллельно L_2.

Пример 3
Найти проекцию $X(0\ -1\ -1\ 4)^{\mathrm{T}}$ на подпространство $L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ вдоль линейной оболочки $L_2 :< (1\ -1\ 1\ 0)^{\mathrm{T}} >$.

$$L_1 : (1\ 1\ 1\ 1 \mid 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ или } L_1 :< \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

$$L_2 :< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Разложим вектор X:

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\4\end{pmatrix} = \underbrace{k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{b\in L_2} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{a\in L_1}$$

Очевидно, что это уравнение задает нам СЛУ. Составим ее расширенную матрицу и решим систему:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to \begin{pmatrix}k\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

Отсюда легко найти, что

$$x_{\text{пр}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

Пример 4

Найти размероность и базис суммы подпространств U_1 и U_2.

$$U_1 :< \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix} > \quad U_2 : \begin{cases} x_1 \; -2x_2 \; -3x_3 \; +4x_4 \; = 0\\ 3x_1 \; +x_2 \; -2x_3 \; -2x_4 \; = 0\end{cases}$$

$$U_1 : \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

Последняя строка ЛЗ со второй, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim U_1 = 2$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Переведём способ задания U_2 из СЛУ в линейную оболочку. Для этого решим эту СЛУ:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}, \quad \dim U_2 = 2, \quad \text{базис } U_2 : \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

$U_1 + U_2 :< \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} > .$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & - & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

3 строка ЛЗ с 2 и 4, ее можно вычеркнуть $\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = 3$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Пример 5

В условиях примера 4 найти размерность и базис пересечения.

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

$\dim(U_1 + U_2) = 3$, $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 1$

1 способ

Зададим U_1 как систему: $U_1 :< \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\3\\1\end{smallmatrix}\right) >$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -2 & 3 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+2(1),(3)-3(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3+2x_1-3x_2 \\ 0 & 0 & x_4-x_2 \end{array}\right)$$

$U_1 : \begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 0 \end{cases}$

$U_1 \cap U_2 = \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > (\text{базис } U_1 \cap U_2)$$

2 способ

Базис $U_1 : a_1, a_2$

Базис $U_2 : b_1, b_2$

$P \in U_1, P \in U_2;$

$P = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$

Команда BOTAY!:
Г. Демьянов, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK