Семинар 12. Ортогональное преобразование и функции на евклидовых пространствах.

1. Ортогональные матрицы.

Рассмотрим два ОНБ
$$\mathbf{e} \text{ и } \mathbf{e}' = \mathbf{e}S.$$
В этих базисах
$$\Gamma = E \text{ и } \Gamma' = E.$$
Мы знаем, что
$$\Gamma' = S^{\mathrm{T}}\Gamma S.$$
Из этих равенств следует, что
$$S^{\mathrm{T}}S = E \Rightarrow S^{\mathrm{T}} = S^{-1}. \tag{$*$}$$
Такие матрицы, для которых выполнено ($*$), называются ортогональными, причем
$$\det S^{\mathrm{T}}S = \det S \det S^{\mathrm{T}} = \det E.$$
Т.к. $\det S = \det S^{\mathrm{T}}$, то
$$\det{}^2 S = 1 \Rightarrow \det S = \pm 1.$$
Рассмотрим подробнее матрицу S.
Матрица S состоит из столбцов $s_i^{\uparrow}$
$$S = \begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix},$$
тогда S^{T} из строк $\vec{s}_i$
$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix}.$$
Т.к. для матрицы S выполнено ($*$), то
$$\begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix} = E,$$
откуда следует, что
$$\begin{cases} s_i s_j = 1, \forall i = j \\ s_i s_j = 0, \forall i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow s_i s_j = \delta_{ij},$$
где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, столбцы/строки матрицы S формируют ОНБ.

Если мы имеем дело с матрицами размерами 2×2, то они имеют вид:
$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Ортогональное преобразование.

Определение 2.1. Преобразование φ с матрицей A евклидового пространства $\mathcal{E}$ называется ортогональным, если оно сохранет скалярное произведение, т.е.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Также сохраняются углы и длины — геометрический смысл «движения».

Из семинара 11:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})),$$

где φ^* — сопряженное преобразование. Заменим $\mathbf{y}$ на $\varphi(\mathbf{y})$ (т.к. говорим об ортогональных преобразованиях)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y})).$$

Используя свойство линейности, перепишем равенство так

$$(\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}) = 0.$$

Т.к. это равенство выполнено для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Rightarrow \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \Rightarrow \varphi^*\varphi = \mathrm{Id},$$

где Id — тождественное преобразование. Т.е. мы получили, что $A^*A = E$. В ОНБ $A^* = A^{\mathrm{T}}$, откуда следует, что

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}A = E},$$

т.е. ортогональное преобразование задает ортогональная матрица.

Свойства:

1) Ортогональное преобразование инъективно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in Ker\ \varphi$, т.е. $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.
$(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow$ инъекция. □

2) Собственные значения ортогонального преобразования равны ± 1.

Доказательство. $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.
$(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = \lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \lambda^2 = 1.$ □

3) Пусть подпространство $U \subset \mathcal{E}$. Если U инвариантно относительно φ, то $U^\perp$ инвариантно относительно φ.

Пример 1

φ переводит столбцы матрицы A в столбцы B. Скалярное произведение стандартное. Ортогонально ли φ?

Решение:

<u>Первый способ</u>

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{x})\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 15$

$\mathbf{y}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{y})\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = 15$

$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 65 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 65$
$(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 5 \quad (\varphi(\mathbf{y}),\varphi(\mathbf{y})) = 5$
$\Rightarrow \varphi$ — ортогональное.

Может возникнуть мысль, что достаточно проверить два соотношения из трех, однако этого оказывается недостаточно:

$(\mathbf{x},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\underline{(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \beta\underline{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{z})) = (\varphi(\mathbf{x}),\alpha\varphi(\mathbf{x})+\beta\varphi(\mathbf{y}))$

$= \alpha\underline{(\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x}))} + \beta\underline{(\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y}))}$

Контрпример:

$\mathbf{x}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{x})\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 6 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y})) = 15$

$\mathbf{y}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{y})\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ **но!** $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 8 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 10$

$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 65 \quad (\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{x})) = 65$
$(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 5 \quad (\varphi(\mathbf{y}),\varphi(\mathbf{y})) = 5$

Длины не сохраняются $\Rightarrow$ не ортогонально!

Второй способ:

$$X\begin{pmatrix}4&2\\7&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

Транспонируя с обеих сторон, получаем:

$$\begin{pmatrix}4&7\\2&1\end{pmatrix}X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}8&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

Умножая второе уравнение на первое *слева*, получим

$$\begin{pmatrix}4&7\\2&1\end{pmatrix}XX^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}4&2\\7&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

Если X — ортогональна $\Rightarrow XX^{\mathrm{T}} = E$

$$\begin{pmatrix}65&15\\15&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65&15\\15&5\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Предложение верно} \Rightarrow \varphi \text{ ортогонально}$$

3. Полярное разложение

Теорема 3.1. *Любое линейное преобразование евклидова пространства φ представимо в виде $\varphi = q$, где q — ортогональное преобразование, а s — самосопряженное преобразование.*

Иначе говоря, любая матрица A раскладывается в произведение

$$A = QS, \tag{☼}$$

где Q — ортогональная матрица, S — симметрическая матрица.

То есть существует такое ортогональное преобразование P : $P^{-1}SP = D$ — диагональная матрица.

$S = PDP^{-1} \Rightarrow$ (☼) $\Rightarrow A = \underbrace{QP}_{Q_1}\,D\,\underbrace{P^{-1}}_{Q_2} \Rightarrow \boxed{A = Q_1DQ_2}$, где Q_1,Q_2 — ортогональные матрицы, D — диагональная.

4. Билинейные функции на евклидовом пространстве

Определение 4.1. Линейное преобразование φ называется присоединенным к билинейной форме $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \to b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))$

Фиксируем базис $\mathbf{e}, \varphi : A, \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}, \varphi(\mathbf{y}) = A\boldsymbol{\eta}$.
Пусть B — матрица билинейной формы.

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^T B \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^T \Gamma A \boldsymbol{\eta}$$

$$\boxed{B = \Gamma A} \Rightarrow A = \Gamma^{-1} B$$

Пример 2
Найти матрицу присоединенного преобразования.
$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad k(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$

Решение:
$\exists T_1 \dots T_m$ элементарные преобразования строк такие, что

$$T_1 \dots T_m \Gamma = E | \cdot \Gamma^{-1} B$$

$$T_1 \dots T_m B = A$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

В ортонормированном базисе $\Gamma = E \Rightarrow A = B$

У симметричной квадратичной функции в ортонормированном базисе матрица B равна матрице A.

Если A задаёт самосопряжённое преобразование $\Rightarrow \exists$ ортонормированный базис из собственных векторов $\Rightarrow A$ имеет диагональный вид $\Rightarrow B$ также имеет диагональный вид.

Теорема 4.1. *В евклидовом пространстве для любой квадратичной формы существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.*

Пример 3
В ортонормированном базисе задана квадратичная форма. Найти ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.
$k(\mathbf{x}) = -4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$

Решение:
$B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = A,$ т.к базис ортонормированный

A — симметрическая $\Rightarrow A$ — самосопряжённое преобразование.
$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -9 \end{array} \right.$

1. $\lambda = 1$
   $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right); \; L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle; \; \mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

2. $\lambda = -9$
$\begin{pmatrix} 5 & 5 & \bigg| & 0 \\ 5 & 5 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}$; $L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$; $\mathbf{h}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

В ортонормированном базисе, составленном из векторов $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = B$$

$$k(\mathbf{x}) = \tilde{x}_1^2 - 9\tilde{x}_2^2$$

Вернёмся в линейное подпространство.

Теорема 4.2. *Пусть даны квадратичные функции $k(\boldsymbol{x})$ и $h(\boldsymbol{x})$, причём $h(\boldsymbol{x})$ — положительно определена. Тогда в L существует базис, в котором $k(\boldsymbol{x})$ имеет диагональный вид, а $h(\boldsymbol{x})$ – канонический вид.*

Доказательство. Пусть H — вспомогательное скалярное произведение, $\Gamma = H$.
1. $h(\mathbf{x})$ приводится к каноническому виду. В ортонормированном базисе $\hat{H} = E$.
2. K приводится к $\hat{K}$. В ортонормированном базисе $\hat{K} = S^{\mathrm{T}}KS$.

Для $\tilde{K}$ $\exists$ ОНБ, в котором она имеет диагональный вид,
$\tilde{K} = \operatorname{diag}(\dots), \tilde{H} = E$.

□

Алгоритм
$A = H^{-1}K$ — присоединенное преобразование, K — квадратичная форма;
A — самосопряженное $\Rightarrow$ $\exists$ ОНБ из собственных векторов $\Rightarrow$ $H = E$.

Пример 4
Привести две квадратичные формы к диагональному виду:

$$k(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2; h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$h(\mathbf{x})$ положительно определена.

Решение:
△
$\det(H^{-1}K - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det(H^{-1}(K - \lambda H)) = 0$
$\det H^{-1} \det(K - \lambda H) = 0 \Rightarrow \det(K - \lambda H) = 0$
▲
$\Gamma = H \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$; $\det(K - \lambda H) = 0$; $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 8-\lambda \\ 8-\lambda & 6-3\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -4 \\ \lambda = 5 \end{array} \right.$

1) $\lambda = -4$ $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 5$ $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{h}_1|^2 = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 9$, $|\mathbf{h}_1| = 3$, $|\mathbf{h}_2| = 3\sqrt{2}$

$\tilde{\mathbf{h}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\tilde{\mathbf{h}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
В этом базисе:
$\Gamma = \widetilde{H} = E$ $\hat{h}(\mathbf{x}) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2$;
$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = K \Rightarrow$ $\hat{k}(\mathbf{x}) = -4\tilde{x}_1^2 + 5\tilde{x}_2^2$

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Алексей, VK
М. Матвей, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK