

# Семинар 8. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.

## Пример 6

Найти собственные значения и собственные векторы.

$p = \langle 1, t, t^2 \rangle$ , если  $\varphi(p) = t^2 p'' - tp' + 2p$ .

Решение:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1) &= 2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(t) &= t : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(t^2) &= 2t : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ , собственный вектор:  $\{t\}$ .

$\lambda_{2,3} = 2$ , собственный вектор:  $\{1, t^2\}$ .

$$\text{Для } \lambda_1 : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Проверим:  $\varphi(7t) = -7t + 14t = 7t$ .

## Пример 7

При каких  $\alpha$  преобразование диагонализируемо?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Решение:

I.  $\alpha^2 = 1$  :

(a)  $\alpha = 1$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица уже диагональная.

(b)  $\alpha = -1$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$  — корень алгебраической кратности 3.

Тогда система уравнений:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2$  вектора, т.е. для построения базиса собственных векторов не хватает.

II.  $\alpha^2 \neq 1$  :

$\lambda = 1$  — корень алгебраической кратности 2.

$\lambda = \alpha^2$  — простой корень.

(a)  $\lambda = 1$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rg} = 1, n = 3 \Rightarrow 2 \text{ собственных вектора.}$$

(b)  $\lambda = \alpha^2$  :

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 & 0 & \alpha^2 - \alpha & | & 0 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rg} = 2, n = 3 \Rightarrow 1 \text{ собственный вектор.}$$

Ответ:  $\alpha \neq -1$ .

Команда **BOTAY!**:

Д. Георгий, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

С. Паша, [VK](#)

М. Матвей, [VK](#)