Семинар 12. Ортогональное преобразование и функции на евклидовых пространствах.

1. Ортогональные матрицы.

Рассмотрим два ОНБ
$$\mathbf{e} \text{ и } \mathbf{e}' = \mathbf{e}S.$$
В этих базисах
$$\Gamma = E \text{ и } \Gamma' = E.$$
Мы знаем, что
$$\Gamma' = S^{\mathrm{T}}\Gamma S.$$
Из этих равенств следует, что
$$S^{\mathrm{T}}S = E \Rightarrow S^{\mathrm{T}} = S^{-1}. \qquad (*)$$
Такие матрицы, для которых выполнено $(*)$, называются ортогональными, причем
$$\det S^{\mathrm{T}}S = \det S \det S^{\mathrm{T}} = \det E.$$
Т.к. $\det S = \det S^{\mathrm{T}}$, то
$$\det{}^2 S = 1 \Rightarrow \det S = \pm 1.$$

Рассмотрим подробнее матрицу S.
Матрица S состоит из столбцов $s_i^{\uparrow}$
$$S = \begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix},$$
тогда S^{T} из строк $\vec{s}_i$
$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix}.$$
Т.к. для матрицы S выполнено $(*)$, то
$$\begin{pmatrix} s_1^{\uparrow} & s_2^{\uparrow} & \cdots & s_n^{\uparrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{pmatrix} = E,$$
откуда следует, что
$$\begin{cases} s_i s_j = 1, \forall i = j \\ s_i s_j = 0, \forall i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow s_i s_j = \delta_{ij},$$
где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, столбцы/строки матрицы S формируют ОНБ.

Если мы имеем дело с матрицами размерами 2×2, то они имеют вид:
$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Ортогональное преобразование.

Определение 2.1. Преобразование φ с матрицей A евклидового пространства $\mathcal{E}$ называется ортогональным, если оно сохранет скалярное произведение, т.е.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Также сохраняются углы и длины — геометрический смысл «движения».

Из семинара 11:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \longmapsto (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})),$$

где φ^* — сопряженное преобразование. Заменим $\mathbf{y}$ на $\varphi(\mathbf{y})$ (т.к. говорим об ортогональных преобразованиях)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y})).$$

Используя свойство линейности, перепишем равенство так

$$(\mathbf{x}, \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}) = 0.$$

Т.к. это равенство выполнено для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{y}) - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Rightarrow \varphi^*\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \Rightarrow \varphi^*\varphi = \mathrm{Id},$$

где Id — тождественное преобразование. Т.е. мы получили, что $A^*A = E$. В ОНБ $A^* = A^{\mathrm{T}}$, откуда следует, что

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}A = E},$$

т.е. ортогональное преобразование задает ортогональная матрица.

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Алексей, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK