

1. Определение линейного отображения

Определение 1.1. Пусть заданы L и \bar{L} — два линейных пространства. Отображение φ из L в \bar{L} — правило, по которому каждому вектору из L ставится в соответствие единственный вектор из \bar{L} .

Обозначение: $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$.

Определение 1.2. Сюръекция — отображение, при котором каждый элемент из \bar{L} является образом вектора из L .

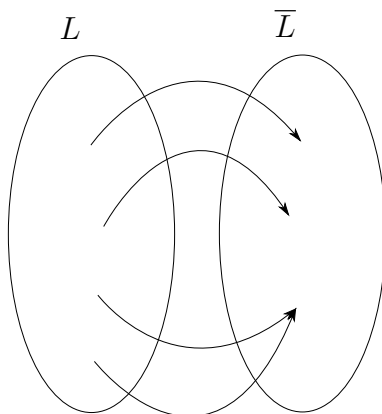


Рис. 1. Сюръективная функция

Определение 1.3. Инъекция — отображение, при котором каждый образ из \bar{L} имеет единственный прообраз в L .

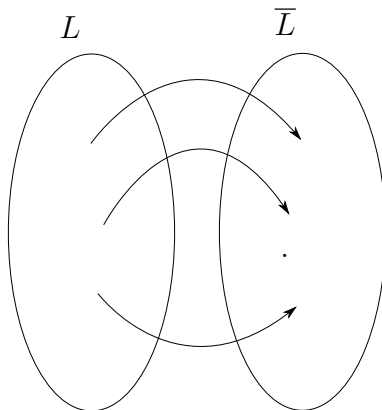


Рис. 2. Инъективная функция

Определение 1.4. Сюръекция + инъекция = **биекция** — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным (взаимно-однозначное соответствие).

Определение 1.5. Если в результате отображения $L = \bar{L}$, то такое отображение называется преобразованием.

Определение 1.6. Отображение π называется **линейным**, если выполнено:

$$\begin{cases} \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x). \end{cases}$$

Примеры:

- аффинные преобразования плоскости
- геометрия 3D (т.е. преобразования в трёхмерном пространстве: поворот, симметрия и т.д.)
- присвоение координат в линейном пространстве (пространство многочленов \rightarrow пространство столбцов т.е. координатный изоморфизм)
- умножение на матрицу, транспонирование
- дифференцирование, интегрирование (только для определённого интеграла, чтобы избежать появления константы)

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$.

Рассмотрим ЛЗ систему векторов a_1, \dots, a_n .

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Подействуем преобразованием φ :

$$\alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_n \varphi(a_n) = 0.$$

Отсюда видно, что система образов — тоже ЛЗ система векторов с теми же коэффициентами. Но для ЛНЗ системы векторов данное утверждение не верно (контрпример: нуль-преобразование).

Определение 1.7. Образ $\varphi : \text{Im } \varphi : \{\varphi(x) \in \bar{L} : x \in L\}$ — множество всех образов из L в \bar{L} .

Определение 1.8. Ядро $\varphi : \ker \varphi : \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$ — множество векторов из L , которые переходят в 0.

Определение 1.9. Ранг $\varphi : r = \dim(\text{Im } \varphi)$ — размерность образа.

Пример 1

Работаем в \mathbb{R}^3 , ОНБ, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$.

Найти φ , если φ — ортогональная проекция на:

а) $L_1 : [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$

б) $L_2 : (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$

а) $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$ — формула для проекции вектора на прямую (из аналит. геометрии).

$\ker \varphi : (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$ — плоскость, ортогональная вектору \mathbf{a} .

$\text{Im } \varphi : [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$.

$r = 1$ (прямая).

б) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{p}$

$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}$.

$\ker \varphi : [\mathbf{r}, \mathbf{n}] = 0$.

$\text{Im } \varphi : (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ (плоскость).

$r = 2$ (плоскость).

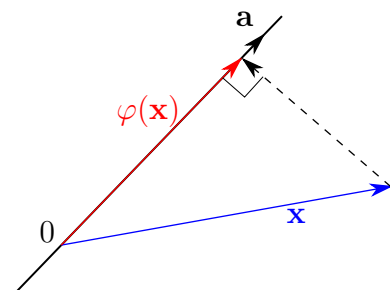


Рис. 3. К примеру 1а

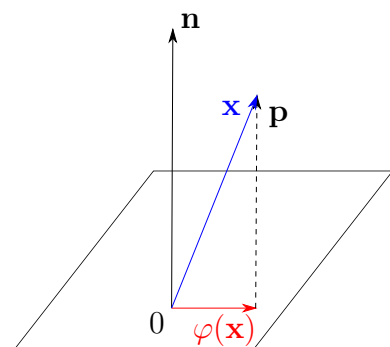


Рис. 4. К примеру 1б

2. Матрица линейного отображения

$\varphi : L \rightarrow \bar{L}, \dim L = n < \infty, \dim \bar{L} = m < \infty$

Базисы в $L : \mathbf{e}(e_1, \dots, e_n)$, в $\bar{L} : \mathbf{f}(f_1, \dots, f_m)$, $a \in L$. $\varphi(a) \in \bar{L}$.

Пусть a имеет в L координатный столбец \mathbf{x} , а $\varphi(a)$ в \bar{L} координатный столбец \mathbf{y} . Построим такую

матрицу A : $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Пусть $\mathbf{x} = e_1 : (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$.

$y = \underset{\text{в базисе } f}{\varphi(e_1)} = Ae_1 = A \cdot (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T = a_1$ — первый столбец из A . Аналогично поступим с вторым, третьим и т.д. столбцами. Тогда матрица линейного отображения A имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{array} \right) \Bigg\} m$$

В данном случае, столбцы матрицы — это координатные столбцы $\varphi(e_i)$ в базисе f т.к.:

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Поддействуем на него преобразованием φ :

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(e_n)$$

В примерах 2–5 вопрос следующий: найти A , если задано φ — преобразование \mathbb{R}^3 , в ОНБ.

Пример 2

φ — поворот вокруг e_3 на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$\underset{e_1, e_2, e_3}{L} \rightarrow \underset{e_1, e_2, e_3}{\overline{L}} \quad \text{1.}$$

$$\varphi(e_1) = e_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = -e_1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = e_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

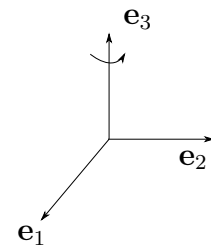


Рис. 5. К примеру 2

Для построения матрицы A нам необходимо и достаточно образов преобразования.

Пример 3

φ — ортогональное проектирование на $L : x = y = z$.

$$\underset{e_1, e_2, e_3}{L} \rightarrow \underset{e_1, e_2, e_3}{\overline{L}}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

«Прогоним» через эту формулу все базисные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(e_1) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

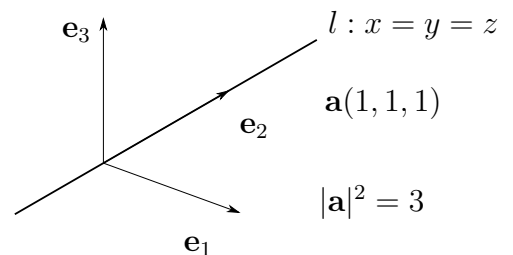


Рис. 6. К примеру 3

Пример 4

φ - отражение относительно $\alpha: 2x - 2y + z = 0$

$$\underset{e_1, e_2, e_3}{L} \rightarrow \underset{e_1, e_2, e_3}{\overline{L}}$$

$$\mathbf{n}(2; -2; 1)$$

$$|\mathbf{n}|^2 = 9$$

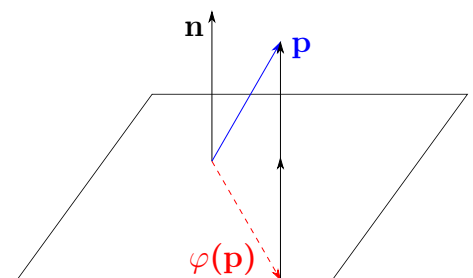


Рис. 7. К примеру 4

¹Всегда в решении задачи обязательно нужно выбрать базисы.

$$\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2 \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \varphi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & -7 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5

$$L_1 : x = 0$$

$$L_2 : 2x = 2y = -z$$

$$\begin{matrix} L & \rightarrow & \bar{L} \\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 & & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \end{matrix}$$

φ — проецирование на $L_1 || L_2$

$$L_1 : \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad L_2 : \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbf{p} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in L_1} + \underbrace{\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in L_2}$$

$$\mathbf{e}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 : \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{e}_3 : \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3.$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Понимая пример 5 как отображение, можно заметить, что $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, а значит, для описания всевозможных результатов в \bar{L} можно было выбрать базис из двух векторов.

$$f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 6

$$\varphi : \begin{matrix} L \\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{L} \\ \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4 \end{matrix}$$

$$L : \langle \underset{=e_1}{1}, \underset{=e_2}{x}, \underset{=e_3}{x^2} \rangle, \quad L : \langle \underset{=f_1}{1}, \underset{=f_2}{x}, \underset{=f_3}{x^2}, \underset{=f_4}{x^3} \rangle$$

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$$

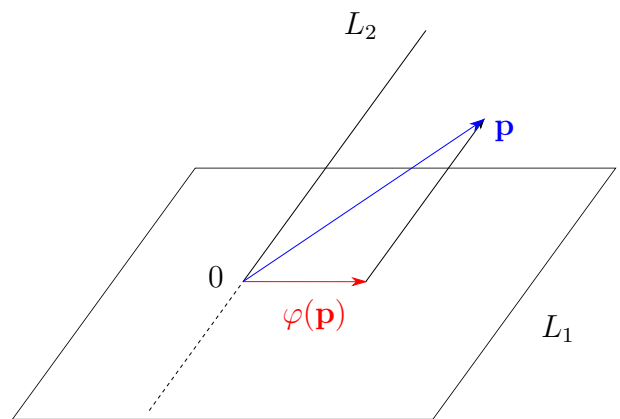


Рис. 8. К примеру 5

$$\left. \begin{aligned} \varphi(e_1) &= \int_0^x 1 dt = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) &= \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) &= \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Команда [BOTAY!](#):

Г. Демьянов, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)