

# ЛЕКЦИЯ 26

## Z-функция строки

### 1. Z-функция строки

Z-функция строки — функция от номера символа. Z-функция — это массив длины  $\text{len}(S) = N$ ,  $z[i]$  — длина совпадающего префикса у строки  $S$  и  $S[i:]$ .

$z[0]$  не определено. Но мы будем считать, что  $z[0] = 0$ .

```
"a a a a a"
z=[0, 4, 3, 2, 1]
```

```
"a b a c a b a"
z=[0, 0, 1, 0, 3, 0]
```

Зачем она нужна? Будем искать строчку  $p=aba$  и все ее вхождения в строке  $abacabadabacaba$ .  
 $s = "aba\#abacabadabacaba"$

Т.к. стоит символ  $\#$ , длина искомой не может быть больше 3.  $z = [0, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 3, 0, 1]$  Там, где  $z[i]=\text{len}(p)$ , найдена подстрока в строке.  $\text{pos} = i - \text{len}(p) - 1$  - номер вхождения.

Тривиальное вычисление Z-функции (требует  $O(N^2)$ ).

#### Программа №1.1. Тривиальное вычисление Z-функции

```
1  N = len(s)
2  z=[0]
3  left = right = 0
4  for i in range(1, N):
5      x = 0
6      while i + x < N and s[x] == s[i+x]:
7          x += 1
8      z[i] = x
9      if i + x - 1 > right: # Сохраняем z--блок
10         left, right = i, i + x - 1
```

z-блок — срез строки  $s[i:i+z[i]]$ .

На момент вычисления  $z[i]$  существует самый правый отрезок совпадения. Длина этого отрезка равна разнице его правого и левого конца + 1.

#### Программа №1.2.

```
1  N = len(s)
2  z=[0]
3  left = right = 0
4  for i in range(1, N):
5      x = min(z[i-left], right - i + 1) if i <= right else 0
6      while i + x < N and s[x] == s[i+x]:
7          x += 1
8      z[i] = x
9      if i + x - 1 > right: # Сохраняем z--блок
10         left, right = i, i + x - 1
```

Этот алгоритм работает за линейное время.

## 2. Префикс–функция строки. Алгоритм Кнута — Морриса — Пратта.

Собственным суффиксом строки называется суффикс, не совпадающий со всей строкой, совпадающий с ее префиксом.

Префикс–функция строки  $\pi[i]$  — массив длиной строки, где  $\pi[i]$  — длина наибольшего по длине собственного суффикса подстроки (среза)  $s$  начиная от начала и до позиции  $i$  ( $s[:i+1]$ ). "a a a a"  $\pi=[0, 1, 2, 3, 4]$  "abacaba"  $\pi=[0,0,1,0,1,2,3]$  Эта функция всегда растет на единицу.

### Программа №2.1. Тривиальный алгоритм

```
1  N = len(s)
2  pi = [0]*N
3  for i in range(1, N):
4      for k in range(i+1):
5          if s[0:k] == s[i-k+1:i+1]:
6              pi[i] = k
```

Асимптотика  $O(N^3)$ .

Г. С. Демьянов, [VK](#)  
С. С. Клявинек, [VK](#)  
А. С. Кожарин, [VK](#)