Семинар 8. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.

Очевидно, собственные значения не меняются при замене базиса.

Рассмотрим подробнее характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)}_{\text{только в этом члене есть } \lambda^n \text{ и } \lambda^{n-1}} + \dots + \tilde{P}(0) =$$

$$= (-1)^n\lambda^n - (-1)^n(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

Вспомним, что для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

справедлива теорема Виета, которую мы знаем еще из школы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

Обобщенная теорема Виета:

Произведение корней: $(-1)^n \cdot \frac{\{\text{свободный член}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$

Сумма корней: $-\frac{\{\text{второй коэффициент}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$

$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = (-1)^n \cdot \frac{\det A}{(-1)^n} = \det A$

$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \operatorname{tr} A$ (т.е. след матрицы A).

Т.о. оказывается , что $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ не зависят от выбора базиса.

Пример 1

Пусть A — матрица вращения $\mathbb{R}^3$. Найти угол вращения.

Решение:

Выберем ортонормированный базис так, что поворот вокруг $\mathbf{e}_3$.

В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.к. $\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha + 1 = \mathrm{const}$:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1)}$$

Пример 2

Пусть $\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n$ — собственные значения преобразования φ с матрицей A. Какие собственные значения у а) φ^2; б)φ^{-1} ?

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (*)$$

1). $\varphi^2: \ \det(A^2 - \widetilde{\lambda}E)$

$$(*)| \cdot \det(A + \lambda E) \Rightarrow \det(A - \lambda E)\det(A + \lambda E) = \det(A^2 - \lambda^2 E) = 0 \quad \Rightarrow \widetilde{\lambda} = \lambda^2$$

2). $\varphi^{-1}: \ \det(A^{-1} - \tilde{\lambda}E) = \det(A^{-1} - \tilde{\lambda}A^{-1}A) = 0$

$$\Rightarrow \det A^{-1} \cdot \det(E - \tilde{\lambda}A) = 0$$

Так как $\det A^{-1} \neq 0$ (матрица A невырожденная), то верно:

$$\det(E - \tilde{\lambda}A) = 0$$

Разделим равенство на $(-1)^n\tilde{\lambda}^n$:

$$\det(A - \frac{E}{\tilde{\lambda}}) = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

Заметим, что собственные векторы при этом не изменятся.

1. Проекторы

Пусть $L = L_1 \oplus L_2$;
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ — единственный прообраз, где $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2$

Тогда: $P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$ — проектор на $L_1 \parallel L_2$
$P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$ — проектор на $L_2 \parallel L_1$
$\operatorname{Im} P_1 = L_1$ и $\ker P_1 = L_2$
$\operatorname{Im} P_2 = L_2$ и $\ker P_2 = L_1$

$$P_1(\mathbf{x}) + P_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \ \Rightarrow \ (P_1 + P_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \ \Rightarrow \ P_1 + P_2 = \mathrm{Id}$$

Пример 3
Рассмотрим ортогональный проектор A в $\mathbb{R}^3$.
Найти собственные значения и собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
1. Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
2. Собственное значение $\lambda = 0$: собственный вектор $\{\mathbf{e}_3\}$.

Пример 4
Пусть $L = L_1 \oplus L_2$.
$\dim L = n$, $\dim L_1 = k \Rightarrow \dim L_2 = n - k$.
Найти собственные значения и собственные векторы P_1,
где P_1 — проектор $L_1 \| L_2$

Решение:
Пусть базис в L_1: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$.
Пусть базис в L_2: $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
$P_1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, P_1(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \ldots, P_1(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k$

$P_1(\mathbf{e}_{k+1}) = \dots = P_1(\mathbf{e}_n) = \mathbf{o}$
Тогда матрица преобразования будет выглядеть таким образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

1. Собственное значение $\lambda = 1$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$.
2. Собственное значение $\lambda = 0$: собственные векторы $\{\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

- Размерность образа при проектировании равна следу матрицы

$$\boxed{\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} A}.$$

Пример 5
а) Доказать, что для проектора $\varphi^2 = \varphi$.
б) Доказать, что если $\varphi^2 = \varphi$ ($\varphi \neq 0$, $\not\equiv \mathrm{Id}$), то φ — проектор на образ $\|$ ядру.

Решение:
а) Т.к. имеем дело с проектором, все пространство раскладывается на прямую сумму двух подпространств:

$$L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

Тогда, применив наше преобразование (т.е. проектор), получим:

$$\varphi(x) = P_1(x) = x_1.$$

Теперь к полученному результату применим преобразование ещё раз. Т.к. вектор $\mathbf{x}_1$ лежит в L_1, то его проекция на L_1 и есть сам вектор $\mathbf{x}_1$:

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \Rightarrow \boxed{\varphi^2 = \varphi}.$$

б) Пусть L — линейное пространство, $\varphi : \varphi^2 = \varphi$. Пусть $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\varphi$, $\mathbf{y} \in \ker\varphi$.

1. $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \ker\varphi$).
2. $\exists \mathbf{x} \in L : \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (т.к. $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\varphi$).
3. $\varphi^2(\mathbf{x}) = \varphi(\varphi(\mathbf{x})) \overset{\text{п.2)}}{=} \varphi(\mathbf{y}) \overset{\text{п.1)}}{=} \mathbf{o}$, откуда получаем, что $\mathbf{y}{=}\mathbf{o}$. Противоречие. Отсюда же следует, что

$$\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{o}\}$$

Рассмотрим подпространство L':

$$L' = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \subset L.$$

$$\dim L' = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim L.$$

Отсюда следует, что наше подпространство L' и есть линейное пространство L:

$$L' \equiv L \Rightarrow L = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi.$$

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK