Семинар 3. Линейные пространства и подпространства.

1. Определение линейного пространства

Определение 1.1. Пространство L — линейное пространство, если:

- $\forall x, y \in L : x + y \in L$
- $\forall x \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L$

$+$ 8 аксиом:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists\ o : \forall x \to x + o = x$
4. $\exists\ (-x) : \forall x \to x + (-x) = o$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
8. $\exists\ 1 : x \cdot 1 = x$

Вектор — элемент линейного пространства.

- Понятия ЛЗ и ЛНЗ со всеми вытекающими свойствами полностью из аналита.

Определение 1.2. Базис в L — конечная, упорядоченная ЛНЗ система векторов, такая что каждый вектор из L по ней раскладывается.

Если базис состоит из n векторов, то пространство называется n-мерным ($\dim L = n$).

Примеры:

- Векторы в 3^x ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Столбцы высотой n ($\dim L = n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Матрицы $m \times n$ ($\dim L = m \times n$). Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Множество функций, определённых на отрезке [0,1]
- Многочлены ($\dim L = \infty$)
- Многочлены степени $\leqslant n$ ($\dim L = n + 1$). Базис:$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

Определение 1.3. Линейное подпространство. L' — линейное подпространство в L, если:

- $\forall x, y \in L' : x + y \in L'$
- $\forall x \in L', \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in L'$

Пример: диагональные матрицы в пространстве обычных матриц.

2. Примеры

В примерах 1 — 3 вопрос следующий: является ли данное множество линейным подпространством в данном пространстве L.

Пример 1

L — множество n-мерных векторов.

а) L' — множество векторов, координаты которых равны

Да, является; $\dim L' = 1$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

б) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 0

Да, является; $\dim L' = n - 1$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

в) L' — множество векторов, сумма координат которых равна 1

Нет, не является.

Пример 2

L — множество матриц размера $n \times n$.

а) L' — матрицы с нулевой первой строкой

Да, является; $\dim L' = n^2 - n$

б) L' — множество диагональных матриц

Да, является; $\dim L' = n$

в) L' — множество верхнетреугольных матриц

Да, является; $\dim L' = \frac{n(n+1)}{2}$ (т.е. $(1 + 2 + \cdots + n)$)

г) L' — множество вырожденных матриц

Нет, не является; $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Пример 3

L — множество функций, определенных на отрезке [0,1].

а) L' — множество функций, ограниченных на отрезке [0,1]

Да, является.

б) L' — множество строго монотонных функций

Нет, не является.

в) L' — множество строго возрастающих функций

$0 \cdot x = 0 \Longrightarrow$ нет, не является.

3. Примеры и способы задания линейных подпространств

0 — тоже линейное пространство

Определение 3.1. Линейная оболочка векторов $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ($< a_1, a_2, \cdots, a_k >$) — всевозможные линейные комбинации этих векторов:

$$< a_1, a_2, \cdots, a_k >= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \lambda_i \in R \right\}$$

Пример 4
Найти размерность и базис линейной оболочки

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

Т.к. $\dim L' = \operatorname{Rg} A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-(1),\,(4)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$(3) = (4) \Rightarrow (4)$ вычеркиваем!

$\dim L' = 3$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пример 5
(условие — см. пример 4)

$$< \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} >$$

Задача не изменится, если взять

$$< \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Т.к. строка (3) ЛНЗ ((1)-2(2)=(3)), ее можно вычеркнуть.

$\dim L' = 2$, базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пример 6
Доказать, что матрицы A, B, C, D образуют базис в пространстве матриц 2×2 и найти координаты вектора F в этом базисе.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Если A, B, C, D — базис, то $\exists!\ x_1, x_2, x_3, x_4$:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = F,$$

что эквивалентно СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 5 \\ -x_1 & +5x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 14 \\ x_1 & +x_2 & & +5x_4 & = 6 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +7x_4 & = 13 \end{cases}$$

Решая эту СЛУ, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Т.о., решив систему, убедились в единственности решения (факт базиса).

Пример 7

Найти размерность и базис линейной оболочки.

$$< (1+t)^3, t^3, t+t^2, 1 >$$

Стандартный базис многочлена: $\{1, t, t^2, t^3\}$. Тогда координаты наших векторов в стандартном базисе есть:

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Тогда запишем матрицу, аналогично примеру 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 строка ЛНЗ, ее можно вычеркнуть. Тогда

$$\dim L' = 3, \text{ базис: } \left\{t^3, t^2+t, 1\right\}.$$

Пример 8

Доказать, что

$$1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \ldots, (t-\alpha)^n$$

— базис в пространстве многочленов, степени не выше n. Найти в этом базисе разложение $P_n(t)$. Ответ на эту задачу дал математик Брук Тейлор:

$$P_n(t) = P_n(\alpha) + \frac{1}{1!}P'(\alpha)(t-\alpha) + \cdots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(\alpha)(t-\alpha)^n$$

Т.к. данное разложение $\exists!$, это базис. Запишем коэффициенты разложения:

$$\begin{pmatrix} P_n(\alpha) \\ \frac{1}{1!}P'_n(\alpha) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Пример 9
Найти размерность и базис подпространства, заданного в виде $Ax = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решения однородной системы образуют линейные подпространства.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Алгоритм Гаусса}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
Отсюда, получаем линейную оболочку:

$$< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >, \qquad \dim L' = 2$$

Столбцы этой линейной оболочки будут являться базисом в этом линейном подпространстве.
Пример 10
Задать подпространство в виде однородной системы

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Задача по сути является задачей из прошлого семинара:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 3 & -1 & x_3 \\ 4 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -5x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -2x_2 - x_2 + x_4 \end{array}\right)$$
Для того, чтобы система была совместной, требуется равенство 0 последних двух строк. Отсюда ответ:
$$\begin{cases} -5x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

Команда BOTAY!:
Г. Демьянов, VK
Г. Мадина, VK
К. Ксения, VK