

# Семинар 10. Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства.

## 1. Критерий Сильвестра

### 1.1. Положительно и отрицательно определенные функции

Квадратичная функция называется **положительно определенной**, если для любого вектора  $x \neq 0$ , верно:  $k(x) > 0$ . Например, функция  $\mathbf{k}(x) = x_1^2 + 4x_2^2$ .

Квадратичная функция называется **отрицательно определенной**, если для любого вектора  $x \neq 0$ , верно:  $k(x) < 0$ . Например, функция  $\mathbf{k}(x) = -2x_1^2 - x_2^2$ .

Важной является следующая задача: определить, является ли квадратичная функция положительно определенной. Мы уже можем дать ответ на этот вопрос. Для этого можно привести функцию к каноническому виду, и в случае если на диагонали находятся только «+1», дать утвердительный ответ, иначе дать отрицательный ответ. Однако, оказывается, что для того, чтобы выяснить положительную определенность функции необязательно приводить ее к каноническому виду. Ответ на поставленный вопрос дает критерий Сильвестра.

### 1.2. Критерий Сильвестра

**Теорема 1.1** (Критерий Сильвестра). *Для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы миноры ее матрицы удовлетворяли неравенствам:*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

*Миноры в левой части называются главными минорами матрицы.*

*Доказательство. Центральный тезис:* при методе элементарных преобразований главные миноры в процессе не меняются в силу свойств детерминанта.

*Необходимость:* в диагональном виде все диагональные элементы положительны, поэтому в исходном виде  $M_k > 0$ .

*Достаточность:* Докажем по индукции. Для первого элемента:  $M_1 > 0 \Rightarrow \beta_{11} = \varepsilon_1 > 0$ . Тогда на  $k$ -ом шаге:

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & \cdots & 0 & O \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \varepsilon_k & \\ \hline & & O & C_k \end{array} \right)$$

В таком виде  $\varepsilon_{k+1} = \frac{M_{k+1}}{M_k} > 0$ , т.к.  $M_{k+1} > 0$  и  $M_k > 0$ . □

#### Пример 1

Является ли квадратичная функция  $\mathbf{k}(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$  положительно определенной?

*Решение:*

Матрица квадратичной функция:  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .



Иначе говоря:

$$\Delta_1 = -\beta_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & -\beta_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

Опираясь на свойства детерминанта (вынесем минус из каждой строки, всего  $k$  раз, где  $k$  – порядок минора), перепишем последнее:

$$\Delta_1 = \beta_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \dots$$

Таким образом, доказали важное следствие критерия Сильвестра: для отрицательной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались, начиная со знака « $-$ ».

С целью не забыть, с какого знака начинается чередование, полезно помнить, квадратичная функция с матрицей  $E$  (где  $E$  – единичная матрица) положительно определена, а квадратичная функция с матрицей  $-E$  отрицательно определена.

## 2. Евклидовы пространства

### 2.1. Определения

**Определение 2.1.** Линейное пространство  $\mathcal{E}$  называется евклидовым, если на нем задано скалярное произведение.

**Определение 2.2.** Скалярное произведение в вещественном линейном пространстве  $L$  ставит в соответствие число, обозначаемое  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , таким образом, что для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  и чисел  $\alpha, \beta$  выполнены следующие условия:

- 1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- 2)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ .
- 3)  $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .
- 4)  $\forall \mathbf{x} \neq 0 \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ .

Видно, что «школьное» скалярное произведение подходит. Иначе говоря, задана *положительно определенная квадратичная форма*.

#### Пример 5

Является ли в пространстве многочленов степени  $\leq n$  скалярным произведением

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

*Решение:*

Проверим условия, определенные для скалярного произведения:

- 1)  $p \cdot q = q \cdot p$ .
- 2, 3) Определённый интеграл обладает свойствами линейности.
- 4) Если  $p(t) \not\equiv 0$  на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \int_{-1}^1 p^2(t)dt,$$

$p^2(t)$  — четная функция. Значение этого интеграла — площадь подграфика. Т.к.  $p(t) \neq 0$ , эта площадь не отрицательна  $\Rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}) > 0$ .

Таким образом, так действительно определено скалярное произведение в пространстве многочленов.

## 2.2. Матрица Грама

Выберем базис  $\mathbf{e} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \}$ . Тогда  $\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{y} \equiv \boldsymbol{\eta}$  — координаты векторов  $x, y$  в базисе  $e$ . Вспомним, что тогда скалярное произведение запишется так:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi} \Gamma \boldsymbol{\eta},$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

— матрица Грама.

### Пример 6

Найти проекцию  $\mathbf{x}$  на подпространство  $U$ . (Здесь  $\Gamma = E$ )

$$U: \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \right\rangle, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = ?$$

Решение:

#### Первый способ:

$$\mathbf{x} = \underbrace{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}}_{\in \mathbf{a}} + \underbrace{\mathbf{c}}_{\in \mathbf{b}}, \text{ причем } \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}.$$

Домножим это выражение скалярно на  $\mathbf{a}$  и на  $\mathbf{b}$  и составим систему:

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha |\mathbf{a}|^2 + \beta (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 0 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta |\mathbf{b}|^2 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3\alpha + 3\beta \\ 0 = 3\alpha + 6\beta \end{cases}$$

Отсюда  $\alpha = 2, \beta = -1$ . Искомая проекция равна:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### Второй способ:

Как было показано выше, в ОНБ проекция вектора равна сумме проекций на каждый из базисных векторов. Однако в случае произвольного базиса это не так:

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{x}} \neq \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} + \text{Пр}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{x}} \text{ — не работает, если } \mathbf{a} \not\perp \mathbf{b} !$$

Было бы здорово, если бы в  $U$  был базис  $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$  такой, что  $\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}'$ , тогда соотношение будет работать. Для этого ортогонализируем базис:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \text{Пр}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, в  $U$  мы нашли новый базис:  $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Здесь уже можем пользоваться приведенным соотношением для нахождения проекции:

$$\text{Pr}_U^{\mathbf{x}} = \text{Pr}_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{x}} + \text{Pr}_{\mathbf{b}'}^{\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a}')}{|\mathbf{a}'|^2} \mathbf{a}' + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{b}')}{|\mathbf{b}'|^2} \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Замечание.* Хотя мы и нашли новый базис, координаты векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  все ещё выражены в старом базисе, а поэтому и скалярное произведение мы считаем, используя матрицу Грама в старом базисе.

Команда [BOTAY!](#):

Д. Георгий, [VK](#)

К. Ксения, [VK](#)

Г. Мадина, [VK](#)

С. Паша, [VK](#)

М. Матвей, [VK](#)