

Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1

$\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу линейного преобразования A .

Запишем базисы:

$$M_{2 \times 2} : \mathbf{e} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_{2 \times 1} : \mathbf{f} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ c + 4d \end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис \mathbf{e} :

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрение ядра и образа

$$\text{Рассмотрим } \varphi : \underset{\dim L=n}{L} \rightarrow \underset{\dim \bar{L}=m}{\bar{L}}.$$

$$\text{Ядро: } \ker \varphi : \{ \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o} \}$$

Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim \ker \varphi = n - \text{Rg } A}. \quad (1)$$

$$\text{Образ } \text{Im } \varphi : \{ \mathbf{y} \in \bar{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \}.$$

Аналогично $\text{Im } \varphi \in \bar{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 &= A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ A\alpha\mathbf{x} &= \alpha A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Выберем в L базис $\mathbf{e} : \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$.

$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием φ »)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1 \underset{=\mathbf{a}_1}{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \dots + \alpha_n \underset{=\mathbf{a}_n}{\varphi(\mathbf{e}_n)} = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle.$$

Заметим, что $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A . Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A = r}. \quad (2)$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n}. \quad (3)$$

$$\text{В примерах 2–5: } L = \mathbb{R}^4, \bar{L} = \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2

$$\text{Найти образ } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу A и вектор \mathbf{x} .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o} \Rightarrow \text{ядро не пусто.}$$

Пример 3

Найти прообраз $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчеркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно \mathbf{x} . Решим ее.