Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1

$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования A.

Запишем базисы:

$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$

$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$.

Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b \\ c+4d \end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:

$\varphi(e_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(e_2) = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(e_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(e_4) = \left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right)$.

Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.

Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$

Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}.$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Команда BOTAY!:
Г. Демьянов, VK
Г. Мадина, VK
К. Ксения, VK