Семинар 10. Критерий Сильвестра. Евклидовы пространства.

Определение 0.1. Ортонормированный базис — базис, в котором

$$(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma = E$, $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta}$.

Определение 0.2. Рассмотрим подпространство $U \in E$. Тогда $U^{\perp}$ называется ортогональным дополнением подпространства U, если

$$U^{\perp} : \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \perp U\}, \text{ т.е. } \mathbf{y} \perp \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in U, U \oplus U^{\perp} = \mathcal{E}$$

Пример 1
Дано U. Найти $U^{\perp}$ в $\mathcal{E}^3$.

Решение:
$\Gamma = E$; $U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$; $\quad U^{\perp} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$;

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + y_3 = 0; \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0; \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow U^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Почему ортогональное дополнение?
$\underset{k}{U} \oplus \underset{n-k}{U}^{\perp} = \underset{n}{\mathcal{E}}$

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK