Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1

$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования A.

Запишем базисы:

$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$

$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+4b\\ c+4d\end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right)$.

Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.

Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$

Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}. \tag{1}$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Выберем в L базис $\mathbf{e} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием φ»)

$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1\underset{=\mathbf{a}_1}{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \cdots + \alpha_n\underset{=\mathbf{a}_2}{\varphi(\mathbf{e}_n)} = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\rangle$.

Заметим, что $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A. Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A = r}. \tag{2}$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n}. \tag{3}$$

В примерах 2–5: $L = \mathbb{R}^4, \overline{L} = \mathbb{R}^3, A = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)$.

Пример 2

Найти образ $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу A и вектор $\mathbf{x}$.

$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \mathbf{o} \Rightarrow$ ядро не пусто.

Пример 3
Найти прообраз $\mathbf{y} = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$.
Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчёркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно $\mathbf{x}$. Решим ее.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Линейные функции

Функция $f(x)$ на линейном пространстве L — правило, которое $\forall x \in L$ ставит в соответствие $f(x) \to \mathbb{R}$.

Функция f линейная, если

$$\begin{cases} f(x+y) & = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) & = \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при $m = 1$.
Примеры:
а) Присвоить вектору его i-тую координату.
б) Скалярное произведение **(x, a)**, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.
в) Определённый интеграл.

$\underset{1\times n}{A}$ - строка функции $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$, где φ_i — образ i-го базисного вектора (т.е. $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$)

Линейные функции образуют линейное пространство.

Пример 4
Может ли $\forall x \in L$ выполняться:
а) $f(x) > 0$? Ответ: нет, так как нет нуля;
б) $f(x) \geqslant 0$? Ответ: только если $f(x) \equiv 0$;
в) $f(x) = \alpha$? Ответ: только для $\alpha \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

Пример 5
$P(t)$ — многочлен степени $\leqslant n$, $f(P(t)) = P'(1)$. Найти A.
Базис: $\{1, t, \cdots, t^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) = &\ 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) = &\ 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) = &\ 2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) = &\ n \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$