Семинар 5. Линейные отображения. Часть 1.

1. Определение линейного отображения

Определение 1.1. Пусть заданы L и $\overline{L}$ — два линейных пространства. Отображение φ из L в $\overline{L}$ — правило, по которому каждому вектору из L ставится в соответствие единственный вектор из $\overline{L}$.
Обозначение: $\varphi : L \to \overline{L}$.

Определение 1.2. Сюрьекция — отображение, при котором каждый элемент из $\overline{L}$ является образом вектора из L.

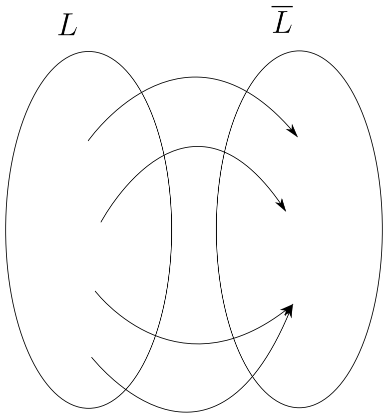

Рис. 1. Сюръективная функция

Определение 1.3. Инъекция — отображение, при котором каждый образ из $\overline{L}$ имеет единственный прообраз в L.

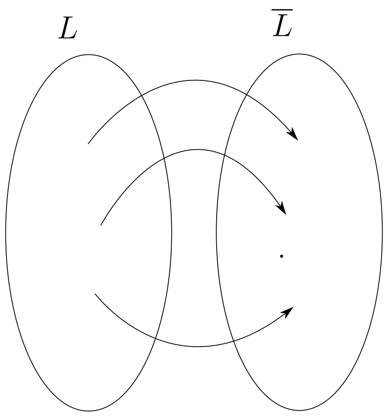

Рис. 2. Инъективная функция

Определение 1.4. Сюрьекция + инъекция = биекция — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным (взаимно–однозначное соответствие).

Определение 1.5. Если в результате отображения $L = \overline{L}$, то такое отображение называется преобразованием.

Определение 1.6. Отображение π называется линейным, если выполнено:

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x). \end{cases}$$

Примеры:
- аффинные преобразования плоскости
- геометрия 3D (т.е. преобразования в трёхмерном пространстве: поворот, симметрия и т.д.)
- присвоение координат в линейном пространстве (пространство многочленов $\to$ пространство столбцов т.е. координатный изоморфизм)
- умножение на матрицу, транспонирование
- дифференцирование, интегрирование (только для определённого интеграла, чтобы избежать появление константы)

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$.

Рассмотрим ЛЗ систему векторов $a_1, \ldots, a_n$.

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

Подействуем преобразованием φ:

$$\alpha_1 \varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(a_n) = 0.$$

Отсюда видно, что система образов — тоже ЛЗ система векторов с теми же коэффициентами. Но для ЛНЗ системы векторов данное утверждение не верно (контрпример: нуль–преобразование).

Определение 1.7. Образ $\varphi : \operatorname{Im}\varphi : \{\varphi(x) \in \overline{L} : x \in L\}$ — множество всех образов из L в $\overline{L}$.

Определение 1.8. Ядро $\varphi : \ker\varphi : \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$ — множество векторов из L, которые переходят в 0.

Определение 1.9. Ранг $\varphi : r = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$ — размерность образа.

Пример 1

Работаем в $\mathbb{R}^3$, ОНБ, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$.

Найти φ, если φ— ортогональная проекция на:

а) L_1: $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}] = \mathbf{0}$

б) L_2: $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$

а) $\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$ — формула для проекции вектора на прямую (из аналит. геометрии).

$\ker\varphi : (\mathbf{r},\mathbf{a}) = 0$ — плоскость, ортогональная вектору $\mathbf{a}$.

$\operatorname{Im}\varphi : [\mathbf{r},\mathbf{a}]=\mathbf{0}$.

$r = 1$ (прямая).

б) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{p}$

$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$.

$\ker\varphi : [\mathbf{r},\mathbf{n}]=\mathbf{0}$.

$\operatorname{Im}\varphi : (\mathbf{r},\mathbf{n}) = 0$ (плоскость).

$r = 2$ (плоскость).

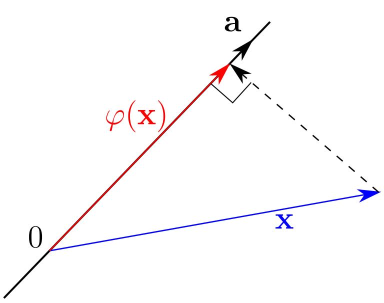

Рис. 3. К примеру 1а

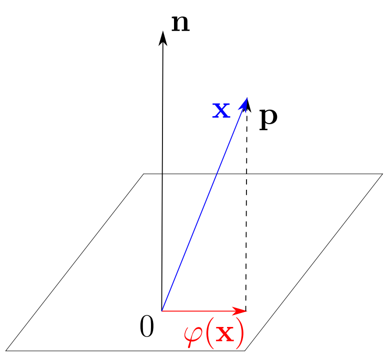

Рис. 4. К примеру 1б

2. Матрица линейного отображения

$\varphi : L \to \overline{L}, \dim L = n < \infty, \dim \overline{L} = m < \infty$

Базисы в $L : \mathbf{e}(e_1, \ldots, e_n)$, в $\overline{L} : \mathbf{f}(f_1, \ldots, f_m)$, $a \in L$. $\varphi(a) \in \overline{L}$.

Пусть a имеет в L координатный столбец $\mathbf{x}$, а $\varphi(a)$ в $\overline{L}$ координатный столбец $\mathbf{y}$. Построим такую матрицу A: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\mathbf{x}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{y}}$.

Пусть $\mathbf{x} = e_1 : (1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}}$.
$y = \underset{\text{в базисе } f}{\varphi(e_1)} = Ae_1 = A \cdot (1\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}} = a_1$ — первый столбец из A. Аналогично поступим с вторым, третьим и т.д. столбцами. Тогда матрица линейного отображения A имеет вид:

$$A = \left.\begin{pmatrix} \boxed{\varphi(e_1)} & \cdots & \boxed{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}\right\} m$$

В данном случае, столбцы матрицы — это координатные столбцы $\varphi(e_i)$ в базисе f т.к.:

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Подействуем на него преобразованием φ:

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(e_n)$$

В примерах 2–5 вопрос следующий: найти A, если задано φ — преобразование $\mathbb{R}^3$, в ОНБ.

Пример 2

φ — поворот вокруг e_3 на угол $\frac{\pi}{2}$.
$\underset{e_1,e_2,e_3}{L} \to \underset{e_1,e_2,e_3}{\overline{L}}$ [1].
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 : \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$
$\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 : \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$
$\varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 : \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

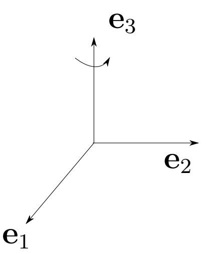

Рис. 5. К примеру 2

Для построения матрицы A нам необходимо и достаточно образов преобразования.

Пример 3

φ — ортогональное проецирование на $L : x = y = z$.
$\underset{e_1,e_2,e_3}{L} \to \underset{e_1,e_2,e_3}{\overline{L}}$
$\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$
«Прогоним» через эту формулу все базисные векторы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

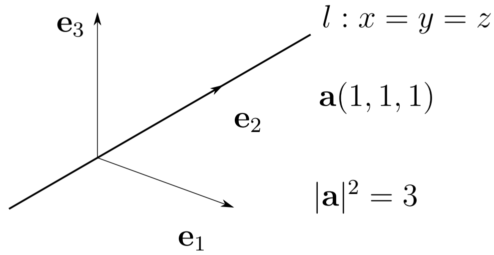

Рис. 6. К примеру 3

Пример 4

φ - отражение относительно α: $2x - 2y + z = 0$

$\underset{e_1,e_2,e_3}{L} \to \underset{e_1,e_2,e_3}{\overline{L}}$
$\mathbf{n}(2; -2; 1)$
$|\mathbf{n}|^2 = 9$

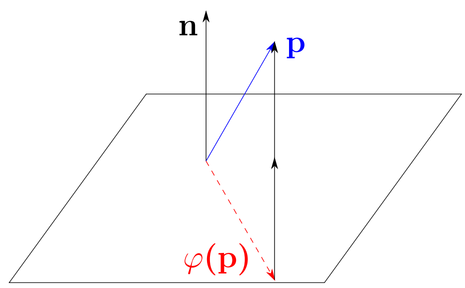

Рис. 7. К примеру 4

[1] Всегда в решении задачи обязательно нужно выбрать базисы.

$\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2\dfrac{(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{n}$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \frac{2}{9}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; $\varphi(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$;

$\varphi(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & -7 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5

$L_1 : x = 0$

$L_2 : 2x = 2y = -z$

$\underset{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3}{L} \to \underset{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3}{\overline{L}}$

φ — проецирование на $L_1 || L_2$

$L_1 : \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $L_2 : \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathbf{p} = \underbrace{\alpha \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{\in L_1} + \underbrace{\gamma \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}_{\in L_2}$

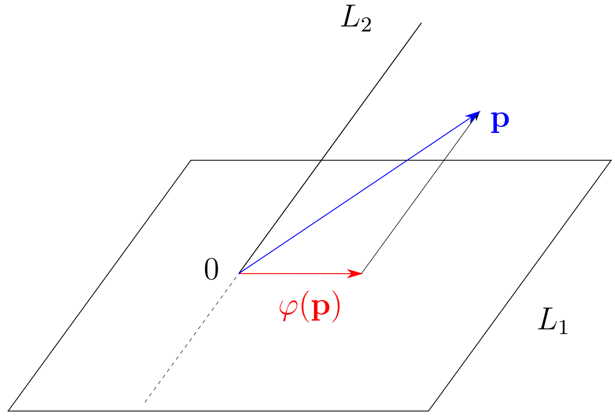

Рис. 8. К примеру 5

$\mathbf{e}_1 : \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\alpha \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{\varphi(\mathbf{e}_1)} + \gamma \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

$\mathbf{e}_2 : \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$;

$\mathbf{e}_3 : \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Понимая пример 5 как отображение, можно заметить, что $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, а значит, для описания всевозможных результатов в $\bar{L}$ можно было выбрать базис из двух векторов.

$f = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 6

$\varphi : \underset{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}{L} \Rightarrow \underset{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4}{\bar{L}}$

$L : \langle \underset{=e_1}{1}, \underset{=e_2}{x}, \underset{=e_3}{x^2} \rangle$, $L : \langle \underset{=f_1}{1}, \underset{=f_2}{x}, \underset{=f_3}{x^2}, \underset{=f_4}{x^3} \rangle$

$\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \int\limits_0^x 1dt = x \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\\
\varphi(e_2) &= \int\limits_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \frac{1}{2}\\ 0 \end{pmatrix}\\
\varphi(e_3) &= \int\limits_0^x t^2dt = \frac{x^3}{3} \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Команда BOTAY!:
Г. Демьянов, VK
Г. Мадина, VK
К. Ксения, VK