Семинар 8. Инвариантные и собственные подпространства. Часть 2.

Очевидно, собственные значения не меняются при замене базиса.

Рассмотрим подробнее характеристический многочлен.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)}_{\text{только в этом члене есть } \lambda^n \text{ и } \lambda^{n-1}} + \dots + \tilde{P}(0) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n - (-1)^n (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

Вспомним, что для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

справедлива теорема Виета, которую мы знаем еще из школы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

Обобщенная теорема Виета:
Произведение корней: $(-1)^n \cdot \frac{\{\text{свободный член}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
Сумма корней: $-\frac{\{\text{второй коэффициент}\}}{\{\text{первый коэффициент}\}}$
$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \cdot \frac{\det A}{(-1)^n} = \det A$
$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \operatorname{tr} A$ (т.е. след матрицы A).
Т.о. оказывается , что $\det A$ и $\operatorname{tr} A$ не зависят от выбора базиса.

Пример 1

Пусть A — матрица вращения $\mathbb{R}^3$. Найти угол вращения.

Решение:
Выберем ортонормированный базис так, что поворот вокруг $\mathbf{e}_3$.
В этом базисе:

Команда BOTAY!:
Д. Георгий, VK
К. Ксения, VK
Г. Мадина, VK
С. Паша, VK
М. Матвей, VK