

## Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

### Пример 1

$\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу линейного преобразования  $A$ .

Запишем базисы:

$$M_{2 \times 2} : \mathbf{e} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_{2 \times 1} : \mathbf{f} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ c + 4d \end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис  $\mathbf{e}$ :

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 1. Рассмотрение ядра и образа

$$\text{Рассмотрим } \varphi : \underset{\dim L=n}{L} \rightarrow \underset{\dim \bar{L}=m}{\bar{L}}.$$

$$\text{Ядро: } \ker \varphi : \{ \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o} \}$$

Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim \ker \varphi = n - \text{Rg } A}. \quad (1)$$

$$\text{Образ } \text{Im } \varphi : \{ \mathbf{y} \in \bar{L} : \exists \mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \}.$$

Аналогично  $\text{Im } \varphi \in \bar{L}$  формирует линейное подпространство т.к.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 &= A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ A\alpha\mathbf{x} &= \alpha A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Выберем в  $L$  базис  $\mathbf{e} : \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$ .

$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$  (это обозначение значит «подействуем преобразованием  $\varphi$ »)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1 \varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n \varphi(\mathbf{e}_n) = \langle \underset{=\mathbf{a}_1}{\alpha_1 \varphi(\mathbf{e}_1)}, \dots, \underset{=\mathbf{a}_n}{\alpha_n \varphi(\mathbf{e}_n)} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle.$$

Заметим, что  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  — столбцы матрицы  $A$ . Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A = r}. \quad (2)$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n}. \quad (3)$$

$$\text{В примерах 2-5: } L = \mathbb{R}^4, \bar{L} = \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

### Пример 2

$$\text{Найти образ } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , т.е. нужно перемножить матрицу  $A$  и вектор  $\mathbf{x}$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o} \Rightarrow \text{ядро не пусто.}$$

### Пример 3

Найти прообраз  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Итак  $\varphi: \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$ . Мы знаем то, что подчеркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно  $\mathbf{x}$ . Решим ее. Биекция = сюръекция + инъекция

$\text{Rg } A = n = m$

Т.о. биекция задаётся невырожденной матрицей. В таком случае

$$\dim L = \dim \bar{L}$$

Изоморфизм — биективное линейное отображение.

Если существует изоморфизм  $L \rightarrow \bar{L}$ , то говорят, что  $L$  и  $\bar{L}$  изоморфны.

**Теорема 1.1.**  $L$  и  $\bar{L}$  изоморфны  $\iff \dim L = \dim \bar{L}$ .

Для изоморфизма  $\exists \varphi^{-1}$  — обратное отображение, его матрица  $A^{-1}$ .

### Пример 4

Доказать, что отображение  $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$  — изоморфизм в пространстве  $P_2$  — многочленов степени не выше 2. Найти  $\varphi^{-1}$ .

Стандартный базис  $L: \{1, x, x^2\}$ , где  $\mathbf{e}_1 = 1$ ,  $\mathbf{e}_2 = x$ ,  $\mathbf{e}_3 = x^2$ .

Общий вид  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $\dim L = 3$ .

$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad \bar{L}: \{1, x, x^2\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) &= 2x + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) &= 2x^2 + 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{Rg} = 3 \Rightarrow$  изоморфизм. Найдём  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \varphi^{-1}: A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 2. Матрица отображения в новых базисах.

Пусть в  $L$  и  $\bar{L}$  выбраны базисы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ , задано отображение  $\varphi: L \rightarrow \bar{L}: A$ . Поменяем базисы:  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$ ,  $\mathbf{f}' = \mathbf{f}P$ . Найдём  $A'$ :

$$\mathbf{x} \in L, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}; \quad \mathbf{y} \in \bar{L}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

Из теории отображений:  $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$ ;  $\boldsymbol{\eta}' = A'\boldsymbol{\xi}'$ ;

Из замены базиса:  $\boldsymbol{\eta} = P\boldsymbol{\eta}'$ ;  $\boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}'$ ;

$$P\eta' = A\xi = AS\xi' \Rightarrow \eta' = P^{-1}AS\xi' = A'\xi' \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS.}$$

Если  $\varphi$  — преобразование, то  $P = S$  и  $A' = S^{-1}AS$

### Пример 5

Дано преобразование  $\varphi: A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$  в базисе  $\mathbf{e}$ . Смена базиса:  $\mathbf{e}' = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Найти  $A'$ .

Воспользуемся  $A' = S^{-1}AS$ . Посчитаем  $S^{-1}$ :

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 3. Линейные функции

Функция  $f(x)$  на линейном пространстве  $L$  — правило, которое  $\forall x \in L$  ставит в соответствие  $f(x) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  линейная, если

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при  $m = 1$ .

Примеры:

- а) Присвоить вектору его  $i$ -тую координату.
- б) Скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ , где  $\mathbf{a}$  — фиксированный вектор в  $\mathbb{R}^3$ .
- в) Определённый интеграл.

$A$  - строка функции  $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$ , где  $\varphi_i$  — образ  $i$ -го базисного вектора (т.е.  $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$ )

Линейные функции образуют линейное пространство.

### Пример 6

Может ли  $\forall x \in L$  выполняться:

- а)  $f(x) > 0$ ? Ответ: нет, так как нет нуля;
- б)  $f(x) \geq 0$ ? Ответ: только если  $f(x) \equiv 0$ ;
- в)  $f(x) = \alpha$ ? Ответ: только для  $\alpha \equiv 0$ ,  $f(x) \equiv 0$ .

### Пример 7

$P(t)$  — многочлен степени  $\leq n$ ,  $f(P(t)) = P'(1)$ . Найти  $A$ .

Базис:  $\{1, t, \dots, t^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) &= 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) &= n \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = (0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n)$$

