Семинар 6. Линейные отображения. Часть 2.

Для начала решим небольшой пример по прошлому семинару.

Пример 1

$\varphi : M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу линейного преобразования A.
Запишем базисы:
$M_{2\times 2} : \mathbf{e}\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$
$M_{2\times 1} : \mathbf{f}\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$.
Для удобства в общем виде найдём, что значит наше преобразование:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+4b\\ c+4d\end{pmatrix}.$$

Далее «прогоним» через преобразование базис $\mathbf{e}$:
$\varphi(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \quad \varphi(\mathbf{e}_4) = \left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right).$
Отсюда, получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрение ядра и образа

Рассмотрим $\varphi : \underset{\dim L = n}{L} \to \underset{\dim \overline{L} = m}{\overline{L}}$.
Ядро: $\ker\varphi : \{\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$
Очевидно, что ЛНЗ решения такого уравнения формируют ФСР, а ФСР задаёт линейное подпространство. Вспоминая количество столбцов в ФСР, легко получить формулу:

$$\boxed{\dim\ker\varphi = n - \operatorname{Rg} A}. \tag{1}$$

Образ $\operatorname{Im}\varphi : \{\mathbf{y} \in \overline{L} : \exists\mathbf{x} \in L : A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.
Аналогично $\operatorname{Im}\varphi \in \overline{L}$ формирует линейное подпространство т.к.

$$A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$
$$A\alpha\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x}.$$

Выберем в L базис $\mathbf{e} : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
$\forall \mathbf{x} \in L : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n \leftarrow \varphi$ (это обозначение значит «подействуем преобразованием φ»)
$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{a}_1} + \dots + \alpha_n\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_n)}_{=\mathbf{a}_2} = \langle\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\rangle.$
Заметим, что $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A. Отсюда следует формула:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A = r}. \tag{2}$$

Сложим формулы (1) и (2) и получим:

$$\boxed{\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n}. \tag{3}$$

В примерах 2–5: $L = \mathbb{R}^4, \overline{L} = \mathbb{R}^3, A = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)$.

Пример 2

Найти образ $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
$\varphi : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. нужно перемножить матрицу A и вектор $\mathbf{x}$.
$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \mathbf{o} \Rightarrow$ ядро не пусто.

Пример 3
Найти прообраз $\mathbf{y} = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$.
Итак $\varphi : \underline{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{y}}$. Мы знаем то, что подчёркнуто. Очевидно, что мы получили СЛУ относительно $\mathbf{x}$. Решим ее. Биекция = сюръекция + инъекция
$\operatorname{Rg} A = n = m$
Т.о. биекция задаётся невырожденной матрицей. В таком случае

$$\dim L = \dim \overline{L}$$

Изоморфизм — биективное линейное отображение.
Если существует изоморфизм $L \to \overline{L}$, то говорят, что L и $\overline{L}$ изоморфны.

Теорема 1.1. *L и $\overline{L}$ изоморфны* $\iff$ $\dim L = \dim \overline{L}$.

Для изоморфизма $\exists\ \varphi^{-1}$ — обратное отображение, его матрица A^{-1}.

Пример 4
Доказать, что отображение $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ — изоморфизм в пространстве P_2 — многочленов степени не выше 2. Найти φ^{-1}.

Стандартный базис L: $\{1, x, x^2\}$, где $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = x$, $\mathbf{e}_3 = x^2$.
Общий вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\dim L = 3$.

$$\varphi(f(x)) = 2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c), \quad \overline{L}\colon \{1, x, x^2\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2 \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_2) &= 2x + 1 \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \varphi(e_3) &= 2x^2 + 2x \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\2\end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rg} = 3 \Rightarrow$ изоморфизм. Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\varphi^{-1}\colon A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Матрица отображения в новых базисах.

Пусть в L и $\overline{L}$ выбраны базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, задано отображение $\varphi\colon L \to \overline{L} : A$. Поменяем базисы: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}P$. Найдём A':

$$\mathbf{x} \in L,\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}; \qquad \mathbf{y} \in L,\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

Из теории отображений: $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$; $\quad \boldsymbol{\eta}' = A'\boldsymbol{\xi}'$;
Из замены базиса: $\boldsymbol{\eta} = P\boldsymbol{\eta}'$; $\quad \boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}'$;

$$P\boldsymbol{\eta}' = A\boldsymbol{\xi} = AS\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boldsymbol{\eta}' = P^{-1}AS\boldsymbol{\xi}' = A'\boldsymbol{\xi}' \Rightarrow \boxed{A' = P^{-1}AS.}$$

Если φ — преобразование, то $P = S$ и $A' = S^{-1}AS$

Пример 5

Дано преобразование φ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e}$. Смена базиса: $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A'.

Воспользуемся $A' = S^{-1}AS$. Посчитаем S^{-1}:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Линейные функции

Функция $f(x)$ на линейном пространстве L — правило, которое $\forall x \in L$ ставит в соответствие $f(x) \to \mathbb{R}$.

Функция f линейная, если

$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \end{cases}$$

Это частный случай линейного отображения при $m = 1$.

Примеры:

а) Присвоить вектору его i-тую координату.

б) Скалярное произведение **(x, a)**, где **a** — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.

в) Определённый интеграл.

$\underset{1\times n}{A}$ - строка функции $A = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$, где φ_i — образ i-го базисного вектора (т.е. $\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$)

Линейные функции образуют линейное пространство.

Пример 6

Может ли $\forall x \in L$ выполняться:

а) $f(x) > 0$? Ответ: нет, так как нет нуля;

б) $f(x) \geqslant 0$? Ответ: только если $f(x) \equiv 0$;

в) $f(x) = \alpha$? Ответ: только для $\alpha \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$.

Пример 7

$P(t)$ — многочлен степени $\leqslant n$, $f(P(t)) = P'(1)$. Найти A.

Базис: $\{1, t, \cdots, t^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) = {} & 0 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) = {} & 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) = {} & 2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \varphi(\mathbf{e}_{n+1}) = {} & n \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$