Семинар 11. Евклидовы пространства. Сопряженное преобразование.

Решим пару примеров на пройденные темы.

Пример 1

Может ли данная матрица быть матрицей Грама?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Вспомним из семинара 10 свойства матрицы Грама.

- Симметричность
- Положительная определённость

Наша матрица симметрична, проверим на положительную определенность.

$M_1 = 1 \geqslant 0$

$M_2 = -3 \leqslant 0$

Матрица не положительно определена $\Rightarrow$ не матрица Грама.

Пример 2

Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}(1 \quad 0 - 2 \quad 2)^T$ на $U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \quad \Gamma = E$.

Решение:

Можно записать U как

$$U(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|0) \qquad U : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$U^{\perp} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathbf{a} = \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} + \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \text{Пр}_{U^{\perp}}^{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a},\, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

$$\text{Пр}_U^{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть дан базис $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$

Наша задача: построить отрогональный базис $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$

1. $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$
2. $\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \text{Пр}_{\mathbf{h}_1}^{\mathbf{f}_2} = \mathbf{f}_2 - \dfrac{(\mathbf{h}_1, \mathbf{f}_2)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1$
3. $\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3 - \text{Пр}_{\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle}^{\mathbf{f}_3} = \mathbf{f}_3 - \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 - \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_2|^2}\mathbf{h}_2$

Свойства:

1) Ортогональное преобразование инъективно.

Доказательство. Пусть $x \in Ker\ \varphi$, т.е. $\varphi(x) = 0$
$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ инъекция $\square$

2) Собственные значения ортогонального преобразования равны ± 1

Доказательство. $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0$
$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2 (x, x) = (x, x) \Leftrightarrow \lambda^2 = 1$ $\square$

3) Пусть подпространство $U \subset \mathcal{E}$. Если U инвариантно относительно φ, то $U^\perp$ инвариантно относительно φ

Пример 3
φ переводит столбцы матрицы A в столбцы B. Скалярное произведение стандартное. Ортогонально ли φ?

Решение:
Первый способ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \varphi(x) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, y) = 15$$

$$y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(y) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = 15$$

$$(x, x) = 65 \quad (\varphi(x), \varphi(x)) = 65$$
$$(y, y) = 5 \quad (\varphi(y), \varphi(y)) = 5$$
$\Rightarrow \varphi -$ ортогональное

Может возникнуть мысль, что достаточно проверить два соотношения из трех, однако этого оказывается недостаточно:

$$(x, z) = (x, \alpha x + \beta y) = \alpha \underline{(x, x)} + \beta \underset{\sim\sim}{(x, y)} = (\varphi(x), \varphi(z)) = (\varphi(x), \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y))$$
$$= \alpha \underset{\sim\sim}{(\varphi(x), \varphi(x))} + \beta \underline{(\varphi(x), \varphi(y))}$$

Контрпример:

$$x \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varphi(x) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, y) = 6 \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = 15$$

$$y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(y) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{но!}\ (x, x) = 8 \quad (\varphi(x), \varphi(x)) = 10$$

$$(x, x) = 65 \quad (\varphi(x), \varphi(x)) = 65$$
$$(y, y) = 5 \quad (\varphi(y), \varphi(y)) = 5$$

Длины не сохраняются $\Rightarrow$ не ортогонально!

Второй способ:

$$X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Транспонируя с обеих сторон:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Умножая второе уравнение на первое *слева*, получим

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X X^T \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Сопряжённые преобразования

Определение

Определение 2.1. Линейное преобразование евклидова пространства φ^* называется сопряжённым с преобразованием φ, если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}}$$

Пусть в базисе $\mathbf{e}$: $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}$. Матрицы преобразований φ и φ^* равны соответственно A и A^*, то есть:

$$\varphi(\mathbf{x}) = A\boldsymbol{\xi};\ \varphi^*(\mathbf{y}) = A^*\boldsymbol{\eta}$$
$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Leftrightarrow (A\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma(A^*\boldsymbol{\eta})$$
$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma A^*\boldsymbol{\eta}$$

Отбросив $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$ в обоих частях последнего равенства (т.к. данное равенство выполнено для любых $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}$), получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}\Gamma = \Gamma A^*}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$\boxed{A^{\mathrm{T}} = A^*}$$

Свойства сопряжённых преобразований

1. Характеристические многочлены совпадают.
2. Если подпространство $U \in \mathcal{E}$ инвариантно относительно φ, то его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ инвариантно относительно φ^*.

   Доказательство. (пункт 2): Возьмём произвольные $x \in U$ и $y \in U^{\perp}$.
   $\varphi(\mathbf{x}) \in U \Rightarrow (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})) \Rightarrow \varphi^*(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$, то есть $\varphi^*(\mathbf{x}) \in U^{\perp}$ □

Самосопряжённые преобразования

Определение 2.2. Линейное преобразование евклидова пространства φ называется самосопряжённым, если

$$\boxed{(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y}))}$$

В ортонормированном базисе получим:

$$A = A^{\mathrm{T}}, \text{где } A \text{ – симметрическая} \Leftrightarrow \varphi - \text{симметрическое}$$

△ Наличие пары комплексных корней в уравнении $\det(A - \lambda E) = 0$ порождает двумерное инвариантное подпространство без собственных векторов. ▲

Лемма 2.1. *Самосопряжённое преобразование φ имеет только вещественные собственные значения.*

Доказательство. Пусть есть пара комплексных корней $\Rightarrow$ существует двумерное инвариантное подпространство L' *без собственных векторов.* Для этого пространства преобразование φ задаётся:

$$\varphi(L')\colon \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \text{ причем для собственных значений } \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 = 0$
$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$
$D = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geqslant 0$
$\Rightarrow$ в этом пространстве существует собственный вектор. Противоречие. □

Лемма 2.2. *Собственные подпространства самосопряженных преобразований φ ортогональны (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны).*

Доказательство. $\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{y}) = \mu\mathbf{y} \\ \quad \lambda \neq \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y})) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}) \ominus$

$0 = (\lambda - \mu)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, что и требовалось доказать. □

Центральная теорема

Теорема 2.1. *φ — самосопряженное $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $U = U_1 \oplus ... \oplus U_n$ — сумма всех собственных подпространств. Докажем, что $U = \mathcal{E} \Leftrightarrow U^\perp = 0$

$\varphi(U^\perp)$ — самосопряженное $\overset{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ собственный вектор $\in U^\perp$, но все собственные векторы $\in U \Rightarrow U^\perp = 0 \Rightarrow U = \mathcal{E} \Rightarrow$ существует базис из собственных векторов, этот базис можно сделать. □

Этот базис можно сделать ортогональным в силу леммы 2.2.

Геометрический смысл

1) "Сжатие" вдоль перпендикулярного направления
2) Ортогональное проецирование
3) Отражение

Пример 4

В ортонормированном базисе φ задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти ОНБ из собственных векторов.

Решение:

В ОНБ: $-A = A^{\mathbf{T}} \Rightarrow \varphi$ — самосопряженное преобразование.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -3 \\ \lambda = -2 \end{array}\right.$$

$$1)\lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\rangle = \mathbf{f}_1$$

$$1)\lambda = 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = \mathbf{f}_2$$

$$\mathbf{e'}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e'}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5

В ортонормированном базисе φ задана матрица A. Найти ОНБ из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{В ОНБ} \quad A = A^{\mathbf{T}} \Rightarrow \varphi \text{ — самосопряженное}$$

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{rl} \lambda = 3 & \text{кратность } 2 \\ \lambda = -3 & \text{кратность } 1 \end{array}$$

$$1)\lambda = 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \rangle$$

$$2)\lambda = -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 : \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2 \rangle$$

$\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$

$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2,\mathbf{h}_1)}{|\mathbf{h}_1|^2}\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{h}_3 = \mathbf{f}_3$

$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$