Лекция 5

4.3. Метод бисекции

1. Описание метода. Пусть требуется с заданной точностью ε найти корень $\bar{x}$ уравнения (4.1). Отрезок локализации $[a,\ b]$ (т.е. отрезок, содержащий только один корень $\bar{x}$) будем считать заданным. Предположим, что функция f непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, т.е.

$$f(a)\, f(b) < 0. \tag{4.13}$$

Для дальнейшего будет удобно обозначить отрезок $[a,\ b]$ через $[a^{(0)},\ b^{(0)}]$. Примем за приближенное значение корня середину отрезка – точку $x^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)}) / 2$. Так как положение корня на отрезке $[a^{(0)},\ b^{(0)}]$ неизвестно, то можно лишь утверждать, что погрешность этого приближения не превышает половины длины отрезка:

$$|\, x^{(0)} - \bar{x}\, | \le (b^{(0)} - a^{(0)}) / 2.$$

Уменьшить погрешность приближения можно уточняя отрезок локализации, т.е. заменяя начальный отрезок $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ отрезком $[a^{(1)},\ b^{(1)}]$ меньшей длины. Согласно *методу бисекции (половинного деления)* в качестве $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ берут тот из отрезков $[a^{(0)}, x^{(0)}]$ и $[x^{(0)},\ b^{(0)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(1)})\, f(b^{(1)}) \le 0$. Этот отрезок содержит искомый корень. Середина полученного отрезка $x^{(1)} = (a^{(1)} + b^{(1)}) / 2$ дает теперь приближение к корню, оценка погрешности которого составляет

$$|\, x^{(1)} - \bar{x}\, | \le (b^{(1)} - a^{(1)}) / 2 = (b - a) / 2^2.$$

За очередное уточнение отрезка локализации $[a^{(2)},\ b^{(2)}]$ снова берут тот из отрезков $[a^{(1)},\ x^{(1)}]$ и $[x^{(1)},\ b^{(1)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(2)})\, f(b^{(2)}) \le 0$.

Опишем очередную $(n + 1)$-ю итерацию метода. Пусть отрезок $[a^{(n)},\ b^{(n)}]$ уже найден и вычислены значения $x^{(n)}$, $f(a^{(n)})$, $f(b^{(n)})$. Тогда производятся следующие действия:

а) Вычисляется $f(x^{(n)})$.

б) Если $f(a^{(n)})\ f(x^{(n)}) \leq 0$, то в качестве отрезка локализации $[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[a^{(n)}, x^{(n)}]$. В противном случае $f(x^{(n)})\, f(b^{(n)}) < 0$ и за $[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[x^{(n)}, b^{(n)}]$.

в) Вычисляется $x^{(n+1)} = (a^{(n+1)} + b^{(n+1)}) / 2$.

Неограниченное продолжение итерационного процесса дает последовательность отрезков $[a^{(0)}, b^{(0)}]$, $[a^{(1)}, b^{(1)}]$, …, $[a^{(n)}, b^{(n)}]$,…, содержащих искомый корень.

2. Скорость сходимости. Середина n-го отрезка – точка $x^{(n)} = (a^{(n)} + b^{(n)}) / 2$ дает приближение к корню $\bar{x}$, имеющее оценку погрешности

$$| x^{(n)} - \bar{x} | \leq (b^{(n)} - a^{(n)}) / 2 = (b - a) / 2^{n+1}. \tag{4.14}$$

Из этой оценки видно, что метод бисекции сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой q = ½. По србвнению с другими методами метод бисекции сходится довольно медленно. Однако он очень прост и непритязателен; для его применения достаточно, чтобы выполнялось неравенство (4.13), функция f была непрерывна и верно определялся ее знак. В тех ситуациях, где не нужна сверхвысокая скорость сходимости, этот метод весьма привлекателен.

3. Критерий окончания. Итерации следует вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $(b^{(n)} - a^{(n)}) < 2\varepsilon$. При его выполнении в силу оценки (4.14) можно принять $x^{(n)}$ за приближение к корню с точностью ε.

4. Влияние вычислительной погрешности. При использовании метода бисекции принципиально важно правильное определение знака функции f. В случае, когда $x^{(n)}$ попадает в интервал неопределенности корня (см. § 4.2), знак вычисленного значения $f^*(x^{(n)})$ не обязан быть верным, и последующие итерации не имеют смысла. Однако этот метод следует признать очень надежным; он гарантирует точность приближения, примерно равную радиусу интервала неопределенности $\bar{\varepsilon}$, а большего требовать и нельзя, как было отмечено ранее.

§ 4.4. Метод простой итерации

1. Описание метода. Чтобы применить метод простой итерации для решения нелинейного уравнения (4.1), необходимо преобразовать это уравнение к следующему виду:

$$x = \varphi(x). \tag{4.15}$$

Это преобразование *(приведение уравнения к виду, удобному для итераций)* можно выполнить различными способами; один из них мы рассмотрим далее. Функцию φ далее будем называть *итерационной функцией.*

Выберем каким-либо образом приближенное значение корня $x^{(0)}$ и подставим его в правую часть уравнения (4.15). Получим значение $x^{(1)} = \varphi\,(x^{(0)})$. Подставляя теперь $x^{(1)}$ в правую часть уравнения (4.15), получим $x^{(2)} = \varphi\,(x^{(1)})$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню, вычисляемых по формуле

$$x^{(n+1)} = \varphi\,(x^{(n)}),\ n \geq 0. \tag{4.16}$$

Очевидно, что метод простой итерации − одношаговый.

Если существует предел построенной последовательности $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$, то, переходя к пределу в равенстве (4.16) и предполагая функцию φ непрерывной, получим равенство

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}). \tag{4.17}$$

Это значит, что $\bar{x}$ – корень уравнения (4.15).

2.Геометрическая иллюстрация. Из рис. 4.1 видно, что корень $\bar{x}$ уравнения (4.15) является абсциссой точки пересечения графиков двух функций: $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Возьмем некоторое начальное приближение $x^{(0)}$, которому отвечает расположенная на кривой $y = \varphi(x)$ точка $M^{(0)}$ с координатами ($x^{(0)}$, $x^{(1)}$) (напомним, что $x^{(1)} = \varphi\,(x^{(0)})$). Соединим точку $M^{(0)}$ отрезком прямой $y = x^{(1)}$ с лежащей на прямой $y = x$ точкой $N^{(1)}$ с координатами $\left(x^{(1)}, x^{(1)}\right)$. Проведем теперь через точку $N^{(1)}$ прямую $x = x^{(1)}$ до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$ в точке $M^{(1)}$ с координатами $\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$.

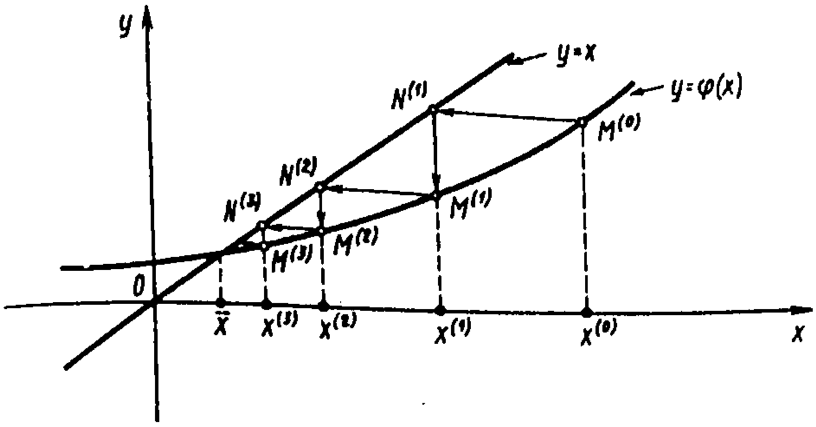

Рис. 4.1

Продолжая этот процесс далее, получаем ломаную линию $M^{(0)}N^{(1)}M^{(1)}N^{(2)}\ \ M^{(2)}N^{(3)}\ldots$, для которой абсциссы точек $M^{(n)}$ представляют собой последовательные приближения к решению $\bar{x}$.

3.Сходимость метода. На рис. 4.2, *а–г* представлена геометрическая иллюстрация поведения итерационного процесса в четырех простейших случаях взаимного расположения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$.

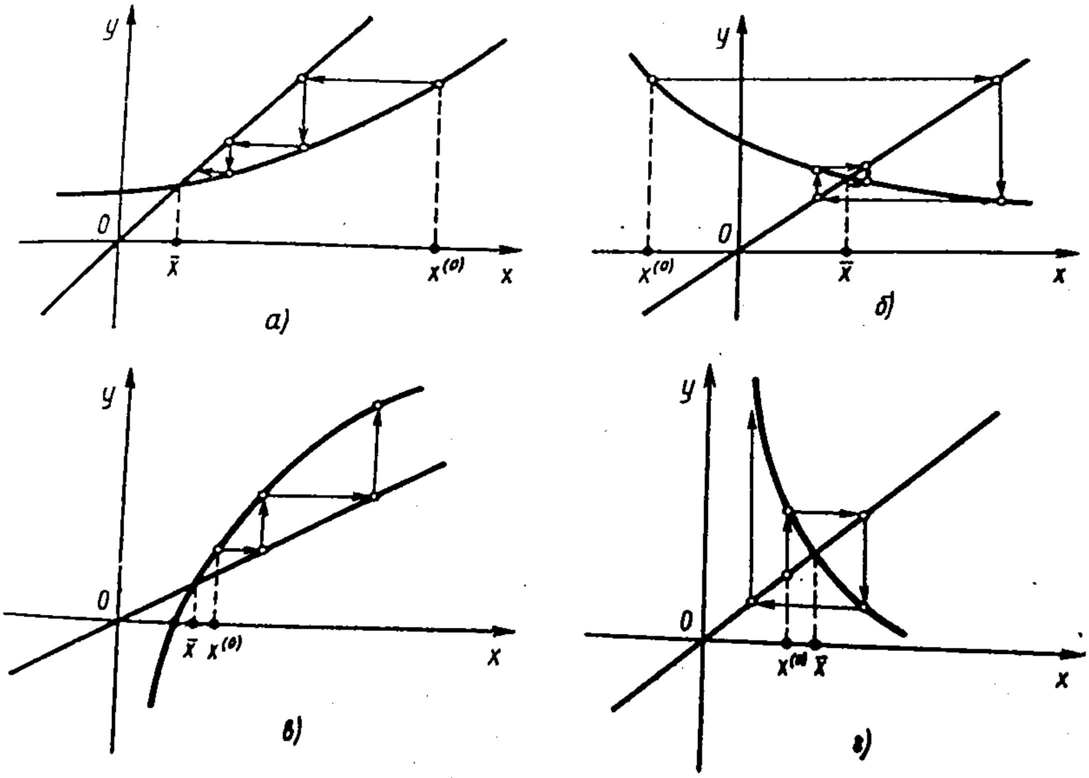

Рис. 4.2

В случаях *(а)* и *(б)* метод простой итерации сходится, причем, как нетрудно заметить, – при произвольном начальном приближении. Напротив, в случаях *(в)* и *(г)* метод расходится при любом выборе начального приближения. Заметим, что в случаях *(а)* и *(б)* $|\varphi'(x)| < 1$, а в случаях *(в)* и *(г)* наоборот, $|\varphi'(x)| > 1$. Таким образом, можно предположить, что сходимость метода простой итерации связана с выполнением условия $|\varphi'(x)| < 1$. Действительно, имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть в некоторой σ-окрестности корня* $\bar{x}$ *функция* φ *дифференцируема и удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi'(x)| \leq q, \tag{4.18}$$

где $0 \leq q < 1$*– постоянная.*

Тогда независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$ *из указанной σ-окрестности корня* $\bar{x}$ *итерационная последовательность не выходит за пределы этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии и справедлива следующая оценка погрешности:*

$$|x^{(n)} - \bar{x}| \leq q^n |x^{(0)} - \bar{x}|. \tag{4.19}$$

□ Вычитая из равенства (4.16) равенство (4.17) и используя формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$|x^{(n+1)} - \bar{x}| = \varphi(x^{(n)}) - \varphi(\bar{x}) = \alpha^{(n+1)}(x^{(n)} - \bar{x}). \tag{4.20}$$

Здесь $\alpha^{(n+1)} = \varphi'(\xi^{(n)})$, где $\xi^{(n)}$ – некоторая точка, расположенная между $x^{(n)}$ и $\bar{x}$. Если $x^{(n)} \epsilon (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$, $|\alpha^{(n+1)}| \leq q$ в силу условия (4.18). Тогда на основании равенства (4.20) получаем

$$|x^{(n+1)} - \bar{x}| \leq q\, |x^{(n)} - \bar{x}|.$$

Это означает, что метод простой итерации обладает линейной скоростью сходимости и поэтому доказательство теоремы завершается применением леммы 4.1. ■

Оценка погрешности (4.19) является априорной. Априорные оценки погрешности позволяют еще до вычислений дать некоторое заключение о качестве метода. В данном случае она показывает, что метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q. Чем меньше q, тем выше скорость сходимости. Видна и роль правильного выбора начального приближения: чем меньше погрешность начального приближения, тем меньше итераций потребуется сделать для достижения заданной точности ε.

Неравенство (4.19) используется для теоретических оценок метода и практически непригодно для практической оценки погрешности. Это связано с тем, что значение $\bar{x}$, входящее в правую часть оценки, неизвестно. Кроме того, использование неравенства (4.19) приводит к существенно завышенной оценке погрешности.

4.Критерий окончания. Выведем апостериорную оценку погрешности, пригодную для практического применения.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.2 и* $x^{(0)} \epsilon (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$. *Тогда верна следующая апостериорная оценка погрешности:*

$$|x^{(n)} - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|, \; n \ge 1. \qquad (4.21)$$

□ В силу равенства (4.20) имеем

$$x^{(n)} - \bar{x} = \alpha^{(n)}(x^{(n-1)} - \bar{x}) = \alpha^{(n)}(x^{(n-1)} - x^{(n)}) + \alpha^{(n)}(x^{(n)} - \bar{x})$$

Отсюда

$$x^{(n)} - \bar{x} = \frac{\alpha^{(n)}}{1-\alpha^{(n)}} (x^{(n-1)} - x^{(n)}). \qquad (4.22)$$

Взяв модуль от левой и правой частей этого равенства и воспользовавшись неравенством $\left| \frac{\alpha^{(n)}}{1-\alpha^{(n)}} \right| < \frac{q}{1-q}$, получим требуемое соотношение (4.21). ■

Если величина q известна, то неравенство (4.21) дает эффективный метод контроля погрешности и можно сформулировать следующий критерий окончания итерационного процесса: вычисления следует вести до выполнения неравенства $\frac{q}{1-q} | x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon$ или равносильного ему неравенства

$$| x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon. \qquad (4.23)$$

Если это условие выполнено, то можно считать, что $x^{(n)}$ является приближением к $\bar{x}$ с точностью ε.

Использование критерия (4.23) предполагает знание величины q, входящей в условие (4.18). Однако далеко не всегда эта величина известна либо может быть легко вычислена. В тех же случаях, когда удается оценить величину q, эта оценка оказывается довольно грубой.

Исключим из критерия окончания итераций величину q. Заметим, что в малой окрестности корня величина производной φ' практически постоянна: $\varphi'(x) \approx \varphi'(\bar{x})$. Поэтому в равенстве (4.22) величину $\alpha^{(n)} = \varphi'(\xi^{(n-1)})$ можно приближенно заменить на $\varphi'(\bar{x})$. Далее в силу равенства

$$x^{(n)} - x^{(n-1)} = \varphi(x^{(n-1)}) - \varphi(x^{(n-2)}) =$$
$$= \varphi'(\tilde{\xi}^{(n)})\,(x^{(n-1)} - x^{(n-2)}), \tag{4.24}$$

где $\tilde{\xi}^{(n)}$ – промежуточная между $x^{(n-1)}$ и $x^{(n-2)}$ точка, имеем
$\tilde{\alpha}^{(n)} = (x^{(n)} - x^{(n-1)}) / (x^{(n-1)} - x^{(n-2)}) = \varphi'(\tilde{\xi}^{(n)}) \approx \varphi'(\bar{x})$.

Таким образом, в равенстве (4.22) можно положить $\alpha^{(n)} \approx \tilde{\alpha}^{(n)}$ и поэтому при определенных условиях можно использовать следующий практический критерий окончания итерационного процесса:

$$|\, x^{(n)} - x^{(n-1)} | < \left| \frac{1-\tilde{\alpha}^{(n)}}{\tilde{\alpha}^{(n)}} \right| \varepsilon \tag{4.25}$$

5.Приведение уравнения к виду, удобному для итераций. Ключевой момент в методе простых итераций – эквивалентное преобразование уравнения (4.1) к виду (4.15). Конечно, такое преобразование имеет смысл только тогда, когда оказывается выполненным условие (4.18) при $0 < q < 1$. Рассмотрим один из простых способов такого преобразования.

Предположим, что производная f' на отрезке $[a,\ b]$ непрерывна и положительна. Тогда существуют постоянные m и M такие, что $0 < m \le f'(x) \le M$, $x \in [a, b]$. Приведем уравнение (4.1) к виду

$$x = x - \alpha f(x), \quad \text{где } \alpha > 0. \tag{4.26}$$

В этом случае итерационная функция φ имеет вид $\varphi(x) = x - \alpha f(x)$. Как выбрать α, чтобы выполнялось условие (4.18), причем q было бы по возможности минимальным?

Заметим, что $1 - \alpha M \le \varphi'(x) = 1 - \alpha f'(x) \le 1 - \alpha m$ и поэтому $|\varphi'(x)| \le q(\alpha) = max\,\{|1 - \alpha M|, |1 - \alpha m|\}$. Для того, чтобы было выполнено неравенство $q(\alpha) < 1$, достаточно взять любое $\alpha \in (0, 2/M)$. Конкретный выбор параметра α зависит от наличия информации о числах m и M. Если известны обе эти величины, то лучшим является выбор $\alpha = \alpha_0 = 2/(M + m)$. В этом случае $q(\alpha_0) = (M - m)/(M + m)$. Если же известно только M, то можно положить $\alpha = \alpha_1 = 1/M$. В этом случае $q(\alpha_1) = 1 - \frac{m}{M}$.

З а м е ч а н и е. Случай, когда производная f' отрицательна, сводится к рассмотренному выше умножением уравнения $f(x)=0$ на -1.