Лекция 1

Тема 1. Введение

§1. Предмет вычислительной математики

В течение большей части истории развития математики главные усилия математиков были направлены на создание строгой логической базы математических методов, расширение множества объектов, к которым эти методы применимы, изучение качественной природы математических объектов. Гораздо меньше внимания уделялось разработке методов доведения математических исследований до числового результата, а это зачатую является интересной, трудной и чрезвычайно важной для практики задачей.

В самых разнообразных областях современной науки и техники приходится встречаться с такими математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами (как говорят – на кончике пера) или же решение может быть получено в таком сложном виде, который совершенно неприемлем для практического использования. Так, например, очень часто приходится встречаться с необходимостью решения систем линейных алгебраических уравнений с десятками и сотнями неизвестных, с задачей отыскания корней алгебраических уравнений высоких степеней и корней трансцендентных уравнений, с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений, которые не интегрируются в элементарных функциях и т.д.

Количество задач такого рода особенно сильно возросло в связи с бурным развитием вычислительной техники. Новые вычислительные средства сделали возможным решение задач, ранее нерешаемых. Возникла также необходимость пересмотреть существующие вычислительные методы с точки зрения реализации их на новых вычислительных средствах.

По этим причинам сложилась новая область математики, которая призвана разрабатывать методы доведения до числового результата решений основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств. Эта область и получила название *вычислительной математики*.

§2. Метод и задачи вычислительной математики

Круг задач, с которыми приходится иметь дело в вычислительной математике, очень широк. Разнообразны и методы, применяемые для решения этих задач. Однако можно заметить одну общую идею этих методов. Эта идея проще всего выражается в терминах функционального анализа. Поэтому мы введем предварительно некоторые важнейшие понятия функционального анализа.

1. Функциональные метрические пространства. Основным предметом исследования в классическом математическом анализе является числовая функция. С появлением понятия функции одной и нескольких переменных, функции точки в евклидовом пространстве начался современный этап развития математики. Начиная с работ Ньютона и Лейбница и до конца XIX века подавляющее большинство математических исследований так или иначе было связано с этим понятием. Главным предметом изучения были числовые функции и их системы, заданные в n-мерной области, т.е. на некотором множестве n-мерного евклидова пространства.

Двадцатый век внес много нового в эту картину. Особо важную роль начинают играть понятия о функциональных множествах, о функциональных пространствах и функциональных операторах, т.е. о функциях, аргументами и значениями которых являются элементы функциональных пространств. Вместо евклидовых пространств рассматриваются абстрактные пространства, элементы которых могут иметь самую различную природу. Так, например, вводится понятие *метрического пространства* R как абстрактного множества, для любых двух элементов x и y которого определено понятие расстояния $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда x совпадает с y.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3. ρ(*x, y)* ≤ ρ(*x, z)* + ρ(*z, y)* для любых трех элементов *x, y, z*, принадлежащих *R* (аксиома треугольника).

Евклидовы пространства с обычным определением расстояния удовлетворяют всем этим условиям. Но могут быть и другие метрические пространства.

Так, рассмотрим множество всевозможных непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Для любых двух таких функций *x(t)* и *y(t)* определим расстояние ρ(*x, y)* равенством:

ρ(*x, y) = max* | *x(t) – y(t)* | по всем значениям аргумента *t* ϵ *[a, b]* *(1.1)*

Нетрудно проверить, что так определенное расстояние удовлетворяет всем трем поставленным выше условиям. Таким образом, мы получили функциональное метрическое пространство, которое обычно называют пространством $C[a, b]$ – пространством функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Другим важным классом функциональных пространств являются пространства L_p. (Здесь $p \geq 1$ – действительное число*).* Говорят, что непрерывная на [a, b] функция *f(t)* принадлежит L_p, если суммируема $|f(t)|^p$, т.е. $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$. Две функции *x(t)* и *y(t),* принадлежащие L_p, считаются эквивалентными, если они могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль (т.е. не более чем в счетном числе точек, которые можно пронумеровать множеством натуральных чисел). Расстояние ρ(*x, y)* в пространстве L_p определяется следующим образом:

$$\rho(x,y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\right]^{1|p} \qquad (1.2)$$

Так определенное расстояние удовлетворяет всем трем поставленным выше условиям.

В каждом метрическом пространстве можно говорить об окрестности данной точки. Назовем *ε – окрестностью точки x* некоторого метрического пространства *R* совокупность его точек *y,* для которых выполняется неравенство

$$\rho(x,y) < \varepsilon \qquad (1.3)$$

В пространстве $C[a, b]$ это будет совокупность всех непрерывных на $[a, b]$ функций, лежащих в полосе $x(t) \pm \varepsilon$.

В пространстве L_p это будет совокупность всех функций, принадлежащих L_p, для которых

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt < \varepsilon^p. \qquad (1.4)$$

При этом в отдельных точках отклонение $y(t)$ от $x(t)$ может быть очень большим, а зато в других точках будет очень малым.

В вычислительной математике часто приходится заменять одну функцию $x(t)$ другой функцией, более удобной для вычислительных целей и в каком-то смысле близкой к первой. Обычно эту вторую функцию берут в некоторой *ε-окрестности* первой. Если *ε-окрестность* берется в пространстве $C[a, b]$, то говорят о *равномерном приближении* функции $x(t)$. Если же *ε-окрестность* берут в пространстве L_p, то говорят о *приближении в среднем*. В частности, при $p = 2$ говорят о *среднеквадратичном* приближении.

2. Функции, определенные на функциональных пространствах.

Так же, как в классическом математическом анализе, можно ввести понятие функции, аргументом и значением которой будут элементы абстрактных пространств.

Пусть нам даны два абстрактных пространства R_1 и R_2. Пусть каждому элементу $x \in R_1$ поставлен в соответствие элемент $y \in R_2$. Тогда будем говорить, что нам задан оператор

$$y = A(x) \qquad (1.5)$$

с областью определения R_1 и областью значений, принадлежащих R_2. В частности, если R_2 является областью действительных или комплексных чисел, то оператор $A(x)$ называется функционалом. Простым примером функционала в пространстве $C[a,b]$ является определенный интеграл

$$I(x) = \int_a^b x(t)dt \qquad (1.6)$$

Область математики, изучающая свойства функциональных пространств, носит название *функционального анализа*.

3. Метод вычислительной математики. Теперь можно охарактеризовать метод вычислительной математики.

В вычислительной математике приходится сталкиваться с самыми различными задачами. Многие из этих задач могут быть записаны в виде

$$y=A(x), \qquad (1.7)$$

где x и y принадлежат заданным пространствам R_1 и R_2 и $A(x)$ – некоторый заданный оператор. Задача состоит в отыскании либо y по заданному x, либо в отыскании x по заданному y. Далеко не всегда с помощью средств современной математики удается точно решить эти задачи, применяя конечное число шагов. В этих случаях и прибегают к вычислительной математике. Иногда задача может быть решена и точно, но методы классической математики дают ответ после громоздких и трудоемких вычислений. Поэтому в задачи вычислительной математики входит также разработка приемов и методов наиболее рационального решения конкретных задач. Как это делается в различных случаях, мы узнаем из дальнейшего изучения предмета. Сейчас же выскажем некоторые общие соображения.

Основным методом, при помощи которого в вычислительной математике решают поставленные выше задачи, является замена пространств R_1 и R_2 и оператора A другими пространствами $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$ и оператором $\bar{A}$, более удобными для вычислительных целей. Иногда бывает достаточно произвести замену только пространств R_1 и R_2 или даже одного из них. Иногда достаточно заменить только оператор. Замена должна быть сделана так, чтобы решение новой задачи

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}), \qquad (1.8)$$

$\bar{x} \in \overline{R_1}$, $\bar{y} \in \overline{R_2}$, было в каком-то смысле близким к точному решению исходной задачи (7) и его можно было бы отыскать с сравнительно небольшими трудностями.

Например, пусть необходимо вычислить интеграл

$$y = \int_a^b f(x)dx \,,$$

где *f(x)* – непрерывная функция, причем неопределенный интеграл не берется в элементарных функциях. Чтобы получить достаточно точное приближенное значение интеграла, можно идти двумя путями.

1.Заменим функцию *f(x)* алгебраическим многочленом *P(x),* равномерно приближающим функцию *f(x)* на отрезке *[a, b]* с необходимой степенью точности. (Как будет показано дальше, это всегда можно сделать). Тогда вместо интеграла y = $\int_a^b f(x)dx$ будем находить интеграл y = $\int_a^b P(x)dx$. Вычисление такого интеграла не составляет труда. Здесь мы, не меняя функционала *A(f)* = $\int_a^b f(x)dx$, заменяем пространство *C[a, b],* которому принадлежит функция *f(x),* пространством многочленов и вместо функции *f(x)* берем многочлен из некоторой ее *ε-окрестности.*

2.Из определения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует, что всегда можно построить интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$, которая будет достаточно близка к значению интеграла. Следовательно, вместо вычисления интеграла y = $\int_a^b f(x)dx$ можно решать другую задачу – задачу вычисления конечной суммы y = $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$. Здесь мы уже заменяем функционал *A(f)*=$\int_a^b f(x)dx$ другим функционалом $\overline{A\,(f)} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$.

Резюмируя сказанное выше, мы отметим, что перед вычислительной математикой стоят следующие основные задачи:

1. Приближение множеств в функциональных пространствах.
2. Приближение операторов, заданных на функциональных пространствах.
3. Разработка рациональных алгоритмов и методов решения задач в условиях применения современных вычислительных средств.