

## Лекция 11

### § 6.3. Полиномиальная интерполяция. Многочлен Лагранжа

**1. Интерполяционный многочлен.** Начнем с рассмотрения задачи интерполяции в наиболее простом и полно исследованном случае интерполирования алгебраическими многочленами. Для заданной таблицы (6.1) многочлен  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  степени  $n$  называется *интерполяционным многочленом*, если он удовлетворяет условиям

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (6.21)$$

Равенство (6.21) можно записать аналогично (6.8) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ & \text{\scriptsize ..... } \\ & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned} \tag{6.22}$$

относительно коэффициентов многочлена. Эта система однозначно разрешима, так как система функций  $1, x, x^2, \dots, x^n$  линейно независима в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (см. утверждение 6.1 и теорему 6.1). Таким образом, верна следующая теорема.

**Т е о р е м а 6.2.** *Существует единственный интерполяционный многочлен степени  $n$ , удовлетворяющий условиям (6.21).*

**З а м е ч а н и е.** На практике система (6.22) никогда не используется для вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена. Дело в том, что она является плохо обусловленной. Кроме того существуют различные явные формы записи интерполяционного многочлена, которые применяются при интерполяции. Наконец, в большинстве приложений интерполяционного многочлена явное вычисление коэффициентов  $a_k$  не нужно.

**2. Многочлен Лагранжа.** Приведем одну из форм записи интерполяционного многочлена – *многочлен Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_{nj}(x). \quad (6.23)$$

$$\text{Здесь } l_{nj}(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}.$$

Как нетрудно видеть,  $l_{nj}(x)$  представляет собой многочлен степени  $n$ , удовлетворяющий условию

$$l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Таким образом, степень многочлена  $L_n$  равна  $n$  и при  $x = x_i$  в сумме (6.22) обращаются в ноль все слагаемые, кроме слагаемого с номером  $j=i$ , равного  $y_i$ . Поэтому многочлен Лагранжа (6.23) действительно является интерполяционным.

Заметим, что на практике интерполяционный многочлен Лагранжа используется так, что нет необходимости его преобразования к каноническому виду  $L_n(x) = \sum_{j=0}^n a_k x^k$ .

Приведем формулы для записи многочленов Лагранжа первой и второй степени, которые часто используются на практике:

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \quad (6.24)$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (6.25)$$

## § 6.4. Погрешность интерполяции

Приведем без доказательства наиболее известную теорему о погрешности интерполяции.

**Т е о р е м а 6.3.** Пусть функция  $f$  дифференцируема  $n + 1$  раз на отрезке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполяции  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда для погрешности интерполяции в точке  $x \in [a, b]$  справедливо равенство

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (6.26)$$

в котором  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ , а  $\xi$  — некоторая точка, принадлежащая интервалу  $(a, b)$ .

Основное неудобство в использовании этой теоремы состоит в том, что входящая в формулу (6.26) для погрешности точка  $\xi$  неизвестна. Поэтому чаще используется не сама теорема, а ее следствие.

**С л е д с т в и е.** В условиях теоремы (6.3) справедлива оценка погрешности интерполяции в точке  $x \in [a, b]$ , имеющая вид

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (6.27)$$

а также оценка максимума модуля погрешности интерполяции на отрезке  $[a, b]$ , имеющая вид

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (6.28)$$

Здесь  $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Пусть теперь  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  и пусть  $h_i = x_i - x_{i-1}$  —  $i$ -й шаг таблицы, а  $h_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ . Несколько огрубляя оценку (6.28), можно получить следующее неравенство:

$$\max_{[x_0, x_n]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h_{\max}^{n+1}. \quad (6.29)$$

Оно позволяет утверждать, что для достаточно гладкой функции  $f$  при фиксированной степени интерполяционного многочлена погрешность интерполяции на отрезке  $[x_0, x_n]$  при  $h_{\max} \rightarrow 0$  стремится к нулю не медленнее, чем некоторая величина, пропорциональная  $h_{\max}^{n+1}$ . Этот факт принято формулировать так: интерполяция многочленом степени  $n$  имеет  $(n+1)$ -й порядок точности относительно  $h_{\max}$ . В частности, линейная и квадратичная интерполяции имеют второй и третий порядок точности соответственно.

## § 6.5. Интерполяция с кратными узлами

**1. Интерполяционный многочлен с кратными узлами.** Иногда в узлах  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) бывают заданы не только значения  $y_i = f(x_i)$  функции  $f$ , но и значения ее производных  $y'_i = f'(x_i)$ ,  $y''_i = f''(x_i)$ ,  $\dots$ ,  $y_i^{(k_i-1)} = f^{(k_i-1)}(x_i)$  до некоторого порядка  $k_i - 1$ . В этом случае узел  $x_i$  называют *кратным*, а число  $k_i$ , равное количеству заданных значений, — *кратностью узла*. Пусть  $n = k_0 + k_1 + \dots + k_m - 1$ . Можно доказать, что существует единственный многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ , удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_i) = y_i, P'_n(x_i) = y'_i, \dots, P_n^{(k_i-1)}(x_i) = y_i^{(k_i-1)} \quad \text{для } i=0, 1, \dots, m.$$

Этот многочлен называют *интерполяционным многочленом с кратными узлами*. Можно указать и явную формулу его записи, аналогичную форме Лагранжа. Мы этого делать не будем, а отметим лишь два важных частных случая.

1). Пусть на концах отрезка  $[x_0, x_1]$  заданы значения  $y_0, y_1, y'_0, y'_1$ . Тогда  $m = 1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $k_1 = 2$ ,  $n = 3$  и интерполяционный многочлен  $P_3(x)$ , удовлетворяющий условиям  $P_3(x_0) = y_0$ ,  $P_3(x_1) = y_1$ ,  $P'_3(x_0) = y'_0$ ,  $P'_3(x_1) = y'_1$ , может быть представлен в следующем виде:

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x_1-x)^2(2(x-x_0)+h)}{h^3} + y'_0 \frac{(x_1-x)^2(x-x_0)}{h^2} + y_1 \frac{(x-x_0)^2(2(x_1-x)+h)}{h^3} + y'_1 \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2}, \quad \text{где } h = x_1 - x_0. \quad (6.30)$$

Многочлен (6.30) принято называть *кубическим интерполяционным многочленом Эрмита*.

2). Пусть в точке  $x_0$  заданы значения  $y_0, y'_0, \dots, y_0^n$ . Тогда многочлен  $P_n(x)$ , удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_0) = y_0, P_n'(x_0) = y'_0, \dots, P_n^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

представляется в виде:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_0^{(k)} \frac{(x-x_0)^k}{k!}. \quad (6.31)$$

Как нетрудно видеть, многочлен  $P_n(x)$  представляет собой отрезок ряда Тейлора. Таким образом, формула Тейлора дает решение задачи интерполяции с одним узлом кратности  $(n + 1)$ . Заметим, что в действительности с ее помощью осуществляется экстраполяция.

## 2. Погрешность интерполяции с кратными узлами.

**Т е о р е м а 6.4.** Пусть функция  $f$  дифференцируема  $n + 1$  раз на отрезке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполяции  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Тогда для погрешности интерполяции с кратными узлами в точке  $x \in [a, b]$  справедливы равенство (6.26) и неравенства (6.27) и (6.28), в которых  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m}$ , а  $\xi$  – некоторая точка, принадлежащая интервалу  $(a, b)$ .

Для формулы Тейлора ( $m = 0, k_0 = n + 1$ ) теорема 6.4 дает известную формулу остаточного члена в форме Лагранжа. Для кубического многочлена Эрмита ( $m = 0, k_0 = 2, k_1 = 2$ ) неравенство (6.29) приводит к следующей оценке погрешности:

$$\max_{[x_0, x_1]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4. \quad (6.32)$$

Здесь учтено то, что максимум функции  $\omega_4(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2$  на отрезке  $[x_0, x_1]$  достигается в точке  $x = (x_0 + x_1) / 2$  и равен  $h^4/16$ .

## § 6.6. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева.

### 1. Постановка задачи минимизации оценки погрешности.

Предположим, что значение заданной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  можно вычислить в произвольной точке  $x$ . Однако по некоторым причинам (например, вычисление значений  $f(x)$  – трудоемкая операция) целесообразнее заменить прямое вычисление функции  $f$  вычислением значений ее интерполяционного многочлена  $P_n$ . Для такой замены необходимо один раз получить таблицу значений функции  $f$  в выбранных на отрезке  $[a, b]$  точках  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . При этом естественно стремиться к такому выбору узлов интерполяции, который позволит сделать минимальной величину  $\Delta(P_n) = \max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$  – погрешность интерполяции на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть о функции  $f$  известно лишь то, что она непрерывно дифференцируема  $n + 1$  раз на отрезке  $[a, b]$ . Тогда неравенство (6.28) дает верхнюю границу погрешности интерполяции:

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (6.33)$$

Поставим теперь задачу определить набор узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , при котором величина  $\bar{\Delta}(P_n)$  минимальна. Для решения этой задачи нам потребуются некоторые сведения о многочленах Чебышева.

**2. Многочлены Чебышева.** Введенные П.Л.Чебышевым многочлены  $T_n(x)$  широко используются в вычислительной математике. При  $n = 0$  и  $n = 1$  они определяются явными формулами

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad (6.34)$$

а при  $n \geq 2$  рекуррентной формулой

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \quad (6.35)$$

Запишем явные формулы для многочленов Чебышева  $T_n(x)$

для  $n = 2, 3, 4, 5$ :

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Аналогично можно записать явные формулы и при  $n \geq 6$ .

Приведем некоторые свойства многочленов Чебышева.

1). При четном  $n$  многочлен  $T_n(x)$  содержит только четные степени  $x$  и является четной функцией, а при нечетном  $n$  многочлен  $T_n(x)$  содержит только нечетные степени  $x$  и является нечетной функцией.

2). При  $n \geq 1$  старший коэффициент многочлена  $T_n(x)$  равен  $2^{n-1}$ , т.е.  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ .

Справедливость свойств 1) и 2) следует непосредственно из определения (6.34), (6.35).

3). Для  $x \in [-1, 1]$  справедлива формула

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x). \quad (6.36)$$

□ При  $n = 0$  и  $n = 1$  формула (6.36) верна, так как  $\cos(0 \cdot \arccos x) = 1$ ,  $\cos(1 \cdot \arccos x) = x$ . Для того, чтобы доказать справедливость формулы для всех  $n \geq 0$ , достаточно показать, что функции  $C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$  удовлетворяют такому же, как и многочлены Чебышева, рекуррентному соотношению

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x). \quad (6.37)$$

Соотношение (6.37) получится, если в легко проверяемом тригонометрическом тождестве

$$\cos[(m+1)\varphi] + \cos[(m-1)\varphi] = 2\cos\varphi \cos m\varphi$$

положить  $m = n - 1$  и  $\varphi = \arccos x$ . ■

4). При  $n \geq 1$  многочлен  $T_n(x)$  имеет ровно  $n$  действительных корней, расположенных на отрезке  $[-1, 1]$  и вычисляемых по формуле

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.38)$$

5). При  $n \geq 0$  справедливо равенство  $\max_{[-1,1]} |T_n(x)| = 1$ . Если  $n \geq 1$ , то этот максимум достигается ровно в  $n + 1$  точках, которые находятся по формуле

$$x_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (6.39)$$

При этом  $T_n(x_m) = (-1)^m$ , т.е. максимумы и минимумы многочлена Чебышева чередуются.

Доказательство свойств 4) и 5) основано на применении формулы (6.36). Например, в силу этой формулы корни многочлена  $T_n(x)$ , расположенные на отрезке  $[-1, 1]$ , совпадают с корнями уравнения  $\cos(n \cdot \arccos x) = 0$ . Эквивалентное преобразование этого уравнения дает  $n \cdot \arccos x = \pi/2 + \pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Так как  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ , то заключаем, что имеется ровно  $n$  корней  $x_k$ , отвечающих значениям  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  и удовлетворяющих равенствам  $\arccos x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ , эквивалентным формуле (6.38).

Назовем величину  $\max_{[-1,1]} |P_n(x)|$  *уклонением* многочлена  $P_n(x)$  от нуля. Эта величина характеризует максимальное отклонение (уклонение) графика многочлена  $P_n$  от графика функции  $y = 0$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Можно доказать следующее утверждение.

6). Среди всех многочленов фиксированной степени  $n$  со старшим коэффициентом  $a_n$ , равным 1, наименьшее уклонение от нуля (равное  $2^{1-n}$ ) имеет многочлен  $\overline{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$ .

Благодаря этому свойству, имеющему особую ценность для приложений, многочлены Чебышева иногда называют *наименее уклоняющимися от нуля*. Свойство 6) можно сформулировать так: для любого многочлена вида  $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , отличного от  $\overline{T}_n(x)$ , справедливо неравенство

$$2^{1-n} = \max_{[-1,1]} |\overline{T}_n(x)| < \max_{[-1,1]} |P_n(x)|.$$



**З а м е ч а н и е.** Из свойства б) следует, что среди всех многочленов  $P_n(x)$  фиксированной степени  $n \geq 1$  со старшим коэффициентом  $a_n \neq 0$  наименьшее отклонение от нуля (равное  $|a_n| 2^{1-n}$ ) имеет многочлен  $a_n \overline{T}_n(x)$ .

**3. Решение задачи минимизации оценки погрешности.** Найдем сначала решение задачи в предположении, что отрезок интерполяции  $[a, b]$  совпадает с отрезком  $[-1, 1]$ . В этом случае величина (6.33) будет минимальной при таком выборе узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , при котором минимальна величина  $\max_{[-1,1]} |\omega_{n+1}(x)|$ , т.е. минимально отклонение многочлена  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  от нуля. В силу свойств 4) и б) многочленов Чебышева решение задачи дает набор узлов

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

являющихся нулями многочлена  $T_{n+1}$ , так как в этом случае  $\omega_{n+1} = \overline{T}_{n+1}$ .

Заметим, что при таком выборе

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}, \quad (6.40)$$

Причем в силу свойства б) любой другой выбор узлов дает большее значение верхней границы погрешности. Для сравнения укажем, что при использовании для приближения функции  $f$  отрезка ряда Тейлора  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  верхняя граница оценки погрешности такова:

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следовательно, она в  $2^n$  раз хуже, чем при интерполяции с оптимальным выбором узлов.

Пусть теперь отрезок интерполяции  $[a, b]$  произволен. Приведем его к стандартному отрезку  $[-1, 1]$  заменой

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad \text{где } t \in [-1, 1]. \quad (6.41)$$

Как нетрудно видеть, в этом случае

$$\omega_{n+1}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\omega}_{n+1}(t), \quad \text{где } \tilde{\omega}_{n+1}(t) = (t-t_0)(t-t_1) \dots (t-t_n), \quad \text{и } x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \max_{[-1,1]} \tilde{\omega}_{n+1}(t)$$

и минимум этой величины достигается при значениях  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , совпадающих с нулями многочлена  $T_{n+1}$ . Значит, решение поставленной задачи дает выбор узлов

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (6.42)$$

которому отвечает минимальное значение верхней границы погрешности интерполяции, равное

$$\bar{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$