Вычмат-2025

12 июня 2025 г.

Содержание

1 Основные определения

1.1 Предмет вычислительной математики. Метод и задачи вычислительной математики в терминах функционального анализа.

1.1.1 Предмет вычислительной математики.

Необходимость разработки методов доведения математических исследований до числового результата привела к созданию отдельной дисциплины - **вычислительной математики**.

Определение 1.1: Вычислительная математика 1

Область математики, которая призвана разрабатывать методы доведения до числового результата решений основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств.

Определение 1.2: Вычислительная математика-2

Раздел математики, связанный с построением и анализом алгоритмов численного решения математических задач.

Таким образом, **вычислительная математика** помогает решать численные задачи с помощью ЭВМ.

1.1.2 Функциональный анализ.

Определение 1.3: Функциональный анализ

Область математики, изучающая свойства функциональных пространств.

Для определения **задач и методов** вычислительной математики введем важнейшие **понятия функционального анализа**.

Определение 1.4: Понятия функционального анализа

- Функциональные метрические пространства.
- Функции, определенные на функциональных пространствах.

Функциональный анализ рассматирвает элементы более общего (не евклидова) пространства.

1.1.3 Функциональные метрические пространства.

В функциональном анализе вместо евклидовых пространств рассматриваются абстрактные пространства, элементы которых могут иметь самую различную природу.

Определение 1.5: Метрическое пространство

Абстрактное множество, для любых двух элементов x и y которого опрделено понятие расстояния $\rho(x, y)$.

Лемма 1.1: Свойства расстояния

Расстояние $\rho(x, y)$ должно удовлетворять следующим **свойствам:**

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x$ совпадает с y.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \forall \ x, y, z \in \mathscr{R}$, где: $\mathscr{R}$ - метрическое пространство.

Евклидовы пространства с обычным определением расстояния удовлетворяют всем этим условиям. Но могут быть и другие метрические пространства.

Определение 1.6: Пространство непрерывных функций

Пространство $C[a, b]$ - множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.
Функция $f(x)$ непрерывная на $[a, b] \leftrightarrow f(x) \in C[a, b]$.

Пример 1.1: Неевлидово метрическое пространство

Пространства L_p, где $p \geq 1$ и $p \in \mathbb{R}$.

$$L_p = \{f(x)|\ f(x) \in \mathrm{C}[a,b],\ \int_a^b |f(t)|^p\,dt < \infty\}$$

Расстояние $\rho(x,y)$ в пространстве L_p определяется следующим образом:

$$\rho(x,y) = [\int_a^b |x(t)-y(t)|^p]^{\frac{1}{p}}$$

В каждом метрическом пространстве можно говорить об **окрестности данной точки**.

Определение 1.7: Окрестность точки

ε-окрестностью точки x некоторого метрического пространства $\mathscr{R}$ называется множество точек y таких, что:

$$\rho(x,y) \leq \varepsilon$$

Пример 1.2: Окрестность точки в L_p

Окрестность точки в L_p - это совокупность всех функций $y(t)$, принадлежащих L_p, для которых:

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt < \varepsilon^p$$

В вычислительной математике часто приходится заменять одну функцию $x(t)$ другой, более удобной для вычислительных целей и в каком-то смысле близкой к первой. Обычно эту вторую функцию берут из ε-окрестности первой.

1.1.4 Функции, заданные на функциональном пространстве.

Определение 1.8: Операторы функционального пространства

Пусть нам даны два абстрактных (функциональных) пространства $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$. Пусть каждому элементу $x \in \mathscr{R}_1$ поставлен в соответствие элемент $y \in \mathscr{R}_2$. Тогда будем говорить, что нам задан **оператор**:

$$y = A(x)$$

с областью определения $\mathscr{R}_1$ и областью значений, принадлежащих $\mathscr{R}_2$.

В частности, если $\mathscr{R}_2$ является областью вещественных или комплексных чисел, то оператор $A(x)$ - **функционал**.

Пример 1.3: Функционал

Оператором (функционалом) в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ $C[a, b]$ - **определенный интеграл**:

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

1.1.5 Методы и задачи вычислительной математики.

Определение 1.9: Задачи вычислительной математики

Многие задачи в вычислительной математике могут быть записаны в виде:

$$y = A(x)$$

где x и y принадлежат заданным пространствам $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и $A(x)$ - некоторых заданный оператор.

Далеко не всегда с помощью средств современной математики удается точно решить эти задачи, применяя конечное число шагов. Для этого используют **методы вычислительной математики**:

Определение 1.10: Основной метод вычислительной математики

Замена пространств $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и оператора $A(x)$ другими пространствами $\overline{\mathscr{R}_1}$ $\overline{\mathscr{R}_2}$ и оператором $\overline{A}$, более удобными для вычислительных целей.

Иногда бывает достаточно произвести замену только пространств $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ или даже одного из них. Иногда достаточно заменить только оператор.

Замена должна быть сделана так, чтобы решение новой задачи

$$\overline{y} = \overline{A(\overline{x})}$$

$\overline{x} \in \overline{\mathscr{R}}$, $\overline{y} \in \overline{\mathscr{R}}$, было в каком-то смысле близким к точному значению исходной задачи и его можно было бы отыскать сравнительно небольшими трудностями.
Т.е.:

$$\rho(x, \overline{x}) < \varepsilon$$

$$\rho(y, \overline{y}) < \varepsilon$$

Пример 1.4: Применение метода

$f(x) \in C[a, b]$. Требуется решить задачу:

$$y = \int_a^b f(x)\,dx$$

причем интеграл не берется в элементарных функциях.

Тогда возможны два пути:

1. **Замена пространств:** вместо $f(x)$ взять $P_n(x)$ - алгебраический многочлен степени n.
2. **Замена оператора:** вместо интегрирования построить интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$.

Резюмируя, можно выделить **основные задачи** вычислительной математики:

Пример 1.5: Основные задачи

- Приближение множеств в функциональных пространствах.
- Приближение операторов, заданных на функциональных пространствах.
- Разработка рациональных алгоритмов и методов решения задач в условиях приминения современных вычислительных средств.

1.2 Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задач. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Правила записи приближенных чисел.

1.2.1 Источники и классификация погрешностей

При решении прикладной задачи с использованием ЭВМ получить точное решение задачи практически невозможно. Получаемое решение почти всегда содержит погрешность, т.е. является приближенным.

Определение 1.11: Источники погрешности решения

Пусть y - точное значение величины, вычисление которой является целью поставленной задачи, а y^* - ее приближенное значение:

1. **Неустранимая погрешность:** $\delta_{\text{н}} y^*$ - математическая модель и исходные данные вносят в решение ошибку, которая не может быть устранена далее.
2. **Ошибка метода решения:** $\delta_{\text{м}} y^*$ - источник данной погрешности - метод решения задачи.
3. **Вычислительная погрешность:** $\delta_{\text{в}} y^*$ - определяется характеристикой машины ЭВМ.

Таким образом, полная погрешность результата решения задачи на ЭВМ складывается из трех составляющих:

$$\delta y^* = \delta_{\text{н}} y^* + \delta_{\text{м}} y^* + \delta_{\text{в}} y^*$$

На практике исходят из того, что погрешность метода должна быть на порядок (в 2 - 10 раз) меньше неустранимой погрешности. Желательно, чтобы величина вычислительной ошибки была хотя бы на порядок меньше величины погрешности метода.

1.2.2 Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть - точное (неизвестное) значение некоторой величины, a^* - приближенное (известное) значение той же величины (приближенное число).

Определение 1.12: Абсолютная погрешность

Модуль разности приближенного и точного значения некоторой величины:

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|$$

Определение 1.13: Относительная погрешность

Для соотншения погрешность величины и ее значения вводят понятие **относительной погрешности**:

$$\delta(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$$

Так как значение неизвестно, то непосредственное вычисление величин $\Delta(a^*)$ и $\delta(a^*)$ по предыдущим формулам невозможно.

Определение 1.14: Верхние границы погрешностей

$\overline{\Delta(a^*)}$ и $\overline{\delta(a^*)}$ - верхние границы абсолютной и относительной погрешностей соответственно:

$$|a - a^*| \leq \overline{\Delta(a^*)}$$

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} \leq \overline{\delta(a^*)}$$

Причем, если величина $\overline{\Delta(a^*)}$ известна, то:

$$\overline{\delta(a^*)} = \frac{\overline{\Delta(a^*)}}{|a|}$$

Аналогично, если известна $\overline{\delta(a^*)}$:

$$\overline{\Delta(a^*)} = |a| \cdot \overline{\delta(a^*)}$$

1.2.3 Правила записи приближенных чисел.

Пусть приближенное число a^* задано следующим образом:

$$a^* = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 . \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$$

где $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ - целая часть, $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$ - дробная.

Определение 1.15: Значащие цифры

Все цифры в записи числа a^*, начиная с первой ненулевой слева.

Определение 1.16: Верная цифра

Значащую цифру называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующей этой цифре.

Пример 1.6: Значащие и верные цифры

Пусть $a^* = 0.010300$, $\Delta(a^*) = 2 \cdot 10^{-6}$:

1. **Значащие цифры:** 10300
2. **Верные цифры:** 1030

Лемма 1.2: Связь числа верных цифр с отностительной погрешностью

Если число a^* имеет ровно N верных цифр, то $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$.

Лемма 1.3: Правило записи

Неравенство верхней границы абслолютной погрешности эквивалентно следующему:

$$a^* - \overline{\Delta a^*} \le a \le a^* + \overline{\Delta a^*}$$

Тот факт, что число a^* является приближенным значением числа a с абслоютной точностью $\varepsilon = \overline{\Delta(a^*)}$ принято записывать в виде:

$$a = a^* \pm \overline{\Delta(a^*)}$$

Как правило, числа a^* и $\overline{\Delta(a^*)}$ указывают с одинаковым числом цифр после десятичной точки.

Аналогично из неравенства верхней границы относительной погрешности получаем:

$$a^*(a - \overline{\delta a^*}) \leq a \leq a^*(a + \overline{\delta a^*})$$

Тот факт, что число a^* является приближенным значением числа a с относительной точностью $\varepsilon = \overline{\delta(a^*)}$ принято записывать в виде:

$$a = a^*(1 \pm \overline{\delta(a^*)})$$

Если число a^* приводится в качестве результата **без указания величины погрешности**, то принято считать, что все его значащие цифры являются **верными**.

1.2.4 Округления.

Определение 1.17: Округление методом усечения

Состоит в отбрасывании всех цифр, расположенных слева от n-ой значащей цифры.

Определение 1.18: Округление по дополнению

Состоит в следующем правиле: если первая слева от отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые цифры остаются без изменения. Иначе: в младший сохраняемый разряд добавляется единица.

Границы абсолютной и относительной погрешностей принято округлять в сторону увеличения.

1.3 Погрешности арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции одной и многих переменных.

1.3.1 Погрешности арифметических операций над приближенными числами.

Теорема 1.1: Абсолютная погрешность сложения/вычитания

Абсолютная погрешность алгебраической суммы или разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т.е.:

$$\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

Доказательство. $\Delta(a^* \pm b^*) = |(a \pm b) - (a^* \pm b^*)| = |(a - a^* \pm (b - b^*))| \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

□

Лемма 1.4: Следствие теоремы абсолютной погрешности сложения/вычитания

В силу того, что $\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta(a^*)}$, получаем:

$$\overline{\Delta(a^* \pm b^*)} = \overline{\Delta(a^*)} + \overline{\Delta(b^*)}$$

Теорема 1.2: Относительная погрешность сложения/вычитания

Пусть a и b ненулевые числа одного знака. Тогда справедливы неравенства:

$$\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{\max},\ \delta(a^* - b^*) \leq \nu\delta_{\max}$$

где: $\delta_{\max} = \max\{\delta(a^*, \delta(b^*))\}$, $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$

Доказательство. $|a + b|\delta(a^* + b^*) = \Delta(a^* + b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*) = |a|\delta(a^*) + |b|\delta(b^*) \leq |a|\delta_{\max} + |b|\delta_{\max} = (|a| + |b|)\delta_{\max} = |a + b|\delta_{\max}$ (последний переход - равенство, т.к. числа одного знака)

Т.е. $\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{\max}$

$|a-b|\delta(a^*-b^*) = \Delta(a^*-b^*) \le \Delta(a^* + \Delta(b^*)) \le |a+b|\delta_{\max}$
Т.е. $\delta(a^*-b^*) \le \frac{|a+b|}{|a-b|}\delta_{\max} = \nu\delta_{\max}$ □

Итог: При построении численного метода решения задачи следует избегать вычитания близких чисел одного знака. Если же такое вычитание неизбежно, то следует вычислять аргументы с повышенной точностью, учитывая ее потерю примерно в $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$ раз.

Теорема 1.3: Относительная погрешность умножения/деления

Для относительных погрешностей произведения и частного приближенных чисел верны оценки:

$$\delta(a^*b^*) \le \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$$

$$\delta(\frac{a^*}{b^*}) \le \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}$$

Доказательство. $|ab|\delta(a^*b^*) = \Delta(a^*b^*) = \Delta(a^*b^*) = |ab - a^*b^*| = |(a-a^*)b + (b-b^*)a - (a-a^*)(b-b^*)| \le |a-a^*|\cdot|b| + |b-b^*|\cdot|a| + |a-a^*|\cdot|b-b^*| = \Delta(a^*)|b| + \Delta(b^*)|a| + \Delta(a^*)\Delta(b^*) = c$

Разделим c на $|ab|$:
$\frac{c}{|ab|} = \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$

Итог: $\delta(a^*b^*) \le \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$

$|\frac{a}{b}|\delta(\frac{a^*}{b^*}) = \Delta(\frac{a^*}{b^*}) = |\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}| = |\frac{ab^*-a^*b}{bb^*}| = c$

$|b^*| = |b-(b-b^*)| = |b|\cdot|1-\frac{b-b^*}{b}| \ge |b|\cdot(1-\delta(b^*))$

$c \le \frac{|ab^*-a^*b|}{|b|^2(1-\delta(b^*))}$

Разделим на $|\frac{a}{b}|$:
$\delta(\frac{a^*}{b^*}) \le \frac{\delta(a^*+b^*)}{1-\delta(b^*)}$

Итог: $\delta(\frac{a^*}{b^*}) \le \frac{\delta(a^*)+\delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}$ □

Лемма 1.5: Следствия теоремы относительная погрешность умножения/деления

Если $\delta(a^*) << 1$ и $\delta(b^*) << 1$, то для оценки границ относительных погрешностей можно использовать следующие приближенные равенства:

$$\overline{\delta(a^*b^*)} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

$$\overline{\delta(\frac{a^*}{b^*})} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

Общий итог: выполнение арифметических операций над приближенными числами, как правило, сопровождается потерей точности. Единственная операция, при которой потеря не происходит, это сложение чисел одного знака. Наибольшая потеря точности может произойти при вычитании близких чисел одного знака.

1.3.2 Погрешность функции одной и многих переменной.

Теорема 1.4: Погрешность функции одной переменной

Формулы для границ погрешностей функции одной переменной:

$$\overline{\Delta(y^*)} \approx |f^{'}(x^*)|\overline{\Delta(x^*)}$$

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \nu^*\overline{\delta(x^*)}$$

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \nu\overline{\delta(x^*)}$$

где $\nu^* = |x^*|\frac{f^{'}(x^*)}{f(x^*)}$, $\nu = |x|\frac{f^{'}(x)}{f(x)}$

Теорема 1.5: Погрешность функции многих переменных

Пусть $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ - дифференцируемая в области G функция m переменных, вычисление которой производится при приближенно заданных аргументах $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$. Тогда:

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{m} \max_{[x,x^*]}|f^{'}_{x_j}|\Delta(x_j^*)$$

1.4 Корректность вычислительной задачи. Примеры корректных и некорректных задач.

1.5 Обусловленность вычислительной задачи. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

1.6 Вычислительные алгоритмы. Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов.

2 Решение нелинейных уравнений, СЛАУ

2.1 Постановка задачи решения нелинейных уравнений. Основные этапы решения задачи.

2.2 Скорость сходимости итерационных методов уточнения решения нелинейного уравнения.

2.3 Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений. Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика.

3 Интерполяция

4 Дифференцирование и интегрирование

5 Список вопросов

1. Предмет вычислительной математики. Метод и задачи вычислительной математики в терминах функционального анализа.
2. Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задач. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Правила записи приближенных чисел.
3. Погрешности арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции одной и многих переменных.
4. Корректность вычислительной задачи. Примеры корректных и некорректных задач.
5. Обусловленность вычислительной задачи. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.
6. Вычислительные алгоритмы. Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов.
7. Постановка задачи решения нелинейных уравнений. Основные этапы решения задачи.
8. Скорость сходимости итерационных методов уточнения решения нелинейного уравнения.
9. Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений. Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика.
10. Метод бисекции решения нелинейных уравнений. Скорость сходимости. Критерий окончания.
11. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Вывод итерационной формулы метода Ньютона.
12. Априорная оценка погрешности метода Ньютона (теорема о скорости сходимости).
13. Апостериорная оценка погрешности (критерий окончания). Правило выбора начального приближения на отрезке локализации корня, гарантирующего сходимость метода.
14. Модификации метода Ньютона. Упрощенный метод Ньютона. Метод хорд.
15. Модификации метода Ньютона. Метод секущих. Скорость сходимости метода секущих.
16. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Постановка задачи.
17. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Определение понятия нормы вектора. Абсолютная и относительная погрешности вектора.

18. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Определение понятия нормы матрицы, подчиненной норме вектора. Геометрическая интерпретация нормы матрицы.
19. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений для приближенно заданной правой части. Количественная мера обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. Геометрическая интерпретация числа обусловленности.
20. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений для приближенно заданных матрицы и правой части.
21. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления. LU – разложение. Свойства метода.
22. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схемы частичного и полного выбора ведущих элементов. Свойства методов.
23. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление решений системы уравнений с несколькими правыми частями.
24. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление обратной матрицы.
25. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление выражений вида v = CWw. Вычисление определителя матрицы.
26. Метод Холецкого решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Свойства метода.
27. Метод прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Свойства метода.
28. Постановка задачи приближения функций. Приближение функций обобщенными многочленами.
29. Приближение методом интерполяции. Интерполяция обобщенными многочленами.
30. Понятия линейно-независимой системы функций на заданном множестве точек. Теорема о существовании единственного решения задачи интерполяции.
31. Понятия ортогональной системы функций на заданном множестве точек. Утверждение о существовании единственного решения задачи интерполяции с помощью ортогональной системы функций. Решение задачи интерполяции для этого случая.

32. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
33. Погрешность полиномиальной интерполяции.
34. Интерполяционный многочлен с кратными узлами. Погрешность интерполяции с кратными узлами.
35. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева и их свойства. Применение для решения задачи минимизации погрешности.
36. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков. Разделенные разности и их свойства.
37. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков с помощью разделенных разностей.
38. Интерполяционная формула Ньютона для равных промежутков. Конечные разности и их связь с разделенными разностями.
39. Вывод формул Ньютона для интерполирования вперед и назад.
40. Проблемы глобальной полиномиальной интерполяции. Интерполяция сплайнами. Определение сплайна. Интерполяционный сплайн.
41. Интерполяция сплайнами. Построение локального кубического интерполяционного сплайна.
42. Интерполяция сплайнами. Глобальные способы построения кубического интерполяционного сплайна.
43. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление первой производной. Погрешность формул.
44. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление второй производной. Погрешность формул.
45. Общий подход к выводу формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного многочлена.
46. Обусловленность формул численного дифференцирования.
47. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула прямоугольников. Погрешность формулы.
48. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула трапеций. Погрешность формулы.
49. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула Симпсона. Погрешность формулы.
50. Апостериорные оценки погрешности квадратурных формул. Правило Рунге.