Лекция 12

§ 6.6. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков

Продолжим рассмотрение вопроса интерполирования при помощи алгебраических многочленов. В этом параграфе мы получим формулу Ньютона, являющуюся видоизменением формулы Лагранжа. Она интересна сама по себе и послужит нам источником получения ряда новых формул.

1. Разделенные разности и их свойства. Предварительно введем новое понятие – *разделенные разности*. Рассмотрим некоторую функцию f и систему узлов интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_i \neq x_j$, при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$. Для этой функции и узлов образуем всевозможные отношения

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f(x_0;\ x_1);$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f(x_1;\ x_2),\ \dots,\ \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = f(x_{n-1};\ x_n). \qquad (6.42)$$

Такие отношения называют *разделенными разностями первого порядка.*

Получив разделенные разности первого порядка, мы можем образовать отношения

$$\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0} = f(x_0;\ x_1;\ x_2);$$

$$\frac{f(x_2;x_3)-f(x_1;x_2)}{x_3-x_1} = f(x_1;\ x_2;\ x_3),\ \dots,\ \frac{f(x_{n-1};x_n)-f(x_{n-2};x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}} =$$

$$= f(x_{n-2};\ x_{n-1};\ x_n). \qquad (6.43)$$

Эти отношения называют *разделенными разностями второго порядка*. Вообще, если мы уже определили разделенные разности k-го порядка $f(x_i;\ x_{i+1};\dots;x_{i+k})$, то разделенные разности $(k+1)$ -го порядка находятся при помощи формулы

$$\frac{f(x_i;x_{i+1};\dots,x_{i+k})-f(x_{i-1};x_i;\dots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}} = f(x_{i-1};\ x_i;\dots,x_{i+k}). \qquad (6.44)$$

Условимся располагать таблицу разделенных разностей следующим образом:

x	$f(x)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0; x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$	
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$	
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3; x_4)$	
		$f(x_3; x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

Для вывода формулы Ньютона нам потребуется использовать некоторые свойства разделенных разностей.

Прежде всего докажем, *что разделенная разность* k*-го порядка* $f(x_i;\ x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})$ *равна*

$$f(x_i;\ x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})\ldots(x_i - x_{i+k})} +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})\ldots(x_{i+1} - x_{i+k})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1})\ldots(x_{i+k} - x_{i+k-1})} = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)}, \qquad (6.45)$$

где $\omega(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{i+k})$.

□ Доказательство будем вести по индукции. Для $k = 1$ это утверждение справедливо, так как

$$f(x_i;\ x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)}.$$

Предположим, что оно справедливо для $k = l-1$, и докажем его справедливость для $k = l$. В самом деле,

$$f(x_i;\ x_{i+1}; \ldots; x_{i+l}) = \frac{f(x_{i+1}; \ldots, x_{i+l}) - f(x_i; x_{i+1}; \ldots, x_{i+l-1})}{x_{i+l} - x_i} =$$

$$= \frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \left\{ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l})} + \right.$$

$$+ \frac{f(x_{i+2})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3}) \dots (x_{i+2} - x_{i+l})} + \dots$$

$$\dots + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2}) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})} - \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+l-1})} \right. +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+2} - x_{i+l-1})} + \dots$$

$$\dots + \left. \left. \frac{f(x_{i+l-1})}{(x_{i+l-1} - x_i)(x_{i+l-1} - x_{i+1}) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})} \right] \right\}.$$

В полученном выражении $f(x_i)$ и $f(x_{i+l})$ встречаются по одному разу и притом в виде (с учетом множителя $\frac{1}{(x_{i+l} - x_i)}$, стоящего перед фигурными скобками):

$$\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+l})}, \quad \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_i)(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2}) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})},$$

т.е. так, как они должны входить в доказываемое равенство (6.45). Все остальные $f(x_j)$ входят дважды. Объединяя эти члены попарно, получим:

$$\frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \left[\frac{f(x_j)}{(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l})} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l-1})} \right] =$$

$$= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l-1})} \cdot \frac{1}{(x_{i+l} - x_i)} \cdot \left[\frac{1}{(x_j - x_{i+l})} - \frac{1}{(x_j - x_i)} \right] =$$

$$= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+l})},$$

что нам и требуется.

■

Из доказанного вытекает ряд следствий. Приведем некоторые из них.

С л е д с т в и е 1. *Разделенная разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделенных разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого.*

С л е д с т в и е 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности.*

С л е д с т в и е 3. *Разделенная разность есть симметричная функция своих аргументов, т.е.*

$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) = f(x_{i+1}; x_i; \ldots; x_{i+k}) = f(x_{i+2}, x_{i+1}; x_i; x_{i+3}; \ldots; x_{i+k}) = \ldots$

2. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков.

Перейдем к выводу формулы Ньютона. Пусть $f(x)$ - заданная функция, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - узлы интерполирования, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \epsilon [a, b]$ и $L_k(x)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \ldots$$
$$\ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]. \qquad (6.46)$$

Рассмотрим отдельную разность, стоящую в правой части, $L_k(x) - L_{k-1}(x)$. Это многочлен степени k. Он обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, т.к. в этих точках $L_k(x_i) = f(x_i)$ и $L_{k-1}(x_i) = f(x_i)$. Поэтому $L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_k\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$ (A_k – постоянная). Для определения величины A_k положим $x = x_k$. При этом получим:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k\,(x_k - x_0)\,(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}).$$

Откуда следует:

$$A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\,(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})} -$$

$$-\frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\,\frac{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{j-1})(x_k-x_{j+1})\dots(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{k-1})}}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_k)}=f(x_0;\ x_1;\dots;x_k).$$

Отсюда

$$L_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x_2)+$$

$$+\dots+(x-x_0)\,(x-x_1)\,\dots\,(x-x_{n-1})\,f(x_0;\ x_1;\dots;x_n). \tag{6.47}$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа и носит название *интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков.* Она более удобна для вычислений, чем формула Лагранжа. Добавление одного или нескольких узлов не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как это было при вычислениях по формуле Лагранжа.

3. Остаточный член формулы Ньютона. Остаточный член формулы Ньютона точно такой же, как и у формулы Лагранжа. Но его можно записать и в другой форме. Для этого рассмотрим

$$f(x;x_0;\ x_1;\dots;x_n)=\frac{f(x)}{(x-x_0)\,(x-x_1)\dots(x-x_n)}+$$

$$+\frac{f(x_0)}{(x_0-x)\,(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)}+\dots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\,(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

(6.48)

Отсюда

$$f(x)=f(x_0)\,\frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+\dots$$

$$\dots+f(x_n)\,\frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\,(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\,f\,(x;\ x_0;\ x_1;\dots;x_n). \tag{6.49}$$

Итак,

$$f(x) = L_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\, f\,(x;\ x_0;\ x_1;\dots;x_n). \tag{6.50}$$

Таким образом,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) =$$
$$= (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\, f\,(x;\ x_0;\ x_1;\dots;x_n). \tag{6.51}$$

В частности, если $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$, то получим:

$$f\,(x;\ x_0;\ x_1;\dots;x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Заметим, что так как величина $f\,(x)$ нам неизвестна, формула (6.51) имеет только теоретическое значение, а именно, она может быть использована для оценки погрешности, даваемой интерполяционной формулой Ньютона для заданной функции $f(x)$.

§ 6.7. Интерполяционные формулы Ньютона для равных промежутков

Естественно ожидать, что если промежутки между последовательными узлами интерполирования равны, т.е. $x_i - x_{i-1}$ – постоянная величина, то предыдущая *формула* упростится. Так оно и есть на самом деле. Прежде чем приступить к выводу формул для этого случая введем понятие о конечных разностях.

1. Конечные разности и их свойства. Пусть для значений *x:* $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ (h – шаг таблицы), нам известны значения функции *f (x):* $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Назовем разности

$$f_1 - f_0, f_2 - f_1, \dots, f_n - f_{n-1}$$

конечными разностями первого порядка.

Будем обозначать их следующим образом

$$f_{i+1} - f_i = f^1_{i+1/2}. \tag{6.52}$$

Из разностей первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка:

$$f^1_{3/2} - f^1_{1/2} = f^2_1;\ f^1_{5/2} - f^1_{3/2} = f^2_2;\ \dots;\ f^1_{2i+1)/2} - f^1_{(2i-1)/2} = f^2_i;\ \dots \qquad (6.53)$$

Аналогично можно образовать разности третьего порядка, четвертого и т.д. Таблицу разностей обычно располагают следующим образом:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f^1}$	$\boldsymbol{f^2}$	$\boldsymbol{f^3}$
x_0	f_0			
		$f^1_{1/2}$		
x_1	f_1		f^2_1	
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$
x_2	f_2		f^2_2	
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$
x_3	f_3		f^2_3	
		$f^1_{7/2}$		
x_4	f_4			

Установим связь между конечными и разделенными разностями для случая, когда $x_i - x_{i-1}$ постоянны. Будем иметь:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f^1_{i+1/2}}{h},$$

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = \frac{f^1_{i+3/2} - f^1_{i+1/2}}{2h \cdot h} = \frac{f^2_{i+1}}{2h^2}.$$

Вообще,

$$f(x_i;\ x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f^k_{i+k/2}}{k!\,h^k}. \qquad (6.54)$$

Доказательство будем вести методом индукции. Предполагая формулу справедливой для $k \le l$, докажем ее справедливость для $k = l+1$.

Действительно,

$$f\ (x_i;\ x_{i+1}; \dots ; x_{i+l+1}) = \frac{f\ (x_{i+1};\dots;x_{i+l+1}) - f\ (x_i; x_{i+1};\dots;x_{i+l})}{x_{i+l+1} - x_i} =$$

$$= \frac{f^l_{i+1+l/2} - f^l_{i+l/2}}{(l+1)h\cdot l!\, h^l} = \frac{f^l_{i+(l+1)/2}}{(l+1)!\, h^{l+1}}\ .$$

2. Вывод интерполяционных формул Ньютона. Перейдем теперь к выводу интерполяционных формул Ньютона. Для этого рассмотрим интерполяционную формулу для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования $x_{0,}\, x_{1,} \dots , x_n$ точки $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots , x_0 + nh.$ При этом, заменяя разделенные разности их выражениями через конечные разности, получим:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f^2_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{n!\, h^n}\, f^n_{n/2}. \qquad (6.55)$$

Обозначим $\frac{(x-x_0)}{h} = t$, тогда наша формула (6.55) примет вид

$$L_n(x_0 + ht) = f_0 + t f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 +$$

$$+ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!}\, f^n_{n/2}. \qquad (6.56)$$

Полученную формулу называют *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед*.

Выведем еще одну интерполяционную формулу Ньютона. Опять будем использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования $x_{0,}\, x_{1,} \dots , x_n$ точки $x_0, x_0 - h, x_0 - 2h, \dots , x_0 - nh$. При этом получим:

$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0; x_0 - h) +$

$+ (x - x_0)(x - x_0 + h) f(x_0; x_0 - h; x_0 - 2h) + \ldots +$

$+ (x - x_0)\,(x - x_0 + h) \ldots\, (x - x_0 + (n-1)h)\, f(x_0;\ x_0 - h; \ldots; x_0 - nh).$

Но в силу симметрии разделенных разностей относительно своих аргументов будем иметь:

$$f(x_0;\ x_0 - h; \ldots;\ x_0 - ih) = f(x_0 - ih;\ x_0 - ih + h; \ldots;\ x_0 - h;\ x_0).$$

Снова заменим разделенные разности конечными

$$f(x_0 - ih;\ x_0 - ih + h; \ldots;\ x_0 - h;\ x_0) = \frac{f^i_{-i/2}}{i!h^i}.$$

Отсюда

$$L_n(x) = f_0 + \frac{(x - x_0)}{h} f^1_{-1/2} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 + h)}{2!h^2} f^2_{-1} +$$

$$+ \cdots + \frac{(x - x_0)\,(x - x_0 + h) \ldots (x - x_0 + (n-1)h)}{n!\,h^n} f^n_{-n/2}. \qquad (6.57)$$

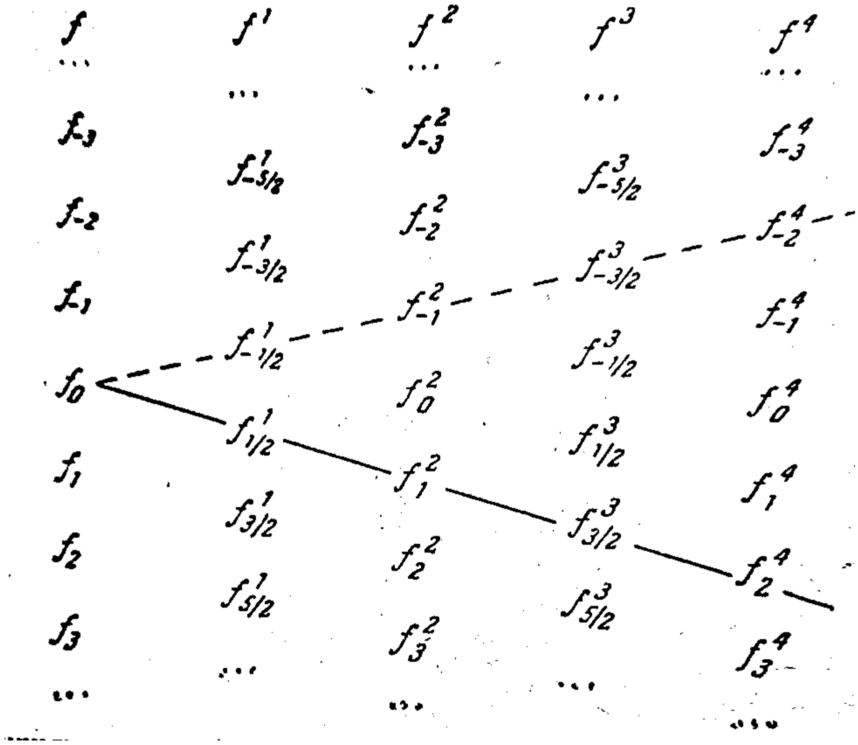
Заменяя, как и прежде, $\frac{(x - x_0)}{h}$ на t, получим:

$$L_n(x_0 + ht) = f_0 + t f^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} +$$

$$+ \cdots + \frac{t(t+1) \ldots (t + (n-1))}{n!} f^n_{-n/2}. \qquad (6.58)$$

Это есть *интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад*.

Как видно из приведенной ниже таблицы разностей, в формулу Ньютона для интерполирования вперед входят разности, расположенные на диагонали, начинающейся в f_0 и идущей вниз, а в формуле Ньютона для интерполирования назад используются разности, расположенные на диагонали, начинающейся тоже в f_0, но идущей вверх:



3. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона. Сейчас мы приведем выражения для остаточных членов интерполяционных формул Ньютона для интерполирования вперед и назад, следующие из формулы (6.51) для остаточного члена интерполяционной формулы для неравноотстоящих узлов.

Для первой формулы получим:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) =$$

$$= (x - x_0)(x - x_0 - h)\dots(x - x_0 - nh)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, t\,(t-1)\,\dots\,(t-n). \qquad (6.59)$$

Для второй

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) =$$

$$= (x - x_0)(x - x_0 + h) \ldots (x - x_0 + nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t\,(t+1) \ldots (t+n). \qquad (6.60)$$