Вычмат-2025

14 июня 2025 г.

Содержание

1 Основные определения

1.1 Предмет вычислительной математики. Метод и задачи вычислительной математики в терминах функционального анализа.

1.1.1 Предмет вычислительной математики.

Необходимость разработки методов доведения математических исследований до числового результата привела к созданию отдельной дисциплины - **вычислительной математики**.

Определение 1.1: Вычислительная математика-1

Область математики, которая призвана разрабатывать методы доведения до числового результата решений основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств.

Определение 1.2: Вычислительная математика-2

Раздел математики, связанный с построением и анализом алгоритмов численного решения математических задач.

Таким образом, **вычислительная математика** помогает решать численные задачи с помощью ЭВМ.

1.1.2 Функциональный анализ.

Определение 1.3: Функциональный анализ

Область математики, изучающая свойства функциональных пространств.

Для определения **задач и методов** вычислительной математики введем важнейшие **понятия функционального анализа**.

Определение 1.4: Понятия функционального анализа

- Функциональные метрические пространства.
- Функции, определенные на функциональных пространствах.

Функциональный анализ рассматирвает элементы более общего (не евклидова) пространства.

1.1.3 Функциональные метрические пространства.

В функциональном анализе вместо евклидовых пространств рассматриваются абстрактные пространства, элементы которых могут иметь самую различную природу.

Определение 1.5: Метрическое пространство

Абстрактное множество, для любых двух элементов x и y которого **опрделено** понятие **расстояния** $\rho(x, y)$.

Лемма 1.1: Свойства расстояния

Расстояние $\rho(x, y)$ должно удовлетворять следующим **свойствам:**

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x$ совпадает с y.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \forall \ x, y, z \in \mathscr{R}$, где: $\mathscr{R}$ - метрическое пространство.

Евклидовы пространства с обычным определением расстояния удовлетворяют всем этим условиям. Но могут быть и другие метрические пространства.

Определение 1.6: Пространство непрерывных функций

Пространство $C[a, b]$ - множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.
Функция $f(x)$ непрерывная на $[a, b] \leftrightarrow f(x) \in C[a, b]$.

Пример 1.1: Неевклидово метрическое пространство

Пространства L_p, где $p \geq 1$ и $p \in \mathbb{R}$.

$$L_p = \{f(x)|\ f(x) \in \mathrm{C}[a,b],\ \int_a^b |f(t)|^p\,dt < \infty\}$$

Расстояние $\rho(x,y)$ в пространстве L_p определяется следующим образом:

$$\rho(x,y) = [\int_a^b |x(t)-y(t)|^p]^{\frac{1}{p}}$$

В каждом метрическом пространстве можно говорить об **окрестности данной точки**.

Определение 1.7: Окрестность точки

ε-окрестностью точки x некоторого метрического пространства $\mathscr{R}$ называется множество точек y таких, что:

$$\rho(x,y) \leq \varepsilon$$

Пример 1.2: Окрестность точки в L_p

Окрестность точки в L_p - это совокупность всех функций $y(t)$, принадлежащих L_p, для которых:

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt < \varepsilon^p$$

В вычислительной математике часто приходится заменять одну функцию $x(t)$ другой, более удобной для вычислительных целей. Обычно эту вторую функцию берут из ε-окрестности первой.

1.1.4 Функции, заданные на функциональном пространстве.

Определение 1.8: Операторы функционального пространства

Пусть нам даны два абстрактных (функциональных) пространства $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и каждому элементу $x \in \mathscr{R}_1$ поставлен в соответствие элемент $y \in \mathscr{R}_2$. Тогда будем говорить, что нам задан **оператор**:

$$y = A(x)$$

с областью определения $\mathscr{R}_1$ и областью значений, принадлежащих $\mathscr{R}_2$.

В частности, если $\mathscr{R}_2$ является областью вещественных или комплексных чисел, то оператор $A(x)$ - **функционал**.

Пример 1.3: Функционал

Оператором (функционалом) в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ $C[a, b]$ - **определенный интеграл**:

$$I(x) = \int_a^b x(t)\, dt$$

1.1.5 Методы и задачи вычислительной математики.

Определение 1.9: Задачи вычислительной математики

Многие задачи в вычислительной математике могут быть записаны в виде:

$$y = A(x)$$

где x и y принадлежат заданным пространствам $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и $A(x)$ - некоторых заданный оператор.

Далеко не всегда с помощью средств современной математики удается точно решить эти задачи, применяя конечное число шагов. Для этого используют **методы вычислительной математики**:

Определение 1.10: Основной метод вычислительной математики

Замена пространств $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ и оператора $A(x)$ другими пространствами $\overline{\mathscr{R}_1}$ $\overline{\mathscr{R}_2}$ и оператором $\overline{A}$, более удобными для вычислительных целей. Замена $\overline{y} = \overline{A}(\overline{x})$ должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$\rho(x, \overline{x}) < \varepsilon$$

$$\rho(y, \overline{y}) < \varepsilon$$

Иногда бывает достаточно произвести замену только пространств $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ или даже одного из них, или заменить только оператор.

Пример 1.4: Применение метода

$f(x) \in C[a, b]$. Требуется решить задачу:

$$y = \int_a^b f(x)\, dx$$

причем интеграл не берется в элементарных функциях.
Тогда возможны два пути:

1. **Замена пространств:** вместо $f(x)$ взять $P_n(x)$ - алгебраический многочлен степени n.
2. **Замена оператора:** вместо интегрирования построить интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$.

Определение 1.11: Вычислительный метод

Метод, используемый для преобразования задач к виду, удобному для реализации на ЭВМ.

Определение 1.12: Основные вычислительные методы

Основные классы вычислительных методов:

- **Методы эквивалентных преобразований** (замена исходной задачи другой (более простой), имеющее то же решение).
- **Методы аппроксимации** (аппроксимировать исходную задачу другой с небольшой погрешностью решения).
- **Итерационные методы** (через итерационные последовательности и функции).

Резюмируя, можно выделить **основные задачи** вычислительной математики:

Пример 1.5: Основные задачи

- Приближение множеств в функциональных пространствах.
- Приближение операторов, заданных на функциональных пространствах.
- Разработка рациональных алгоритмов и методов решения задач в условиях приминения современных вычислительных средств.

1.2 Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задач. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Правила записи приближенных чисел.

1.2.1 Источники и классификация погрешностей

При решении прикладной задачи с использованием ЭВМ получить точное решение задачи практически невозможно. Получаемое **решение** почти **всегда содержит погрешность**, т.е. является приближенным.

Определение 1.13: Источники погрешности решения

Пусть y - точное значение величины, а y^* - ее приближенное значение, тогда:

1. **Неустранимая погрешность:** $\delta_{\text{н}} y^*$ - математическая модель и исходные данные вносят в решение ошибку, которая не может быть устранена далее.
2. **Ошибка метода решения:** $\delta_{\text{м}} y^*$ - источник данной погрешности - метод решения задачи.
3. **Вычислительная погрешность:** $\delta_{\text{в}} y^*$ - определяется характеристикой машины ЭВМ.

Таким образом, полная погрешность результата решения задачи на ЭВМ складывается из трех составляющих:

$$\delta y^* = \delta_{\text{н}} y^* + \delta_{\text{м}} y^* + \delta_{\text{в}} y^*$$

На практике исходят из того, что:

- Погрешность метода должна быть на порядок меньше неустранимой погрешности.
- Величина вычислительной ошибки была хотя бы на порядок меньше величины погрешности метода.

1.2.2 Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть - точное (неизвестное) значение некоторой величины, a^* - приближенное (известное) значение той же величины (приближенное число).

Определение 1.14: Абсолютная погрешность

Модуль разности приближенного и точного значения некоторой величины:

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|$$

Определение 1.15: Относительная погрешность

Для соотншения погрешность величины и ее значения вводят понятие **относительной погрешности**:

$$\delta(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$$

Т.к. значение неизвестно, то непосредственное вычисление величин $\Delta(a^*)$ и $\delta(a^*)$ по предыдущим формулам невозможно, то вводят верхние границы погрешностей.

Определение 1.16: Верхние границы погрешностей

$\overline{\Delta(a^*)}$ и $\overline{\delta(a^*)}$ - верхние границы абсолютной и относительной погрешностей соответственно:

$$|a - a^*| \leq \overline{\Delta(a^*)}$$

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} \leq \overline{\delta(a^*)}$$

Причем, если величина $\overline{\Delta(a^*)}$ известна, то:

$$\overline{\delta(a^*)} = \frac{\overline{\Delta(a^*)}}{|a|}$$

Аналогично, если известна $\overline{\delta(a^*)}$:

$$\overline{\Delta(a^*)} = |a| \cdot \overline{\delta(a^*)}$$

1.2.3 Правила записи приближенных чисел.

Пусть приближенное число a^* задано следующим образом:

$$a^* = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_0.\beta_1\beta_2\dots\beta_m$$

где $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_0$ - целая часть, $\beta_1\beta_2\dots\beta_m$ - дробная.

Определение 1.17: Значащие цифры

Все цифры в записи числа a^*, начиная с первой ненулевой слева.

Определение 1.18: Верная цифра

Значащую цифру называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующей этой цифре.

Пример 1.6: Значащие и верные цифры

Пусть $a^* = 0.010300$, $\Delta(a^*) = 2 \cdot 10^{-6}$:

1. **Значащие цифры:** 10300
2. **Верные цифры:** 1030

Лемма 1.2: Связь числа верных цифр с отностительной погрешностью

Если число a^* имеет ровно N верных цифр, то $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$.

Лемма 1.3: Правило записи

Неравенство верхней границы абсолютной погрешности эквивалентно следующему:

$$a^* - \overline{\Delta a^*} \leq a \leq a^* + \overline{\Delta a^*}$$

Тот факт, что число a^* является приближенным значением числа a с абслоютной точностью $\varepsilon = \overline{\Delta(a^*)}$ принято записывать в виде:

$$a = a^* \pm \overline{\Delta(a^*)}$$

Аналогично, можно получить следующие неравенства:

$$a^*(a - \overline{\delta a^*}) \leq a \leq a^*(a + \overline{\delta a^*})$$

Тот факт, что число a^* является приближенным значением числа a с относительной точностью $\varepsilon = \overline{\delta(a^*)}$ принято записывать в виде:

$$a = a^*(1 \pm \overline{\delta(a^*)})$$

Как правило, числа a^*, $\overline{\Delta(a^*)}$ и $\overline{\delta(a^*)}$ указывают с одинаковым числом цифр после десятичной точки.

Если число a^* приводится в качестве результата **без указания величины погрешности**, то принято считать, что все его значащие цифры являются **верными**.

1.2.4 Округления.

Определение 1.19: Округление методом усечения

Отбрасываем все цифры, расположенные слева от n-ой значащей цифры.

Определение 1.20: Округление по дополнению

Если первая слева от отбрасываемых цифр **меньше** 5, то сохраняемые цифры остаются **без изменения**.
Иначе: в младший сохраняемый разряд **добавляется** единица.

Границы абсолютной и относительной **погрешностей** принято округлять **в сторону увеличения**.

1.3 Погрешности арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции одной и многих переменных.

1.3.1 Погрешности арифметических операций над приближенными числами.

Теорема 1.1: Абсолютная погрешность сложения/вычитания

Абсолютная погрешность алгебраической суммы или разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т.е:

$$\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

Доказательство.

$$\Delta(a^* \pm b^*) = |(a \pm b) - (a^* \pm b^*)| = |(a - a^* \pm (b - b^*))| \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

□

Следствие 1.1: Абсолютная погрешность сложения/вычитания

В силу того, что $\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta(a^*)}$, получаем: $\overline{\Delta(a^* \pm b^*)} = \overline{\Delta(a^*)} + \overline{\Delta(b^*)}$.

Теорема 1.2: Относительная погрешность сложения/вычитания

Пусть a и b: $ab > 0$. Тогда справедливы неравенства:

$$\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{\max},\ \delta(a^* - b^*) \leq \nu\delta_{\max}$$

где: $\delta_{\max} = \max\{\delta(a^*),\ \delta(b^*)\}$, $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$

Доказательство.

$$|a + b|\delta(a^* + b^*) = \Delta(a^* + b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

$$|a|\delta(a^*) + |b|\delta(b^*) \leq |a|\delta_{\max} + |b|\delta_{\max}$$

$$(|a| + |b|)\delta_{\max} = |a + b|\delta_{\max}$$

Т.е. $\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{\max}$

$$|a-b|\delta(a^*-b^*) = \Delta(a^*-b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*) \leq |a+b|\delta_{\max}$$

Т.е. $\delta(a^*-b^*) \leq \frac{|a+b|}{|a-b|}\delta_{\max} = \nu\delta_{\max}$ □

Итог: при вычислении разности близких числе точность теряется примерно в $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$ раз.

Теорема 1.3: Относительная погрешность умножения/деления

Для относительных погрешностей произведения и частного приближенных чисел верны оценки:

$$\delta(a^*b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$$

$$\delta(\frac{a^*}{b^*}) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}$$

Доказательство.

$$|ab|\delta(a^*b^*) = \Delta(a^*b^*) = |ab - a^*b^*|$$

$$|(a-a^*)b+(b-b^*)a-(a-a^*)(b-b^*)| \leq |a-a^*|\cdot|b|+|b-b^*|\cdot|a|+|a-a^*|\cdot|b-b^*|$$

$$\Delta(a^*)|b| + \Delta(b^*)|a| + \Delta(a^*)\Delta(b^*) = c$$

Разделим c на $|ab|$:

$$\delta(a^*b^*) = \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$$

$$|\frac{a}{b}|\delta(\frac{a^*}{b^*}) = \Delta(\frac{a^*}{b^*}) = |\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}| = |\frac{ab^* - a^*b}{bb^*}| = c$$

$$|b^*| = |b-(b-b^*)| = |b|\cdot|1-\frac{b-b^*}{b}| \geq |b|\cdot(1-\delta(b^*))$$

$$c \leq \frac{|ab^*-a^*b|}{|b|^2(1-\delta(b^*))}$$

Разделим c на $|\frac{a}{b}|$:

$$\delta(\frac{a^*}{b^*}) \leq \frac{\delta(a^*+b^*)}{1-\delta(b^*)}$$

□

Следствие 1.2: Относительная погрешность умножения/деления

Если $\delta(a^*) << 1$ и $\delta(b^*) << 1$, то:

$$\overline{\delta(a^*b^*)} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

$$\overline{\delta(\frac{a^*}{b^*})} \approx \overline{\delta(a^*)} + \overline{\delta(b^*)}$$

Общий итог:

- Выполнение арифметических операций над приближенными числами сопровождается потерей точности.
- Наибольшая потеря точности может произойти при вычитании близких чисел одного знака.
- Единственная операция, при которой потеря не происходит, это сложение чисел одного знака.

1.3.2 Погрешность функции одной и многих переменной.

Теорема 1.4: Погрешность функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема в окрестности точки x^*. Тогда формулы для границ погрешностей:

$$\overline{\Delta(y^*)} \approx |f^{'}(x^*)|\overline{\Delta(x^*)}$$

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \nu^*\overline{\delta(x^*)}$$

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \nu\overline{\delta(x^*)}$$

где $\nu^* = |x^*|\frac{f^{'}(x^*)}{f(x^*)}$, $\nu = |x|\frac{f^{'}(x)}{f(x)}$

Доказательство. Частный случай формул погрешностей функции многих переменных. □

Теорема 1.5: Погрешность функции многих переменных

Пусть $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ - дифференцируемая в области G функция m переменных, вычисление которой производится при приближенно заданных аргументах $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$. Тогда:

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{m} \max_{[x,x^*]} |f'_{x_j}| \Delta(x_j^*)$$

Доказательство. Вытекает из формулы конечных приращений Лагранжа:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x^*}) = \sum_{j=1}^{m} f'_{x_j}(\overline{x})(x_j - x_j^*),\ \overline{x} \in [x, x^*]$$

Далее берем модуль от правой и левой частей уравнения и правую часть заменяем на максимум. Получаем требуемое соотношение. □

Следстиве 1.3: Погрешность функции многих переменных

Если $x^* \approx x$, то можно положить:

$$\overline{\Delta(y^*)} \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x)| \overline{\Delta(x_j^*)}$$

$$\overline{\Delta(y^*)} \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x^*)| \overline{\Delta(x_j^*)}$$

Из этих формул вытекают приближенные равенства для оценки границ относительных погрешностей:

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \sum_{j=1}^{m} \nu_j \overline{\delta(x_j^*)}$$

$$\overline{\delta(y^*)} \approx \sum_{j=1}^{m} \nu_j^* \overline{\delta(x_j^*)}$$

где:

$$\nu_j = \frac{|x_j| \cdot |f'_{x_j}(x)|}{|f(x)|},\ \nu_j = \frac{|x_j^*| \cdot |f'_{x_j}(x^*)|}{|f(x^*)|}$$

1.4 Корректность вычислительной задачи. Примеры корректных и некорректных задач.

Определение 1.21: Вычислительная задача

Постановка вычислительной задачи **включает в себя**:
1. **Задание** множества допустимых входных данных X.
2. **Задание** множества возможных решений Y.

Цель вычислительной задачи состоит в нахождении решения $y \in Y$ по заданному входному данному $x \in X$.

Определение 1.22: Корректность вычислительной задачи

Вычислительная задача называется **корректной**, если выполнены следующие **все** требования:
1. Решение $y \in Y$ **существует** при любых входных данных $x \in X$.
2. Решение **единственно**.
3. Решение **устойчиво** по отношению к малым возмущениям входных данных (решение зависит от входных данных непрерывным образом: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x^*$: $\Delta x^* < \delta \to y^*$: $\Delta(y^*) < \varepsilon$).

Пример 1.7: Корректная вычислительная задача

Решение квадратного уравнения: $x^2 + bx + c = 0$ ($a = 1$).

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

- **Наличие решения:** в области $\mathbb{R}$ должно выполняться неравенство: $b^2 - 4ac \geq 0$.
- **Единственность решения:** два корня можно представить в виде вектора $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
- **Устойчивость решения:** корни являются непрерывными функциями коэффициентов b и c.

Вычисление определенного интеграла: $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ($f(x) \in C[a,b]$).

$$I^* = \int_a^b f^*(x)\,dx,\ \Delta(f^*(x)) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f^*(x)|$$

$$\Delta(I^*) = |I - I^*|$$

$$|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f^*(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x) - f^*(x)|\,dx \leq (b-a)\cdot\Delta(f^*(x))$$

Значит, $\forall\varepsilon > 0$ неравенство $\Delta(I^*) < \varepsilon$ будет выполено, если потребовать выполнения условия $\Delta(f^*(x)) < \delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Пример 1.8: Некорректная вычислительная задача

Нахождение ранга матрицы в общем случае: $A \in M_n(R)$
Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Тогда:

$$rk(A) = 1,\, rk(A_\varepsilon) = 2$$

Т.е. задача неустойчива.

Вычисление производной $u(x) = f^{'}(x)$ приближенно заданной функции.
Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f^*(x)$ - приближенная функция, $u^*(x) = (f^*)^{'}(x)$. Тогда:

$$\Delta(f^*(x)) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f^*(x)|$$

$$\Delta(u^*(x)) = \max_{x\in[a,b]} |u(x) - u^*(x)|$$

Если взять $f^*(x) = f(x) + \alpha\sin(\frac{x}{\alpha^2})$, где $0 < alpha << 1$. Тогда:

$$u^*(x) = u(x) + \alpha^{-1}\cos(\frac{x}{\alpha^2})$$

Следовательно:

$$\Delta(u^*) = \alpha^{-1},\, \Delta(f^*) = \alpha$$

Значит, сколь угодно малой погрешности задания функции $f(x)$ может отвечать сколь угодно большая погрешность производной $f^{'}(x)$.

1.5 Обусловленность вычислительной задачи. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

На практике погрешность исходных данных не всегда сколь угодно малая, точность их ограничена.

Определение 1.23: Обусловленность вычислительной задачи

Чувствительность решения задачи к малым погрешностям исходных данных.

Задачу называют:
- **хорошо обусловленной**, если малым погрешностям исходных данных отвечают малые погрешности решения.
- **плохо обусловленной**, если возможны сильные изменения решения при малых погрешностях исходных данных.

Определение 1.24: Число обусловленности

Коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их погрешностям входных данных.

Обычно под числом обусловленности понимают одну из величин (ν_Δ, ν_δ):
- **Абсолютное число обусловленности**: $\Delta(y^*) \le \nu_\Delta \Delta(x^*)$.
- **Относительное число обусловленности**: $\delta(y^*) \le \nu_\delta \delta(x^*)$.

Для плохо обусловленной задачи $\nu >> 1$.
Если $\nu_\delta \approx 10^N$, то порядок N показывает число верных цифр, которое может быть утеряно в результате по сравнению с числом верных цифр входных данных.

Определение 1.25: Обусловленность задачи вычисления функции одной переменной

Для задачи, состоящей в вычислении по заданному x значения $y = f(x)$ дифференцируемой функции $f(x)$, числа обусловленности примут вид:

$$\nu_\Delta \approx |f^{'}(x)|$$

$$\nu_\delta \approx \frac{|x| \cdot |f^{'}(x)|}{|f(x)|}$$

Пример 1.9: Обусловленность вычислительных задач

Задача вычисления значения функции: $y = \exp(x)$.

$$\nu_\delta = |x|$$

При реальных вычислениях эта величина не может быть очень большой (в противном случае переполнение).

Задача вычисления значения функции: $y = \sin(x)$.

$$\nu_\Delta = |\cos(x)| \leq 1,\ \nu_\delta = |\cot(x)| \cdot |x|$$

При $x \to \pi k$, $\nu_\delta \to \infty$. Следовательно, задача плохо обусловлена.

Задача вычисления определенного интеграла: $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

$$\Delta(I^*) = |I - I^*| = |\int_a^b f(x) - f^*(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x) - f^*(x)|\,dx$$

$$\delta(I^*) \leq \frac{\int_a^b |f(x) - f^*(x)|\,dx}{|\int_a^b f(x)\,dx|} \leq \frac{\int_a^b |\frac{f(x)-f^*(x)}{f(x)}| \cdot |f(x)|\,dx}{|\int_a^b f(x)\,dx|}$$

$$\frac{\int_a^b \delta(f^*(x))|f(x)|\,dx}{|\int_a^b f(x)\,dx|} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{|\int_a^b f(x)\,dx|} \cdot \overline{\delta(x)}$$

Таким образом, $\delta(I^*) \leq \frac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{|\int_a^b f(x)\,dx|} \cdot \overline{\delta(x)}$.

Значит, при знакопостоянной функции $f(x)$, $\nu_\delta \approx 1$. Иначе: $\nu_\delta > 1$ (если $f(x)$ сильно осцилированная).

1.6 Вычислительные алгоритмы. Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов.

Определение 1.26: Вычислительный алгоритм

Вычислительный метод, доведенный до степени детализации (точное предписание действий), позволяющей реализовать его на ЭВМ.

Определение 1.27: Корректность вычислительных алгоритмов

Вычислительный алгоритм - корректный, если выполнены условия:

- Алгоритм за конечное число элементарных для ЭВМ операций (сложение, вычитание, умножение, деление) приводит к достижению результата.
- Алгоритм устойчив по отношению к малым погрешностям исходных данных.
- Алгоритм вычислительно устойчив, т.е: погрешность решения стремится к нулю, если машинный эпсилон стремится к нулю.

Определение 1.28: Обусловленность вычислительных алгоритмов

Отражает чувствительность результата работы алгоритма к малым, но неизбежным ошибкам округления.
Алгоритм называют:

- **хорошо обусловленным**, если малые относительные погрешности округления (характеризуемые машинной точностью ε_{M}) приводят к малой относительной вычислительной погрешности $\delta(y^*)$ результата y^*.
- **плохо обусловленным**, если вычислительная погрешность может быть недопустимо большой.

Определение 1.29: Число обусловленности вычислительного алгоритма

Если $\delta(y^*)$ и ε_{M} связаны неравенством $\delta(y^*) \leq \nu_{\text{A}}\varepsilon_{\text{M}}$, то число ν_{A} называют **числом обусловленности** вычислительного алгоритма.

Для плохо обусловленных алгоритмов $\nu_{\text{A}} >> 1$.

2 Решение нелинейных уравнений, СЛАУ

2.1 Постановка задачи решения нелинейных уравнений. Основные этапы решения задачи.

2.1.1 Задача решения нелинейного уравнения.

Определение 2.1: Задача решения нелинейного уравнения

Нахождение корня - $\overline{x}$ такого, что: $f(\overline{x}) = 0$.

Определение 2.2: Простой/кратный корень

Корень $\overline{x}$ уравнения $f(x)$ называется:

- **Простым**: если $f^{'}(\overline{x}) \neq 0$.
- **Кратным степени m**: если $f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ для $k \in \overline{[1, \ldots, m-1]}$ и $f^{(m)}(\overline{x}) \neq 0$.

Геометрически корень $\overline{x}$ соответствует точке пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox.
Корень $\overline{x}$ является простым, если график пересекает ось Ox под ненулевым углом, и кратным, если пересечение происходит под нулевым углом.

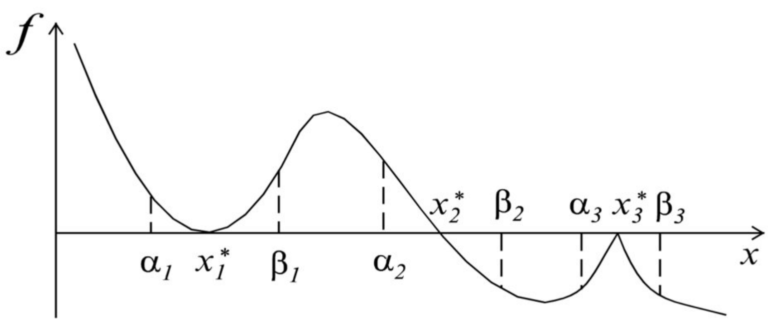

Рис. 2.1

Виды корней:

а) $\boldsymbol{x^*_1}$ – кратный корень;

б) $\boldsymbol{x^*_2}$ – простой корень;

в) $\boldsymbol{x^*_3}$ – вырожденный корень.

Рис. 1: Пример корней уравнения

Определение 2.3: Основные этапы решения нелинейного уравнения

Решение задачи вычисления корней нелинейного уравнения, как правило, осуществляется в два этапа:

- **Локализация корней**.
- **Итерационное уточнение корней**.

2.1.2 Локализация корней.

Определение 2.4: Отрезок локализации

Отрезок $[a, b]$, содержащий только один корень $\overline{x}$, называют **отрезком локализации**.

Цель этапа локализации: для каждого из корней указать отрезок локализации (длину отрезка стараются по возможности сделать минимальной).

Для локализации корней широко применяют построение таблиц значений функции $f(x)$ вида $y_i = f(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. При этом способе локализации, о наличии на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ корня судят по перемене знака функции на концах отрезка.

Теорема 2.1: Больцано-Коши

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Тогда отрезок $[a, b]$ содержит по крайне мере один корень уравнения $f(x) = 0$.

2.1.3 Итерационное уточнение корней.

Основная идея: использовать итерационный метод, что позволит построить последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ приближений к корню $\overline{x}$.

Определение 2.5: Виды итерационных методов

Итерационный метод может быть:

- **одношаговым**: для вычисления очередного приближения $x^{(n+1)}$ используется только одно предыдущее значение $x^{(n)}$.
- k**-шаговым**: для вычисления $x^{(n+1)}$ используется k предыдущих приближений $x^{(n-k+1)}, x^{(n-k+2)}, \ldots, x^{(n)}$.

Определение 2.6: Итерационная функция

Итерационную последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ строится через **итерационную функцию**:

$$\phi(x^{(0)}) = x^{(1)}$$

$$\phi(x^{(1)}) = x^{(2)}$$

$$\ldots$$

$$\phi(x^{(n-1)}) = x^{(n)}$$

$$\ldots$$

2.2 Скорость сходимости итерационных методов уточнения решения нелинейного уравнения.

Определение 2.7: Скорость сходимости

Говорят, что метод сходится со скоростью **геометрической прогрессии**, знаменатель которой $q < 1$, если для всех n справедливо:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \le c_0 q^n$$

Пусть существует σ-окрестность корня $\overline{x}$ такая, что если приближение $x^{(n)}$ принадлежит этой окрестности, то справедлива оценка:

$$|x^{(n+1)} - \overline{x}| \le C|x^{(n)} - \overline{x}|^p$$

где $C > 0$ и $p \ge 1$ - постоянные. Тогда:

- Если $p = 1$ и $C < 1$, то метод обладает **линейной** скоростью сходимости в указанной σ-окрестности корня.
- Если $p > 1$, то метод обладает **сверхлинейной** скоростью сходимости: при $p = 2$ - **квадратичной**, при $p = 3$ - **кубической**.

Лемма 2.1: Связь линейной и геометрической сходимости

Пусть одношаговый итерационный метод обладает линейной скоростью сходимости в некоторой σ-окрестности корня $\overline{x}$. Тогда $\forall x^{(0)} \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$:

- Итерационная последовательность $x^{(n)}$ не выходит за пределы этой окрестности.
- Метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = C$.

А также имеет место следующая оценка:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \le q^n |x^{(0)} - \overline{x}|,\ n \ge 0$$

Доказательство. $q < 1 \to x^{(n)} \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$. Тогда $x^{(n)}$ сходися к $\overline{x}$. Справедливость оценки установим через индукцию:
При $n = 0$:

$$|x^{(0)} - \overline{x}| \le |x^{(0)} - \overline{x}|$$

При переходе от $n = m - 1$ **к** $n = m$:

$$|x^{(m)} - \overline{x}| \le q|x^{(m-1)} - \overline{x}| \le q^m |x^{(0)} - \overline{x}|$$

□

2.3 Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений. Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика.

2.3.1 Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений.

Пусть $\overline{x}$ - корень уравнения, $f(x)$ - входные данные для задачи вычисления корня $\overline{x}$, $f^*(x)$ - приближенные значения функции.

Определение 2.8: Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений

Нельзя ожидать, что в окрестности корня относительная погрешность $\delta(f^*(x))$ окажется малой, например:

$$y = \sin(x)$$

в окрестности корней $x = \pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\delta(f^*(x)) = |x| \cdot \cot(x) \to \infty$.

Реально рассчитывать можно лишь на то, что малой окажется абсолютная погрешность вычисления значений функции:

$$\Delta(f^*(x)) \approx |f^{'}(x)| = |\cos(x)|$$

2.3.2 Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика.

Определение 2.9: Интервал неопределенности

Окрестность корня $(\overline{x} - \overline{\varepsilon}, \overline{x} + \overline{\varepsilon})$, в котором невозможно точно определить знак функции $f(x)$: знак вычисленного значения $f^*(x)$ может не совпадать со знаком $f(x)$ для $x \in (\overline{x} - \overline{\varepsilon}, \overline{x} + \overline{\varepsilon})$.

Лемма 2.2: Оценка $\overline{\varepsilon}$ для интервала неопределенности

Пусть корень $\overline{x}$ - простой. Тогда для близких к $\overline{x}$ значений x справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx f(\overline{x}) + f^{'}(\overline{x})(x - \overline{x}) = f^{'}(\overline{x})(x - \overline{x})$$

В интервале $(\overline{x}-\overline{\varepsilon}, \overline{x}+\overline{\varepsilon})$, $|f(x)| < \overline{\Delta(f^*(x))}$. Следовательно:

$$|f^{'}(x)(x-\overline{x})| < \overline{\Delta(f^*(x))}$$

Итог: $\overline{x} - \frac{\overline{\Delta(f^*(x))}}{|f^{'}(x)|} < x < \overline{x} + \frac{\overline{\Delta(f^*(x))}}{|f^{'}(x)|} \to \overline{\varepsilon} = \frac{1}{|f^{'}(x)|} \cdot \overline{\Delta(f^*(x))}$.

Определение 2.10: Число обусловленности задачи нахождения корня

$\nu_\Delta = \frac{1}{|f^{'}(\overline{x})|}$ - число обусловленности задачи нахождения корня.

Определение 2.11: Правило Гарвика

$$q^{(n)} = \frac{|x^{(n)} - x^{(n-1)}|}{|x^{(n-1)} - x^{(n-2)}|}$$

В интервале неопределенности $q^{(n)} > 1$, т.е. начинается разболтка - хаотическое поведение итерационной последовательности.

В этой ситуации вычисления следует прекратить и принять правильное решение. Лучшее из последовательностей приближений к решению становится $x^{(n-1)}$.

2.4 Метод бисекции решения нелинейных уравнений. Скорость сходимости. Критерий окончания.

2.4.1 Описание метода.

По сравнению с другими методами метод бисекции сходится довольно медленно. Однако он очень прост и непритязателен; для его применения достаточно, чтобы:

- Выполнялось неравенство: $f(a)f(b) \le 0$.
- Функция $f(x)$ была непрерывна.
- Верно определялся знак функции.

Метод гарантирует точность приближения, примерно равную радиусу интервала неопределенности $\overline{\varepsilon}$.

Определение 2.12: Описание метода

Пусть требуется найти с заданной точностью ε корень $\overline{x}$, а также задан отрезок локализации $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ такой, что: $f(a^{(0)}) \cdot f(b^{(0)}) < 0$, тогда:

$$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

- начальное приближенное значение корня.
Погрешность данного приближения: $\frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2}$

В качестве $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ берут тот из отрезков $[a^{(0)}, x^{(0)}]$ и $[x^{(0)}, b^{(0)}]$, на концах которого выполняется условие: $f(a^{(1)})f(b^{(1)}) \le 0$.
Середина полученного отрезка:

$$x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2}$$

- следующее приближение к корню с погрешностью: $\frac{b^{(1)} - a^{(1)}}{2} = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^2}$

На очередной $(n+1)$ итерации происходит следующее:

- Вычисляется $f(x^{(n)})$.
- Если $f(a^{(n)})f(x^{(n)}) \le 0$, то в качестве отрезка локализации $[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[a^{(n)}, x^{(n)}]$, иначе - $[x^{(n)}, b^{(n)}]$.
- Вычисляется $x^{(n+1)} = \frac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}$.

Если $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$, то останавливаемся: $\overline{x} \approx \frac{a^{(n-1)} + b^{(n-1)}}{2}$.

2.4.2 Скорость сходимости.

Лемма 2.3: Скорость сходимости

Середина n-го отрезка - точка $x^{(n)} = \frac{a^{(n)}+b^{(n)}}{2}$ дает приближение к корню $\overline{x}$, имеющее оценку погрешности:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Получаем: метод бисекции сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

2.4.3 Критерий окончания.

Лемма 2.4: Критерий окончания

Итерации следовательно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$(b^{(n)} - a^{(n)}) < 2\varepsilon$$

При его выполнении можно принять $x^{(n)}$ за приближение к корню с точностью ε.

2.5 Метод простой итерации. Скорость сходимости. Критерий окончания. Приведение к виду, удобному для итераций.

2.5.1 Описание метода.

Геометрически, метод можно представить следующим образом:

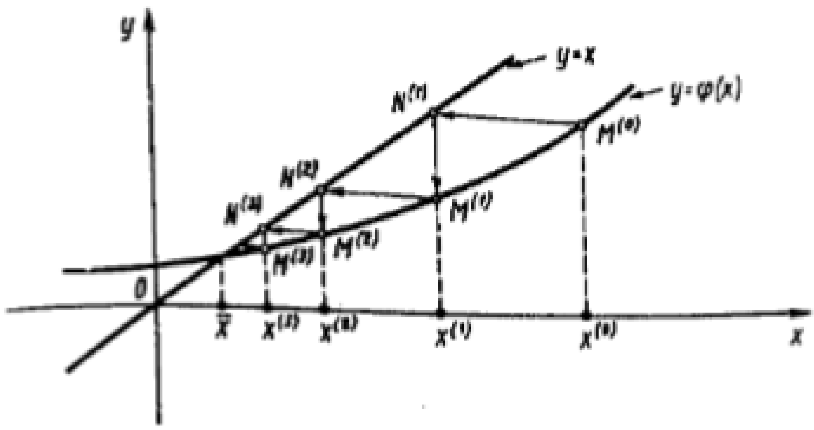

Рис. 2: Геометрическое представление метода простых итераций

Определение 2.13: Описание метода

Основная идея метода - привести нелинейное уравнение к виду, удобному для итерации:

$$x = \phi(x)$$

где функция $\phi(x)$ - итерационная функция.

В методе простых итераций $\phi(x) = x - \alpha f(x)$, где α - какая-то константа, $f(x)$ - исходная функция.
Убедимся, что корень $\phi(x)$ - корень $f(x)$:

$$\phi(\overline{x}) = \overline{x} - \alpha f(\overline{x}) = \overline{x}$$

Пусть $x^{(0)} \in [a, b]$ - начальное приближение корня, тогда:

$$x^{(1)} = \phi(x^{(0)})$$

$$x^{(2)} = \phi(x^{(1)})$$

$$\dots$$

$$x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}),\ n \geq 0$$

$$\dots$$

2.5.2 Скорость сходимости.

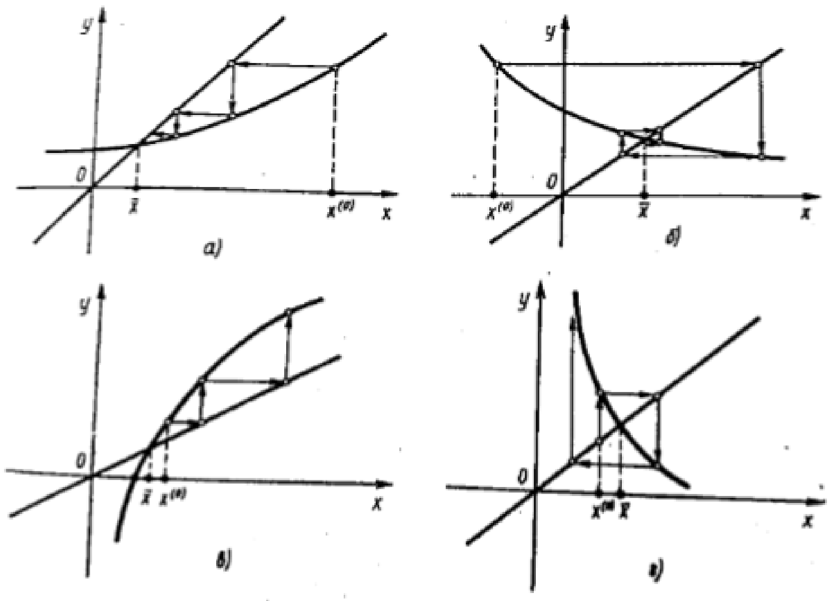

Рис. 3: Сходимость метода простых итераций

Как видно на рисунках, в случаях (а), (б) - метод сходится, а в (в) и (г) - расходится. Это связано с тем, что в (а) и (б) $|\phi^{'}(x)| < 1$, а в (в) и (г) наоборот, $|\phi^{'}(x)| > 1$.

Теорема 2.2: Об априорной погрешности

Пусть в некоторой σ-окрестности корня $\overline{x}$ функция $\phi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$$|\phi^{'}(x)| \leq q$$

где $0 \leq q < 1$ - постоянная.

Тогда $\forall x^{(0)} \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$ итерационная последовательность:

- Не выходит за пределы этой окрестности.
- Метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

А также справедлива следующая оценка погрешности:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq q^n |x^{(0)} - \overline{x}|$$

Доказательство. По определению:

$$x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$$

$$\overline{x} = \phi(\overline{x})$$

Тогда:

$$x^{(n+1)} - \overline{x} = \phi(x^{(n)}) - \phi(\overline{x}) = \phi^{'}(\xi^{(n)})(x^{(n)} - \overline{x})$$

Причем:

$$\xi^{(n)} \in [x^{(n)}, \overline{x}]$$

Значит:

$$|x^{(n+1)} - \overline{x}| = |\phi^{'}(\xi^{(n)})| \cdot |x^{(n)} - \overline{x}| \leq q \cdot |x^{(n)} - \overline{x}|$$

Следовательно: интерполяционная последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ сходится линейно к $\overline{x}$ (отсюда получаем, что последовательность сходится со скоростью геометрической последовательности со знаменателем q). □

Априорные оценки погрешности позволяют еще до вычислений дать некоторое заключение о качестве метода.

2.5.3 Критерий окончания.

Теорема 2.3: Об апостериорной погрешности

Пусть в некоторой σ-окрестности корня $\overline{x}$ функция $\phi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$$|\phi^{'}(x)| \leq q$$

где $0 \leq q < 1$ - постоянная.

Тогда $\forall x^{(0)} \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$ верна следующая апостериорная оценка погрешности:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x^{(n)} - x^{(n-1)}|, \; n \geq 1$$

Доказательство.

$$x^{(n)} - \overline{x} = \phi(x^{(n-1)}) - \phi(\overline{x}) = \phi^{'}(\xi^{(n)})(x^{(n-1)} - \overline{x})$$

Пусть:

$$\phi^{'}(\xi^{n}) = \alpha^{(n+1)}$$

Тогда:

$$x^{(n)} - \overline{x} = \alpha^{(n+1)}(x^{(n+1)} - \overline{x})$$

$$\alpha^{(n+1)}(x^{(n-1)} - x^{(n)} + x^{(n)} - \overline{x}) = \alpha^{(n+1)}(x^{(n-1)} - x^{(n)}) + \alpha^{(n+1)}(x^{(n)} - \overline{x})$$

Значит:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq |\alpha^{(n+1)}| \cdot |x^{(n-1)} - x^{(n)}| + |\alpha^{(n+1)}| \cdot |x^{(n)} - \overline{x}|$$

$$(1 - |\alpha^{(n+1)}|) \cdot |x^{(n)} - \overline{x}| \leq |\alpha^{(n+1)}| \cdot |x^{(n-1)} - x^{(n)}|$$

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq \frac{|\alpha^{(n+1)}|}{1 - |\alpha^{n+1}|} \cdot |x^{(n-1)} - x^{(n)}|$$

Т.к.

$$\begin{cases} |\alpha^{(n+1)}| \leq q \\ 1 - |\alpha^{(n+1)}| \geq 1 - q \end{cases}$$

то:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq \frac{q}{1-q} \cdot |x^{(n-1)} - x^{(n)}|$$

□

Если величина q известна, то неравенство выше дает эффективный метод контроля погрешности и можно сформулировать следующий критерий окончания итерационного процесса.

Следствие 2.1: Критерий остановки

Вычисления следует вести до выполнения неравенства:

$$\frac{q}{1-q}|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon$$

или равносильному ему неравенства:

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Использование данного критерия окончания требует знание величины q. Чтобы избавиться от нее, оценим q.

Лемма 2.5: Оценка величины q

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \frac{1-\overline{\alpha^{(n)}}}{\overline{\alpha^{(n)}}}\varepsilon$$

Доказательство. Заметим, что в малой окрестности корня величина производной $\phi'(x)$ практически постоянна:

$$\phi'(x) \approx \phi'(\overline{x})$$

Тогда величину $\alpha^{(n)} = \phi'(\xi^{(n-1)})$ можно приближенно заменить на $\phi'(\overline{x})$.
Следовательно:

$$x^{(n)} - x^{(n-1)} = \phi(x^{(n-1)}) - \phi(x^{(n-2)}) = \phi'(\overline{\xi^{(n)}})(x^{(n-1)} - x^{(n-2)})$$

где: $\overline{\xi^{(n)}} \in [x^{(n-1)}, x^{(n-2)}]$.

Тогда:

$$\overline{\alpha^{(n)}} = \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = \phi'(\overline{\xi^{(n)}}) \approx \phi'(\overline{x})$$

Таким образом: можно положить $\alpha^{(n)} \approx \overline{\alpha^{(n)}}$.

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < |\frac{1-\overline{\alpha^{(n)}}}{\overline{\alpha^{(n)}}}|\varepsilon$$

□

2.5.4 Приведение к виду, удобного для итераций.

Теорема 2.4: Приведение к виду, удобного для итераций

Предположим, что производная $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и положительна. Тогда существуют постоянные m и M такие, что $0 < m \leq f'(x) \leq M$, $x \in [a, b]$.
Найдем такое α, что $|\phi'(x)| \leq q < 1$, причем значение q - минимально.

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{m+M}$$

Доказательство. Т.к. $m \le \phi^{'}(x) \le M$, то:

$$1 - \alpha M \le \phi^{'}(x) \le 1 - \alpha m$$

В соотношении:

$$|\phi^{'}(x) \le q|$$

Величина q должна быть минимальна.

Следовательно:

$$|\phi^{'}(x) \le \max_{\alpha} |\{|1 - \alpha M|, |1 - \alpha m|\}$$

Получаем:

$$1 - \alpha m = -1 + \alpha M$$

Отсюда:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{m + M}$$

□

2.6 Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Вывод итерационной формулы метода Ньютона.

Расчетную формулу метода можно получить, используя различные подходы.

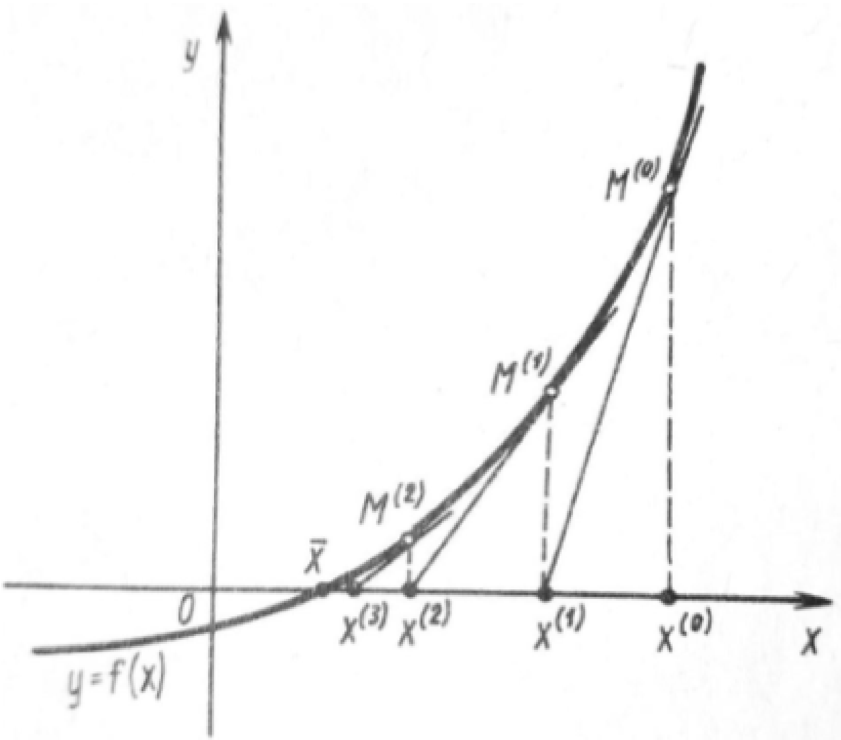

Рис. 4: Метод касательных

Определение 2.14: Метод касательных

Шаги алгоритма:

- Пусть $x^{(0)} \in [a, b]$ - начальное приближение к корню $\overline{x}$.
- Выбираем точку $M(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$.
- Строим через M касательную к графику $f(x)$.
- Пересечение с осью Ox - следующее приближение $x^{(1)}$.

Продолжая этот процесс далее, получим последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ приближений к корню $\overline{x}$.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$, имеет вид:

$$y = f(x^{(n)}) + f^{'}(x^{(n)})(x - x^{(n)})$$

Полагая в равенстве $y = 0$ и $f'(x^{(n)}) \neq 0$, получаем:

$$0 = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)})$$

Расчетная формула:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})},\ n \geq 0$$

С более общих позиций метод Ньютона можно рассматривать как итерационный метод, использующий специальную линеаризацию задачи.

Определение 2.15: Метод линеаризации

Пусть приближение $x^{(n)}$ уже получено. Представим функцию в окрестности точки $x^{(n)}$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^{(n)})^2$$

где: $\xi \in [x, x^{(n)}]$

Заменяя в уравнении $f(x) = 0$ функцию $f(x)$, получаем:

$$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0$$

Принимая решение уравнения за новое приближение $x^{(n+1)}$, приходим к формуле:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

В качестве начального приближения можно выбрать **не любую** точку из $[a, b]$. Иначе: касательная может пересечь Ox вне интервала.

Теорема 2.5: Критерий выбора начального приближения

Пусть $f(x) \in C^2[a, b]$ и $f'(x)$ и $f''(x)$ - знакопостоянны.
Тогда итерационная последовательность метода Ньютона сходится, если в качестве $x^{(0)}$ выбрать точку такую, что:

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$$

2.7 Априорная погрешность метода Ньютона.

Теорема 2.6: Об априорной погрешности

Пусть $f(x) \in C^2[a,b]$ - отрезок локализации и $\overline{x}$ - простой корень. Тогда существует некоторая σ-окрестность: $(\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma)$: $\forall x^{(0)} \in (\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma)$, итерационная последовательность не выходит из этой окрестности и справедлива оценка:

$$|x^{(n+1)} - \overline{x}| \le C|x^{(n)} - \overline{x}|^2,\ n \ge 0$$

где: $C = \sigma^{-1}$.

Доказательство. Т.к. $f \in C^2[a,b]$, то:

$$\exists \alpha, \beta > 0\colon \begin{cases} 0 < \alpha \le |f^{'}(x)| \\ |f^{''}(x)| < \beta \end{cases}$$

Тогда:

1. $0 = f(x^{(n)}) + f^{'}(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)})$
2. $f(x) = f(x^{(n)}) + f^{'}(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + \frac{f^{''}(\xi)}{2}(x - x^{(n)})^2$

Подставим во второе уравнение $x = \overline{x}$: $f(\overline{x}) = 0$

$$0 = f(x^{(n)}) + f^{'}(x^{(n)})(\overline{x} - x^{(n)}) + \frac{f^{''}(\xi)}{2}(\overline{x} - x^{(n)})$$

Вычтем из перовго уравнения второе:

$$0 = f^{'}(x^{(n)})(\overline{x} - x^{(n)} - x^{(n+1)} + x^{(n)}) + \frac{f^{''}(\xi)}{2}(\overline{x} - x^{(n)})^2$$

$$f^{'}(x^{(n)})(x^{(n+1)} - \overline{x}) = \frac{f^{''}(\xi)}{2}(x^{(n)} - \overline{x})^2$$

$$\alpha|x^{(n+1)} - \overline{x}| \le \frac{\beta}{2}|x^{(n)} - \overline{x}|^2$$

$$|x^{(n+1)} - \overline{x}| \le \frac{\beta}{2\alpha}|x^{(n)} - \overline{x}|^2$$

Возьмем за $\sigma = \frac{2\alpha}{\beta}$:

$$|x^{(n+1)} - \overline{x}| \le \sigma^{-1}|x^{(n)} - \overline{x}|^2$$

$\square$

Следствиве 2.2: Априорной погрешности

Априорная оценка погрешности для метода Ньютона:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq \sigma q^{2^n},\ n \geq 0$$

где: $q = \sigma^{-1}|x^{(0)} - \overline{x}|$.

Доказательство. По индукции. $\square$

2.8 Апостериорная оценка погрешности (критерий окончания). Правило выбора начального приближения на отрезке локализации корня, гарантирующего сходимость метода.

Теорема 2.7: Об апостериорная погрешность

Пусть $x^{(n)} \in (\overline{x} - \frac{\sigma}{2}, \overline{x} + \frac{\sigma}{2})$, тогда: в условиях теоремы об априорной погрешности:

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

Доказательство.

$$2|x^{(n)} - \overline{x}| \leq 2\sigma^{-1}|x^{(n-1)} - \overline{x}|^2$$

$$2 \cdot \sigma^{-1}|x^{(n-1)} - \overline{x}| \cdot |x^{(n-1)} - \overline{x}| \leq |x^{(n-1)} - \overline{x}|$$

$$|x^{(n-1)} - x^{(n)} + x^{(n)} - \overline{x}| \leq |x^{(n-1)} - x^{(n)}| + |x^{(n)} - \overline{x}|$$

$$|x^{(n)} - \overline{x}| \leq |x^{(n-1)} - x^{(n)}|$$

□

Следствие 2.3: Критерий остановки

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon$$

где: ε - заданная точность.

2.9 Модификации метода Ньютона. Упрощенный метод Ньютона. Метод хорд.

2.10 Модификации метода Ньютона. Метод секущих. Скорость сходимости метода секущих.

3 Интерполяция

4 Дифференцирование и интегрирование

5 Список вопросов

1. Предмет вычислительной математики. Метод и задачи вычислительной математики в терминах функционального анализа.
2. Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задач. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Правила записи приближенных чисел.
3. Погрешности арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции одной и многих переменных.
4. Корректность вычислительной задачи. Примеры корректных и некорректных задач.
5. Обусловленность вычислительной задачи. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.
6. Вычислительные алгоритмы. Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов.
7. Постановка задачи решения нелинейных уравнений. Основные этапы решения задачи.
8. Скорость сходимости итерационных методов уточнения решения нелинейного уравнения.
9. Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений. Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика.
10. Метод бисекции решения нелинейных уравнений. Скорость сходимости. Критерий окончания.
11. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Вывод итерационной формулы метода Ньютона.
12. Априорная оценка погрешности метода Ньютона (теорема о скорости сходимости).
13. Апостериорная оценка погрешности (критерий окончания). Правило выбора начального приближения на отрезке локализации корня, гарантирующего сходимость метода.
14. Модификации метода Ньютона. Упрощенный метод Ньютона. Метод хорд.
15. Модификации метода Ньютона. Метод секущих. Скорость сходимости метода секущих.
16. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Постановка задачи.
17. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Определение понятия нормы вектора. Абсолютная и относительная погрешности вектора.

18. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Определение понятия нормы матрицы, подчиненной норме вектора. Геометрическая интерпретация нормы матрицы.
19. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений для приближенно заданной правой части. Количественная мера обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. Геометрическая интерпретация числа обусловленности.
20. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений для приближенно заданных матрицы и правой части.
21. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления. LU – разложение. Свойства метода.
22. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схемы частичного и полного выбора ведущих элементов. Свойства методов.
23. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление решений системы уравнений с несколькими правыми частями.
24. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление обратной матрицы.
25. Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление выражений вида v = CWw. Вычисление определителя матрицы.
26. Метод Холецкого решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Свойства метода.
27. Метод прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Свойства метода.
28. Постановка задачи приближения функций. Приближение функций обобщенными многочленами.
29. Приближение методом интерполяции. Интерполяция обобщенными многочленами.
30. Понятия линейно-независимой системы функций на заданном множестве точек. Теорема о существовании единственного решения задачи интерполяции.
31. Понятия ортогональной системы функций на заданном множестве точек. Утверждение о существовании единственного решения задачи интерполяции с помощью ортогональной системы функций. Решение задачи интерполяции для этого случая.

32. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
33. Погрешность полиномиальной интерполяции.
34. Интерполяционный многочлен с кратными узлами. Погрешность интерполяции с кратными узлами.
35. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева и их свойства. Применение для решения задачи минимизации погрешности.
36. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков. Разделенные разности и их свойства.
37. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков с помощью разделенных разностей.
38. Интерполяционная формула Ньютона для равных промежутков. Конечные разности и их связь с разделенными разностями.
39. Вывод формул Ньютона для интерполирования вперед и назад.
40. Проблемы глобальной полиномиальной интерполяции. Интерполяция сплайнами. Определение сплайна. Интерполяционный сплайн.
41. Интерполяция сплайнами. Построение локального кубического интерполяционного сплайна.
42. Интерполяция сплайнами. Глобальные способы построения кубического интерполяционного сплайна.
43. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление первой производной. Погрешность формул.
44. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление второй производной. Погрешность формул.
45. Общий подход к выводу формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного многочлена.
46. Обусловленность формул численного дифференцирования.
47. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула прямоугольников. Погрешность формулы.
48. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула трапеций. Погрешность формулы.
49. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула Симпсона. Погрешность формулы.
50. Апостериорные оценки погрешности квадратурных формул. Правило Рунге.