Лекция 10

Мат. ожидание

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < +\infty$$

Мат. ожидание линейно

Если ξ, η – независ $\Rightarrow E(\xi\eta) = E\xi\eta$

$P(\xi \geq 0) = 1 \Rightarrow E\xi \geq 0$

$\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$

Т о монотонной сходимости (Леви)

$\xi_n(\omega)$: $\forall \omega\ \ \xi_{n+1}(\omega) \geq \xi_n(\omega)$

Д-во:

$\exists\ \xi(\omega)$ – поточечный предел $\xi_n(\omega)$

$\exists\ \forall n \quad \exists\ E\xi_n = m_n$

тогда, если $\exists \lim m_n$,

то $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$

Т об. огр. сходимости (Лебег)

$\xi_n(\omega)$, η – сл. вел.: $E|\eta| < \infty$, $\forall n\ |\xi_n| \leq \eta$

тогда, если $\exists \lim m_n$,

то $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$

Т] об огр. сходимости (Лебег)

$\xi_n(\omega)$, η – сл. вел.: $E|\eta| < \infty$, $\forall n\ |\xi_n| \le \eta$

тогда, если $\xi = \lim \xi_n$, то $E\xi = \lim E\xi_n$

Неравенство Йенсена

φ – вып. функция

$\varphi(E\xi) \le E(\varphi(\xi))$

Неравенство Ляпунова

$\exists\ 0 < a < b$

тогда $(E|\xi|^a)^{1/a} \le (E|\xi|^b)^{1/b}$

Нер-во Гёльдера

$p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(отсюда $p, q > 1$)

$E|\xi\eta| \le (E|\xi|^p)^{1/p} \cdot (E|\eta|^q)^{1/q}$

Если $p = q = 2$

Нер-во Минковского

$p > 1$

$E(|\xi+\eta|^p)^{1/p} \le (E|\xi|^p)^{1/p} + (E|\eta|^p)^{1/p}$

$E g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_\xi(x)\,dx < +\infty$

Дисперсия

$\exists\ E\xi^2 < +\infty$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ $\qquad (Var\,\xi)$ вариация

Св-ва дисперсии

1) $D\xi \geq 0$ $\qquad D\xi = 0 \Leftrightarrow \exists\, c = const$
$P(\xi = c) = 1$

2) $D(a\xi) = a^2 D(\xi)$, $\qquad a = const$

$D(-\xi) = D\xi$

3) $D(\xi + a) = D\xi$, $\qquad a = const$

4) ξ, η - нез., то $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — "удобная формула"

Индикатор

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \qquad A \in \mathcal{A}$$

(I_A)

а) Бернуллевская случ. вел.

$P(\xi = 0) = q = 1 - p$

$P(\xi = 1) = p$

$E\xi = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = pq$

2) Биномиальные сл. вел.

$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ $\xi_1 \dots \xi_n$ – берн. сл. вел. с вер. успеха p

$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $k = 0, \dots, n$

$E\xi = np$

$D\xi = npq$

3) Poisson (λ)

$E\xi = D\xi = \lambda$

$\left(E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \right)$

(для дисперсии $E(\xi(\xi-1)))$

4a) $U[0, 1]$

$E\xi = 1/2 = \int_0^1 x\,dx = 1/2$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{10}$

4) $U[a, b]$

$E\xi = \frac{a+b}{2}$

$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$

] $\frac{\xi - a}{b - a} = \eta \sim U[0, 1]$

$\xi = a + \eta(b-a)$

Лекция

$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$ в смысле Римана-Стилтьеса

Дост. усл. мат ожидания:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, dF(x) < +\infty$ (т.е. интеграл абс. сходится)

Если $\exists c > 0 : P(|\xi| < c) = 1$
тогда $\exists E(\xi)$ (ограниченная)

Св-ва мат ожидания $\Leftrightarrow$ св-ва интеграла:

1) Линейность

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$E(c) = c$

$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E(\xi) + \beta E(\eta)$

Если ξ, η – независимы, тогда $\Leftarrow$

$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$

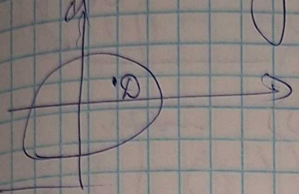
$\Rightarrow$

в одну стрелка сторону.

Ex (когда есть зависимость (ξ, η) и $E(\xi\eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$)

$\exists$ вектор (ξ, η) равномерно распределенный в круге D:

$D: x^2 + y^2 \leq 1$



Если $P(\xi \geq 0) = 1 \Rightarrow E(\xi) \geq 0$

строгое рав-во, если $P(\xi = 0) = 1$, $E\xi = 0$,

Если вер-ть константы ограничена константой 2, то E (константы 1) $\leq$ константы

$\xi_2 \geq \xi_1(\omega)$ $\omega \in \Omega$

Ex Поточечная сх-ть последовательности ф-ий

$\exists$ $f_n(x) = x^n$ $\forall x \in [0,1]$, тогда:

$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\forall x \in [0,1)$

$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ $\forall x = 1$

$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ поточечно

Th (о мажорируемой (ограниченной) (о единой) сходимости Лебега)

$\exists$ $\xi_n(\omega)$ – послед. случ. величин

η – случ. вел: $E|\eta| < +\infty$, $\forall n$ $|\xi_n| \le \eta$ с вероятностью 1

Тогда если $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$, то:

$$E(\xi) = \lim_{n\to\infty}(E(\xi_n))$$

Th (о монотонной сх-сти) (Леви)

$\xi_n(\omega)$: $\forall \omega$ $\xi_{n+1}(\omega) \ge \xi_n(\omega)$

(т.е. монотонна для каждого отдельного случая)

Пусть $\xi(\omega)$ – $\xi(\omega)$ – поточечный предел $\xi_n(\omega)$

Пусть $\forall n$ $\exists$ $E(\xi_n) = m_n$.

Тогда:

если $\exists$ $\lim m_n$, то

$$E(\xi) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} m_n$$

Дополнение:

1) Если $\exists$ случ. величина, что ограничивает каждую случ. вел, то у каждой случ. вел $\exists$ $E(\xi)$

Классические нер-ва

1) Неравенство Йенсена:

$\exists\ \varphi$ — выпуклая (вниз) ф-ия, тогда:

$$\varphi(E(\xi)) \leq E(\varphi(\xi))$$

Частный случай: $(E(\xi))^2 \leq E(\xi^2)$

2) Неравенство Ляпунова: (следствие нер-ва Йенсена)

Пусть $0 < a < b$, то:

$\cancel{(E(|\xi|^a))^{\frac{1}{a}}}$

$$(E(|\xi|^a))^{\frac{1}{a}} \leq (E(|\xi|^b))^{\frac{1}{b}}$$

? Т.е. если $\exists\ E(|\xi|^{26})^{\frac{1}{26}}$, то

$\exists\ E(|\xi|^3)$

3) Нер-во Гёльдера:

$p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(т.е. $p, q > 1$)

~~Тогда~~: $\cancel{E(|\xi\eta|) \leq E|\xi^p|^{\frac{1}{p}}}$

Гёльдерова норма

Тогда:

$$E|\xi\eta| \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$$

В частности $p=q=2$:

$$E|\xi\eta| \le \sqrt{E|\xi|^2 E|\eta|^2} \text{ — КБШ}$$

4) Неравенство Минковского

$p \ge 1$

$$(E|\xi+\eta|^p)^{\frac{1}{p}} \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Д-во неравенств в Ширяеве

Д-во КБШ:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$$ (т.е. ввели нормировку)

$$0 \le E(|\xi_1| - |\eta_1|)^2 = \underbrace{E\xi_1^2}_{1} + \underbrace{E\eta_1^2}_{1} - 2E|\xi_1\eta_1|$$

т.к. мат. ожидание квадрата

$\to E|\xi \eta| \leq 1$

$E\left(\dfrac{\xi \eta}{E\xi^2 \ldots} \right)$

Мат. ожидание от ф-ии случ. величины

$\exists$ $g(t)$ — нек-рая борелевская (прообраз борелевской ф-ии — борелевский) (Ex: $g(t)$ — линейная
— монотонная)

$Eg(\xi)$ — ? Заметим, что

$g \circ \xi(\omega)$ — тоже случ. вел-на (т.к. борелевская ф-ия)
композиция

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_\xi(x)\, dx$$

плотность распред. ξ

(если $\int |g(x)|$ — $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f_\xi(x)\,dx < +\infty$)

(если $\exists$)

$\exists$ $g(\xi) = \eta$, тогда:

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\eta(x)\, dx$$

Ex:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \qquad g(x) \quad g(x)$$

Для дискретных:

$$E(\xi) = \sum_i g(a_i) P(\xi = a_i)$$

Дисперсия случайной величины

def

Пусть $E\xi^2 < +\infty$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ — дисперсия

т.к. $\exists E\xi^2$, что $\exists E\xi$

$D\xi \overset{def}{=} Var\,\xi$

Отрицат. дисперсия $\Rightarrow$ ошибка (т.к. это мат ожидание квадрата)

Св-ва дисперсии:

1) $D(\xi) \geq 0$!!! (св-во инт)

$D(\xi) = 0 \Leftrightarrow \exists\, \cancel{c}\ const!$:

$P(\xi = c) = 1$

$(\xi = c$ п.в (н.н) почти наверное п.в.)

почти всюду

2) $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$, $c - const$ ← св-ва интеграла + мат ожид.

В частности, $D(-\xi) = (-1)^2 D(\xi)$

3) $D(\xi + c) = D(\xi)$ (т.е. от сдвига не зависит)

4) Если ξ и η нез-мы, то

$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$

Вычисление:

В св-ве 3

возьмем $c = -E\xi$:

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E(\xi + c)^2 - (E\xi + c)^2$

Д-во св-ва (3):

$D(\xi+c) \stackrel{def}{=} E((\xi+c)-E(\xi+c))^2 =$

$= E(\xi+c-E\xi-\underset{\overset{\uparrow}{Ec}}{c})^2 = E(\xi-E\xi)^2 = D\xi$

(для констант мат. ожидание совпадает с конст)

Частн. случаи:

1) Дискретный случ:

$D\xi = \sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i(a_i - E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i(a_i - \sum_i p_i a_i)^2$

или:

$D(\xi) = \sum_i p_i a_i^2 - (\sum_i p_i a_i)^2$ (по модифицированной ф-ле (см. св-ва))

2) Абсолютно непр. случ

$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt)^2 dx$

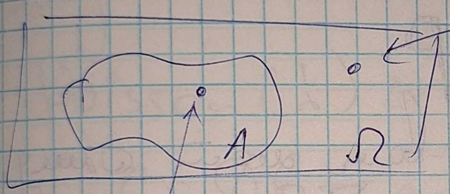
или: $D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx\right)^2$

Ex:

$\mathbb{I}_A$ — индикатор события (ф-ция на Ω)

$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ — бернуллиевская случ. вел. (принимает 2 знач)

$\mathbb{I}_A(\omega) = 0$



$\mathbb{I}_A(\omega) = 1$

Простая случ. величина — линейная оболочка индикаторов от различных событий (конечных событий)

$E\,\mathbb{I}_A(\omega) = P(A)$

1) Бернуллиевская случ. вел:

$P(\xi = 0) = q = 1 - p$

$P(\xi = 1) = p$

$E\xi = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

2) Биномиальная случ. вел.:

$\xi_1, \dots, \xi_n$ – нез. бернуллиевские

с вер-тью успеха p.

$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, по св-вам мат ожид $E\xi = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = np$

$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$

$E\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k-1} \dots$

т.к. при $k=0$: $0 \cdot C_n^0 p^0 q^n = 0$

$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot p \cdot q^{\overbrace{n-1-(k-1)}^{n-k}} =$

$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{\widetilde{n-k}} \overset{j:=k-1}{=}$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} p^j q^{n-j-1} = np(p+q)^{n-1} =$$

$= np.$

$D\xi = npq \qquad (D\xi = pq)$

$\left(D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i\right)$!!!

3) Пуассоновская с.в.

Poisson(λ) ← Пуассоновское расп. с параметром λ

$E\xi = D\xi = \lambda$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

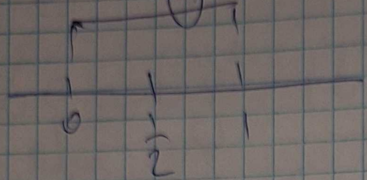
Подсказка: для дисперсии посчитать $E(\xi(\xi-1))$

4) Равномерная случ. вел

$U[0;1]$

Если симм. случ. вел-на и $\exists$ мат. ожидание, что мат. ожидание $\in$ центр. симметрии от плотности f_ξ

ξ $E\xi = \frac{1}{2} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ $U[0,1]$



$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_0^1 x^2\,dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

4) Равномерное распред $U[a,b]$

$E\xi = \frac{a+b}{2}$

$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$ (проверить)

Т.к. $\frac{\xi - a}{b-a} = \eta \sim U[0,1]$

$\Updownarrow$

$\xi = a + \eta(b-a)$

(по св-вам дисперсии)

5) Нормальная случ вел с параметрами $(0,1)$

$N(0,1)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$E\xi = 0$ (т.к. $f(x)$ четная)

экспонента "убивает" любой полином

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$ (либо взять по частям)

$D\xi = 1$ (док-ть!) (здесь взять по частям)

$$D\xi = E\xi^2 - \underbrace{(E\xi)^2}_{=0} = E\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \left(\begin{aligned} u(x) &= x e^{-\frac{x^2}{2}} \\ v(x) &= x \end{aligned} \right)$$

б) Норм. распред. общего вида:

$N(a, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$E\xi = a$

$D\xi = \sigma^2$