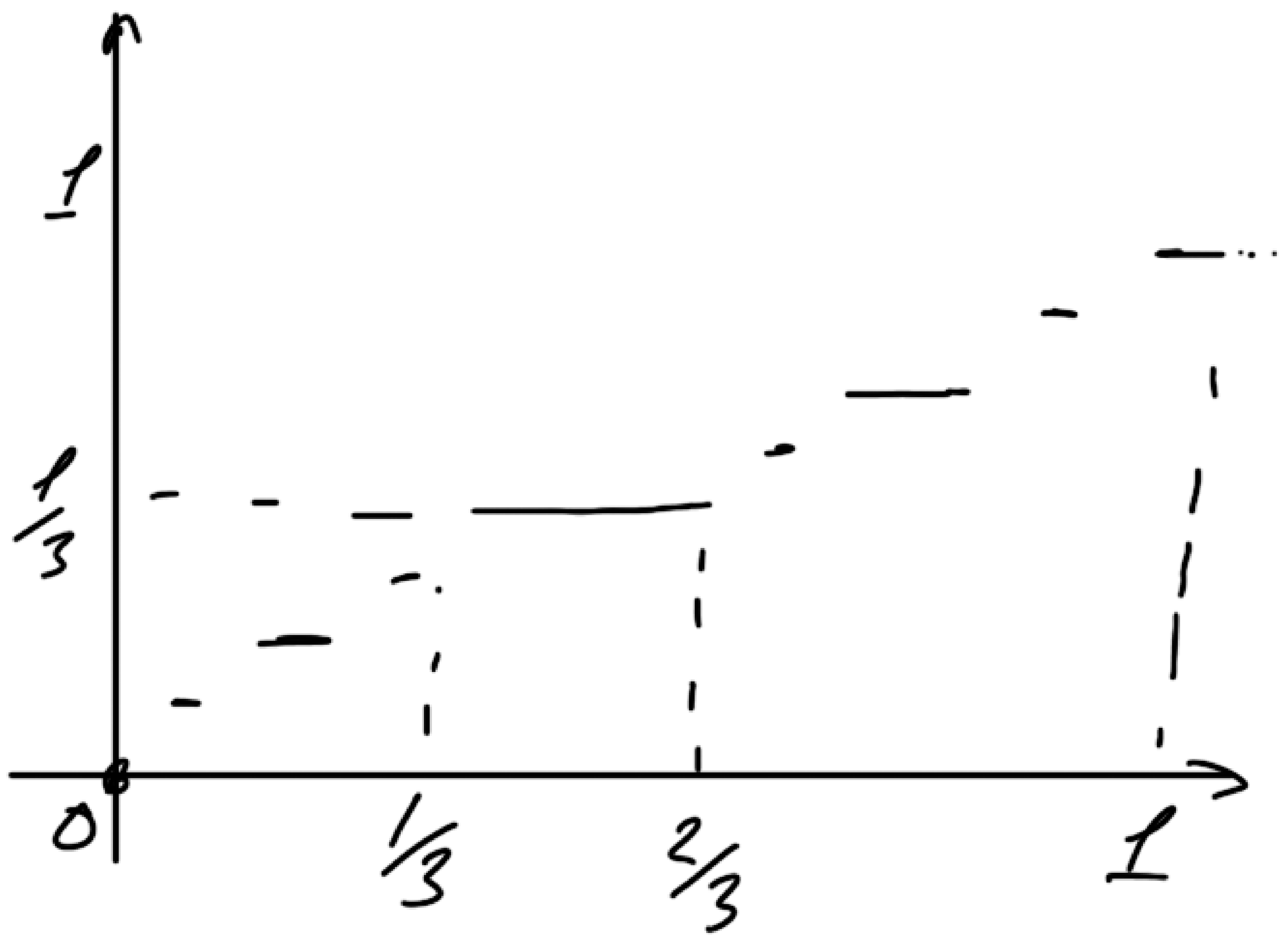
Лекция 7

Пример сингулярного распределения.

Канторова лестница



$F(0)=0$,

$F(1)=1$

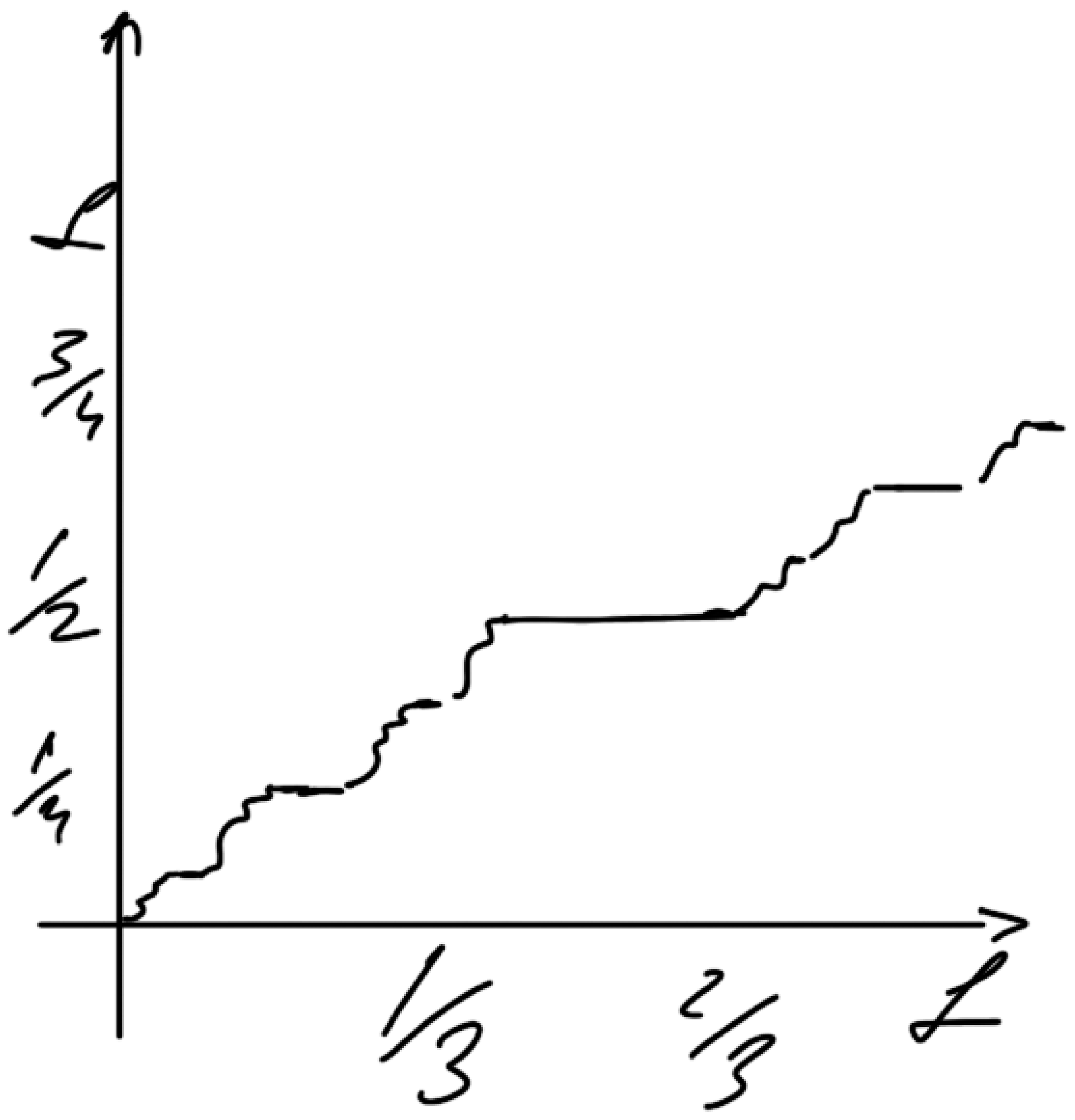
интервалы разбиваются на 3 равные части

На середине $F(x)=1/2$

Крайние сегменты разб. на 3 части

$F(x)=1/4$ и $F(x)=3/4$ соот.

и так далее до ∞ (счётное)



- непрерывна (но не абс. непр.)
- $f'(x)=0$ везде, кроме канторова мн-ва (почти везде)

(сингулярная ф-ция)

Мера Лебега мн-ва точек $= 0$

* $C_0 = [0, 1]$

$C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$

$C_2 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$

...

$C = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} C_i$ — канторово мн-во

или

мн-во чисел от 0 до 1, в троичной записи, которых нет "1"

Пример дискретных распределений

1) $P(\xi = c) = 1$ вырожд. сл. вел

2) Бернулли

$P(\xi = 0) = 1 - p; \quad P(\xi = 1) = p$

3) Бином. распределение

$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$

4) Равномерное дискретное

$P(\xi = k) = \frac{1}{n} \quad k = 1, \ldots n$

5) Пуассоновское с λ

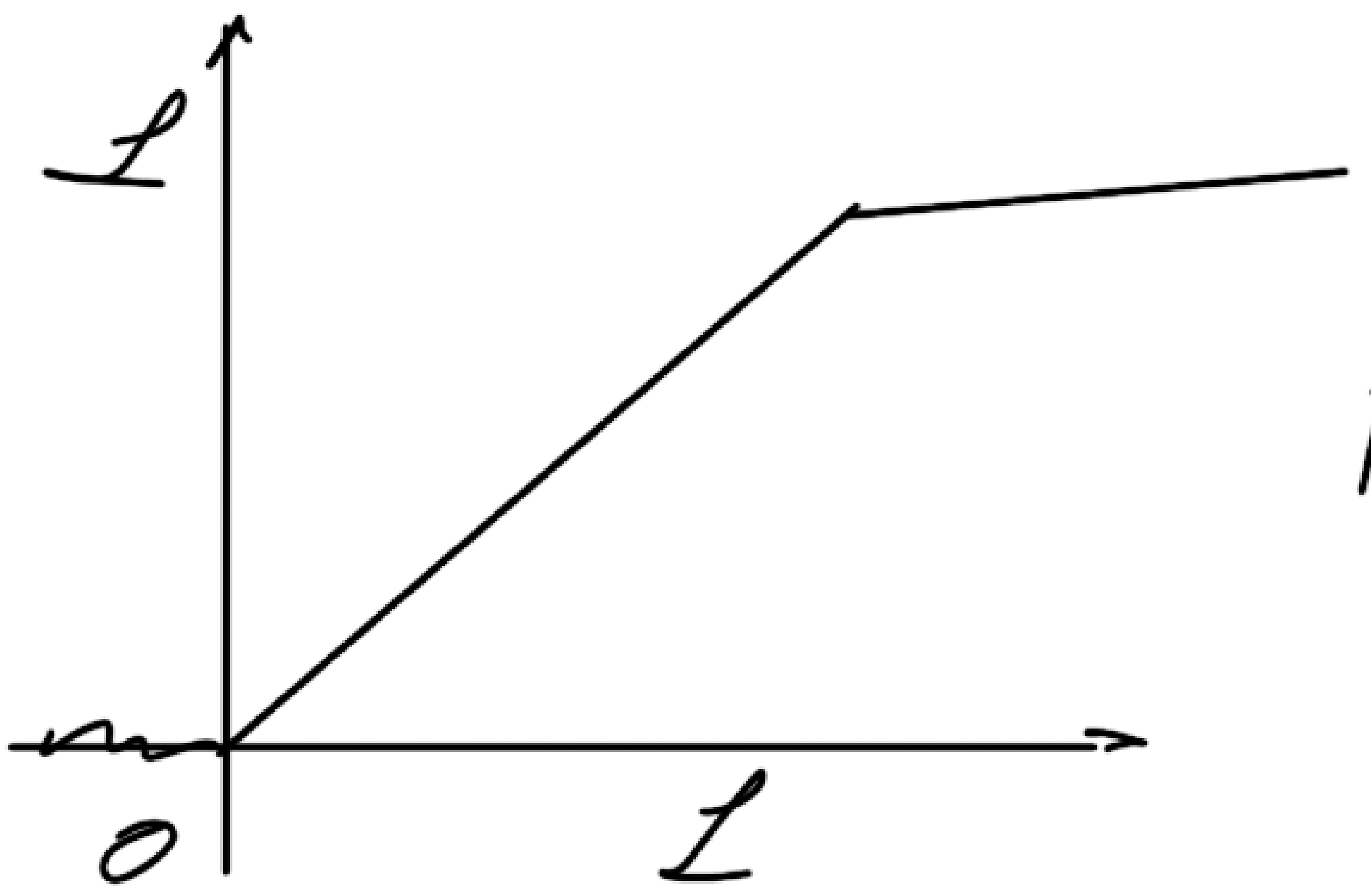
$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \{0\} \cup N$

6) Геометрическое

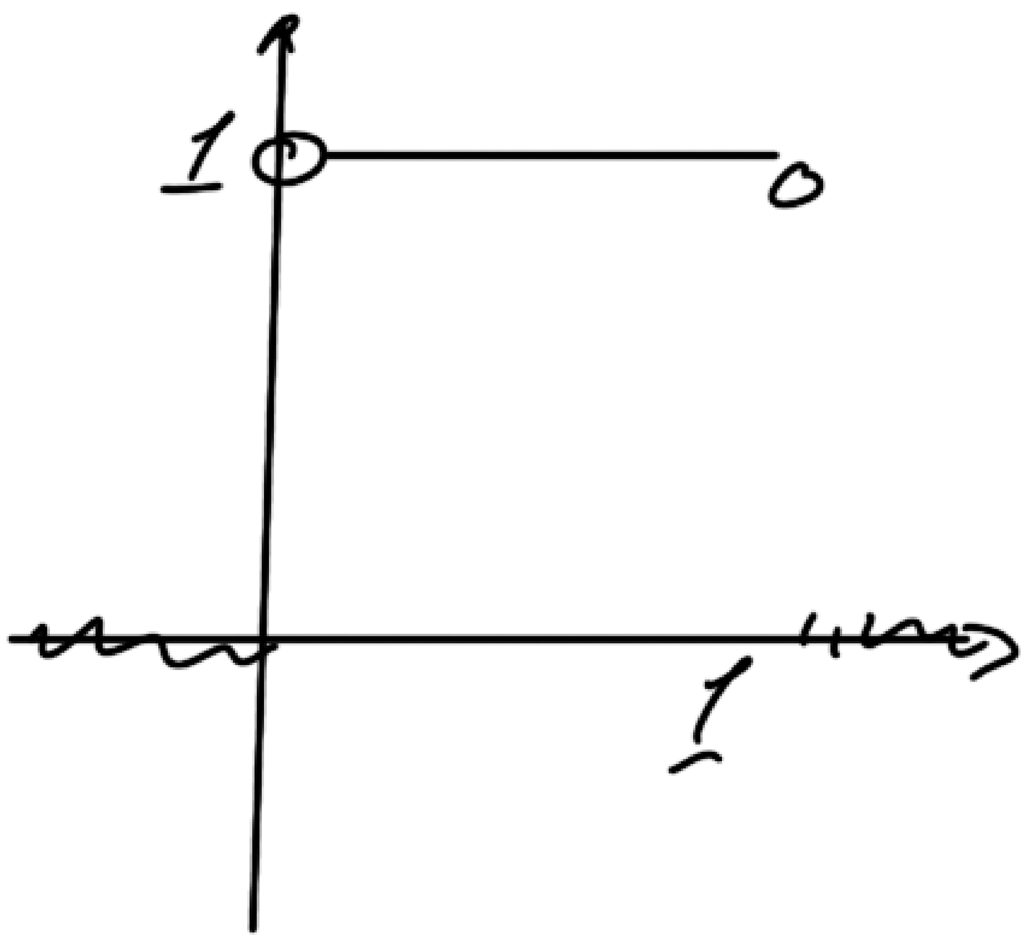
$P(\xi = k) = p(1-p)^k; \quad k = \{0\} \cup N$

Примеры абсолютно непрерывных распределений

1) Равномерное

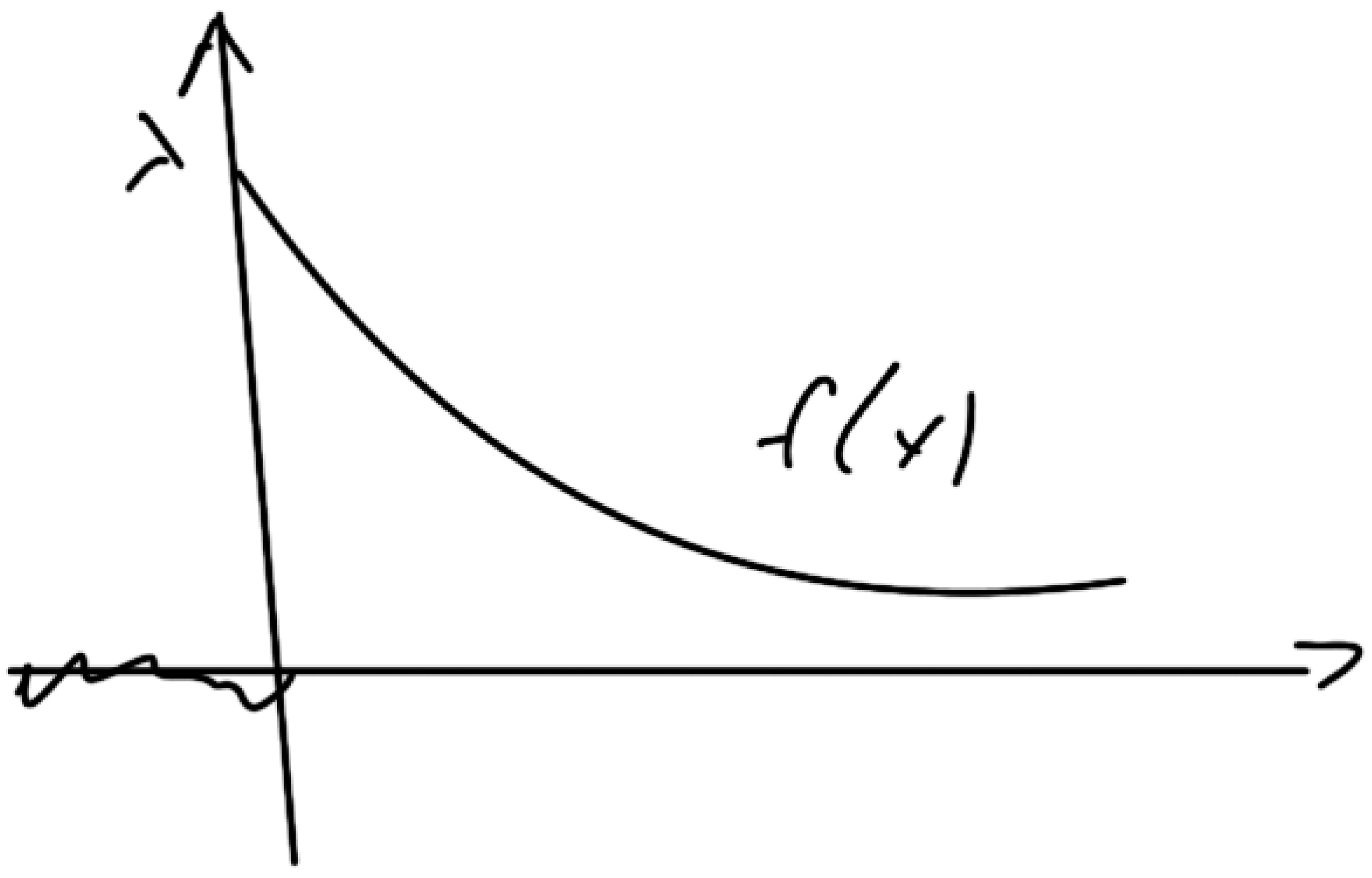


$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

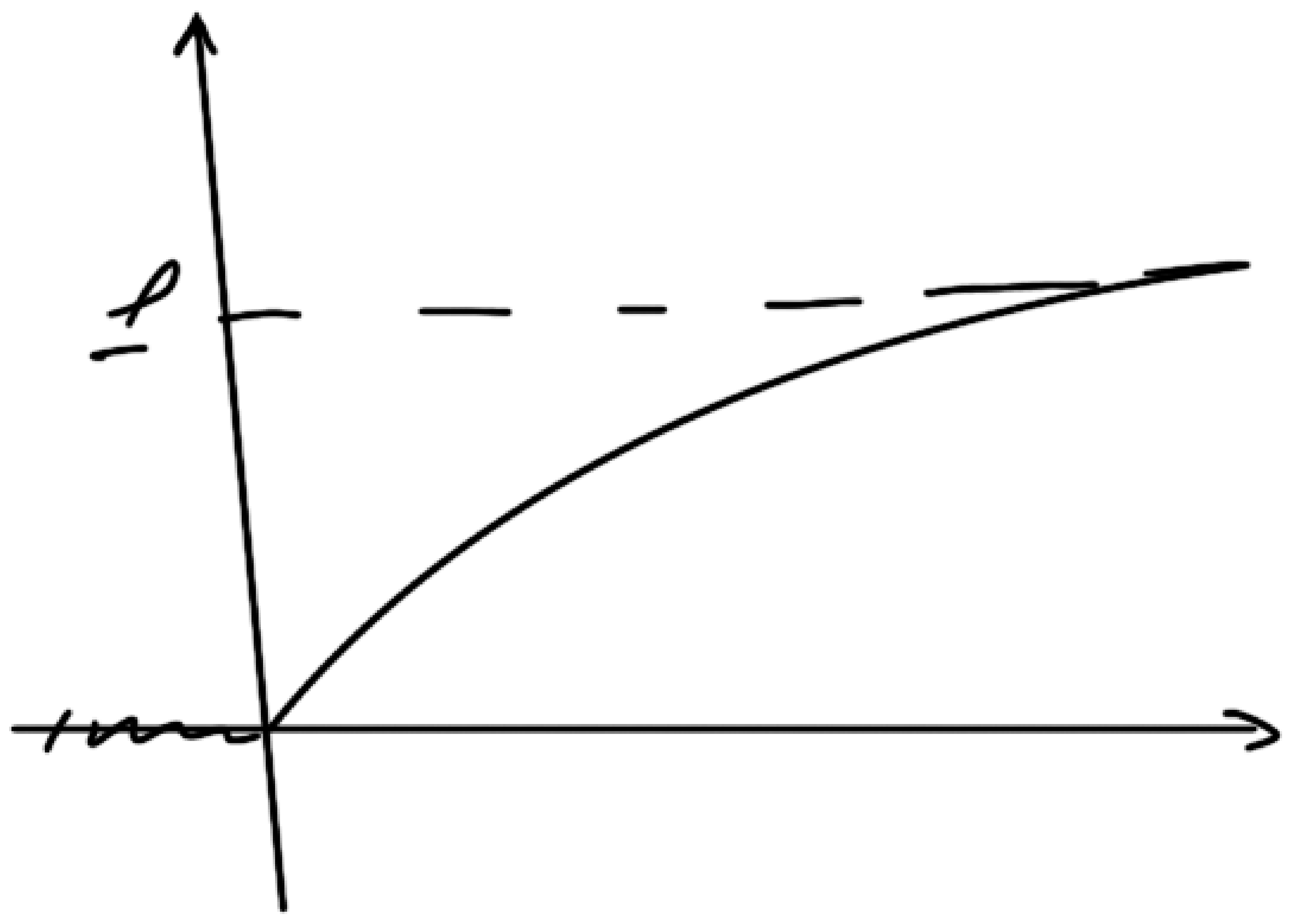


$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

2) Показательное (экспоненциальное)



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

3) Нормальное (Гауссовское)

а) стандартное

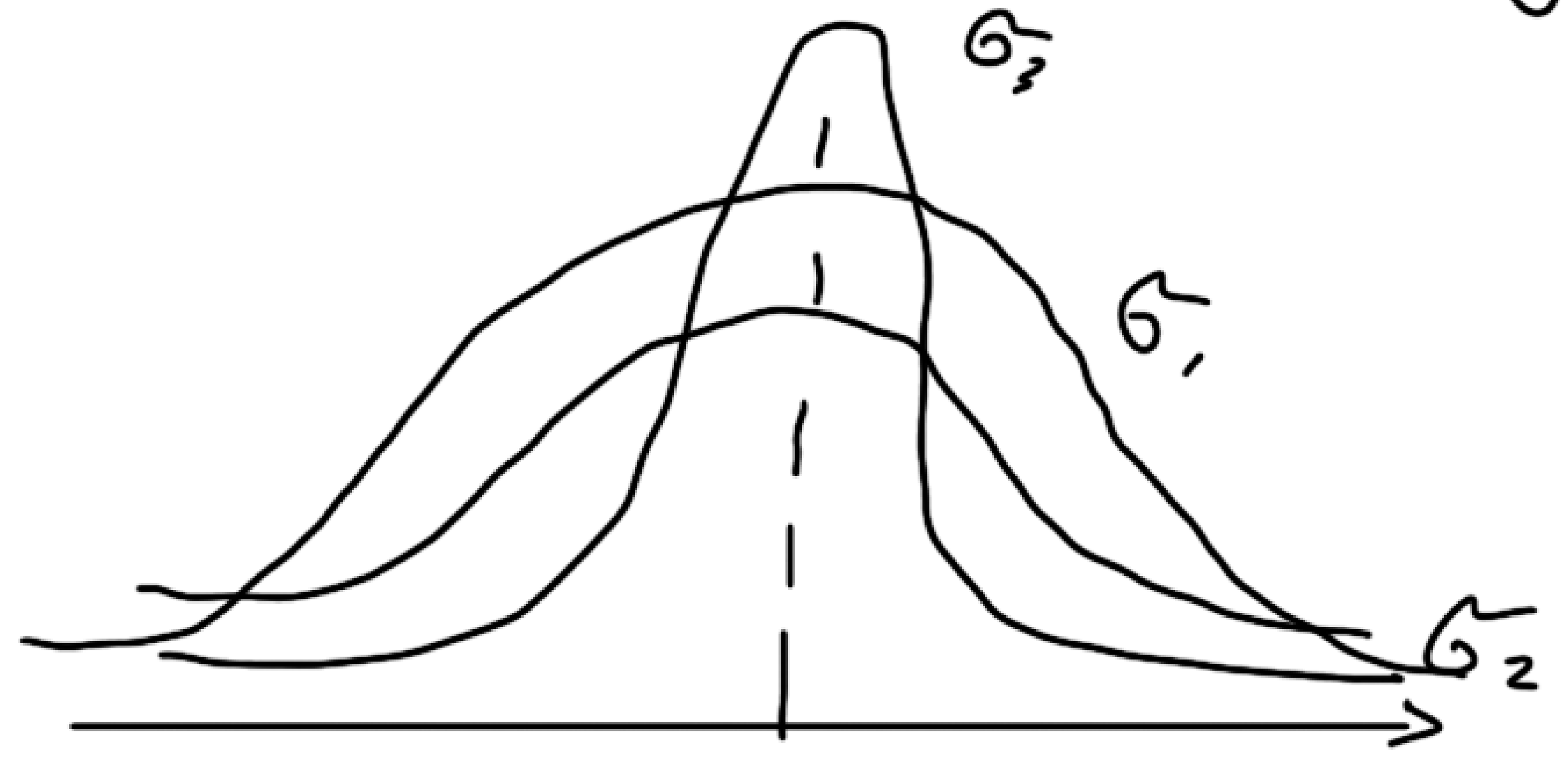
б) общее

а) $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

$a \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$

$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

$\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$



Случайный вектор

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\omega): \ \Omega \to \mathbb{R}^n$

измер. отн. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (Борелевская $\mathcal{A}$)

$F(\vec{x}): \ \mathbb{R}^n \to [0; 1]$

$F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

$n = 2: \ \xi = (\xi_1, \xi_2)$

$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < +\infty) = P(\xi < x_1)$

Св-ва $F(\vec{x})$:

1) неубывает по $\forall$ комп.

2) непр. слева по $\forall$ комп.

Абс. непр. случ. векторы

$\exists f(\vec{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

$\forall A \in \mathcal{B} \quad P(\vec{\xi} \in A) = \int_A \ldots \int f(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n$

Св-ва $f(\vec{x})$

1) $f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}$

2) $\int_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = 1$

Дискретные случ. векторы

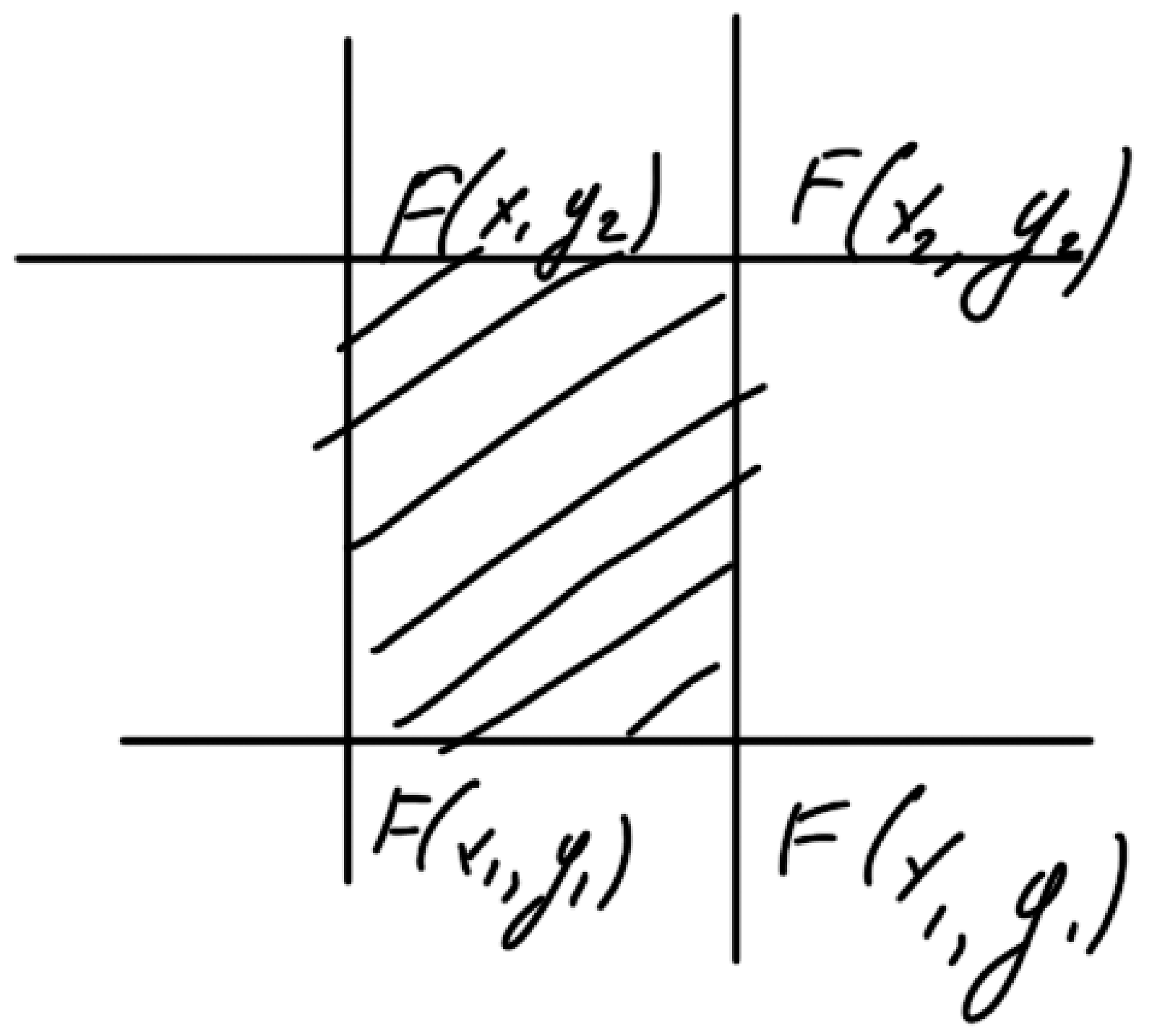
$\forall\, \mathbb{R}^2$

$(a_1, \ldots, a_n)$

$(b_1, \ldots, b_m)$

$P(\xi = a_k, \eta = b_l) = p_{kl}$

$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} p_{kl} = 1$



$P(\boxed{}) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

$y \backslash x$	0	1	
-1	$1/10$	$3/10$	$4/10$
1	$5/10$	$1/10$	$6/10$
	$6/10$	$4/10$	

$$\Sigma = 1$$

$$\Rightarrow \quad P(x=0) = \frac{6}{10}, \quad P(x=1) = \frac{4}{10}$$

$$P(y=-1) = \frac{4}{10}, \quad P(y=1) = \frac{6}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \neq$$

$y \backslash x$	0	1	
-1	$0{,}24$	$0{,}16$	$0{,}4$
1	$0{,}36$	$0{,}24$	$0{,}6$
	$0{,}6$	$0{,}4$	

Лекция

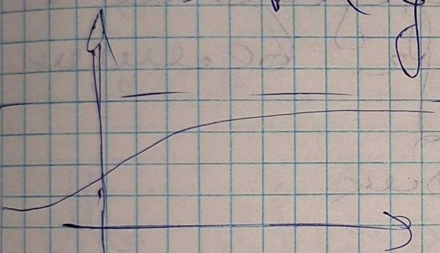
Случ. величины (частные)

дискретные

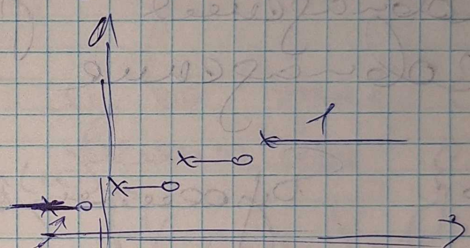
абсолютно непрерывные

Ф-ия распр. случ. величины:

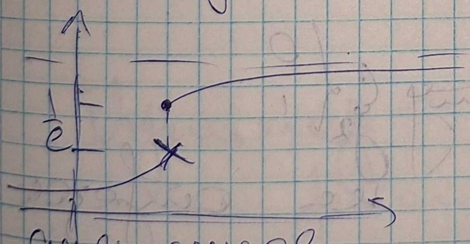
$F(x) = P(\xi < x)$



абсолютно непр.



дискретная случ. вел.



смешанное распр.

Атом распределения

Случ. вел. тесно связана с ф-ией распр. случ. вел.

Пр-во эл-ных событий: $\mathbb{R}$
и σ-алгебра: $\mathcal{B}$ - борелевская

$P(\xi \in (a, b)) = F(b) - F(a)$

случ. величина $\qquad$ ф-ия распределения

Совпадения распределения $\not\Rightarrow$ совпадение случ. величины

Ex: Бросили кубик

$$\xi_1 = \begin{cases} 0, & 1, 3, 6 \\ 1, & 2, 4, 5 \end{cases}$$

2) Бросили монету $\xi_2 \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

3) Бросили точку на отрезок от -1 до 1. Если <0, то $\xi_3 = 0$, иначе $\xi_3 = 1$.

Случ. величины заданы на разных пр-вах. Но распределение одно и то же.

Введём $\xi_1 = 1 - \xi_2$ (задана на круге ξ_2)

Но ξ_1 (хоть и зависит ξ_2) всё равно отдельная случ. величина

Носитель (supp) меры (распред (прочитать где-то)

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – мн-во знач. случ. величины ξ

Мы требуем: $\sum\limits_{k=1}^{n\,(\infty)} P(\xi = a_k) = 1$

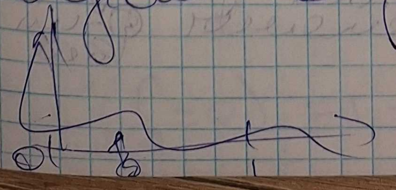
конечное
или
счетное

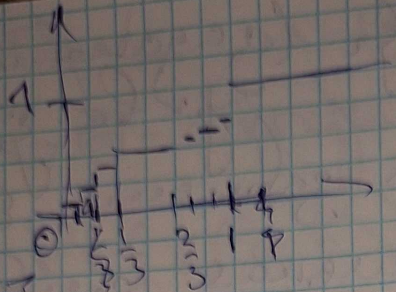
Пример сингулярного распред-я

не дискр,
не абс. непр
не их смесь

Построим не абс. непр ф-ию

Берем отрезок $[0;1]$





← данная ф-ция делается дальше (как канторово м-во)

Возьмем все числа в 3СС, что не содержат 1ки, вот рез-т распр. этой случ вел (их число счётное) (но не дискр (ф-ция распр непр))

def (сингул. распр)

Распр., где объединение всех точек роста $= 0$. (Лебеговская мера точек роста?)

Пусть $0 < \lambda < 1$.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — ф-ции случ. распр сл. вел. ξ_1 и ξ_2

Рассм $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda) F_2(x)$

Утв: д-ть $F(x)$ — ф-ция распр. сл. вел (д-ть смесь ф-ций сл. вел)

Смесь ф-ций распр. — ф-ия распр. (точнее выпуклая комбинация) (если выпуклая комбинация)

(Для ф-ии можно провести эксперимент: бросаем монету и берем ф-ию для ξ_1 для одного вар. и ф-ию для ξ_2 в ост. случ.)

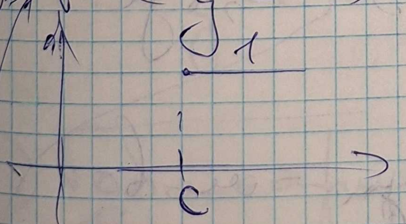
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$

Возьмем: $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(x) = F(x)$$ — тоже функция распр. (д-во)

Дискретные:

1) $P(\xi = c) = 1$ — вырожденная случ. вел.



← ф-ия Хевисайда $\eta(x-c)$

ф-ия распр. константы (можно сказать что такая константа)

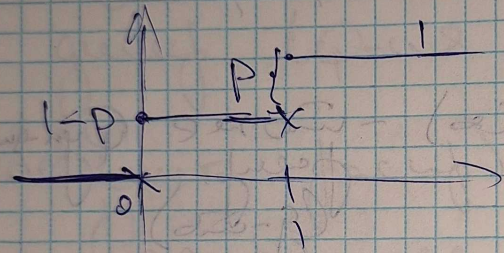
2) Распр. Бернулли (с вер. успеха p)

$P(\xi=0) = 1-p$, $P(\xi=1) = p$

Построим таблицу (её можно строить для дискр. случ. вел. с конечным числом)

x	0	1
$P(\xi=x)$	$1-p$	p

Атомы: 0, 1



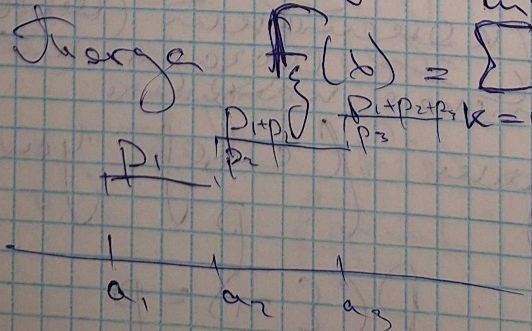
3) Биномиальное распр. (с параметрами)

$P(\xi=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $k=0,1,\dots,n$

Пусть $a_1<a_2<\dots<a_n$ — мн-во знач. случ. вел.

другое n (не это)

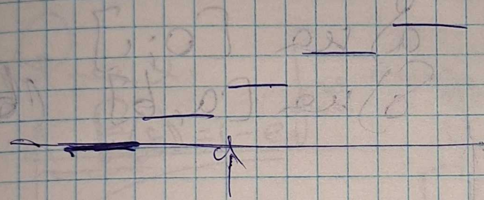
Тогда $F_\xi(x) = \sum_{k=1}^{m-1} p_k$, $x\in[a_{m-1}, a_m)$



3) Вер. Геометрическое

4) Равномерное дискретное (каждое знач имеет равную вер-ть)

$$P(\xi=k)=\frac{1}{n}, \quad k=1,\dots,n$$



они одинаковой высоты

5) Пуассоновское распр с парам-ром λ

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k} \quad k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$$

6) Геометрическое (с параметром $p\in(0,1)$)

Возьмем $q=1-p$

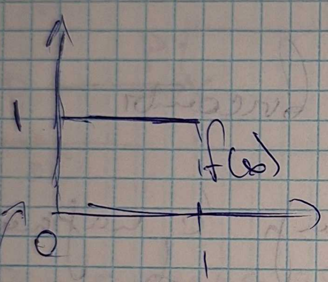
$$P(\xi=k)=pq^k, \quad k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$$

геом прогрессия

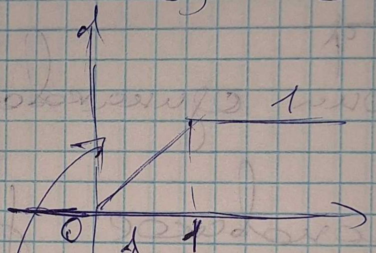
Проводим беск число испыта-ний Бернулли
Геом. расп показывает, сколько было неудач до 1го успеха.

Абсолютно непр.

1) Равномерное: а) на [0;1]
б) на [a, b] (b>a)



плотность



интегр-ие внутри отрезка [0;1]

Ф-ция расп для непр-ой (для равномерного расп)

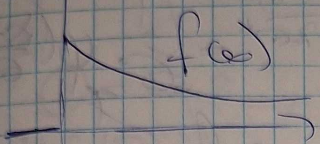
а) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ — плотность

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

Ф-ция расп

2) Показательное (экспоненциальное) с параметром λ $(\lambda>0)$

плотность



$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$ — плотность

Ф-ия распр.

$F(x)=1-e^{-\lambda x}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

Ex: Вероятность что лампочка не перегорит до момента времени t (т.е. мы считаем, что лампочка новая в момент времени t, если она не перегорело)

3) Нор-ное распределение (Гауссовское)

а) Стандартное

б) Общее (с параметрами (a, σ^2))

а) Плотность $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

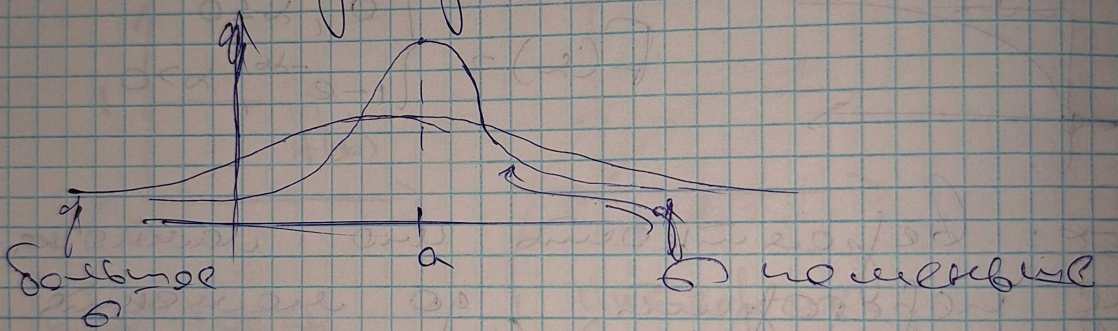
Ф-ия распр: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$

б) Плотность: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = f(x)$

сдвиг и растяжение

$\sigma > 0 \quad a \in \mathbb{R}$

Ф-ия распр: $\cancel{\Phi(x)}\ F(x) = F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$



Случ. векторы

Борелевское мн-во в $\mathbb{R}^n$ — все, что можно составить из паралл-пипедов.

σ-алгебра наим. по включению паралл-педов.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Ф-ия, измеримая отн.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

борелевская
σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$

$P(\mathbb{R} \to [0;1]$

Ф-ия расп.: $\mathbb{R}^n \to [0;1]$

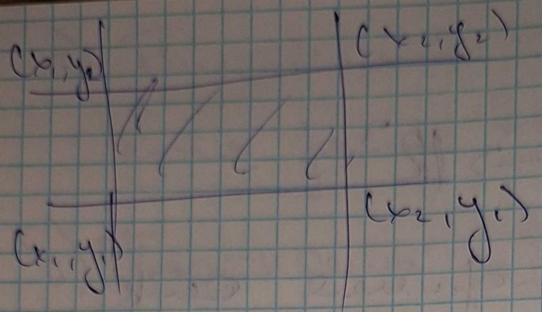
$F(\vec{x}) = F(x_1; \dots; x_n) = P(\xi_1 < x_1; \xi_2 < x_2, \dots$
$\dots; \xi_n < x_n)$ (т.е. вероятность попадания в уголок: $\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n$

$n=2$: $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < +\infty) =$ — маргинальное расп.

$= P(\xi_1 < x_1)$ (новый случ. величина)

Св-ва функ-ции расп.:
1) неуб. по $\forall$ компоненте
2) непр. слева по $\forall$ компоненте



$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

(если непр., то получаем
Ф-ию случ. распр.?)

Абс. непр. случ. вектор

$\exists\ f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

$\forall A \in \mathcal{B} \quad P(\vec{\xi} \in A) = \int\limits_{A} \dots \int f(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n$

Борелевская σ-алгебра

Св-ва плотности:

1) Измеримость (интегрируемость)

$f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}$

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dots \int f(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n = 1$

Дискретный случ. вектор.

$(a_1, \dots, a_n)$

$(b_1, \dots, b_n)$

$P(\xi_1 = a_k, \xi_2 = b_l) = p_{kl}$

$\sum\limits_{k,l} p_{kl} = 1$

$\|$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} p_{kl} = 1$ ← для 2ного случ.

Обычно $X := \xi$
$Y := \vec{\xi}$

Y \ X	0	1
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

↑

сумма по табл = 1

Можно узнать распред-ие компонент

$P(X=0) = \frac{6}{10}$

$P(Y=-1) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$

С такими маргинальными расп. однозначно таблицу не построить.