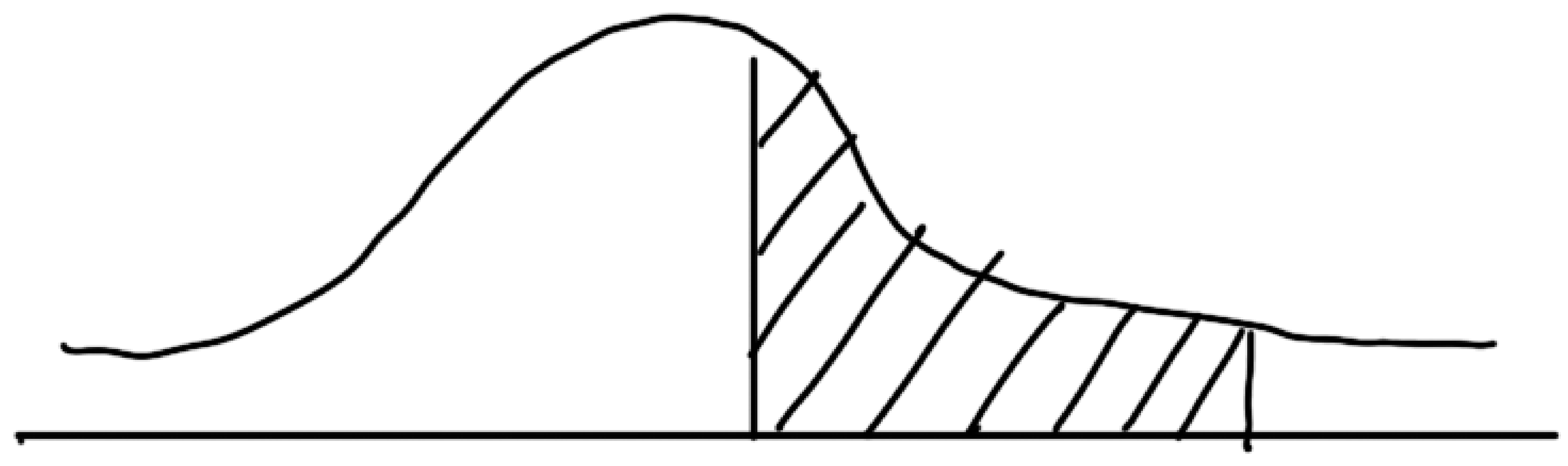
Лекция 5

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k = m\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right)$$ – Т] Муавра-Лапласа

$$P\left(a \le \sum_{k=1}^{n} \xi_k \le b\right) \approx \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx$$ – Т] Муавра-Лапласа (интегральная



Лекция

Предельные теоремы для испытаний Бернулли:

~~1) Оценка числа~~ вер-ти ~~успехов~~

(1) Оценка вер-ти определенного числа успехов:

(2) Оценка вер-ти опред числа успехов (задание диапазон)

Ex: 1000 раз бросили симм. монету.

1) $P(S_{1000}=500)=?$, $C_{1000}^{500}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

2) $P(400\le S_n\le 600)=?$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\sum\limits_{k=400}^{600} C_{1000}^{k}$

2a) В какой симм-ный промежуток из 1000 попадаем с вер-тью $\geq 95\%$? (симметричный отн-но 500)

n испытаний Бернулли

p — вер-ть успеха в од-ном испытании

q — вер-ть — н — неудачи (неудачи)

$q = 1 - p$

S_n — число успехов в n испытаниях

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \overset{def}{=} P_n(k)$$

$$P(k \le S_n \le m) = \sum_{i=k}^{m} C_n^i p^i q^{n-i}$$

~~$x_n - np$~~ ~~$x_n =$~~

Вспомогательные конструкции:

1) $x_n = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ $\qquad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — ф-ия Гаусса

$n, k \to \infty$

x_n ограничено

Th (Локальная теорема Муавра — Лапласа)

$$P_n(k) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_n)$$

Если $x_n \to x$, то:
$\sqrt{npq}\, P_n(k) \to \varphi(x)$

1) Ф-ла Стирлинга:
$n! \sim e^{-n} \cdot n^n \sqrt{2\pi n}$

~~2) log(1+~~
2) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \overline{o}(x^2)$, если $x \to 0$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \overline{o}(x^n)$

Из ограниченности x_n и стремления к ∞ k и n следует (упр: проверить)!
$n-k \to \infty$

$k = np + x_n\sqrt{npq}$ (из опред x_n)
$n-k = n - np - x_n\sqrt{npq} = nq - x_n\sqrt{npq}$

Рассчитаем $C_n^k p^k q^{n-k}$.
$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$

Итак $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$

$k! \sim e^{-k} k^k \sqrt{2\pi k}$

$(n-k)! \sim e^{-(n-k)} (n-k)^{(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}$

$$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{\cancel{e^{-n}}\, n^n \sqrt{2\pi n} \cdot p^k q^{n-k}}{\cancel{e^{-k}}\, k^k \sqrt{2\pi k}\; \cancel{e^{-(n-k)}}\, (n-k)^{n-k} \sqrt{2\pi (n-k)}} \Rightarrow$$

$$= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac{1}{2}}\, (n-k)^{(n-k)+\frac{1}{2}}}$$

Логарифмируем отношение (без $\sqrt{2\pi}$ (потом вспомним))

$$\ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, p^k q^{n-k}}{k^{k+\frac{1}{2}}\, (n-k)^{(n-k)+\frac{1}{2}}}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) -$$

$$-\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln k - \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\ln(n-k) +$$

$$+ k\ln(p) + (n-k)\ln q = \left[\begin{array}{l} k = np + x_n\sqrt{npq} \\ n-k = nq - x_n\sqrt{npq} \end{array}\right] =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - \left(np + x_n\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot \ln\left(np + x_n\sqrt{npq}\right) - \left(nq - x_n\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot \ln\left(nq - x_n\sqrt{npq}\right) + k\ln p + (n-k)\ln q =$$

$$\circled{=} \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln(n) - \left(np + x_n\sqrt{npq} + \tfrac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\cancel{\ln(np)}\right.$$

$$\cdot\left(\ln(n) + \ln(p) + \ln\left(1 + x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\right) -$$

$$-\left(nq - x_n\sqrt{npq} + \tfrac{1}{2}\right)\left(\ln(n) + \ln(q) + \right.$$

$$\left.+\ln\left(1 - x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right) + k\ln p + (n-k)\ln q =$$

$$= \cancel{n\ln(n)} + \cancel{\tfrac{1}{2}\ln(n)} - \cancel{np\ln(n)} - np\ln(p) -$$

$$-\cancel{\tfrac{1}{2}\ln(n)} - \tfrac{1}{2}\ln(p) - \cancel{nq\ln(n)} - nq\ln(q) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln(n) - \tfrac{1}{2}\ln(q) + k\ln(p) + (n-k)\ln q \circled{=}$$

(без x_n)

$$= -np\ln(p) - \tfrac{1}{2}\ln(p) - nq\ln(q) - \tfrac{1}{2}\ln(n) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln(q) + k\ln(p) + (n-k)\ln(q)$$

$$-np\ln\left(1 + x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq\ln\left(1 - x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) -$$

$$\circled{=} -\ln\left(\sqrt{npq}\right) - np\ln(p) - nq\ln(q) + k\ln(p) +$$

$$+(n-k)\ln(q) \cancel{+} x_n\sqrt{npq}\ln(n) - x_n\sqrt{npq}\ln(p) +$$

$$- x_n\sqrt{npq}\ln\left(1 + x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + \sqrt{npq}\ln(n) +$$

$$+ x_n\sqrt{npq}\ln(q) + x_n\sqrt{npq}\ln\left(1 - x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$-np\ln\left(1 + x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq\ln\left(1 - x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) -$$

$$= -\ln\left(\sqrt{npq}\right) - np\ln(p) - nq\ln(q) +$$

$$+\left(np + x_n\sqrt{npq}\right)\ln(p) + \left(nq - x_n\sqrt{npq}\right)\ln q -$$

$-x_n\sqrt{npq}\ln(p) - x_n\sqrt{npq}\ln\left(1+x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) +$

$+x_n\sqrt{npq}\ln(q) + x_n\sqrt{npq}\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$

$= \cancel{-\ln(\sqrt{npq}) - x_n\sqrt{npq}\ln(1+}$

$\cancel{np}\ln\left(1+x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \cancel{nq}\left(1-x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$

$= -\ln(\sqrt{npq}) - x_n\sqrt{npq}\ln\left(1+x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) +$

$+x_n\sqrt{npq}\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x_n\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$

$= -\ln(\sqrt{npq}) - x_n\sqrt{npq}\left(x_n\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x_n^2}{2}\frac{q}{np} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$+x_n\sqrt{npq}\left(-x_n\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$

$= -\ln(\sqrt{npq}) - x_n^2 - \frac{1}{2}x_n\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{2}x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}$

потеряли коэф $\frac{1}{2}$

Должно было остаться:

$-\frac{x_n^2}{2} - \ln\sqrt{npq} - \frac{1}{2}x_n\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{2}x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}$

Upr, итог?

$-\ln(\sqrt{npq}) - x_n\sqrt{npq}\left(x_n\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x_n^2}{2}\cdot\frac{q}{np} +\right.$

$\left.+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + x_n\sqrt{npq}\left(-x_n\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x_n^2}{2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$

$-np\left(x_n\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x_n^2}{2}\frac{q}{np}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-$

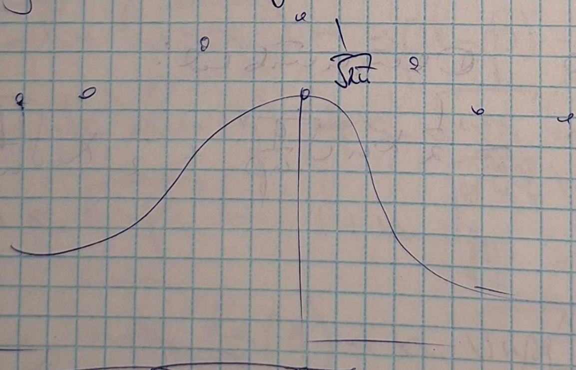
$-nq\left(-x_n\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x_n^2}{2}\frac{p}{nq}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$

$=-P_1-\ln(\sqrt{npq})-x_n^2+\frac{x_n^2}{2}+\bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$-\ln\sqrt{2\pi npq}-\frac{x_n^2}{2}-\bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ — натуральный логарифм от вер-ти $P_n(k)$

$\ln(P_n(k))\approx-\ln\sqrt{2\pi npq}-\frac{x_n^2}{2}-\bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Формула за то, как себя ведёт вероятность



1) $\sqrt{1000}\cdot{}^{?}_{4}P^{500}_{1000}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ из из-за примера