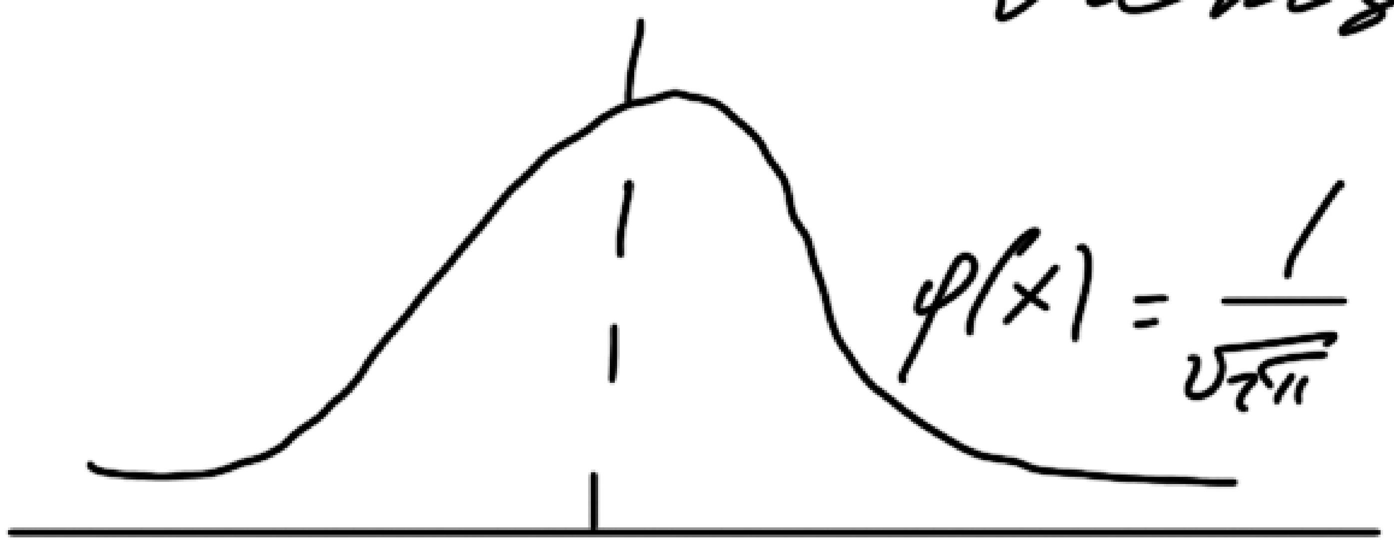
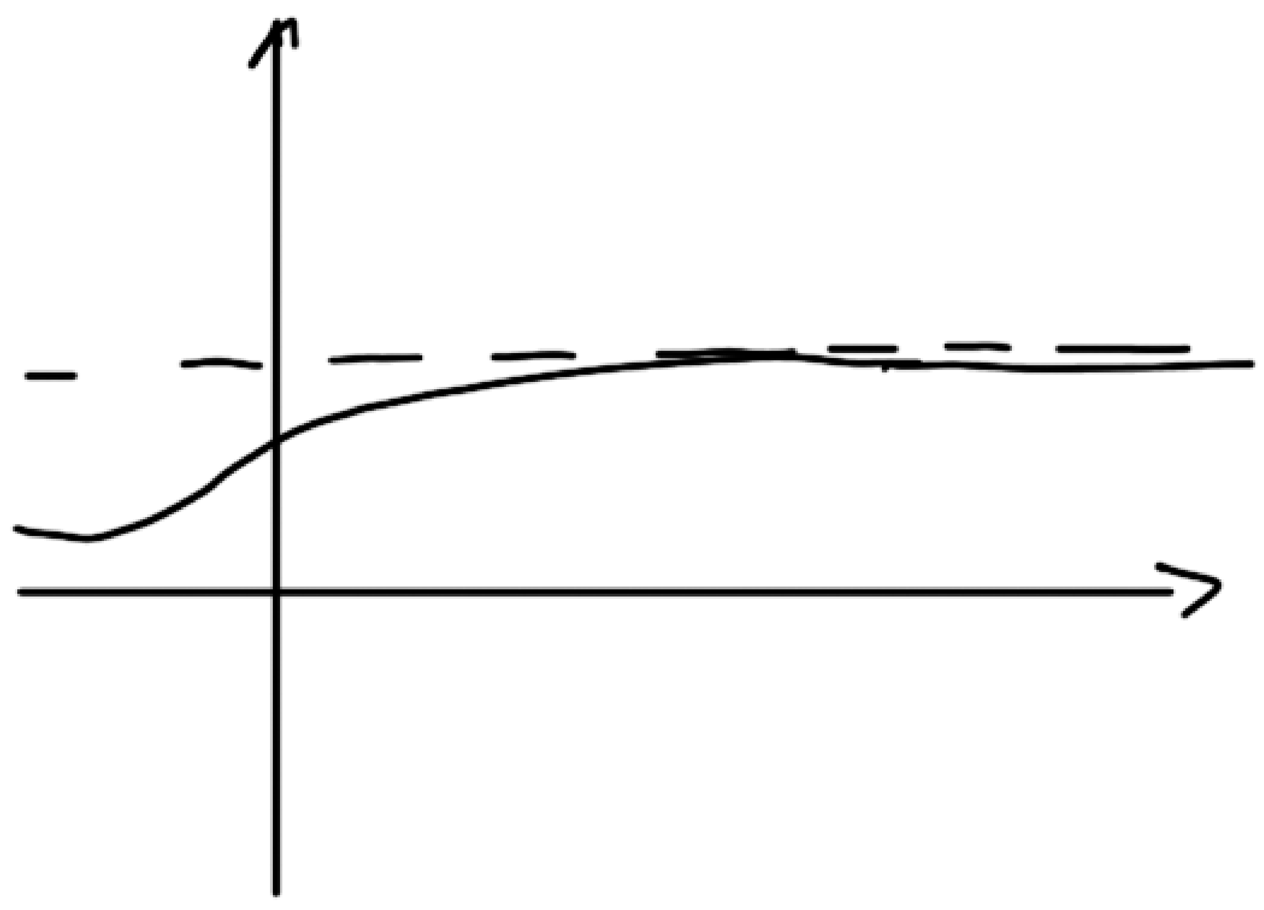
Лекция 6



$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — Гауссова кривая

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$



$\Phi(+\infty) = 1$ $\qquad \varphi(x) = 1 - \Phi(-x)$

$\Phi(-\infty) = 0$

$\Phi(x) \uparrow$

Случайные величины.

Ω, $\mathcal{A}$, P

мн-во событий — Ω; сигма алгебра — $\mathcal{A}$

$\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$

ξ — <u>измеримая</u> ф-ция из Ω в $\mathbb{R}$

<u>Примеры:</u> 1) константы: $\forall \omega \ \xi(\omega) = a$ (потом уточним)

2) монета: орел $+1$, решка -1

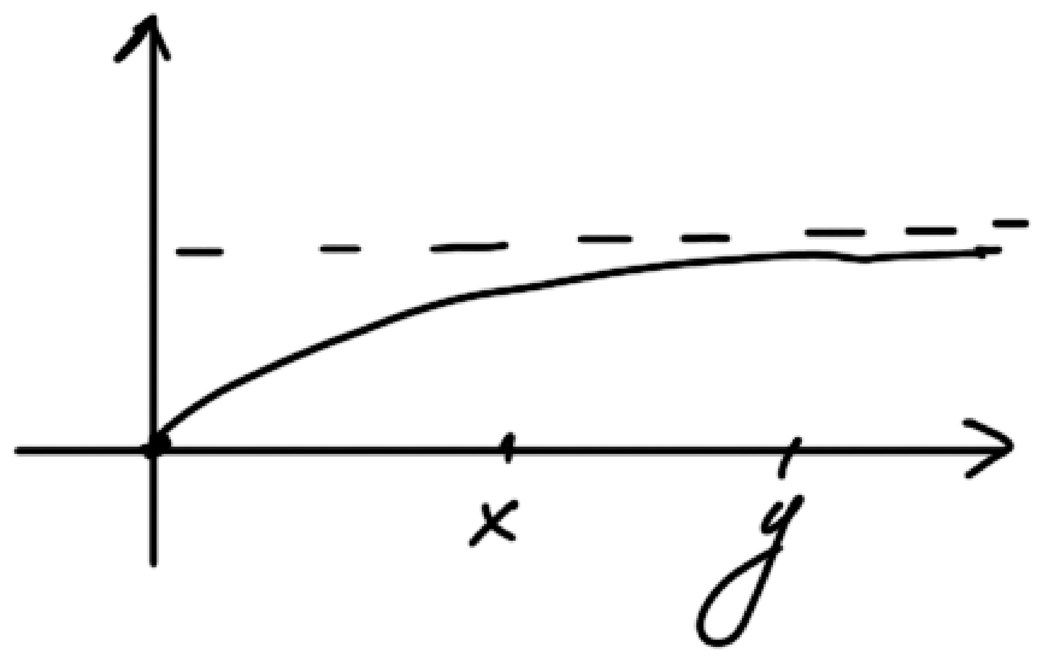
$\mathcal{A} = \{\emptyset, O, P, \Omega\}$

$\xi(O) = 1$ $\qquad \Omega = \{O, P\}$

$\xi(P) = -1$

$P(\xi = 1) = 1/2$ $\qquad P(\xi = -1) = 1/2$

3) Продолжительность жизни. (или уход службе)



$x < y$

$P(\xi < x)$, $x > 0$

$$\begin{cases} 1 - e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$x < y \Rightarrow P(\xi < x) < P(\xi < y)$

т.к. $\{\xi < x\} \subset \{\xi < y\}$

4) Ошибки измерения

5) Число успехов в испытаниях Бернулли (n)

S_n $\quad \Omega$ — наборы длины n из 0 и 1

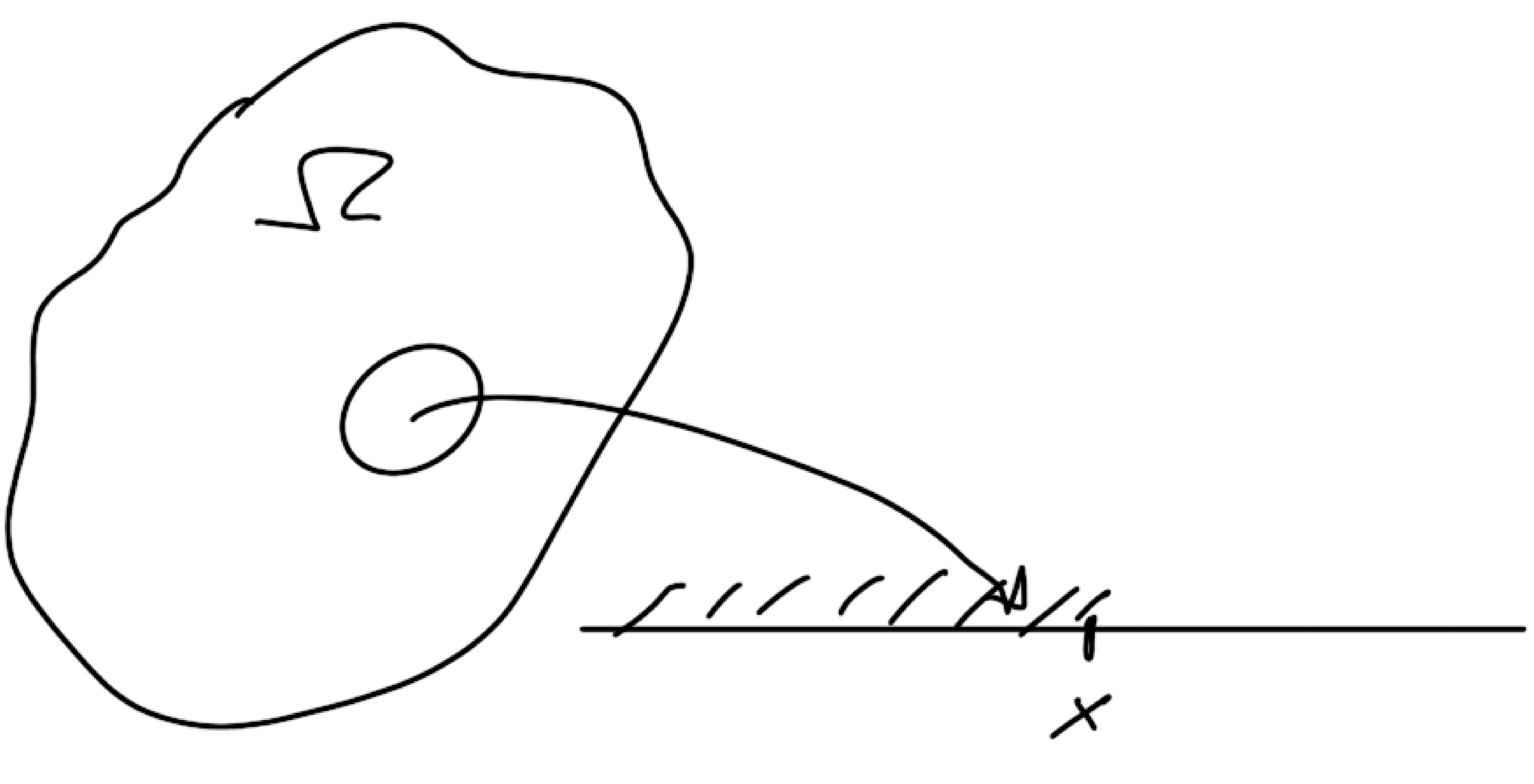
S_n - сумма всех 0 и 1 в наборе

Ol ξ - измеримая относительно $\mathcal{A}$, если

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\underbrace{\xi^{-1}((-\infty, x))}_{\text{прообразы}} \in \mathcal{A}$, т.е. тоже событие

$\xi^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\}$

$A \subset \mathbb{R}$



Пример прообразов: (про монету)

Р => −1
О => 1

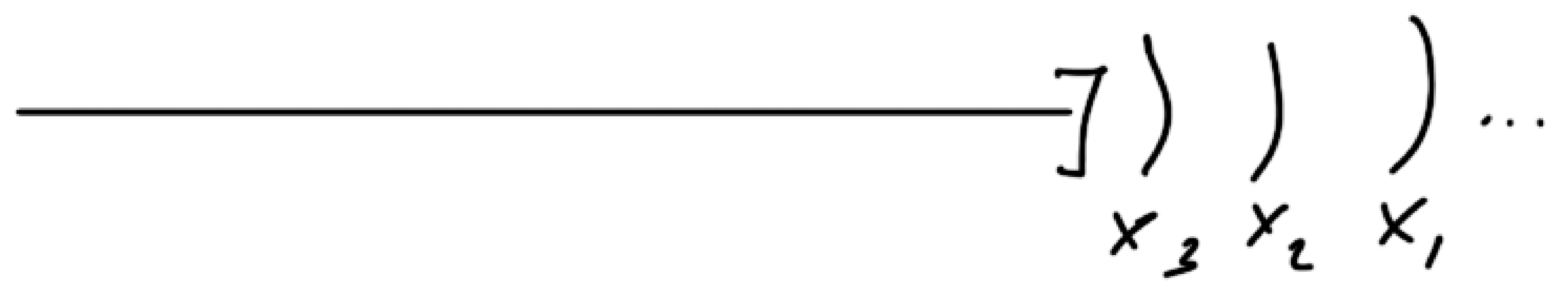
$x \le -1: \ \xi^{-1}((-\infty, x)) = \varnothing$

$-1 < x \le 1: \ \xi^{-1}((-\infty, x)) = \{Р\}$

$x > 1: \ \xi^{-1}((-\infty, x)) = \{О, Р\} = \Omega$

Является ли событием $\xi^{-1}((-\infty, x])$?

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x_k \downarrow, \quad x_k \to x$



*) получим $(-\infty, \,]$ как пересечение бесконечного мн-ва $(-\infty, \,)$....

*) прообраз пересечения — это пересечение прообразов

$$\xi^{-1}(A) = \xi^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\xi(A_k)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

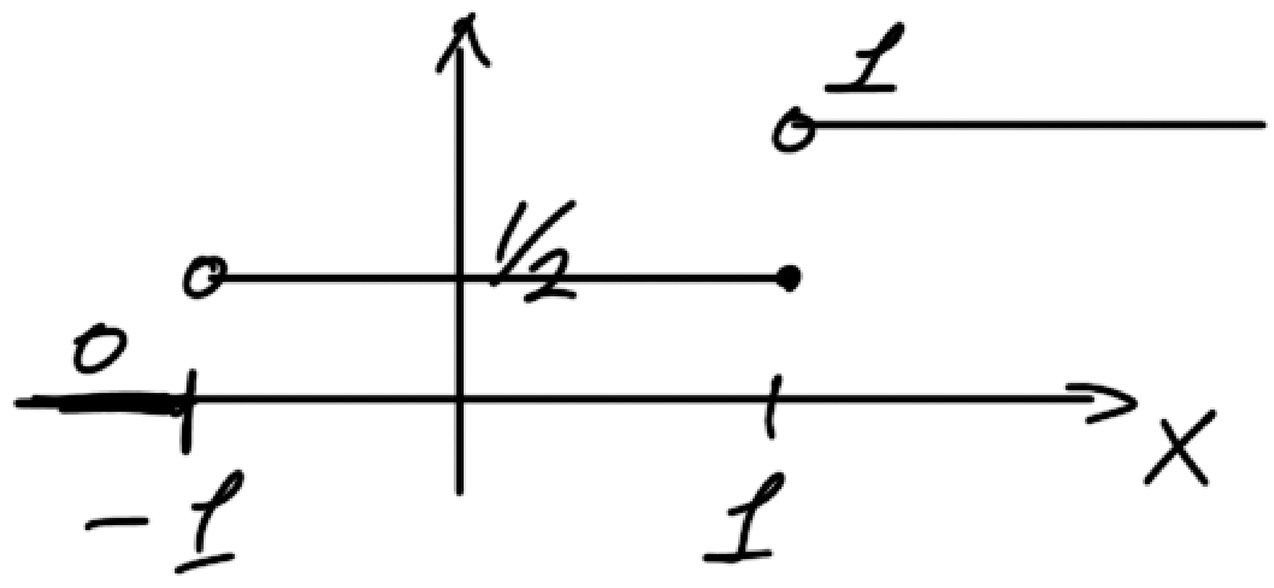
$\xi^{-1}([a, b))$ — событие, т.к

$$\underbrace{\xi^{-1}((-\infty, b)) \setminus \xi^{-1}((-\infty, a))}_{\text{разн-ость событий}} = \xi^{-1}([a, b))$$

$$P(\xi^{-1}(-\infty, x)) \equiv P(\xi < x)$$

Функция распределения случ. вел. ξ

$$F_\xi(x) = P(\xi < x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



*) уточнение: const. a: $P(\xi = a) = 0$

или

$P(\xi = a) = 1$

Св-ва $F_\xi(x)$:

① $\forall x \quad F(x) \in [0, 1]$

② $F(x) \nearrow$, т.е. $\forall x < y$: $F(x) \le F(y)$

③ $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ (в смысле перехода к пределу)

④ Непрерыв. слева в $\forall$ точке
имеет предел справа в $\forall$ точке
имеет конеч. число разрывов I рода.

О| Борелевское мн-во — мн-во, которое можно составить пересечениями и объединениями отрезков.

О| Минимальная $\mathcal{A}$ — это $\mathcal{A}$, из которой при убирании 1 любого элемента перестает быть $\mathcal{A}$.

$$P(\xi \le x) = \lim_{t \to x+0} P(\xi < t) = \lim_{t \to x+0} F(t) = F(x+0)$$

Основные классы случ. величин

① Дискретные:

$\{x_1, \dots x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ не более, чем счёт (либо конеч., либо счёт)

$$P(\xi = x_k) = p_k > 0$$

$$\sum p_k = 1$$

$$P(\xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_n, \dots\}) = 0$$

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$$

$$P(\xi = 1) = F(1+0) - F(1)$$

Пример: ξ – число успехов в n испытаниях Бернулли (p)

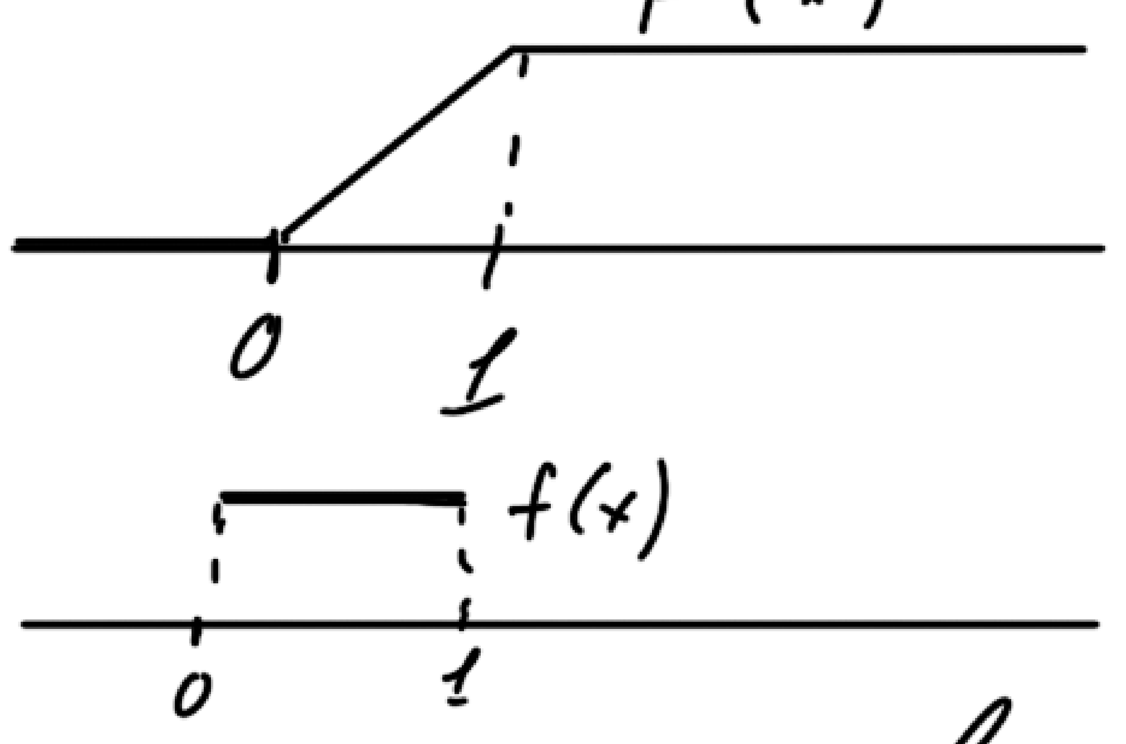
$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 0, 1, \dots n$

$$F(x) = P(S_n < x) = \sum_{k<x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

② Абсолютно непрерывные

] $\underbrace{\exists f(x)}_{\text{плотность распределения}}$: $\forall x$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$f(x)$ – "почти везде производная"

Св-ва плотности:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$P(a \underset{\leq}{<} \xi \underset{\leq}{<} b) = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$