ТВиМС-2025

4 июня 2025 г.

Содержание

1 Теория вероятностей.

1.1 Основы теории вероятностей и схема Бернулли.

1.1.1 Классическое и геометрическое определение вероятности.

Определение 1.1.1 (Пространство элементарных событий)**.**
Ω - пространство элементарных событий.
ω_1, ω_2, ... - элементарные события.
$A \subset \Omega$ - случайное событие. $\mathscr{A} = \{A \subset \Omega\}$ - σ-алгебра подмножеств.

Определение 1.1.2 (σ-алгебра событий)**.**
Свойства алгебры событий:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$ - достоверное событие.
2. Если $A \subset \mathscr{A}$, то $\overline{A} \subset \mathscr{A}$
3. $\emptyset$ - невозможное событие.
4. Если A, B - события (т.е. принадлежат $\mathscr{A}$), то $A \cup B$ и $A \cap B$ - события.

Свойства σ-алгебра событий:

1. Все свойства алгебры событий.
2. Если A_1, A_2, ... , $A_n \in \mathscr{A}$, то:
   (a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$
   (b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

Алгебра событий - семейство подмножеств Ω, замкнутое относительно операций конечного объединения, пересечения и дополнения.
σ-алгебра событий - семейство подмножеств Ω, замкнутое относительно операций счетного объединения, пересечения и дополнения.

Обозначения	Термины	
	теории множеств	теории вероятностей
Ω	Множество, пространство	Пространство элементарных событий, достоверное событие
ω	Элемент множества	Элементарное событие
A, B	Подмножество A, B	Случайное событие A, B
$A + B = A \cup B$	Объединение (сумма) множеств A и B	Сумма случайных событий A и B
$AB = A \cap B$	Пересечение множеств A и B	Произведение событий A и B
$\bar{A}$	Дополнение множества A	Событие, противоположное для A
$A \backslash B$	Разность множеств A и B	Разность событий A и B
ϕ	Пустое множество	Невозможное событие
$AB = A \cap B = \phi$	Множества A и B не пересекаются (не имеют общих элементов)	События A и B несовместимы
$A = B$	Множества A и B равны	События A и B равносильны
$A \subset B$	A есть подмножество B	Событие A влечет событие B

Рис. 1: Таблица соответствий

Определение 1.1.3 (Класическое определение вероятности).
Пусть $\mid \Omega \mid = n$ $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ (т.е. события равновероятны).
$A \subset \Omega$ - событие (подмножество элементарных событий).
$\mid A \mid = k \to P(A) = \frac{k}{n}$
Следовательно, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Определение 1.1.4 (Геометрическое определение вероятности).
Рассматриваем Лебегову σ-алгебру $\to$ mes (мера) - существует и конечна.
Мера Лебега - мера, обобщающая понятия длины отрезка, площади фигуры и объёма тела на произвольное n-мерное евклидово пространство.

$0 < mes(\Omega) < +\infty$
$mes(\omega_i) = 0$
$A \subset \Omega \to P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$

Проще говоря: Ω - плоское, значит у Ω $\exists$ площадь, и она конечна.
$0 < S(\Omega) < +\infty$
$S(\omega_i) = 0$
$A \subset \Omega \to P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$

1.1.2 Основные комбинаторные формулы.

Определение 1.1.5 (Размещения).
Размещения - способ расположить в определенном порядке некоторого числа элементов из заданного конечного множества.

Формулы:

1. **Размещения без повторений:** $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
2. **Размещения с повторениями:** $U_n^k = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$

Определение 1.1.6 (Сочетание).
Сочетания - способ расположения с несущественной последовательностью выбора некоторого числа элементов из заданного конечного множества.

Формулы:

1. **Сочетания без повторений:** $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
2. **Сочетания с повторениями:** $V_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

1.1.3 Аксиоматика Колмогорова.

Определение 1.1.7 (Несовместные события).
События A и B - несовместные $\leftrightarrow A \cap B = AB = 0$.
Т.е. события не могут наступить одновременно.

Определение 1.1.8 (Вероятность как функция).
Ω - пространство элементарных событий.
$\omega_i \in \Omega$ - элементарное событие.
$\mathscr{A}$ - σ-алгебра событий.

Тогда вероятность P - функция на множестве событий: $P : \mathscr{A} \to [0;1]$

Со следующими **аксиомами:**

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A, B : A \cap B = \emptyset \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. (Счетная аддитивность) $\forall A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}$ $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, причем $A_i A_j = \emptyset$, если $i \neq j$

Из аксиом можно получить данные **следствия:**

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $A \subset B \to P(A) \leq P(B)$

1.1.4 Условная вероятность. Независимость. Формулы сложения и умножения.

Определение 1.1.9 (Условная вероятность).
A, B - события, причем: $P(A) > 0$.

Тогда вероятность события B при **условии** A:
$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P_A(B)$

Определение 1.1.10 (Формула умножения)**.**
A, B - события: $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$.
Формула умножения: $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$

Пример:
В колоде 36 карт. На удачу вытащили 2 карты. Какова вероятность, что обе карты - пики?

1. **Класическая вероятность:** $= \frac{C_9^2}{C_{36}^2} = \frac{9 \cdot 8}{36 \cdot 35}$
2. **Формула умножения:** A - первая карта - пики, B - вторая карта - пики. Тогда $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35}$

Теорема 1.1.1 (Условная вероятность и аксиоматика Колмогорова)**.**
Зафиксируем $A \subset \Omega$: $P(A) \neq 0$.
Тогда $P_A(B)$ - подчиняется аксиоматике Колмогорова, т.е. для нее выполняются те же аксиомы.
$\square$
Доказательство 1ой аксиомы:
$P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega A)}{P(A)}$
Т.к. $A \subset \Omega$, то $\Omega A = A$
Следовательно, $P_A(\Omega) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Доказательство 2ой аксиомы:
Пусть B, C - события: $BC = \emptyset$, тогда:
$P_A(B \cup C) = \frac{P(A(B \cup C))}{P(A)} = \frac{P(AB \cup AC)}{P(A)}$
Т.к. $BC = \emptyset$, получаем: $ABAC = ABC = \emptyset$, т.е. события AB и AC - несовместны.
Следовательно, $\frac{P(AB \cup AC)}{P(A)} = \frac{P(AB) + P(AC)}{P(A)}$
Значит, $P_A(B \cup C) = \frac{P(AB) + P(AC)}{P(A)}$

$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$
$P_A(C) = \frac{P(AC)}{P(A)}$
Значит, $P_A(B) + P_A(C) = \frac{P(AB) + P(AC)}{P(A)}$

Итог: $P_A(B \cup C) = \frac{P(AB) + P(AC)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$

3яя аксиома доказывается аналогичным образом.

■

Определение 1.1.11 (Независимые события. Попарно независимые события. Независимые в совокупности события)**.**
Пусть A и B - события.
Тогда A и B называют **независимыми событиями** $\leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Пусть $A_1, ..., A_n$ - события.
Тогда они **попарно независимы**, если $\forall i \neq j$, A_i и A_j независимы.

Пусть $A_1, ..., A_n$ - события.
Тогда они **независимы в совокупности**, если $\forall k \in \overline{[2..n]}$ и $\forall$ набора $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, выполняется: $P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$

Определение 1.1.12 (Формула сложения)**.**
Пусть A, B - события, тогда:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
□
$P(A \cup B) = P(A\overline{B} \cup AB \cup B\overline{A}) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A})$

$A = A\Omega = A(\overline{B} \cup B) = A\overline{B} \cup AB$
$B = AB \cup B\overline{A}$

$P(A \cup B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A}) + P(BA) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Итог: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

■

Пусть A, B, C - события.
Аналогично (через разбиения на несовместные), доказывается следующее:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC)$

Формула сложения в **общем виде:**
$A_1, ..., A_n$ - события.
$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) + ... + (-1)^{r+1}\Sigma_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_r}) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

Если, дополнительно, $A_1, ..., A_n$ - независимы в совокупности, то:
$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}) = 1 - \sqcap_{i=1}^n(1 - P(A_i))$

1.1.5 Формула полной вероятности.

Определение 1.1.13 (Формула полной вероятности)**.**
Разобъем множество элементарных событий Ω на независимые попарно гипотезы $H_1...H_n$.
Т.е. $\Omega = \bigcup_{i=1}^n H_i$ и $\forall i \neq j \to H_i H_j = \emptyset$.
Причем $\forall i H_i > 0$, иначе объединим эту гипотизу с другой.

Формула полной вероятности: $P(A) = \Sigma_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$
$\square$
По итогу получаем следующее: $\forall A \in \mathscr{A} \to P(A) = P(A\Omega) = \bigcup_{i=1}^n (AH_i)$
По попарной независимости и правилу умножения: $\bigcup_{i=1}^n (AH_i) = \Sigma_{i=1}^n (AH_i) = \Sigma_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$

$\blacksquare$

1.1.6 Формула Байеса.

Определение 1.1.14 (Формула Байеса)**.**
Для получения вероятности наступления конкретной гипотезы используется формула Байеса.

А - событие: $P(A) \neq 0$, $H_1, ..., H_i$ - гипотезы, тогда:
Формула Байеса: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\Sigma_{j=1}^n P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$

1.1.7 Испытания Бернулли. Формула Бернулли.

Определение 1.1.15 (Испытания Бернулли)**.**
Испытания Бернулли - последовательность независимых испытаний с бинарным исходом.

Пространство элементарных событий - набор двоичных слов. Например:
Подбрасываются 3 монеты: 0 - решка (неудача), 1 - орел (успех). P(выпал орел) $= p$ и P(выпала решка) $= q$.

События:
0 0 0 (вероятность - q^3)
0 0 1 (вероятность - $p \cdot q^2$)

0 1 0 (вероятность - $p \cdot q^2$)
0 1 1 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 0 0 (вероятность - $p \cdot q^2$)
1 0 1 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 1 0 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 1 1 (вероятность - p^3)

Введем дополнительные обозначения:
Пусть S_n - число успехов в n-испытаниях Бернулли, тогда:
$P(S_n = k) := P_n(k), \forall k \in \overline{[0..n]}$
$P(m_1 \le S_n \le m_2) = \Sigma_{k=m_1}^{k=m_2} P_n(k)\ \forall\ m_1 \ge 0,\ m_2 \le n,\ m_1 \le m_2$

Тогда легко можно получить **формулу Бернулли:**

1. **Для точного числа успехов:** $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
2. **Для промежутка:** $P(m_1 \le S_n \le m_2) = \Sigma_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Теорема 1.1.2 (Наиболее вероятное число успехов)**.**
Число успехов, что наиболее вероятны, ограничено значением $p(n+1)-1$. Причем для целого $p(n+1)-1$ существует два таких числа, а для нецелого - одно.

$\square$
Пусть даны n и p. Найдем k, при котором $P(S_n = k)$ - максимальное.
Сравним $P_n(k)$ и $P_n(k+1)$:

$\frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot p}{\frac{n!}{k!(n-k!)} \cdot q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$
Найдем решение неравенства: $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \ge 1$
$(n-k)p \ge (k+1)(1-p)$
$pn - pk \ge k - kp + 1 - p$
$k \le pn + p - 1$
$k \le p(n+1) - 1$

Т.к. значения p и n даны, то можно подсчитать значение для k - наиболее вероятного числа успехов.
Рассмотрим два варианта:

1. $p(n+1) - 1 \in \mathbb{Z}$: два наиболее вероятных числа успехов - k и $k+1$.
2. $p(n+1) - 1 \notin \mathbb{Z}$: одно наиболее вероятное значение.

$\blacksquare$

1.1.8 Пуассоновское приближение для схемы Бернулли.

Определение 1.1.16 (Пауссоновское приближение)**.**
При фиксированном числе успехов и $n \to \infty$, верно следующее:
$C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$

1.1.9 Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 1.1.3 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.**
Пусть:

1. $x_n = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$: $n, k \to \infty$, x_n - ограничено.
2. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса.

Тогда:
$P_n(k) \sim \frac{1}{npq} \cdot \phi(x_n)$, при $n \to \infty$
$\square$

1. Пользуемся формулой Стирлинга: $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\Pi n}$.
2. Пользуемся разложением в ряд Тейлора: $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Аккуратно расписываем $C_n^k p^n q^{n-k}$. При переходе от факториала к экспоненте необходимо будет прологарифмировать.

$\blacksquare$

1.1.10 Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 1.1.4 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа)**.**
Пусть:

1. $x_n^{'} = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$: $n \to \infty$, k_1 - левая граница интервала.
2. $x_n^{''} = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$: $n \to \infty$, k_2 - правая граница интервала.
3. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Тогда: $P_n(k_1; k_2) = \Phi(x^{''}) - \Phi(x^{'})$

1.2 Случайные величины и их распределения.

1.2.1 Случайная величина. Функция распределения случайной величины, ее свойства.

1.2.2 Непрерывная случайная величина. Плотность распределения, ее свойства. Примеры.

1.2.3 Дискретная случайная величина. Способы задания. Примеры.

1.2.4 Математическое ожидание и дисперсия. Их свойства.

1.2.5 Распределение функций от случайных величин.

1.2.6 Случайные векторы. Совместные распределения случайных величин.

1.2.7 Независимость случайных величин. Коэффициент корреляции.

1.2.8 Многомерное нормальное распределение. Плотность (в невырожденном случае), характеристическая функция. Необходимое и достаточное условие независимости компонент.

1.2.9 Условное математическое ожидание. Условная плотность. Условная дисперсия.

1.2.10 Условные характеристики для нормального вектора.

1.3 Предельные теоремы и марковские цепи.

1.3.1 Неравенство Чебышева.

1.3.2 Типы сходимости в теории вероятностей, связь между ними.

1.3.3 Закон больших чисел в форме Чебышева.

1.3.4 Характеристические функции случайных величин, их свойства.

1.3.5 Формулы обращения для непрерывных и целочисленных случайных величин.

1.3.6 Центральная предельная теорема Леви.

1.3.7 Цепи Маркова. Определение, матрица переходных вероятностей, матрица перехода за n шагов.

1.3.8 Классификация состояний цепи Маркова.

1.3.9 Эргодическая теорема.

2 Математическая статистика.

3 Список вопросов.

1. Классическое и геометрическое определение вероятности.
2. Основные комбинаторные формулы.
3. Аксиоматика Колмогорова.
4. Условная вероятность. Независимость. Формулы сложения и умножения.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Испытания Бернулли. Формула Бернулли.
8. Пуассоновское приближение для схемы Бернулли.
9. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
10. Интегральная теорема Муавра – Лапласа.
11. Случайная величина. Функция распределения случайной величины, ее свойства.
12. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения, ее свойства. Примеры.
13. Дискретная случайная величина. Способы задания. Примеры.
14. Математическое ожидание и дисперсия. Их свойства.
15. Распределение функций от случайных величин.
16. Случайные векторы. Совместные распределения случайных величин. Вычисление распределений компонент.
17. Независимость случайных величин. Коэффициент корреляции.
18. Многомерное нормальное распределение. Плотность (в невырожденном случае), характеристическая функция. Необходимое и достаточное условие независимости компонент.
19. Неравенство Чебышева.
20. Типы сходимости в теории вероятностей, связь между ними.
21. Закон больших чисел в форме Чебышева.
22. Характеристические функции случайных величин, их свойства.
23. Формулы обращения для непрерывных и целочисленных случайных величин.
24. Центральная предельная теорема Леви.
25. Условное математическое ожидание. Условная плотность. Условная дисперсия.
26. Условные характеристики для нормального вектора.
27. Цепи Маркова. Определение, матрица переходных вероятностей, матрица перехода за n шагов.
28. Классификация состояний цепи Маркова.
29. Эргодическая теорема.
30. Задачи математической статистики. Оценка параметров, проверка

гипотез.

31. Основные выборочные характеристики.
32. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.
33. Свойства статистических оценок (с примерами и доказательствами).
34. Оценивание по методу максимального правдоподобия.
35. Регулярный эксперимент. Неравенство Рао – Крамера.
36. Оценивание по методу моментов.
37. Распределение функций от нормальной выборки. Лемма Фишера.
38. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
39. Проверка гипотез: понятие ошибок I и II рода, уровень значимости, мощность критерия; критическая область; простые и сложные гипотезы.
40. Проверка простой гипотезы по методу хи-квадрат.
41. Проверка согласия с помощью критерия Колмогорова.
42. Постановка задачи линейной регрессии. Метод наименьших квадратов.
43. Несмещенная оценка дисперсии в задаче линейной регрессии.