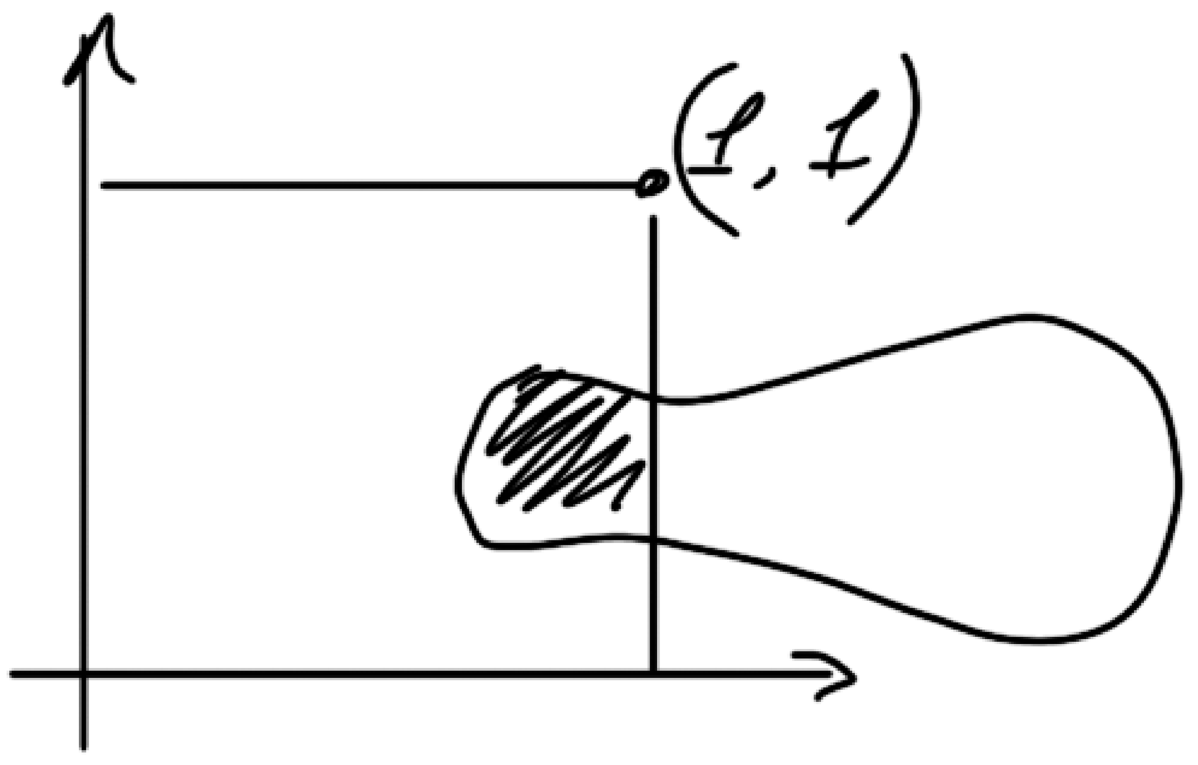
Лекция 8

Равномерное распределение

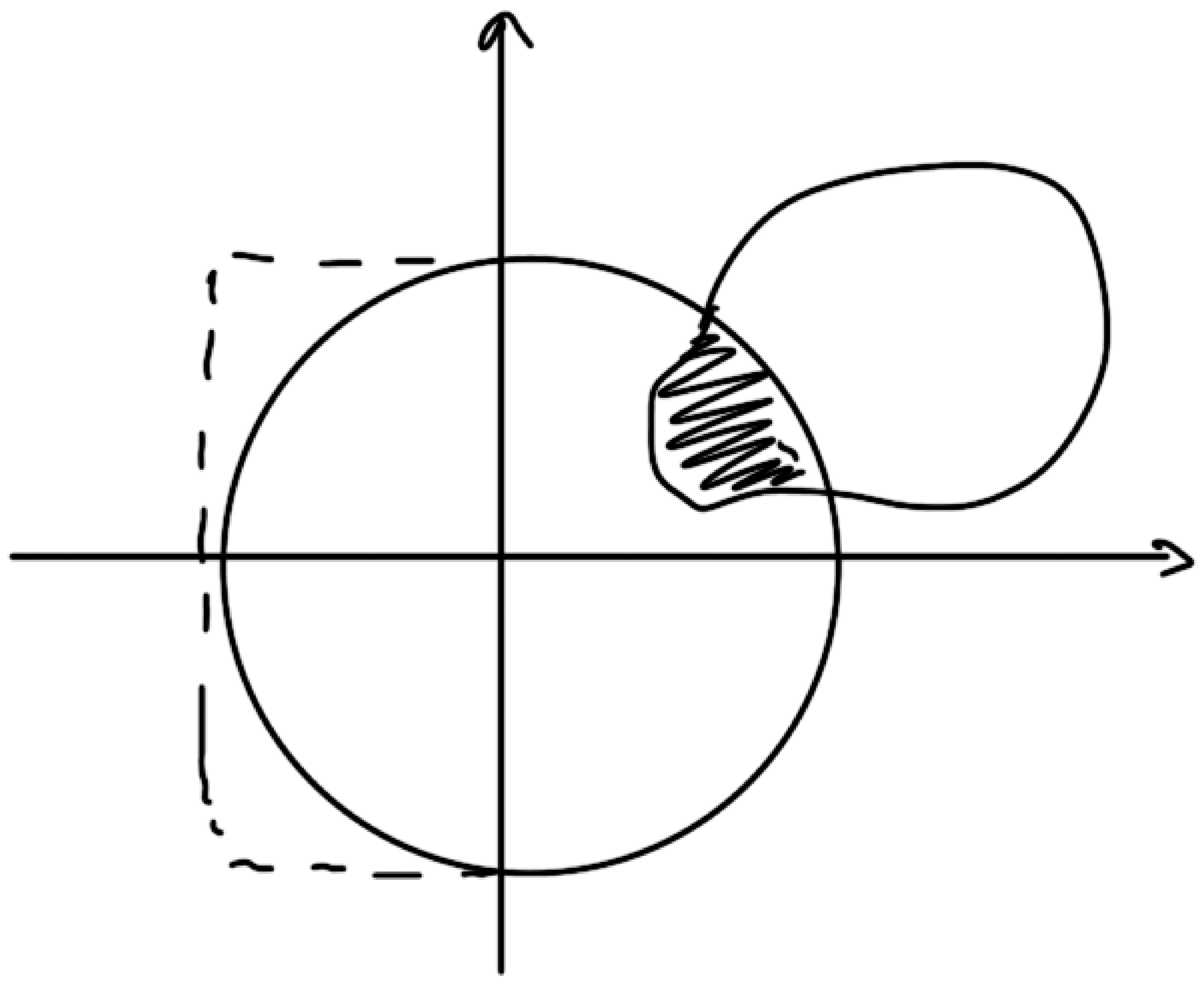
1) на $[0, 1] \times [0, 1]$ (на квадрате)



вероятность попадания в квадрат

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 - \text{иначе} \end{cases}$$

2) на круге



$$\frac{S_A}{\pi}$$

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

a b c
0 1 2 3
d 1 2 2 3
e 2 2 2 3
f 3
g 4

$$F_{1,2,\dots 6} = (x_1, x_2, \dots x_6)$$

$$F_{2,5}(x_1, x_3) = F(+\infty\ x_2, \dots x_5, +\infty)$$

Если есть плотность:

$$f_{2,5}(x_2, x_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \dots x_6)\, dx_1 \dots dx_6$$

$$f(x_2, \dots x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1 \dots x_n)$$

Независимость компонент случ. вектора.

$\forall A_1, A_2, \dots A_n \in \mathbb{R}$

$$P(\vec{X} \in A_1 \times A_2 \dots \times A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot$$
$$\cdot P(X_2 \in A_2) \dots \cdot P(X_n \in A_n)$$

$X_1 \dots X_n$ – незав.

$$\Leftrightarrow F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k), \text{ т.е.}$$

$$P(X_1 < x, X_2 < x_2 \dots X_n < x_n) = \prod_{k}^{n} P(X_k < x_k)$$

Распределение ф-ций от случ. величины

ξ – случ. величина

F_ξ – её ф-ция распр.

$g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

на самом деле на мн-ве знач. ξ.

$\eta = g(\xi)$

$P(\eta \in A) = P(g(\xi(\omega)) \in A)$

$P(\eta < x) = F_\eta(x)$

Рассмотрим частные случ.

1) $g(x) \uparrow$, т.е. $\forall x_1 < x_2: \; f(x_1) < f(x_2)$

$\exists h(u) = g^{-1}(u)$: $\quad h(g(x)) = x \quad \forall x$

$g(h(u)) = u \quad \forall u$

$$P(g(\xi) < x) = P(h(g(\xi)) < h(x)) =$$
$$= P(\xi < g^{-1}(x)) = F_\xi(g^{-1}(x))$$

def g

0 1 2 3 4

a
b
c

1.1) $g(x) = ax + b \quad a > 0$

$g^{-1}(u) = \frac{u-b}{a} \quad \eta = a\xi + b$

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

2) $g(x) \downarrow$ т.е. $\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$

$h \downarrow$

$\exists h(u) = g^{-1}(u)$:

$h(g(x)) = x \quad \forall x$

$g(h(u)) = u \quad \forall u$

$$P(g(\xi) < x) = P(h(g(\xi)) > h(x)) = P(\xi > g^{-1}(x)) =$$
$$= 1 - F_\xi(g^{-1}(x) + 0)$$

2.1) $g(x) = ax + b \quad a < 0$

$g^{-1}(u) = \frac{u-b}{a} \quad \eta = a\xi + b \quad F_\eta(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a} + 0\right)$

Если есть плотность

$$f_\xi(x) = F_\xi'(x)$$

1) $g\uparrow \ (F_\xi(g^{-1}(x)))' = \dfrac{f_\xi(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$

2) $g\downarrow \ \dfrac{f_\xi(g^{-1}(x))}{-g'(g^{-1}(x))}$

1.2) $\left|\dfrac{1}{a}\right| f_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

Примеры:

1) $U[0,1]$ $\quad f(x) = \overset{\swarrow \text{индикатор}}{\mathbb{1}}(0 < x < 1) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$g(x) = -\ln(1-x)$

$g^{-1}(u) = 1 - e^{-u}, \quad u > 0$

$$P(-\ln(1-\xi) < x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

2) $U[0,1]$ $\quad g(x) = ax + b, \ a > 0, \ \eta = a\xi + b$

Проверить $f_\eta(x) = \dfrac{1}{a}\mathbb{1}_{\{0 < \frac{x-b}{a} < 1\}} = \dfrac{1}{a}\mathbb{1}_{\{b<x<a+b\}}$

3) $\xi \sim N(0,1)$ $\quad f(x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$\sigma > 0, \ a \in \mathbb{R}, \quad \eta = \sigma\xi + a, \quad f_\eta(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

4) Преобразование Смирнова

$\exists \ F_\xi(x)$ — строго монотонна

$\eta = F_\xi(\xi) \qquad F_\eta(x) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x$

$0 < x < 1$

От случ. векторов

α	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,4

$\eta = \xi^2$

α	1	4	9	16
p	0,1	0,2	0,3	0,4

$\mathcal{Z} = |\xi - 2|$

c	0	1	2
p	0,2	0,1 + 0,3	0,4

Общее правило:
(при наличии совм. плотн.)

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad P(g(\vec{\xi}) \in A) =$

$$= \int \dots \int_{g^{-1}(A)} f_{\vec{\xi}}(x_1 \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots$$

$\exists\ g(\vec{x})$ обратима из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f_{g(\vec{\xi})}(\vec{x}) = \frac{1}{|J(g^{-1}(\vec{x}))|} f(g^{-1}(\vec{x}))$$

якобиан

Пример:

$$(\xi, \eta)^T \sim N\left(\vec{0}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$