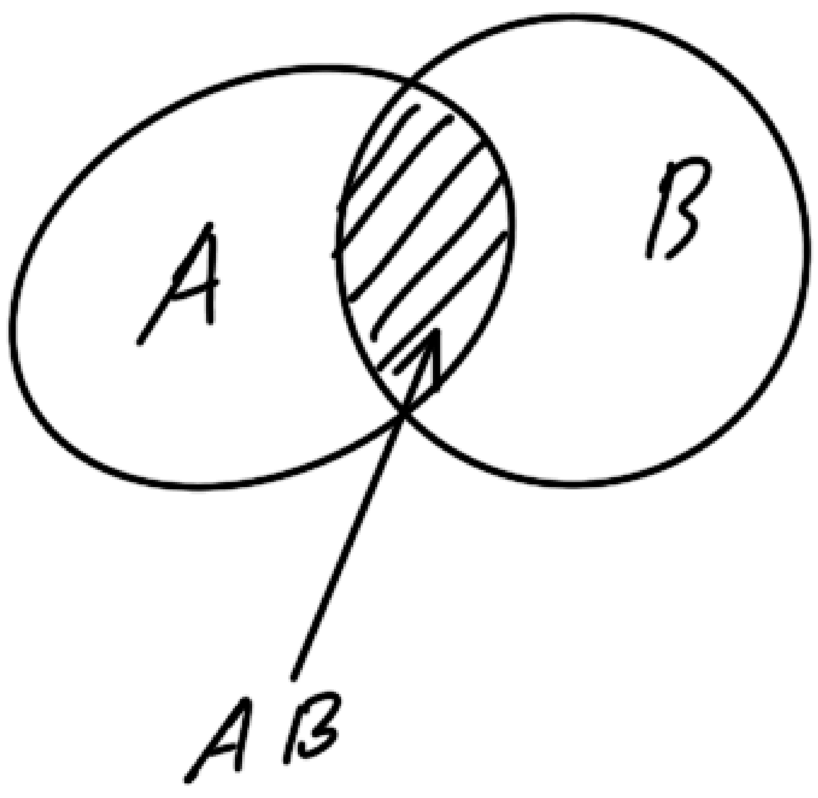
Лекция 3

• Формула сложения. Ф-ла включений и исключений:



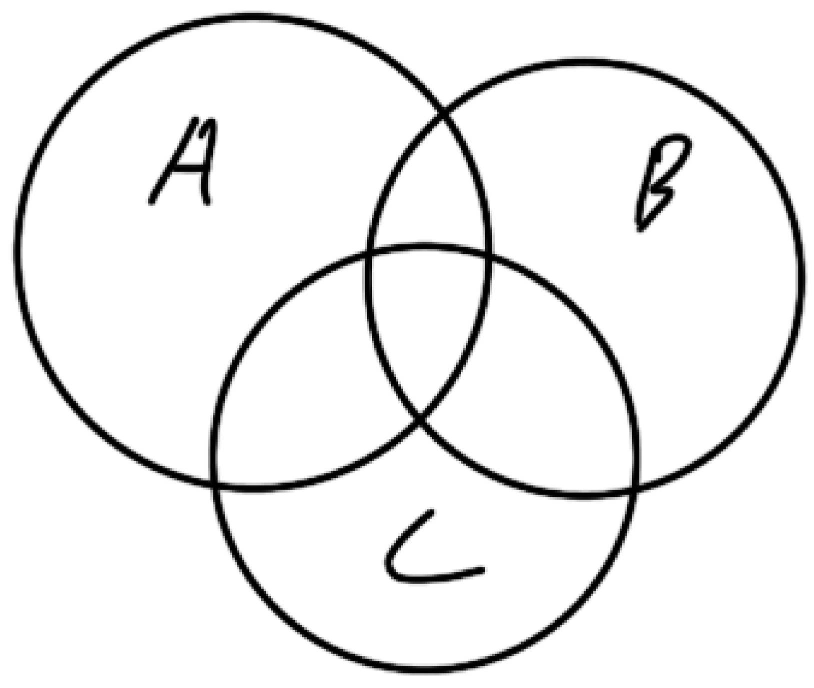
$$A \cup B = A\bar{B} \cup AB \cup B\bar{A}$$

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B} \cup AB \cup B\bar{A}) = \underbrace{P(A\bar{B}) + P(AB)}_{P(A)} + \underbrace{P(B\bar{A}) + P(BA)}_{P(B)} - P(BA) =$$

$$A\bar{B} \cup AB = A$$
$$AB \cup B\bar{A} = B$$
$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

т.е. $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

$\exists\ A_1 \dots A_n$ — события

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n} P\left(\bigcap_{l=1}^{r} A_{i_l}\right) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Замечание: если $A_1 \dots A_n$ — нез. совокуп, то ф-ла вкл. искл. не нужна, можно использовать ф-лу де-Моргана:

$$P(\cup A_i) = 1 - P(\cap \bar{A}_i) = 1 - \prod P(\bar{A}_i) = 1 - \prod (1 - A_i)$$

• Задача о письмах:

n конвертов

n писем

P(хотя бы 1 письмо попало, куда надо) – ?

A_i – письмо № i попало в конверт № i.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n(n-1)} + \ldots +$$

i и j на своём месте

$$+ \sum \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} \cdot (-1)^{r+1} + \ldots =$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$$

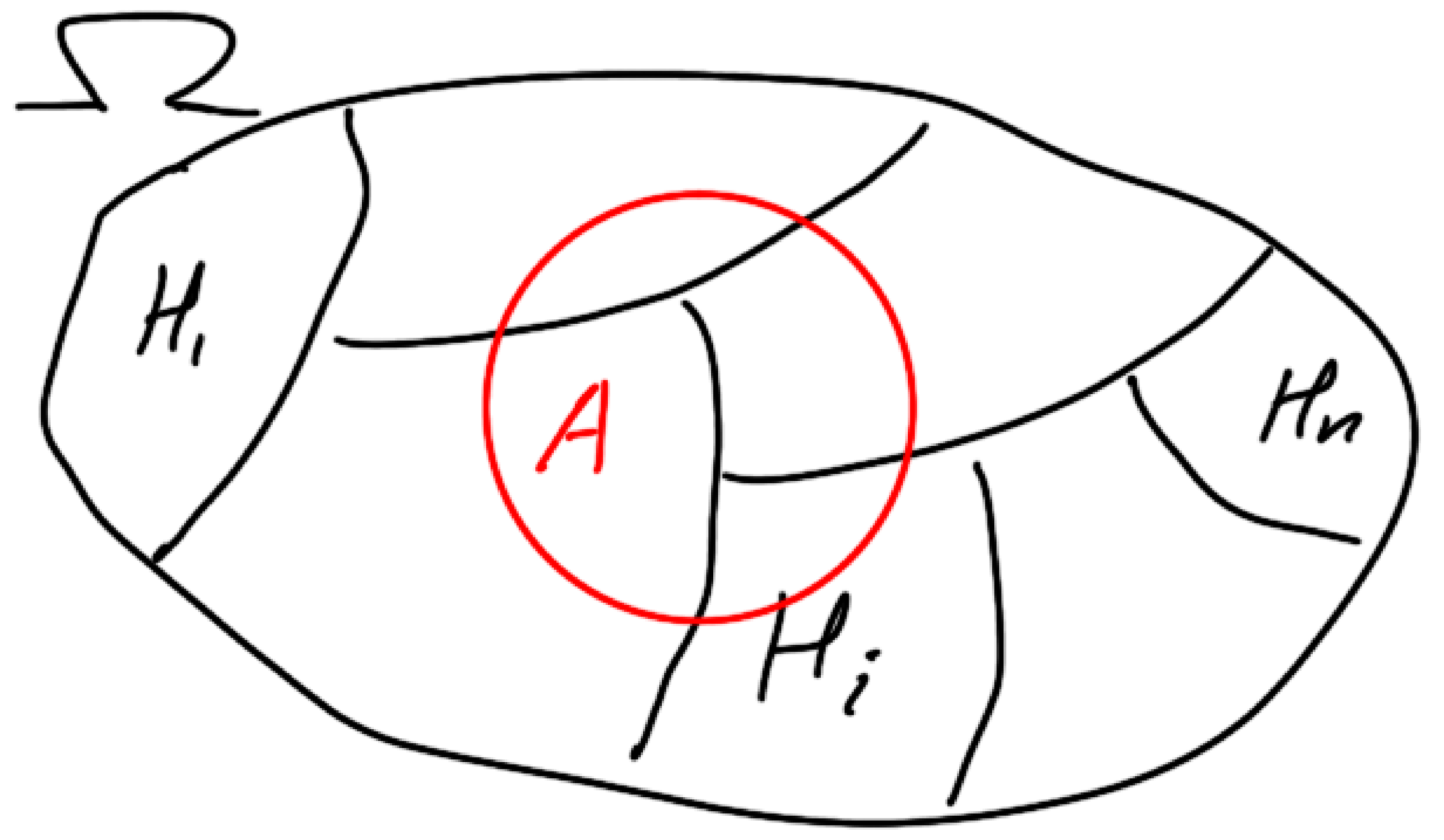
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \boxed{1 - e^{-1}}$$

$n = 2$: $\quad p_2 = \frac{1}{2}$

$n = 3$: $\quad p_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса.



$\Omega = \bigcup H_i$

$\forall i \neq j: \; H_i H_j = \varnothing$

$\forall i: \; P(H_i) \neq 0$

$\forall A \in \mathcal{A}: \quad A = \bigcup (A H_i)$

$$P(A) = \sum P(A H_i) \underset{\text{по ф-ле умножения}}{=} \sum P(A \mid H_i) P(H_i)$$

$$\boxed{P(A) = \sum P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) \quad \text{— ФПВ}}$$

Примеры

① 2 урны: 8 син, 2 кр.

1 урна: 3 син, 7 кр.

выбираем 1 шар из 1 урны

P(синий) — ?

H_1: урна типа 1 (8 : 2)

H_2: урна типа 2 (3 : 7)

$P(H_1) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(A \mid H_1) = \frac{8}{10}$

$P(H_2) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(A \mid H_1) = \frac{3}{10}$

$$\text{ФПВ}: \; P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{32+3}{60} = \frac{7}{12}$$

Вытянули синий шар. P(вытянули из урны типа 1) - ?

$\exists\, P(A) \neq 0$

Ф-ла умнож.: $P(AH_i) = P(A|H_i) \cdot P(H_i) =$

$= P(H_i|A) \cdot P(A)$

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum P(A|H_j) \cdot P(H_j)}}$$

↑
Ф-ла Байеса

$$\Rightarrow P(H_1|A) = \frac{8/10 \cdot 2/3}{7/12} = \frac{8}{15} \cdot \frac{12}{7} = \frac{32}{35}$$

---

② Болезнь: p

Тест: чувствительность t - болен → болен

специфичность s - здоров → здоров

A - человек болен

P(болен → болен) - ?

H_1 - болен $P(H_1) = p$ $P(A|H_1) = t$

H_2 - здоров $P(H_2) = 1 - p$ $P(A|H_2) = 1 - s$

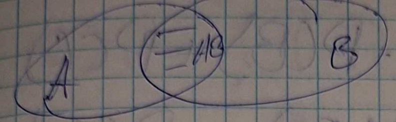
$P(H_1|A)$ - ?; $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} =$

$= \frac{pt}{pt + (1-p)(1-s)}$

$\exists\, p = 1 - t = 1 - s = 0{,}01 \Rightarrow \frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{0{,}01 \cdot 0{,}99 + 0{,}99 \cdot 0{,}01} = \frac{1}{2}$

Лекция

Формула сложения (включений, исключений)



← общая картина набора событий

т.к. события теперь несовместны

$$P(A\cup B) = P(A\bar{B} \cup AB \cup B\bar{A}) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(B\bar{A})$$

$(P(A\bar{B} + AB) =$ т.к. события несовместны$)$

$$A = A\bar{B} \cup AB \Rightarrow P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$$

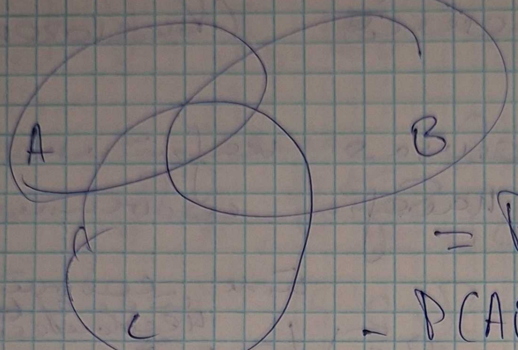
$$B = AB \cup B\bar{A} \Rightarrow P(B) = P(B\bar{A}) + P(AB)$$

$$P(A\cup B) = \underbrace{P(A\bar{B}) + P(AB)}_{P(A)} + \underbrace{P(B\bar{A}) + P(BA)}_{P(B)} - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Т.е.:

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Упр



$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$ (упр: д-ть)

(т.е. аккуратно разбить на непересекающиеся события)

Ф-ла включений-исключений:

$A_1,\dots,A_n$ — события

$$P(A_1\cup\dots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{r+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)$$

Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ незав-мы в совокупности, то: (кроме включения-искл-ия)

$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) =$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) =$$

Нез-мые события => нез-мы и дополнения

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = \cancel{1 - \prod_{j=1}^{n} (P(A_i))}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

Задача про письма:

$\exists$ конверты с написанными адресами (n штук) и $\exists$ письма, на к-ых написано кому адресовано (n штук)

Письма ~~в~~ были засунуты в случ. порядке в конверты

P(хотя бы 1 письмо попало в правильный конверт)

Реш: Хотя бы 1 => объединение

Письмо с адресатом №i попало в конверт №i

Итак $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \underbrace{n}_{\text{кол-во}} \sum_{i=1} \frac{1}{n} -$

$- \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le n}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \sum \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} \cdot (-1)^{r+1} \pm \ldots$ =

(до момента $r \le n-2$) все хорошо

= т.к. все слаг не зависят от индекса $\Rightarrow$ сумма $\to$ произв =

$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + C_n^r \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$

$(-1)^{r+1}$

Итог: $P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} +$

$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$ ☆

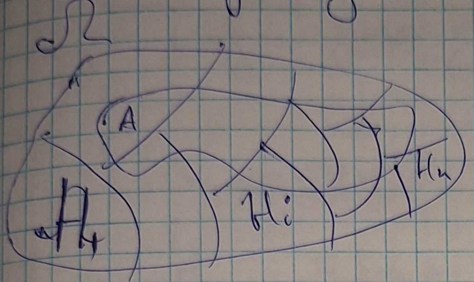
Факториал довольно быстро убывает $\Rightarrow$ ~~P(все рандомно) довольно~~

$\to$ P(не угадали ни одного) $\to 0$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

☆ $= 1 - e^{-1}$

Формула полной вероятности. ⇒ Формула Байеса (Bayes)



Предположим, что Ω разбито по гипотезам

$H_1 \dots H_n$ — не пересекаются

т.е. $\Omega = \{ \bigcup_{i=1}^{n} H_i : \forall\, i \neq j \quad H_i H_j = \varnothing$ (разбиение)

Гипотезы — несовместные события к-ые в объединении дают пр-во эл-ных событий

Гипотеза — один из элементов такого разбиения

Также: $\forall_i \; P(H_i) > 0$

Если $P(H_i) = 0$, то объединяем его с другими.

~~$\forall A \in \Omega$~~ $\quad \forall A \in \mathcal{A} \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} (AH_i)$

пересечения AH_i не пересекаются

Тогда:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$ по ф-ле умнож.

по дизъюнктности

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

т.к. $P(H_i) \neq 0 \ \forall i$

Итого:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$ — ф-ла полной вероятности

Ex:

2 урны состава 8 синих шаров, 2 красных

1 урна состава 3 син шаров, 17 кр

Случ образом выбирают урну. Из неё случ образом выбирают шар

P(синий шар) = ?

Видим намёк на гипотезы $\Rightarrow$ расписываем их

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

априорные вероятности (до эксперимента)

Реш:

Гипотезы:

H_1: урна типа I (8 : 2)

H_2: урна типа II (3 : 17)

$P(H_1) = \frac{2}{3}$

$P(H_2) = \frac{1}{3}$

$P(A|H_1) = \frac{8}{10}$ $\qquad$ $P(A|H_2) = \frac{3}{20}$

вытаскиваем белый шар, если урна I-го типа

ФПВ: $P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20} = \frac{32+3}{60} = \frac{7}{12}$

ФПВ $\neq$ всё в кучу высыпать:

$P(B) = \frac{19}{40}$ $\leftarrow$ высыпали в 1ну кучу.

Задача:

Вт-усл из урн +
+ вытащили синий шар,
P(вытащили из 1ой урны) - ?

Для этого нужна ф-ла Байеса

Ф-ла Байеса:

$$P(AH_i) = P(A|H_i)P(H_i) = P(H_i|A)\cdot P(A)$$

Пусть $P(A) \neq 0$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\cdot P(H_i)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A|H_i)\cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)} \leftarrow \text{ф-ла Байеса}$$

Р-ие задачи: $P(H_1|A) = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}} =$

$= \dfrac{32}{35}$ (логично: урна 1го типа больше + кол-во синих шаров в ней больше)

Задача:

Болезнь встречается с вероятностью p

Тест: 2 св-ва: + чувствительность, специфичность

Чувствительность: t (вероятность того, что тест покажет, что человек болен, если он болен)

Специфичность: s (вероятность того, что тест покажет, человек здоров, при усл он здоров)

Реш:

H_1: болен $P(H_1) = p$

H_2: здоров $P(H_2) = 1-p$

A: тест показал, что человек болен

Ищем $P(H_1|A)$ - ?

(т.е. что человек болен, при усл, что он болен)

$P(A|H_1) = t$

$P(A|H_2) = \cancel{t}\ 1-s$

тест показал что чел-болен, а он здоров.

$\cancel{P(H_1|A) = pt + (1-p)(1-s)}$

$$P(H_1|A) = \frac{pt}{pt+(1-p)\cdot(1-s)}$$ (по ф-ле Байеса)

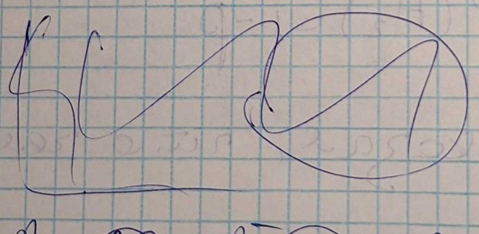
] $p = 1-t = 1-s = 0,01$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{100}} = \frac{1}{2}$$

Практика

№ 8

1) $(A+B)(A+\bar{B}) = A$



$\cancel{A + AB + A\bar{B} + AB = A}$

$AA + A\bar{B} + AB + B\bar{B} = A$

$AA + A(B+\bar{B}) + B\bar{B} = A$

$A + A + B\bar{B} = A$

$A + B\bar{B} = A$

$B\bar{B} = \varnothing$