ТВиМС-2025

8 июня 2025 г.

Содержание

1 Теория вероятностей.

1.1 Основы теории вероятностей и схема Бернулли.

1.1.1 Классическое и геометрическое определение вероятности.

Определение 1.1.1 (Пространство элементарных событий).
Ω - пространство элементарных событий.
ω_1, ω_2, ... - элементарные события.
$A \subset \Omega$ - случайное событие. $\mathscr{A} = \{A \subset \Omega\}$ - σ-алгебра подмножеств.

Определение 1.1.2 (σ-алгебра событий).
Свойства алгебры событий:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$ - достоверное событие.
2. Если $A \subset \mathscr{A}$, то $\overline{A} \subset \mathscr{A}$
3. $\emptyset$ - невозможное событие.
4. Если A, B - события (т.е. принадлежат $\mathscr{A}$), то $A \cup B$ и $A \cap B$ - события.

Свойства σ-алгебра событий:

1. Все свойства алгебры событий.
2. Если A_1, A_2, ... , $A_n \in \mathscr{A}$, то:
   (a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$
   (b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

Алгебра событий - семейство подмножеств Ω, замкнутое относительно операций конечного объединения, пересечения и дополнения.
σ-алгебра событий - семейство подмножеств Ω, замкнутое относительно операций счетного объединения, пересечения и дополнения.

Минимальная σ-алгебра - это σ-алгебра, из которой при убирании одного любого элемента, пересатет быть σ-алгеброй.

Обозначения	Термины	
	теории множеств	теории вероятностей
Ω	Множество, пространство	Пространство элементарных событий, достоверное событие
ω	Элемент множества	Элементарное событие
A, B	Подмножество A, B	Случайное событие A, B
$A + B = A \cup B$	Объединение (сумма) множеств A и B	Сумма случайных событий A и B
$AB = A \cap B$	Пересечение множеств A и B	Произведение событий A и B
$\overline{A}$	Дополнение множества A	Событие, противоположное для A
$A \backslash B$	Разность множеств A и B	Разность событий A и B
ϕ	Пустое множество	Невозможное событие
$AB = A \cap B = \phi$	Множества A и B не пересекаются (не имеют общих элементов)	События A и B несовместимы
$A = B$	Множества A и B равны	События A и B равносильны
$A \subset B$	A есть подмножество B	Событие A влечет событие B

Рис. 1: Таблица соответствий

Определение 1.1.3 (Класическое определение вероятности).
Пусть $\mid \Omega \mid = n$ $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ (т.е. события равновероятны).
$A \subset \Omega$ - событие (подмножество элементарных событий).
$\mid A \mid = k \rightarrow P(A) = \frac{k}{n}$
Следовательно, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Определение 1.1.4 (Геометрическое определение вероятности).
Рассматриваем Лебегову σ-алгебру $\rightarrow$ mes (мера) - существует и конечна.
Мера Лебега - мера, обобщающая понятия длины отрезка, площади фигуры и объёма тела на произвольное n-мерное евклидово пространство.

$0 < mes(\Omega) < +\infty$
$mes(\omega_i) = 0$
$A \subset \Omega \rightarrow P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$

Проще говоря: Ω - плоское, значит у Ω $\exists$ площадь, и она конечна.
$0 < S(\Omega) < +\infty$
$S(\omega_i) = 0$
$A \subset \Omega \rightarrow P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$

1.1.2 Основные комбинаторные формулы.

Определение 1.1.5 (Размещения).
Размещения - способ расположить в определенном порядке некоторого

числа элементов из заданного конечного множества.

Формулы:

1. **Размещения без повторений:** $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
2. **Размещения с повторениями:** $U_n^k = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$

Определение 1.1.6 (Сочетания).
Сочетания - способ расположения с несущественной последовательностью выбора некоторого числа элементов из заданного конечного множества.

Формулы:

1. **Сочетания без повторений:** $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
2. **Сочетания с повторениями:** $V_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

1.1.3 Аксиоматика Колмогорова.

Определение 1.1.7 (Несовместные события).
События A и B - несовместные $\leftrightarrow A \cap B = AB = 0$.
Т.е. события не могут наступить одновременно.

Определение 1.1.8 (Вероятность как функция).
Ω - пространство элементарных событий.
$\omega_i \in \Omega$ - элементарное событие.
$\mathscr{A}$ - σ-алгебра событий.

Тогда вероятность P - функция на множестве событий: $P : \mathscr{A} \to [0;1]$

Со следующими **аксиомами:**

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A, B : A \cap B = \emptyset \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. (Счетная аддитивность) $\forall A_1, ..., A_n \in \mathscr{A}$ $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, причем $A_i A_j = \emptyset$, если $i \neq j$

Из аксиом можно получить данные **следствия:**

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $A \subset B \to P(A) \leq P(B)$

1.1.4 Условная вероятность. Независимость. Формулы сложения и умножения.

Определение 1.1.9 (Условная вероятность).
A, B - события, причем: $P(A) > 0$.
Тогда вероятность события B при **условии** A:
$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P_A(B)$

Определение 1.1.10 (Формула умножения).
A, B - события: $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$.
Формула умножения: $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$

Пример:
В колоде 36 карт. На удачу вытащили 2 карты. Какова вероятность, что обе карты - пики?

1. **Класическая вероятность:** $= \frac{C_9^2}{C_{36}^2} = \frac{9 \cdot 8}{36 \cdot 35}$
2. **Формула умножения:** A - первая карта - пики, B - вторая карта - пики. Тогда $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35}$

Теорема 1.1.1 (Условная вероятность и аксиоматика Колмогорова).
Зафиксируем $A \subset \Omega$: $P(A) \neq 0$.
Тогда $P_A(B)$ - подчиняется аксиоматике Колмогорова, т.е. для нее выполняются те же аксиомы.
□
Доказательство 1ой аксиомы:
$P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega A)}{P(A)}$
Т.к. $A \subset \Omega$, то $\Omega A = A$
Следовательно, $P_A(\Omega) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Доказательство 2ой аксиомы:
Пусть B, C - события: $BC = \emptyset$, тогда:
$P_A(B \cup C) = \frac{P(A(B \cup C))}{P(A)} = \frac{P(AB \cup AC)}{P(A)}$
Т.к. $BC = \emptyset$, получаем: $ABAC = ABC = \emptyset$, т.е. события AB и AC - несовместны.
Следовательно, $\frac{P(AB \cup AC)}{P(A)} = \frac{P(AB)+P(AC)}{P(A)}$
Значит, $P_A(B \cup C) = \frac{P(AB)+P(AC)}{P(A)}$

$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$
$P_A(C) = \frac{P(AC)}{P(A)}$

Значит, $P_A(B) + P_A(C) = \frac{P(AB)+P(AC)}{P(A)}$

Итог: $P_A(B \cup C) = \frac{P(AB)+P(AC)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$

3яя аксиома доказывается аналогичным образом.

$\blacksquare$

Определение 1.1.11 (Независимые события. Попарно независимые события. Независимые в совокупности события)**.**
Пусть A и B - события.
Тогда A и B называют **независимыми событиями** $\leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Пусть $A_1, ..., A_n$ - события.
Тогда они **попарно независимы**, если $\forall i \neq j$, A_i и A_j независимы.

Пусть $A_1, ..., A_n$ - события.
Тогда они **независимы в совокупности**, если $\forall k \in \overline{[2..n]}$ и $\forall$ набора $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, выполняется: $P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$

Определение 1.1.12 (Формула сложения)**.**
Пусть A, B - события, тогда:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$\square$
$P(A \cup B) = P(A\overline{B} \cup AB \cup B\overline{A}) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A})$

$A = A\Omega = A(\overline{B} \cup B) = A\overline{B} \cup AB$
$B = AB \cup B\overline{A}$

$P(A \cup B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(B\overline{A}) + P(BA) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Итог: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\blacksquare$

Пусть A, B, C - события.
Аналогично (через разбиения на несовместные), доказывается следующее:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC)$

Формула сложения в **общем виде:**
$A_1, ..., A_n$ - события.
$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) + ... + (-1)^{r+1} \Sigma_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_r}) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

Если, дополнительно, $A_1, ..., A_n$ - независимы в совокупности, то:
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1 - \sqcap_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$

1.1.5 Формула полной вероятности.

Определение 1.1.13 (Формула полной вероятности)**.**
Разобъем множество элементарных событий Ω на независимые попарно гипотезы $H_1 ... H_n$.
Т.е. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ и $\forall i \neq j \to H_i H_j = \emptyset$.
Причем $\forall i H_i > 0$, иначе объединим эту гипотизу с другой.

Формула полной вероятности: $P(A) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i)$
$\square$
$\forall A \in \mathscr{A} \to P(A) = P(A\Omega) = \bigcup_{i=1}^{n} (AH_i)$
По попарной независимости и правилу умножения: $\bigcup_{i=1}^{n} (AH_i) = \Sigma_{i=1}^{n} (AH_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i)$

$\blacksquare$

1.1.6 Формула Байеса.

Определение 1.1.14 (Формула Байеса)**.**
Для получения вероятности наступления конкретной гипотезы используется формула Байеса.

А - событие: $P(A) \neq 0$, $H_1, ..., H_i$ - гипотезы, тогда:
Формула Байеса: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\Sigma_{j=1}^{n} P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$

1.1.7 Испытания Бернулли. Формула Бернулли.

Определение 1.1.15 (Испытания Бернулли)**.**
Испытания Бернулли - последовательность независимых испытаний с бинарным исходом.

Пространство элементарных событий - набор двоичных слов. Например: Подбрасываются 3 монеты: 0 - решка (неудача), 1 - орел (успех). P(выпал орел) $= p$ и P(выпала решка) $= q$.

События:
0 0 0 (вероятность - q^3)
0 0 1 (вероятность - $p \cdot q^2$)
0 1 0 (вероятность - $p \cdot q^2$)
0 1 1 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 0 0 (вероятность - $p \cdot q^2$)
1 0 1 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 1 0 (вероятность - $p^2 \cdot q$)
1 1 1 (вероятность - p^3)

Введем дополнительные обозначения:
Пусть S_n - число успехов в n-испытаниях Бернулли, тогда:
$P(S_n = k) := P_n(k), \forall k \in \overline{[0..n]}$
$P(m_1 \leq S_n \leq m_2) = \Sigma_{k=m_1}^{k=m_2} P_n(k) \ \forall \ m_1 \geq 0, \ m_2 \leq n, \ m_1 \leq m_2$

Тогда легко можно получить **формулу Бернулли:**

1. **Для точного числа успехов:** $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
2. **Для промежутка:** $P(m_1 \leq S_n \leq m_2) = \Sigma_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Лемма 1.1.1 (Наиболее вероятное число успехов)**.**
Число успехов, что наиболее вероятны, ограничено значением $p(n+1)-1$. Причем для целого $p(n+1)-1$ существует два таких числа, а для нецелого - одно.

□
Пусть даны n и p. Найдем k, при котором $P(S_n = k)$ - максимальное.
Сравним $P_n(k)$ и $P_n(k+1)$:

$\frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot p}{\frac{n!}{k!(n-k!)} \cdot q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$
Найдем решение неравенства: $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1$
$(n-k)p \geq (k+1)(1-p)$

$pn - pk \geq k - kp + 1 - p$
$k \leq pn + p - 1$
$k \leq p(n+1) - 1$

Т.к. значения p и n даны, то можно подсчитать значение для k - наиболее вероятного числа успехов.
Рассмотрим два варианта:

1. $p(n+1) - 1 \in \mathbb{Z}$: два наиболее вероятных числа успехов - k и $k+1$.
2. $p(n+1) - 1 \notin \mathbb{Z}$: одно наиболее вероятное значение.

■

1.1.8 Пуассоновское приближение для схемы Бернулли.

Определение 1.1.16 (Паусcоновское приближение)**.**
При фиксированном числе успехов и $n \to \infty$, верно следующее:
$C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$

1.1.9 Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 1.1.2 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.**
Пусть:

1. $x_n = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$: $n, k \to \infty$, x_n - ограничено.
2. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса.

Тогда:
$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x_n)$, при $n \to \infty$
□

1. Пользуемся формулой Стирлинга: $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\Pi n}$.
2. Пользуемся разложением в ряд Тейлора: $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Аккуратно расписываем $C_n^k p^n q^{n-k}$. При переходе от факториала к экспоненте необходимо будет прологарифмировать.

■

1.1.10 Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 1.1.3 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа).
Пусть:

1. $x_n^{'} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$: $n \to \infty$, k_1 - левая граница интервала.
2. $x_n^{''} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$: $n \to \infty$, k_2 - правая граница интервала.
3. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Тогда: $P_n(k_1; k_2) = \Phi(x^{''}) - \Phi(x^{'})$

1.2 Случайные величины и их распределения.

1.2.1 Случайная величина. Функция распределения случайной величины, ее свойства.

Определение 1.2.1 (Борелевские множество и -σ-алгебра).
Борелевское множество относительно $\mathbb{R}^n$ - элемент $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (борелевской σ-алгебры относительно $\mathbb{R}^n$).

Борелевская σ-алгебра относительно $\mathbb{R}^n$ - это система множеств, которое:

1. Содержит все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ (параллелепипед в общем случае; интервал для $\mathbb{R}$).
2. Замкнута относительно операций счетного объединения, пересечения и дополнения: точки, конкретные параллелепипеды, полуплоскости ... (обычное свойство σ-алгебры).
3. Является минимальной σ-алгеброй: если выкинуть хотя бы один элемент из данного множества, то оно перестает быть σ-алгеброй.

Определение 1.2.2 (Случайная величина).
Случайная величина ξ - есть измеримая функция: $\Omega \to \mathbb{R}$.
$\xi = \xi(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$.
Значит, $\forall c \in \mathbb{R} \to P\{\xi \neq c\} = 0$ или, что $P\{\xi = c\} = 1$.

$\xi = \xi(\omega)$ - **случайная величина**, если функция $\xi(\omega)$ измерима относительно введенной в рассматриваемом множестве Ω вероятности.

Иначе говоря, мы требуем, чтобы для каждого измеримого по Борелю множества (т.е. являющееся Борелевским множеством) A_ξ значений ξ множество A_ω тех ω, для которых $\xi(\omega) \subset A_\xi$ принадлежало множеству $\mathscr{A}$ случайных событий и, следовательно, для него была бы определена вероятность: $P\{\xi \subset A_\xi\} = P\{A_\omega\}$.

Т.е. если для любого борелевского множества A_ξ прообраз $A_\omega \in \mathscr{A} \to \xi$ является случайной величиной.
Если существует хотя бы одно борелевское множество A_ξ, для которого $A_\omega \notin \mathscr{A} \to \xi$ не является случайной величиной.

В частности, если множество A_ξ совпадает с полупрямой $\xi < x$, то вероятность $P\{A_\omega\}$ есть функция распределения переменного x: $P\{\xi < x\} = P\{A_\omega\} = F(x)$ - функция распределения случайной величины ξ.

Максимально **неформальное определение:**
Случайная величина - величина, значения которой зависят от случая и для которой определена функция распределения вероятностей.

Примеры:

1. Константа: $\forall \omega\ \xi(\omega) = a \in \mathbb{R}$
2. Монета: орел $+1$, решка -1
   $\mathscr{A} = \{\emptyset, \text{O}, \text{P}, \Omega\}$
   $\xi(\text{O}) = 1$, $\xi(\text{P}) = -1$, $\Omega = \{\text{O}, \text{P}\}$
   $P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$, $P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$
3. Число успехов в испытаниях Бернулли: $\omega \in \Omega$ - наборы длины n из 0 и 1.
4. Ошибки измерений.
5. Срок службы прибора.

Если ξ_1 и ξ_2 являются случайными величинами (т.е. измеримыми относительно введенной вероятности функциями $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$), то любая борелевская функция от них также является случайной величиной.

Например: $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ измерима относительно введенной вероятности и потому является случайной величиной.

Определение 1.2.3 (Измеримая функция)**.**
Функция ξ называется **измеримой** относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$, если $\forall x \in \mathbb{R}$ все прообразы интревалов $(-\infty, x)$ принадлежат σ-алгебре $\mathscr{A}$ (т.е. являются случайными событиями).

Пусть ξ - **измеримая функция**, тогда:

1. $\xi^{-1}([-\infty, a])$ и $\xi^{-1}([-\infty, b])$ - события.
2. $\xi^{-1}([a, b])$ - есть симметричная разность событий $\to \xi^{-1}([a, b])$ - тоже событие.

ξ - измерима относительно $\mathscr{A}$, если $\forall x \in \mathbb{R} \to \xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathscr{A}$.
$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in B,\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ и $\xi^{-1}(B) \in \mathscr{A}$.

Определение 1.2.4 (Функция распределения).
Пусть ξ - случайная величина и $x \in \mathbb{R}$ - произвольное вещественное число.

Функция распределения случайной величины ξ - вероятность того, что ξ примет значение, меньшее чем x: $F(x) = P\{\xi < x\}\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Случайные величины могут быть заданы на разных пространствах, но их распределения могут совпадать. Это не означает, что сами случайные величины совпадают.

Лемма 1.2.1 (Свойства функции распределения).
Свойства (необходимые и достаточные):

1. $\forall x\ F(x) \in [0, 1]$.
2. $F(x)$ не убывает.
3. $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке, имеет предел справа в любой точке.
5. Число разрывов (а именно скачков) $F(x)$ конечно или счетно.

Теорема 1.2.1 (Линейно выпуклая комбинация функций распределения).
Возьмем множество λ_1, λ_2, ..., λ_n: $\Sigma_{k=1}^{n} = 1$, а также множество функций распределений $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... , $F_n(x)$.

Тогда $\Sigma_{k=1}^{n} \lambda_k F_k(x) = F(x)$ - тоже функция распределения.

1.2.2 Непрерывная случайная величина. Плотность распределения, ее свойства. Примеры.

Определение 1.2.5 (Абсолютно непрерывная С.В.).
Абсолютно непрерывные случайные величины - класс случайных

величин, для которых существует неотрицательная функция $p(x)$, удовлетворяющая при любых x равенству: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz$.
Где $p(z)$ - функция плотности распределения.

Определение 1.2.6 (Плотность абсолютно непрерывной С.В.)**.**
Пусть ξ - абсолютно непрерывная случайная величина, тогда функция распределения ξ можно выразить через функцию плотности распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz$.

Лемма 1.2.2 (Свойства плотности С.В.)**.**
Свойства:

1. $p(x) \geq 0$.
2. $\forall\ x_1$ и x_2: $Px_1 \leq \xi \leq x_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(z)\,dz = F(x_2) - F(x_1)$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(z)\,dz = 1$.

Теорема 1.2.2 (Примеры С.В. абсолютно непрерывного типа)**.**
Примеры распределений:

1. Равномерное:
   (a) на $[0, 1]$:
   $$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$
   (b) на $[a, b]$: $a < b$:
   $$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (a, b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$
2. Показательное (с параметром $\lambda > 0$):
   $$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$
3. Нормальное (Гауссовское):
   (a) Стандартное:
   $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$
   $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

(b) Общее (с параметрами a и σ^2):
$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x-a}{\sigma})$
$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \frac{1}{\sigma}\Phi(\frac{x-a}{\sigma})$

1.2.3 Дискретная случайная величина. Способы задания. Примеры.

Определение 1.2.7 (Дискретная С.В.).
Дискретные случайные величины - класс случайных величин, которые могут принимать только конечное или счетное множество значений.

Способы задать дискретную С.В.

1. Построить **ряд распределения**: состоит из x_k и p_k: p_k - вероятность того, что ξ примет значение x_k. Причем $\Sigma_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Задать **функцию распределения**: $F(x) = \Sigma p_k$ для таких k, при которых $x_k < x$.

Теорема 1.2.3 (Примеры С.В. дискретного вида).
Примеры:

1. Вырожденное: $P(\xi = c) = 1$.
2. Распределение Бернулли (с вероятностью успеха p):
   (a) $P(\xi = 0) = 1 - p$.
   (b) $P(\xi = 1) = p$.
3. Биномиальное распределение (с параметрами m и k): $P(\xi = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, $\forall k \in \overline{[0, m]}$.
4. Равномерное дискретное: $P(\xi = k) = \frac{1}{n}$, $\forall k \in \overline{[0, n]}$.
5. Пуассоновское распределение (с параметром λ): $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
6. Геометрическое (с параметром $p \in (0, 1)$): $P(\xi = k) = p(1-p)^k$, $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

1.2.4 Математическое ожидание и дисперсия. Их свойства.

Определение 1.2.8 (Интеграл Стилтьеса).
Предположим, что на интервале (a, b) определены:

1. Функция $f(x)$.
2. Неубывающая функция $F(x)$ с ограниченной вариацией и непрерывная слева.

Если интервал (a, b) конечен, то разделим его точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на конечное число частичных интервалов (x_i, x_{i+1}). Для каждого интервала возьмем точку $\overline{x_i} \in (x_i, x_{i+1})$, что лежит в нем.

Тогда:
$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n}(f(\overline{x_i})[F(x_i - F(x_{i-1}))])$ - интеграл Стилтьеса от функции $f(x)$ с интегрируемой функцией $F(x)$.
$I = \int_a^b f(x)dF(x)$.

Используя понятие интеграла Стилтьеса, можно написать общие формулы:

1. Функции распределения суммы С.В.: $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y-z)\, dF_X(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x-z)\, dF_Y(z)$
2. Функции распределения частного С.В.: $F_Z(z) = \int_0^{+\infty} F_X(xz)\, dF_Y(z) + \int_{-\infty}^{0}[1 - F_X(xz)]\, dF_Y(z)$

Определение 1.2.9 (Математическое ожидание).
Математическое ожидание - "среднее"значение случайной величины.
Математическое ожидание - проекция случайной величины на пространство констант.

Формулы математического ожидания:

1. Для дискретных С.В.: $E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ сходится абсолютно и где:
   (a) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - возможные значения случайной величины.
   (b) $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ - соответствующие им вероятности.
2. Для непрерывных С.В.: $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\, dx$, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x)\, dx$ существует и где:
   (a) $p(x)$ - функция плотности С.В.

Для двумерного случая:

1. Для дискретной двумерной С.В.: $E(h(x,y)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)p_{ij}$, где:
   (a) $h(x, y)$ - некоторая функция функция от двух переменных (функция, для которой высчитывается мат. ожидание).
   (b) p_{ij} - совместная вероятность: $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $x \in \overline{[1..n]}$, $y \in \overline{[1..m]}$
2. Для непрерывной двумерной С.В.: $E(h(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)p(x,y)\, dx\, dy$, где:

(a) $h(x, y)$ - непрерывная функция двух переменных, для которой считаетя мат. ожидание.

(b) $p(x, y)$ - функция совместной плотности.

Для произвольного случайного вектора $E(\vec{X}) = (E(x_1), ..., E(x_n))$ - покомпонентное мат ожидание.

Для непрерывной С.В., пользуясь определением интеграла Стилтьеса, можно дать простое геометрическое толкование мат. ожиданию:

Мат. ожидание равно разности площадей, заключенных между осью ординат, прамой $y = 1$ и кривой $y = F(x)$ в интервале $(0, +\infty)$ и между осью абцисс, кривой $y = F(x)$ и осью ординат в промежутке $(-\infty, 0)$.

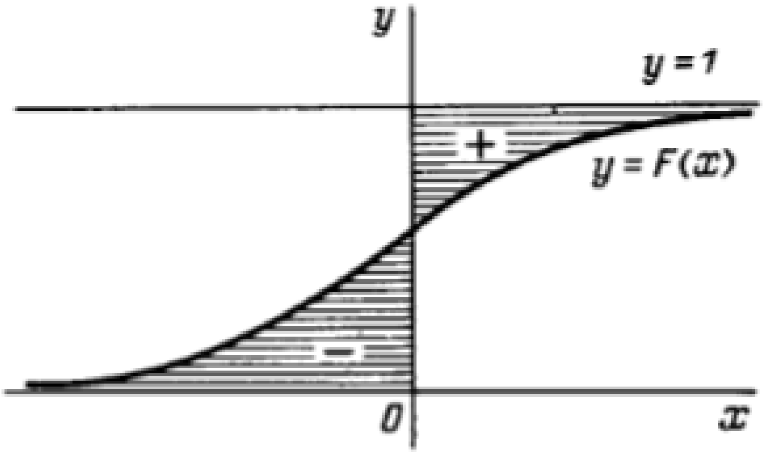

Рис. 2: Геом представление мат ожидания

Важное уточнение: параметр a в нормальном законе распределении (отвечает за смещение графика вправо) равен математическому ожиданию.

$E(\mathbf{1}_{\{x \in A\}}) = P(A)$, где $\mathbf{1}_{\{x \in A\}}$ - индикаторная функция.

Лемма 1.2.3 (Свойства математического ожидания).
Свойства:

1. $E(c = \text{const}) = c$.
2. $E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_\xi(x)\, dx$, если $g(x)$ - измеримая по Борелю функция.
3. Линейность: $E(aX + b) = aE(x) + b$.
4. Аддитивность: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

5. Монотоннсоть: если $X \geq 0$, то $E(X) \geq 0$, если $X \geq Y$, то $E(X) \geq E(Y)$.

Определение 1.2.10 (Дисперсия).
Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата уклонения ξ от $E(\xi)$.
$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$

Дисперсия играет роль меры рассеяния (разбросанности) значений случайной величины около математического ожидания.

Частные формулы:
1. Для дискретной С.В.: $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(\xi))^2 p_i$.
2. Для непрерывной С.В.: $D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E(\xi))^2 p(x)\, dx$.

Важное уточнение: параметр σ^2 в нормальном законе распределении (отвечает за сплющенность графика) равен дисперсии.

Лемма 1.2.4 (Свойства дисперсии).
Свойства:
1. $D(c = \text{const}) = 0$ (док-во через определение).
2. Неотрицательность: $D(\xi) >= 0$.
3. $D(a\xi) = a^2 D(\xi)$.
4. $D(\xi + c = \text{const}) = D(\xi)$.
5. $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$, если ξ и η независимы.

1.2.5 Распределение функций от случайных величин.

Теорема 1.2.4 (Распределение функций от случайных величин).
Пусть ξ - случайная величина.
$F_\xi(x)$ - функция распределения ξ.

Пусть $\exists$ функция $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (на самом деле из МЗФ ξ, т.е. $g(x) : E(\xi) \to \mathbb{R}$)
Пусть $\eta = g(\xi)$ - некоторая функция от случайной величины. Тогда:
1. $P\{\eta \in A\} = P\{g(\xi(\omega)) \in A\}$.
2. $P\{\eta < x\} = F_\eta(x)$ - функция распредления для η.

Лемма 1.2.5 ($g(x)$ монотонно возрастает).
Если $g(x)$ монотонно возрастает, то: $\exists$ функция $h(u) = g^{-1}(u)$: $h(u)$ - монотонно возрастающая функция.
Тогда: $h(g(x)) = x \; \forall x$ и $g(h(u)) = u \; \forall u$.

Итог: $P\{g(\xi) < x\} = P\{h(g(\xi)) < h(x)\} = P\{\xi < g^{-1}(x)\} = F_\xi(g^{-1}(x))$ (применили к обеим частям неравенства строго монотонно возрастающую функцию $\rightarrow$ знак не изменился).

Пример:
$g(x) = ax + b, a > 0$, тогда: $g^{-1}(u) = \frac{u-b}{a}$.
Если $\eta = a\xi + b$, то $F_\eta(x) = F_\xi(\frac{x-b}{a})$.

Лемма 1.2.6 ($g(x)$ монотонно убывает)**.**
Если $g(x)$ монотонно убывает, то аналогично $\exists$ функция $h(u) = g^{-1}(u)$: $h(u)$ - монотонно убывающая.
$h(g(x)) = x \ \forall x$ и $g(h(u)) = u \ \forall u$.

Итог: $P\{g(\xi) < x\} = P\{h(g(\xi)) > h(x)\} = P\{\xi > g^{-1}(x)\} = 1 - F_\xi(g^{-1}(x) + 0)$ (предел справа) (знак поменялся).

Пример:
$g(x) = ax + b, a < 0$, тогда: $g^{-1}(u) = \frac{u-b}{a}$.
Если $\eta = a\xi + b$, то $F_\eta(x) = 1 - F_\xi(\frac{x-b}{a} + 0)$.

Если у ξ есть плотность, то пределы слева и справа совпадают.
$p_\xi(x) = F^{'}_\xi(x)$ - плотность ξ, тогда:

1. $g(x)$ монотонно возрастает: $F^{'}_\xi(g^{-1}(x)) = \frac{p_\xi(g^{-1}(x))}{g^{'}(g^{-1}(x))}$
2. $g(x)$ монотонно убывает: $F^{'}_\xi(g^{-1}(x)) = \frac{p_\xi(g^{-1}(x))}{-g^{'}(g^{-1}(x))}$

Примеры:

1. Равномерное распределение на $[0, 1]$, $p(x) = \mathbf{1}_{\{0 \le x \le 1\}}$ (индикаторная функция).
   $g(x) = -ln(1 - x)$ - монотонно возрастающая функция.
   $g^{-1}(u) = 1 - e^{-u}, u > 0$.
   $P\{\xi < x\} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
   Тогда: $P\{g(\xi) < x\} = F_\xi(g^{-1}(x)) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
2. Нормальное распределение $(a = 0, \sigma = 1)$, $p_\xi(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.
   $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt$
   $\sigma > 0, a \in \mathbb{R}$: $\eta = \sigma\xi + a \rightarrow g(x) = \sigma x + a$ - монотонно возрастающая

функция.
$p_\eta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Теорема 1.2.5 (Преобразование Смирнова)**.**
Преобразование применимо к случайной величине ее же функции **нормального распределения**.

Пусть $F_\xi(x)$ - строго монотонная функция.
$\eta = F_\xi(x)$. Тогда:
$F_\eta(x) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x$ при $0 < x < 1$.

Итог: случайная величина всегда равномерно распределена по отрезку.

Теорема 1.2.6 (Распределение функций случайных векторов)**.**
Пусть $g(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Тогда при наличии совместной плотности:
$P\{g(\vec{\xi}) \in A\} = P\{\vec{\xi} \in g^{-1}(A)\} = \int ... \int_{g^{-1}(A)} p_{\vec{\xi}}(t_1, ..., t_n)\, dt_n ... \, dt_1$

Пусть $g(\vec{x})$ обратима из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, тогда:
$p_{g(\vec{\xi})}(\vec{x}) = \frac{1}{|\det(J(g^{-1}(\vec{x})))|} p_{\vec{\xi}}(g^{-1}(\vec{x}))$

Теорема 1.2.7 (Свертки распределений)**.**
Случайные величины должны подчиняться одному закону распределения, а также быть независимыми.

Лемма 1.2.7 (Свертки для дискретных С.В.)**.**
Пусть X, Y - дискретные независимые случайные величины, тогда свертка в общем виде равна:
$P\{Z = m\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\{X = k\} P\{Y = m - k\}$

Примеры:

1. Равномерное распредление: 2 кубика независимо бросают.
   $X \sim U[1:6], Y \sim U[1:6]$ - равномерное дискретное распределение.
   $P\{X = k\} = \frac{1}{6}$, $P\{Y = k\} = \frac{1}{6}$, $\forall k \in \overline{[1..6]}$
   Тогда $P\{X + Y = k\} = \sum_{m=\max(1,k-6)}^{\text{min(6, k-1)}} P\{X = m, Y = k - m\} = \sum_{m=\max\text{(1, k-6)}}^{\text{min(6, k-1)}} P\{X = m\} P\{Y = k - m\}$
2. Пуассоновское распрделение:
   $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \text{Pois}(\nu)$ (Пуассоновские распределения с параметрами λ и ν).
   $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $P\{Y = k\} = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}$
   Тогда $P\{X + Y\} = \sum_{m=0}^{k} P\{X = m, Y = k - m\} = \sum_{m=0}^{k} (\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \cdot$

$\frac{\nu^{k-m}e^{-\nu}}{(k-m)!}) = \frac{e^{-\nu-\lambda}}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^k \nu^{k-m} k!}{m!(k-m)!} = \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{k} C_k^m \lambda^m \nu^{k-m} = \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{k!}(\lambda+\nu)^k$

Лемма 1.2.8 (Свертки для непрерывных С.В.).
Пусть X и Y - абсолютно непрерывные независимые случайные величины, причем $X \sim p_X(x)$, $Y \sim p_Y(y)$,тогда свертка в общем виде равна:
$P\{X+Y<t\} = \int\int_{x+y<t} p_X(x)p_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t-x} p_X(x)p_Y(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\int_{-\infty}^{t-x} p_Y(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)F_Y(t-x)\,dx$, где:
$F_Y(y)$ - функция распределения от плотности $p_Y(y)$.
$p_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(t-x)\,dx$

Примеры:

1. Равномерное распределение на интервале:
   $X \sim U[0,1]$ и $Y \sim U[0,1]$.
   $p_X(x) = \mathbf{1}_{\{0\le x\le 1\}}$ и $p_Y(y) = \mathbf{1}_{\{0\le y\le 1\}}$ - индикаторные функции плотности.
   $Z = X + Y$ - хотим найти распределение.
   $p_Z(t) = (p_X * p_Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{0\le x\le 1\}}\mathbf{1}_{\{0\le t-x\le 1\}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{0\le x\le 1; 0\le t-x\le 1\}}\,dx = \int_{\max(0,t-1)}^{min(1,t)} 1\,dx = \begin{cases} t, & t\in[0,1] \\ 1-(t-1), & t\in[1,2] \end{cases}$

1.2.6 Случайные векторы. Совместные распределения случайных величин. Вычисление распределений компонент.

Определение 1.2.11 (Случайный вектор).
Рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$, на котором опрделены n случайных величин: ξ_1, ... , ξ_n (функции $\xi_i(\omega)$ - измеримы).

Случайный вектор $\vec{\xi}$ - есть измеримая функция: $\Omega \to \mathbb{R}^n$.
$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (все $\xi_i(\omega)$ - измеримы).

Определение 1.2.12 (Функция распределения случайного вектора).
Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ - случайный вектор.
Обозначим через $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}$ множество тех элементарных событий ω, для которых одновременно выполняются все неравенства: $\xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, ..., \xi_n(\omega) < x_n$

Событие $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}$ - это произведение событий $\xi_k(\omega) < x_k$, $1 \le k \le n$.

Следовательно, оно принадлежит множеству $\mathscr{A}$: $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\} \in \mathscr{A}$.

Таким образом, при любом наборе чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ определена вероятность $F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}$ - n**-мерная функция распределения** случайного вектора (или **функция совместного распределения**) $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

В евклидовом пространстве, функция распределения даст вероятность попадания точки $(\xi_1, ..., \xi_n)$, которая попадает в угол n-мерного параллелепипеда $x_1, x_2, ..., x_n$ с ребрами, параллельным осям координат.

Определение 1.2.13 (Совместное распределение).
Совместная распределение - это распределение совместных исходов $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, образованных из нескольких случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Пример: если случайная величина ξ_1 - результат кидания первой игральной кости, а случайная величина ξ_2 - результат кидания другой игральной кости, то вектор (ξ_1, ξ_2) совместного кидания игральных костей является составной величиной и имеет совместное распределение.

Т.е. **совместное распределение** - множество вероятностей, которые получаются путем приема функций (компонент вектора) случайных величин конкретных значений.

Определение 1.2.14 (Маргинальная функция распределения).
Если функция распределения принимает такой вид: $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_{n-1}, \infty)$, то будет выполнена следующая система неравенств:
$\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_{n-1} < x_{n-1}$

Т.е. произойдет переход от n-мерной функции распределения к $n-1$-мерной. Такие функции распределения $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_{n-1}, \infty)$ называются **маргинальными**.

Они необходимы для получения распределений отдельных компонент случайного вектора (свести вектор к функции распределения для отдельной компоненты: все остальные взять за ∞).

Лемма 1.2.9 (Свойства многомерной функции распределения).
С помощью функции распределения легко вычислить вероятность того, что точка $(\xi_1, ..., \xi_n)$ окажется внутри параллелепипеда:
$a_i \le \xi_i < b_i$ $(i \in \overline{[1..n]})$ (через формулу включения-исключения).

Для **двумерного** случая:
$P\{a_1 \le \xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.

Дополнительные свойства:

1. Неубывание по каждой из компонент.
2. Непрерывность слева по каждой из компонент.
3. $\lim_{x_k \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = 1$.
4. $\lim_{x_k \to -\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = 0$.

Определение 1.2.15 (Абсолютно непрерывный случайный вектор)**.**
$\vec{\xi}$ - **абсолютно непрерывный** случайный вектор, если $\exists$ функция $p(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$.
$F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{\vec{\xi}}(t_1, ..., t_n)\, dt_n ... dt_1$.

Где $p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ - **совместная функция плотности**.
$p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}$

Лемма 1.2.10 (Свойства совместной функции плотности)**.**
Если $F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{\vec{\xi}}(t_1, ..., t_n), dt_n ... dt_1$, то:

$p_{\vec{\xi}}(t_1, t_2, ..., t_n)$ - **совместная функция плотности**, со следующими свойствами:

1. $p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$.
2. $\int ... \int_{\mathbb{R}^n} p_{\vec{\xi}}(t_1, ..., t_n), dt_n ... dt_1 = 1$.

Плотность i-ой компоненты вычисляется путем интегрирования по всем остальным переменным:
$p_{\xi_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, ..., x_i, ..., x_n), dx_1 ... dx_{i-1}, dx_{i+1} ... dx_n$

Плотность распределения i-ой компоненты при условии j-ой вычисляется по формуле:
$p_{\xi_i|\xi_j=y}(x) = \frac{\int \cdots \int p(x_1, ..., x_i, ..., y, ..., x_n) dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n}{p_{\xi_j}(y)}$

Для двумерного случая: $p_{\xi_i|\xi_j=y}(x) = \frac{p_{\xi_i, \xi_j}(x, y)}{p_{\xi_j}(y)}$

Условная плотность описывает "сечение"совместного распределения при фиксированном значении $\xi_j = y$. Это позволяет рассуждать о распределении ξ_i, когда мы точно знаем значение ξ_j.

Условное распределение именно "отсекает"срез совместного распределения при фиксированном значении одной переменной и нормирует его для получения плотности.

Определение 1.2.16 (Дискретный случайный вектор).
$\vec{\xi_i}$ - **дискретный** случайный вектор, если множество его возможных значений конечно или счетно.
Из определения следует, что случайный вектор является дискретным тогда и только тогда, когда все его компоненты $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - дискретные случайные величины.

Лемма 1.2.11 (Таблица распределения двумерного дискретного вектора).
Двумерный дискретный случайный вектор можно задать через **таблицу распределения:**

Пусть векторы $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_m)$ - значения, что принимают компоненты (случайные величины) двумерного случайного вектора.

Тогда ячейка таблицы совместного распределения примет вид: $p_{kl} = P(\xi = a_k, \eta = b_l)$.
Причем $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} p_{kl} = 1$.

Правила заполнения:

1. По строкам откладывается принимаемые значения одной случайной величины, по столбцам - другой.
2. Внутри - заданы совместные вероятности: сумма всех совместных вероятность равна единице.

Распределение компонент получается суммированием по конкретным строкам или столбцам таблицы.
$P\{X = X_i\} = \sum_j P\{X = X_i, Y = Y_j\}, i = 1, ..., n$ - для случайных величин X и Y.

Условная вероятность определяется следующим образом:
$P\{Y = Y_j | X = X_i\} = \frac{P\{X=X_i, Y=Y_j\}}{P\{X=X_i\}}$

1.2.7 Независимость случайных величин. Коэффициент корреляции.

Определение 1.2.17 (Независимость случайных величин).
Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ **независимы** $\leftrightarrow$ если для любой груп-

пы $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_k}$ этих величин имеет место равенство:
$P\{\xi_{i_1} < x_{i_1}, \xi_{i_2} < x_{i_2}, ..., \xi_{i_k} < x_{i_k}\} = P\{\xi_{i_1} < x_{i_1}\}P\{\xi_{i_2} < x_{i_2}\}...P\{\xi_{i_k} < x_{i_k}\}$

При произвольных $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ и любом k: $1 \leq k \leq n$.

В терминах функций распределения (для произвольной группы $x_1, x_2, ..., x_n$):
$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)...F_n(x_n)$, где: $F_k(x_k)$ - функция распределения величины ξ_k.

Для **дискретных** случайных величин:
$\xi_1, \xi_2..., \xi_n$ - независимы $\leftrightarrow P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, ..., \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\}P\{\xi_2\}...P\{\xi_n = x_n\}$

Для **абсолютно непрерывных** случайных величин:
$\xi_1, \xi_2..., \xi_n$ - независимы $\leftrightarrow p(x_1, x_2, ..., x_n) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)...p_{\xi_n}(x_n)$

Определение 1.2.18 (Медиана)**.**
Медиана - точка x, в которой $F(x) = \frac{1}{2}$.
Медиана - центр симметрии.

Если величина $F(x) = \frac{1}{2}$ достигается в разрыве, то:
$medX = F^{-1}(\frac{1}{2}) = \sup\{x : F(x) < \frac{1}{2}\}$ - псевдообратная функция в точке $\frac{1}{2}$.

Если у случайной величины, функция распределения принимает значение $F(x) = \frac{1}{2}$ на отрезке, то медиана - любая точка из этого отрезка.

Медиана существует у любой случайной величины.

Определение 1.2.19 (Квантиль)**.**
Квантиль q_p уровня p есть $q_p = F^{-1}(p) = \sup\{x : F(x) < p\}$ (т.е. тоже самое, что и медиана, но без привязки к $\frac{1}{2}$).

Определение 1.2.20 (Момент)**.**
Моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание величины $(\xi - a)^k$.

Если $a = 0$, то момент называется **начальным**.
Если $a = E(\xi)$, то момент называется **центральным**.

Моменты порядка k существуют, если $E(|x|^k) < +\infty$.

Если $\vec{X}$ - случайный вектор, то:
$E(x_1^{k_1})...E(x_n^{k_n})$ - смешанный начальный момент порядка $(k_1, ..., k_n)$.
$E(\prod_{j=1}^{n} E(x_j - E(x_j)^{k_j}))$ - смешанный центральный момент порядка $(k_1, ..., k_n)$.

Определение 1.2.21 (Ковариация)**.**
Ковариация - это мера линейной зависимости между двумя случайными величинами X и Y.
$\mathrm{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.
$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Ковариация - это мера того, как две случайные величины меняются вместе.

Свойства:

1. Билинейность (линейность по обеим компонентам): $cov(a_1X_1 + a_2X_2, Y) = a_1cov(X_1, Y) + a_2cov(X_2, Y)$.
2. Коммутативность: $cov(X, Y) = cov(Y, X)$.
3. Независимость от сдвига: $cov(X - c, Y) = cov(X, Y)$.
4. Если X и Y - независимые и $\exists E(X^2) < \infty$ и $E(Y^2) < \infty$, то: $cov(X, Y) = 0$.

Определение 1.2.22 (Ковариационная матрица)**.**
$C = \{c_{ij}\}_{ij=1}^{n}$, где $c_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$ - ковариационная матрица.
$C = E((\vec{X} - E(\vec{X}))(\vec{X} - E(\vec{X})^T))$.

Свойства:

1. $C = C^T$.
2. $C \geq 0$

Определение 1.2.23 (Коэффициент корреляции)**.**
Корреляция - это нормированная ковариация, которая измеряет силу и направление линейной зависимости между двумя случайными величинами.
$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}$.

Отличие от ковариации:

1. Не зависит от масштаба.
2. Безразмерная величина.

Свойства:

1. $-1 \leq \rho \leq 1$. Причем $|\rho| = 1 \leftrightarrow Y = aX + b$ (для $\rho = 1$, $a > 0$; для $\rho = -1$, $a < 0$).

2. X, Y - независимые С.В. $\leftrightarrow \rho = 0$.

1.2.8 Многомерное нормальное распределение. Плотность (в невырожденном случае), характеристическая функция. Необходимое и достаточное условие независимости компонент.

Лемма 1.2.12 (Многомерное нормальное распределение).
Распределение многих практических важных случайных величин оказывается подчиненным нормальному закону распределения. Эта "универсальность"нормального закона объясняется тем, что всякая случайная величина, являющаяся суммой очень большого числа независимых случайных величин, каждая из которых оказывает лишь незначительное влияние на сумму, распределена почти по нормальному закону.

Рассмотрим n-мерную С.В., компоненты которой $\xi_1, ..., \xi_n$ являются взаимно независимыми случайными величинами, распределенными по нормальным законам:
$F_k(x_k) = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{(z-a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dz.$

Т.е. $F(x_1, ..., x_n) = (2\Pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \sigma_k^{-1} \int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{(z-a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dz.$

Если независимые случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ имеют плотности распределения $p_1(x), ..., p_2(x)$, то:
$p(x_1, ..., x_n) = p_1(x_1)...p_n(x_n)$.

Лемма 1.2.13 (Плотность в невырожденном случае).
Формула плотности независимых компонент, распределенных по нормальному закону:
$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)}$, где:

1. C - ковариационная матрица.
2. μ - вектор средних значений: n-мерный вектор, состоящий из математических ожиданий всех компонент случайного вектора.

Подробнее про вектор средних значений:

1. Вектор μ определяет положение "центра"многомерного нормального распределения в n-мерном пространстве.
2. Именно в точке $x = \mu$ плотность достигает своего максимума.

3. В одномерном случае μ соответствует параметру a (математическому ожиданию).

Лемма 1.2.14 (Характеристикая функция нормального распределения)**.**
Если компоненты случайного вектора распределены по нормальным законам:
$\varphi(t) = e^{it^T\mu - \frac{1}{2}t^TCt}$ - характеристическая функция для случайного вектора, где:

1. C - ковариационная матрица.
2. μ - вектор средних значений: n-мерный вектор, состоящий из математических ожиданий всех компонент случайного вектора.

Лемма 1.2.15 (Необходимое и достаточное условие независимости компонент)**.**
Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ **независимы** $\leftrightarrow$ если для любой группы $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_k}$ этих величин имеет место равенство:
$P\{\xi_{i_1} < x_{i_1}, \xi_{i_2} < x_{i_2}, ..., \xi_{i_k} < x_{i_k}\} = P\{\xi_{i_1} < x_{i_1}\}P\{\xi_{i_2} < x_{i_2}\}...P\{\xi_{i_k} < x_{i_k}\}$.

1.2.9 Условное математическое ожидание. Условная плотность. Условная дисперсия.

Определение 1.2.24 (Условное математическое ожидание)**.**
Условное мат ожидание:

1. Для дискретной С.В.: $E(\xi|B) = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i|B\}$ - условное мат ожидание относительно события B, где:
   (a) $P(X = x_i|B) = \frac{P(X=x_i*B)}{P(B)}$ - условная вероятность для случайной величины X при наступлении события B.
2. Для непрерывной С.В.: $E(\xi|B) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x|B)$ - условное мат ожидание относительно события B, где:
   (a) $F(x|B)$ - условная функция распределения для случайной величины ξ относительно события B.

Важное свойство: $E(E(X|B)) = E(X)$.
Остальные свойства, как и у обычного мат ожидания.

Определение 1.2.25.
Условная дисперсия - это мера разброса X относительно её условного математического ожидания.

1. Для дискретных случайных величин: $D(X|Y = y) = \sum_i (x_i - E(X|Y = y))^2 \cdot P(X = x_i|Y = y)$.

2. Для непрерывных случайных величин: $D(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X|Y = y))^2 \cdot p_{X|Y}(x|y), dx$.

Важное свойство: $D(X) = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y))$.

Определение 1.2.26 (Условная плотность)**.**
Плотность распределения i-ой компоненты при условии j-ой вычисляется по формуле:
$p_{\xi_i|\xi_j=y}(x) = \frac{\int \cdots \int p(x_1,...,x_i,...,y,...,x_n)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n}{p_{\xi_j}(y)}$

Для двумерного случая: $p_{\xi_i|\xi_j=y}(x) = \frac{p_{\xi_i,\xi_j}(x,y)}{p_{\xi_j}(y)}$.

Условная плотность описывает "сечение"совместного распределения при фиксированном значении $\xi_j = y$. Это позволяет рассуждать о распределении ξ_i, когда мы точно знаем значение ξ_j.

1.2.10 Условные характеристики для нормального вектора.

1.3 Предельные теоремы и марковские цепи.

1.3.1 Неравенство Чебышева.

1.3.2 Типы сходимости в теории вероятностей, связь между ними.

1.3.3 Закон больших чисел в форме Чебышева.

1.3.4 Характеристические функции случайных величин, их свойства.

1.3.5 Формулы обращения для непрерывных и целочисленных случайных величин.

1.3.6 Центральная предельная теорема Леви.

1.3.7 Цепи Маркова. Определение, матрица переходных вероятностей, матрица перехода за n шагов.

1.3.8 Классификация состояний цепи Маркова.

1.3.9 Эргодическая теорема.

2 Список вопросов.

1. Классическое и геометрическое определение вероятности.
2. Основные комбинаторные формулы.
3. Аксиоматика Колмогорова.
4. Условная вероятность. Независимость. Формулы сложения и умножения.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Испытания Бернулли. Формула Бернулли.
8. Пуассоновское приближение для схемы Бернулли.
9. Локальная теорема Муавра – Лапласа.
10. Интегральная теорема Муавра – Лапласа.
11. Случайная величина. Функция распределения случайной величины, ее свойства.
12. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения, ее свойства. Примеры.
13. Дискретная случайная величина. Способы задания. Примеры.
14. Математическое ожидание и дисперсия. Их свойства.
15. Распределение функций от случайных величин.
16. Случайные векторы. Совместные распределения случайных величин. Вычисление распределений компонент.
17. Независимость случайных величин. Коэффициент корреляции.
18. Многомерное нормальное распределение. Плотность (в невырожденном случае), характеристическая функция. Необходимое и достаточное условие независимости компонент.
19. Неравенство Чебышева.
20. Типы сходимости в теории вероятностей, связь между ними.
21. Закон больших чисел в форме Чебышева.
22. Характеристические функции случайных величин, их свойства.
23. Формулы обращения для непрерывных и целочисленных случайных величин.
24. Центральная предельная теорема Леви.
25. Условное математическое ожидание. Условная плотность. Условная дисперсия.
26. Условные характеристики для нормального вектора.
27. Цепи Маркова. Определение, матрица переходных вероятностей, матрица перехода за n шагов.
28. Классификация состояний цепи Маркова.
29. Эргодическая теорема.
30. Задачи математической статистики. Оценка параметров, проверка

гипотез.

31. Основные выборочные характеристики.
32. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.
33. Свойства статистических оценок (с примерами и доказательствами).
34. Оценивание по методу максимального правдоподобия.
35. Регулярный эксперимент. Неравенство Рао – Крамера.
36. Оценивание по методу моментов.
37. Распределение функций от нормальной выборки. Лемма Фишера.
38. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.
39. Проверка гипотез: понятие ошибок I и II рода, уровень значимости, мощность критерия; критическая область; простые и сложные гипотезы.
40. Проверка простой гипотезы по методу хи-квадрат.
41. Проверка согласия с помощью критерия Колмогорова.
42. Постановка задачи линейной регрессии. Метод наименьших квадратов.
43. Несмещенная оценка дисперсии в задаче линейной регрессии.