Лекция 11

X - случ. велич., $EX^2<\infty$

Найти: $c\in\mathbb{R}$: $\underbrace{E(X-c)^2}_{DX}\to\min\limits_c$

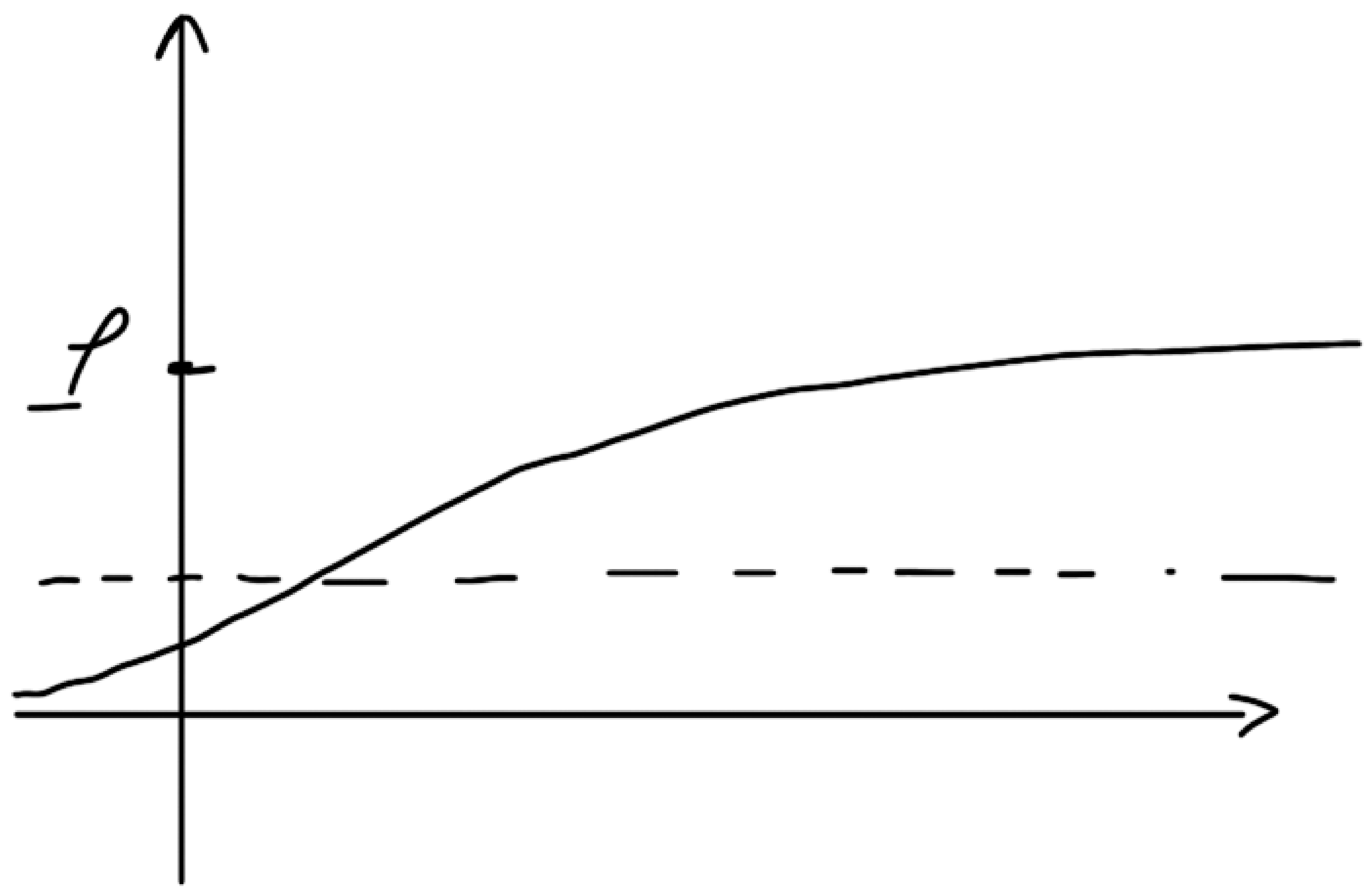
$c=EX$

b: $E|X-b|\to\min\limits_b$

$b=\operatorname{med}X$ — медиана.

Медиана случ. величины

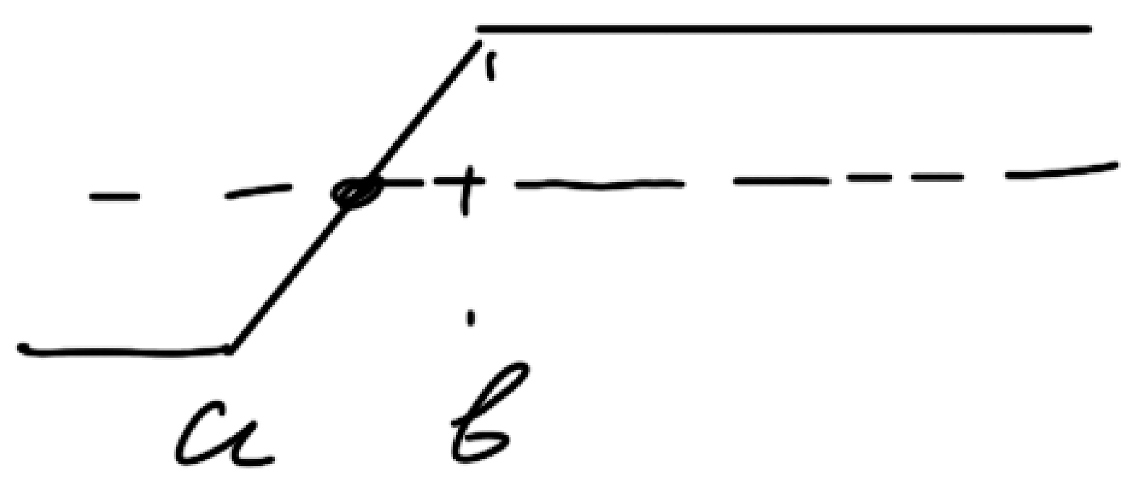
$F^{-1}(1/2)$ *) у биективной ф-ции есть обратная



Примеры

1) $U[a,b]$ $(a<b)$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$



Медиана:

$$\boxed{\operatorname{med} X = F^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sup\left\{x : F(x) < \tfrac{1}{2}\right\}}$$

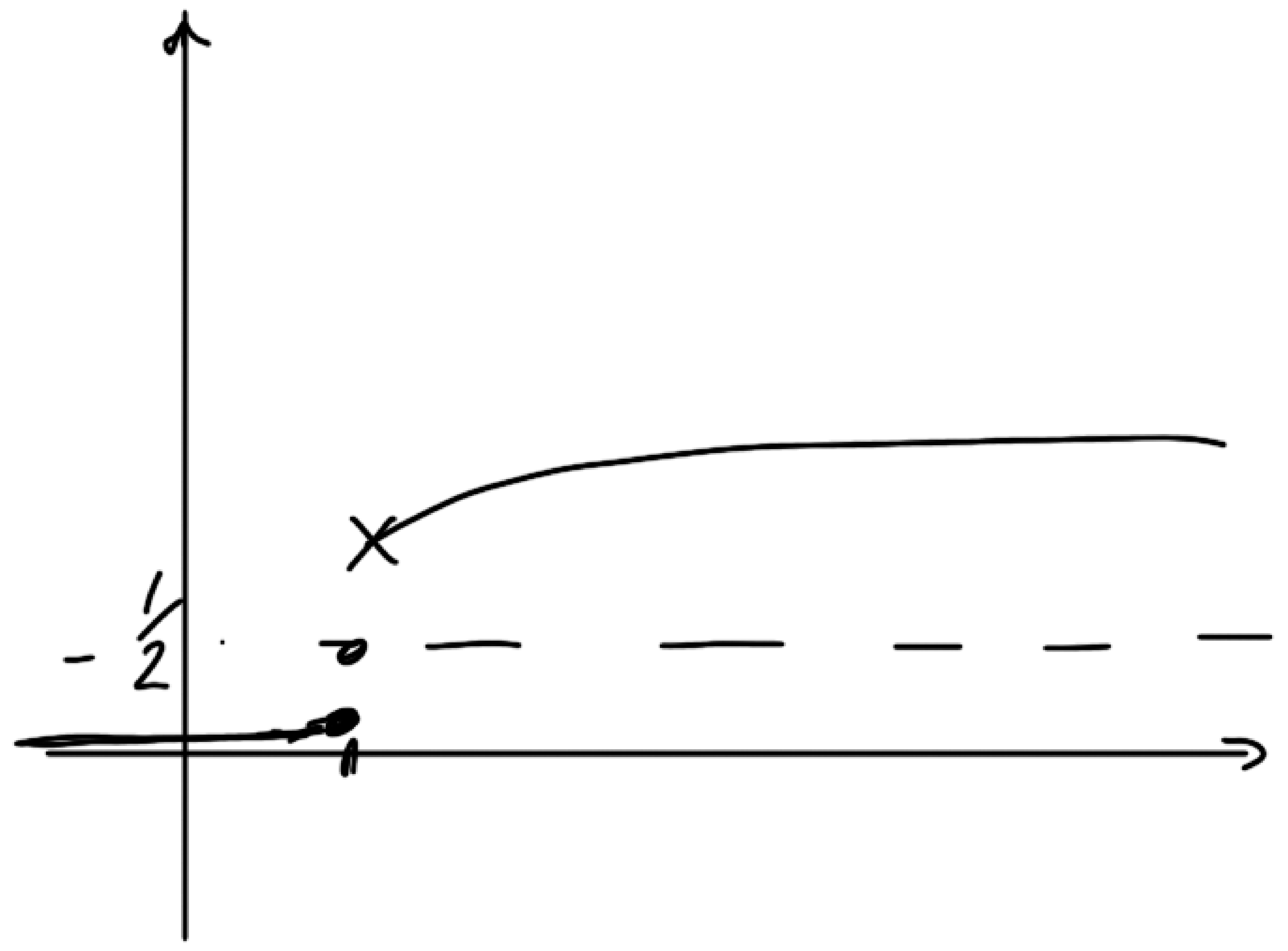
$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} = \operatorname{med} X$$

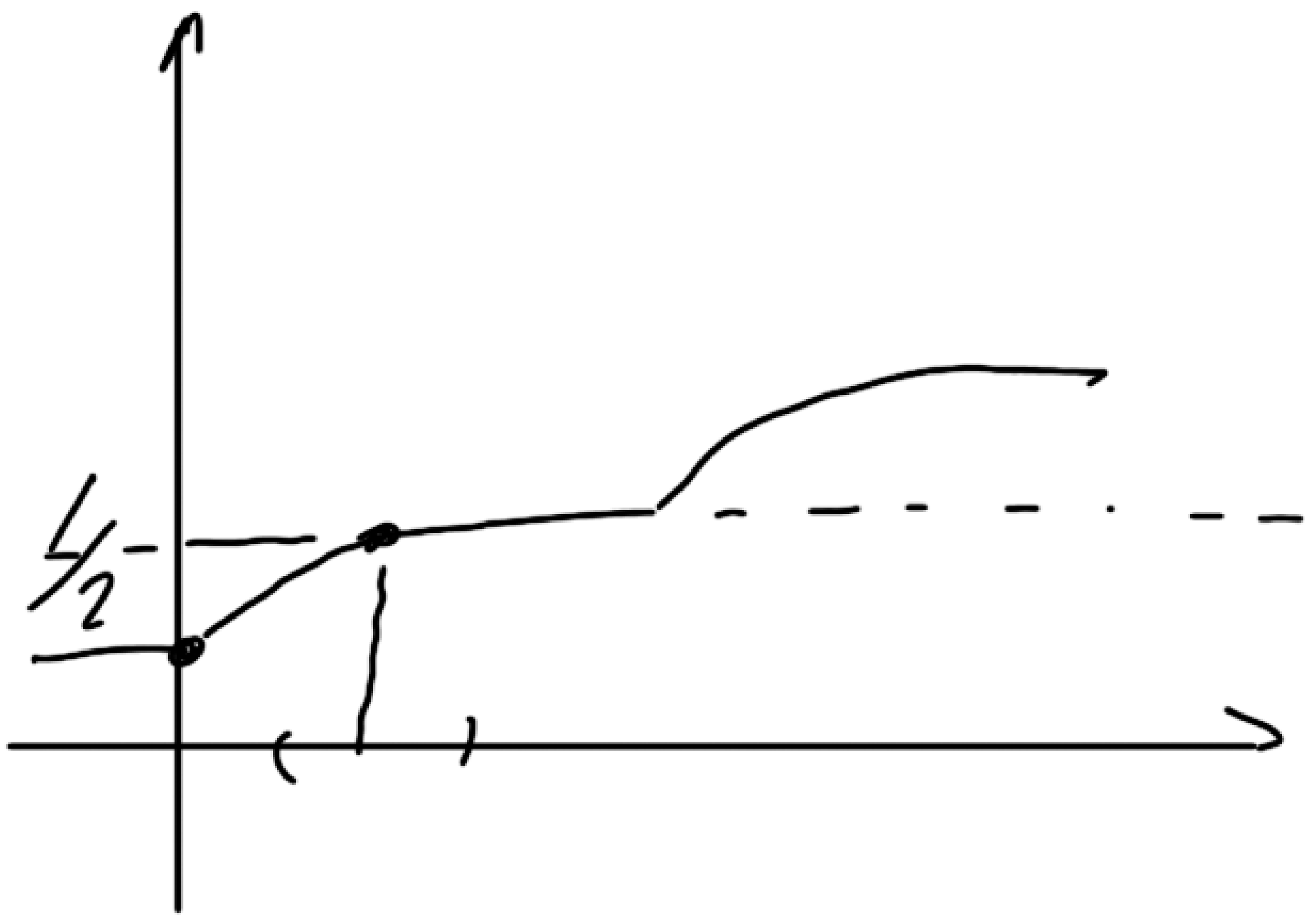
2) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$ — показательная плотно-сть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

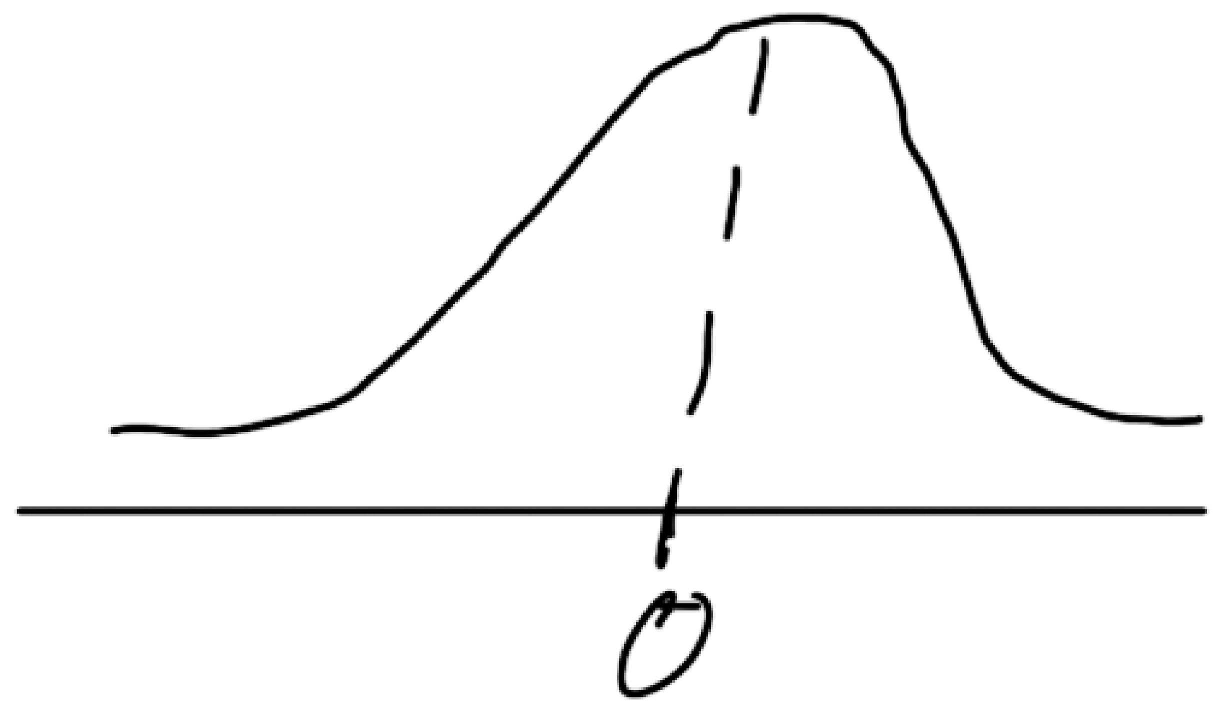
$$1 - e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2 = \operatorname{med} X$$



$$F^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sup\left\{x : F(x) < \tfrac{1}{2}\right\}$$ — "псевдообратная"



3) $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-c)^2}$, $c = const$



Квантиль порядка p.

$q_p = F^{-1}(p) = \sup\{x : F(x) < p\}$

доля

Моменты случайных величин.

$\exists \ E|X|^n < +\infty$ ($\exists$ огранич. n-ый абс. момент)

тогда $\mu_n = EX^n$ – n-ый нач. момент

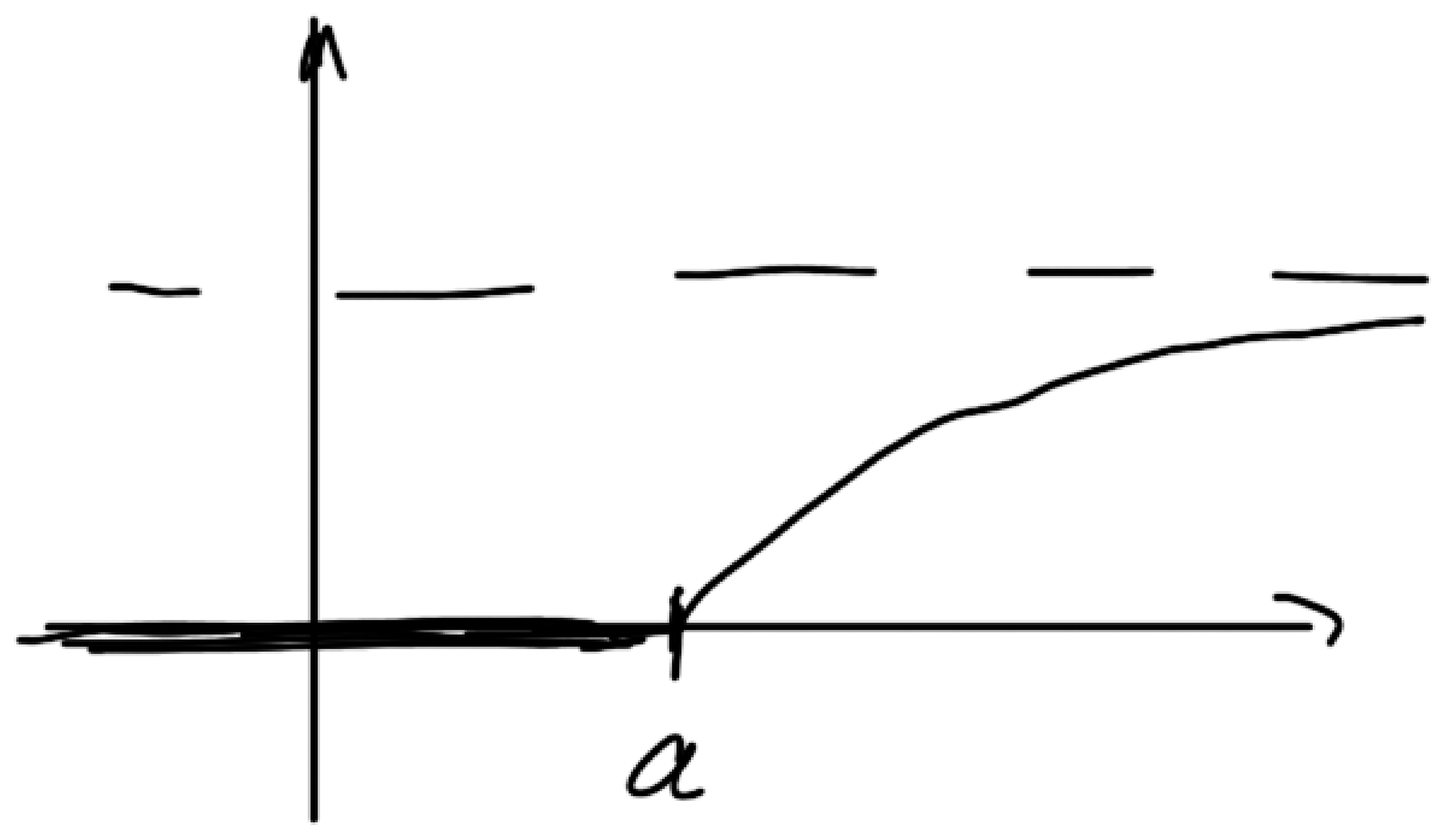
$m_n = E(X-EX)^n$ – n-й центральный момент

Пример. Распределение Парето

$a > 0$

$m > 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^m, & x \geq a \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{m a^m}{x^{m+1}} & x \geq 0 \end{cases}$$

$m \leq 1 \Rightarrow$ нет мат. ожидания

$m \in (1, 2] \Rightarrow$ есть м.о., но нет. дисп.

$m > k \Rightarrow$ есть все моменты до k вкл.

Числовые х-ки случ. векторов

$$F(x_1 \ldots x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots X_n < x_n)$$

$$f(x_1 \ldots x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1 \ldots x_n)$$

$$F(x_1 \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(\vec{t})\, dt_1 \ldots dt_n$$

$$\vec{t} = (t_1 \ldots t_n)$$

$$\vec{X} = (X_1 \ldots X_n)$$

$$E\vec{X} = (EX_1, \ldots EX_n)$$

$EX_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}$ – смешанный момент

(обязательно $\exists\, E|\ldots|$)

$E\left(\prod_{j=1}^{n} (X_j - EX_j)^{k_j}\right)$ – смеш. центр. момент.

Ковариация: X_i, X_j:

$$cov(X_i, X_j) = E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j))$$

Св-ва:

1. коммутативность (К)
2. билинейность (Б)
3. независ. от сдвига (Н)

К: $cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$

Б: док. линейность по I комп

$$cov(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) =$$
$$= a_1 cov(X_1, Y) + a_2 cov(X_2, Y)$$

<u>Д-во:</u>

$$E((a_1 X_1 + a_2 X_2 - E(a_1 X_1 + a_2 X_2))(Y - EY)) =$$
$$= E(a_1(X_1 - EX_1) + a_2(X_2 - EX_2))(Y - EY) =$$
$$= a_1 E((X_1 - E_1 X_1)(Y - EY_1)) +$$
$$+ a_2 E((X_2 - EX_2)(Y - EY))$$

☑

Н: $cov(X - c, Y) = cov(X, Y)$

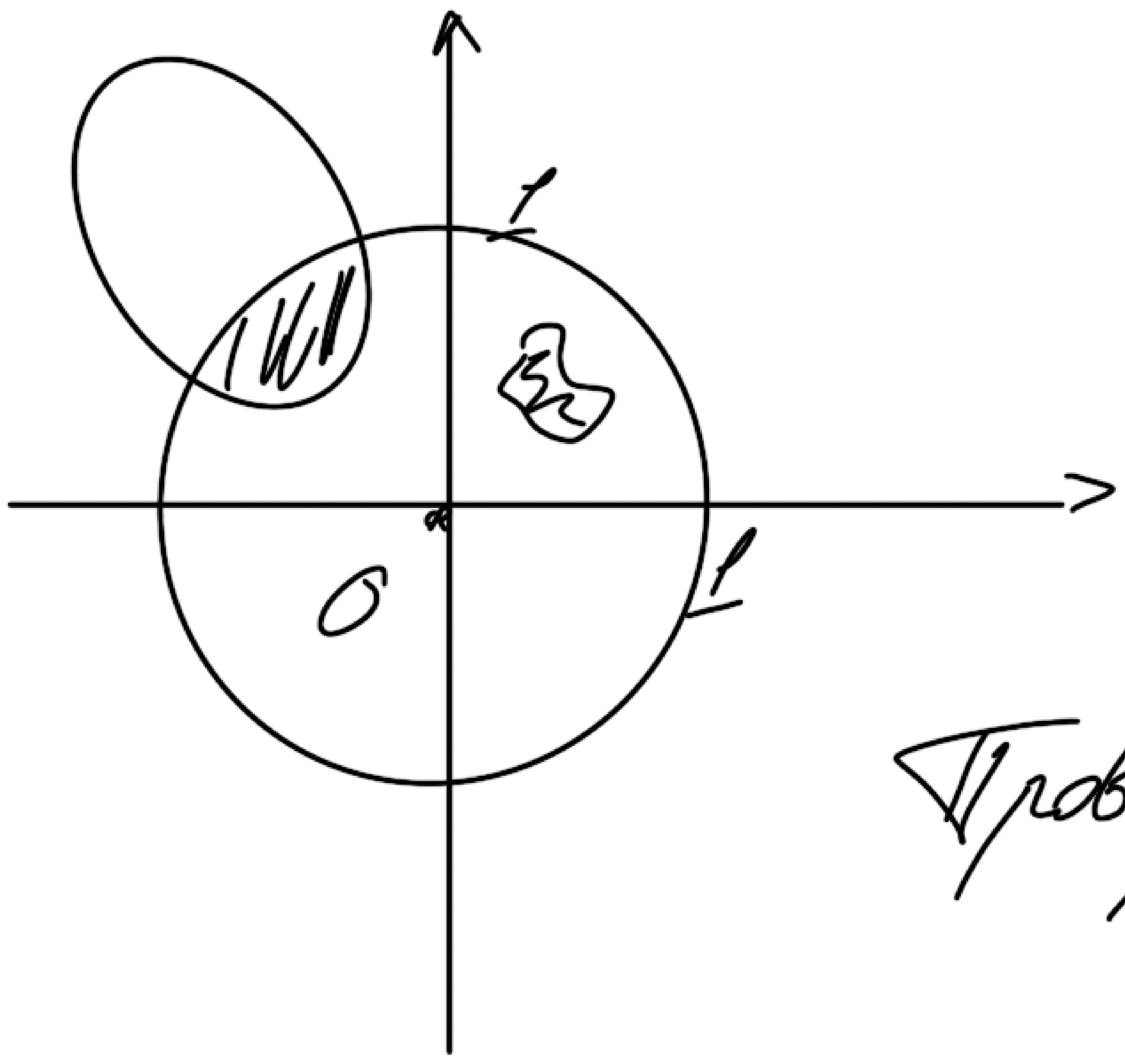
<u>Д-во:</u> $cov(X - c, Y) =$

$$= E((X - c - E(X - c))(Y - EY)) =$$
$$= E((X - EX)(Y - EY)) = cov(X, Y)$$

☑

④ Если X и Y незав $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$

$\exists\, EX^2 < \infty$ и $EY^2 < \infty$



Проверить: комп. зав., но $cov = 0$

$$D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 DX + \beta^2 DY + 2\alpha\beta\, cov(X, Y)$$

Замечание: $DX = cov(X, X)$

Ковариационная матрица

$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

$c_{ij} = cov(X_i, X_j)$

Св-ва:

① $C = C^T$

② $C \geq 0$ (неотриц. опред.)

В частности для $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} DX, & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & DY \end{pmatrix}$$

] A, B — матрицы (матрица постоянная — const)
X — случ. вектор

$$E\, AXB = A \cdot EX \cdot B$$

НУО $E\vec{X} = 0$

$$\vec{X} = (X_1, \dots X_n)^T$$

$$E\vec{X}\vec{X}^T = E\begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & \dots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & \dots & X_2X_n \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = C$$

В общ. случае: $C = E\left((\vec{X} - E\vec{X})(\vec{X} - E\vec{X})^T\right)$

$\vec{v}$ — const вектор

$$\vec{v}^T C \vec{v} = \vec{v}^T (E\vec{X}\vec{X}^T) \cdot \vec{v} = E(\vec{v}^T \vec{X}\vec{X}^T v) =$$

$$= E((X^T \vec{v})^T \vec{X} \vec{v}) = E(X^T \vec{v})^2$$

Ковариационная м-ца лин. преоб. случ. вектора.

$$Y = AX$$

$$\operatorname{cov}(Y) = E(YY^T) = E(AX(AX)^T) =$$

$$= E(AXX^TA^T) = A(EXX^T)A^T = A\operatorname{cov}(X)A^T$$

Коэф. корреляции.

ρ — х-ка двумерного случ. вектора

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

Св-ва:

1) $-1 < \rho < 1$,

Д-во: по н-ву Коши-Буняковского

$|\rho| = 1 \iff Y \underset{\text{почти наверно}}{=} aX + b$,

при $a > 0$ для $\rho = 1$

при $a < 0$ для $\rho = -1$

2) X, Y - незав $\Rightarrow \rho = 0$

$\frac{5}{2}\left(-\frac{2,2}{5}+\left(-\frac{2,2}{5}\right)\right)$

$\Phi_\xi(x) = 0 \Rightarrow \xi$ - не случайная величина

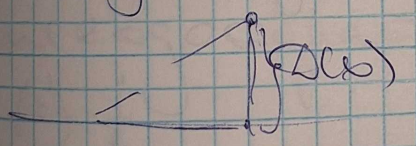
Лекция

X - случ. величина

Найдем $c \in \mathbb{R}$: $E(x-c)^2 \to \min$
среднее квадрат. откл.

$c = E(X) \Rightarrow E(x-c)^2 = D(x)$

Проекция случ. вел-ны на пр-во констант — мат ожидание



это не для всех случ. вел.

? $b \in \mathbb{R}$: $E|x-b| \to \min$

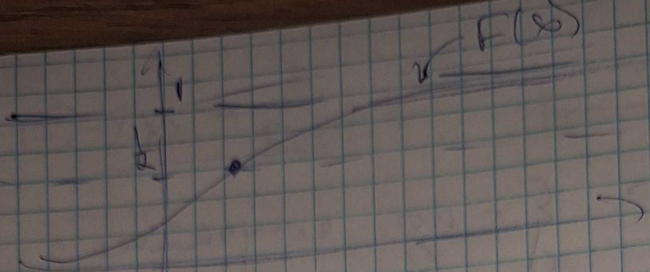
сред. абс. отклонение

b - медиана случ. вел-ны

$b = med\ X$

Медиана случ. величины:

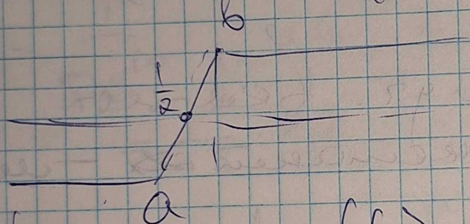
$F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$



Пр. Ex:

1) $U[a,b]$ $(a<b)$ - равномерное

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Медиана (т.), в которой $F(x) = \frac{1}{2}$ мед

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Центр симметрии - медиана.

2) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$ ← показательная плотность

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$ (Функция нестр. знака не важно

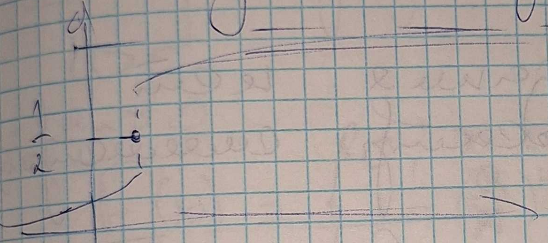
$1-e^{-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln(2)$ — медиана.

~~вероятн~~

Медиана — P(того, что меньше) = (что случ вел. меньше медианы)

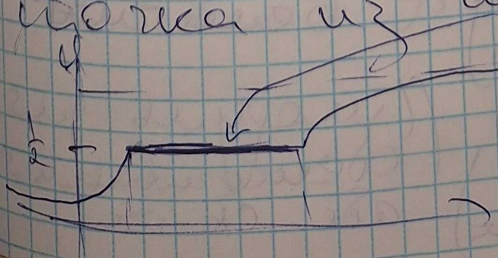
$= P$(того, что больше)

Если $y=\frac{1}{2}$ в разрыве



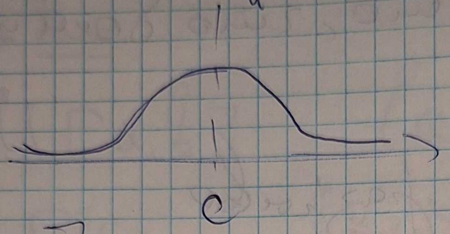
$\text{med}X = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sup\{x : F(x) < \frac{1}{2}\}$ — псевдообратная ф-ия в (о) $\frac{1}{2}$.

Если у случ величина $\exists$ отрезок, на к-м она принимает знач $y=\frac{1}{2}$, то тогда говорят, что медиана — любая точка из этого отрезка



Медиана ∃ у ∀ случ. величины. (в отличие от мат. ожидания)

3) $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-c)^2}$, $c \in \mathbb{R}$



мат ожидания нет

$\operatorname{med} X = c$ (в силу симметрии)

Квантиль α уровня p:

$q_p = F^{-1}(p) = \sup\{x : F(x) < p\}$

(то же, что и медиана, но не привязана к $\frac{1}{2}$)

Квартиль нижний: $q_{\frac{1}{3}}$

Квартиль верхний: $q_{\frac{3}{4}}$

Моменты случ. величины

$\exists\ E|X|^n < +\infty$ (модуль для обеспечения абс. сх-ти)

(∃ ограниченный n-ый абсолютный момент)

Тогда: $\mu_k = EX^k$ — k-ый начальный момент

$m_k = E(X - EX)^k$ — k-ый центральный момент

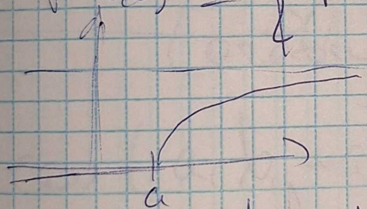
$\left(\text{при } k=1 \text{ — } m_1 = 0,\ DX = m_2 \right)$

Ex (распределение Парето)

$a > 0$

$m > 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^m, & x \geq a \end{cases}$$



(уплата налогов)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{m a^m}{x^{m+1}}, & x \geq a \end{cases}$$

$m \leq 1 \Rightarrow$ нет мат. ожидания

$m \in (1, 2] \Rightarrow \exists$ мат. ожид., но нет дисперсии

...

$m > k \Rightarrow \exists$ все моменты до k включительно.

Числовые хар-ки случ. векторов

Как восстанавливать $f(\vec{x})$ по $F(\vec{x})$ и наоборот
в абсолютно непр. случ.:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n)$$

можно брать в любом порядке

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots$$

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

$E\vec{X} = (EX_1, \dots, EX_n)$ (м.о. по компонентное)

$E X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ – смешанный момент порядка $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ (если $\exists\, E|X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}|$)

Ковариация

$E\left(\prod_{j=1}^{n} (X_j - EX_j)^{k_j}\right)$ – смешанный центральный момент

Ковариация X_i, X_j:

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j))$$

Св-ва ковариации:

1) Билинейность
2) Коммутативность
3) Независимость от сдвига
4) ~~Если X, Y - нез-мы, и $\exists$ квадр. абс. моменты, то $\operatorname{cov}(X,Y)$~~

(2): $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$

(1): докажем линейность по 1ой координате (из коммутативности очевидна лин-ость по 2ой)

$$\operatorname{cov}(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) = a_1 \operatorname{cov}(X_1, Y) + a_2 \operatorname{cov}(X_2, Y)$$

(линейность м.о)

∇

$$\operatorname{cov}(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) = E\big((a_1 X_1 + a_2 X_2 - E(a_1 X_1 + a_2 X_2))(Y - EY)\big) =$$

$$= E\big((a_1 (X_1 - EX_1) + a_2 (X_2 - EX_2))(Y - EY)\big) =$$

$$= a_1 E\big((X_1 - EX_1)(Y - EY)\big) + a_2 E\big((X_2 - EX_2)(Y - EY)\big) =$$

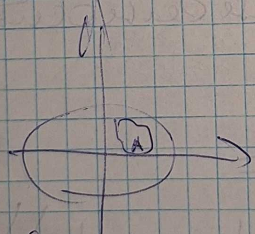
$$= a_1 \operatorname{cov}(X_1, Y) + a_2 \operatorname{cov}(X_2, Y) \quad \Delta$$

(3): $\operatorname{cov}(X-c, Y) = \operatorname{cov}(X, Y)$
(по св-вам мат. ожид)

∇ $\operatorname{cov}(X-c, Y) = E\big((X-c-E(X-c))\cdot(Y-EY)\big) = E\big((X-EX)(Y-EY)\big) = \operatorname{cov}(X,Y)$ $\triangle$

4) Если X, Y – независимые и $\exists\, EX^2 < \infty$ и $EY^2 < \infty$, то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ (обратное неверно)

Упр:



равн. распр. в круге $\left(\frac{S(A)}{S_{круга}}\right)$

Проверить, компоненты зависимы, но $\operatorname{cov} = 0$

5) $D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) + 2\alpha\beta \operatorname{cov}(X,Y)$ (доказать самим)

$D(X) = \operatorname{cov}(X,X)$

5) Ковариационная матрица

$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

$c_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

Для (X, Y):

$$\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & D(Y) \end{pmatrix} = C$$ – ковариационная матрица

Св-ва:

1) $C = C^T$

2) $C \geq 0$ (неотрицательная определенность)

Пусть A, B – матрицы (const)

$E(AXB) = A \cdot E(X) \cdot B$ X – случ. матрица (вектор?)

БОО:

$E\vec{X} = 0$ (от сдвига не зависит)

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$

$\cancel{\vec{X}^T \vec{X}} =$

$$\vec{X}\vec{X}^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & \dots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & \dots & X_2X_n \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$E\vec{X}\vec{X}^T = C$ - ковариационная матрица случайного вектора с нулевым покомпонентным мат. ожиданием

В общем случ.:

$$C = E\left((\vec{X} - E\vec{X})(\vec{X} - E\vec{X})^T\right)$$

$\vec{v}$ - постоянный вектор (вектор констант)

$$\vec{v}^T C \vec{v} = \vec{v}^T E(\vec{X}\vec{X}^T)\vec{v} =$$

$$= E(\vec{v}^T \vec{X} \vec{X}^T \vec{v}) = E((\vec{X}^T\vec{v})^T \vec{X}^T \vec{v}) =$$

$$= E(\vec{X}^T\vec{v})^2$$

Ковариационная матрица линейного преобразования случ. вектора

НУО $E\vec{X} = 0$

$\vec{Y} = AX$ (проверить $E\vec{Y} = 0$)

$$\operatorname{cov}(\vec{Y}) = E(\vec{Y}\vec{Y}^T) = E(A\vec{X}(A\vec{X})^T) =$$

$= E(A\vec{X}\vec{X}^T A^T) = A(E(\vec{X}\vec{X}^T))A^T =$

$= A\,cov(\vec{X})\,A^T$

ковариационная матрица $\vec{X}$.

Коэффициент корреляции

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} \in [-1, 1]$$

Св-ва ρ:

1) $-1 \leq \rho \leq 1$, (по нер-ву КБШ) причем

$|\rho| = 1$ тогда $\Leftrightarrow$ $Y \underset{\text{почти наверно}}{=} aX + b$,

где $a > 0$ для $\rho = 1$,

$a < 0$ для $\rho = -1$.

2) X, Y — независимы $\Rightarrow \rho = 0$.