Лекция 4

Испытания Бернулли

1 монета: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$

Р Г

2 монеты:

0 0
0 1
1 0
1 1

$P(\text{успеха}) = p$

$P(\text{неудачи}) = 1 - p = q$

3 монеты:

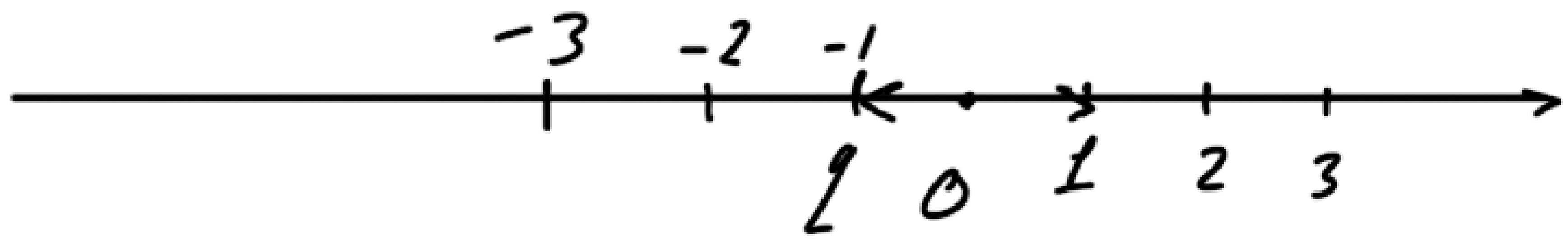
0 0 0
0 0 1
0 1 0
0 1 1
1 0 0
1 0 1
1 1 0
1 1 1

n монет: 2^n эл. событий

$p^k \cdot q^{n-k}$ – вероятность желаемого события

$3p^1q^{3-1}$

Случайное блуждание по прямой:



S_n – число успехов в n испытаниях Бернулли

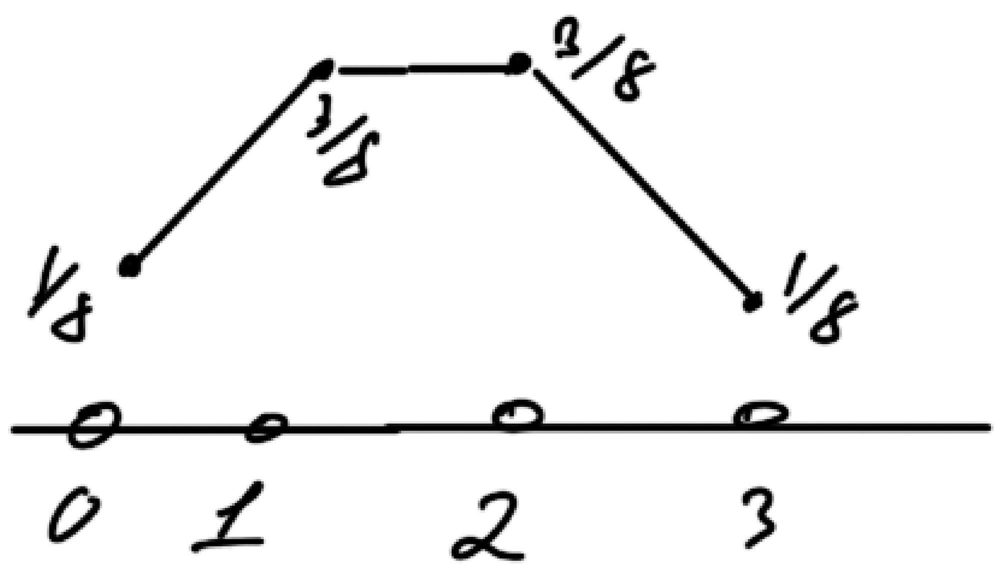
$P(S_n = k) = P_n(k)$, $k = 0, 1, \dots n$

$$P(m_1 \le S_n \le m_2) = \sum_{k=m_2}^{m_2} P_n(k)$$

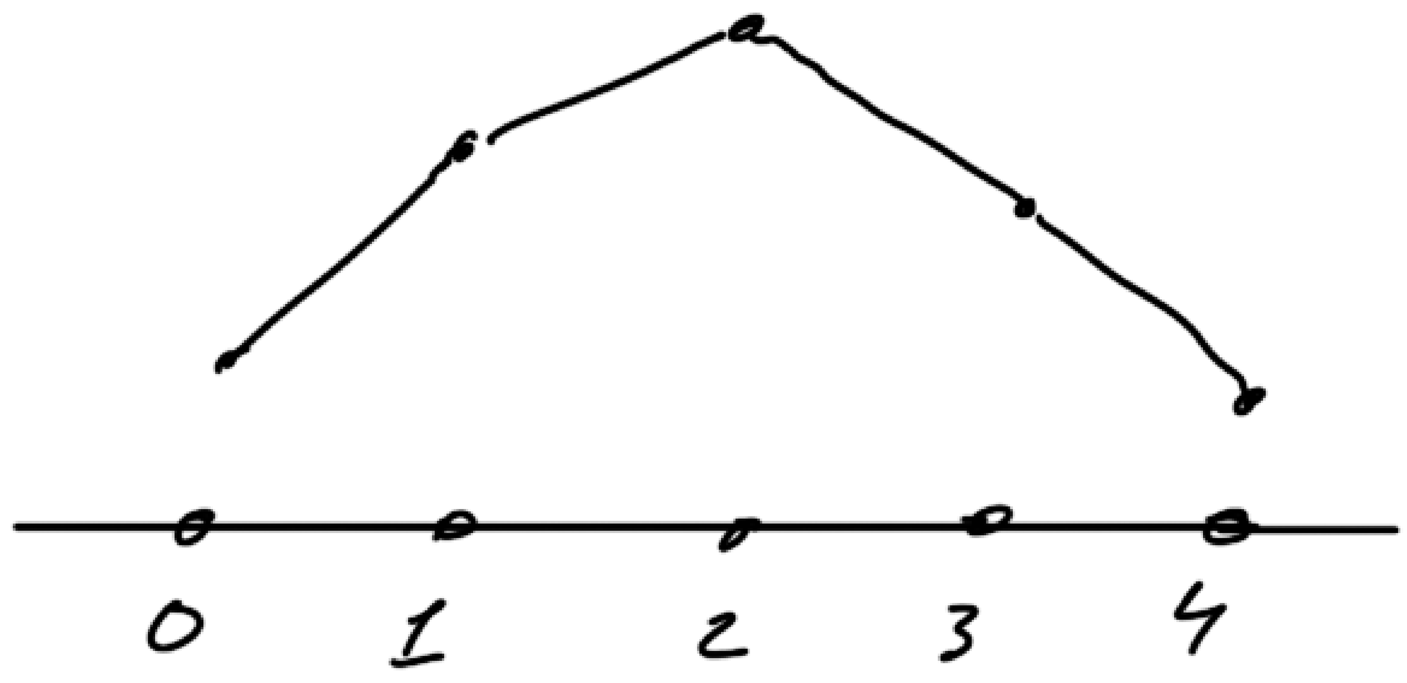
$m_1 \ge 0$, $m_2 \le n$, $m_1 \le m_2$

$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$ – формула Бернулли

3 монеты:



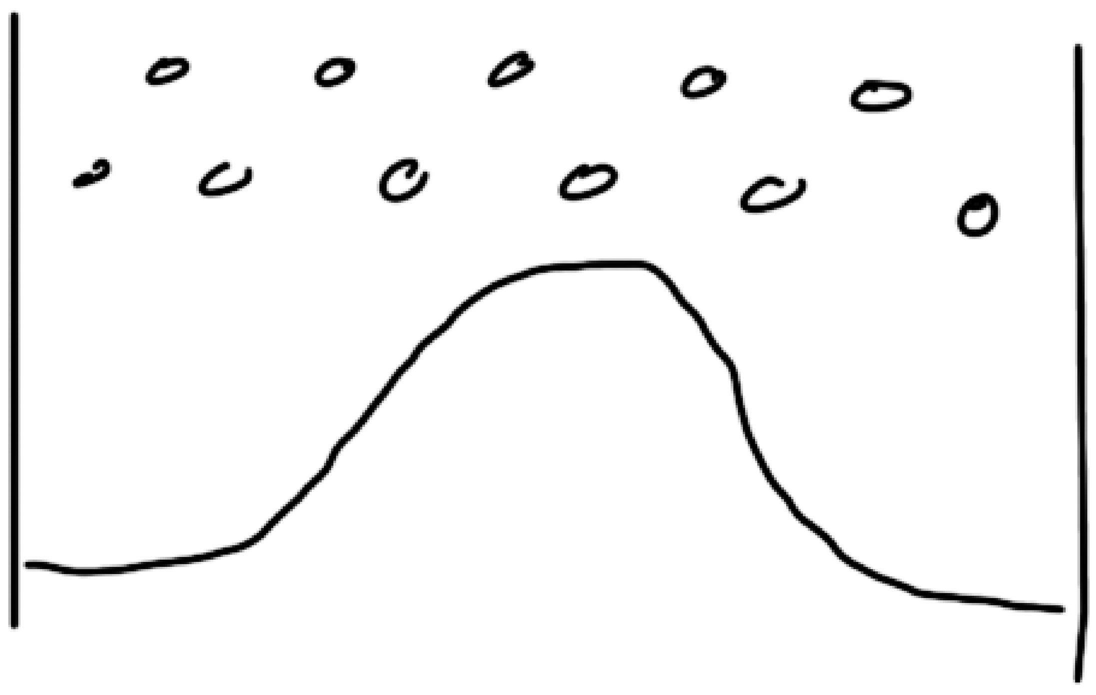
4 монеты



$$P_4(1)=P_4(3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P_4(2)=C_4^2\cdot\frac{1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Доска Гальтона



Наиболее вероятное число успехов в исп. Бернулли

1. Сначала растет, потом убывает
2. или что-то одно из этого

Сравним $P_n(k+1)$ и $P_n(k)$

$$\frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}}=\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}\,p}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,q}=\frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}\geq 1$$

$$np-kp\geq k-kp+1-p \qquad k\leq p(n+1)-1$$

D $p(n+1)$ целое   2 наиб. вероят. знач.

т.к. $p(n+1)-1$ и $p(n+1)$

2) $p(n+1)$ – нецелое

$[p(n+1)]$ – наиб. вероятное значение

Прибл. формулы для вычисл. вер-тей числа успехов в схеме Бернулли.

Маленькое p_n Большое n

Фиксированное λ: $np_n \to \lambda$

Пуассоновское приближение

Т] Пуассона:

$$C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Задача о булочках с изюмом:
тесто на 100 булочек, 5000 изюмин

1) P(булочка без изюма)
2) P(ровно 1)
3) наиб. вероятное кол-во изюминок
4) P(кол-ва из п. 3)

$p = \frac{1}{1000}$ – вероятность попасть в булочку

$q = \frac{999}{1000}$

$n = 5000$ – число испытаний

$np = \lambda = 5$ 1) $\left(\frac{999}{1000}\right)^{5000} \approx e^{-5}$ – ни одной

2) $5000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^{4999} = 5e^{-5}$ – 1 изюм. в булочке

3) Мода: $\frac{5001}{1000} = 5$

4) $\frac{5^{-3} e^{-5}}{5!}$

Д-во: $p = \frac{\lambda}{n}(1+\alpha_n)$, $\alpha_n \to 0$ $\quad q = 1 - \frac{\lambda}{n} \to 1$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^n}{k!} \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ множит.}} \times$$

$$\times \frac{1}{n^k} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\downarrow \atop e^{-\lambda}}$$

от $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ до 1

Гауссовское приближение

$p = \frac{1}{3}$ $\quad q = \frac{2}{3}$ $\quad P(S_n = 100) = C_{300}^{100} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^{200}$

$n = 300$

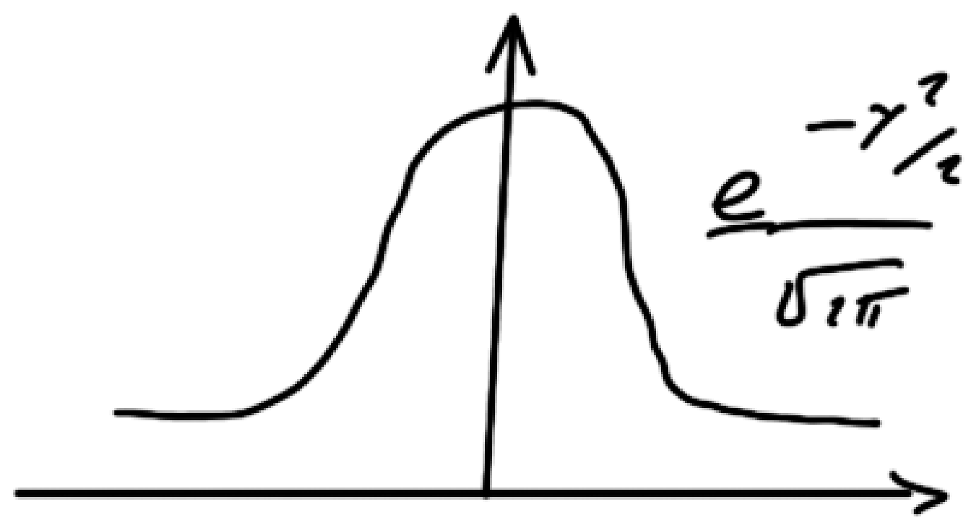
T] Локальная теорема Муавра-Лапласа

$x_n = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ $\quad n \to \infty$ $\quad k \to \infty$, x_n – огранич.

$$\sqrt{npq}\, P_n(k) \sim \frac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

При этом, если $x_n \to x$, то

$\sqrt{npq}\, P_n(k) \to \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$



$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(x)$

Лекция

Испытания Бернулли (схема)

def

П-ть нез-ых испытаний с бин-ными исходами (True / False)

Ex

Бросание монетки (орел – успех, решка – неудача).

1 монета:

Эл. события: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$

Р – решетка, Г – герб

2 монеты:

Эл. события: 00, 01, 10, 11

число успехов = 1

число успехов ≥ 1 (не элементарные события)

$P(\text{успеха}) = p$

$P(\text{неудача}) = 1 - p = q$

n монет $\Rightarrow$ 2^n эл-ных событий

$p^k q^{n-k}$ – вер-ть эл-ного события

Пр-во эл-ных событий — набор бинарных слов

3 монеты

000 ← q^n - вер-ть

001 ←

010 ← их вер-ти

011

100 ← pq^2 $\left(\begin{matrix} n-k=2 \\ k=1 \end{matrix}\right)$

101

110

111 p^n - вер-ть

∃ S_n — число успехов в n испытаниях Бернулли.

утв. $P(S_n=k)=P_n(k)$, $k=0,1,\dots,n$

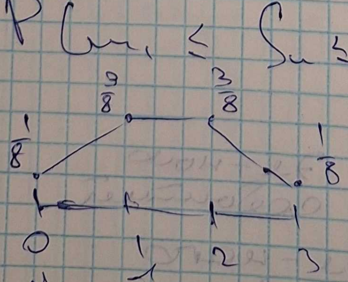
утв. $P(m_1 \le S_n \le m_2)=\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$

$m_1 \ge 0$, $m_2 \le n$, $m_1 \le m_2$

$P_n(k)$ — ?

$$\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}}$$ ← Ф-ла Бернулли

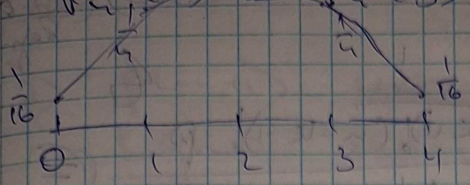
$$P(m_1 \le S_n \le m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$



← вероятность события

↑ число успехов (для симм-ной монеты)

$P_4(1) = P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$



$P_4(2) = C_4^2 \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Для симметричной монеты ($p=q$)

Доска Гальтона – ящик со стеклянной крышкой и гвоздями, сыпят горох

Доска Гальтона – для подсчёта при несимметричной монеты (получается гауссиан)

Найдём наиболее вероятное число успехов в исп.

$\exists$ даны n, p.

Ex: $n=3$ $p=\frac{1}{10}$

$P_3(0) = \frac{1}{1000}$

$P_3(1) = 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10} = \frac{27}{1000}$

$P_3(2) = 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{81}{1000} = \frac{243}{1000}$

$P_3(3) = \ldots = \frac{729}{1000}$

Сравним $P_n(k+1)$ и $P_n(k)$ (две соседние вер-ти)

$$\frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\, p}{\frac{n!}{k!(n-k)!}\, q} =$$

Мы пытаемся найти, когда

$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} \to 1$, т.е. найти

k, при котором $P(S_n = k)$ макс. (т.е. мы найдем k, при котором $\frac{P_n(k+2)}{P_n(k+1)} < 1$)

$$= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1 \quad (\text{когда?})$$

$$(n-k)p \geq (k+1)(1-p)$$ (т.к. все положительно)

$$pn - \cancel{pk} \geq k - \cancel{kp} + 1 - p$$

$$k \leq pn + p - 1$$

$$k \leq p(n+1) - 1$$

Если $p(n+1) - 1 \in \mathbb{Z}$, то мы получим последнюю для Ex: $n = 3$.

2) $p(n+1) \in \mathbb{Z}$

2 наиболее вероятных значения k и $k+1$

т. е. $p(n+1) \leq 1$ и $p(n+1)$

2) $p(n+1)$ нецелое (см Ex N=4)

Одно наиб вер-ное знач:

$[p(n+1)]$ – наиб вер. знач (мода)

целая часть

Приближенные ф-лы для вычисления вер-тей числа успехов в схеме Бернулли

Маленькое p

Большое n

Фиксированное λ: $np \to \lambda$

~~(Т.е. выбирают n и λ и получают p собственно)~~

I (Пуассона)

Пуассоновское приближение (для симм-ной монеты не годится) ($\frac{1}{2}$ никуда не стремится)

Th (Пуассона) при $n \to \infty$ и $\lambda = np$, k — число успехов

$$C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Ex (о булочке с изюмом).
Тесто на 1000 булочек
5000 изюминок
1) P(в булочке нет изюминок)
2) P(ровно 1 изюминка)
3) P(наиболее вер-ное кол-во изюминок)
4) P(кол-во из и.3)

Реш:

Испытания: 5000

Успех: изюминка попала в конкретную булочку

Неудача: не попасть

$p = \frac{1}{1000}$ (т.к. $N_{бул} = 1000$)

$q = \frac{999}{1000}$

$n = 5000$ (кол-во испытаний)

$np = \lambda = 5$

1) P (в бум. нет из) $= \left(\frac{999}{1000}\right)^{5000} \approx$

$\approx e^{-5}$ $\left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)$

2) $P = \frac{5 e^{-5}}{1!} = \frac{5}{e^5}$

3) Мода: $\left[\frac{5001}{1000}\right] = 5$

4) $P = \frac{5^5 e^{-5}}{5!}$

Д-во: (Т. Пуассона)

$C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при фикс k

~~$p = \frac{\lambda}{n}(1+\alpha_n)$ (не хорошо)~~ $p = \frac{\lambda}{n}$ (некорр. (из-за предела)
$\alpha_n \to 0$

$\forall$ $p = \frac{\lambda}{n}(1+\alpha_n)$, $\alpha_n \to 0$ (корр.)

$\exists$ $p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow q = 1 - \frac{\lambda}{n} \longrightarrow 1$

Итог: $\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$

$= \frac{\lambda^k}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1) \cdot \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} =$

k членов $\to n^k$ при фикс. λ и k $\to 1$ чзд $\to e^{-\lambda}$

$\frac{\lambda^k}{k!}$

k мн-лей от $\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ до 1

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \to 1$$

т.е.

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Гауссовские приближения!

Ex: $p=\frac{1}{3}$ $\quad n=300$

$q=\frac{2}{3}$

$$P(S_n=100)=C_{300}^{100}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{100}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{200}$$

Th ~~Муавр~~ (Локальная теорема Муавра-Лапласа)

$\forall$ $x_n=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ при больших n.

$n\to\infty$

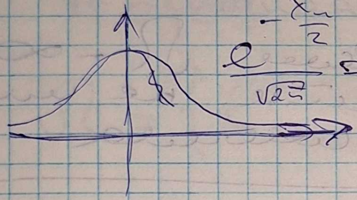
$k\to\infty$

x_n - ограничено

$$\sqrt{npq}\,P_n(k)\sim\frac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

(*) При этом, если $x_n \to x$, то:

$$\sqrt{npq}\, P_n(k) \to \frac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$



$$\frac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(x)$$

Практика

(*) = { (Ω, F, P) - вероятностное пр-во

Ω - мн-во пр-во эл-ных событий

$P: F \to [0, 1]$

Аксиомы:

1) $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) $P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

Классич. вер-ть

(когда Ω - конечное дискретное м-во) (равновероятных исходов (т.е. исходы без преимуществ))

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ $\omega_1, \ldots, \omega_n$ - равно