Лекция 9

Свертки распределений

Пусть X и Y - незав. сл. величины

$X+Y$?

Пример 1

2 кубика

$X \sim u[1:6]$ (равномерное дискретное распределение)

$Y \sim u[1:6]$

$P(X=k) = 1/6, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(Y=k) = 1/6, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P(X+Y=k) = \sum_{m=\max(1,k-6)}^{\min(6,k-1)} P(X=m, \ Y=k-m) =$$
$$= \sum_m P(X=m) \cdot P(Y=k-m)$$

$$\begin{cases} 1 \le m \le 6 \\ 1 \le k-m \le 6 \Rightarrow \quad k-6 \le m \le k-1 \end{cases}$$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

— свертка двух нез. равных распределений.

Пример 2 Пуасоновское распределение

$X \sim Pois(\lambda)$

$Y \sim Pois(\mu)$

X и Y — незав.

$\forall A, B: \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

(понятие "незав." величин)

$\forall a_i, \forall b_j \quad P(X = a_i, Y = b_j) = P(Y = a_i) \cdot P(Y = b_j)$ — независ. случ. величины в дискретном случае

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$P(Y = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

— Пуассоновское расп.

$$P(X + Y = k) = \sum_{m=0}^{k} P(X = a_i, Y = b_j) =$$

здесь можно было записать от $-\infty$ до $+\infty$ потому что...

$$= P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \frac{\mu^{k-m} e^{-\mu}}{(k-m)!} =$$

$$= e^{-\mu-\lambda} \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^k e^{-(\lambda+\mu)}}{m! \cdot (k-m)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^k e^{-(\lambda+\mu)} k!}{m! \cdot (k-m)!} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} C_k^m \lambda^m \mu^{k-m} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}(\lambda+\mu)^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

тоже Пуассоновская величина.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=m-k)$$ – свертка дискретных распределений

---

*) $$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) g(x)\,dx = g * f(t)$$

Абс. непр. распределение

$\exists$ X и Y – нез. случ. вел-ны

$X \sim f(x)$, $Y \sim g(y)$

$$f_{x,y}(x,y) = f(x)\,g(y)$$

$$P(X+Y<t) = \iint\limits_{x+y<t} f(x)\,g(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f(x)\,g(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{t-x} g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, G(t-x)\, dx =$$

где $G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(u)\,du$ — ф-ция распр. Y

$$= f * G(t) = g * F(t)$$

пр-ная ф-ции распред

Плотность: продиф. под знаком $\int$

$U = X + Y$, h — плотность U:

$$h(t) = f * g(t)$$

Пример 3

$X \sim u[0, 1]$, $Y \sim u[0, 1]$, X, Y — незав.

$U = X + Y$

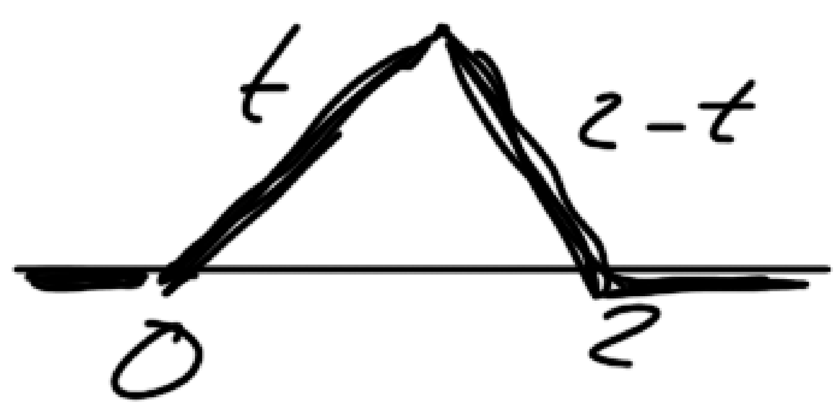
$$f(x) = I_{\{x \in [0, 1]\}}$$

$$g(y) = I_{\{y \in [0, 1]\}}$$

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{0 \le x \le 1\}} \cdot I_{\{0 \le t - x \le 1\}}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{0 \le x \le 1,\ \underbrace{0 \le t-x \le 1}_{t-1 \le x \le t}\}}\, dx = \int_{\max(0,\, t-1)}^{\min(1,\, t)} dx =$$

$$= \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 1-(t-1) = 2-t, & t \in (1, 2) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Упр. 1) X, Y – незав.

$X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$X + Y$ – ?

2) $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y \sim \mathcal{E}(1)$

X, Y - незав.

эксп. распред.

$X: \ f(x) = e^{-x} I_{\{x \geq 0\}}$

а) $X + Y$?

б) $X - Y$?

Условные распределения.

$y \backslash x$	0	1
-1	$1/10$	$3/10$
1	$5/10$	$1/10$

если просуммировать по горизонтали $\Rightarrow$ получим "маргинальное" распр. для y
по верт. – для x

$$P(X=0 \mid Y=-1) = \frac{P(X=0,\ Y=-1)}{P(Y=-1)} = \frac{1/10}{4/10} = 1/4$$

$$P(X=1 \mid Y=-1) = 3/4$$

$X \mid Y=-1$	0	1
	$1/4$	$3/4$

Упр: распр. - ? $X \mid Y=-1$, $Y \mid X=0$, $Y \mid X=1$

Расписание через усл. вероятности

$$P(X=k,\ Y=m-k) = P(Y=m-k \mid X=k) \cdot P(X=k)$$

$$P(X+Y=m) = \sum P(Y=m-k \mid X=k) \cdot P(X=k)$$

Условная плотность

$(X, Y) \sim f(x,y)$ - плотность

$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy$

- напомним

$$\underbrace{f_{X \mid Y=y}}_{\text{условие}}(x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}$$ - услов. плотность

$X+Y$: $f_{X \mid Y=y} * f_Y(t)$ - плотность свертки.

Пример условного распределения

$X \sim \mathcal{E}(1)$, $X > t$ $\forall x \geq t$

$\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ - ф-ция выживания

$$P(X > x \mid X > t) = \frac{P(X > x, X > t)}{P(X > t} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-t}} = e^{-(x-t)}$$

"отсутствие памяти у экспоненциального закона"

Числовые характеристики случ. величин.

Мат ожидание (можно ввести)

- для дискрет. случ. вел.

$\exists\, P(X = a_i) = p_i$, $i \in \mathbb{N}$. $\exists \sum_{i=1}^{\infty} p_i |a_i| < +\infty$

ряд абс. сход

Мат. ожидание: $EX = \sum_{i=1}^{\infty} p_i a_i$

- для абс. непр.

$\exists\, f(x)$ - плотность, $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|x|dx < +\infty$

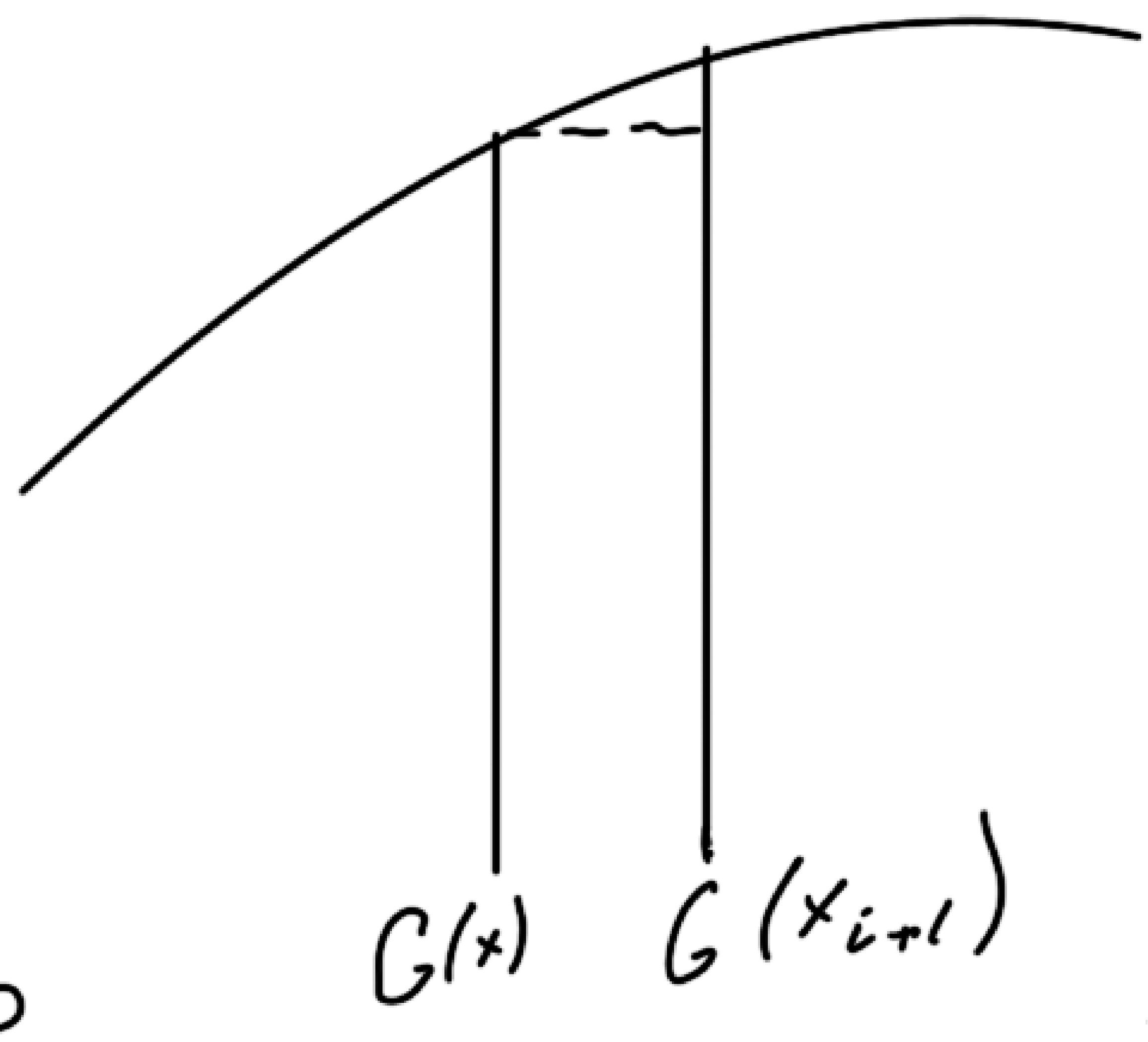
Мат ожидание: $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x dx$

Общее определение:

Интеграл Римана-Стилтьеса:

$\exists\ G(x) \uparrow$

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \lim \sum x_i (G_i - G_{i-1})$$



$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x), \quad \text{если} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dF(x) < +\infty$$

Св-ва EX:

1. Всегда линейно: $E(\alpha X + \beta X) = \alpha EX + \beta EX$

2. $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow EX \geq 0;\ EX = 0$

$$\Updownarrow$$

$$P(X = 0) = 1$$

Лекция

Свёртки распределений

Пусть X, Y — нез-мые случ. величины.

Распределение $X+Y$?

Ex:

1) 2 кубика бросаем нез-мо

$X \sim U[1:6]$ — равномерное дискретное распред.

$Y \sim U[1:6]$

$P(X=k) = \frac{1}{6}, \; k=1,\dots,6$

$P(Y=k) = \frac{1}{6}, \; k=1,\dots,6$

(т.к. P(запрет)=0 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}$ по ф-ле полной вер-ти

~~$P(X+Y)=k$~~

$$P(X+Y=k) = \underbrace{\sum_{m=\max(1,k-6)}^{\min(6,k-1)} P(X=m, Y=k-m)}_{\text{сумма по всем возможным } m} =$$

$$= \sum_{m=\max(1,k-6)}^{\min(6,k-1)} P(X=m)\,P(Y=k-m) \leftarrow$$ свёртка двух равномер. случ. вел.

$1 \le m \le 6$

$1 \le k-m \le 6$

$m \leq k-6$

$k-6 \leq m \leq k-1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Свертка симметрична

$$\sum_m P(X=m)\,P(Y=k-m) =$$

$$= \sum_n P(X=k-n)\,P(Y=n)$$

2) Пуассоновское распределение:

$X \sim Pois(\lambda)$ ← Пуассоновское распр. с параметром λ

$Y \sim Pois(\mu)$

X, Y — нез-мые

$\forall\ A, B$

$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\,P(Y \in B)$ ← нез-мы в обычном смысле

$\forall a_i,\ \forall b_j\ \ P(X=a_i, Y=b_j) = P(X=a_i)P(Y=b_j)$ — в дискретном случ?

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$P(Y=k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

$$P(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{k} P(X=m, Y=k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \cdot \frac{\mu^{k-m} e^{-\mu}}{(k-m)!} = \cancel{\sum_{m=0}^{k} e^{-\lambda-\mu}}$$

$$= \cancel{e^{-\lambda-\mu}} \sum$$

$$= \frac{e^{-\mu-\lambda}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^k \mu^{k-m}\, k!}{m!\,(k-m)!} =$$

домножили и поделили

$$= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} C_k^m \lambda^m \mu^{k-m} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} (\lambda+\mu)^k$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

бином Ньютона

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X=k)P(Y=m-k)$$ – свертка дискр. распред.

3) Абсолютно непрер. распр.

$$f*g\,(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(t-x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\,g(x)\,dx=g*f\,(t)$$

Пусть X и Y – нез. случ. величины.

$X \sim f(x)$ ← плотность для x

$Y \sim g(y)$

$f_{X,Y}(x,y)=f(x)g(y)$ – взаимная плотность

$$P(X+Y<t) = \iint\limits_{x+y<t} f(x)\,g(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f(x)\,g(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{t-x} g(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,G(t-x)\,dx =, \text{ где:}$$

$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(y)\,dy$ – ф-ия распред от ~~свёртки~~ ф-ии плотности $g(y)$.

Т.е. это свёртка плотности одной случ. вел-ны с ф-ией распред другой случ. вел.

Плотность: продифф. под знаком $\int$-ла:

$U = X+Y$ h – плотность U:

$h(t) = f * g(t)$

4) Два равномерно распределенных распред. на одном интервале

$x \sim U[0,1] \leftarrow$ равномерно распред.

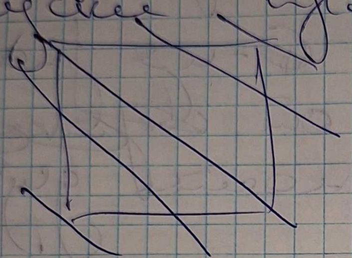
$y \sim U[0,1]$

X, Y - нез-мые

$U = X + Y$

Геом интерпретация:

вырезаем из квадрата кусок прямой $x+y=t$ и считаем площадь.



$f(x) = \mathbb{1}\{x \in [0,1]\}$ — индикатор

$g(y) = \mathbb{1}\{y \in [0,1]\}$

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\} \mathbb{1}\{0 \le t - x \le 1\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t - x \le 1\} dx = \int_{\max(0,\, t-1)}^{\min(1,\, t)} 1 \cdot dx =$$

$t - 1 \le x \le t$

иначе 0 (в других пределах интегрирования)

$$= \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2 - t, & t \in [1,2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$1 - (t - 1)$

$-1 \quad 2-t$

$0 \qquad 2$

Упр:

1) X, Y - нез-мые, $X, Y \sim N(0,1)$
норм. распред. с параметрами 0 и 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$X + Y$ - ?

2) а) $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y \sim \mathcal{E}(1)$ ← показательное распред-ия
X, Y - нез-мые

$X: f(x) = e^{-x} \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$

$X + Y$ - ?

б) — и —

$X - Y$ - ? (плотность распред)

Свертка появляется там, где есть склад. нез-мых случ. величин.

Условные распределения

1) Дискр. случай

Y \ X	0	1
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$P(X=0 \mid Y=-1) = \frac{P(X=0,\ Y=-1)}{P(Y=-1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1 \mid Y=-1) = \frac{3}{4}$$

Случ. вел-на принимает 2 варианта: 1) $X=0$; 2) $X=1$

Упр: Найти $P(X \mid Y=1)$

$P(Y \mid X=0)$

$P(Y \mid X=1)$

$P(X=k, Y=m-k) = P(Y=m-k \mid X=k) \cdot$
$\cdot P(X=k)$

$P(X+Y=m) = \sum P(Y=m-k \mid X=k) \cdot P(X=k)$

Если $(X,Y) \sim f(x,y)$ (плотность совм-ного ил-ть)

$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy$ (пл-ть для X)

$f_{X \mid Y=y}(x) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)} = \dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}$

плотность распред X при каком-то условии $(Y=y)$

(условная пл-ть)

$X+Y \quad f_{X \mid Y=y} * f_Y(t)$ ← условная плотность от $X+Y$

Ex: (условн. распред)

$X \sim \mathcal{E}(1)$

Найдем распр-ие X при усл-ии

$X > t$ (условно деталь ломается по такой вер-ти $1-e^{-t}$ до момента вр. t

$\forall x \geq t$

$\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ — ф-ия „выжива-ния"
(что-то пережи-ло момент вр-ни t)

$$P(X > x \mid X > t) = \frac{P(X > x, X > t)}{P(X > t)} =$$

$F(x) = 1 - e^{-x}$ ← для показа-тельного распределения

$\overline{F}(x) = e^{-x}$ т.к. (если выжило в момент x, то выжило в момент t) $(x > t)$

$$= \frac{P(X > x)}{P(X > t)} = \frac{e^{-x}}{e^{-t}} = e^{-(x-t)}$$

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание (прочитать самим Гнеденко)

Дискр. случ. вел. $P(x = a_i) = p_i, \; i \in \mathbb{N}$

Пусть ξ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i|a_i| < +\infty$

(т.е. абс. сходится)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i a_i$$

(expectation)

мат. ожидание для дискр. случ. вел.

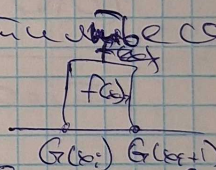
Абс. непр. случ. вел.

$f(x)$ – плотность (она положительная)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx < +\infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Интеграл Римана–Стилтьеса



$G(x) \nearrow$

$\int_a^b f(x)\, dG(x) \leftarrow (G(x_{i+1}) - G(x_i)) \cdot f(x)$, $x \in (x_i, x_{i+1})$

Если есть разрыв (скачок), что домножаем на его знач. ← на это

$F(x)$ = функция распред.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x), \quad \text{если} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dF(x) < +\infty$$

Св-ва мат. ожидания

1) Линейность:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha X + \beta Y$$

(X, Y – случ. вел. α, β – const)

2) $P(X \geq 0) = 1$ $E(X) \geq 0$, причем

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$$