

Кафедра статистической радиофизики  
Отчет по лабораторной работе №1  
**Оценивание параметров случайного процесса**

Выполнили студенты 440 группы  
Виноградов И.Д., Карусевич А.А., Понур К.А., Шиков А.П.

Нижний Новгород, 2019

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с оценкой параметров случайных процессов, на примере оценки его среднего значения (математического ожидания). Это вполне оправданно, поскольку, во-первых, все принципиальные вопросы, возникающие при оценке параметров случайных процессов, проявляются уже в этой задаче. Во-вторых, при желании оценить другие параметры процесса чаще всего поступают следующим образом – подвергают случайный процесс такому преобразованию, при котором информация об интересующем параметре исходного процесса переходит в значение математического ожидания процесса преобразованного, и таким образом вопрос оказывается сведенным к оценке среднего значения преобразованного процесса. Вопросы, связанные с оценкой параметров эргодических случайных процессов достаточно подробно рассмотрены в учебном пособии, с которым необходимо познакомиться перед выполнением настоящей работы.

При оценке того или иного параметра случайного процесса следует:

1. Выбрать алгоритм оценки параметра (записать формулу, которая показывает, какие действия нужно производить с числами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результатами измерений), чтобы получить число, принимаемое нами за оценку интересующего нас параметра.
2. Исследовать выбранный алгоритм на предмет качества оценок. Качество оценки характеризуют ее **несмещенность, состоятельность и эффективность**:
  - (a) Оценка называется **несмещенной**, если среднее статистическое её равно оцениваемой величине:  $\langle \tilde{a} \rangle = a$ , где  $a$  – измеряемый параметр случайного процесса, – его оценка<sup>1</sup>. Несмещенность оценки эквивалентна отсутствию систематической ошибки при измерении как в сторону ее завышения, так и в сторону ее занижения.
  - (b) Оценка называется **состоятельной**, если при неограниченном росте объёма экспериментального материала дисперсия оценки стремится к нулю. При этом вероятность сколь угодно малых отклонений оценки от оцениваемой величины тоже стремится к нулю. Таким образом, если оценка состоятельна, то можно быть уверенным, что величина ошибки измерения не превосходит допустимую при достаточно большом, но ограниченном объеме статистического материала (т.е. достаточно большом времени измерения).
  - (c) Если при измерении одной и той же характеристики случайного процесса можно пользоваться различными оценками, то эффективной называют оценку с наименьшей дисперсией. На практике не всегда удаётся удовлетворить всем этим требованиям. Например, может оказаться, что эффективная оценка существует, но формулы для её вычисления слишком сложны. Тогда приходится

---

<sup>1</sup>Оценка неизвестного параметра  $a$  одним числом называется точечной

довольствоваться другой оценкой с несколько большей дисперсией. Иногда, в целях упрощения расчетов, применяются смещенные оценки. Но всегда выбору оценки должно предшествовать критическое изучение ее свойств.

3. Определить погрешность оценки параметра.

## 1. Алгоритм оценки среднего значения

Пусть мы имеем дело со случайной величиной  $X$  и хотим найти её математическое ожидание. Алгоритм оценки среднего значения выбирается в виде:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ для случайной величины),} \quad (1)$$

где  $x_i, x_k$  – результаты независимых измерений случайной величины;

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_i) \text{ (для случайного процесса),} \quad (2)$$

где  $x_i(t_i)$  – дискретные выборки значений процесса  $x(t)$ , взятые в дискретные, равноотстоящие на величину  $\Delta t$ , моменты времени ( $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ). Этот алгоритм оценки естественен, поскольку известно, что  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  – среднеарифметическое  $n$  независимых измерений случайной величины – сходится по вероятности к среднему значению  $\langle x \rangle^2$  (математическому ожиданию) при  $n \rightarrow \infty$ .

Нетрудно показать, что оценки среднего (1), (2) являются **несмещенными** (т.е. не содержат систематической ошибки). Действительно, проводя статистическое усреднение левых и правых частей и учитывая эргодичность изучаемого случайного процесса, получаем  $\langle \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle$ , т.е. статистическое среднее оценок равно среднему статистическому самого процесса.

При получении оценки среднего значения стационарного эргодического процесса согласно (2), усредняются дискретные выборочные значения процесса, отстоящие во времени на  $\Delta t$ . Возникает закономерный вопрос, не проигрываем ли мы в чем то существенном, не используя информацию о процессе, заключающуюся в промежуточных значениях процесса, лежащих между дискретными отсчетами. Может быть, оценка среднего существенно улучшится, если взять ее в виде непрерывного усреднения реализации процесса на некотором временном интервале, длительностью  $T$ , примыкающем к текущему моменту времени  $t$ :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3)$$

В связи с тем, что при использовании численных методов сам интеграл в (3) вычисляется приближенно через значения подынтегральной функции в отдельных дискретных

точках. Оценку (3) можно рассматривать как частный случай оценки (2), если отсчеты берутся достаточно часто (если интервал между отсчетами существенно меньше времени корреляции процесса  $\Delta t \ll \tau_{\text{кор}}$ ). Тем не менее, имеет смысл рассмотреть аналитически [1] оценку среднего в виде (1.3) и убедиться в том, что величина погрешности оценки определяется лишь числом некоррелированных отсчетов содержащихся в интервале усреднения  $T$ . Другими словами, если в оценке (1) взято  $n$  некоррелированных отсчетов, а в оценке (3) интервал усреднения  $T$  выбран равным  $T = n\tau_{\text{кор}}$ , оценки (1) и (3) оказываются эквивалентными по точности при  $n \gg 1$ . Следует проследить за выполнением этого утверждения при выполнении заданий №3,5.

## 2. Погрешность оценки

На практике важно не просто получить оценку параметра, но и оценить, как близко значение оценки к истинному значению параметра. Другими словами, необходимо оценить погрешность оценки. Поскольку конкретное значение оценки параметра случайно (оно определяется конкретной выборкой  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), то и ошибка конкретной оценки тоже случайна. Поэтому при рассмотрении погрешности оценки имеется в виду рассмотреть ее поведение на ансамбле независимых замеров оценки.

За погрешность оценки принимаем среднеквадратическое отклонение оценки от среднего значения (корень квадратный из дисперсии оценки), т.е.

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} = \sqrt{\langle (\tilde{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

или средний квадрат отклонения от истинного среднего. С.К.О. оценки показывают в каком интервале лежат оценки среднего.

В предельном случае при  $n = 1$ , (производится **однократный отсчёт**), и результат  $x_1$  принимается за оценку среднего), ошибка конкретной оценки ( $x_1 - \langle x \rangle$ ) естественно будет случайной, а погрешность оценки:

$$\sqrt{\langle (x_1 - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{D[x]} = \sigma_x \quad (4)$$

Из (4) видно, что мерой погрешности оценки при  $n = 1$  является среднеквадратическое отклонение (СКО) исследуемой случайной величины (корень квадратный из дисперсии исходного процесса в случае (1)).

Известно, что при усреднении « $n$ » независимых одинаково распределенных слагаемых дисперсия уменьшается в  $n$  раз

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{D[x]}{n}} \quad (5)$$

Если же оценивается среднее значение эргодического процесса, согласно алгоритму (2), дисперсию оценки  $D[\tilde{x}] = \langle (\tilde{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle$  можно записать [1] в виде

$$D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n B_x(t_i - t_j), \quad (6)$$

где  $B_x(t_i - t_j) = \langle (x_i - \langle x \rangle)(x_j - \langle x \rangle) \rangle$  – функция ковариации процесса  $x(t)$ , причем  $D[x]$  – дисперсия процесса  $x(t)$  – равна  $D[x] = B_x(0)$ .

При  $n \rightarrow \infty$  дисперсия оценки стремится к нулю  $D[\tilde{x}] \rightarrow 0$ , т.е. оценка является **состоятельной**.

Из (6) видно, что величина  $D[\tilde{x}]$  дисперсии оценки (2) существенно зависит от степени коррелированности отсчетов, а значит от того, насколько велик интервал между отсчетами  $\Delta t$  по сравнению с  $\tau_{\text{кор}}$  – временем корреляции процесса (  $t_{\text{кор}}$  – эффективная протяженность  $B_x(\tau)$  – функции ковариации процесса  $x(t)$  ).

Здесь есть две предельные ситуации:

1. Все  $n$  отсчетов укладываются на времени, существенно меньшем времени корреляции процесса ( $n \cdot \Delta t \ll \tau_{\text{кор}}$ ), тогда дисперсия оценки равна дисперсии исходного процесса  $D[\tilde{x}] = D[x]$ . В этом случае « $n$ » отсчетов по влиянию на точность оценки эквивалентны одному отсчету.
2. Если же  $\Delta t \geq \tau_{\text{кор}}$ , то можно принять и дисперсия оценки (2) оказывается равной, т.е. дисперсия оценки аналогично (5) в « $n$ » раз уменьшается по сравнению с дисперсией процесса, где « $n$ » – число некоррелированных отсчетов в оценке (2) .

Поведение СКО оценки при произвольных  $\Delta t$  исследуется в заданиях №№ 3, 4.

### 3. Оценка среднего значения и погрешности оценки среднего при помощи спектральной плотности мощности

Как уже рассматривалось выше, если  $x(t)$  – случайный эргодический процесс, то среднее  $\langle x \rangle$  может быть найдено путем усреднения по времени в виде (3).

Корреляционная функция процесса  $x(t)$  :

$$K_x[\tau] = B_x[\tau] + \langle x \rangle^2,$$

а спектральная плотность мощности:

$$S_x(\omega) = S_{x-\langle x \rangle}(\omega) + 2\pi\delta(\omega)\langle x \rangle^2.$$

Т.е. в случае ненулевого среднего значения в спектре случайного процесса наблюдается  $\delta$  - функция на нулевой частоте, а дисперсия представляет собой площадь под непрерывной частью спектра.

Оценку среднего значения процесса в виде (3) можно рассматривать, как некоторый новый процесс, полученный из исходного путем линейного преобразования. В задании №5 рассматривается спектральная плотность мощности оценки в виде (3). Как найти погрешность оценки (3). Исследовать, как изменяется с увеличением времени усреднения  $T$ , за счет чего при этом уменьшается погрешность оценки среднего. Для объяснения результатов этого задания, необходимо иметь в виду, что спектральная плотность мощности оценки среднего значения в виде (3), т.е.  $S_{\tilde{x}}(\omega)$ , связана со спектральной плотностью мощности исходного процесса  $S_x(\omega)$  соотношением

$$S_{\tilde{x}}(2\pi f) = S_x(2\pi f) |K(j2\pi f)|^2$$

Коэффициент передачи  $K(j2\pi f)$  линейного преобразования (3) можно найти, как комплексную амплитуду выходного гармонического колебания, если же вместо входного процесса  $\tilde{x}(t)$  в (3) подставить  $e^{j2\pi ft}$  (гармоническое колебание единичной амплитуды и частоты  $2\pi f$ ). При этом окажется, что

$$|K(j2\pi f)|^2 = \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|^2 \quad (7)$$

Из (7) видно, что усреднитель (3) действует как фильтр, пропускающий спектральные составляющие в эффективной полосе  $\Delta f_x = \frac{1}{2T}$ , примыкающей к  $f = 0$ . Постоянная составляющая, а также  $S_{\tilde{x}}(0)$  спектральная плотность мощности процесса  $\tilde{x}(t)$  на нулевой частоте, при этом остаются неизменными, т.к.  $K(j2\pi f)|_{f=0} = 1$ . С увеличением  $T$ , уменьшается полоса пропускания этого фильтра, а значит и  $D[\tilde{x}]$  – дисперсии оценки (3), приближенно равная  $D[\tilde{x}] = S_{\tilde{x}}(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = S_{\tilde{x}}(0) \frac{1}{2T}$ .

При выполнении задания №5 следует убедиться, что  $D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{T/\tau_{\text{кор}}}$ , (при  $T \gg \tau_{\text{кор}}$ ), т.е. погрешность оценки (3) определяется только числом некоррелированных отсчетов, содержащихся в интервале усреднения  $T$ .

В этом задании следует получить так же оценку среднего значения и оценить ее погрешность непосредственно по спектральной плотности мощности процесса  $\tilde{x}(t)$ . Эта оценка оказывается по существу эквивалентной оценке (3) при времени усреднения  $T$ , равному тому временному интервалу  $T^*$ , на котором мы находим Фурье-преобразование процесса (в нашем случае  $T^* = 2048$ ); а ширина спектральной плотности мощности оценки, определяющая ее дисперсию, обратна длине этого интервала и равна  $1/2048$  (по существу это ширина интервала частотного разрешения в спектре при выбранных параметрах Фурье-преобразования).

## 4. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Выше за количественную характеристику погрешности оценки среднего значения было взято СКО оценки (корень квадратный из дисперсии оценки). Но в связи с тем, что оценка является случайной величиной, определяемой случайными выборочными значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , на практике возможна реализация таких значений оценки, которые отличаются от истинного значения среднего больше, чем на величину СКО оценки. Как часто это может происходить, и какой должна быть выбрана длина интервала, характеризующего погрешность оценки, чтобы с достоверностью неизвестное среднее отстояло от случайной оценки не дальше, чем на величину выбранного интервала? Сначала несколько слов о том, что значит с достоверностью? При какой вероятности появление события его можно считать практически достоверным? Эта вероятность определяется существом исходной задачи. В некоторых задачах это может быть 0.90 или 0.95; 0.99 и т.д. Эту вероятность будем называть доверительной и обозначать  $\beta$ . По этой вероятности выбирается  $I_\beta$  величина интервала, называемого доверительным (обычно его длина выражается в долях среднеквадратического значения оценки  $I_\beta = t_\beta \sigma_{\tilde{x}}$ ). Если отложить этот интервал вокруг случайного значения оценки, то он с доверительной вероятностью  $\beta$  накроет неизвестное среднее значение  $\langle x \rangle$  (т.е. практически с достоверностью).

Величина доверительного интервала выражается через плотность вероятностного распределения о оценки  $W(\tilde{x})$  и доверительную вероятность  $\beta$  согласно соотношению:

$$P(|\langle x \rangle - \tilde{x}| \leq I_\beta) = \int_{\langle x \rangle - I_\beta}^{\langle x \rangle + I_\beta} W(\tilde{x}) d\tilde{x} = \beta$$

В значительном ряде случаев принимается, что плотность вероятности оценки  $W(\tilde{x})$  распределена по закону Гаусса (по закону Гаусса зачастую распределена и сама величина  $X$ , среднее значение которой оценивается, но если  $X$  не имеет гауссова распределения, то можно принять распределенной по закону Гаусса саму оценку  $\tilde{x}$  при достаточно большом числе усредняемых некоррелированных слагаемых в (1) в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей). При небольших  $n$  ( $n \leq 15$ ) распределение оценки  $\tilde{x}$  нельзя считать Гауссовым даже в том случае, когда  $X$  – распределено по закону Гаусса, если неизвестна дисперсия величины  $X$  и она оценивается по тем же « $n$ » отсчетам. Подробнее об этом сказано в примечании к заданию №6. В этом случае следует находить доверительный интервал для оценки, считая, что относительная величина оценки  $\frac{\tilde{x}}{\sigma_{\tilde{x}}}$  распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы равным « $n-1$ » (где  $n$  – число усредняемых некоррелированных отсчетов в оценке (1) и, пользуясь соответствующими таблицами, имеющимися в справочной литературе).

Вопросы, связанные с описанием погрешности оценки через доверительный интервал и

доверительную вероятность, рассматриваются в задании №6.

## 5. Практическая часть

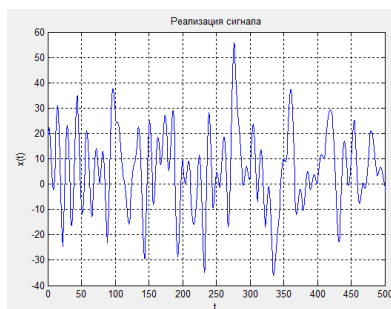
### 5.1. Вид реализации случайных процессов и их спектров

Порядок действий:

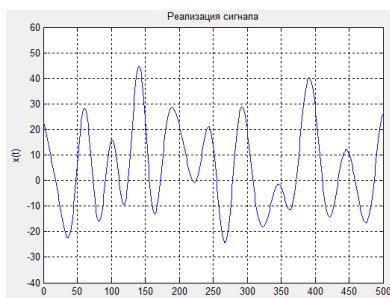
1. Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$
2. В блоке Анализатор выбрали график реализации сигнала “Реализация”, или спектр сигнала “СПМ”
3. Нажали кнопку “Run”

Пронаблюдали вид реализаций и спектральную плотность мощности изучаемого Гауссова шума с различным временем корреляции  $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$ .

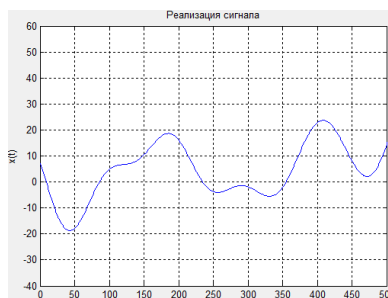
Ниже приведены полученные графики реализации процесса



$\tau_{\text{кор}} = 10$



$\tau_{\text{кор}} = 30$



$\tau_{\text{кор}} = 100$

и его спектральной плотности мощности



$\tau_{\text{кор}} = 10$



$\tau_{\text{кор}} = 30$



$\tau_{\text{кор}} = 100$

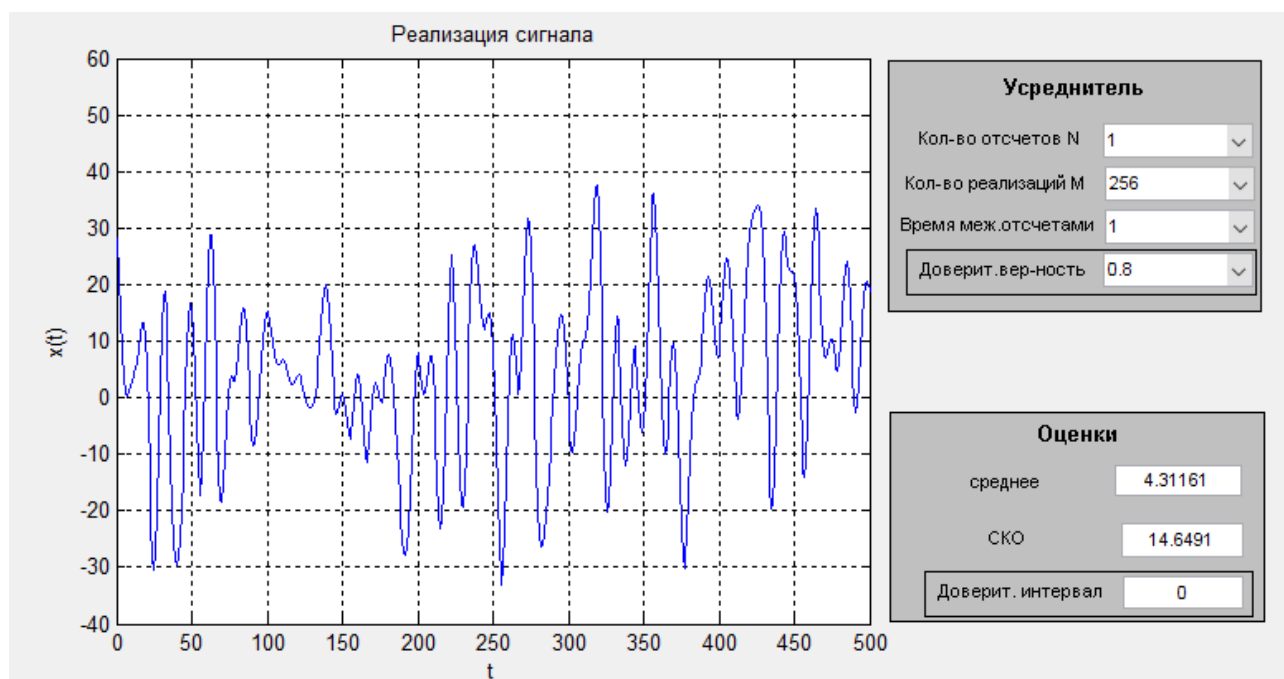
Вывод: Установили, что с увеличением времени корреляции в спектре становится меньше гармоник, он сужается. Реализации процесса с увеличением времени корреляции становятся медленнее меняющимися функциями во времени.



## 5.2. Поведение оценки среднего в зависимости от числа усредняемых отсчетов

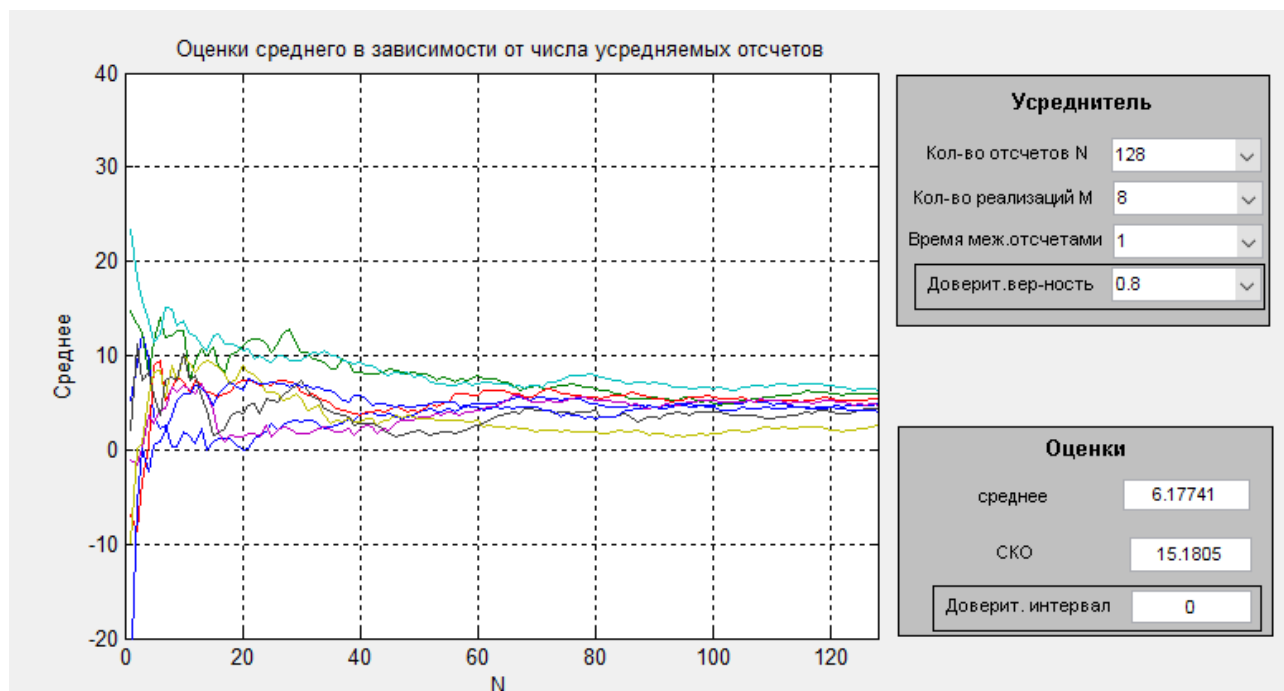
Порядок действий: Сначала определили оценки среднего и среднеквадратического отклонения оценки процесса по ансамблю

1. Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$
2. В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 256$ , время между отсчетами  $\Delta t = 1$ , и количество усредняемых отсчетов  $N = 1$ .
3. В Блоке оценок определили оценку среднего и С.К.О. оценки.



Далее определили оценки по реализациям:

4. Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$
5. В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 8$ , время между отсчетами  $\Delta t = 1$ , и количество усредняемых отсчетов  $N = 128$ .
6. Нажали на кнопку "Усреднение", и в блоке Анализатор выбрать график "Среднее" (на графике  $n$  - текущее количество отсчетов по которым производится усреднение).



Оценим этот разброс при  $n = 1, n = 40, n = 128$ , приблизив график (в программе) и найдя крайние значения

Количество отсчетов	Крайние значения	Разброс $\langle x \rangle$ по вертикали
N=1	От -25 до 25	47
N=40	От 2 до 9	9
N=128	От 2.5 до 6.25	3

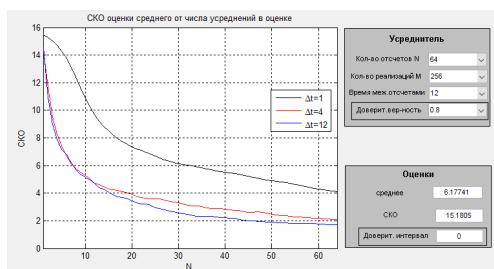
### 5.3. Изучение зависимости $\sigma$ – среднеквадратичного отклонения оценки среднего от числа усреднений в оценке

Порядок действий

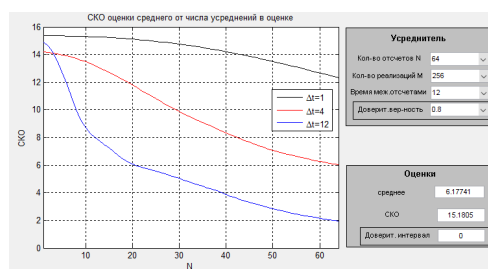
1. Для корректного отображения графиков перед экспериментом очистили область построения графиков кнопкой «Reset».
2. Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума.
3. В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 256$  (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), количество усредняемых отсчетов  $N = 64$ , а время между отсчетами первоначально взяли  $\Delta t = 1$ .

4. Нажали на кнопку “Вычисление С.К.О.” («СКО(N)»).
5. Для получения следующего графика в серии, в Усреднителе изменили время между отсчетами усреднения  $\Delta t$  в соответствии с заданием и нажали на кнопку “Вычисление С.К.О.” («СКО(N)»).
6. Для перехода к следующей серии нажали “Сброс” (Reset), а в Генераторе сигналов изменили время корреляции и повторили пункты 3) и 4).

В результате эксперимента получили две серии графиков по три графика в серии, отличающиеся временем между отсчетами  $\Delta t = 1; 4; 12$ . Для первой серии время корреляции  $\tau_{\text{кор}} = 10$ . Для второй серии время корреляции  $\tau_{\text{кор}} = 100$ . Ниже представлены эти серии.



$\tau_{\text{кор}} = 10$



$\tau_{\text{кор}} = 100$

Качественно поведение кривых на рис.??:

1. Погрешность оценки СКО при  $N = 1$  определяется
2. Можно показать, что с ростом времени корреляции СКО оценки среднего должен уменьшаться, поскольку оценка среднего совпадет с истинным значением при

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T=n \cdot \tau_{\text{кор}}} x(t) dt$$

то увеличивая время корреляции мы сильнее приближаемся к условию  $T \rightarrow \infty$ , а значит СКО оценки должен уменьшаться.

#### 5.4. Изучение зависимости $\sigma$ – среднеквадратичного отклонения оценки среднего от времени между отсчетами $\Delta t$

Порядок действий

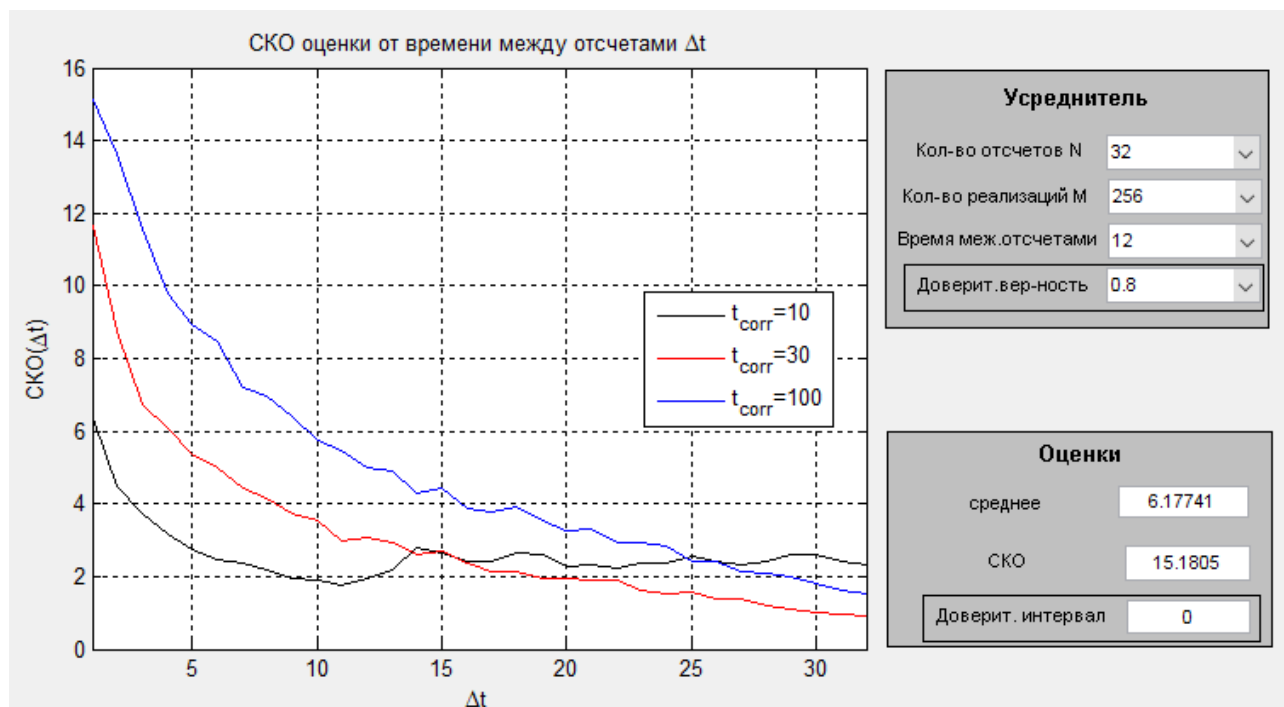
- (а) Для корректного отображения графиков перед экспериментом очистили область построения графиков кнопкой «Reset».

- (b) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума.
- (c) В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 256$  (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), а затем выбрали необходимое количество отсчетов усреднения ( $N = 4; 32$ ).
- (d) Нажали на кнопку “СКО( $\Delta t$ )”.
- (e) Для получения следующего графика в серии, в Генераторе изменили время корреляции в соответствии с заданием и нажали на кнопку “СКО( $\Delta t$ )” («СКО(N)»)
- (f) Для перехода к следующей серии ( $N = 32$ ) изменили в Усреднителе количество усреднений, нажали “Reset” в блоке Анализатор и повторить пункты 4) и 5).

В результате эксперимента получили две серии графиков (с  $N = 4$  и  $N = 32$ ) по три графика в серии. Получили серию кривых  $\sigma(\Delta t)$ , для процессов с различным временем корреляции  $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$ . Число усреднений в оценке среднего взяли равным  $N = 4$  ( $\Delta t$  на графиках изменяется в пределах от 1 до 32). Вторую серию кривых получили для тех же времен корреляции  $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$ , а число усреднений в оценке среднего взяли  $N = 32$ . Графики приведены ниже



Рис. 1:  $N = 4$

Рис. 2:  $N = 32$ 

### 5.5. Определение оценок среднего значения и среднеквадратического отклонения по спектральной плотности мощности (СПМ) процесса

Оценку среднего значения процесса, найденную как среднее по времени на фиксированном по длине скользящем интервале усреднения, можно рассматривать как новый случайный процесс и для него можно найти спектральную плотность мощности.

Порядок действий

1. Установили в Генераторе сигналов корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$ .

#### 5.5.1 Определение параметров исходного процесса по его СПМ:

1. В блоке Анализатор выбрали график “Спектр сигнала” (“СПМ”) нажали кнопку «Run» и, согласно заданию, вычислили среднее сигнала, а затем дисперсию.



$$\tau_{\text{кор}} = 10$$

При изменении масштаба было найдено значение  $S_x(0) = 1,22 \cdot 10^4$ .

В связи с этим полная мощность в полосе  $\Delta f = 1/2048$  на нулевой частоте равна (с некоторой погрешностью)  $\langle x \rangle^2 = A \cdot \frac{1}{2048}$ , где  $A$  – значение СПМ на нулевой частоте по графику. Отсюда находим  $\langle x \rangle$ .

$$\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,96$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,44$$

Дисперсию процесса по графику спектральной плотности мощности нашли как произведение эффективной ширины спектра на эффективное значение СПМ.

$$D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,98$$

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,73$$

Сравнили полученные результаты с данными из Задания 2.

### 5.5.2 Определение параметров усредненного процесса по его СПМ:

1. В Усреднителе установили количество реализаций  $M = 2$  и время между отсчетами  $\Delta t = 1$ , а затем выбрали количество отсчетов усреднения  $N = 4$ .
2. В блоке Анализатор выбрали график “Спектр усреднен.” (“Уср. СПМ”), нажали кнопку «Run», и, затем, аналогично заданию 5.1 вычислили оценку среднего значения и дисперсию оценки.

3. Для проведения следующего эксперимента повторили пункты 3) и 4) для количества отсчетов усреднения  $N = 32$ .



$N = 4$



$N = 32$

Для  $N = 4$   $S_x(0) = 1,2 \cdot 10^4$

$$\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,86$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,42$$

$$D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,93$$

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,71$$

Для  $N = 32$   $S_x(0) = 1,15 \cdot 10^4$

$$\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,62$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,37$$

$$D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,8$$

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,68$$

## 5.6. Описание погрешности и надежности оценки среднего значения через доверительный интервал и доверительную вероятность

### 5.6.1 Анализ гистограммы

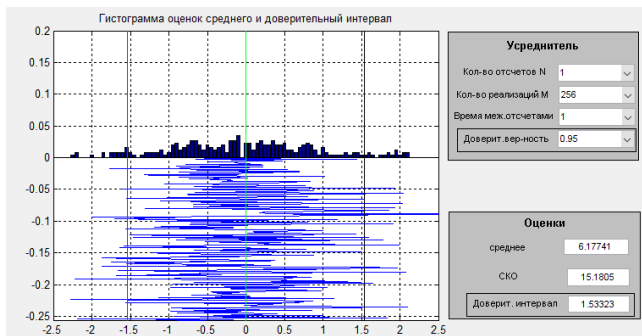
Порядок действий:

1. Установили в Генераторе сигналов время корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$ .
2. В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 256$  (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), доверительную вероятность  $\beta =$

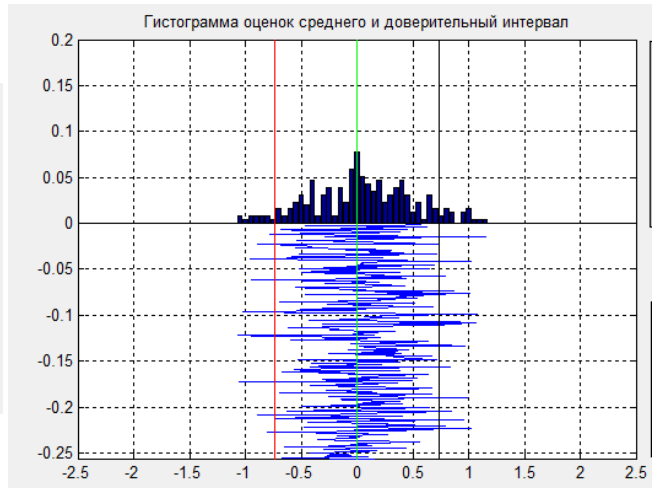


0.95, время между отсчетами  $\Delta t = 1$  и необходимое количество отсчетов усреднения  $N = 1$ .

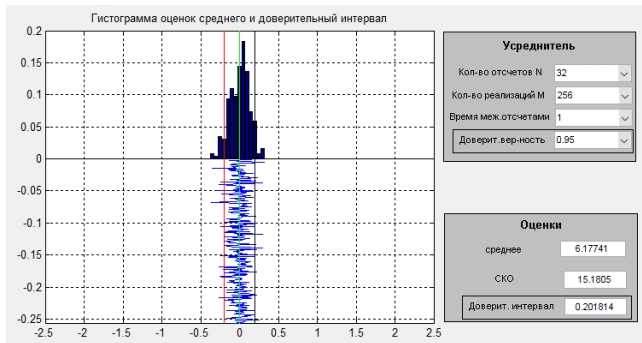
3. Нажали кнопку “PDF”, и следили за изменением значения доверительного интервала в Блоке оценок.
4. Для проведения следующего эксперимента повторили пункт 2), выбирая количество отсчетов усреднения, соответственно,  $N = 4; 32$ .



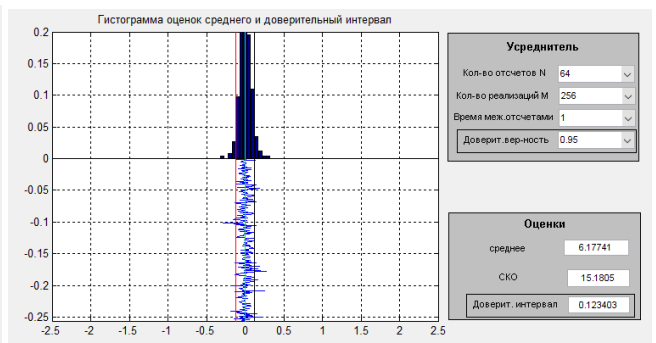
$N = 1$



$N = 4$

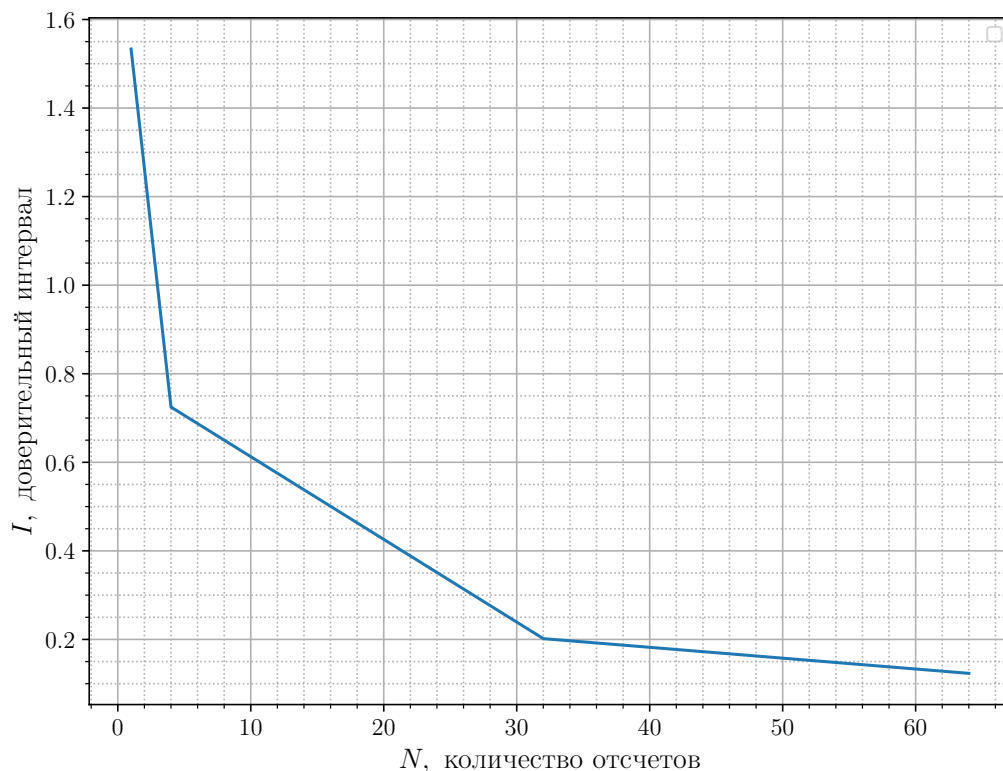


$N = 32$



$N = 64$

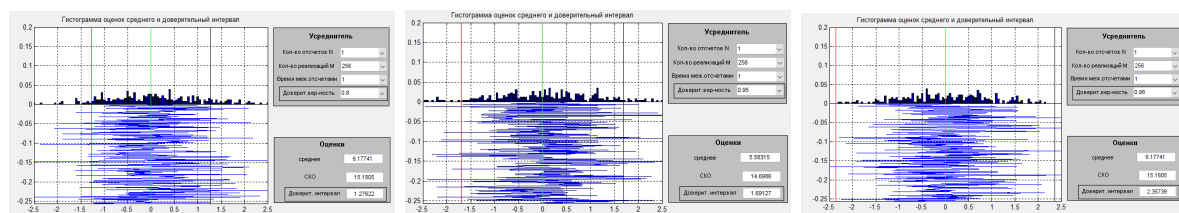
Количество отсчетов усреднения $N$	Доверительный интервал $I$
1	1.5332
4	0.7248
32	0.2018
64	0.1234

График зависимости доверительного интервала  $I$  от  $N$ 

### 5.6.2 Задание 6.2

Доверительный интервал отмечается на графике тремя вертикальными линиями: центр интервала – зеленая линия, края интервала – левый край – красная линия, правый край – черная линия. Порядок действий:

1. Установили в Генераторе сигналов время корреляции Гауссова шума  $\tau_{\text{кор}} = 10$ .
2. В Усреднителе выбрали количество реализаций  $M = 256$  (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), доверительную вероятность  $\beta = 0.95$ , время между отсчетами  $\Delta t = 1$  и необходимое количество отсчетов усреднения  $N = 1$ . Доверительную вероятность выбирали последовательно равной  $\beta = 0.80; 0.95; 0.98$ .
3. Нажали кнопку “PDF”. Значения доверительного интервала считывали в Блоке оценок. На основании полученных результатов представили зависимость  $I_{\beta}(\beta)$ .
4. Получили аналогичные кривые для  $N=4, 32$ .

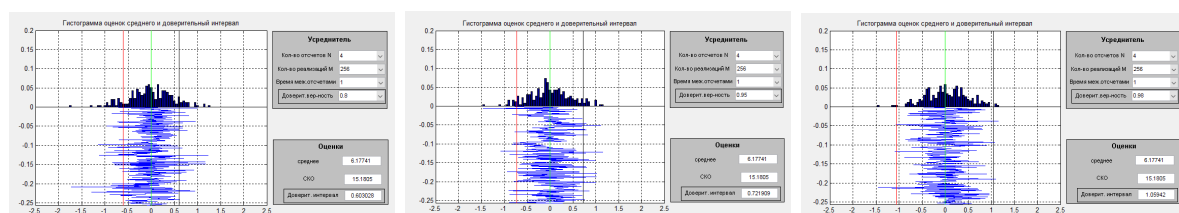


$$\beta = 0.8$$

$$\beta = 0.95$$

$$\beta = 0.98$$

$$N = 1$$

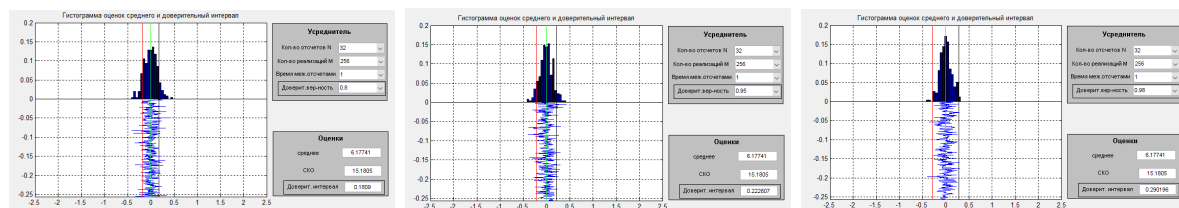


$$\beta = 0.8$$

$$\beta = 0.95$$

$$\beta = 0.98$$

$$N = 4$$



$$\beta = 0.8$$

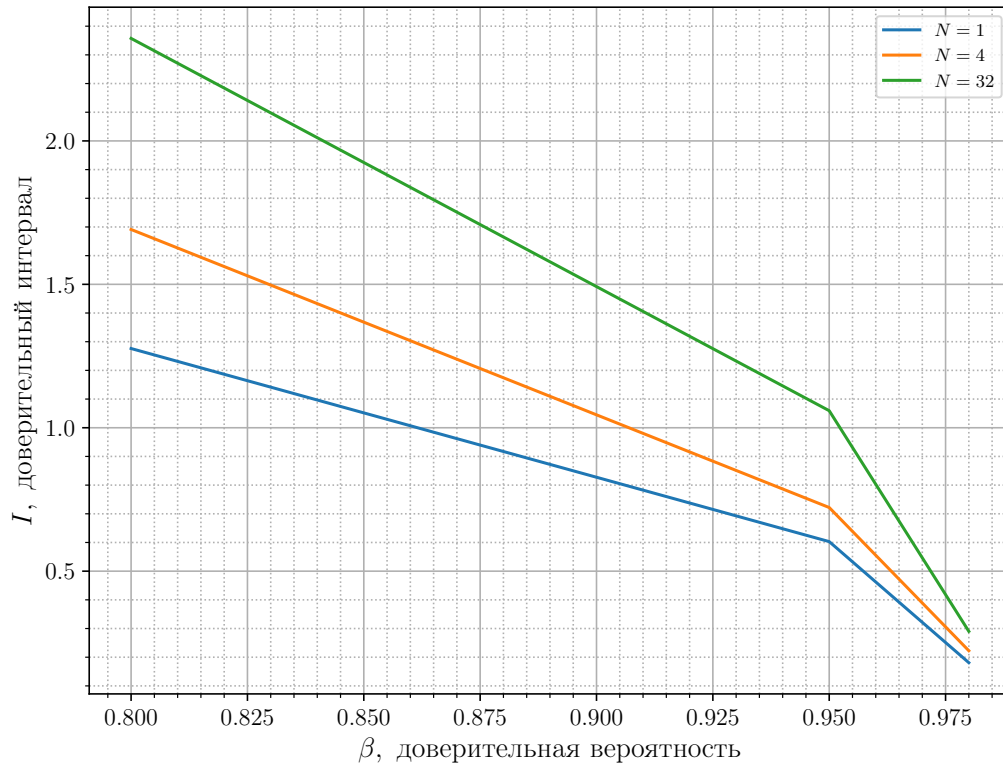
$$\beta = 0.95$$

$$\beta = 0.98$$

$$N = 32$$

	Доверительный интервал I		
Доверительная вероятность $\beta$	N=1	N=4	N=32
0.80	1.27622	0.603028	0.1809
0.95	1.69127	0.721909	0.2226
0.98	2.35739	1.05942	0.2901

Построили график зависимости доверительного интервала  $I$  от  $\beta$  при различных значениях  $N$ .

График зависимости доверительного интервала  $I$  от  $\beta$ 

По графику видно, что доверительный интервал увеличивается при увеличении  $\beta$  и уменьшается при увеличении количества отсчетов усреднения  $N$ .

## 6. Вывод

В результате выполнения данной работы мы изучили вопросы, связанные с оценкой параметров случайных процессов на примере оценки их средних значений. В ходе выполнения 1-го задания мы установили, что вид реализации с ростом времени корреляции становится более плавным, а спектральная плотность мощности смещается ближе к нулевой частоте. Так же мы установили, что значения разброса  $\langle x \rangle$  по вертикали во втором задании больше значений  $\langle x \rangle$  из задания 5 при любых  $N$ . В результате выполнения 6-го задания было установлено, что доверительный интервал увеличивается при увеличении  $\beta$  и уменьшается при увеличении количества отсчетов усреднения  $N$ .