

Отчет по лабораторной работе №3000

Гармонический анализ и синтез периодических сигналов

Выполнили студенты 420 группы
Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Сидоров Д.А.

Нижний Новгород, 2018

Содержание

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | Расчет, синтез и экспериментальное получение различных сигналов | 4 |
| 2.1 | Разложения в ряд Фурье | 4 |
| 2.1.1 | Треугольник | 4 |
| 2.1.2 | Пила | 4 |
| 2.1.3 | Меандр | 5 |
| 2.2 | Спектры сигналов с установки | 7 |
| 2.3 | Синтезированные сигналы | 9 |
| 2.4 | Синтез амплитудно– и частотно– модулированных сигналов | 10 |
| 2.5 | Форма сигналов при дифференцировании и интегрировании | 12 |
| 2.5.1 | Интегрированные сигналы | 12 |
| 2.5.2 | Дифференцированные сигналы | 15 |

1. Введение

Изменяющийся во времени сигнал $S(t)$ называется периодическим, если для него выполняется условие

$$S(t) = S(t + kT), \quad (1)$$

где T – период изменения, а k – любое целое число. Если периодическая функция $S(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то есть является ограниченной и имеет в пределах одного периода конечное число экстремумов и разрывов, то согласно теореме Фурье она может быть представлена в виде тригонометрического ряда, называемого рядом Фурье

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin n\Omega t) \quad (2)$$

коэффициенты которого определяются из выражений

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos(n\Omega t) dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad (4)$$

а угловая частота Ω связана с периодом T соотношением:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5)$$

Пользуясь формулами тригонометрии ряд (2) можно записать в виде

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n) \quad (6)$$

более наглядно определяющем совокупность гармонических составляющих, на которые раскладывается исходная функция $S(t)$. Такая совокупность называется спектром. Для периодических функций спектр является дискретным и состоит из постоянной составляющей, которую можно рассматривать как гармонику с нулевой частотой и амплитудой $A_0 = a_0/2$ и бесконечного множества гармонических составляющих с частотами $\omega_n = n\Omega$, кратными основной частоте Ω , амплитудами A_n и начальными фазами θ_n .

Для наглядности спектры удобно изображать в виде спектральных диаграмм – ампли-

тудных и фазовых. Используя формулу

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad (7)$$

можно от (6) перейти к комплексной форме ряда Фурье

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\Omega t}, \quad (8)$$

где комплексная амплитуда $A_n = A_n e^{i\pi\theta_n}$ содержит информацию об комплексной амплитуде и фазе n -ой гармоники. Сравнивая ряды (8) и (2) и используя соотношения (3) и (4), можно получить формулу для вычисления комплексных амплитуд

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \quad (9)$$

Отметим некоторые свойства рядов Фурье.

1. Если $S(t)$ - четная функция, то в выражении (2) $b_n=0$, а в разложении остаются только косинусоидальные члены.

2. Для нечетной функции $S(t)$ в разложении (2), наоборот, лишь коэффициенты b_n отличны от нуля, а в $a_n = 0$;

3. При увеличении периода сигнала T расстояние по оси частот между соседними спектральными компонентами уменьшается, то есть спектр становится более «плотным»; 4. Для импульсных сигналов, у которых промежутки времени, когда сигнал отличен от нуля, неизменен, при увеличении периода величина Фурье-компонент уменьшается обратно пропорционально T .

2. Расчет, синтез и экспериментальное получение различных сигналов

2.1. Разложения в ряд Фурье

2.1.1 Треугольник

Функция имеет вид

$$U(t) = \begin{cases} U_0 + \frac{4U_0}{T}t, & t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ U_0 - \frac{4U_0}{T}t, & t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \quad (10)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (U_0 + \frac{4U_0}{T}t) \cos(n\Omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} (U_0 - \frac{4U_0}{T}t) \cos(n\Omega t) dt \right] = \quad (11)$$

$$= -\frac{U_0(\pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^2} - \frac{U_0(\pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^2} = \quad (12)$$

$$= \frac{4U_0}{\pi^2 n^2} (1 - \cos \pi n) \quad (13)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (U_0 + \frac{4U_0}{T}t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} (U_0 - \frac{4U_0}{T}t) dt \right] = 0 + 0 = 0 \quad (14)$$

И, наконец, разложение

$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos n\Omega t \quad (15)$$

2.1.2 Пила

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ \frac{2U_0}{T}t, & t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \quad (16)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 \cdot \cos(n\Omega t) dt + \frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot \cos(n\Omega t) dt \right] = \dots = \frac{U_0}{n^2 \pi^2} \cdot (\cos(\pi n) - 1) \quad (17)$$

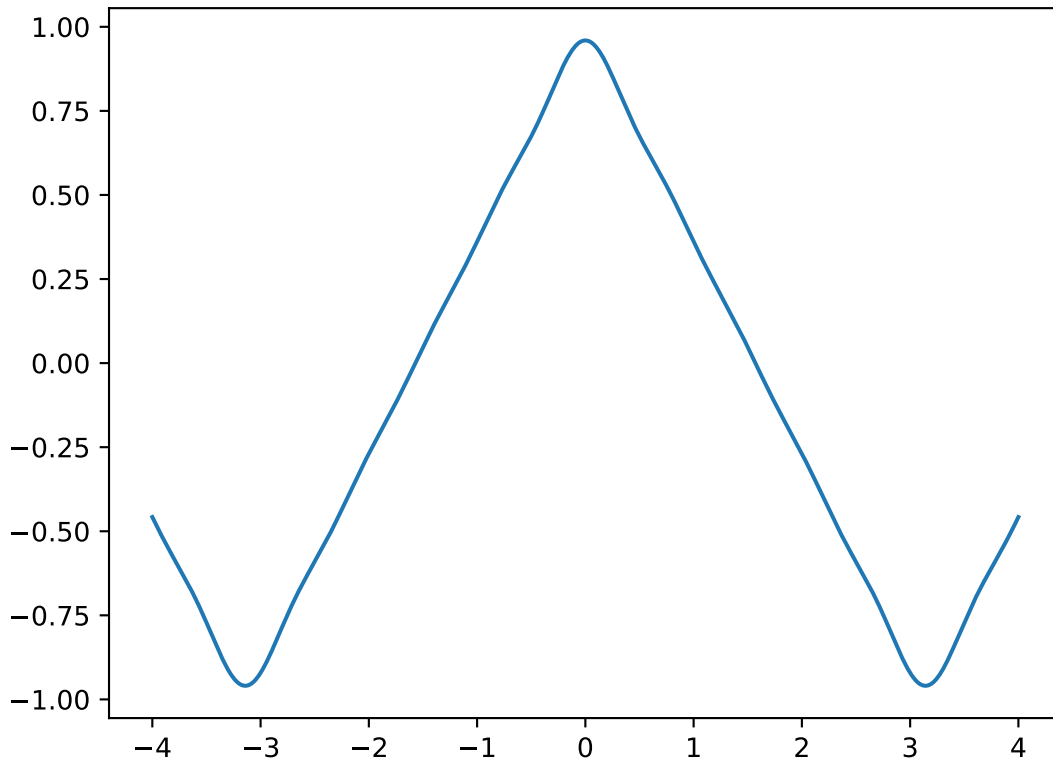


Рис. 1: Сигнал «треугольник» по 100 первым гармоникам

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 \cdot \sin(n\Omega t) dt + \frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(n\Omega t) dt \right] = \dots = \frac{U_0}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1} \quad (18)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 \cdot dt + \frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t dt \right] = \dots = \frac{U_0}{2} \quad (19)$$

$$U(t) = \frac{U_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{U_0}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cdot \cos(n\Omega t) + (-1)^{n+1} \frac{U_0}{\pi n} \cdot \sin(n\Omega t) \right] \quad (20)$$

2.1.3 Меандр

$$U(t) = \begin{cases} -U_0, & t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ U_0, & t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \quad (21)$$

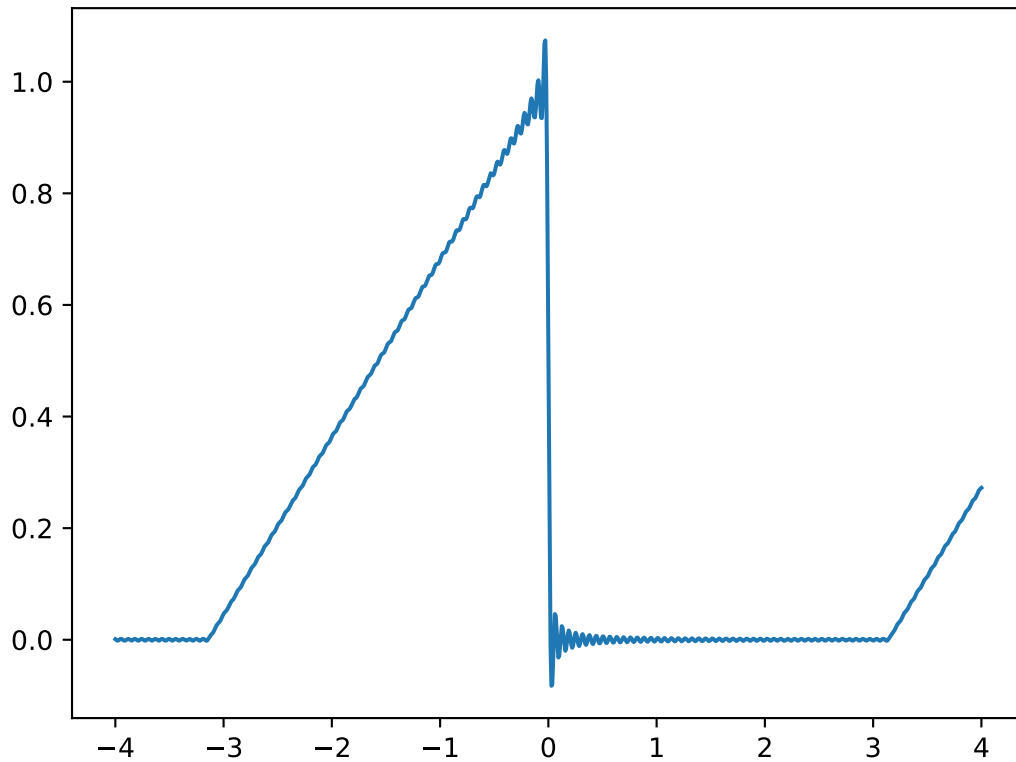


Рис. 2: Сигнал «пила» по 100 первым гармоникам

В силу нечетности $a_n \equiv 0$.

$$b_n = \frac{4U_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\Omega t) dt = \frac{2U_0}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) \quad (22)$$

И тогда

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} (1 - (-1)^n) \cdot \sin(n\Omega t) \quad (23)$$

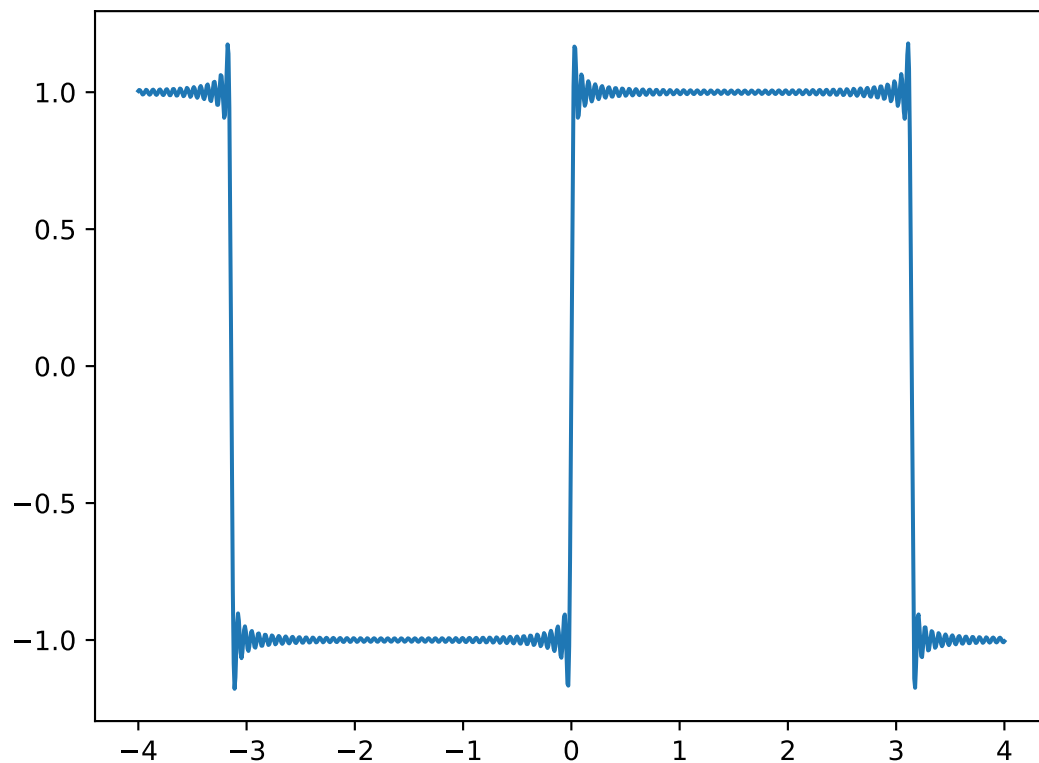


Рис. 3: Сигнал «меандр» по 100 первым гармоникам

2.2. Спектры сигналов с установки

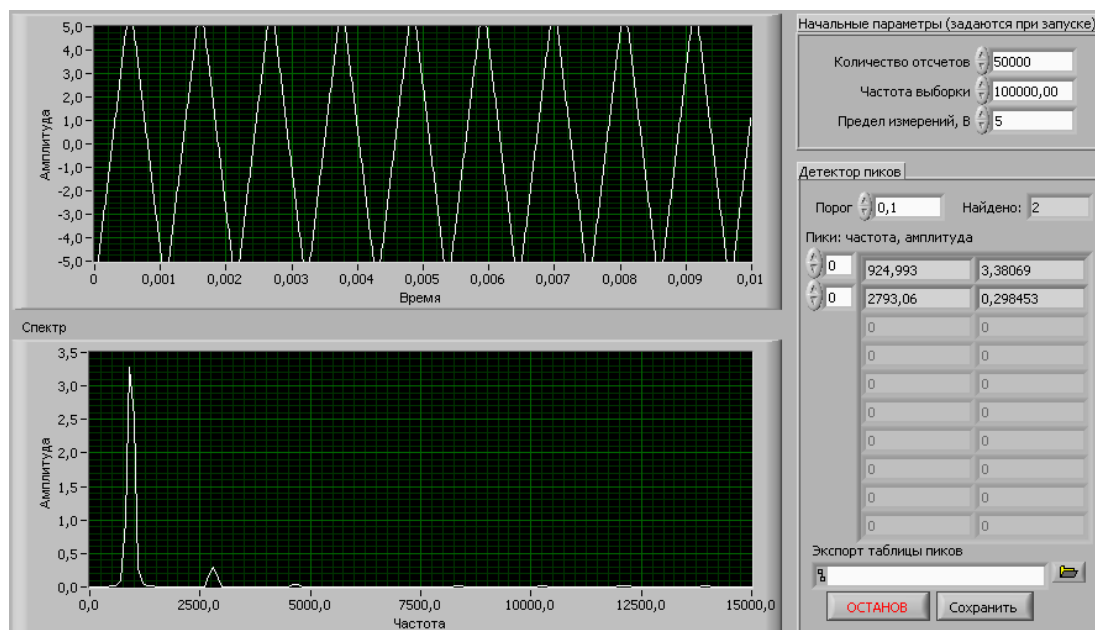


Рис. 4: Сигнал «треугольник»

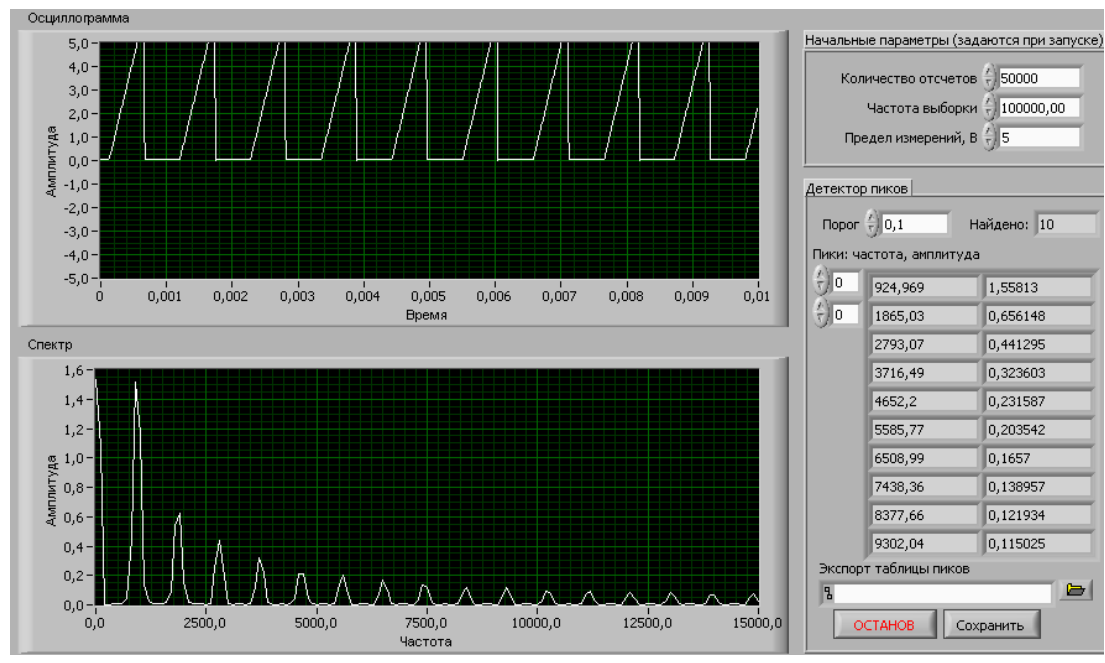


Рис. 5: Сигнал «пила»

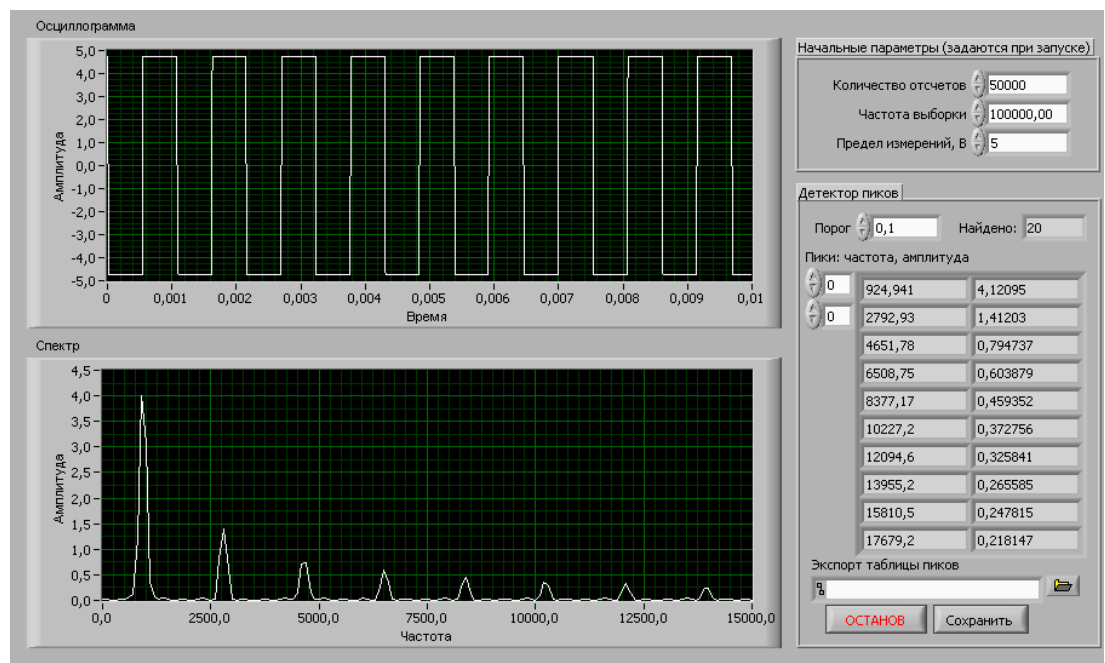


Рис. 6: Сигнал «меандр»

2.3. Синтезированные сигналы

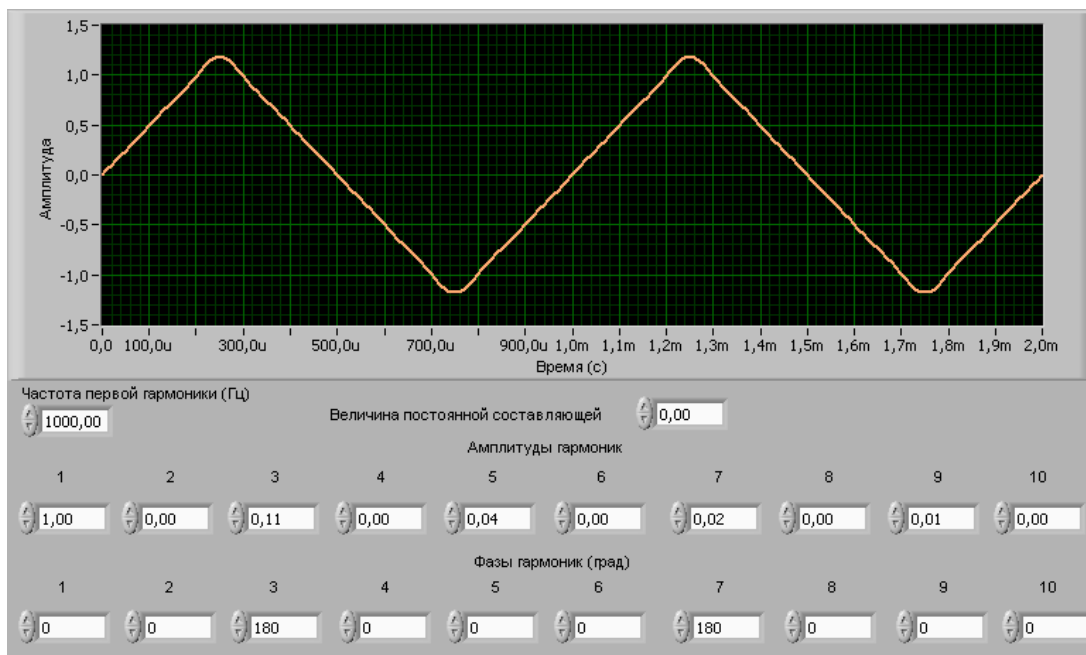


Рис. 7: Сигнал «треугольник»

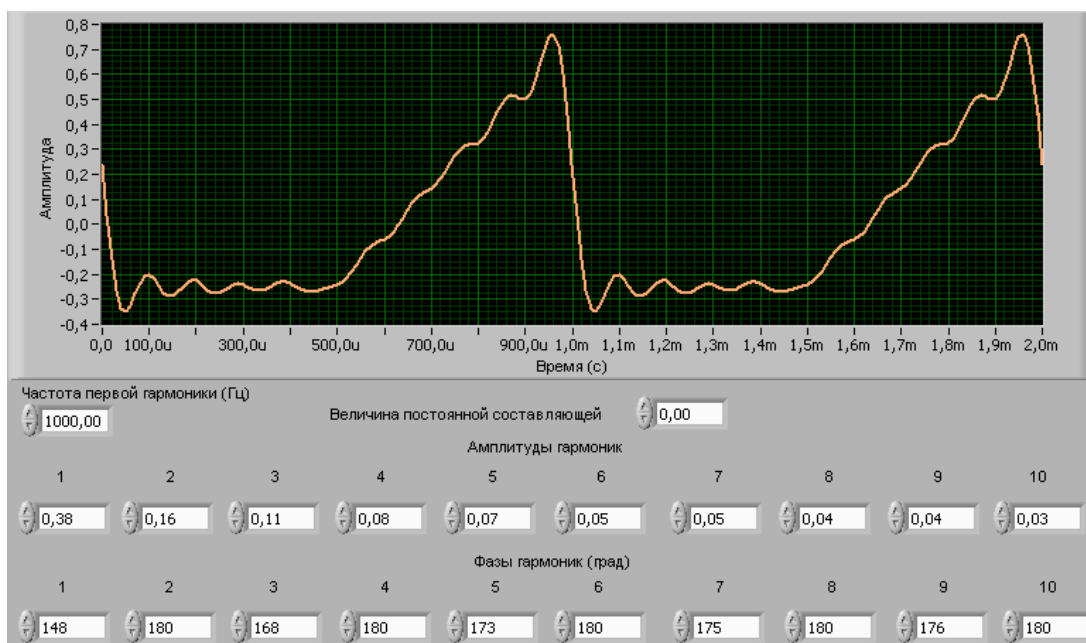


Рис. 8: Сигнал «пила»

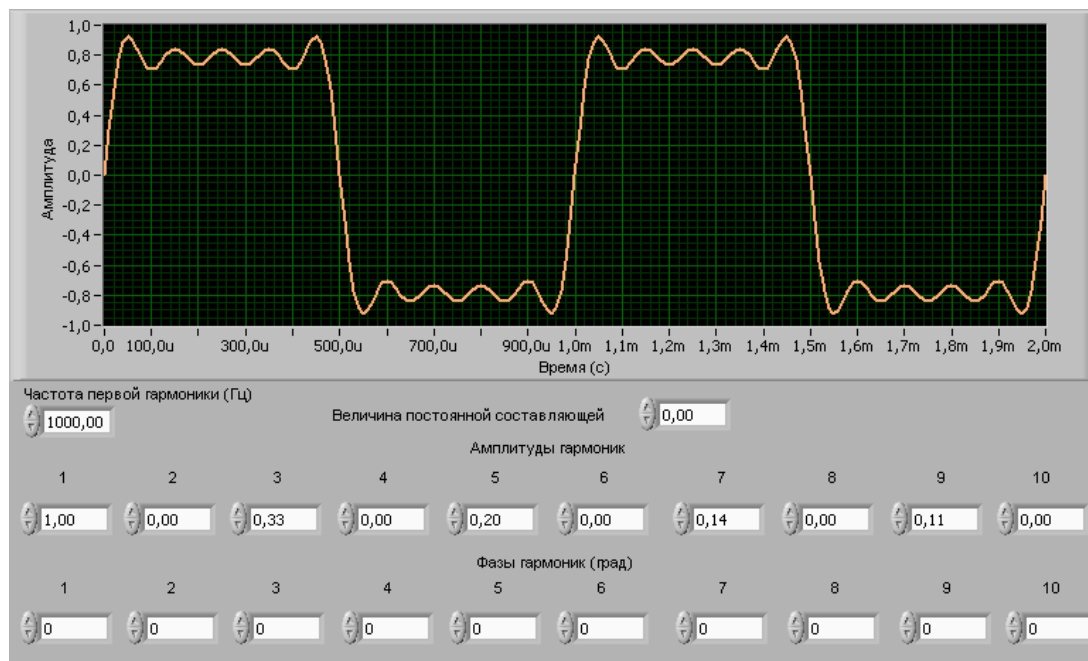
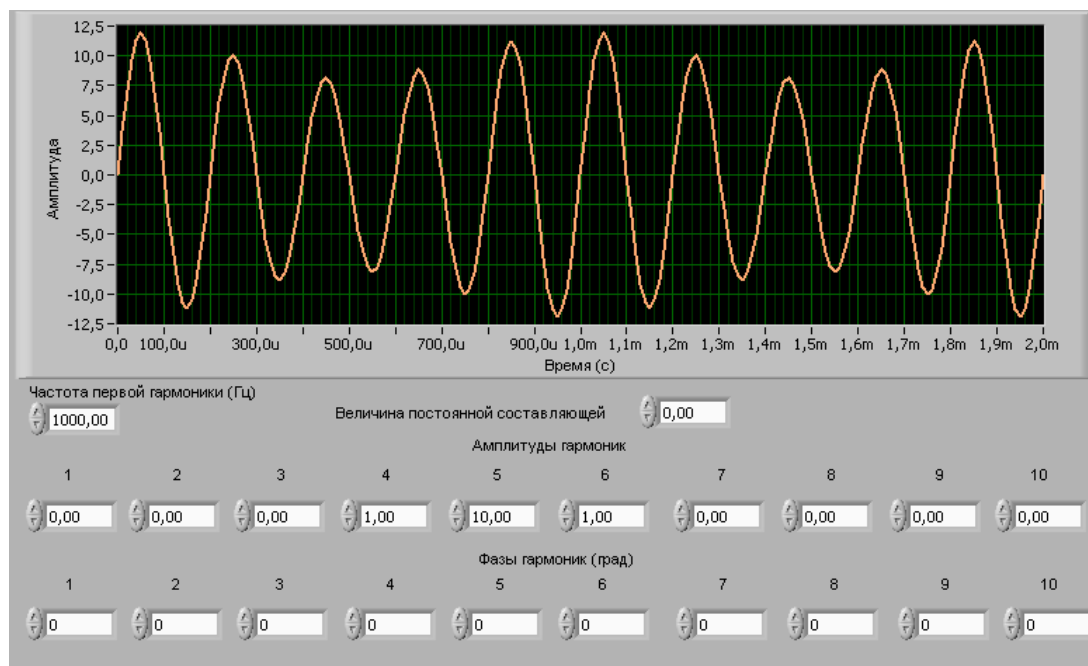
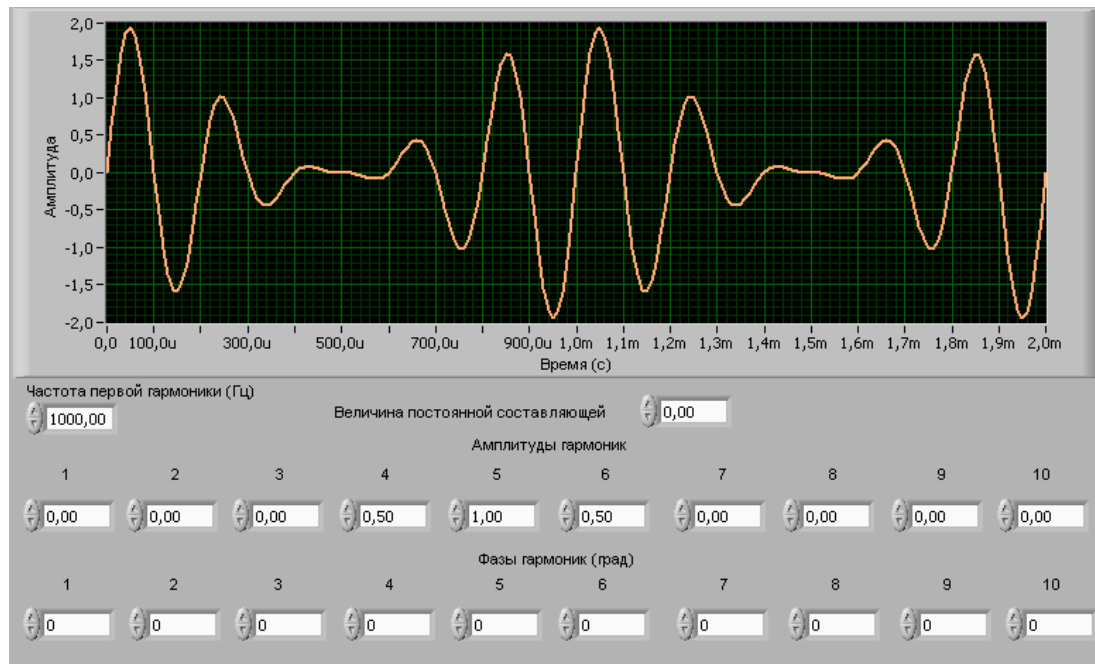
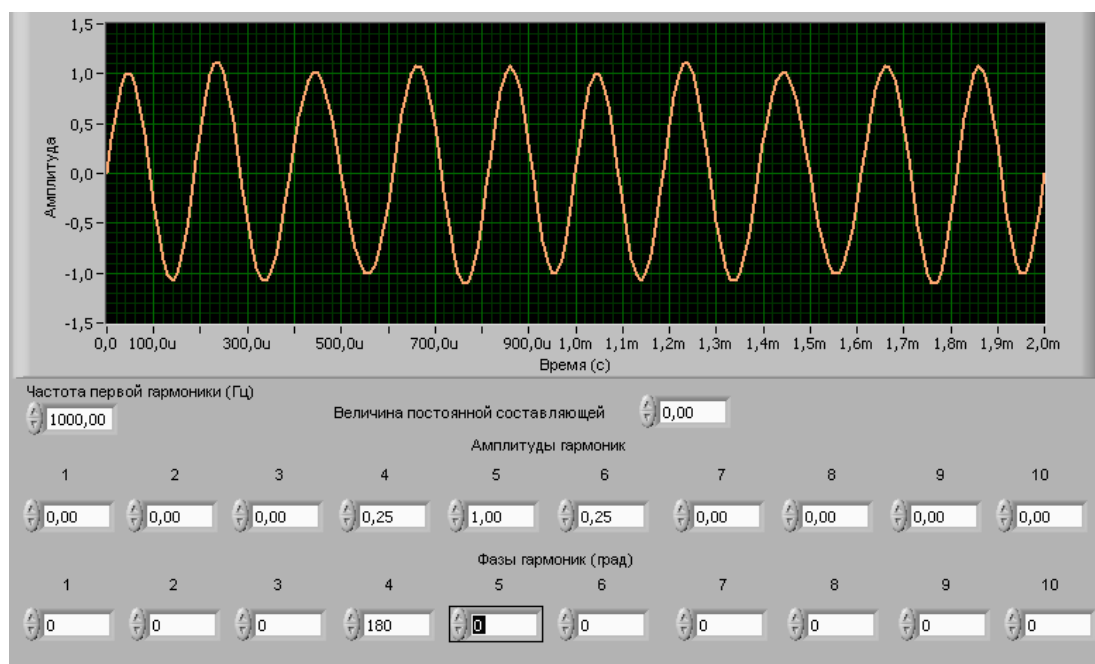
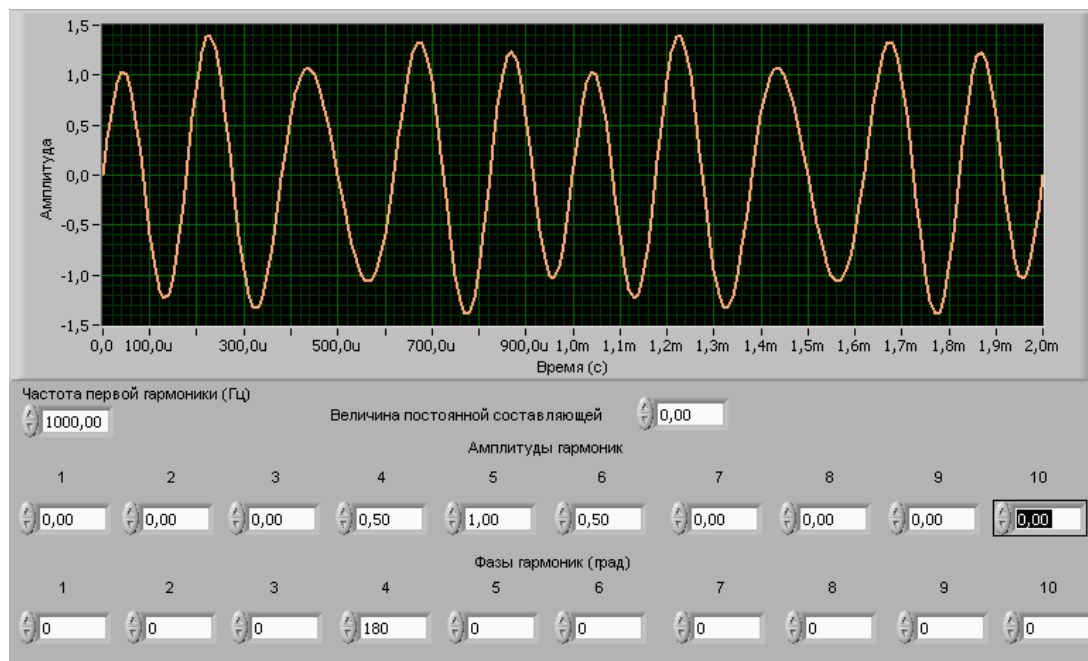


Рис. 9: Сигнал «меандр»

2.4. Синтез амплитудно– и частотно– модулированных сигналов

Рис. 10: Амплитудная модуляция с $m = 0.20$

Рис. 11: Амплитудная модуляция с $m = 1$ Рис. 12: Фазовая модуляция с $m = 0.25$

Рис. 13: Фазовая модуляция с $m = 1$

2.5. Форма сигналов при дифференцировании и интегрировании

2.5.1 Интегрированные сигналы

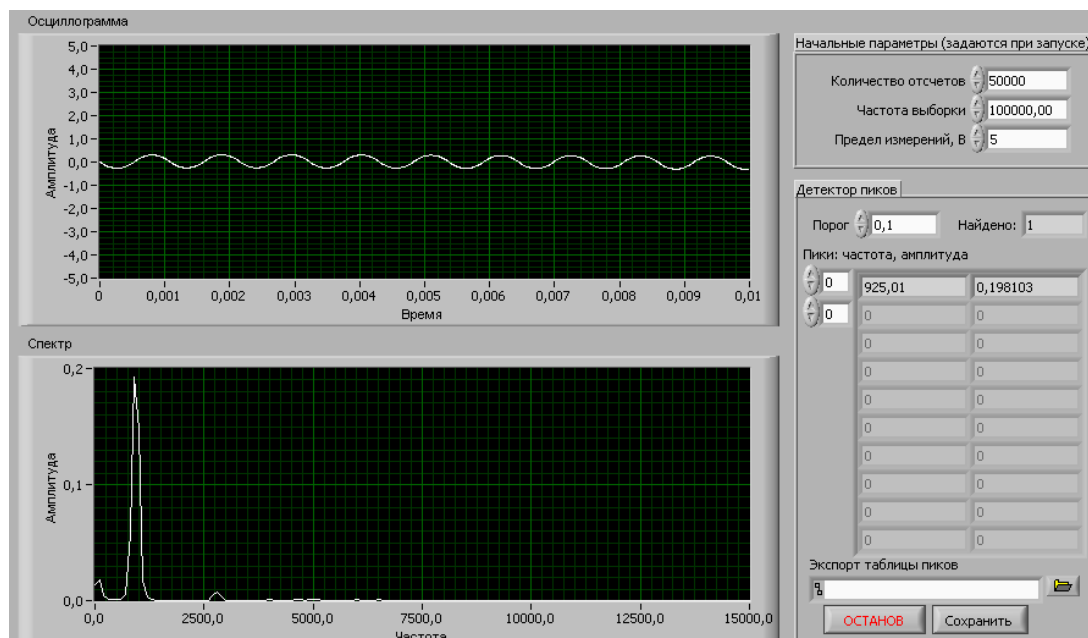


Рис. 14: Сигнал «треугольник»

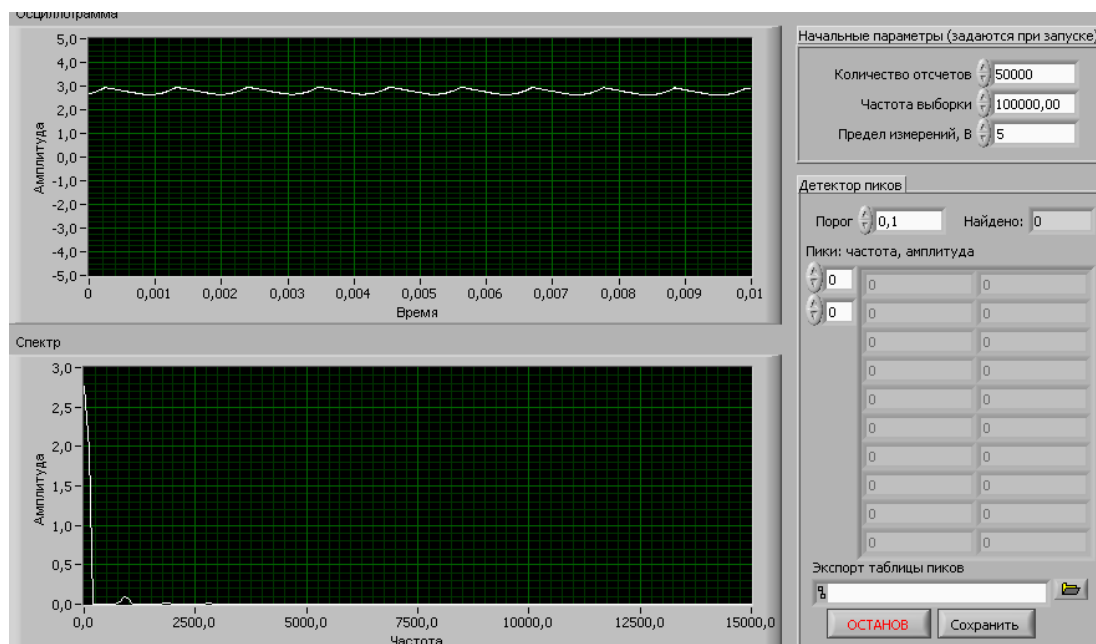


Рис. 15: Сигнал «пила»

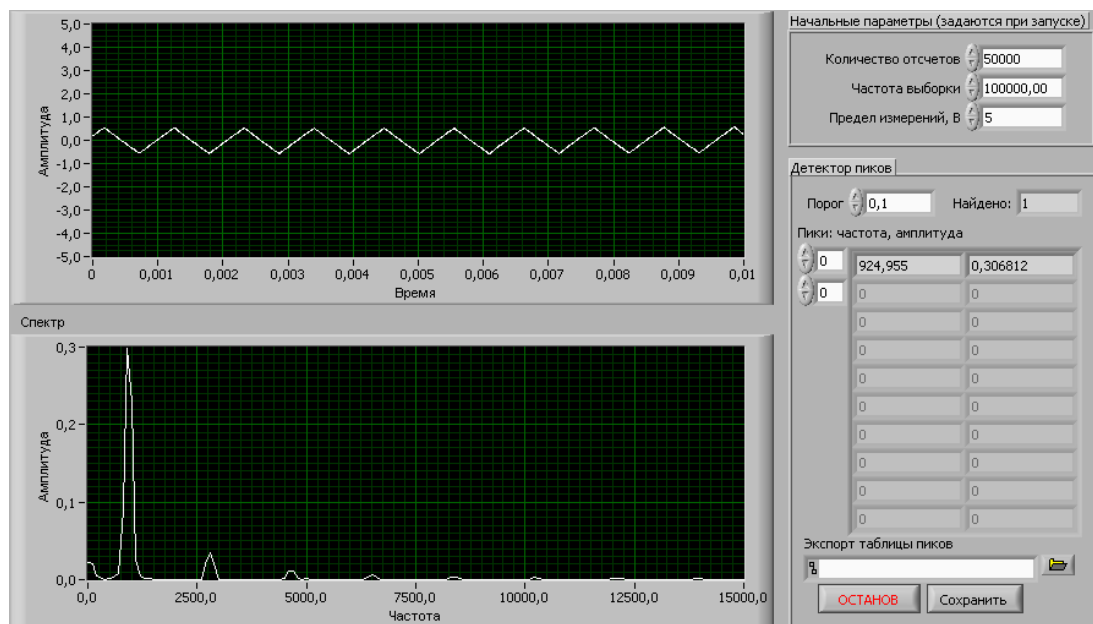
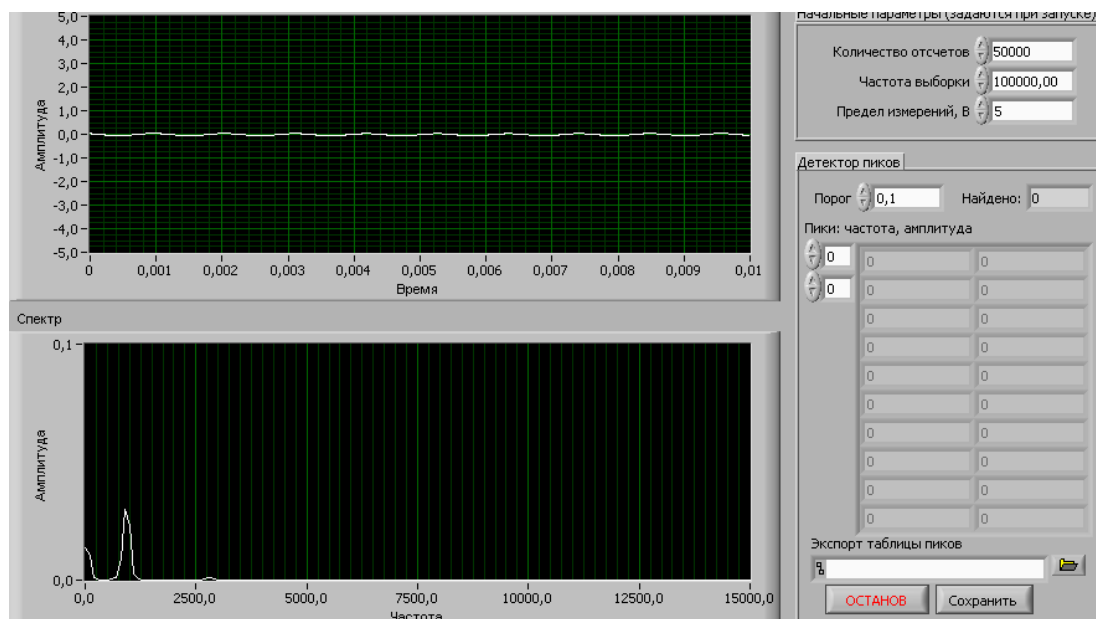
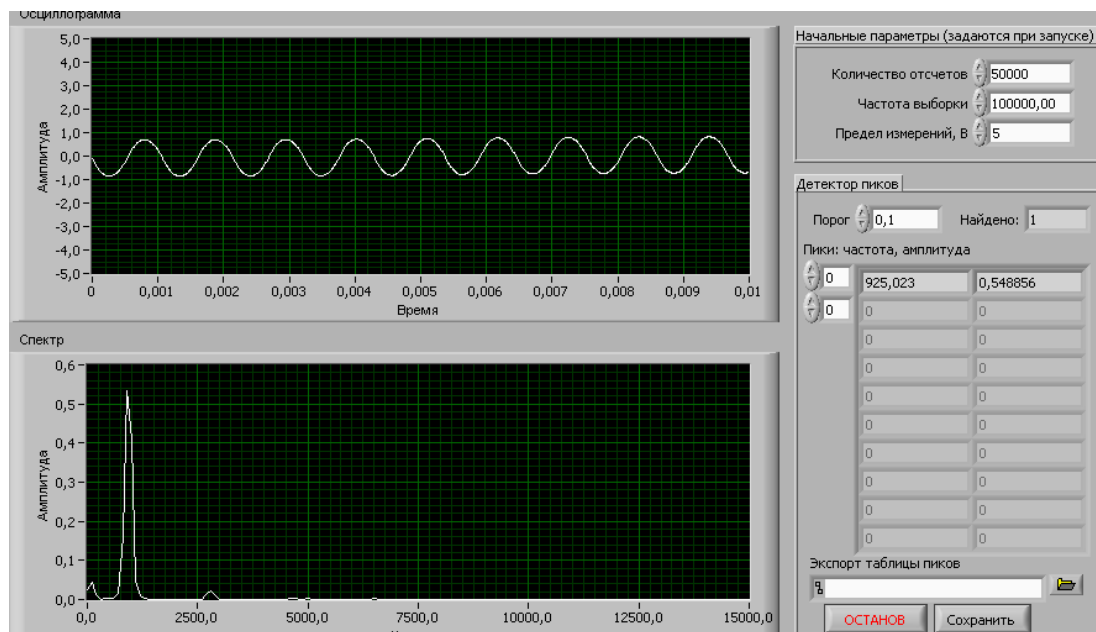


Рис. 16: Сигнал «меандр»

Рис. 17: Сигнал «треугольник», $R = 1000 \text{ Ом}$, $C = 50000 \text{ пкФ}$ Рис. 18: Сигнал «треугольник», $R = 1000 \text{ Ом}$, $C = 5000 \text{ пкФ}$

2.5.2 Дифференцированные сигналы

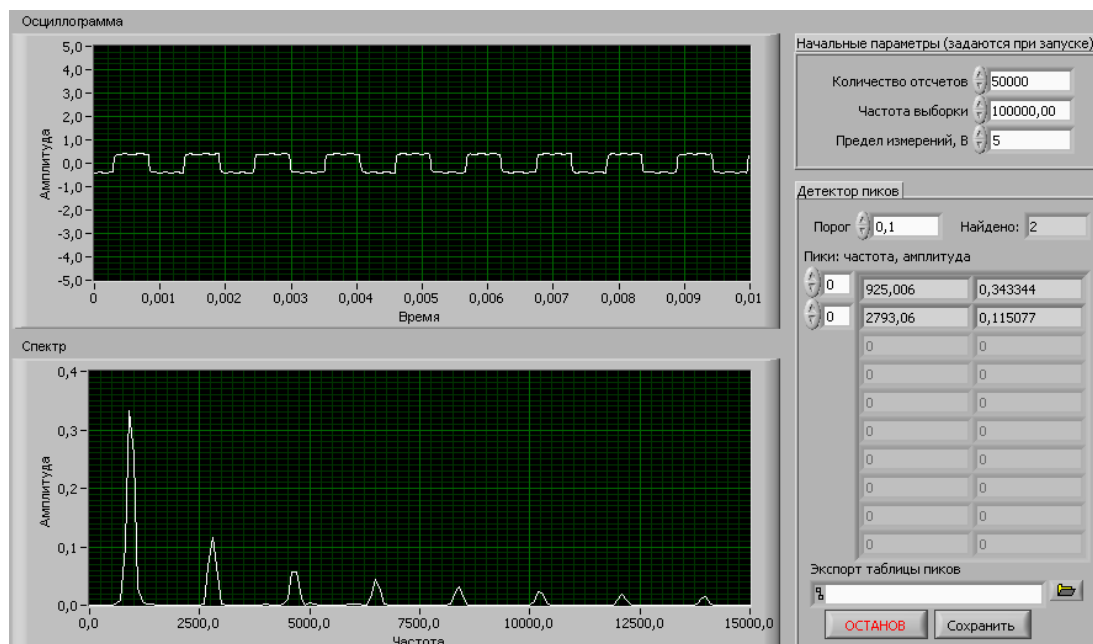


Рис. 19: Сигнал «треугольник»

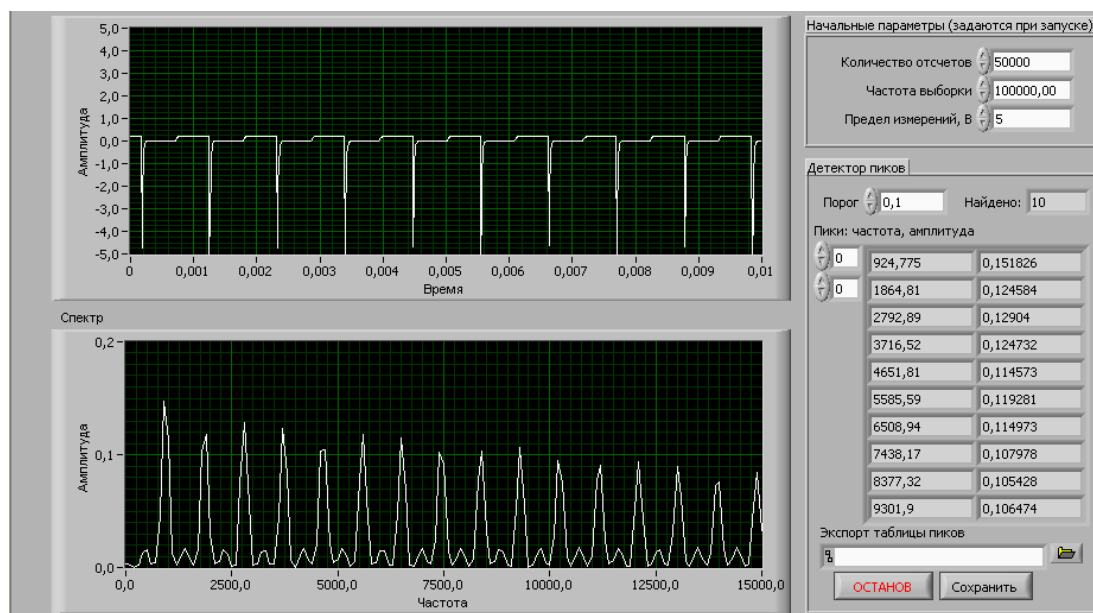


Рис. 20: Сигнал «пила»

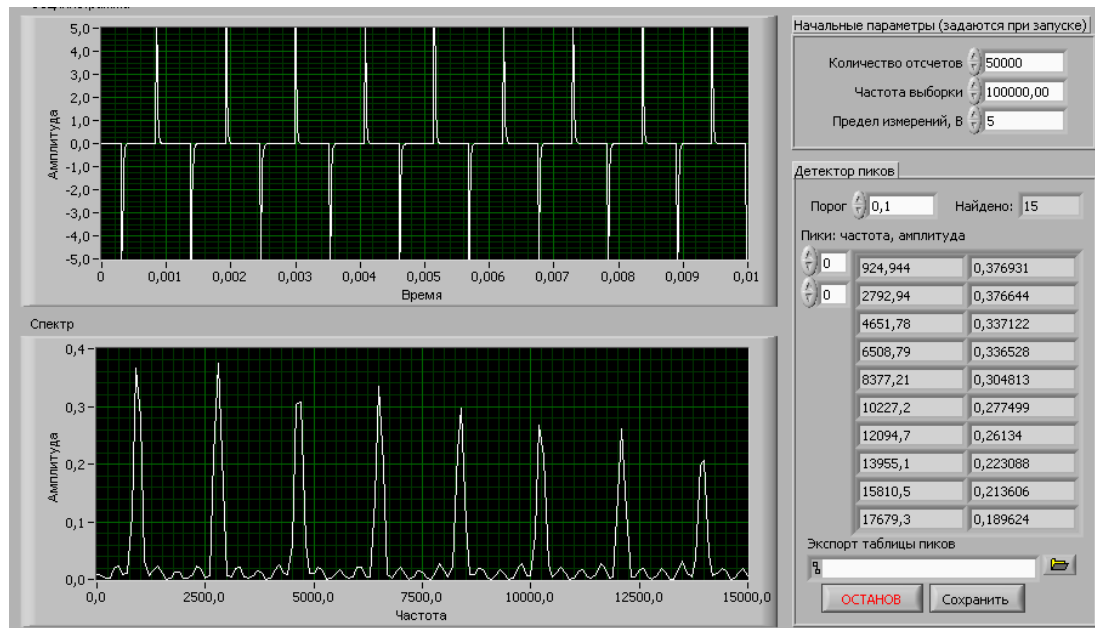


Рис. 21: Сигнал «меандр»