Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №3000

aqsdfghjkl;

Выполнили студенты 420 группы
Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Сидоров Д.А.

Нижний Новгород, 2018

Содержание

1. Теоретическая часть

Изменяющийся во времени сигнал $S(t)$ называется периодическим, если для него выполняется условие

$$S(t) = S(t+kT), \tag{1}$$

где T– период изменения, а k– любое целое число Если периодическая функция $S(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то есть является огранченной и имеет в пределах одного периода конечное число экстремумов и разрывов, то согласно теореме Фурье онра может быть представлена виде тригонометричекого ряда, называемого рядом Фурье

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\Omega) + b_n \sin n\Omega t) \tag{2}$$

коэффициенты которго определяются из выражений

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(n\Omega t)dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\sin(n\Omega t)dt, \tag{4}$$

а угловая частота Ω связана с периодом T соотношением:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

Пользуясь формулами тригонометрии ряд (2) можно записать в виде

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n) \tag{6}$$

более наглядно определяющем совокупность гармонических составляющих, на которые раскладывается исходная функция $S(t)$. Такая совокупность называется спектром. Для периодических функций спектр является дискретным и состоит из постоянной составляющей, которую можно рассматривать как гарминику с нулевой частотой и амплитудой $A_0 = a_0/2$ и бесконечного множества гармонических составляющих с частотами $\omega_n = n\Omega$, кратными основной частоте Ω, амплитудами A_n и начальными фазами θ_n.

Для наглядности спектры удобно изображать в виде спектральных диаграмм – амплитудных и фазовых. Используя формулу

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \tag{7}$$

можно от (6) перейти к комплексной форму ряда Фурье

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\Omega t} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\Omega t}, \tag{8}$$

где комплексная амплитуда $A_n = A_n e^{\pi\theta_n}$ содержит информацию об комплексной амплитуде и фазе n-ой гармоники. Сравнивая ряды (8) и (2) и используя соотношения (3) и (4), можно получить формулу для вычисления комплесных амплитуд

$$A_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{2}{T}}^{\frac{T}{2}} \tag{9}$$

Отметим некоторые свойства рядов Фурье.

1. Если $S(t)$- четная функция, то в выражении (2) b_n=0, а в разложении остаются только косинусоидальные члены.

2. Для нечетной функции $S(t)$ в разложении (2), наоборот, лишь коэффициенты b_n отличны от нуля, а в $a_n = 0$;

3. При увеличении периода сигнала T расстояние по оси частот между соседними спектральными компонентами уменьшается, то есть спектр становится более «плотным»; 4. Для импульсных сигналов, у которых промежуток времени, когда сигнал отличен от нуля, неизменен, при увеличении периода величина Фурье-компонент уменьшаетсмя обратно пропорционально T.

2. Разложения в ряд Фурье

2.1. Треугольник

Функция имеет вид

$$U(t) = \begin{cases} U_0 + \dfrac{4U_0}{T}t, t \in [-\dfrac{T}{2}, 0] \\ U_0 - \dfrac{4U_0}{T}t, t \in [0, \dfrac{T}{2}] \end{cases} \tag{10}$$

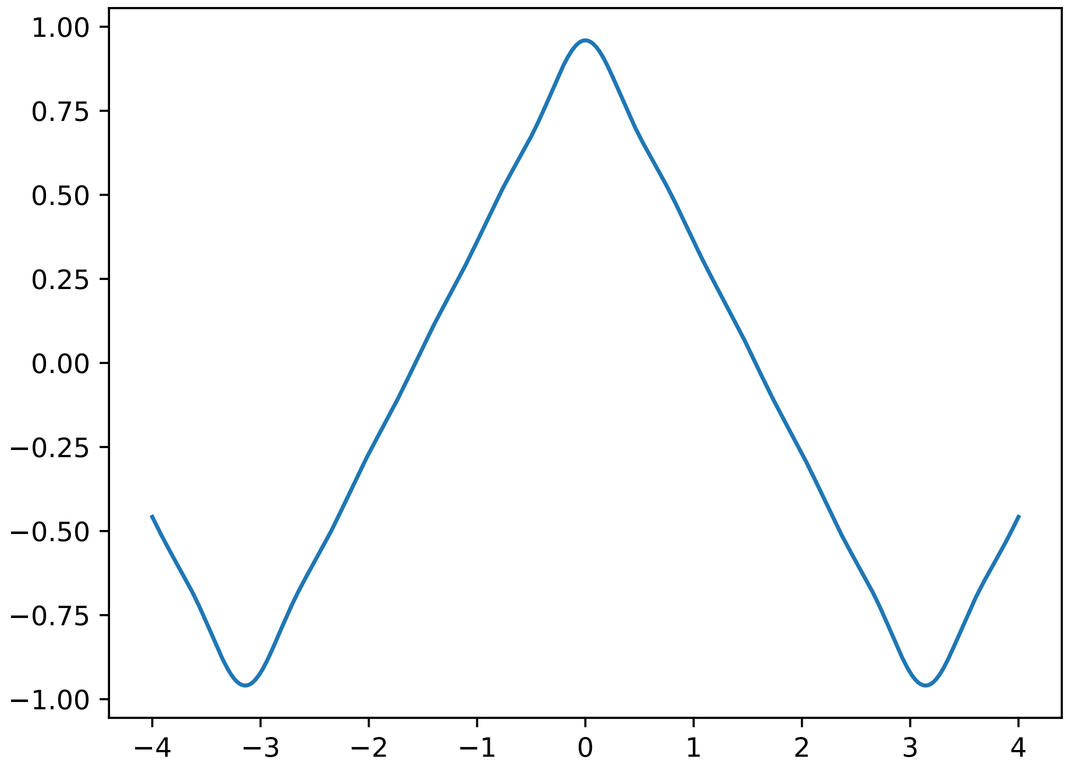

Рис. 1: Caption here

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0}(U_0 + \frac{4U_0}{T}t)\cos(n\Omega t)dt + \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}}(U_0 - \frac{4U_0}{T}t)\cos(n\Omega t)dt\right] = \tag{11}$$

$$= -\frac{U_0(\pi n\sin(\pi n) + 2\cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^2} - \frac{U_0(\pi n\sin(\pi n) + 2\cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^2} = \tag{12}$$

$$= \frac{4U_0}{\pi^2 n^2}(1 - \cos\pi n) \tag{13}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0}(U_0 + \frac{4U_0}{T}t)dt + \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}}(U_0 - \frac{4U_0}{T}t)dt\right] = 0 + 0 = 0 \tag{14}$$

И,наконец, разложение

$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos n\Omega t \tag{15}$$

2.2. Пила

$$U(t) = \begin{cases} 0, t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ \frac{2U_0}{T}t, t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \tag{16}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int\limits_{\frac{T}{2}}^{0} 0 \cdot \cos{(n\Omega t)}dt + \frac{2U_0}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} t \cdot \cos(n\Omega t)dt\right] = ... = \frac{U_0}{n^2\pi^2} \cdot (\cos(\pi n) - 1) \tag{17}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{0} 0 \cdot \sin(n\Omega t)dt + \frac{2U_0}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(n\Omega t)dt\right] = ... = \frac{U_0}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1} \tag{18}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int\limits_{\frac{T}{2}}^{0} 0 \cdot dt + \frac{2U_0}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} t\,dt\right] = ... = \frac{U_0}{2} \tag{19}$$

$$U(t) = \frac{U_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{U_0}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) \cdot \cos(n\Omega t) + (-1)^{n+1}\frac{U_0}{\pi n} \cdot \sin(n\Omega t)\right] \tag{20}$$

2.3. Меандр

$$b_n = \frac{4U_0}{T}\int\limits_{0}^{T/2} \sin(n\Omega t)dt = \frac{2U_0}{\pi n}(1 - \cos(\pi n)) \tag{21}$$

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{\pi n}(1 - (-1)^n) \cdot \sin(n\Omega t) \tag{22}$$

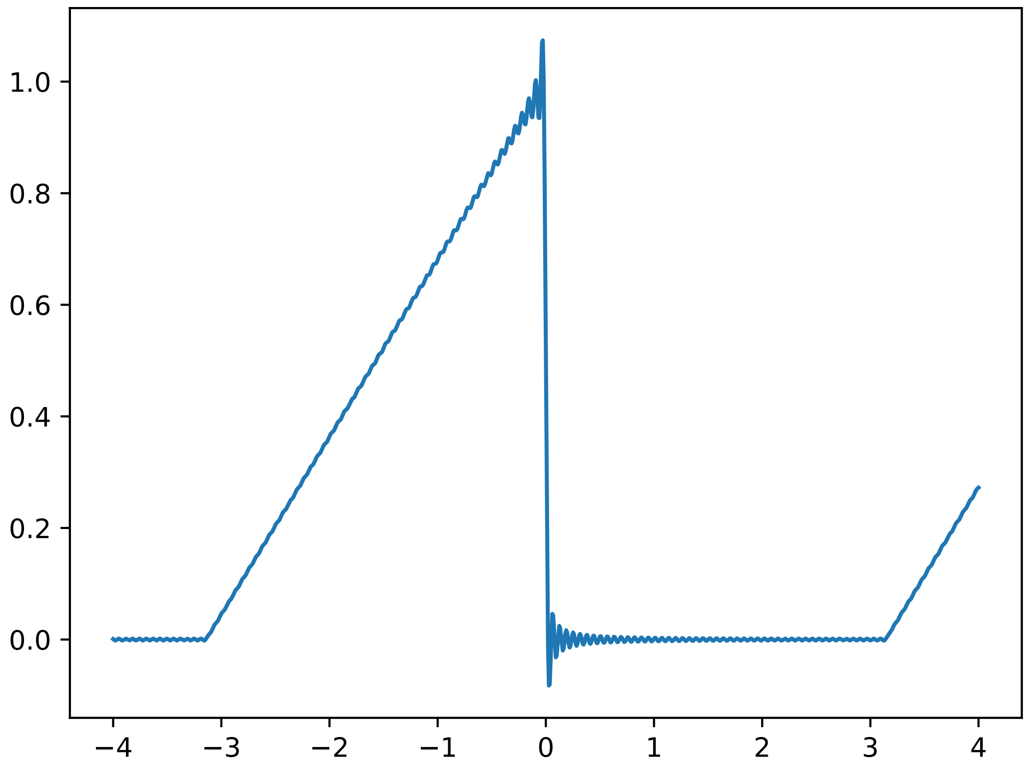

Рис. 2: Caption here

3. Заключение

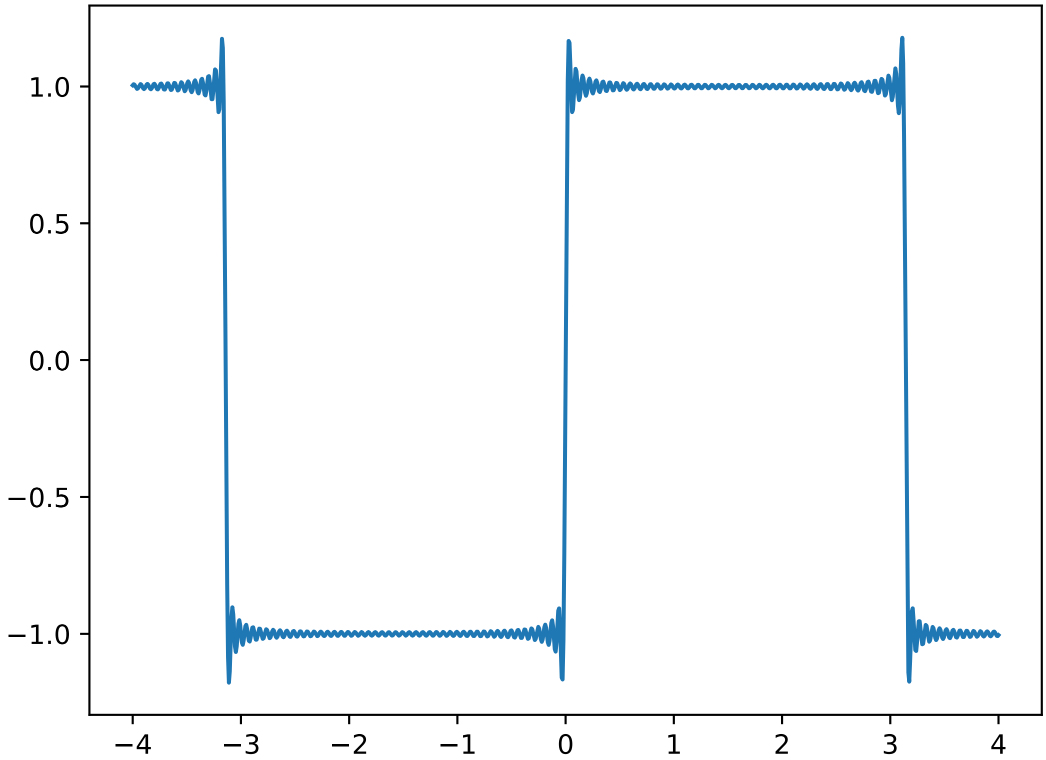

Рис. 3: Caption here