

Отчет по лабораторной работе №210
**Исследование линейных двухполюсников и
четырёхполюсников**

Выполнили студенты 420 группы
Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Сидоров Д.А.

Нижний Новгород, 2017

Содержание

1	Расчет цепей	2
1.1	Расчет импеданса некоторых линейных элементов	2
1.1.1	Импеданс конденсатора	2
1.1.2	Импеданс индуктивности	2
1.1.3	Импеданс резистора	3
2	Двухполосники. Расчет цепи и экспериментальные данные	3
2.1	Схема №1. Последовательная RC – цепочка	3
2.1.1	Импеданс	4
2.1.2	Разность фаз	4
2.1.3	Результаты эксперимента	4
2.2	Схема №2. Последовательная LC – цепочка	6
2.2.1	Импеданс	6
2.2.2	Разность фаз	7
2.2.3	Результаты эксперимента	7
2.3	Схема №3. Двухполосник $R[RC]$	9
2.3.1	Импеданс	9
2.3.2	Разность фаз	10
2.3.3	Результаты эксперимента	11
2.4	Схема №4. Двухполосник $R[RL]$	13
2.4.1	Импеданс	13
2.4.2	Разность фаз	14
2.4.3	Результаты эксперимента	14
3	Четырехполосники. Расчет цепи и экспериментальные данные	17
3.1	Схема №5. Простейший мостовой фазовращатель	17
3.2	Схема №6. Составной четырехполосник - фазовращатель	18

1. Расчет цепей

1.1. Расчет импеданса некоторых линейных элементов

Будем рассчитывать импеданс методом комплексных амплитуд. Полагая известным

$$\widehat{U} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_u)} = U_0 \exp(i\varphi_u) \exp(i\omega t) = \widehat{U}_0 \exp(i\omega t) \quad (1)$$

где $\widehat{U}_0 = U_0 \exp(i\varphi_u)$ – комплексная амплитуда напряжения, включающая в себя начальную фазу.

Будем предполагать, что мы нашли $\widehat{J} = \widehat{J}(\widehat{U})$, используя связь тока и напряжения:

$$\widehat{J} = \widehat{J}_0 \exp(i\omega t) \quad (2)$$

Возможен обратный ход – от известного тока через линейную связь перейти к напряжению.

Тогда импеданс по определению найдется как

$$\widehat{z} = \frac{\widehat{U}_0}{\widehat{J}_0} \quad (3)$$

1.1.1 Импеданс конденсатора

Рассчитаем импеданс конденсатора методом комплексных амплитуд.

$$\widehat{J} = C \frac{d\widehat{U}}{dt} \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$\widehat{J} = i\omega C U_0 \exp(i\varphi_u) \exp(i\omega t) \quad (5)$$

И комплексная амплитуда тока:

$$\widehat{J}_0 = i\omega C U_0 \exp(i\varphi_u) \quad (6)$$

Получаем комплексный импеданс конденсатора

$$\widehat{z}_C = \frac{\widehat{U}_0}{\widehat{J}_0} = \frac{U_0 \exp(i\varphi_u)}{U_0 i\omega C \exp(i\varphi_u)} = \frac{1}{i \cdot \omega C} \quad (7)$$

1.1.2 Импеданс индуктивности

В данном случае удобно считать известным ток.

$$\widehat{U} = L \frac{d\widehat{J}}{dt} \quad (8)$$

Отсюда получаем:

$$\hat{U} = i\omega L J_0 \exp(i\varphi_j) \exp(i\omega t) \quad (9)$$

И комплексная амплитуда напряжения:

$$\hat{U}_0 = i\omega L J_0 \exp(i\varphi_j) \quad (10)$$

Получаем комплексный импеданс конденсатора

$$\hat{z}_L = \frac{\hat{U}_0}{\hat{J}_0} = \frac{i\omega L J_0 \exp(i\varphi_j)}{J_0 \exp(i\varphi_j)} = i \cdot \omega L \quad (11)$$

1.1.3 Импеданс резистора

Пусть известен ток.

$$\hat{U} = \hat{J}R \quad (12)$$

Отсюда получаем:

$$\hat{U} = R J_0 \exp(i\varphi_j) \exp(i\omega t) \quad (13)$$

И комплексная амплитуда напряжения:

$$\hat{U}_0 = R J_0 \exp(i\varphi_j) \quad (14)$$

Получаем комплексный импеданс конденсатора

$$\hat{z}_R = \frac{\hat{U}_0}{\hat{J}_0} = \frac{R J_0 \exp(i\varphi_j)}{J_0 \exp(i\varphi_j)} = R \quad (15)$$

2. Двухполюсники. Расчет цепи и экспериментальные данные

2.1. Схема №1. Последовательная RC – цепочка

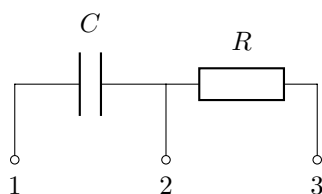


Рис. 1: Последовательная RC – цепочка

2.1.1 Импеданс

Импеданс RC – цепочки найдем, используя ранее вычисленные импедансы линейных элементов:

$$\hat{z} = \frac{1}{i \cdot \omega C} + R \quad (16)$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{R^2 \omega^2 C^2}{\omega^2 C^2}} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\omega C} \quad (17)$$

Экспериментально можно снимать зависимость $U_{13} \equiv U_{\text{вх}}$ и $U_{23} \equiv U_{\text{вых}}$ от частоты. Из закона Ома найдем тогда импеданс цепочки.

$$\hat{J}_{13} = \hat{J}_{23} \Rightarrow \frac{\hat{U}_{13}}{\hat{z}} = \frac{\hat{U}_{23}}{R} \quad (18)$$

Взяв по модулю, получим нужное соотношение:

$$z = \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}} R \quad (19)$$

2.1.2 Разность фаз

Также найдем зависимость разности фаз от частоты:

$$|\tan \varphi| = \left| \frac{\text{Im} \hat{z}}{\text{Re} \hat{z}} \right| = \left| \frac{-(\omega C)^{-1}}{R} \right| = \frac{1}{\omega RC} \quad (20)$$

2.1.3 Результаты эксперимента

Таблица 1: Результаты эксперимента для первой схемы

ν , Гц	ω , Гц	a	b	φ , рад	$\tan \varphi$	U_{in} , В	U_{out} , В	z , Ом
15	94	6.9	7.0	1.19	2.502	7.446	0.453	213 683
25	157	6.9	7.0	1.19	2.502	7.532	1.064	92 026
40	251	6.9	7.0	1.19	2.502	7.512	1.600	61 035
100	628	6.2	7.0	1.00	1.566	7.412	3.364	28 643
200	1 256	4.7	7.0	0.74	0.906	7.410	5.016	19 205
300	1 884	3.7	7.0	0.56	0.623	7.320	5.909	16 104
400	2 512	3.0	7.0	0.44	0.474	7.270	6.297	15 009
500	3 140	2.5	7.0	0.37	0.382	7.236	6.536	14 392
1 000	6 280	1.3	7.0	0.19	0.189	7.300	7.030	13 499
2 000	12 560	0.7	7.0	0.10	0.101	7.282	7.160	13 221
3 000	18 840	0.4	7.0	0.06	0.057	7.270	7.175	13 172

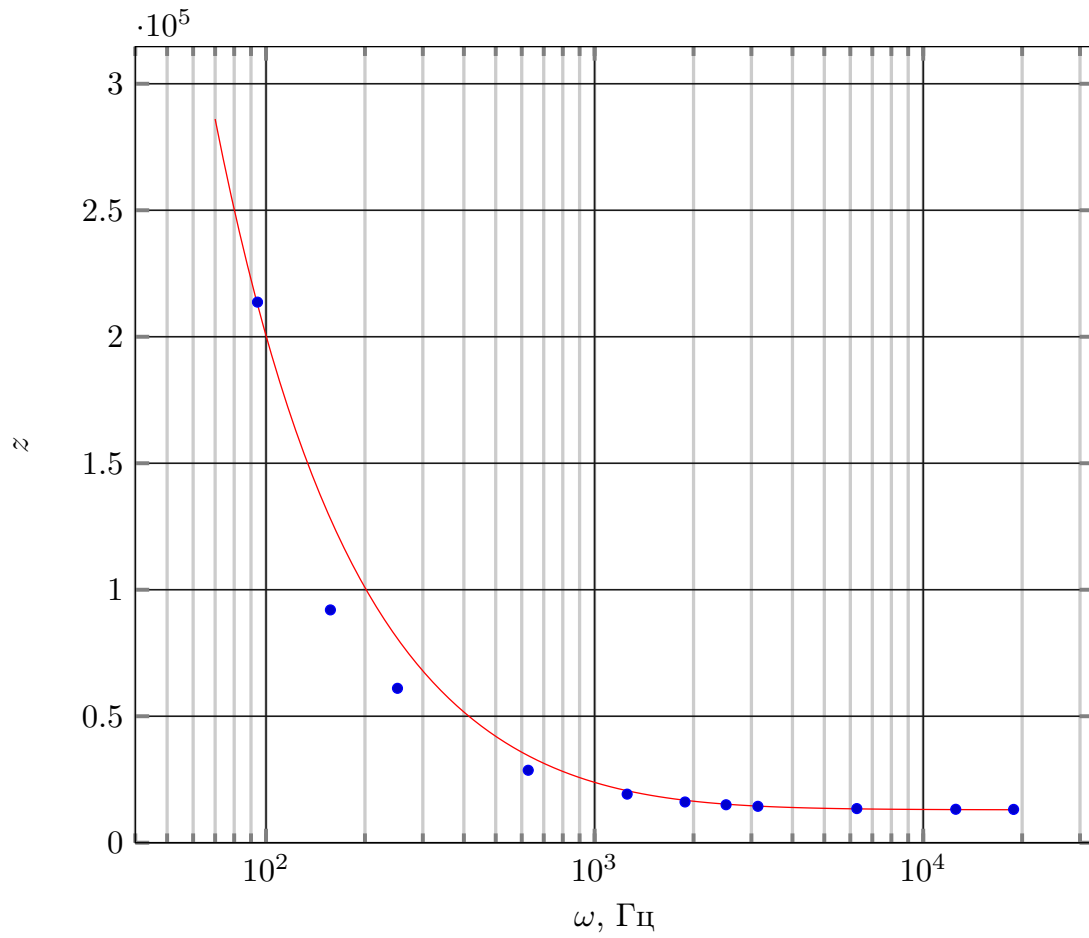
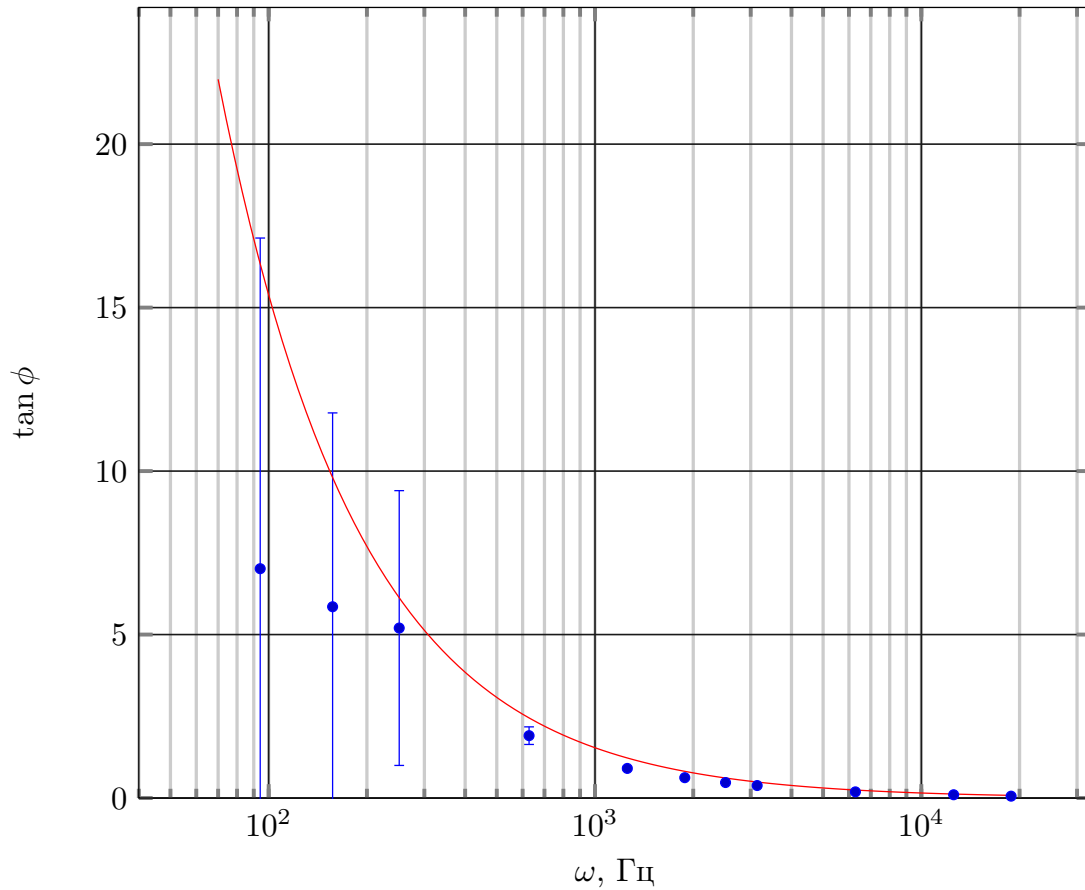
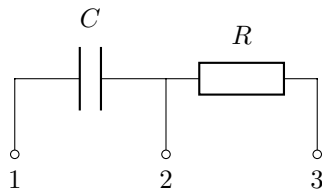


Рис. 2: Зависимость $z(\omega)$ для последовательной RC -цепочки

Рис. 3: Зависимость $\tan \varphi(\omega)$ для последовательной RC -цепочки

2.2. Схема №2. Последовательная LC – цепочка

Рис. 4: Последовательная LC – цепочка

2.2.1 Импеданс

$$\widehat{z} = i\omega L + R \quad (21)$$

$$z = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} \quad (22)$$

Очевидно, что аналогично последовательной RC -цепочке

$$z = \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}} R \quad (23)$$

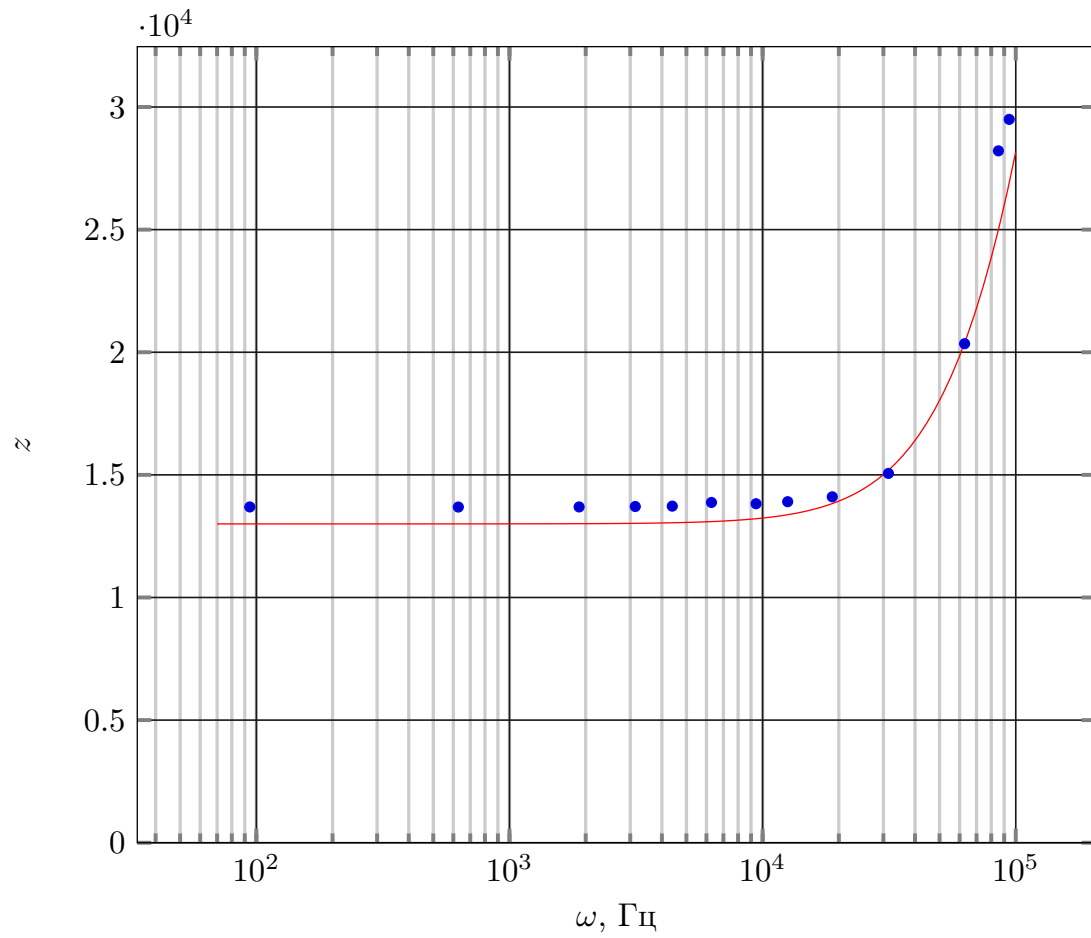
2.2.2 Разность фаз

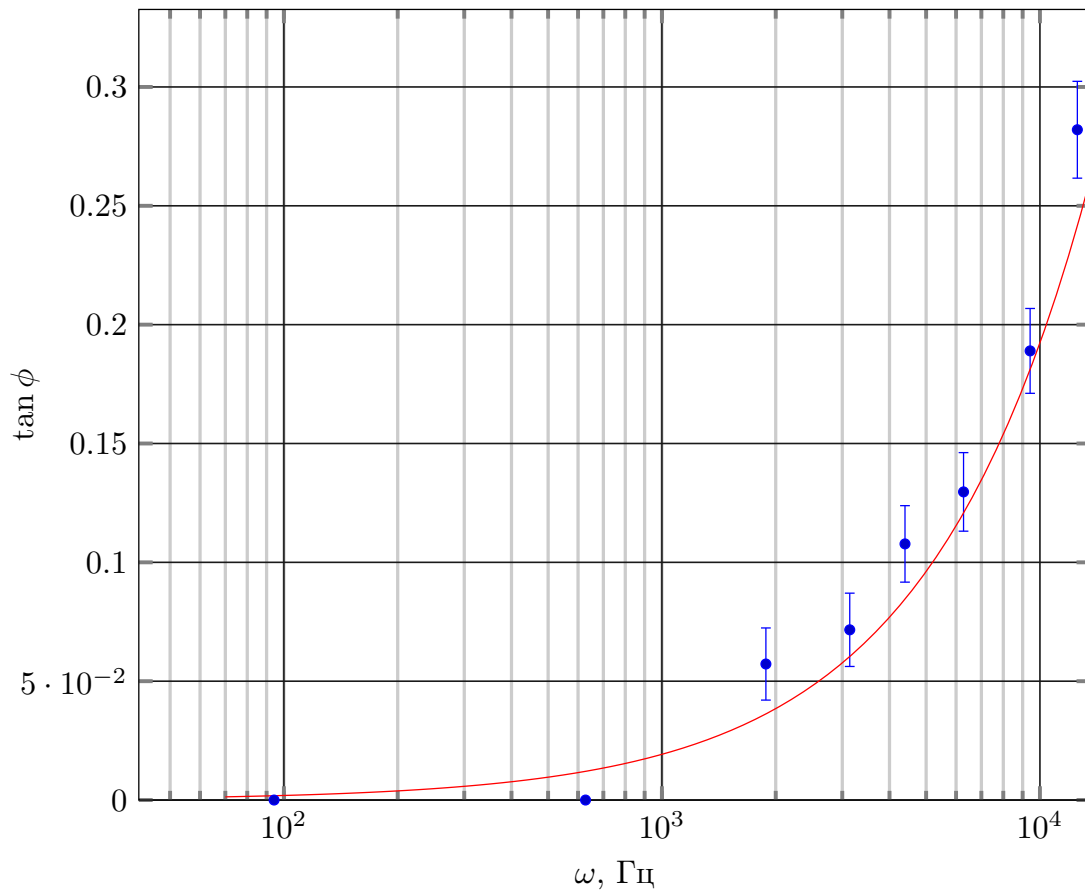
$$|\tan \varphi| = \left| \frac{\operatorname{Im} \widehat{z}}{\operatorname{Re} \widehat{z}} \right| = \left| \frac{\omega L}{R} \right| = \frac{\omega L}{R} \quad (24)$$

2.2.3 Результаты эксперимента

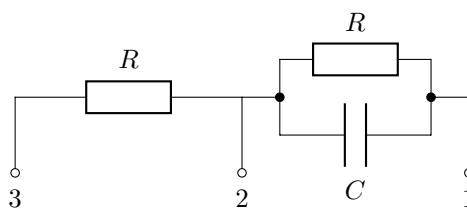
Таблица 2: Результаты эксперимента для второй схемы

ν , Гц	ω , Гц	a	b	φ , рад	$\tan \varphi$	U_{in} , В	U_{in} , В	z , Ом
15	94	0.0	7.0	0.00	0.000	6.985	6.632	13 692
100	628	0.0	7.0	0.00	0.000	6.964	6.614	13 688
300	1 884	0.4	7.0	0.06	0.057	7.021	6.666	13 692
500	3 140	0.5	7.0	0.07	0.072	6.980	6.619	13 709
700	4 396	0.8	7.0	0.11	0.108	6.951	6.584	13 725
1 000	6 280	0.9	7.0	0.13	0.130	6.990	6.549	13 875
1 500	9 420	1.3	7.0	0.19	0.189	7.075	6.654	13 823
2 000	12 560	1.9	7.0	0.27	0.282	7.077	6.616	13 906
3 000	18 840	2.7	7.0	0.40	0.418	7.033	6.482	14 105
5 000	31 400	4.0	7.0	0.61	0.696	7.079	6.111	15 059
10 000	62 800	6.2	7.0	1.09	1.908	7.164	4.577	20 348
15 000	94 200	6.8	7.0	1.33	4.093	6.892	3.038	29 496
13 600	85 408	6.9	7.0	1.40	5.853	7.317	3.372	28 212

Рис. 5: Зависимость $z(\omega)$ для последовательной LC -цепочки

Рис. 6: Зависимость $\tan \varphi(\omega)$ для последовательной LC -цепочки

2.3. Схема №3. Двухполюсник $R[RC]$

Рис. 7: Двухполюсник $R[RC]$

2.3.1 Импеданс

Сначала рассчитаем импеданс параллельно соединенных конденсатора и резистора R

$$\frac{1}{\widehat{z}_0} = \frac{1}{R} + i\omega C \quad (25)$$

$$\widehat{z}_0 = \frac{R}{1 + i\omega CR} \quad (26)$$

Комплексный импеданс всей схемы будет равен:

$$\widehat{z} = \widehat{z}_0 + R = \frac{R}{1 + i\omega RC} + R = \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} + R \quad (27)$$

$$z = \sqrt{\text{Im}^2 \widehat{z} + \text{Re}^2 \widehat{z}} = R \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega C}{1 + (\omega RC)^2}\right)^2} \quad (28)$$

2.3.2 Разность фаз

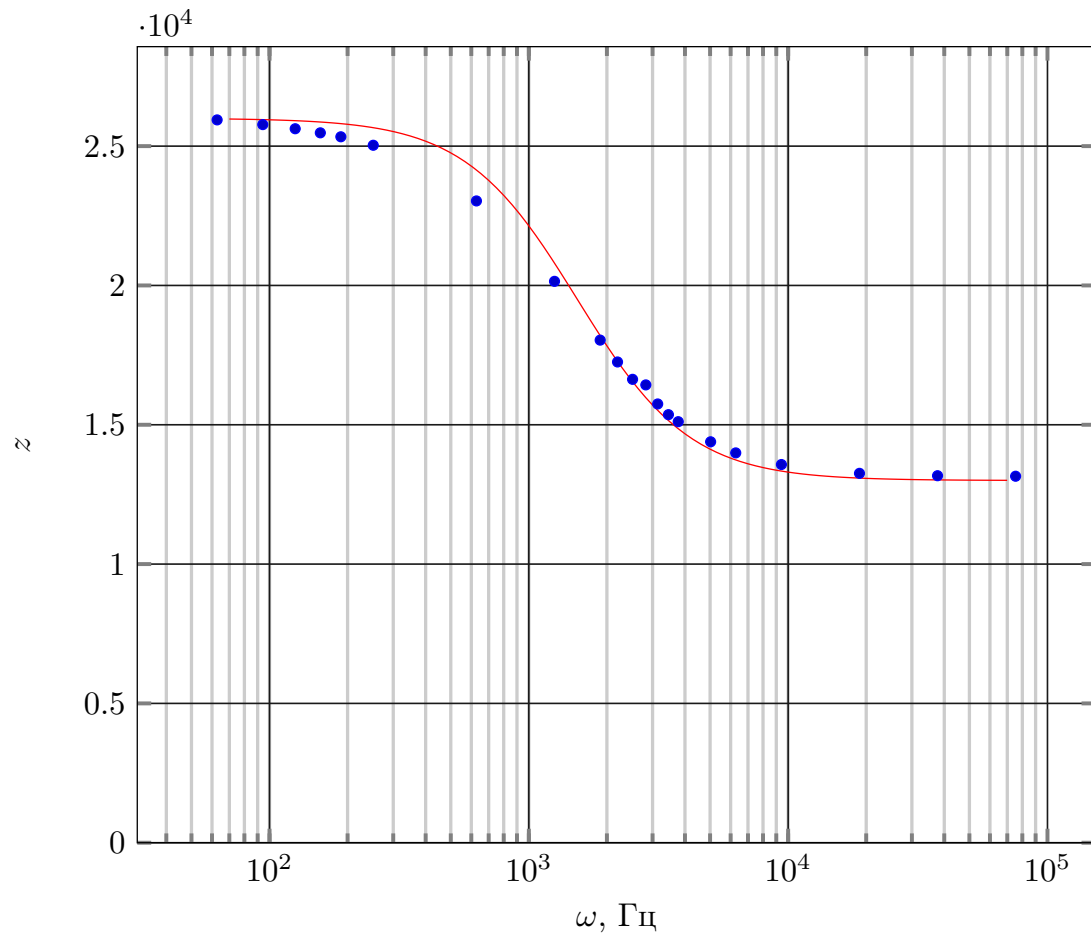
$$\tan \varphi = \frac{\text{Im} \widehat{z}}{\text{Re} \widehat{z}} = \frac{-\frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}}{\frac{R + R + R(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{-\omega R^2 C}{R + R + R(\omega RC)^2} = -\frac{\omega RC}{2 + (\omega RC)^2} \quad (29)$$

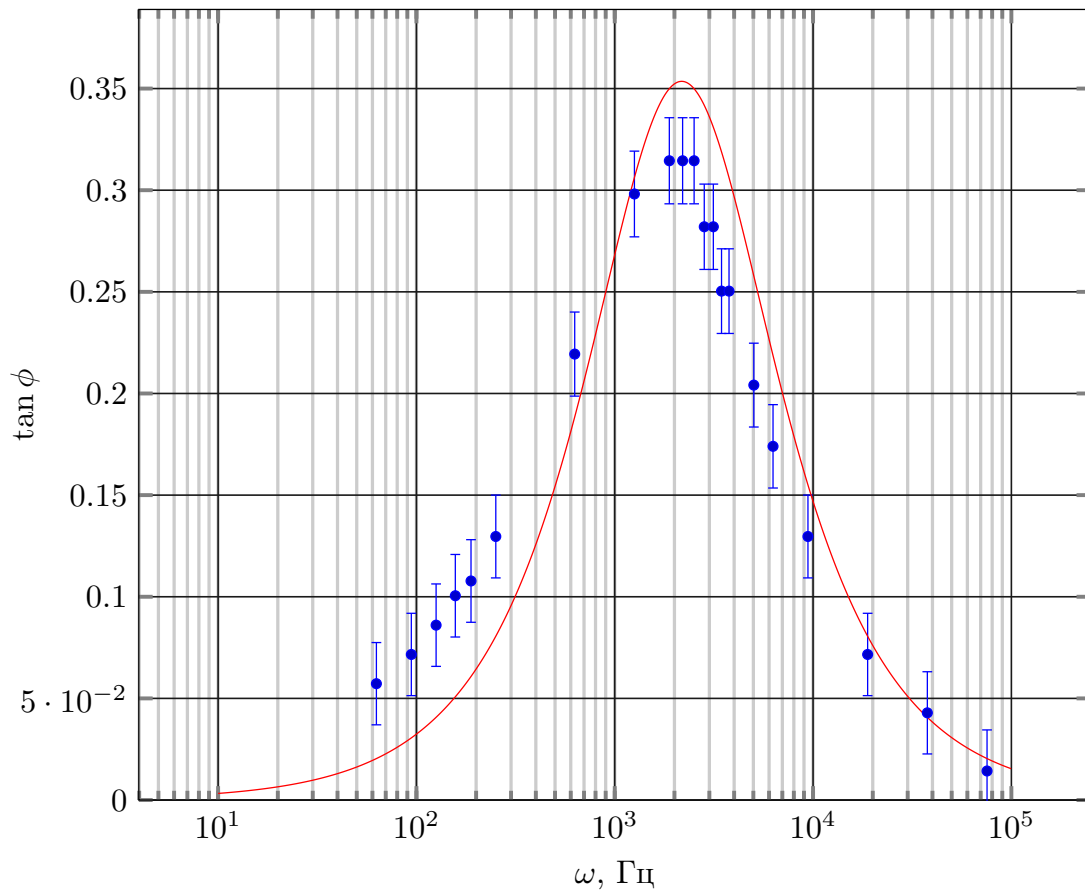
Из уравнения видно, что на малых частотах $z \approx 2R$, а при высоких $z \approx R$.

2.3.3 Результаты эксперимента

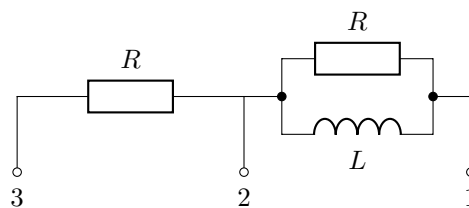
Таблица 3: Результаты эксперимента для третьей схемы

ν , Гц	ω , Гц	a	b	φ , рад	$\tan \varphi$	U_{in} , В	U_{in} , В	z , Ом
10	63	0.4	7.0	0.06	0.057	7.060	3.538	25 941
15	94	0.5	7.0	0.07	0.072	7.111	3.587	25 772
20	126	0.6	7.0	0.09	0.086	7.126	3.615	25 624
25	157	0.7	7.0	0.10	0.101	7.131	3.639	25 477
30	188	0.8	7.0	0.11	0.108	7.127	3.657	25 335
40	251	0.9	7.0	0.13	0.130	7.120	3.698	25 031
100	628	1.5	7.0	0.22	0.219	7.066	3.988	23 033
200	1 256	2.0	7.0	0.29	0.298	7.129	4.600	20 147
300	1 884	2.1	7.0	0.30	0.314	7.086	5.107	18 038
400	2 512	2.1	7.0	0.30	0.314	7.045	5.507	16 631
350	2 198	2.1	7.0	0.30	0.314	7.058	5.318	17 254
450	2 826	1.9	7.0	0.27	0.282	7.026	5.559	16 431
500	3 140	1.9	7.0	0.27	0.282	7.012	5.789	15 747
550	3 454	1.7	7.0	0.25	0.250	6.991	5.916	15 362
600	3 768	1.7	7.0	0.25	0.250	6.980	6.005	15 111
800	5 024	1.4	7.0	0.20	0.204	6.942	6.272	14 389
1 000	6 280	1.2	7.0	0.17	0.174	6.922	6.432	13 990
1 500	9 420	0.9	7.0	0.13	0.130	7.059	6.761	13 573
3 000	18 840	0.5	7.0	0.07	0.072	7.031	6.895	13 256
6 000	37 680	0.3	7.0	0.04	0.043	6.996	6.905	13 171
12 000	75 360	0.1	7.0	0.01	0.014	7.060	6.978	13 153

Рис. 8: Зависимость $z(\omega)$ для $R[RC]$ -двухполюсника

Рис. 9: Зависимость $\tan \varphi(\omega)$ для $R[RC]$ -двухполюсника

2.4. Схема №4. Двухполюсник $R[RL]$

Рис. 10: Двухполюсник $R[RL]$

2.4.1 Импеданс

Рассчитаем импеданс параллельно соединенных катушки и резистора R

$$\frac{1}{\hat{z}_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{R + i\omega L}{iR\omega L} = \frac{\omega L - iR}{\omega RL} \quad (30)$$

$$\hat{z}_0 = \frac{\omega RL(\omega L + iR)}{(\omega L - iR)(\omega L + iR)} = \frac{\omega^2 L^2 R + i\omega LR^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \quad (31)$$

А импеданс всей схемы:

$$\widehat{z} = \left(\frac{2\omega^2 L^2 R + R^3}{\omega^2 L^2 + R^2} \right) + i \left(\frac{\omega L R^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \right) \quad (32)$$

$$z = \sqrt{\text{Im}^2 \widehat{z} + \text{Re}^2 \widehat{z}} = \frac{1}{\omega^2 L^2 + R^2} \sqrt{(2\omega^2 L^2 R + R^3)^2 + (\omega L R^2)^2} \quad (33)$$

При больших частотах можно пренебречь вторым слагаемым под корнем и сопротивлением в суммах, тогда видно, что на таких частотах $z \approx 2R$.

На малых частотах $\omega \approx 0$ предел даёт значение импеданса R .

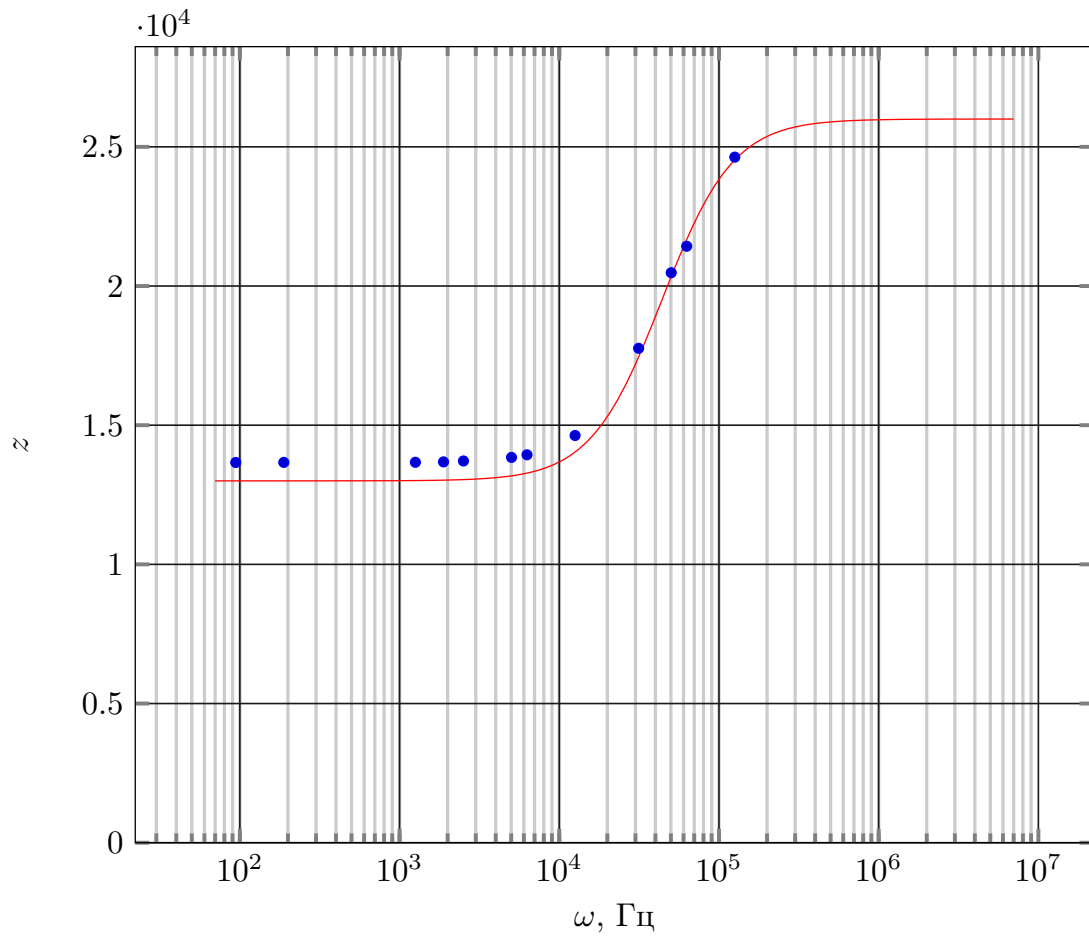
2.4.2 Разность фаз

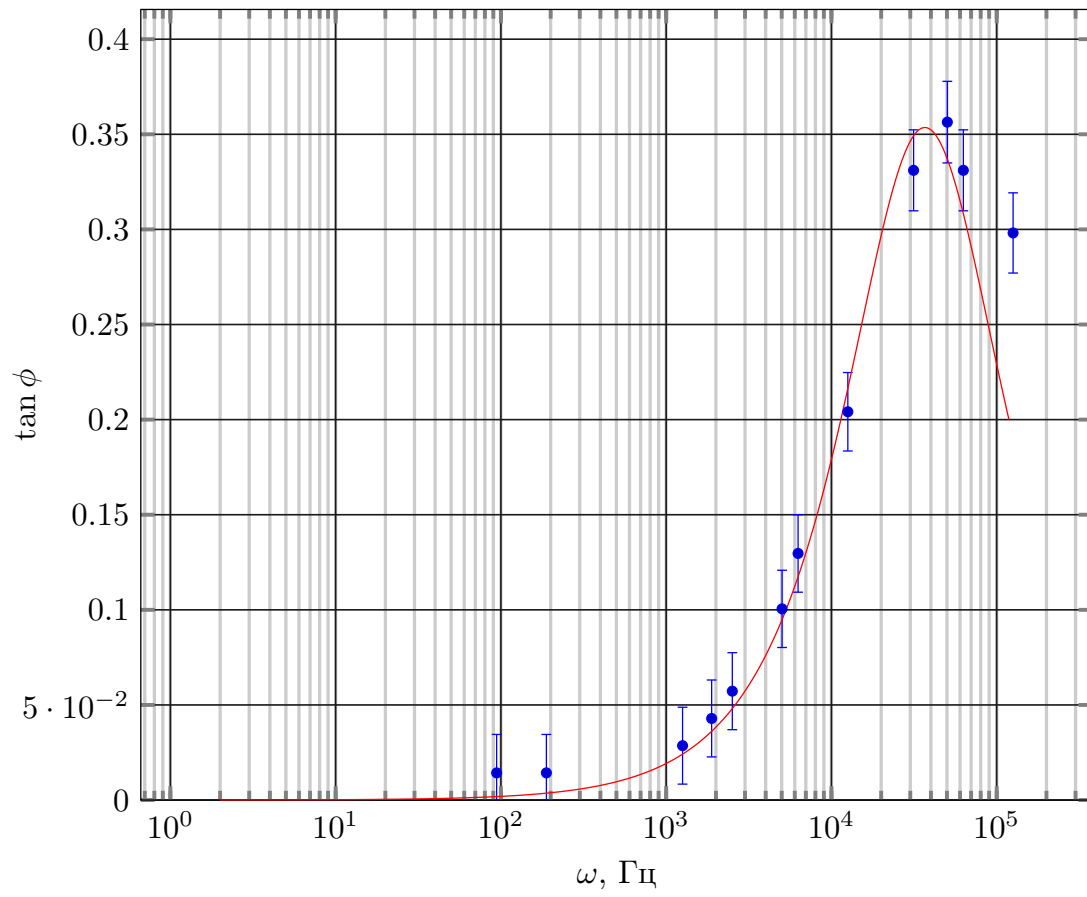
$$\tan \varphi = \frac{\text{Im} \widehat{z}}{\text{Re} \widehat{z}} = \frac{\omega L R^2}{2\omega^2 L^2 R + R^3} = \frac{\omega L R}{2\omega^2 L^2 + R^2} \quad (34)$$

2.4.3 Результаты эксперимента

Таблица 4: Результаты эксперимента для четвёртой схемы

ν , Гц	ω , Гц	a	b	φ , рад	$\tan \varphi$	U_{in} , В	U_{out} , В	z , Ом
15	94	0.1	7.0	0.01	0.014	6.603	6.284	13 660
30	188	0.1	7.0	0.01	0.014	6.626	6.304	13 664
200	1 256	0.2	7.0	0.03	0.029	6.657	6.332	13 667
300	1 884	0.3	7.0	0.04	0.043	6.642	6.311	13 682
400	2 512	0.4	7.0	0.06	0.057	6.624	6.279	13 714
800	5 024	0.7	7.0	0.10	0.101	6.575	6.175	13 842
1 000	6 280	0.9	7.0	0.13	0.130	6.564	6.123	13 936
2 000	12 560	1.4	7.0	0.20	0.204	6.707	5.960	14 629
5 000	31 400	2.2	7.0	0.32	0.331	6.718	4.917	17 762
8 000	50 240	2.4	7.0	0.34	0.356	6.729	4.272	20 478
10 000	62 800	2.2	7.0	0.32	0.331	6.736	4.086	21 429
20 000	125 600	2.0	7.0	0.29	0.298	6.816	3.598	24 630

Рис. 11: Зависимость $z(\omega)$ для $R[RL]$ -двухполюсника

Рис. 12: Зависимость $\tan \varphi(\omega)$ для $R[RL]$ -двухполосника

3. Четырехполюсники. Расчет цепи и экспериментальные данные

3.1. Схема №5. Простейший мостовой фазовращатель

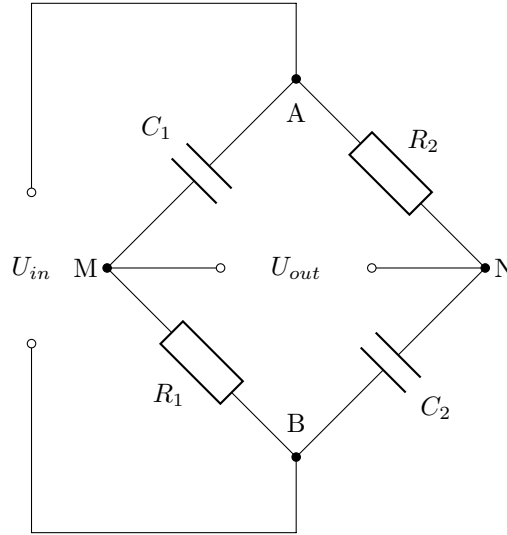


Рис. 13: Принципиальная схема фазовращателя

Запишем ток через левую ветвь:

$$\hat{J}_{left} \equiv \hat{J}_{R_1} = \frac{\hat{U}_{in}}{R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}} \quad (35)$$

Аналогично через правую:

$$\hat{J}_{right} \equiv \hat{J}_{R_2} = \frac{\hat{U}_{in}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}} \quad (36)$$

Тогда

$$\hat{U}_{out} \equiv \hat{U}_{MN} = -\hat{U}_{AM} + \hat{U}_{AN} = -\hat{J}_{left} \cdot \frac{1}{i\omega C_1} + \hat{J}_{right} \cdot R_2 \quad (37)$$

$$\hat{U}_{out} = \hat{U}_{in} \left(\frac{R_2}{R_2 + (i\omega C_2)^{-1}} - \frac{1}{i\omega C_1} \frac{1}{R_1 + (i\omega C_1)^{-1}} \right) \quad (38)$$

$$\hat{K} = \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}} = \frac{i\omega C_2 R_2}{i\omega C_2 R_2 + 1} - \frac{1}{i\omega C_1 R_1 + 1} \quad (39)$$

Обозначим $\Omega_1 = \omega C_1 R_1$, $\Omega_2 = \omega C_2 R_2$:

$$\hat{K} = \frac{i\Omega_2}{i\Omega_2 + 1} - \frac{1}{i\Omega_1 + 1} = \frac{i\Omega_2(1 - i\Omega_2)}{\Omega_2^2 + 1} + \frac{i\Omega_1 - 1}{\Omega_1^2 + 1} \quad (40)$$

$$\hat{K} = \left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 + 1} - \frac{1}{\Omega_1^2 + 1} \right) + i \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_2^2 + 1} + \frac{\Omega_1}{\Omega_1^2 + 1} \right) \quad (41)$$

Отсюда

$$K = \sqrt{\left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 + 1} - \frac{1}{\Omega_1^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_2^2 + 1} + \frac{\Omega_1}{\Omega_1^2 + 1}\right)^2} \quad (42)$$

При $\Omega_1 = \Omega_2$ подстановка дает $K \equiv 1$.

$$\tan \varphi = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_2^2 + 1} + \frac{\Omega_1}{\Omega_1^2 + 1}\right) \cdot \left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 + 1} - \frac{1}{\Omega_1^2 + 1}\right)^{-1} \quad (43)$$

При $\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega$

$$\tan \varphi = \frac{2\Omega}{1 - \Omega^2} \quad (44)$$

Можно заметить, что это формула тангенса половинного угла:

$$\tan \varphi = \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (45)$$

Отсюда

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \Omega = \omega RC \quad (46)$$

Так как $\arctan \Omega$ может принимать значения только от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то

$$0 \leq \varphi < \pi \quad (47)$$

3.2. Схема №6. Составной четырехполюсник - фазовращатель

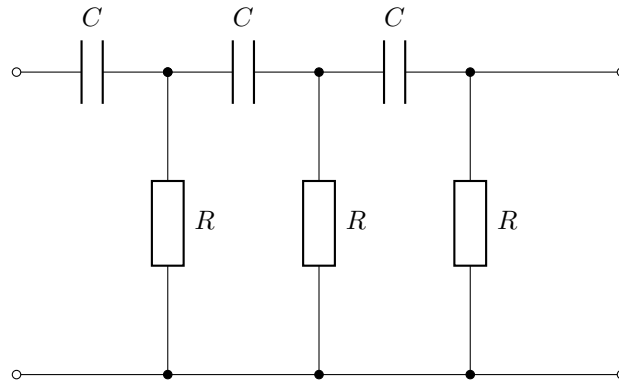


Рис. 14: Принципиальная схема фазовращателя

$$z = \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}}}}} = \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{i\omega C}{i\Omega + 1}}}} \quad (48)$$

$$= \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + \frac{R(i\Omega + 1)}{2i\Omega + 1}}} = \quad (49)$$

$$= \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{i\omega C - 2\Omega\omega C}{3i\Omega - \Omega^2}} = \quad (50)$$

$$= \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{3i\Omega - \Omega^2}{\dots} + \frac{i\Omega - 2\Omega^2}{R(3i\Omega - \Omega^2)}} = \quad (51)$$

$$= \frac{1}{i\omega C} + \frac{R(3i\Omega - \Omega^2)}{4i\Omega - 3\Omega^2} = \quad (52)$$

$$= \frac{4i\Omega - 3\Omega^2}{\dots} + \frac{i\Omega(3i\Omega - \Omega^2)}{-4\Omega\omega C - 3i\Omega^2\omega C} = \quad (53)$$

$$= \frac{4i\Omega - 3\Omega^2}{\dots} + \frac{-3\Omega^2 - i\Omega^3}{-4\Omega\omega C - 3i\Omega^2\omega C} = \quad (54)$$

$$= R \frac{i\Omega^3 + 6\Omega^2 - 4i\Omega}{4\Omega^2 + 3i\Omega^3} = \quad (55)$$

$$= R \frac{(i\Omega^3 + 6\Omega^2 - 4i\Omega)(4\Omega^2 - 3i\Omega^3)}{16\Omega^4 + 9\Omega^6} = R \frac{-16i\Omega^3 + 12\Omega^4 - 14i\Omega^5 + 3\Omega^6}{16\Omega^4 + 9\Omega^6} = \quad (56)$$

$$= \left(R \frac{12\Omega^4 + 3\Omega^6}{16\Omega^4 + 9\Omega^6} \right) - i \left(R \frac{16\Omega^3 + 14\Omega^5}{16\Omega^4 + 9\Omega^6} \right) \quad (57)$$

Будем рассматривать данный четырехполюсник как составной из трех следующего вида:

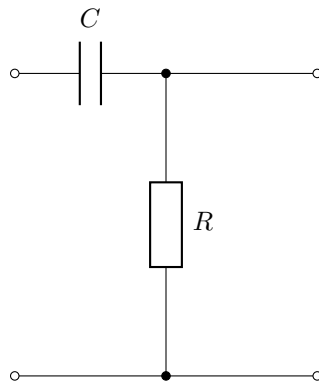


Рис. 15: Простой четырехполюсник

Здесь найдем \hat{K}_1 .

$$\hat{U}_{out} \equiv \hat{U}_R = \hat{J} \cdot R = \frac{\hat{U}_{in}}{\hat{z}} R \quad (58)$$

$$\hat{K}_1 = \frac{R}{\hat{z}} = \frac{R}{R + 1/(i\omega C)} = \frac{i\Omega}{1 + i\Omega} = \frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} + i \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \quad (59)$$

Здесь

$$K_1 = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (60)$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{\Omega} \quad (61)$$

Очевидно, что при соединении трех таких четырехполюсников

$$\hat{K} = \hat{K}_1^3 = K_1^3 \exp(3i\varphi_1) \quad (62)$$