

Отчет по лабораторной работе №1

Оценивание параметров случайного процесса

Работу выполнили студенты
440 группы радиофизического факультета
Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В.

Нижний Новгород, 3 декабря – 5 декабря 2019 г.

Содержание

Введение	2
1. Алгоритм оценки среднего значения	4
2. Погрешность оценки	5
3. Оценка среднего значения и погрешности оценки среднего при помощи спектральной плотности мощности	7
4. Доверительный интервал и доверительная вероятность	8
5. Практическая часть	9
5.1. Вид реализации случайных процессов и их спектров	9
5.2. Поведение оценки среднего в зависимости от числа усредняе- мых отсчетов	11
5.3. Изучение зависимости σ – среднеквадратичного отклонения оцен- ки среднего от числа усреднений в оценке	13
5.4. Изучение зависимости σ – среднеквадратичного отклонения оцен- ки среднего от времени между отсчетами Δt	15
5.5. Определение оценок среднего значения и среднеквадратическо- го отклонения по спектральной плотности мощности (СПМ) процесса	16
5.5.1. Определение параметров исходного процесса по его СПМ:	16
5.5.2. Определение параметров усредненного процесса по его СПМ:	17
5.6. Описание погрешности и надежности оценки среднего значения через доверительный интервал и доверительную вероятность . .	19
5.6.1. Анализ гистограммы	19
5.6.2. Задание 6.2	21
6. Вывод	24

Введение

В настоящей работе исследуются продольные колебания стержней и поперечные колебания пластин с помощью резонансного метода – возбуждаются колебания на резонансных частотах. Под пластиной понимается упругое трехмерное тело, один размер которого много меньше двух других, а под стержнем – тело, у которого один размер больше двух других.

В эксперименте используются три стержня (из алюминия, стали и оргстекла, все длины 394 мм) и две металлические пластины (толщины 0.63 мм и 1.16 мм)

Установка с стержнями. Стержни закрепляются в неподвижном штативе, при этом точка крепления посередине стержня, а к свободным торцам стержня на малом расстоянии поднесены электромагнитные вибраторы – приемный и излучающий. Меняя частоту генератора, подключенного к излучающему вибратору, и измеряя амплитуду на приемном можно получить резонансные характеристики системы.

Установка с пластинами. Металлическая пластина закреплена в станке, в котором размещен электромагнитный возбудитель колебаний. Возбудитель можно перемещать вдоль диаметра пластинки и наблюдать при этом различные типы колебаний. На пластине рассыпается тонкий слой песка, который при резонансе собирается в узлах колебаний пластины. Полученные картины называются картинами Хладни и позволяют определить конкретную моду колебаний.

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с оценкой параметров случайных процессов, на примере оценки его среднего значения (математического ожидания). Это вполне оправданно, поскольку, во-первых, все принципиальные вопросы, возникающие при оценке параметров случайных процессов, проявляются уже в этой задаче. Во-вторых, при желании оценить другие параметры процесса чаще всего поступают следующим образом – подвергают случайный процесс такому преобразованию, при котором информация об интересующем параметре исходного процесса переходит в значение математического ожидания процесса преобразованного, и таким образом вопрос оказывается сведенным к оценке среднего значения преобразованного процесса. Вопросы, связанные с оценкой параметров эргодических случайных процессов достаточно подробно рассмотрены в учебном пособии, с которым необходимо познакомиться перед выполнением настоящей работы.

При оценке того или иного параметра случайного процесса следует:

- 1) Выбрать алгоритм оценки параметра (записать формулу, которая показывает, какие действия нужно производить с числами x_1, x_2, \dots, x_n – результатами измерений), чтобы получить число, принимаемое нами за оценку интересующего нас параметра.
- 2) Исследовать выбранный алгоритм на предмет качества оценок. Качество оценки характеризуют ее **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**:
 - а) Оценка называется **несмещенной**, если среднее статистическое её равно оцениваемой величине: $\langle \tilde{a} \rangle = a$, где a – измеряемый параметр случайного процесса, – его оценка¹. Несмещенность оценки эквивалентна отсутствию систематической ошибки при измерении как в сторону ее завышения, так и в сторону ее занижения.
 - б) Оценка называется состоятельной, если при неограниченном росте объёма экспериментального материала дисперсия оценки стремится к нулю. При этом вероятность сколь угодно малых отклонений оценки от оцениваемой величины тоже стремится к нулю. Таким образом, если оценка состоятельна, то можно быть уверенным, что величина ошибки измерения не превосходит допустимую при достаточно большом, но ограниченном объеме статистического материала (т.е. достаточно большом времени измерения).
 - в) Если при измерении одной и той же характеристики случайного процесса можно пользоваться различными оценками, то эффективной называют оценку с наименьшей дисперсией. На практике не всегда удаётся удовлетворить всем этим требованиям. Например, может оказаться, что эффективная оценка существует, но формулы для её вычисления слишком сложны. Тогда приходится довольствоваться другой оценкой с несколько большей дисперсией. Иногда, в целях упрощения расчетов, применяются смещенные оценки. Но всегда выбору оценки должно предшествовать критическое изучение ее свойств.
- 3) Определить погрешность оценки параметра.

¹Оценка неизвестного параметра a одним числом называется точечной

1. Алгоритм оценки среднего значения

Пусть мы имеем дело со случайной величиной X и хотим найти её математическое ожидание. Алгоритм оценки среднего значения выбирается в виде:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ для случайной величины),} \quad (1)$$

где x_i, x_k – результаты независимых измерений случайной величины;

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_i) \text{ (для случайного процесса),} \quad (2)$$

где $x_i(t_i)$ – дискретные выборки значений процесса $x(t)$, взятые в дискретные, равноотстоящие на величину Δt , моменты времени ($\Delta t = t_{i+1} - t_i$).

Этот алгоритм оценки естественен, поскольку известно, что $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ – среднее арифметическое n независимых измерений случайной величины – сходится по вероятности к среднему значению $\langle x \rangle^2$ (математическому ожиданию) при $n \rightarrow \infty$.

Нетрудно показать, что оценки среднего (1), (2) являются **несмещенными** (т.е. не содержат систематической ошибки). Действительно, проводя статистическое усреднение левых и правых частей и учитывая эргодичность изучаемого случайного процесса, получаем $\langle \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle$, т.е. статистическое среднее оценок равно среднему статистическому самого процесса.

При получении оценки среднего значения стационарного эргодического процесса согласно (2), усредняются дискретные выборочные значения процесса, отстоящие во времени на Δt . Возникает закономерный вопрос, не проигрываем ли мы в чем то существенном, не используя информацию о процессе, заключающуюся в промежуточных значениях процесса, лежащих между дискретными отсчетами. Может быть, оценка среднего существенно улучшится, если взять ее в виде непрерывного усреднения реализации процесса на некотором временном интервале, длительностью T , примыкающем к текущему моменту времени t :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3)$$

В связи с тем, что при использовании численных методов сам интеграл в (3) вычисляется приближенно через значения подынтегральной функции в

отдельных дискретных точках. Оценку (3) можно рассматривать как частный случай оценки (2), если отсчеты берутся достаточно часто (если интервал между отсчетами существенно меньше времени корреляции процесса $\Delta t \ll \tau_{\text{кор}}$). Тем не менее, имеет смысл рассмотреть аналитически [1] оценку среднего в виде (1.3) и убедиться в том, что величина погрешности оценки определяется лишь числом некоррелированных отсчетов содержащихся в интервале усреднения T . Другими словами, если в оценке (1) взято n некоррелированных отсчетов, а в оценке (3) интервал усреднения T выбран равным $T = n\tau_{\text{кор}}$, оценки (1) и (3) оказываются эквивалентными по точности при $n \gg 1$. Следует проследить за выполнением этого утверждения при выполнении заданий №3,5.

2. Погрешность оценки

На практике важно не просто получить оценку параметра, но и оценить, как близко значение оценки к истинному значению параметра. Другими словами, необходимо оценить погрешность оценки. Поскольку конкретное значение оценки параметра случайно (оно определяется конкретной выборкой x_1, x_2, \dots, x_n), то и ошибка конкретной оценки тоже случайна. Поэтому при рассмотрении погрешности оценки имеется в виду рассмотреть ее поведение на ансамбле независимых замеров оценки.

За погрешность оценки принимаем среднеквадратическое отклонение оценки от среднего значения (корень квадратный из дисперсии оценки), т.е.

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} = \sqrt{\langle(\tilde{x} - \langle x \rangle)^2\rangle}$$

или средний квадрат отклонения от истинного среднего. С.К.О. оценки показывают в каком интервале лежат оценки среднего.

В предельном случае при $n = 1$, (производится **однократный отсчёт**), и результат x_1 принимается за оценку среднего), ошибка конкретной оценки ($x_1 - \langle x \rangle$) естественно будет случайной, а погрешность оценки:

$$\sqrt{\langle(x_1 - \langle x \rangle)^2\rangle} = \sqrt{D[x]} = \sigma_x \quad (4)$$

Из (4) видно, что мерой погрешности оценки при $n = 1$ является среднеквадратическое отклонение (СКО) исследуемой случайной величины (корень квадратный из дисперсии исходного процесса в случае (1)).

Известно, что при усреднении « n » независимых одинаково распределенных слагаемых дисперсия уменьшается в n раз

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{D[x]}{n}} \quad (5)$$

Если же оценивается среднее значение эргодического процесса, согласно алгоритму (2), дисперсию оценки $D[\tilde{x}] = \langle (\tilde{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle$ можно записать [1] в виде

$$D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n B_x(t_i - t_j), \quad (6)$$

где $B_x(t_i - t_j) = \langle (x_i - \langle x \rangle)(x_j - \langle x \rangle) \rangle$ – функция ковариации процесса $x(t)$, причем $D[x]$ – дисперсия процесса $x(t)$ – равна $D[x] = B_x(0)$.

При $n \rightarrow \infty$ дисперсия оценки стремится к нулю $D[\tilde{x}] \rightarrow 0$, т.е. оценка является **состоятельной**.

Из (6) видно, что величина $D[\tilde{x}]$ дисперсии оценки (2) существенно зависит от степени коррелированности отсчетов, а значит от того, насколько велик интервал между отсчетами Δt по сравнению с $\tau_{\text{кор}}$ – временем корреляции процесса ($t_{\text{кор}}$ – эффективная протяженность $B_x(\tau)$ – функции ковариации процесса $x(t)$).

Здесь есть две предельные ситуации:

- 1) Все n отсчетов укладываются на времени, существенно меньшем времени корреляции процесса ($n \cdot \Delta t \ll \tau_{\text{кор}}$), тогда дисперсия оценки равна дисперсии исходного процесса $D[\tilde{x}] = D[x]$. В этом случае « n » отсчетов по влиянию на точность оценки эквивалентны одному отсчету.
- 2) Если же $\Delta t \geq \tau_{\text{кор}}$, то можно принять и дисперсия оценки (2) оказывается равной, т.е. дисперсия оценки аналогично (5) в « n » раз уменьшается по сравнению с дисперсией процесса, где « n » – число некоррелированных отсчетов в оценке (2) .

Поведение СКО оценки при произвольных Δt исследуется в заданиях №№ 3, 4.

3. Оценка среднего значения и погрешности оценки среднего при помощи спектральной плотности мощности

Как уже рассматривалось выше, если $x(t)$ – случайный эргодический процесс, то среднее $\langle x \rangle$ может быть найдено путем усреднения по времени в виде (3).

Корреляционная функция процесса $x(t)$:

$$K_x[\tau] = B_x[\tau] + \langle x \rangle^2,$$

а спектральная плотность мощности:

$$S_x(\omega) = S_{x-\langle x \rangle}(\omega) + 2\pi\delta(\omega)\langle x \rangle^2.$$

Т.е. в случае ненулевого среднего значения в спектре случайного процесса наблюдается δ - функция на нулевой частоте, а дисперсия представляет собой площадь под непрерывной частью спектра.

Оценку среднего значения процесса в виде (3) можно рассматривать, как некоторый новый процесс, полученный из исходного путем линейного преобразования. В задании №5 рассматривается спектральная плотность мощности оценки в виде (3). Как найти погрешность оценки (3). Исследовать, как изменяется с увеличением времени усреднения T , за счет чего при этом уменьшается погрешность оценки среднего. Для объяснения результатов этого задания, необходимо иметь в виду, что спектральная плотность мощности оценки среднего значения в виде (3), т.е. $S_{\tilde{x}}(\omega)$, связана со спектральной плотностью мощности исходного процесса $S_x(\omega)$ соотношением

$$S_{\tilde{x}}(2\pi f) = S_x(2\pi f)|K(j2\pi f)|^2$$

Коэффициент передачи $K(j2\pi f)$ линейного преобразования (3) можно найти, как комплексную амплитуду выходного гармонического колебания, если же вместо входного процесса $\tilde{x}(t)$ в (3) подставить $e^{j2\pi ft}$ (гармоническое колебание единичной амплитуды и частоты $2\pi f$). При этом окажется, что

$$|K(j2\pi f)|^2 = \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|^2 \quad (7)$$

Из (7) видно, что усреднитель (3) действует как фильтр, пропускающий спектральные составляющие в эффективной полосе $\Delta f_x = \frac{1}{2T}$, примыкающей

к $f = 0$. Постоянная составляющая, а также $S_{\tilde{x}}(0)$ спектральная плотность мощности процесса $\tilde{x}(t)$ на нулевой частоте, при этом остаются неизменными, т.к. $K(j2\pi f)|_{f=0} = 1$. С увеличением T , уменьшается полоса пропускания этого фильтра, а значит и $D[\tilde{x}]$ – дисперсии оценки (3), приближенно равная $D[\tilde{x}] = S_{\tilde{x}}(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = S_{\tilde{x}}(0) \frac{1}{2T}$.

При выполнении задания №5 следует убедиться, что $D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{T/\tau_{\text{кор}}}$, (при $T \gg \tau_{\text{кор}}$), т.е. погрешность оценки (3) определяется только числом некоррелированных отсчетов, содержащихся в интервале усреднения T .

В этом задании следует получить так же оценку среднего значения и оценить ее погрешность непосредственно по спектральной плотности мощности процесса $\tilde{x}(t)$. Эта оценка оказывается по существу эквивалентной оценке (3) при времени усреднения T , равном тому временному интервалу T^* , на котором мы находим Фурье-преобразование процесса (в нашем случае $T^* = 2048$); а ширина спектральной плотности мощности оценки, определяющая ее дисперсию, обратна длине этого интервала и равна $1/2048$ (по существу это ширина интервала частотного разрешения в спектре при выбранных параметрах Фурье-преобразования).

4. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Выше за количественную характеристику погрешности оценки среднего значения было взято СКО оценки (корень квадратный из дисперсии оценки). Но в связи с тем, что оценка является случайной величиной, определяемой случайными выборочными значениями x_1, x_2, \dots, x_n , на практике возможна реализация таких значений оценки, которые отличаются от истинного значения среднего больше, чем на величину СКО оценки. Как часто это может происходить, и какой должна быть выбрана длина интервала, характеризующего погрешность оценки, чтобы с достоверностью неизвестное среднее отстояло от случайной оценки не дальше, чем на величину выбранного интервала? Сначала несколько слов о том, что значит с достоверностью? При какой вероятности появление события его можно считать практически достоверным? Эта вероятность определяется существом исходной задачи. В некоторых задачах это может быть 0.90 или 0.95; 0.99 и т.д. Эту вероятность будем называть доверительной и обозначать β . По этой вероятности выбирается I_β величина интервала, называемого доверительным (обычно его длина выражается

в долях среднеквадратического значения оценки $I_\beta = t_\beta \sigma_{\tilde{x}}$. Если отложить этот интервал вокруг случайного значения оценки, то он с доверительной вероятностью β накроет неизвестное среднее значение $\langle x \rangle$ (т.е. практически с достоверностью).

Величина доверительного интервала выражается через плотность вероятностного распределения о оценки $W(\tilde{x})$ и доверительную вероятность β согласно соотношению:

$$P(|\langle x \rangle| - \tilde{x} \leq I_\beta) = \int_{\langle x \rangle - I_\beta}^{\langle x \rangle + I_\beta} W(\tilde{x}) d\tilde{x} = \beta$$

В значительном ряде случаев принимается, что плотность вероятности оценки $W(\tilde{x})$ распределена по закону Гаусса (по закону Гаусса зачастую распределена и сама величина X , среднее значение которой оценивается, но если X не имеет гауссова распределения, то можно принять распределенной по закону Гаусса саму оценку \tilde{x} при достаточно большом числе усредняемых некоррелированных слагаемых в (1) в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей). При небольших n ($n \leq 15$) распределение оценки \tilde{x} нельзя считать Гауссовым даже в том случае, когда X – распределено по закону Гаусса, если неизвестна дисперсия величины X и она оценивается по тем же «n» отсчетам. Подробнее об этом сказано в примечании к заданию №6. В этом случае следует находить доверительный интервал для оценки, считая, что относительная величина оценки $\frac{\tilde{x}}{\sigma_{\tilde{x}}}$ распределена по закону Стюдента с числом степеней свободы равным «n-1» (где n – число усредняемых некоррелированных отсчетов в оценке (1) и, пользуясь соответствующими таблицами, имеющимися в справочной литературе).

Вопросы, связанные с описание погрешности оценки через доверительный интервал и доверительную вероятность, рассматриваются в задании №6.

5. Практическая часть

5.1. Вид реализации случайных процессов и их спектров

Порядок действий:

- 1) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$

2) В блоке Анализатор выбрали график реализации сигнала “Реализация”, или спектр сигнала “СПМ”

3) Нажали кнопку “Run”

Пронаблюдали вид реализаций и спектральную плотность мощности изучаемого Гауссова шума с различным временем корреляции $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$.

Ниже приведены полученные графики реализации процесса

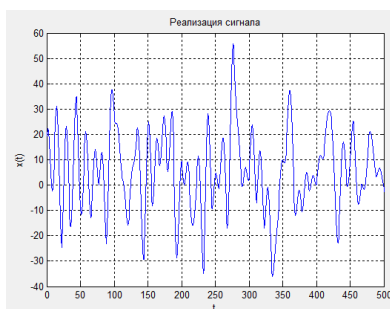


Рис. 1. *
 $\tau_{\text{кор}} = 10$

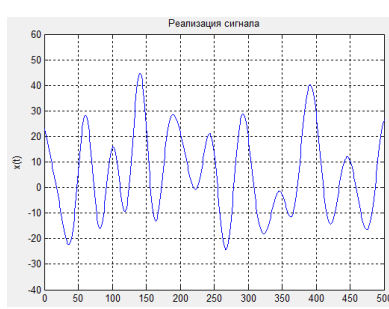


Рис. 2. *
 $\tau_{\text{кор}} = 30$

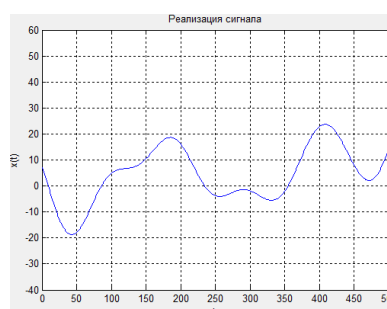


Рис. 3. *
 $\tau_{\text{кор}} = 100$

и его спектральной плотности мощности



Рис. 4. *
 $\tau_{\text{кор}} = 10$

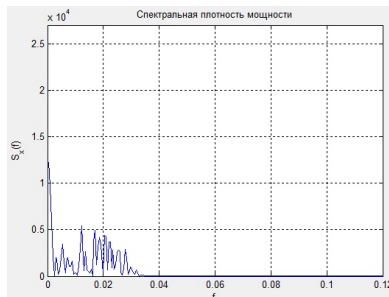


Рис. 5. *
 $\tau_{\text{кор}} = 30$

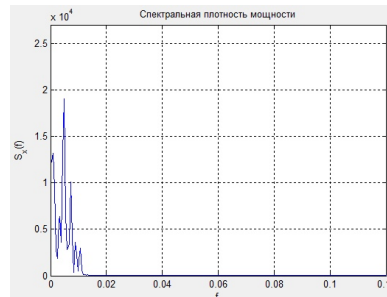


Рис. 6. *
 $\tau_{\text{кор}} = 100$

Вывод Установили, что с увеличением времени корреляции $\tau_{\text{кор}}$ в спектре становится меньше гармоник, он сужается.

Так как $\tau_{\text{кор}}$ - интервал времени, на котором ф-я корреляции $B(\tau)$ уменьшается в ϵ раз, то время корреляции определяет, насколько в случайном процессе каждое следующее во времени его значение связано с предыдущим.

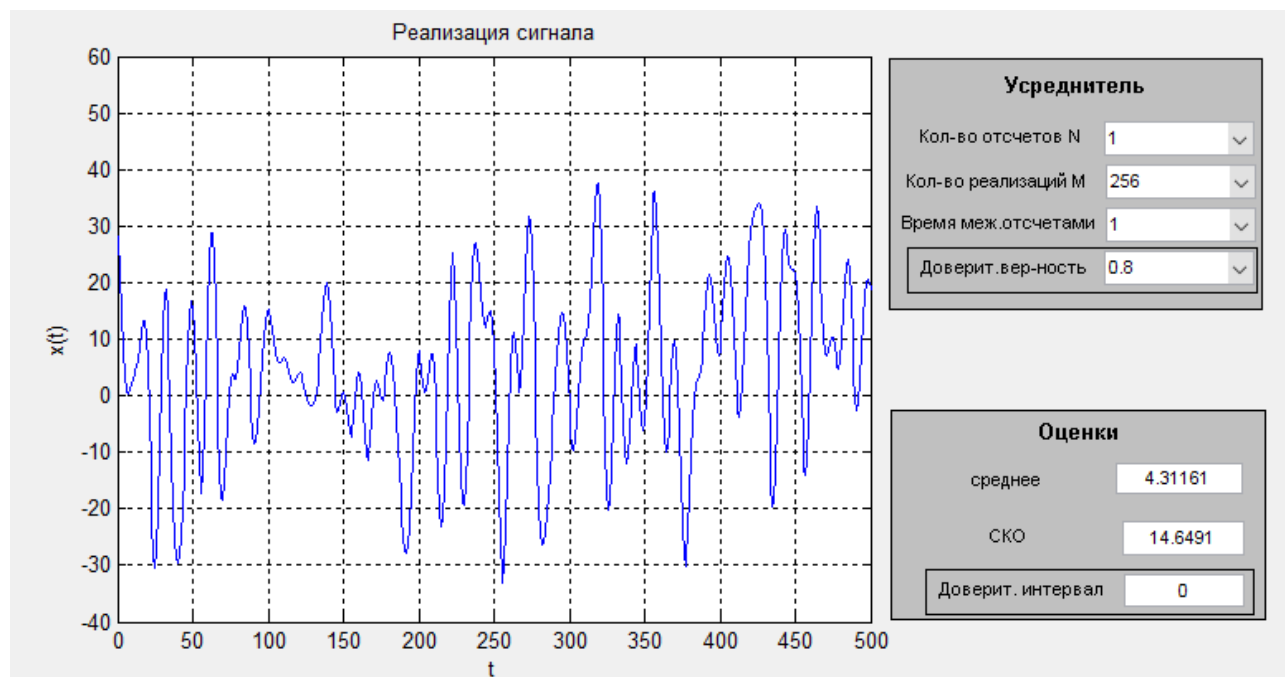
При небольшом времени корреляции - каждое следующее значение случайного процесса слабо зависит от предыдущего, что и продемонстрировано в эксперименте при $\tau_{\text{кор}} = 10$, где наблюдается высокоосциллирующая реализация.

При увеличении $\tau_{\text{кор}}$, значения процесса больше зависят от предыдущих, поэтому при $\tau_{\text{кор}} = 100$ мы наблюдаем более плавную реализацию. Реализации процесса с увеличением времени корреляции слабее меняются во времени.

5.2. Поведение оценки среднего в зависимости от числа усредняемых отсчетов

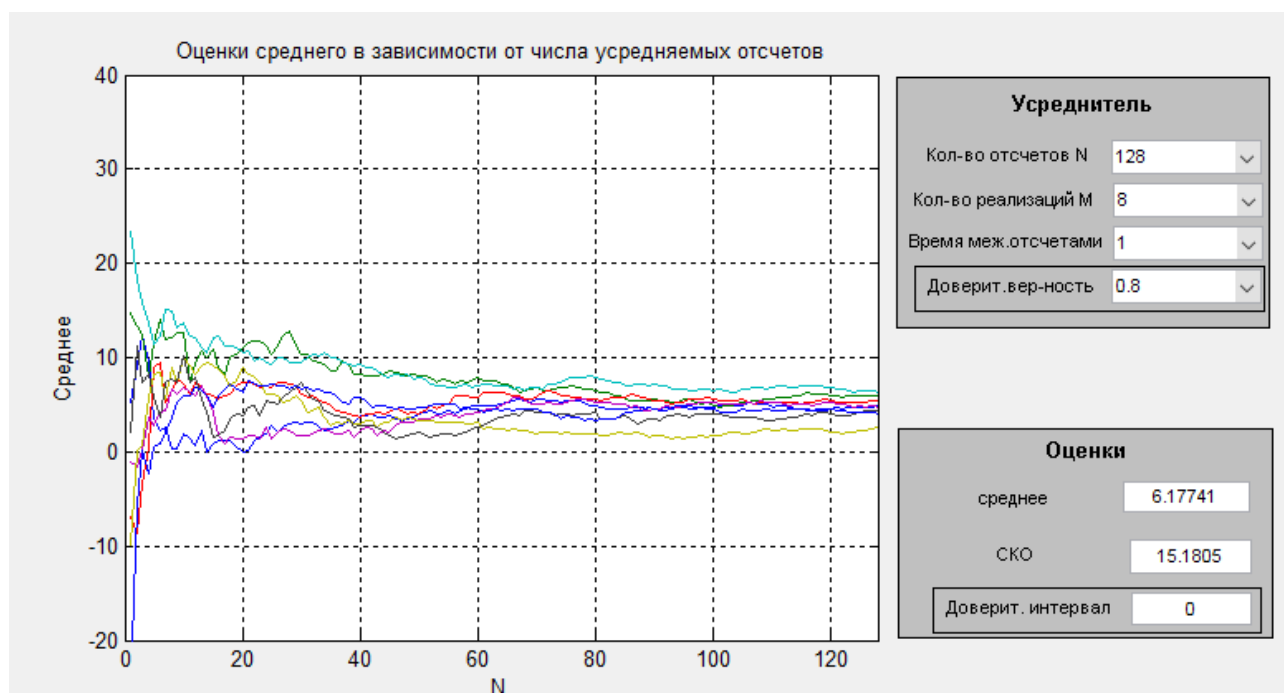
Порядок действий: Сначала определили оценки среднего и среднеквадратического отклонения оценки процесса по ансамблю

- 1) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$
- 2) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 256$, время между отсчетами $\Delta t = 1$, и количество усредняемых отсчетов $N = 1$.
- 3) В Блоке оценок определили оценку среднего и С.К.О. оценки.



Далее определили оценки по реализациям:

- 4) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$
- 5) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 8$, время между отсчетами $\Delta t = 1$, и количество усредняемых отсчетов $N = 128$.
- 6) Нажали на кнопку “Усреднение”, и в блоке Анализатор выбрали график “Среднее” (на графике N - текущее количество отсчетов по которым производится усреднение).



Разброс оценки $\langle x \rangle$ по вертикали при фиксированном N характеризует собой погрешность оценки среднего при данном N . Оценим этот разброс при $N = 1$, $N = 40$, $N = 128$, приблизив график (в программе) и найдя крайние значения. ??

Количество отсчетов	Крайние значения	Разброс $\langle x \rangle$ по вертикали
$N=1$	От -25 до 25	50
$N=40$	От 2 до 9	7
$N=128$	От 2.5 до 6.25	3.75

5.3. Изучение зависимости σ – среднеквадратичного отклонения оценки среднего от числа усреднений в оценке

Порядок действий:

- 1) Для корректного отображения графиков перед экспериментом очистили область построения графиков кнопкой «Reset».
- 2) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума.
- 3) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 256$ (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), количество усредняемых отсчетов $N = 64$, а время между отсчетами первоначально взяли $\Delta t = 1$.
- 4) Нажали на кнопку «Вычисление С.К.О.» («СКО(N)»).
- 5) Для получения следующего графика в серии, в Усреднителе изменили время между отсчетами усреднения Δt в соответствии с заданием и нажали на кнопку «Вычисление С.К.О.» («СКО(N)»).
- 6) Для перехода к следующей серии нажали «Сброс» (Reset), а в Генераторе сигналов изменили время корреляции и повторили пункты 3) и 4).

В результате эксперимента получили две серии графиков по три графика в серии, отличающиеся временем между отсчетами $\Delta t = 1; 4; 12$. Для первой серии время корреляции $\tau_{\text{кор}} = 10$. Для второй серии время корреляции $\tau_{\text{кор}} = 100$. Ниже представлены эти серии.

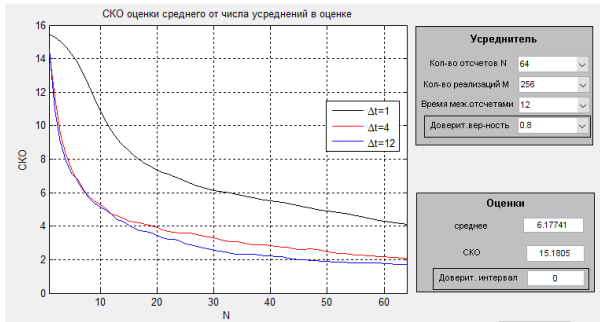


Рис. 7. *

$\tau_{\text{кор}} = 10$

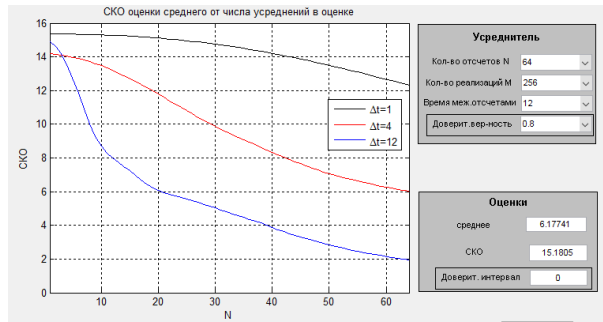


Рис. 8. *

$\tau_{\text{кор}} = 100$

Рис. 9.

Разберем качественно поведение кривых на рис.9

- 1) Нулевая производная при $N = 1$ объясняется тем, что при любом количестве отсчетов $N > 1$, при том же количестве реализаций M , значение оценки среднего будет ближе к истинному значению мат. ожидания, а СКО оценки - уменьшаться. Таким образом, при $N = 1$ наблюдается максимум СКО оценки среднего.
- 2) Можно показать, что с ростом времени корреляции СКО оценки среднего должны уменьшаться, поскольку оценка среднего совпадет с истинным значением при

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T=n \cdot \tau_{\text{кор}}} x(t) dt$$

то увеличивая время корреляции мы сильнее приближаемся к условию $T \rightarrow \infty$, а значит СКО оценки должен уменьшаться.

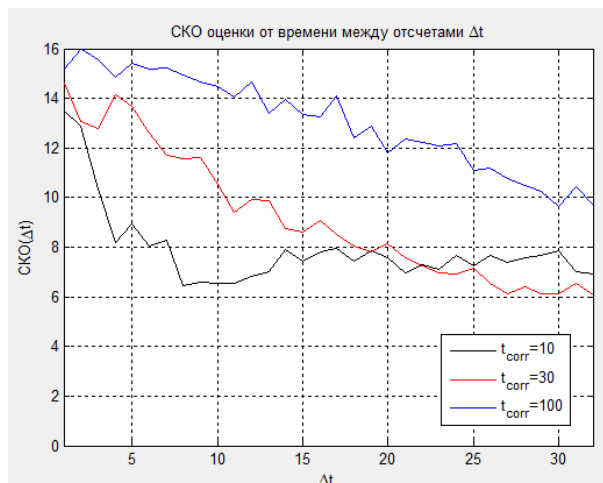
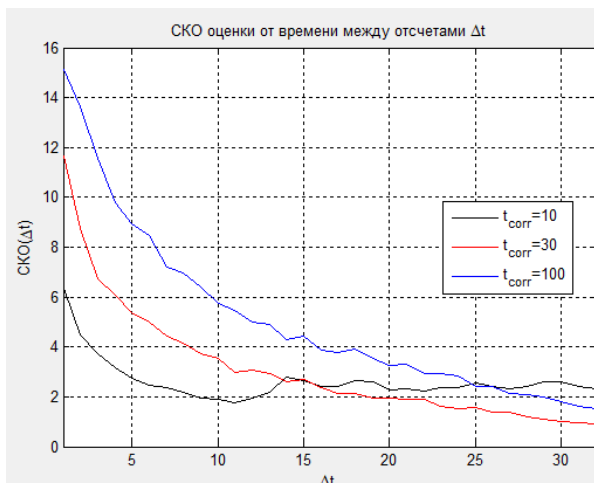
- 3) Оценим время корреляции процесса непосредственно по графику. Так как в случае $\Delta t \geq \tau_{\text{кор}}$ СКО оценки можно рассчитывать как $D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{N}$, то график СКО оценки от числа отсчетов после прохождения точки $\Delta t * N = \tau_{\text{кор}}$ будет вести себя как гипербола. По точке перехода графика в гиперболу можно определить $\tau_{\text{кор}}$.
- 4) СКО оценки при $N = 1$ определяется числом реализаций сигнала M . В таком случае для каждой реализации среднее значение - это значение единственного элемента в реализации. Другими словами, СКО оценки при $N = 1$ определяется как дисперсия исходного процесса $D[x]$.

5.4. Изучение зависимости σ – среднеквадратичного отклонения оценки среднего от времени между отсчетами Δt

Порядок действий

- 1) Для корректного отображения графиков перед экспериментом очистили область построения графиков кнопкой «Reset».
- 2) Установили в Генераторе сигналов соответствующее время корреляции Гауссова шума.
- 3) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 256$ (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), а затем выбрали необходимое количество отсчетов усреднения ($N = 4; 32$).
- 4) Нажали на кнопку «СКО(Δt)».
- 5) Для получения следующего графика в серии, в Генераторе изменили время корреляции в соответствии с заданием и нажали на кнопку «СКО(Δt)» («СКО(N)»)
- 6) Для перехода к следующей серии ($N = 32$)) изменили в Усреднителе количество усреднений, нажали «Reset» в блоке Анализатор и повторить пункты 4) и 5).

В результате эксперимента получили две серии графиков (с $N = 4$ и $N = 32$) по три графика в серии. Получили серию кривых $\sigma(\Delta t)$, для процессов с различным временем корреляции $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$. Число усреднений в оценке среднего взяли равным $N = 4$ (Δt на графиках изменяется в пределах от 1 до 32). Вторую серию кривых получили для тех же времен корреляции $\tau_{\text{кор}} = 10; 30; 100$, а число усреднений в оценке среднего взяли $N = 32$. Графики приведены ниже

Рис. 10. $N = 4$ Рис. 11. $N = 32$

Разберем качественно поведение полученных кривых:

- 1) Нулевая производная $\Delta t \rightarrow 0$????????????????
- 2) Предел, к которому стремится СКО оценки с увеличением Δt определяется
- 3)
- 4)

5.5. Определение оценок среднего значения и среднеквадратического отклонения по спектральной плотности мощности (СПМ) процесса

Оценку среднего значения процесса, найденную как среднее по времени на фиксированном по длине скользящем интервале усреднения, можно рассматривать как новый случайный процесс и для него можно найти спектральную плотность мощности.

Порядок действий

- 1) Установили в Генераторе сигналов корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$.

5.5.1. Определение параметров исходного процесса по его СПМ:

- 1) В блоке Анализатор выбрали график “Спектр сигнала” (“СПМ”) нажали кнопку «Run» и, согласно заданию, вычислили среднее сигнала, а затем дисперсию.



Рис. 12. *

$$\tau_{\text{кор}} = 10$$

При изменении масштаба было найдено значение $S_x(0) = 1,22 \cdot 10^4$.

В связи с этим полная мощность в полосе $\Delta f = 1/2048$ на нулевой частоте равна (с некоторой погрешностью) $\langle x \rangle^2 = A \cdot \frac{1}{2048}$, где A – значение СПМ на нулевой частоте по графику. Отсюда находим $\langle x \rangle$.

$$\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,96$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,44$$

Дисперсию процесса по графику спектральной плотности мощности нашли как произведение эффективной ширины спектра на эффективное значение СПМ.

$$D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,98$$

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,73$$

Сравнили полученные результаты с данными из Задания 2.

5.5.2. Определение параметров усредненного процесса по его СПМ:

- 1) В Усреднителе установили количество реализаций $M = 2$ и время между отсчетами $\Delta t = 1$, а затем выбрали количество отсчетов усреднения $N = 4$.

- 2) В блоке Анализатор выбрали график “Спектр усреднен.” (“Уср. СПМ”), нажали кнопку «Run», и, затем, аналогично заданию 5.1 вычислили оценку среднего значения и дисперсию оценки.
- 3) Для проведения следующего эксперимента повторили пункты 3) и 4) для количества отсчетов усреднения $N = 32$.



Рис. 13. *
 $N = 4$



Рис. 14. *
 $N = 32$

Для $N = 4$ $S_x(0) = 1,2 \cdot 10^4$
 $\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,86$
 $\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,42$
 $D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,93$
 $\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,71$

Для $N = 32$ $S_x(0) = 1,15 \cdot 10^4$
 $\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048} = 1,22 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5,62$
 $\langle x \rangle = \sqrt{\langle x \rangle^2} = 2,37$
 $D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2,8$
 $\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1,68$

5.6. Описание погрешности и надежности оценки среднего значения через доверительный интервал и доверительную вероятность

5.6.1. Анализ гистограммы

Порядок действий:

- 1) Установили в Генераторе сигналов время корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$.
- 2) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 256$ (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), доверительную вероятность $\beta = 0.95$, время между отсчетами $\Delta t = 1$ и необходимое количество отсчетов усреднения $N = 1$.
- 3) Нажали кнопку “PDF”, и следили за изменением значения доверительного интервала в Блоке оценок.
- 4) Для проведения следующего эксперимента повторили пункт 2), выбирая количество отсчетов усреднения, соответственно, $N = 4; 32$.

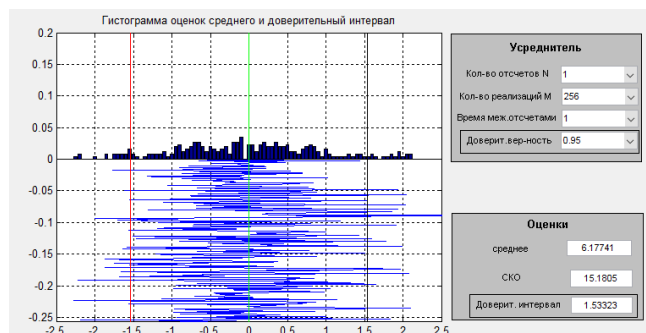


Рис. 15. *
 $N = 1$

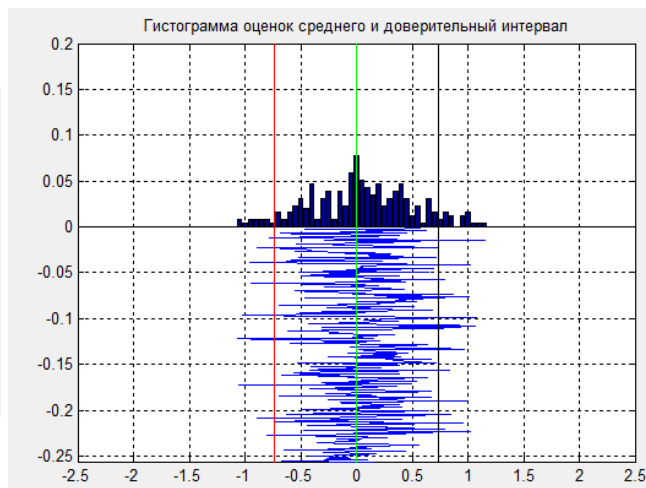


Рис. 16. *
 $N = 4$

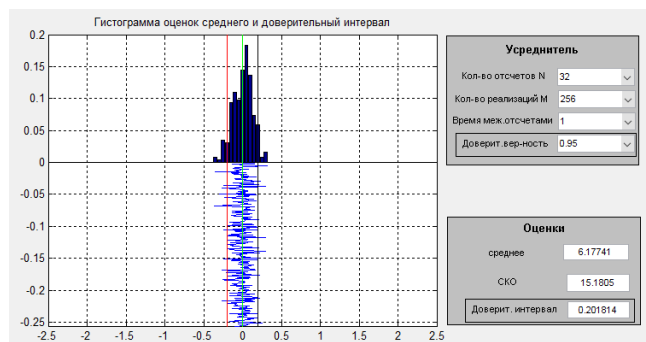


Рис. 17. *
 $N = 32$

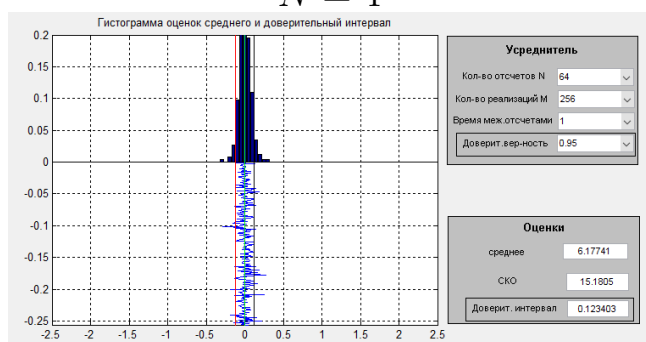


Рис. 18. *
 $N = 64$

Количество отсчетов усреднения N	Доверительный интервал I
1	1.5332
4	0.7248
32	0.2018
64	0.1234

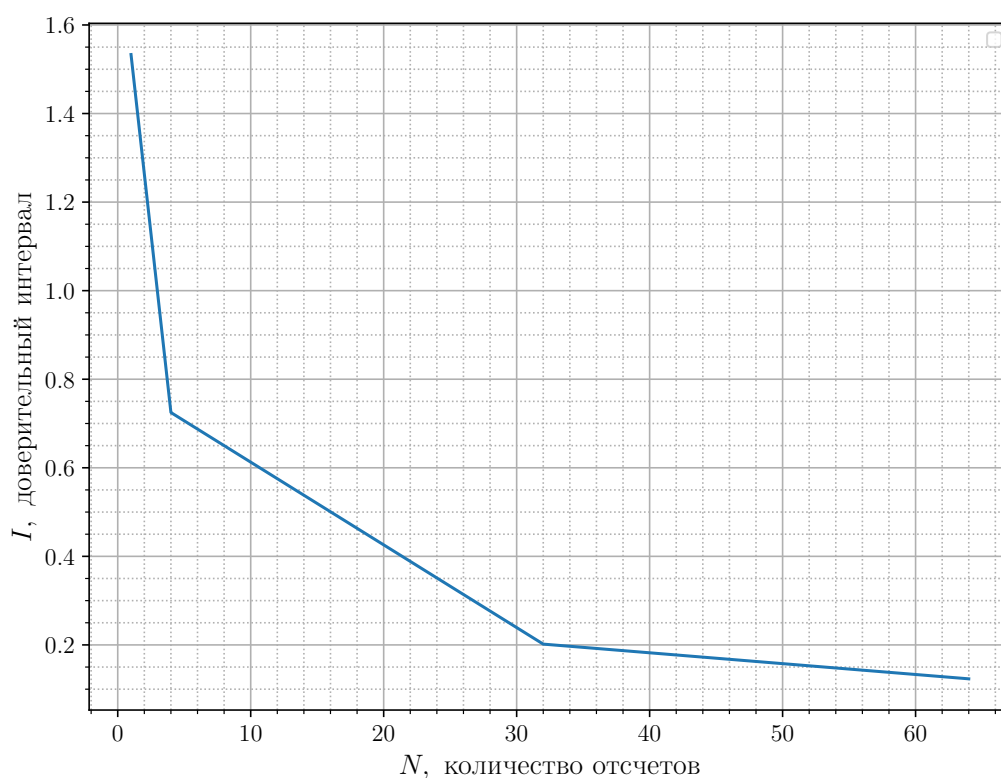


Рис. 19. *

График зависимости доверительного интервала I от N

5.6.2. Задание 6.2

Доверительный интервал отмечается на графике тремя вертикальными линиями: центр интервала – зеленая линия, края интервала – левый край – красная линия, правый край – черная линия. Порядок действий:

- 1) Установили в Генераторе сигналов время корреляции Гауссова шума $\tau_{\text{кор}} = 10$.
- 2) В Усреднителе выбрали количество реализаций $M = 256$ (это необходимо для того, чтобы кривые зависимостей получались гладкими), доверительную вероятность $\beta = 0.95$, время между отсчетами $\Delta t = 1$ и необходимое количество отсчетов усреднения $N = 1$. Доверительную вероятность выбирали последовательно равной $\beta = 0, 80; 0, 95; 0.98$.
- 3) Нажали кнопку “PDF”. Значения доверительного интервала считывали в Блоке оценок. На основании полученных результатов представили зависимость $I_{\beta}(\beta)$.

4) Получили аналогичные кривые для $N=4, 32$.

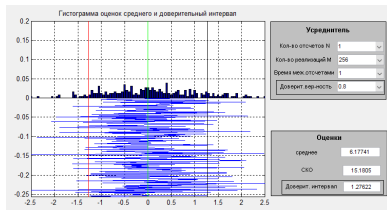


Рис. 20. *
 $\beta = 0.8$

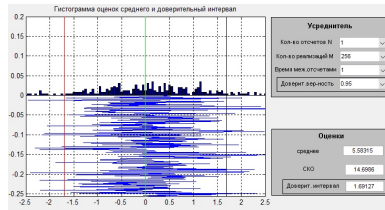


Рис. 21. *
 $\beta = 0.95$

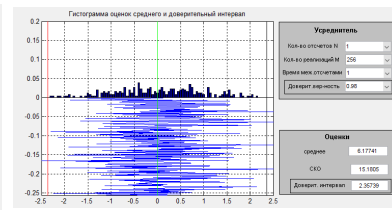


Рис. 22. *
 $\beta = 0.98$

Рис. 23. *

$N = 1$

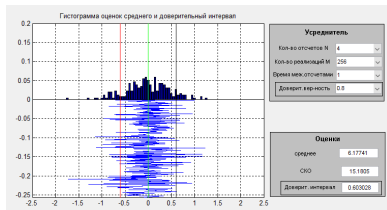


Рис. 24. *
 $\beta = 0.8$

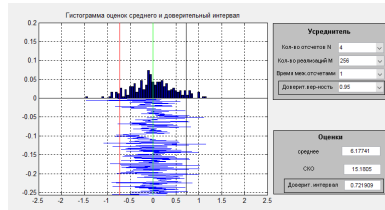


Рис. 25. *
 $\beta = 0.95$

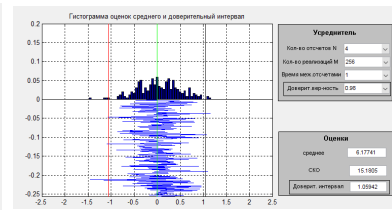


Рис. 26. *
 $\beta = 0.98$

Рис. 27. *

$N = 4$

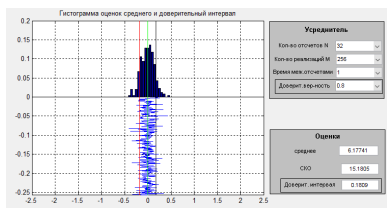


Рис. 28. *
 $\beta = 0.8$

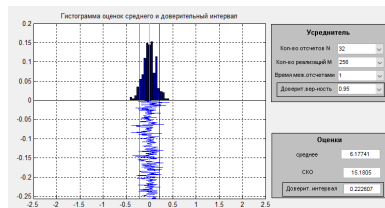


Рис. 29. *
 $\beta = 0.95$

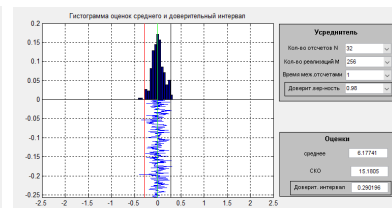


Рис. 30. *
 $\beta = 0.98$

Рис. 31. *

$N = 32$

	Доверительный интервал I		
Доверительная вероятность β	$N=1$	$N=4$	$N=32$
0.80	1.27622	0.603028	0.1809
0.95	1.69127	0.721909	0.2226
0.98	2.35739	1.05942	0.2901

Построили график зависимости доверительного интервала I от β при различных значениях N .

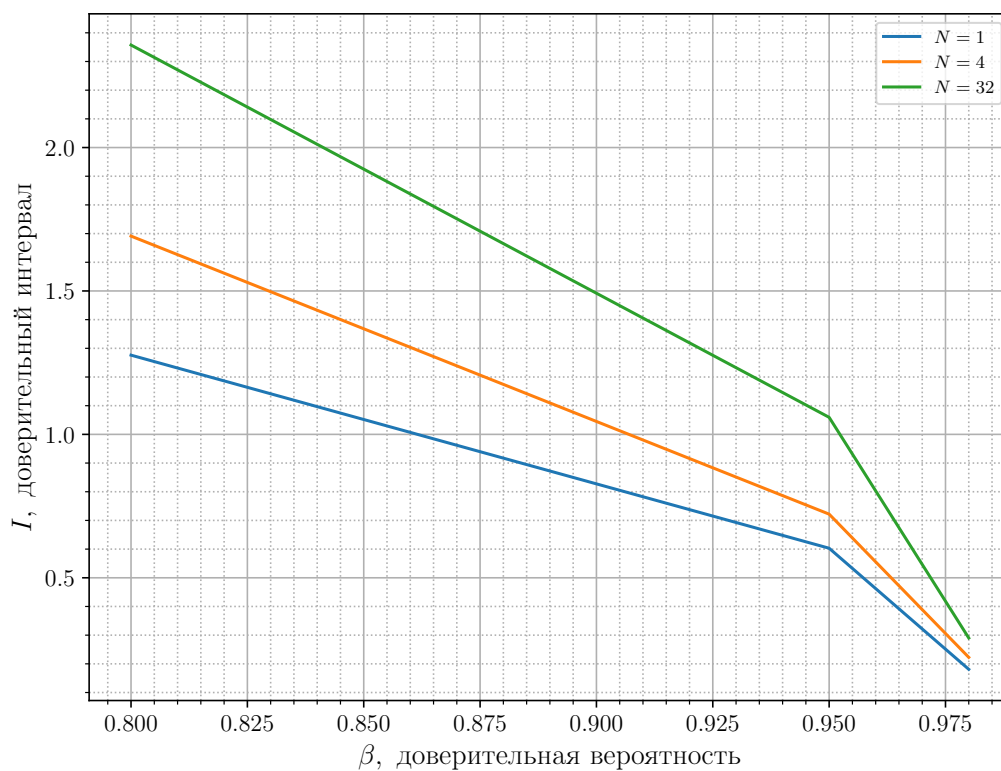


Рис. 32. *

График зависимости доверительного интервала I от β

По графику видно, что доверительный интервал увеличивается при увеличении β и уменьшается при увеличении количества отсчетов усреднения N .

6. Вывод

В результате выполнения данной работы мы изучили вопросы, связанные с оценкой параметров случайных процессов на примере оценки их средних значений. В ходе выполнения 1-го задания мы установили, что вид реализации с ростом времени корреляции становится более плавным, а спектральная плотность мощности смещается ближе к нулевой частоте. Так же мы установили, что значения разброса $\langle x \rangle$ по вертикали во втором задании больше значений $\langle x \rangle$ из задания 5 при любых N . В результате выполнения 6-го задания было установлено, что доверительный интервал увеличивается при увеличении β и уменьшается при увеличении количества отсчетов усреднения N .