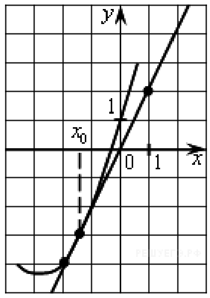
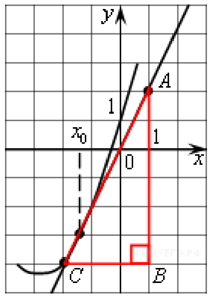
Геометрический смысл производной, касательная

1. Задание 7 № 27503. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

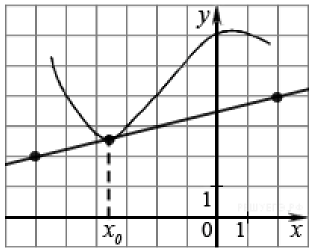


$$y'\ (x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

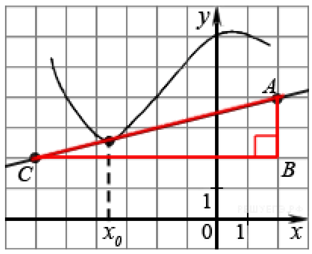
Ответ: 2

2. Задание 7 № 27504. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; 4), B (2; 2), C (−6; 2). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB. Поэтому

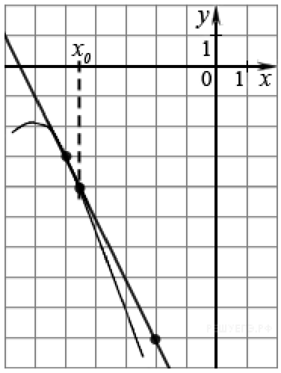


$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

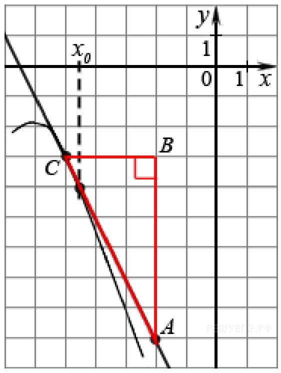
Ответ: 0,25.

Ответ: 0,25

3. Задание 7 № 27505. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.



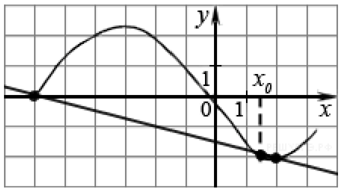
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −9), B (−2; −3), C (−5; −3). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

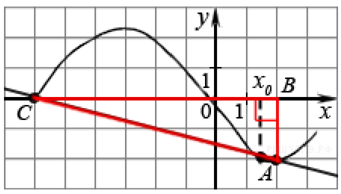
Ответ: -2.

Ответ: -2

4. Задание 7 № 27506. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.



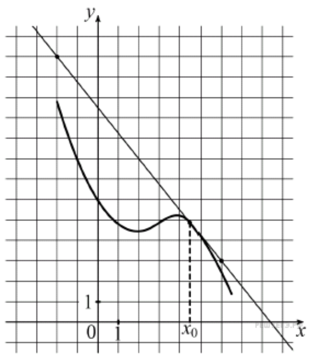
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; −2), B (2; 0), C (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

$$y'\ (x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

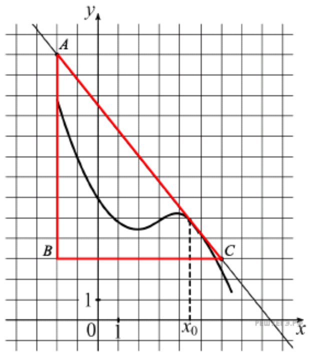
Ответ: −0,25.

Ответ: -0,25

5. Задание 7 № 505379. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; 13), B (−2; 3), C (6; 3). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

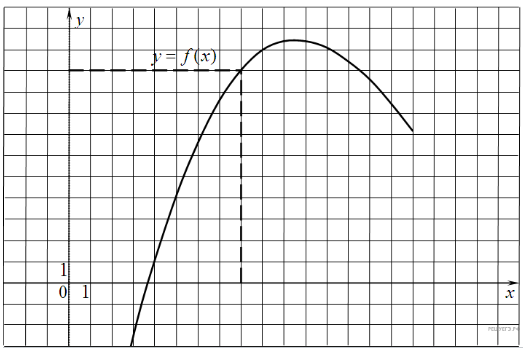


$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{10}{8} = -1,25.$$

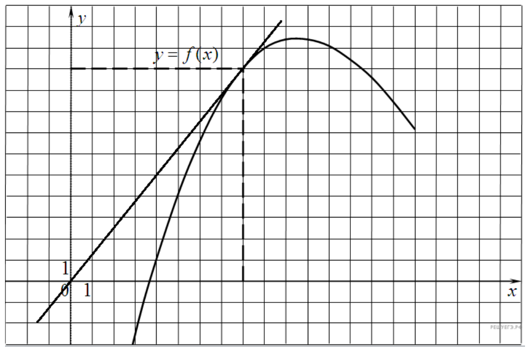
Ответ: −1,25.

Ответ: -1,25

6. Задание 7 № 40129. На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



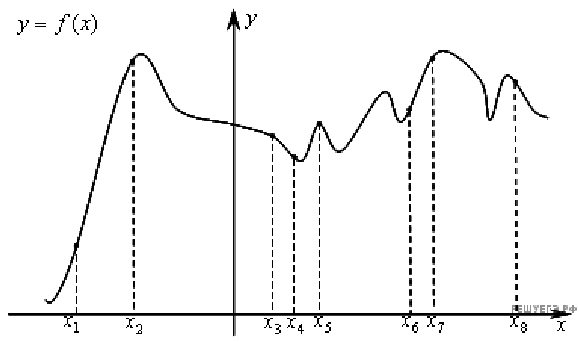
Решение.
Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку (8; 10), поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1,25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1,25$.



Ответ: 1,25.

Ответ: 1,25

7. Задание 7 № 317539. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



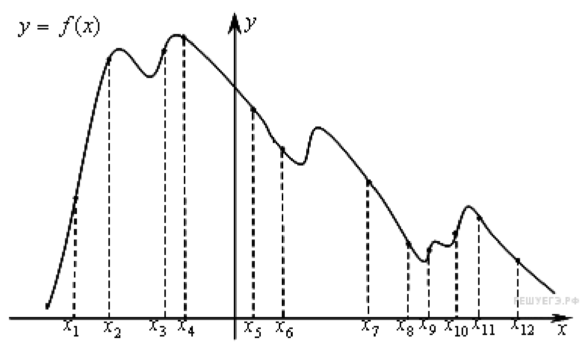
Решение.

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_6, x_7. Таких точек 4.

Ответ:4.

Ответ: 4

8. Задание 7 № 317540. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



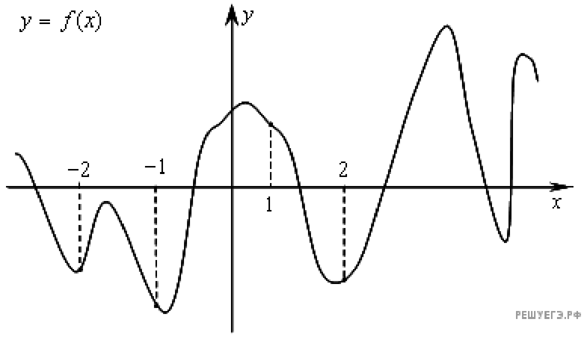
Решение.

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}$. Таких точек 7.

Ответ:7.

Ответ: 7

9. Задание 7 № 317543. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



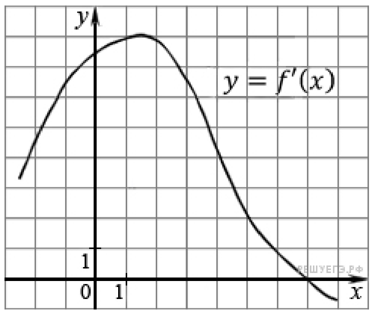
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках -2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке -2.

Ответ:-2.

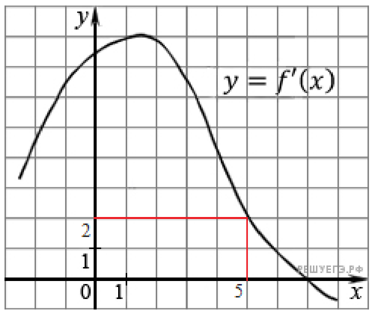
Ответ: -2

10. Задание 7 № 40130. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



Решение.

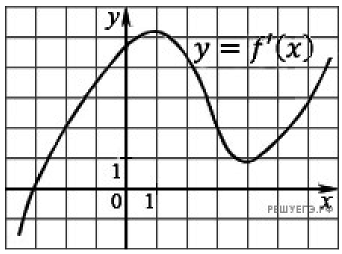
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.



Ответ: 5.

Ответ: 5

11. Задание 7 № 40131. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

Ответ: -3.

Ответ: -3

12. Задание 7 № 27485. Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=7x-5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y'=7$:

$$(x^2+6x-8)' = 7 \Leftrightarrow 2x+6=7 \Leftrightarrow x=0,5.$$

Ответ: 0,5.

Ответ: 0,5

13. Задание 7 № 27486. Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2+14x+7=-4, \\ x^3+7x^2+7x-6=-4x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x+11=0, \\ x^3+7x^2+11x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{3}, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x^3+7x^2+11x+5=0\ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

Ответ: -1

14. Задание 7 № 119972. Прямая $y=3x+1$ является касательной к графику функции ax^2+2x+3. Найдите a.

Решение.

Прямая $y=kx+b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0)=y(x_0)$ и $f'(x_0)=k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0+2=3, \\ ax_0^2+2x_0+3=3x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0=0,5, \\ 0,5x_0-x_0=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,125, \\ x_0=4. \end{cases}$$

Искомое значение *a* равно 0,125

Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2+2x+3=3x+1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1-8a$ уравнения $ax^2-x+2=0$ должен быть равен нулю, откуда $a=\dfrac{1}{8}=0,125.$

Ответ: 0,125

15. Задание 7 № 119974. Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $3x^2-3x+c$. Найдите c.

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x-3=3, \\ 3x^2-3x+c=3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 3x^2-6x+c-4=0 \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ c=7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

Ответ: 7

16. Задание 7 № 119973. Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $28x^2+bx+15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.
Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x+b=-5, \\ 28x^2+bx+15=-5x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-56x, \\ 28x^2+(-5-56x)x+15=-5x+8 \end{cases} \begin{cases} b=-5-56x, \\ x^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому x=0,5, откуда b=−33.

Ответ: −33.

Ответ: -33