

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

ГОУ ВПО МО  
"КОЛОМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

*И. Ю. Щеглова, А. А. Богуславский*

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ (НА ПРИМЕРЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ)**

*Компьютерная поддержка курса "Колебания и волны"*

Коломна  
2009

**УДК 534.0**  
**ББК 22.3**  
**Щ 33**

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом КГПИ.

**Р е ц е н з е н т :**

Г. П. Исаев, кандидат физико-математических наук, доцент

**Щеглова И. Ю., Богуславский А. А.**

**Щ33** Моделирование колебательных процессов (на примере физических задач): методическое пособие для студентов физико-математического факультета / И. Ю. Щеглова, А. А. Богуславский. – Коломна : Коломенский государственный педагогический институт, 2009. – 130 с.

В пособии рассматривается моделирование колебательных процессов различной природы (механические, электромагнитные) на примере конкретных физических задач, некоторые из которых в силу различных причин (невозможность получения аналитического решения, системы с несколькими степенями свободы) не изучаются в общем курсе физики. Исследование явления ведется в различных моделирующих программах.

Важность теории колебательных процессов в настоящее время общепризнанна, во многих вузах эта теория является самостоятельным элементом учебного плана. Изложение основ теории колебаний опирается на курс общей и экспериментальной физики. Особое внимание уделяется общности математического аппарата колебаний различной природы.

К пособию прилагается диск с моделирующими программами, используемыми в работах, шаблонами таблиц и образцами выполнения некоторых работ.

Пособие разработано для студентов физико-математического факультета по специальности «физика» как дополнительный материал при изучении теории колебаний, а также может быть использовано в школе в различных элективных курсах по физике.

**УДК 534.0**  
**ББК 22.3**

© И. Ю. Щеглова, А. А. Богуславский, 2009  
© ГОУ ВПО МО "Коломенский госпединститут", 2009

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>РЕШЕНИЕ</b>	<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ</b>	<b>УРАВНЕНИЙ</b>
<b>ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ</b>			<b>5</b>
1. Решение ДУ первого порядка			5
2. Решение ДУ второго порядка			7
<b>РАЗДЕЛ I. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ</b>			<b>11</b>
Общие сведения о колебательном движении			11
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА</b>			<b>16</b>
1. Свободные колебания			16
2. Математический маятник			18
Порядок выполнения работы			20
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ПРУЖИННЫХ МАЯТНИКОВ</b>			<b>28</b>
Введение			28
Порядок выполнения работы			34
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА</b>			<b>42</b>
Введение			42
Порядок выполнения работы			43
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА</b>			<b>52</b>
Введение			52
Порядок выполнения работы			53
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ</b>			<b>56</b>
1. Понятие о параметрических колебаниях			56
2. Моделирование параметрического резонанса в ЭТ MS Excel			58
Порядок выполнения работы			60
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА, ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ</b>			<b>63</b>
Введение			63
Порядок выполнения работы			66
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ</b>			<b>69</b>
Введение			69
Порядок выполнения работы			70
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ</b>			<b>72</b>
Введение			72
1. Связанные физические маятники			72
2. Связанные пружинные маятники			77
3. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы			
Успокоители механических систем			78
4. Двойной маятник			79
Порядок выполнения работы			82

<b>РАЗДЕЛ II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....</b>	<b>91</b>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ...</b>	<b>94</b>
1. Свободные колебания в электрическом контуре .....	94
2. Моделирование свободных колебаний в контуре в программе <i>Electronics Workbench</i> .....	95
Порядок выполнения работы .....	96
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИНУСОИДАЛЬНОЙ Э.Д.С. ....</b>	<b>101</b>
1. Основные сведения о вынужденных электрических колебаниях.....	101
2. Резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре 102	
3. Резонанс тока в параллельном колебательном контуре .....	105
4. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в программе <i>Electronics Workbench</i> .....	106
Порядок выполнения работы .....	107
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ Э.Д.С. ....</b>	<b>119</b>
1. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в программе <i>Electronics Workbench</i> .....	119
2. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в программе <i>MS Excel</i> .....	119
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ .....</b>	<b>120</b>
Введение.....	120
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ .....</b>	<b>124</b>
Введение.....	124
Описание установки .....	126
Порядок выполнения работы .....	127
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>130</b>

## ВВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Большинство физических процессов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ДУ) первого и второго порядка, причем в общем случае эти уравнения не имеют аналитического решения, выражающегося через элементарные функции (например, движение тела под действием переменной силы). Такие уравнения решают численным методом, который является приближенным, но при определенных условиях дает хорошее совпадение с точным решением.

### 1. Решение ДУ первого порядка

По определению, решением ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad (1)$$

называется дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , удовлетворяющая этому уравнению, т.е. такая, что  $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$  тождественно на некотором участке изменения  $x$ .

При численном решении ДУ вместо исходного дифференциального уравнения ищется решение конечно-разностного ДУ, переход к которому осуществляется следующим образом: вместо точного значения производной рассматривают ее разностный аналог

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

где  $\Delta x$  – достаточно малая величина. Этот переход основан на определении производной:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Приближение тем точнее, чем меньше величина интервала  $\Delta x$ .

Тогда в конечных разностях уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \approx f(x, y(x)).$$

Отсюда сразу получаем формулу для нахождения значения функции  $y(x)$  в точке  $x + \Delta x$

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + f(x, y(x)) \cdot \Delta x. \quad (2^*)$$

Таким образом, зная вид функции  $f(x, y(x))$ , значение функции  $y$  в точке  $x_0$  и задавая шаг  $\Delta x$ , можно последовательно (шаг за шагом) рассчитать значения переменной  $y$  для всех значений переменной  $x$  из заданного диапазона.

Составим алгоритм решения ДУ первого порядка.

1. Составить ДУ в виде (1), т.е. определить функцию  $f(x, y(x))$ , после чего перейти к приближенным равенствам (2) и (2\*).

2. Задать начальные условия  $(x_0, y_0)$  и шаг изменения величины  $x$ . Смоделировать значения переменной  $x$ :

$x_0$  (исходное данное)

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

...

3. Вычислить последовательно значения функции  $y(x)$  для всех значений переменной  $x$  из заданного интервала:

$y_0$  (исходное данное, см. п. 2)

$$y_1 = y(x_1) \approx y(x_0) + f(x_0, y(x_0)) \cdot \Delta x = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x$$

$$y_2 = y(x_2) \approx y_1 + f(x_1, y_1) \cdot \Delta x$$

...

Данный алгоритм можно переписать в виде итерационной формулы

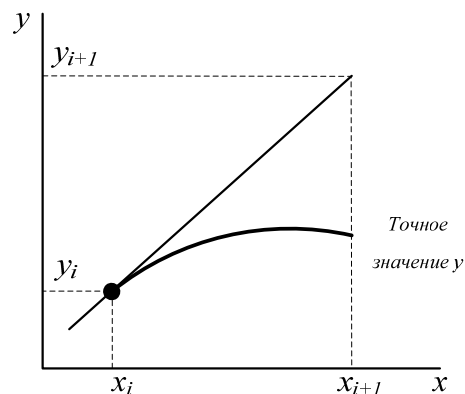
$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) \approx y_i + f(x_i, y_i) \cdot \Delta x, \text{ где } x_{i+1} = x_i + \Delta x \text{ и } i=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Полученные в результате решения ДУ значения можно представить в виде таблицы:

$x$	$y$
$x_0$	$y_0$
$x_1 = x_0 + \Delta x$	$y_1 \approx y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x$
$x_2 = x_1 + \Delta x$	$y_2 \approx y_1 + f(x_1, y_1) \cdot \Delta x$
$x_3 = x_2 + \Delta x$	$y_3 \approx y_2 + f(x_2, y_2) \cdot \Delta x$
...	...
$x_{i+1} = x_i + \Delta x$	$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i, y_i) \cdot \Delta x$
...	...

Разобранный метод называется методом касательных или методом Эйлера. Из (2) видно, что метод будет давать хорошее приближение к "истинному" значению функции  $y(x)$ , если приращение аргумента  $\Delta x$  достаточно мало. Величина шага  $\Delta x$  зависит от конкретной задачи.

Геометрическая интерпретация (3) приведена на рисунке, из которого понятно, что значение в  $(i+1)$ -ой точке оценивается по значению функции и ее производной в  $i$ -ой точке, при этом принимается, что значение производной (т.е. угол наклона касательной) на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  остается неизменным. Невыполнение данного условия приводит к отклонению численного решения от точного, которое может быть уменьшено уменьшением  $\Delta x$ .



## 2. Решение ДУ второго порядка

Решение ДУ второго порядка проводится аналогичным образом. Перепишем исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) \quad (4)$$

в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} = f(x, y(x), \dot{y}(x)), \quad (4^*)$$

перейдя, тем самым, к дифференциальному уравнению первого порядка, где дифференцируемой функцией является  $\frac{dy}{dx} = \dot{y}(x)$ , и заменим его конечно-разностным аналогом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \frac{dy}{dx}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{dy}{dx} \right)_x}{\Delta x} \approx \frac{\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{dy}{dx} \right)_x}{\Delta x} \approx \\ &\approx \frac{\dot{y}(x+\Delta x) - \dot{y}(x)}{\Delta x}, \\ \frac{\dot{y}(x+\Delta x) - \dot{y}(x)}{\Delta x} &\approx f(x, y(x), \dot{y}(x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Значение функции  $\frac{dy}{dx} = \dot{y}(x)$  в точке  $x+\Delta x$  равно

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} \approx \left( \frac{dy}{dx} \right)_x + f\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x \quad (6)$$

или

$$\dot{y}(x+\Delta x) \approx \dot{y}(x) + f(x, y(x), \dot{y}(x)) \cdot \Delta x. \quad (6^*)$$

Формулу для нахождения значения функции  $y(x)$  в точке  $x+\Delta x$  найдем из определения производной:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \approx \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

откуда

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + \left( \frac{dy}{dx} \right)_x \cdot \Delta x \quad (7)$$

или

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + \dot{y}(x) \cdot \Delta x. \quad (7^*)$$

Рассмотренный метод называется методом полного интервала.

Запишем алгоритм решения ДУ второго порядка методом полного интервала:

1. Составить ДУ второго порядка в виде (4) и перейти к приближенным равенствам (5) и (6).

2. Задать начальные условия  $(x_o, y_o, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_o} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = \dot{y}(x_o))$  и шаг  $\Delta x$

изменения независимой переменной. Смоделировать значения переменной  $x$  с шагом  $\Delta x$ :

$x_o$

$$x_1 = x_o + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

...

3. Вычислить значение функции  $\dot{y}(x)$  в точке  $x_1 = x_o + \Delta x$ :

$$\dot{y}_1 \approx \dot{y}_o + f(x_o, y_o, \dot{y}_o) \cdot \Delta x$$

где  $\dot{y}_1 = \dot{y}(x_o + \Delta x) = \dot{y}(x_1)$  и  $\dot{y}_o = \dot{y}(x_o)$ .

4. Вычислить значение функции  $y(x)$  в точке  $x_1 = x_o + \Delta x$ :

$$y_1 \approx y_o + \dot{y}_o \cdot \Delta x.$$

5. Повторить процедуру, описанную в пп. 3 и 4 и найти в точке  $x_2 = x_1 + \Delta x$

1) значение функции  $\dot{y}(x)$

$$\dot{y}_2 \approx \dot{y}(x_2) \approx \dot{y}_1 + f(x_1, y_1, \dot{y}_1) \cdot \Delta x;$$

2) значение функции  $y(x)$

$$y_2 \approx y(x_2) \approx y_1 + \dot{y}_1 \cdot \Delta x$$

и т.д. для всех значений переменной  $x$ .

Полученные в результате решения ДУ значения можно представить в виде таблицы:

$x$	$\dot{y}$	$y$
$x_o$	$\dot{y}_o$	$y_o$
$x_1 = x_o + \Delta x$	$\dot{y}_1 \approx \dot{y}_o + f(x_o, y_o, \dot{y}_o) \cdot \Delta x$	$y_1 \approx y_o + \dot{y}_o \cdot \Delta x$
$x_2 = x_1 + \Delta x$	$\dot{y}_2 \approx \dot{y}_1 + f(x_1, y_1, \dot{y}_1) \cdot \Delta x$	$y_2 \approx y_1 + \dot{y}_1 \cdot \Delta x$
$x_3 = x_2 + \Delta x$	$\dot{y}_3 \approx \dot{y}_2 + f(x_2, y_2, \dot{y}_2) \cdot \Delta x$	$y_3 \approx y_2 + \dot{y}_2 \cdot \Delta x$
...	...	...
$x_{i+1} = x_i + \Delta x$	$\dot{y}_{i+1} \approx \dot{y}_i + f(x_i, y_i, \dot{y}_i) \cdot \Delta x$	$y_{i+1} \approx y_i + \dot{y}_i \cdot \Delta x$
...	...	...

Таким образом, решение ДУ второго порядка можно выразить системой уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1} \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_i + f\left(x_i, y_i, \left(\frac{dy}{dx}\right)_i\right) \cdot \Delta x; \\ y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cdot \Delta x; \Delta x = x_{i+1} - x_i \end{cases} \quad (8)$$



или

$$\begin{cases} \dot{y}_{i+1} \approx \dot{y}_i + f(x_i, y_i, \dot{y}_i) \cdot \Delta x; \\ y_{i+1} \approx y_i + \dot{y}_i \cdot \Delta x. \end{cases} \quad (8^*)$$

Существенно увеличить точность расчетов при том же шаге  $\Delta x$  можно следующим образом. Значение производной  $\dot{y}(x)$  вычисляют не в начале, а в середине подинтервала  $[x_i; x_{i+1}]$ . Тем самым, мы приходим к методу половинного интервала, который также называют уточненным методом Эйлера:

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_o + f\left(x_o, y_o, \left(\frac{dy}{dx}\right)_o\right) \cdot \frac{\Delta x}{2}; \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1/2} + f\left(x_i, y_i, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1/2}\right) \cdot \Delta x; \\ y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cdot \Delta x. \end{cases} \quad (9)$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_{1/2} \approx \dot{y}_o + f(x_o, y_o, \dot{y}_o) \cdot \Delta x/2; \\ \dot{y}_{i+1/2} \approx \dot{y}_{i-1/2} + f(x_i, y_i, \dot{y}_{i-1/2}) \cdot \Delta x; \\ y_{i+1} \approx y_i + \dot{y}_i \cdot \Delta x. \end{cases} \quad (9^*)$$

Здесь  $\dot{y}_{1/2}$  – значение функции  $\dot{y}(x)$  в середине первого подинтервала  $[x_o; x_1]$ ,  $\dot{y}_{i+1/2}$  – значение функции  $\dot{y}(x)$  в середине подинтервала  $[x_i; x_{i+1}]$ .

Алгоритм решения ДУ второго порядка уточненным методом Эйлера:

1. Составить ДУ второго порядка в виде (4) или (4\*) и перейти к приближенным равенствам (5) и (6).

2. Задать начальные условия  $(x_o, y_o, \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = \dot{y}(x_o))$ . Смоделировать два разных набора значений переменной  $x$  с шагом  $\Delta x$

1) для функции  $\dot{y}(x)$ :

$$\begin{aligned} x_o \\ x_{1/2} &= x_o + \Delta x/2 \\ x_{3/2} &= x_{1/2} + \Delta x \\ x_{5/2} &= x_{3/2} + \Delta x \\ \dots \\ x_{i+1/2} &= x_{i-1/2} + \Delta x \\ \dots \end{aligned}$$

2) для функции  $y(x)$ :

$$\begin{aligned} x_o \\ x_1 &= x_o + \Delta x \\ x_2 &= x_1 + \Delta x \\ x_3 &= x_2 + \Delta x \\ \dots \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \\ \dots \end{aligned}$$

3. Вычислить значение функции  $\dot{y}(x)$  в середине первого интервала, т.е. в

точке  $x_{1/2} = x_o + \Delta x / 2$ :

$$\dot{y}_{1/2} \approx \dot{y}_o + f(x_o, y_o, \dot{y}_o) \cdot \Delta x / 2$$

где введены обозначения  $\dot{y}_{1/2} = \dot{y}(x_o + \Delta x / 2) = \dot{y}(x_{1/2})$  и  $\dot{y}_o = \dot{y}(x_o)$ .

4. Вычислить значение функции  $y(x)$  в точке  $x_1 = x_o + \Delta x$ :

$$y_1 \approx y_o + \dot{y}_{1/2} \cdot \Delta x.$$

5. Повторить процедуру, описанную в пп. 3 и 4 и найти

1) значение функции  $\dot{y}(x)$  в точке  $x_{3/2} = x_{1/2} + \Delta x$

$$\dot{y}_{3/2} = \dot{y}(x_{3/2}) \approx \dot{y}_{1/2} + f(x_1, y_1, \dot{y}_{1/2}) \cdot \Delta x;$$

2) значение функции  $y(x)$  в точке  $x_2 = x_1 + \Delta x$

$$y_2 = y(x_2) \approx y_1 + \dot{y}_{3/2} \cdot \Delta x$$

и т.д. для всех значений переменной  $x$ .

Полученные в результате решения ДУ методом половинного интервала значения можно представить в виде таблицы:

$x$	$\dot{y}$	$x$	$y$
$x_o$	$\dot{y}_o$	$x_o$	$y_o$
$x_{1/2}=x_o+\Delta x/2$	$\dot{y}_{1/2} \approx \dot{y}_o + f(x_o, y_o, \dot{y}_o) \cdot \Delta x/2$	$x_1=x_o+\Delta x$	$y_1 \approx y_o + \dot{y}_{1/2} \cdot \Delta x$
$x_{3/2}=x_{1/2}+\Delta x$	$\dot{y}_{3/2} \approx \dot{y}_{1/2} + f(x_1, y_1, \dot{y}_{1/2}) \cdot \Delta x$	$x_2=x_1+\Delta x$	$y_2 \approx y_1 + \dot{y}_{3/2} \cdot \Delta x$
$x_{5/2}=x_{3/2}+\Delta x$	$\dot{y}_{5/2} \approx \dot{y}_{3/2} + f(x_2, y_2, \dot{y}_{3/2}) \cdot \Delta x$	$x_3=x_2+\Delta x$	$y_3 \approx y_2 + \dot{y}_{5/2} \cdot \Delta x$
...	...	...	...
$x_{i+1/2}=x_{i-1/2}+\Delta x$	$\dot{y}_{i+1/2}$	$x_{i+1}=x_i+\Delta x$	$y_{i+1} \approx y_i + \dot{y}_{i+1/2} \cdot \Delta x$
...	...	...	...

Таким образом, вычисление значений функций  $\dot{y}(x)$  и  $y(x)$  проводится в точках, смещенных относительно друг друга на половину шага  $\Delta x$ . Отсюда и название метода – метод половинного интервала.

## РАЗДЕЛ I. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### Общие сведения о колебательном движении

**Колебательным движением**, или просто колебаниями, называют всякое движение или изменение состояния, характеризующее той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние. С колебаниями мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, переменных токов, радиоволн, качаний маятников и т. д. Оказывается, что существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Примерами колебательного движения могут служить колебания маятников, струн, мембран телефонов, заряда и тока в колебательном контуре и др.

Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Колебательное движение называют **периодическим**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Все виды колебаний можно классифицировать по следующим параметрам:

- по физической природе (механические и электромагнитные);
- по характеру возникновения и существования (свободные, вынужденные, параметрические, автоколебания);
- по характеру зависимости колеблющейся величины от времени (гармонические и негармонические).

Несмотря на разную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же физические закономерности; они описываются одними и теми же уравнениями, исследуются общими методами. В данном разделе мы рассмотрим **механические колебания**, т.е. повторяющиеся изменения положений и скоростей каких-либо тел или частей тел, происходящие при наличии упругих сил, силы тяжести, а также других сил.

Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые гармонические колебания. Колебания какой-либо физической величины  $A$  называются гармоническими, если они происходят по закону косинуса или синуса. Например, смещение колеблющейся точки в произвольный момент времени описывается уравнением

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

К величинам, характеризующим колебательный процесс, прежде всего, относятся период ( $T$ ) и частота ( $\nu$ ), а также амплитуда ( $x_{\max}$ ) и фаза.

Величину  $x_{\max}$ , равную максимальному значению колеблющейся величины, называют **амплитудой колебаний**.

Выражение  $(\omega t + \varphi_0)$ , стоящее под знаком синуса или косинуса, определяет состояние колеблющейся физической величины в данный момент времени  $t$ . Его называют **фазой колебания**. В момент начала отсчета времени

( $t=0$ ) фаза колебания равна  $\varphi_0$ . Поэтому величину  $\varphi_0$  называют начальной фазой колебания, и она, очевидно, зависит от выбора начала отсчета времени. Фазу измеряют в радианах.

Величину  $\omega$ , входящую в выражение для фазы колебания, называют циклической (или круговой) частотой колебаний. Физический смысл циклической частоты связан с понятиями периода колебаний  $T$  и частоты колебаний  $\nu$ . Периодом незатухающих колебаний называют тот наименьший промежуток времени  $T$ , по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За время  $T$  совершается одно полное колебание.

Частотой колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Тогда циклическая частота  $\omega = 2\pi\nu$  численно равна числу полных колебаний, совершаемых за  $2\pi$  секунд. В этом и состоит ее физический смысл.

Для того чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела. Такие силы называются *квазиупругими*.

Скорость (первая производная координаты по времени) и ускорение (вторая производная координаты по времени) в случае гармонических колебаний также будут изменяться по гармоническому закону:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -x_{\max} \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = v_{x\max} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \quad (2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = -x_{\max} \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = a_{x\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0 + \pi). \quad (3)$$

Отсюда видно, что скорость опережает смещение по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , а ускорение – на  $\pi$ , т.е. находится в противофазе со смещением.

Кроме аналитического способа описания поведения колебательной системы существует несколько способов его графического представления.

1) Временные ("плоские") диаграммы, где по горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной – смещение, скорость или ускорение (рис. 1). Для гармонических колебаний график изменения колеблющейся величины во времени имеет вид синусоиды или косинусоиды.

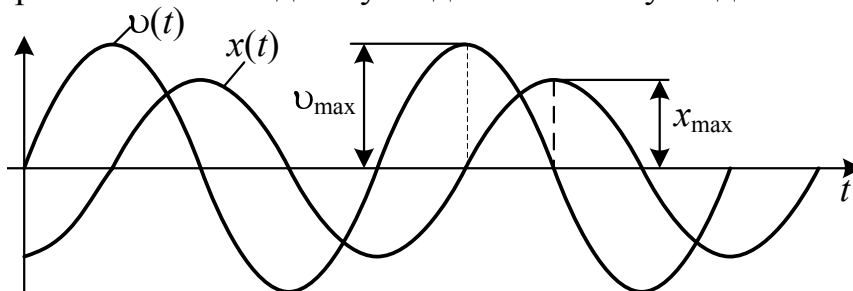


Рис. 1.  
Временные диаграммы  
гармонических  
колебаний.

2) Спектральный метод представления: по горизонтальной оси откладывается частота колебаний, а по вертикали – амплитуда (или энергия, пропорциональная квадрату амплитуды). В случае чисто гармонических колебаний спектр будет состоять из одной единственной линии (рис. 2).

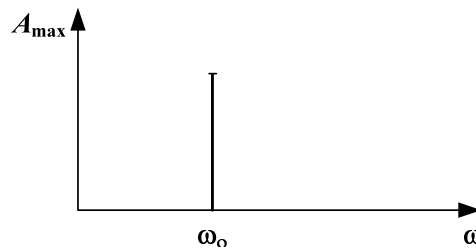


Рис. 2. Спектр гармонического колебания с частотой  $\omega_0$ .

3) Метод векторных диаграмм (применим только для гармонических колебаний): на плоскости (рис. 3) выбирают произвольное начало координат  $O$  и произвольную ось  $OO'$ . Изучаемая гармоническая величина представляется вращающимся с угловой скоростью  $\omega$  вектором, длина которого равна (или пропорциональна) амплитуде колебаний, и составляющим с осью  $OO'$  угол  $\varphi_0$ , совпадающий с начальной фазой. Тогда вертикальная проекция вектора на ось изменяется со временем по гармоническому закону (при этом положительным считается вращение вектора против часовой стрелки). Мгновенное положение вектора определяется углом  $\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$ , т.е. фазой колебаний в соответствующий момент времени.

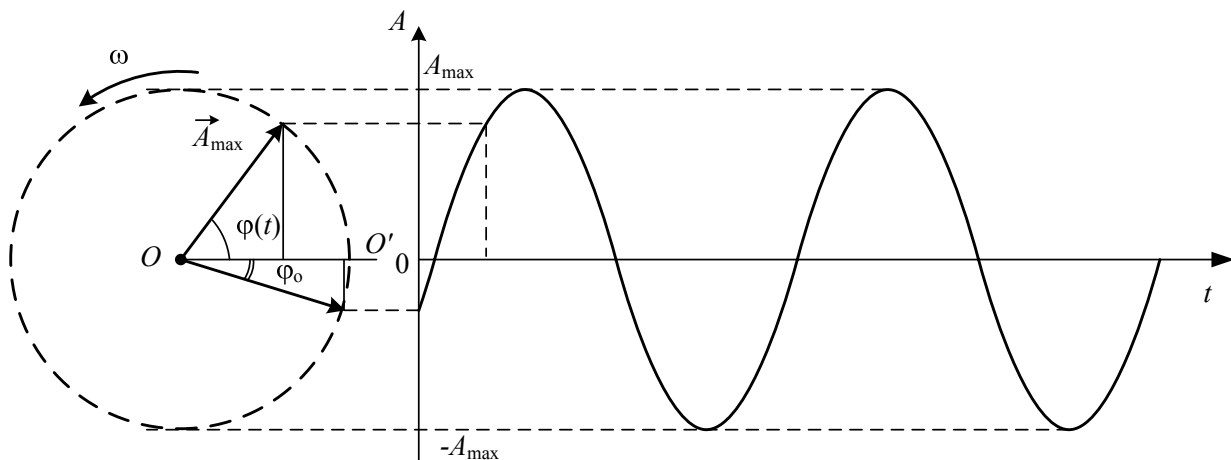


Рис. 3. Векторная диаграмма и связь вращательного и колебательного движений.

Ценность этого метода особенно проявляется при суммировании нескольких движений равной частоты.

Пусть, например, нужно сложить два колебания с одинаковыми частотами (рис. 4)  $A_1 = A_{\max 1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{o1})$  и  $A_2 = A_{\max 2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{o2})$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1(t) + A_2(t) = A_{\max 1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{o1}) + A_{\max 2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{o2}) = \\ &= A_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_o). \end{aligned}$$

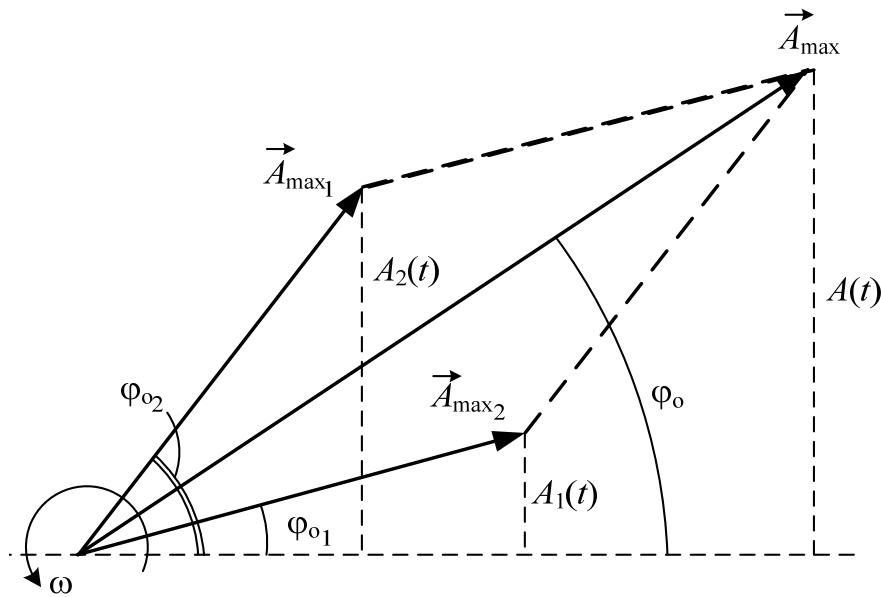


Рис. 4. Сложение гармонических колебаний одной частоты.

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания легко найти из рис. 4, на котором операция сложения гармонических величин представлена как операция сложения векторов  $\vec{A}_{\max 1}$  и  $\vec{A}_{\max 2}$  в момент времени  $t=0$ :

$$\vec{A}_{\max} = \vec{A}_{\max 1} + \vec{A}_{\max 2},$$

$$A = \sqrt{(A_{\max 1} \cdot \cos \varphi_{o1} + A_{\max 2} \cdot \cos \varphi_{o2})^2 + (A_{\max 1} \cdot \sin \varphi_{o1} + A_{\max 2} \cdot \sin \varphi_{o2})^2},$$

$$\varphi_o = \arctg \frac{A_{\max 1} \cdot \sin \varphi_{o1} + A_{\max 2} \cdot \sin \varphi_{o2}}{A_{\max 1} \cdot \cos \varphi_{o1} + A_{\max 2} \cdot \cos \varphi_{o2}}.$$

Ясно, что вертикальная проекция результирующего вектора  $\vec{A}_{\max}$  также будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой, поскольку взаимное расположение векторов  $\vec{A}_{\max 1}$  и  $\vec{A}_{\max 2}$  не изменяется с течением времени.

Способ векторных диаграмм тесно связан с удобным аналитическим способом представления гармонической величины комплексным числом (простые задачи, рассматриваемые в пособии, не требуют применения этого метода)

4) Метод фазовых диаграмм, удобный для качественного анализа движений (и не только гармонических!). В любой колебательной системе с одной степенью свободы смещение и скорость меняются со временем. Состояние системы в каждый момент времени можно характеризовать двумя значениями  $x$  и  $v$ , и на плоскости этих переменных это состояние однозначно определяется положением изображающей точки с координатами  $(x; v)$ . С течением времени изображающая точка будет перемещаться по кривой, которую называют *фазовой траекторией* движения. Анализ траектории позволяет судить об особенностях процесса.

Плоскость переменных  $x$  и  $v$  называется *фазовой плоскостью*. Семейство фазовых траекторий образует фазовый портрет колебательной системы.

Для периодического движения фазовая траектория – замкнутая кривая. В частности, фазовый портрет гармонического осциллятора представляет собой семейство эллипсов, каждому из которых соответствует энергия  $E=E_p+E_k$ , запасенная осциллятором. Покажем, что это действительно так. Координата и скорость гармонического колебания изменяются по закону косинуса или синуса:

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_o),$$

$$\dot{x} = -\omega \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o).$$

Чтобы найти уравнение фазовой траектории надо исключить из данных уравнений время:

$$\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 + \left(-\frac{\dot{x}}{\omega \cdot x_{\max}}\right)^2 = 1$$

– уравнение эллипса.

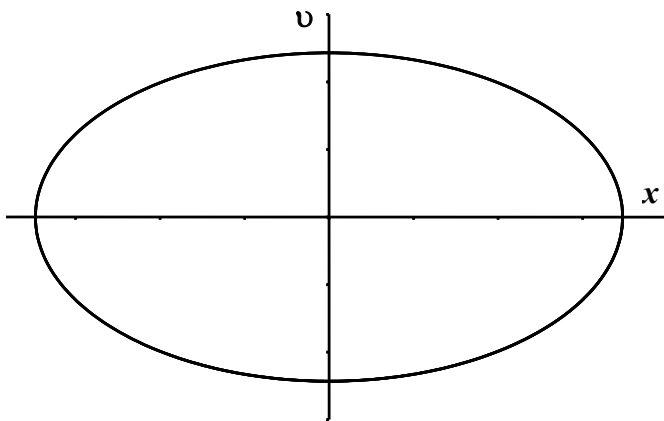


Рис. 5. Фазовая диаграмма гармонического осциллятора.

Фазовые диаграммы затухающих колебаний представляют собой спирали, скручивающиеся к началу координат тем быстрее, чем меньше добротность системы (рис. 6):

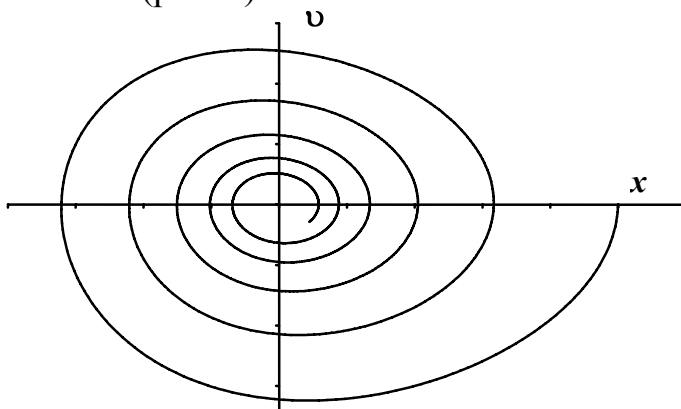


Рис. 6. Фазовая диаграмма затухающего колебания.

Особое внимание, уделяемое в физике и технике гармоническому движению, объясняется, прежде всего, тем, что существует громадное число физических систем, совершающих гармоническое движение (с очень большой степенью точности). Кроме того, периодическое негармоническое движение можно свести к сумме гармонических движений, причем эти составные движения доступны непосредственному наблюдению при помощи современной аппаратуры.

Лабораторная работа № 1.1.  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Цель работы: моделирование свободных колебаний математического маятника.

Оборудование: апплет "Математический маятник" (*Java Applets on Physics by Walter Fendt* <http://home.augsburg.baynet.de/walter.fendt/>), ЭТ MS Excel.

### 1. Свободные колебания

Колебания, возникающие в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе, называют свободными. Эти колебания совершаются только за счет первоначально сообщенной энергии, без дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему.

Если система консервативная, то при колебаниях не происходит рассеяния энергии. Такие колебания будут незатухающими.

Уравнение свободных незатухающих колебаний, называемое уравнением гармонического осциллятора, имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (1)$$

Решением этого линейного дифференциального однородного уравнения будет периодическая функция, изменяющаяся по гармоническому закону

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o). \quad (1a)$$

Свободные незатухающие колебания происходят с частотой  $\omega_o$ , называемой собственной и определяемой параметрами колебательной системы.

В любой реальной колебательной системе есть силы сопротивления (трения), действие которых приводит к тому, что энергия системы постепенно расходуется на нагревание окружающей среды и самой системы. В результате амплитуда колебаний со временем уменьшается. Такие свободные колебания называют затухающими.

Во многих практических случаях силу механического сопротивления можно считать пропорциональной скорости:

$$F_{mp} = f \cdot v$$

или для проекции:

$$F_{mp_x} = -f \cdot \frac{dx}{dt} = -f \cdot \dot{x},$$

где  $f$  – коэффициент сопротивления. С учетом сопротивления (1) принимает вид:

$$\ddot{x} + \frac{f}{m} \dot{x} + \omega_o^2 \cdot x = 0 \text{ или } \ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_o^2 \cdot x = 0, \quad (2)$$

где  $\frac{f}{2m} = \beta$  – коэффициент затухания, характеризующий быстроту затухания колебаний. Аналитическим решением этого уравнения будет негармоническая функция:



$$x = x_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2a)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний. Амплитуда затухающих колебаний  $A = x_0 e^{-\beta t}$ , как видно, монотонно убывает со временем, и в этом смысле затухающие колебания нельзя назвать периодическими, т.к. состояние системы никогда в точности не повторяется. Однако, поскольку тело периодически (через равные промежутки времени) проходит через положение равновесия, эти колебания можно характеризовать некоторым условным периодом, называемым периодом затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}} > T_0, \quad (3)$$

где  $T_0$  – период собственных незатухающих колебаний.

Экспоненциальный характер убывания амплитуды позволяет ввести безразмерный параметр – *логарифмический декремент затухания*  $\lambda$ , который равен логарифму отношения двух амплитудных значений колеблющейся величины, разделенных одним периодом:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = \beta T,$$

и может быть представлен как произведение коэффициента затухания на период. В свою очередь, это произведение есть величина, обратная числу полных колебаний  $N_e$ , совершаемых за время, в течение которого амплитуда убывает в  $e$  раз ( $e$  – основание натурального логарифма  $e \approx 2,718$ ). Таким образом, логарифмический декремент затухания характеризует относительную убыль амплитуды затухающих колебаний.

Если трение велико, то система, выведенная из положения равновесия, возвращается в него, не совершая колебаний (*критическое затухание*). Такое движение называют апериодическим. В случае малого затухания колебательный характер сохраняется. "Качество" колебательной системы принято характеризовать безразмерным параметром, называемым *добротностью*  $Q$ . Добротность пропорциональна отношению запасенной энергии  $E(t)$  к энергии  $\Delta E_T$ , теряемой за период, т.е. определяет относительную убыль энергии колебаний за период

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T}.$$

Можно показать, что при малых колебаниях добротность связана с логарифмическим декрементом простым соотношением:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \cdot N_e.$$

Очевидно, чем выше добротность системы, тем дольше существуют в ней затухающие колебания.

## 2. Математический маятник

Одной из самых простых и распространенных моделей колебательных систем является **математический маятник**: материальная точка массы  $m$ , подвешенная на нерастяжимой нити длиной  $\ell$  и совершающая колебания строго в вертикальной плоскости. Возвращающей силой в этом случае является проекция силы тяжести на касательную к траектории, по которой движется материальная точка (рис. 1).

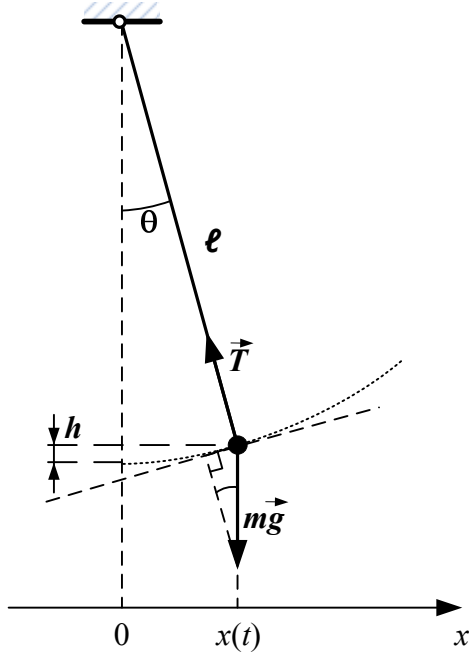


Рис. 1.

Колебания математического маятника:  $\theta(t)$  и  $x(t)$  – угловое и линейное смещение маятника от положения равновесия в данный момент времени;  $h = \ell(1 - \cos \theta)$  – высота поднятия относительно нулевого уровня.

При малых углах отклонения от вертикали ( $\theta \ll 1$  рад,  $\sin \theta \approx \theta$ ) эта сила приблизительно прямо пропорциональна смещению:

$$F_x = -mg \cdot \sin \theta \approx -mg \cdot \theta = -mg \frac{x}{\ell}. \quad (4)$$

Здесь  $x = \ell \cdot \theta$  – линейное смещение маятника из положения равновесия. Тогда дифференциальное уравнение движения маятника

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot x = -\omega_o^2 \cdot x. \quad (5)$$

Круговая (циклическая) частота колебаний (называемая в этом случае *собственной*) принимается равной  $\omega_o = \sqrt{g/\ell}$ , период колебаний  $T_o = 2\pi/\omega_o = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Как видно, период колебаний и собственная частота математического маятника не зависят от его массы. Решением (5) будет периодическая функция

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi_o), \quad (6)$$

описывающая гармонические колебания (математическая модель свободных незатухающих колебаний математического маятника).

При гармонических колебаниях кинетическая и потенциальная энергия системы периодически изменяются, но полная механическая энергия замкнутой

системы, в которой отсутствуют силы сопротивления, остается неизменной. В результате происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Получим уравнение колебаний, используя основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum_i M_i, \quad (7)$$

где  $J = m\ell^2$  – момент инерции математического маятника, а  $\sum_i M_i$  – алгебраическая сумма моментов сил, действующих на тело, относительно неподвижной оси вращения.

Усложним задачу и учтем, что при движении в вязкой среде маятник испытывает действие силы сопротивления (рис. 2). Распишем вращательные моменты, создаваемые силой тяжести ( $M_1$ ) и силой сопротивления ( $M_2$ ), в предположении, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости<sup>1</sup>:

$$M_1 = -mg \cdot \ell \cdot \sin \theta, \quad M_2 = -f \frac{d\theta}{dt} \cdot \ell^2,$$

где  $f$  – коэффициент сопротивления.

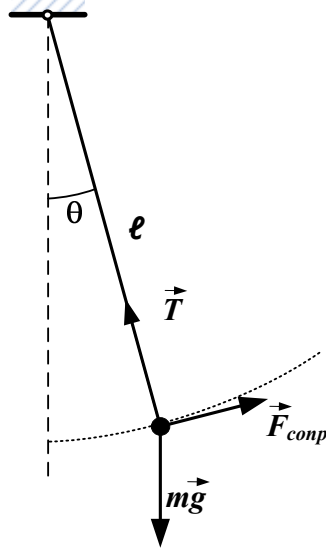


Рис. 2.

Тогда (7) перепишется в виде:  $m\ell^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg\ell \cdot \sin \theta - f \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \ell^2$ , откуда

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin \theta - \frac{f}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0^2 \cdot \sin \theta - 2\beta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad (8)$$

где  $\omega_0^2$  – собственная циклическая частота колебаний маятника,  $\beta = \frac{f}{2m}$  – коэффициент затухания. Мы получили уравнение свободных затухающих колебаний математического маятника (математическая модель процесса). При

<sup>1</sup> Сила натяжения не создает вращательный момент.

наличии трения в системе колебания маятника затухают (амплитуда колебаний со временем уменьшается), и величина  $\beta$  характеризует быстроту этого затухания. Если трение пренебрежимо мало, то в случае малых отклонений ( $\sin\theta \approx \theta$ ) (8) переходит в уравнение свободных незатухающих колебаний, решением которого будет периодическая функция  $\theta = \theta_{\max} \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o)$ .

Решение (8) методом половинного интервала<sup>2</sup> приводит к системе уравнений (*расчетные формулы*)

$$\begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_o - \left(\frac{g}{\ell} \cdot \sin \theta_o + \frac{f}{m} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_o\right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} - \left(\frac{g}{\ell} \cdot \sin \theta_i + \frac{f}{m} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2}\right) \cdot \Delta t; \\ \theta_{i+1} \approx \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (9)$$

Первое уравнение (используется только один раз!) позволяет определить скорость тела  $d\theta/dt$  в середине первого подинтервала времени, т.е. в момент  $t_{1/2} = t_o + \Delta t / 2 = \Delta t / 2$  (начальный момент времени принимается равным нулю). Второе уравнение используется для вычисления скорости в середине каждого следующего подинтервала, т.е. в моменты  $t_{3/2}, t_{5/2}, \dots, t_{i+1/2} = t_{i-1/2} + \Delta t, \dots$ , а третье – для вычисления координаты в конце каждого подинтервала (в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{i+1} = t_i + \Delta t, \dots$ ). Из анализа (9) видно, что, в отличие от аналитического решения (6), численное решение не позволяет 1) установить вид функциональных зависимостей  $d\theta/dt(t)$  и  $\theta(t)$ , и 2) рассчитать значение координаты или скорости в произвольный момент времени, т.к. уравнения (9) вообще не содержат переменную  $t$ .

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Работа с компьютерной моделью "Математический маятник"

1. Открыть апплет "[Математический маятник](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). В правой части окна апплета расположены кнопки, а также различные поля – ввода и выбора, – позволяющие управлять демонстрацией (рис. 3).

Запуск демонстрации осуществляется кнопкой **START**. В нижней части окна апплета выводятся значения периода (**Oscillation Period**) и амплитуды колебаний (**Max. Elongation**) для установленных параметров маятника (его длины, массы и начального отклонения от положения равновесия). Вид выводимого графика и дополнительные элементы рисунка (траектория движения, вектор скорости или тангенциального ускорения, действующие на маятник силы,

<sup>2</sup> Подробнее см. Введение. Решение дифференциальных уравнений численным методом.

соотношение между кинетической и потенциальной энергиями) можно изменять с помощью полей выбора:

- **Elongation** (Смещение),
- **Velocity** (Скорость),
- **Tangential Acceleration** (Тангенциальное ускорение – направлено по касательной к траектории движения маятника),
- **Force** (Сила);
- **Energy** (Энергия).

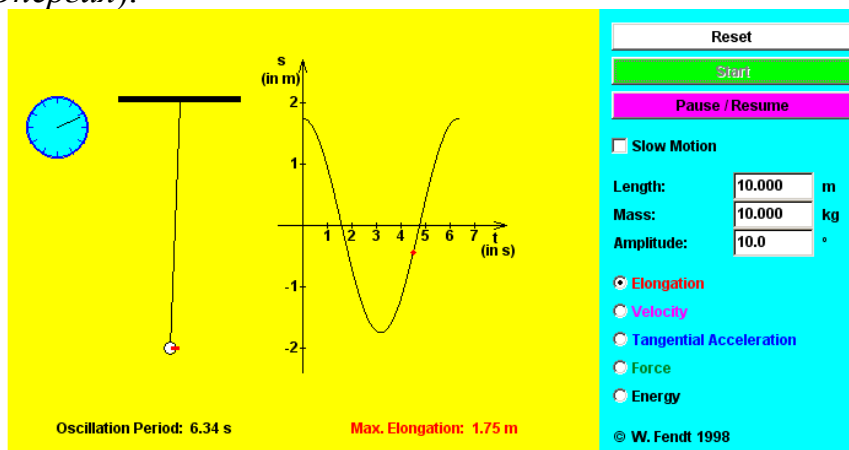


Рис. 3. Окно апплета для изучения гармонических колебаний математического маятника.

Кнопка **PAUSE/RESUME** позволяет прерывать (временно приостанавливать) и возобновлять демонстрацию. Для установки новых параметров маятника необходимо предварительно нажать кнопку **RESET** (сброс всех установок). Ввод параметров осуществляется с клавиатуры в соответствующее поле (**Length** – длина нити; **Mass** – масса; **Amplitude** – начальное отклонение нити (в градусах)) и обязательно заканчивается нажатием клавиши **Enter**.

2. Познакомиться с окном апплета. Запустить демонстрацию с предложенными по умолчанию параметрами. Вывести поочередно всевозможные виды графиков.

3. Определить экспериментальным путем границы изменения каждого из трех параметров (длины –  $\ell$ , массы –  $m$  и угла отклонения –  $\theta$ ). Выписать полученные значения в тетрадь. Для заданных  $\ell$  и  $\theta$  установить, влияет ли масса маятника на период колебаний (эксперимент проводится не менее чем для 4÷5 различных значений массы).

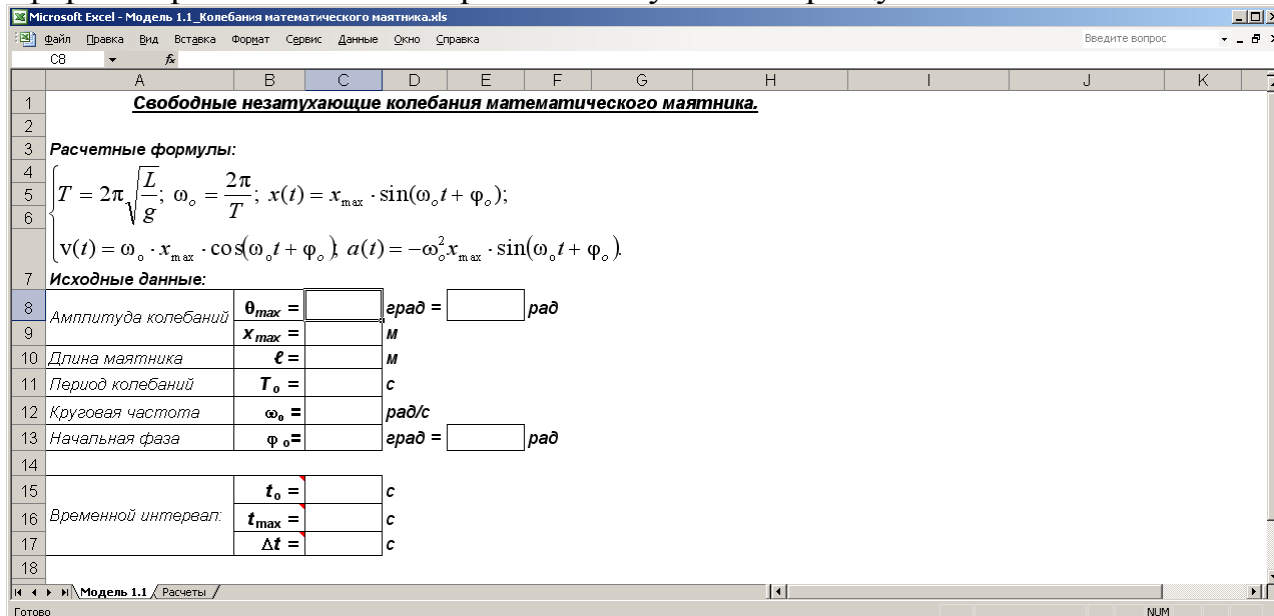
4. Установить аналогичным образом влияние на период колебаний двух других параметров. Проверить результат с помощью соответствующей формулы периода незатухающих гармонических колебаний математического маятника.

5. Для следующих параметров: длина нити  $\ell = 10$  м, масса  $m = 5$  кг, угол отклонения  $\theta = 2^\circ$  выписать период и амплитуду колебаний. Зарисовать в тетрадь все графики (с числовыми метками и подписями по каждой из осей).

**Задание № 2. Моделирование свободных незатухающих колебаний математического маятника в ЭТ MS Excel**

1. Запустить Excel.

2. Открыть шаблон 1.1\_Колебания математического маятника.XLT или оформить рабочий лист по прилагаемому ниже образцу.



Исходные данные:

- 1) амплитуда колебаний:  $\theta_{\max}$  (максимальное угловое смещение) и  $x_{\max}$  (максимальное линейное смещение);
- 2) начальная фаза  $\varphi_0$ ;
- 3) длина нити  $\ell$ ;
- 4) временной интервал.

**Постоянные** величины: амплитуда, начальная фаза, длина нити, период (частота) колебаний. **Переменные** – смещение тела в каждый момент времени (координата  $x$ ), скорость и время.

3. Заполнить лист **Модель 1.1**.

- 1). Занести *исходные числовые данные* в ячейки **C8, C10, C13, C15** и **C16**. Для примера:

$$\theta_{\max}=2^\circ; \ell=10 \text{ м}; t_{\max}=15 \text{ с}; \varphi_0=0^\circ.$$

*Начальный момент времени (ячейка **C15**) принимается равным нулю.*

- 2). Ввести формулы, позволяющие рассчитать максимальное линейное смещение, период, частоту колебаний, а также шаг изменения времени  $\Delta t$  (число подинтервалов  $n$  определяется по *таблице данных* (лист **Расчеты**) – оно должно быть на 1 меньше количества точек таблицы) в ячейки **C9, C11, C12** и **C17** соответственно. Количество значащих цифр в ускорении свободного падения ( $g \approx 9,80665 \text{ м/с}^2$ ) и числе  $\pi$  ( $\pi \approx 3,14159265358979$ ) выбирается в соответствии с данными задачи.

- 3). Произвести пересчет угла отклонения маятника и начальной фазы из

градусной меры в радианы с помощью встроенной функции РАДИАНЫ(). Например, для амплитуды колебаний:

- выделить ячейку **E8** и выполнить команду **Вставка⇒Функция...**;
- в поле "**Категория**" выбрать **Математические**, в поле "**Функция**" – **РАДИАНЫ**;
- в поле "**Угол**" панели формул ввести ссылку на ячейку **C8** и нажать кнопку **ОК** (или клавишу **Enter**).

Аналогичная формула вводится в ячейку **E13**.

4. На отдельном листе (**Расчеты**) заполнить таблицу "*Аналитическое решение*" ("*Время, с - Координата, м - Скорость, м/с - Ускорение, м/с<sup>2</sup>*").

№№ п/п	Время, с	Координата, м	Скорость, м/с	Ускорение, м/с <sup>2</sup>	Кинетическая энергия, Дж	Потенциальная энергия, Дж	Полная энергия, Дж
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

1). Столбец **В** должен содержать значения времени, отличающиеся на величину  $\Delta t$ , при этом ячейку **B4** необходимо *связать* с **C15** (из *таблицы исходных данных* с листа **Модель 1.1**), чтобы отслеживать изменение значения начального момента времени. В следующую ячейку столбца вводится формула, которая затем копируется в диапазон **B5:B104**.

2). В столбцах **С, D, E** рассчитать значения координаты, скорости и ускорения в соответствующие моменты времени из столбца **В**.

**Примечание:** При составлении формул не забывайте использовать абсолютные ссылки на *постоянные* величины из *таблицы исходных данных*.

5. Изменить имя листа **Модель 1.1** на **Математический маятник**.

6. Построить необходимые графики:

1). По результатам расчетов строятся три графика:  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $a(t)$ . Поскольку во всех случаях по оси  $Ox$  откладывается одна и та же величина (время), все три зависимости можно представить в одной системе координат. Такой способ построения применяется в тех случаях, когда необходимо провести сравнение нескольких различных (возможно даже неоднородных) величин или исследовать поведение некоторой величины в зависимости от начальных

условий или условий проведения эксперимента. Однако он имеет и недостатки: он применим только тогда, когда сравниваемые величины имеют один и тот же порядок.

2). Диапазон данных для построения диаграммы – блок ячеек **B4:E104**. Программа *Excel* автоматически будет рассматривать этот диапазон как три ряда данных, а именно: 1-ый ряд – (**B4:C104**) (зависимость координаты от времени), 2-ой ряд – (**B4:B104; D4:D104**) (зависимость скорости от времени) и 3-ий ряд – (**B4:B104; E4:E104**) (зависимость ускорения от времени), причем первая колонка (диапазон **B4:B104**) будет *общей для всех рядов данных*.

3). Дальнейшее построение ведется по стандартному плану. Основные требования:

- тип диаграммы – **Точечная**;
- имя рядов данных: *Координата, м, Скорость, м/с и Ускорение, м/с<sup>2</sup>* (вводятся в соответствующее поле с клавиатуры или в виде ссылки на соответствующие ячейки *Таблицы данных*);
- параметры диаграммы:
  - "**Название диаграммы**" – Графики колебательного процесса;
  - "**Ось X (категорий)**" – Время  $t$ , с;
  - "**Ось Y (значений)**" – Координата (м); Скорость (м/с); Ускорение (м/с<sup>2</sup>);
- включить основные линии сетки по обеим осям;
- вывести легенду и указать ее размещение на диаграмме ("**внизу**");
- расположение – на отдельном листе.

7. Сравнить графики с полученными в *Задании № 1*.

8. Ввести новый параметр – массу маятника. Ее числовое значение заносится в ячейку **C19** *таблицы исходных данных* (принять  $m=5$  кг). Добавить три новые колонки в *таблицу данных* (лист **Расчеты**): "*Кинетическая энергия, Дж*"; "*Потенциальная энергия, Дж*"; и "*Полная механическая энергия, Дж*" (столбцы **F, G, H**).

9. В столбце **F** таблицы рассчитать кинетическую энергию маятника  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  в различные моменты времени.

10. В столбце **G** таблицы рассчитать потенциальную энергию маятника:  $E_p = mgh$ , где  $h$  – высота поднятия маятника относительно начального (нулевого) уровня в соответствующий момент времени (см. рис. 1):

$$h = \ell - \ell \cdot \cos \theta = \ell(1 - \cos \theta). \quad (7)$$

11. В колонке "*Полная механическая энергия, Дж*" (столбец **H**) определить сумму кинетической и потенциальной энергий в каждый момент времени заданного временного интервала.

12. Построить на одной диаграмме графики зависимости каждого вида энергии от времени.



13. Сравнить все построенные диаграммы с полученными в компьютерной модели "Математический маятник".

14. Сохранить данные в файле 1.1\_Математический маятник.xls.

### Задания для самостоятельной работы

1. Изменяя начальные данные (начальное отклонение, фазу и длину маятника), проследить за изменением вида графиков.
2. Разобрать вопрос о соотношении величин  $x_{\max}$  и  $\ell$  (в частности, может ли быть  $x_{\max} > \ell$ ).
3. Определить по графикам сдвиг фаз между колебаниями каждой пары величин. Это удобно выполнить для случая, когда начальная фаза колебаний равна нулю.
4. Изменяя момент времени  $t_{\max}$  (и, тем самым, – интервал  $\Delta t$ ), определить границы применимости данной модели.

### **Задание № 3. Моделирование свободных затухающих колебаний математического маятника в ЭТ MS Excel**

1. Получить самостоятельно решение (9), пользуясь алгоритмом, изложенным в разделе "Введение. Решение дифференциальных уравнений численным методом".

2. Добавить в *таблицу исходных данных* значения угловой скорости маятника в начальный момент времени и коэффициент сопротивления, приняв их для начала равными нулю. Рассчитать циклическую частоту и период затухающих колебаний. Математически определить, при каком коэффициенте сопротивления процесс перестает быть периодическим (критическое затухание).

3. На листе **Расчеты** составить и заполнить еще одну *таблицу данных* для численного решения задачи ("*Время, с – Угловая скорость, с<sup>-1</sup> – Время, с – Смещение, рад*", см. ниже пример оформления таблицы).

Введение двух колонок "*Время, с*" необходимо потому, что вычисление скорости и координаты проводится в разные моменты времени, смещенные относительно друг друга на величину  $\Delta t/2$ . Так, в ячейки **K4** и **M4** копируется с установлением связи между соответствующими ячейками начальный момент времени (ячейка **C13** с листа **Математический маятник**), после чего в ячейку **M5** заносится формула для вычисления момента времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , которая сразу копируется в нижележащий диапазон ячеек; а в ячейку **K5** вводится промежуточная формула для вычисления момента  $t_{1/2} = t_0 + \Delta t/2$ , отстоящего от начального на величину  $\Delta t/2$ . Дальнейшее изменение времени в столбце **K** также должно происходить через интервал  $\Delta t$  ( $t_{3/2} = t_{1/2} + \Delta t$ ,  $t_{5/2} = t_{3/2} + \Delta t$  и т.д.).

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1			<b>Численное решение</b>									
2												
3		<b>№№ п/п</b>	<b>Время, с</b>	<b>Скорость, рад/с</b>	<b>Время, с</b>	<b>Угловое смещение, рад</b>	<b>Смещение, м</b>					
4		1										
5		2										
6		3										
7		4										
8		5										
9		6										
10		7										
11		8										
12		9										
13		10										
14		11										
15		12										
16		13										
17		14										
18		15										

4. В столбцах **L**, **N** и **O** вычисляются значения скорости и смещения маятника от положения равновесия (угловое и линейное):

1) ячейки **L4**, **N4** и **O4** связываются с соответствующими ячейками листа **Математический маятник** (при этом начальное отклонение маятника принимается равным амплитудному значению);

2) в ячейку **L5** (колонок "Скорость,  $s^{-1}$ ") вводится промежуточная формула, вычисляющая значение скорости в середине первого интервала, т.е. спустя время  $\Delta t/2$  после начала отсчета (первая формула системы (9)). Дальнейшее вычисление скорости в нижележащих ячейках столбца **L** ведется по итерационной формуле через шаг  $\Delta t$  (вторая формула системы (9));

3) в ячейку **E5** вводится формула для вычисления координаты, которая затем копируется в нижележащие ячейки (третья формула системы (9));

4) в ячейках столбца **O** проводится расчет линейного смещения (координаты  $x$ ) через известный угол отклонения (столбец **N**) и длину маятника.

**Примечание:** 1. Обратите внимание на то, что при вычислении угловой скорости и смещения **не используются значения времени** из колонок "Время, с"! Они нужны только для построения графиков.

2. При составлении формул не забывайте использовать абсолютные ссылки для *постоянных* величин.

5. Провести построение графиков  $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $x(t)$  на одной диаграмме.

6. Отдельно по имеющимся *таблицам данных* для аналитического и численного решения построить графики зависимости линейного смещения от времени на одной диаграмме (сдвиг фаз принять равным нулю). Сравнить результаты. Проверить, как влияет шаг программы на точность приближения (для малых углов колебаний!). Увеличивая количество подинтервалов

выбранного временного отрезка, добиться совпадения графиков.

7. Увеличивая начальное отклонение маятника, выяснить, когда перестает работать модель "*Аналитическое решение*". Объяснить расхождение графиков.

8. Для малых колебаний, изменяя коэффициент сопротивления, выяснить

1) одинакова ли частота незатухающих и затухающих колебаний (определить по графику период затухающих колебаний и сравнить его с теоретическим значением периода для незатухающих колебаний);

2) от чего и как зависит быстрота затухания колебаний;

3) при каком значении  $f$  процесс перестает быть периодическим (маятник, выведенный из положения равновесия, просто возвращается в него без возникновения колебаний – апериодический процесс). Сравнить его с вычисленным значением.

9. Подобрать параметры установки так, чтобы наблюдалось не менее  $12 \div 15$  периодов затухающих колебаний. Выписать из *таблицы данных* численного решения амплитудные значения линейного смещения маятника в одну сторону от положения равновесия и соответствующие им моменты времени. По полученным данным построить график зависимости амплитуды от времени и подобрать к нему линию тренда с выводом уравнения на диаграмме. Каков закон убывания амплитуды затухающих колебаний?

## Лабораторная работа № 1.2.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТЕЙШИХ  
ПРУЖИННЫХ МАЯТНИКОВ**

Цель работы: моделирование свободных колебаний простейших пружинных маятников.

Оборудование: апплет "Пружинный маятник\_Свободные колебания" (*Java Applets on Physics by Walter Fendt* <http://home.augsburg.baynet.de/walter.fendt/>), ЭТ MS Excel.

**Введение**

Простейший пружинный маятник представляет собой материальную точку массы  $m$ , прикрепленную к одному из концов упругой пружины и способную двигаться поступательно и прямолинейно. Точкой можно заменить и тело конечных размеров, если наложить требование одной степени свободы и пренебречь деформацией тела. Подобная идеализация оправдана, если длина пружины мала, так что можно считать, что вся она деформируется одновременно (время распространения деформации должно быть много меньше периода колебаний). Энергия упругой деформации тела должна быть много меньше его кинетической энергии. Для пружины же, наоборот, энергия деформации должна быть много больше ее кинетической энергии (именно в этом смысле говорят о невесомой пружине и абсолютно твердом, недеформируемом теле). Наконец, пружина должна подчиняться закону Гука, т.е. амплитуда колебаний должна быть мала.

**Задача 1.** Тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине<sup>3</sup> жесткостью  $k$ , совершает колебания вдоль горизонтальной оси (рис. 1).

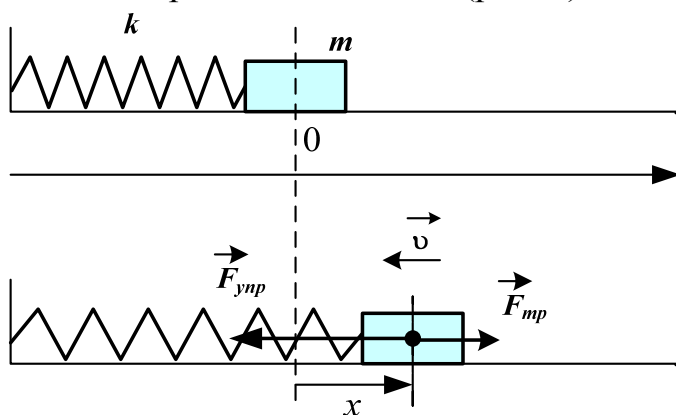


Рис. 1.

К составлению уравнений простейшего пружинного маятника.

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.1)$$

где  $m$  – масса тела,  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сил, приложенных к телу,  $\vec{a}$  – ускорение, сообщаемое этой силой. Ось  $Ox$  направим вправо, и начало отсчета совместим с положением равновесия тела (пружина не деформирована).

Пренебрежем для начала затуханием колебаний, т.е. положим, что трение в

<sup>3</sup> Здесь и далее массой пружин пренебрегают.

системе отсутствует ( $\vec{F}_{mp} = 0$ ), и будем считать, что на тело действует только сила упругости  $\vec{F} = \vec{F}_{упр}$ . Именно она и сообщает телу ускорение. В проекции на выбранное направление уравнение движения переписывается в виде:

$$ma_x = F_x, \quad (1.2)$$

где  $a_x$  – проекция ускорения на ось  $Ox$ ,  $F_x$  – проекция силы упругости на ту же ось. Эта проекция прямо пропорциональна смещению тела из положения равновесия (при данном выборе начала отсчета – его координате), причем проекция силы и координата имеют противоположные знаки (т.к. сила упругости всегда противоположна смещению тела):  $F_x = -kx$ , где  $x$  – координата тела (смещение). Следовательно, уравнение (1.2) принимает вид:

$$ma_x = -kx. \quad (1.3)$$

Это и есть уравнение движения тела под действием силы упругости.

Перепишем его в другом виде, выразив проекцию ускорения:

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad (1.4)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (1.4, a)$$

уравнение свободных незатухающих колебаний пружинного маятника<sup>4</sup> – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Величина  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  представляет собой собственную циклическую частоту колебательной системы.

Аналитическое решение этого уравнения (математическая модель):

$$\begin{cases} x = x_{\max} \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o); \\ v_x = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi_o) = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o + \frac{\pi}{2}); \\ a_x = -\omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o) = \omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o + \pi). \end{cases} \quad (*)$$

Эти формулы позволяют найти величины  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x$  в любой момент времени. Они были получены в математическом анализе путем аналитического решения уравнения (1.4, a). Однако, поскольку движение тела происходит под действием переменной силы (а, следовательно, не является равноускоренным), задача эта крайне сложна.

Для решения (1.4) воспользуемся методом половинного интервала<sup>5</sup> и составим систему уравнений (расчетные формулы):

<sup>4</sup> Сравните с уравнением колебаний математического маятника.

<sup>5</sup> Подробнее см. Введение. Решение дифференциальных уравнений численным методом.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_o - \frac{k}{m} \cdot x_o \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} - \frac{k}{m} \cdot x_i \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (1.5)$$

Предположим теперь, что помимо силы упругости на тело действует сила трения, пропорциональная скорости движения  $F_{mp} = f \cdot v$ , где  $f$  – коэффициент трения (сопротивления). Тогда уравнение движения (с учетом того, что сила трения направлена противоположно скорости) примет вид:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k \cdot x - f \cdot \frac{dx}{dt}; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{f}{m} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} \cdot x = -2\beta \cdot \frac{dx}{dt} - \omega_o \cdot x, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $x$  – смещение тела из положения равновесия в произвольный момент времени;  $\frac{dx}{dt}$  – скорость тела в тот же момент,  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  – собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника,  $\beta = f/2m$  – коэффициент затухания. Это уравнение свободных затухающих колебаний, и оно также легко решается методом половинного интервала.

**Задача 2.** Тело массой  $m$ , подвешенное на пружине жесткостью  $k$ , совершает колебания в вертикальной плоскости (рис. 2).

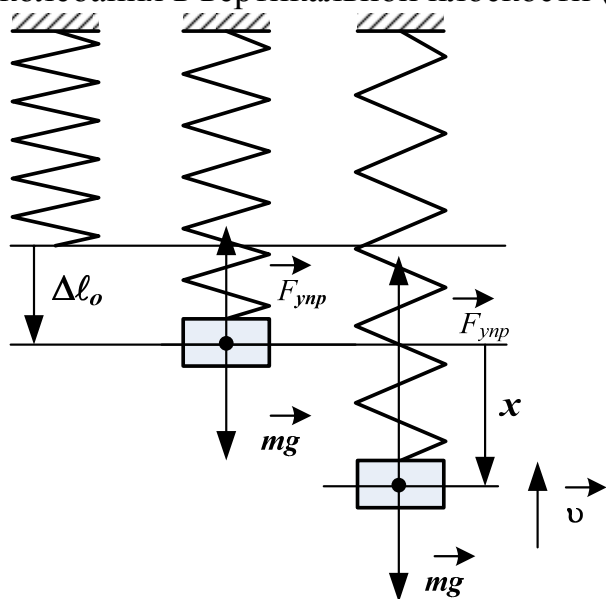


Рис. 2.

Случай вертикального расположения пружины (вертикальный пружинный маятник) отличается от рассмотренного выше (горизонтального маятника) только действием силы тяжести, влияние которой скажется лишь в том, что положение равновесия, относительно которого происходят колебания, несколько сместится.

В положении равновесия сила тяжести, действующая на тело, уравнивается силой упругости:

$$\vec{F}_{упр} + m\vec{g} = 0.$$

Поэтому начальное статическое удлинение пружины найдется из условия:

$$k \cdot \Delta \ell_o = mg, \text{ откуда } \Delta \ell_o = \frac{mg}{k}.$$

Выведем тело из положения равновесия, например, растянув или сжав пружину (можно также сообщить телу скорость), и отпустим его.

В отсутствии сопротивления тело будет совершать незатухающие колебания. Уравнение движения:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g}.$$

В проекции на ось:  $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \Delta \ell_o) + mg$ , откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x + \Delta \ell_o) + g. \quad (2.1)$$

Знак "-" в проекции силы упругости показывает, что направление силы противоположно смещению тела из положения равновесия, которое принимается за начало отсчета.

Если колебания происходят в вязкой среде, то уравнение движения будет иметь вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + m\vec{g}; \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \Delta \ell_o) - f \cdot \frac{dx}{dt} + mg$$

и окончательно

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x + \Delta \ell_o) - \frac{f}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + g. \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2) учтено, что сила сопротивления всегда направлена против скорости движения тела: проекции скорости и силы сопротивления имеют противоположные знаки.

Решая (2.2) методом половинного интервала, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{1/2} \approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_o + \left( -\frac{k}{m}(x_o + \Delta \ell_o) - \frac{f}{m} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_o + g \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} \approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} + \left( -\frac{k}{m}(x_i + \Delta \ell_o) - \frac{f}{m} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} + g \right) \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для случая, когда сила упругости прямо пропорциональна квадрату скорости ( $F_{\text{сопр}} = f v^2$ ;  $F_{\text{сопр}_x} = -f |v_x| \cdot v_x$ ), уравнение движения тела будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x + \Delta \ell_o) - \frac{f}{m} \cdot \left| \frac{dx}{dt} \right| \cdot \frac{dx}{dt} + g. \quad (2.4)$$

**Задача 3.** Тело массой  $m$  совершает свободные колебания между двумя пружинами жесткостью  $k_1$  и  $k_2$ , другие концы которых жестко закреплены (рис. 3). Трение отсутствует.

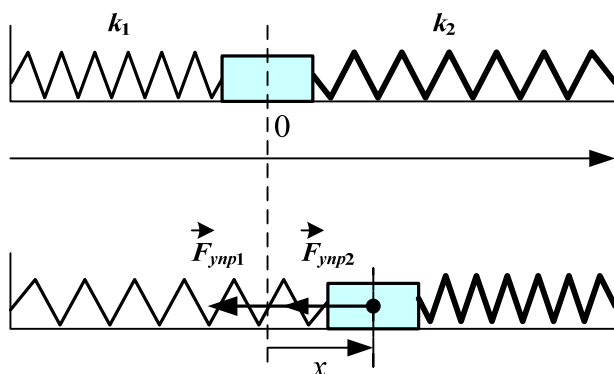


Рис. 3.

Такая система также обладает одной степенью свободы, и деформации обеих пружин по величине одинаковы ( $x_1 = x_2 = x$ ). При отклонении тела от положения равновесия получаем:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2};$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 \cdot x - k_2 \cdot x = -(k_1 + k_2) \cdot x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m} \cdot x. \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что эквивалентная жесткость таких "параллельно соединенных" пружин равна  $k = k_1 + k_2$ , и частота колебаний  $\omega_o = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$ . Так как деформации пружин одинаковы, то потенциальная энергия распределяется между ними пропорционально их жесткости.

Решая (3.1) методом половинного интервала, получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_o - \frac{k_1 + k_2}{m} x_o \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} - \frac{k_1 + k_2}{m} x_i \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.2)$$

**Задача 4.** Две пружины жесткостью  $k_1$  и  $k_2$  соединены между собой последовательно. Один из концов полученной составной пружины жестко закреплен, к другому присоединено тело массой  $m$  (рис. 4). Трение отсутствует.

При выведении тела из положения равновесия удлинения пружин  $x_1$  и  $x_2$  различны. Однако деформации пружин не являются произвольными: их сумма



всегда равна смещению тела:

$$x = x_1 + x_2.$$

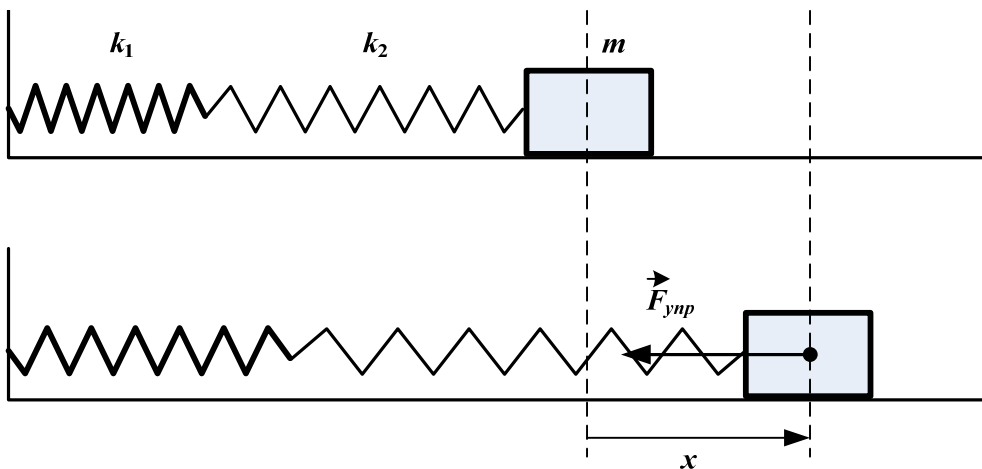


Рис. 4.

Кроме того, упругие силы  $F_{упр1} = k_1 x_1$  и  $F_{упр2} = k_2 x_2$  при сделанных выше предположениях об инерционности пружин должны быть равны:  $F_{упр1} = F_{упр2} = F_{упр}$ . Поэтому получаем:

$$x = -\frac{F_{упрx}}{k_1} - \frac{F_{упрx}}{k_2} = -F_{упрx} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 \cdot k_2},$$

где  $k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$  – жесткость эквивалентной пружины, способной заменить две реальные пружины, соединенные "последовательно". Поэтому собственная частота системы

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2}{m \cdot (k_1 + k_2)}}.$$

Дифференциальное уравнение движения тела без учета трения:  $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x$ .

И окончательно:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m \cdot k_1 \cdot k_2} \cdot x. \quad (4.1)$$

Анализируя результаты, полученные в задачах 3 и 4, можно увидеть, что частота колебаний при последовательном соединении пружин меньше, чем при параллельном их соединении. Смысл этих результатов легко понять: при параллельном соединении пружин смещение тела на отрезок  $x$  приводит к деформации (на такой же отрезок) обеих пружин. Поэтому сила, развиваемая при этом, больше, чем в случае одной пружины, а значит, эквивалентная жесткость системы больше. При последовательном же соединении деформация каждой пружины меньше, чем смещение тела, поэтому развивается меньшая сила, т.е. эквивалентная жесткость уменьшается.

**Задача 5.** Пусть значительная масса  $m$  находится на конце тонкого стержня длины  $\ell$  и ничтожно малой массы (рис. 5). К маятнику на расстоянии  $d$  от точки подвеса прикреплена пружина жесткостью  $k$ , другой конец которой жестко закреплен. При отклонении маятника возникает вращательный момент, стремящийся вернуть его в равновесное положение. Этот момент создается тремя силами: упругости, тяжести и сопротивления. В результате при определенных параметрах системы могут возникнуть колебания.

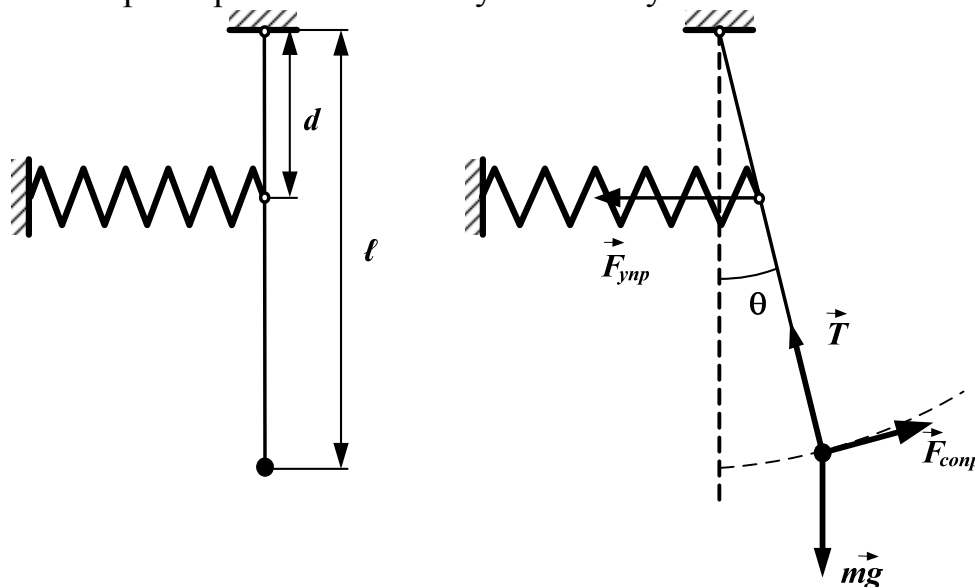


Рис. 5.

Уравнение динамики вращательного движения для такого маятника (при малых отклонениях!):

$$m\ell^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell \cdot \sin\theta - k \cdot d^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - f \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \ell^2$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin\theta - \frac{k \cdot d^2}{m\ell^2} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - \frac{f}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.1)$$

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1. Моделирование свободных колебаний простейшего пружинного маятника**

1. Запустить *Excel*.

2. Открыть шаблон 1.2\_Колебания пружинного маятника\_1.XLT или оформить рабочий лист в соответствии с прилагаемым образцом.

В расчетных формулах (см. **Задача 1**, (1.5)) выделить исходные данные, переменные и постоянные величины.

3. Заполнить таблицу исходных данных.

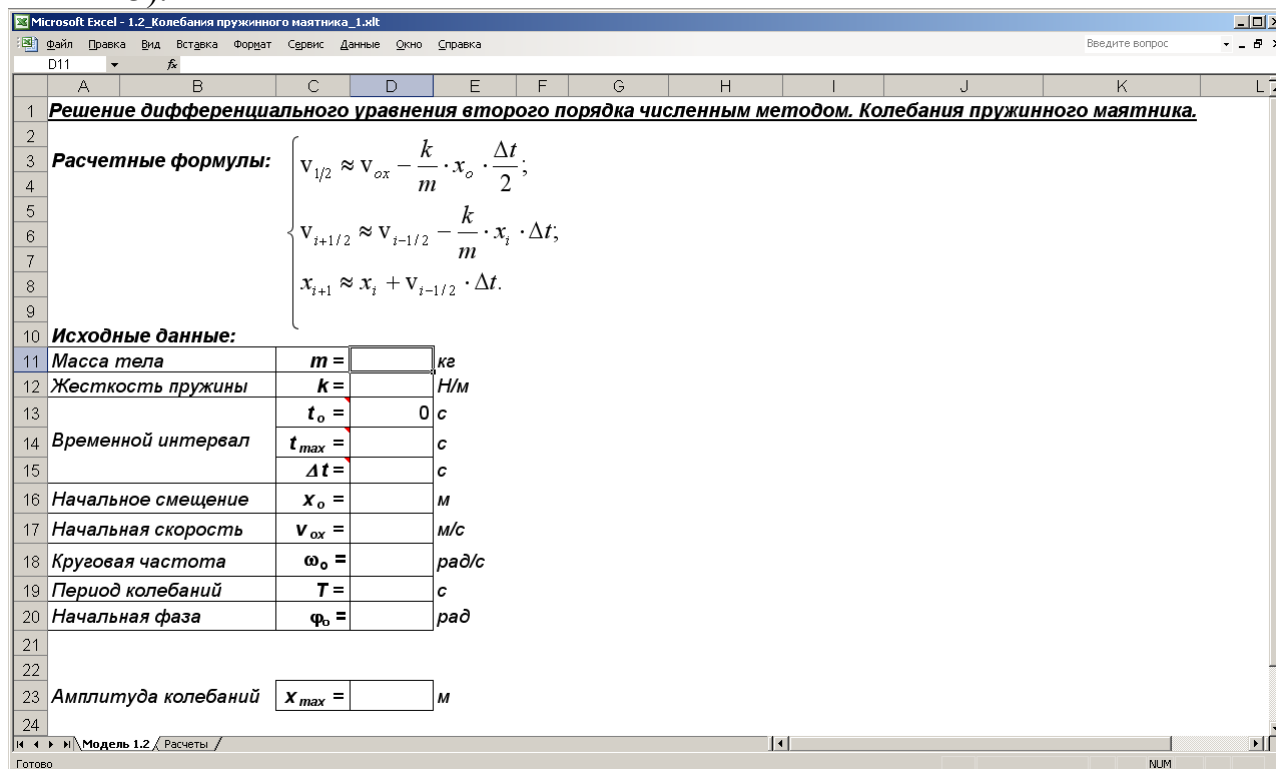
1). Занести исходные числовые данные

$$m = 1 \text{ кг}, k = 5 \text{ Н/м}, t_{\max} = 10 \text{ с}, v_o = 3 \text{ м/с}, x_o = 0 \text{ м}$$

в следующие ячейки:

- массу тела – в **D11**;
- жесткость пружины – в **D12**;
- конечный момент времени – в **D14**;
- начальное смещение – в **D16**;
- начальную скорость – в **D17**.

Начальный момент времени всегда выбирают равным нулю:  $t_0 = 0$  (ячейка **D13**).



2). Рассчитать собственную циклическую частоту, период колебаний и шаг  $\Delta t$  (число подинтервалов  $n$  должно быть достаточно большим, не менее 500. При использовании шаблона,  $n$  можно определить по *таблице данных* (лист **Расчеты**) – оно должно быть на 1 меньше количества точек) в ячейках, **D18**, **D19** и **D15**.

3). Заполнить *таблицу данных* ("Время, с – Скорость, м/с; Время, с – Координата, м") на листе **Расчеты**:

1) Столбцы **B** и **D** содержат значения времени. Введение двух колонок "Время, с" необходимо потому, что вычисление скорости и координаты проводится в разные моменты времени<sup>6</sup>. Так, в ячейки **B4** и **D4** копируется с установлением связи между соответствующими ячейками начальный момент времени (ячейка **D13** с листа **Модель 1.2**), после чего в ячейку **D5** заносится формула для вычисления момента времени  $t_1$ , которая сразу копируется в нижележащий диапазон ячеек; а в ячейку **B5** вводится промежуточная формула для вычисления момента  $t_{1/2}$ , отстоящего от начального на величину  $\Delta t / 2$ . Дальнейшее изменение времени в столбце **B** также должно происходить

<sup>6</sup> См. подробнее *Лабораторную работу № 1.1*.

через интервал  $\Delta t$ .

Таблица данных						Аналитическое решение					
№ п/п	Время, с	Скорость, м/с	Время, с	Координата, м	Координата, м						
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

2) Столбцы **С** и **Е** отведены под значения скорости и координаты. Заполнение этих столбцов проводится аналогично. Это значит, что при заполнении колонки "*Скорость, м/с*" в ячейку **С5** вводится промежуточная формула, вычисляющая скорость в середине первого интервала, т.е. через интервал  $\Delta t/2$  после начала отсчета времени. Дальнейшее вычисление скорости ведется по итерационной формуле через шаг  $\Delta t$ . В ячейку **Е5** вводится формула для вычисления координаты, которая затем копируется в нижележащие ячейки.

3) Ячейки **С4** и **Е4** связываются с соответствующими ячейками листа **Модель 1.2**.

**Примечание:** 1. Обратите внимание на то, что в вычислениях скорости и координаты *не используются значения времени* из колонок *Время*! Они нужны только для построения графиков.

2. При составлении формул не забывайте использовать абсолютные ссылки для *постоянных* величин.

4. Изменить имя листа, содержащего таблицу (**Модель 1.2**), на **Задача 1**.

5. По результатам расчетов построить графики  $x(t)$  и  $v(t)$ . Поскольку во всех случаях по оси  $Ox$  откладывается одна и та же величина (время), обе зависимости можно представить в одной системе координат. Основные требования к графику:

- тип диаграммы – **Точечная**;
- имя рядов данных: *Скорость, м/с* и *Координата, м* (вводятся в соответствующее поле с клавиатуры или в виде ссылки на соответствующие ячейки *таблицы данных*);
- название диаграммы и наименование осей координат с указанием единиц измерения величин, откладываемых по этим осям, задать в виде:  
**"Название диаграммы"** – Колебания горизонтального пружинного маятника;

"Ось X (категорий)" – Время  $t$ , с;

"Ось Y (значений)" – Координата (м); Скорость (м/с);

- включить основные линии сетки по обеим осям;
- вывести легенду и указать ее размещение на диаграмме ("**ВНИЗУ**");
- расположить диаграмму на отдельном листе.

6. Сохранить данные в файле 1.2\_Пружинный маятник\_Задача 1.xls.

### Задания для самостоятельной работы

1. Получить самостоятельно формулу для вычисления ускорения (пользуясь при этом только определением ускорения и введенным упрощением, что движение в течение каждого промежутка  $\Delta t$  можно считать равноускоренным), провести расчет (столбец **H**) и построить график зависимости ускорения от времени.

2. Изменяя массу тела и жесткость пружины, проследить за изменением величин, характеризующих колебательный процесс: круговой частоты, периода, амплитуды координаты и скорости.

3. Сравнить графики колебаний, полученные в результате вычислений по приближенным и точным формулам, для чего в столбце **F** рассчитать смещение тела по аналитической формуле

$$x(t) = x_{\max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o)$$

в те же моменты времени из столбца **D**, что и координата в столбце **E**. Для этого необходимо провести ряд дополнительных вычислений, т.к. для определения координаты согласно приведенному уравнению нужно знать: 1) амплитуду колебаний  $x_{\max}$ ; 2) циклическую частоту  $\omega_o$  и 3) начальную фазу  $\varphi_o$ .

1) Амплитуда – это максимальное значение, которое принимает переменная  $x$  (координата) в столбце **E**. Поскольку это значение должно входить во все формулы столбца **F**, удобно, если в формуле оно будет *автоматически изменяться* при изменении параметров системы. Это означает, что формулы должны содержать *не числовое значение амплитуды*, а ссылку на ячейку, в которой это значение находится (в используемом шаблоне таблицы – это ячейка **D23** на листе **Задача 1**). Определение максимального значения проводят с помощью встроенной функции **МАКС()**, где в качестве аргумента необходимо использовать ссылку на блок ячеек столбца **E**, содержащий значения координаты (или столбец целиком (**E:E**)). Функция находится в категории **Статистические**.

2) Циклическая частота колебаний – ячейка **D18**.

3) Начальная фаза колебаний  $\varphi_o$  находится из следующих соображений. В таблице *исходных данных* задано начальное смещение  $x_o$ , т.е. координата в момент времени  $t_o = 0$ . Фаза колебаний в этот момент равна начальной  $\varphi_o$ , а смещение:

$$x_o = x_{\max} \sin \varphi_o, \text{ откуда } \varphi_o = \arcsin \frac{x_o}{x_{\max}}.$$

Начальная фаза рассчитывается в ячейке **D20** (функция **ASIN()** в категории **Математические**).

Построить график зависимости  $x^{теор}(t)$  на имеющейся диаграмме.

4. Изменяя  $t_{\max}$  (а, следовательно, и интервал времени  $\Delta t$ ) при заданных

параметрах  $k$ ,  $m$ ,  $x_0$  и  $v_{0x}$ , проследить за изменением точности вычислений по приближенным формулам, сравнивая графики колебаний. Таким же образом можно определить и границы применимости данной модели.

5. Добавить в таблицу новую колонку "*Скорость, м/с*" в столбце **G** и провести расчет скорости колеблющегося тела по соответствующей формуле системы (\*) (аналитическое решение), пользуясь планом, изложенным в п. 3 *заданий для самостоятельной работы*. Построить график зависимости  $v_x^{теор}(t)$ .

6. Рассчитать потенциальную энергию упруго деформированной пружины и кинетическую энергию тела (используя данные численного решения) и построить графики каждого вида энергии на одной диаграмме. Определить: 1) период колебаний кинетической и потенциальной энергии и сравнить его с периодом колебаний маятника; 2) полную энергию системы в каждый момент времени. Объяснить изменение вида графиков при увеличении (от нуля) коэффициента сопротивления.

7. По результатам численного и аналитического моделирования построить фазовые траектории, т.е. зависимость смещения тела от его скорости. Что представляет собой фазовая траектория гармонических колебаний?

8. Решить (1.6) методом половинного интервала (сила трения прямо пропорциональна скорости тела). Ввести в ячейку **D25** значение коэффициента трения (например,  $0,2 \frac{H}{м/с}$ ). Изменить *рабочие формулы* в столбце **C** (колонка "*Скорость, м/с*") в

соответствии с полученными уравнениями. Выполняется ли в этом случае закон сохранения полной механической энергии? Как изменяется фазовая диаграмма? Ответ пояснить. Изменяя коэффициент трения, определить, при каких условиях процесс перестает быть периодическим (критическое затухание).

6. Открыть шаблон 1.2\_Колебания пружинного маятника\_2.XLT или новую книгу. Проанализировать систему уравнений (2.3), выделить *постоянные* и *переменные* величины, заполнить *таблицу исходных данных* шаблона (лист **Задача 2**) или оформить ее самостоятельно (по аналогии с заданием для горизонтального маятника). Занести *рабочие формулы* для вычисления скорости и координаты тела в соответствующие моменты времени в *таблицу данных* (количество подинтервалов  $n$  – не менее 200, лист **Расчеты**). Построить графики  $x(t)$  и  $v_x(t)$ . Проверить работу модели (в отсутствии трения) с помощью апплета "[Пружинный маятник\\_Свободные колебания](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны).

### Задания для самостоятельной работы

1. В таблице исходных данных рассчитать период собственных колебаний маятника, собственную циклическую частоту и коэффициент затухания. Измерить период колебаний непосредственно по графикам скорости или смещения и сравнить его с расчетом.

2. Проследить за влиянием на период и скорость затухания параметров системы (массы груза, жесткости пружины, коэффициента трения). Подобрать экспериментально значение коэффициента сопротивления, при котором процесс перестает быть

периодическим (критическое затухание).

3. Установить такие параметры, при которых наблюдается не менее 10÷15 колебаний. Выписать координаты пиков смещения (с одинаковым знаком!) и по полученным результатам построить график зависимости амплитуды смещения от времени на отдельной диаграмме (тип и вид диаграммы – *Точечная*). Подобрать линию тренда и вывести ее уравнение на графике. По какому закону изменяется амплитуда смещения?

4. Решить уравнение (2.4) методом половинного интервала и для тех же исходных данных рассчитать скорость и смещение груза в различные моменты времени. Построить графики смещения и скорости на имеющихся уже соответствующих диаграммах.

5. Сохранить данные в файле 1.2\_Пружинный маятник\_Задача 2.xls.

## Задание № 2. Моделирование свободных колебаний маятника с двумя пружинами

1. Открыть шаблон 1.2\_Колебания пружинного маятника\_3.XLT или новую книгу 1.2\_Пружинный маятник\_Задача 3-4.XLT.

2. Проанализировать формулы (3.1) и (3.2) *Задачи 3*, выделить *постоянные* и *переменные* величины, составить и заполнить *таблицу исходных данных* (см. ниже пример оформления рабочего листа) на листе *Задача 3*.

**Расчетные формулы:**

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_i - \frac{k_1 + k_2}{m} x_i \cdot \frac{\Delta t}{2};$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} - \frac{k_1 + k_2}{m} x_i \cdot \Delta t;$$

$$x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t.$$

**Исходные данные:**

Масса тела	$m =$	кг
Жесткость 1 пружины	$k_1 =$	Н/м
Жесткость 2 пружины	$k_2 =$	Н/м
Жесткость эквивал. пружины	$k =$	Н/м
Временной интервал	$t_{min} =$	с
	$t_{max} =$	с
	$\Delta t =$	с
Начальное смещение	$x_0 =$	м
Начальная скорость	$v_{0x} =$	м/с
Круговая частота	$\omega_0 =$	рад/с
Период колебаний	$T =$	с
Коэффициент трения	$f =$	Н·с/м

для случая, когда сила трения прямо пропорциональна скорости тела

3. Смоделировать колебания маятника (количество подинтервалов не менее 200) на листе **Расчеты**. По результатам задания построить графики зависимости смещения и скорости от времени на отдельных диаграммах. Определить по графику, одинаково ли смещение тела по обе стороны от положения равновесия. Ответ объяснить.

4. Решить задачу с учетом силы трения, действующей на тело (трение пропорционально скорости или квадрату скорости – по указанию преподавателя). В таблицу исходных данных ввести коэффициент трения  $f$ . Изменить рабочие формулы скорости в соответствии с полученными уравнениями.

5. При каком коэффициенте трения период затухающих колебаний будет видимо отличаться от рассчитанного периода собственных колебаний? Подобрать коэффициент трения, при котором наблюдается критическое затухание для данных параметров установки.

6. Решить дифференциальное уравнение (4.1) (см. **Задача 4**) методом половинного интервала. На основе таблицы исходных данных предыдущей задачи смоделировать колебания (количество подинтервалов – не менее 200) на новом листе (**Задача 4**). По результатам задания построить графики зависимости смещения и скорости от времени на уже имеющихся диаграммах **Задачи 3**. Сравнить период колебаний маятников при различном соединении пружин с телом.

7. Сохранить данные в файле 1.2\_Пружинный маятник\_Задача 3-4.xls.

### **Задание № 3. Моделирование свободных колебаний математического маятника с прикрепленной к нему пружинной**

1. Решить (5.1) методом половинного интервала. Выделить *постоянные* и *переменные* величины.

2. Открыть файл 1.1\_Математический маятник.xls. Добавить в таблицу исходных данных недостающие для моделирования маятника, представленного на рис. 5, 3. Смоделировать колебания маятника на отдельном листе **Расчеты 1**. По полученным результатам построить график изменения линейного смещения с течением времени на диаграмме сравнения аналитического и численного решения дифференциального уравнения колебаний математического маятника. Возможен ли здесь случай критического затухания?

4. Сравнить частоты колебаний маятников. Объяснить результат (здесь удобно применить закон сохранения механической энергии в отсутствии трения).

5. Сохранить результаты в файле 1.1\_Математический маятник.xls.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Смоделировать поведение маятника (рис. 6) по аналогии с рассмотренным выше случаем. Построить график зависимости  $x(t)$  на имеющейся диаграмме сравнения колебаний различных маятников. Сравнить частоты колебаний различных маятников. Ответ объяснить. Когда при выведении системы из положения равновесия колебания не возникают? Сколько возможно таких случаев?



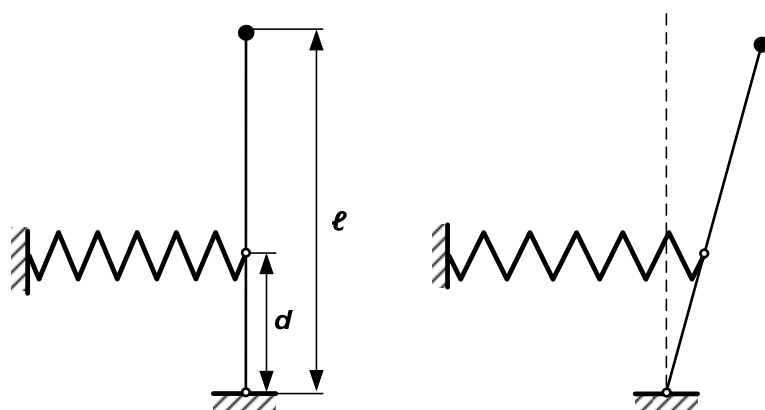


Рис. 6.

## Лабораторная работа № 1.3.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА**

Цель работы: моделирование вынужденных колебаний пружинного маятника.

Оборудование: апплеты "Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_1" (*Laboratoire virtuel* (Франция) <http://labo.ntic.org/>), "Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_1a" (*Java Applets on Physics by Walter Fendt* <http://home.augsburg.baynet.de/walter.fendt/>), ЭТ MS Excel.

**Введение**

Свободные колебания реальной колебательной системы являются затухающими. Для получения незатухающих колебаний необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления (трения). Это можно осуществить, воздействуя на систему переменной внешней силой  $F$ , изменяющейся – в простейшем и практически наиболее важном случае – по гармоническому закону  $F = F_{\max} \cdot \cos(\omega_g \cdot t)$ , где  $\omega_g$  – частота внешней (вынуждающей) силы.

Воздействие на колебательную систему внешней периодически изменяющейся силы приводит к возбуждению в ней двух видов колебаний:

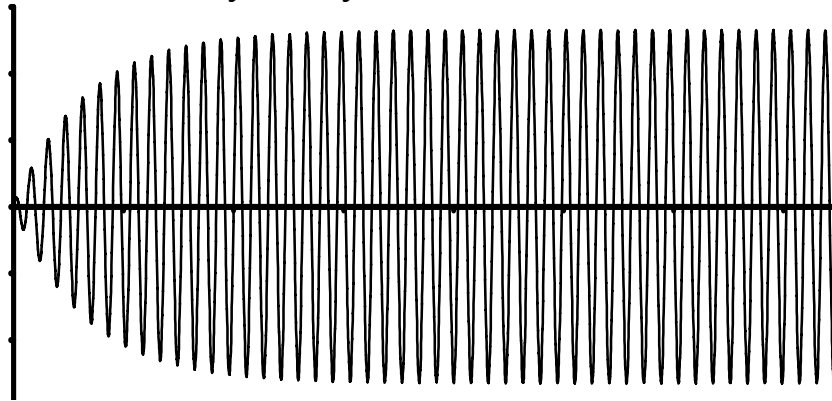
1) **вынужденных колебаний**, которые всегда происходят с частотой внешней возбуждающей силы  $\omega_g$ ;

2) **собственных колебаний**, которые с течением времени затухают. Процесс затухания свободных колебаний называется установлением колебаний, а время  $\tau$ , в течение которого амплитуда свободных колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется *временем затухания* или *временем установления колебаний*. Через время  $t \gg \tau$  свободные колебания практически совсем прекратятся, и останутся только вынужденные колебания. Как правило, наибольший интерес представляют именно установившиеся вынужденные колебания. Начальный этап, т.е. первые несколько циклов, в течение которых в колебательном процессе участвуют свободные колебания, относят к *переходному процессу*.

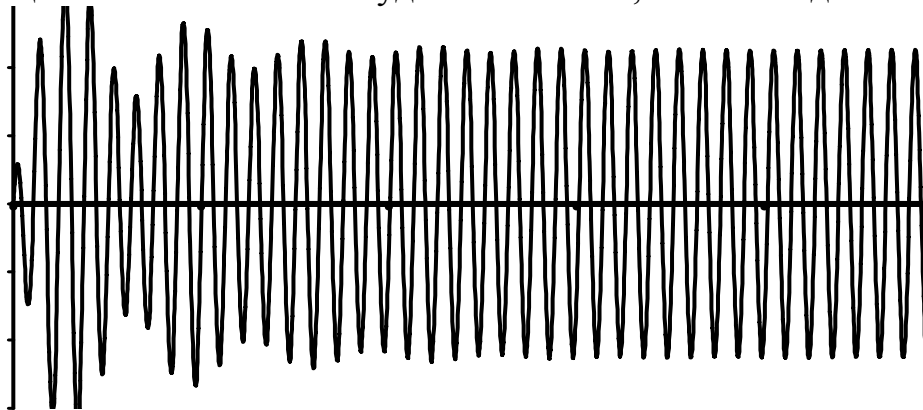
Таким образом, результирующее колебание представляется суперпозицией двух видов колебаний, имеющих в общем случае различные амплитуды, различные частоты и различные фазы. В результате получается весьма сложное движение. Амплитуда колебаний в процессе их установления будет изменяться до тех пор, пока свободные колебания не затухнут полностью. Характер установления колебаний может быть разным в зависимости от соотношения частоты  $\omega_0$  собственных колебаний и вынуждающей частоты  $\omega_g$ , а также от коэффициента затухания. Рассмотрим только такой случай, когда вынуждающая сила начинает воздействовать на систему, в которой не происходит никаких процессов.

Наиболее простой вид процесс установления колебаний будет иметь при совпадении частот ( $\omega_g = \omega_0$ ). В этом случае свободные колебания затухают экспоненциально, поэтому амплитуда вынужденных колебаний будет нарастать

также по экспоненциальному закону.



Если же частоты собственных и вынужденных колебаний не совпадают, то разность фаз между ними не остается постоянной, следовательно, амплитуда результирующих колебаний также будет изменяться, т.е. наблюдаются биения.



Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит только от параметров системы (а не от начальных условий, как это имело место в случае свободных колебаний) и частоты воздействующей на нее внешней силы. При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы возникает явление **резонанса** – резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний.

В общем случае вынуждающая сила может изменяться не только по гармоническому закону, и характер колебаний в этом случае будет различным. Рассмотрим возникновение вынужденных колебаний на нескольких примерах.

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1. Моделирование вынужденных колебаний пружинного маятника под действием гармонически изменяющейся силы**

**Задача 1.** Тело массой  $m$ , закрепленное на пружине жесткостью  $k$ , совершает вынужденные колебания под действием внешней переменной силы, приложенной непосредственно к телу и изменяющейся по гармоническому закону (рис. 1). Сила трения прямо пропорциональна скорости тела.

Начало отсчета удобно совместить с положением тела в равновесном состоянии. На тело при его движении действуют три силы: сила упругости, сила трения, пропорциональная скорости, и вынуждающая сила, изменяющаяся по

гармоническому закону (ось  $Ox$  направлена вправо). Уравнение движения тела:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{yup}} + \vec{F}_{\text{mp}}.$$

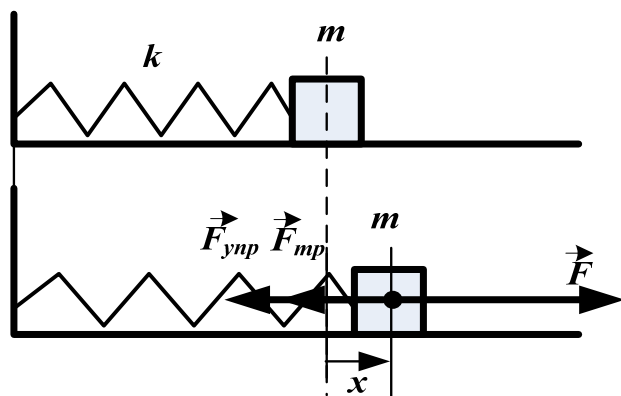


Рис. 1.

В дифференциальной форме:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{max}} \cdot \cos \omega_{\text{e}} t - kx - f \cdot \frac{dx}{dt}.$

Окончательно:

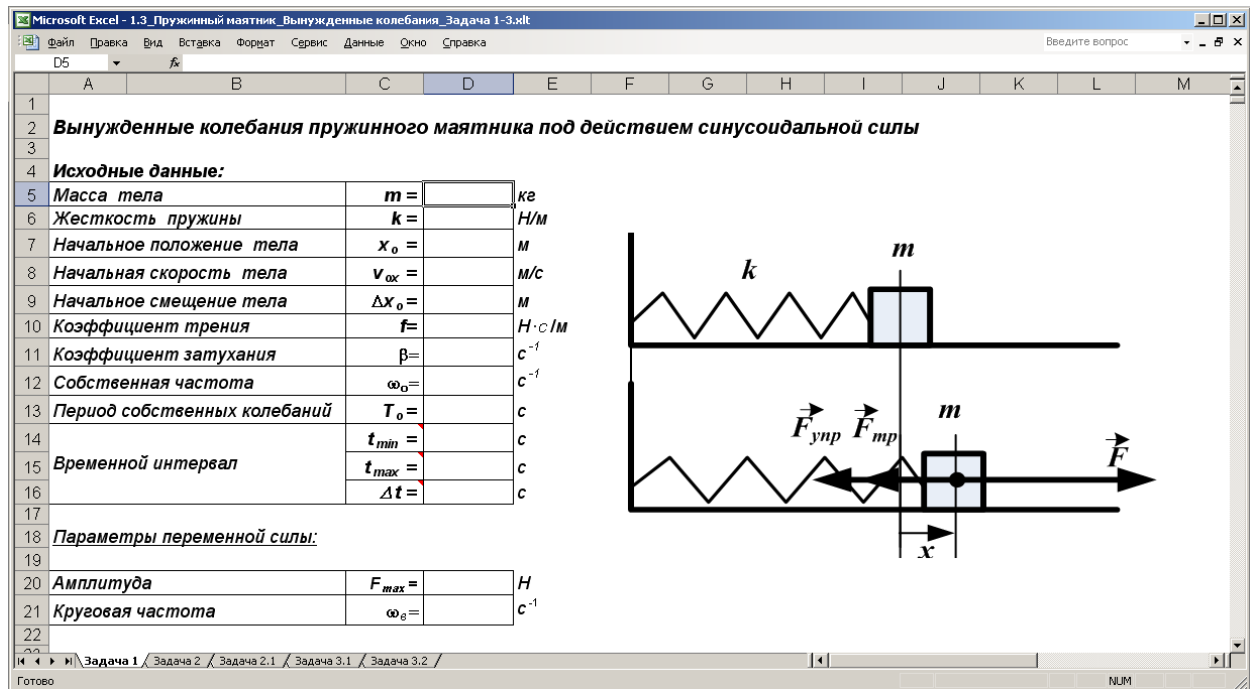
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_{\text{max}}}{m} \cdot \cos \omega_{\text{e}} t - \omega_o^2 x - 2\beta \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (1.1)$$

где  $F_{\text{max}}$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\omega_{\text{e}}$  – ее частота,  $\omega_o^2 = k/m$  – собственная частота колебаний маятника,  $\beta = f/2m$  – коэффициент затухания.

1.1. Решить ДУ (1.1) методом половинного интервала. Выделить *постоянные* и *переменные* величины, составить и заполнить *таблицу исходных данных* в ЭТ MS Excel (см. ниже пример оформления рабочего листа **Задача 1** шаблона 1.3\_Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_Задача 1-3.XLT), рассчитать собственную частоту  $\omega_o$  и период свободных колебаний  $T_o$ , коэффициент затухания  $\beta$  и шаг  $\Delta t$  (количество подинтервалов  $n$  – не менее 500).

Пример исходных данных:

масса тела .....	$m=1 \text{ кг};$
жесткость пружины .....	$k=100 \text{ Н/м};$
начальное положение тела в соответствии с выбором начала отсчета .....	$x_o=0 \text{ м};$
начальная скорость тела .....	$v_{ox}=0 \text{ м/с};$
начальное смещение тела из положения равновесия .....	$\Delta x_o=0 \text{ м};$
коэффициент трения .....	$f=10 \text{ Н·с/м};$
временной интервал .....	$[t_o; t_{\text{max}}]=0-10 \text{ с};$
амплитуда вынуждающей силы .....	$F_{\text{max}}=10 \text{ Н};$
частота внешней силы .....	$\omega_{\text{e}} = \omega_o.$



1.2. Смоделировать вынужденные колебания тела, т.е. рассчитать скорость тела и его координату в соответствующие моменты времени в выбранном временном интервале.

1.3. На основе полученных данных построить графики скорости и смещения, наложив на них графики внешней силы (т.е. на каждой из диаграмм строятся два графика, один из которых – зависимость величины силы от времени<sup>7</sup>).

1.4. Выяснить

1) каково соотношение периода (или частоты) установившихся вынужденных колебаний и периода (или частоты) колебаний вынуждающей силы, а также каков сдвиг фаз между этими колебаниями (проверить вывод для нескольких значений вынуждающей частоты  $\omega_e$ :  $\omega_e < \omega_0$ ,  $\omega_e = \omega_0$ ,  $\omega_e > \omega_0$ );

2) от чего зависит амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний;

3) как влияет на процесс установления колебаний величина трения (установить, в том числе,  $f=0$ );

4) что означают ненулевые значения величин  $\Delta x_0$  и  $v_{0x}$ ;

5) каков характер зависимости смещения от времени в случае гармонически изменяющейся силы?

<sup>7</sup> Если значения рядов данных на диаграмме значительно отличаются друг от друга или на диаграмме представлены данные различных типов (неоднородные физические величины, как в нашем случае), целесообразно вывести один или несколько рядов данных на вспомогательной оси значений (Y). Для этого после построения диаграммы:

- Выделить на диаграмме ряды данных, которые нужно отобразить на вспомогательной оси.
- В меню **Формат** выбрать команду **Выделенный ряд**, а затем — вкладку **Ось**.
- Выбрать вариант "По вспомогательной оси".

1.5. Установить начальные исходные данные и  $\omega_e = 0$  (на тело действует постоянная сила величиной  $F = F_{\max}$ ). Изменяя коэффициент трения от нуля, подобрать такое его значение, начиная с которого колебания прекращаются (зарисовать схематично 2-3 диаграммы). Что происходит с колебательной системой в этом случае? Меняется ли величина смещения тела от положения равновесия в зависимости от коэффициента трения?

1.6. Для исходных начальных данных, изменяя частоту вынуждающей силы в пределах от 0 до  $2 \cdot \omega_o$ , выписать соответствующую каждому значению  $\omega_e$  амплитуду установившихся колебаний<sup>8</sup> (всего не менее 20÷25 точек  $(\omega_e; x_{\max})$ ), увеличивая густоту точек вблизи  $\omega_e = \omega_o$ ). Построить график зависимости амплитуды смещения от частоты внешней силы (амплитудная резонансная кривая).

1.7. Повторить п. 1.6 задания для случаев:  $f \approx 0$  и  $f \gg 10 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ . Одинаково ли положение максимумов и их острота в каждом из этих случаев?

**Задача 2.** Тело массой  $m$ , прикрепленное к правому концу пружины жесткостью  $k$ , совершает вынужденные колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону и приложенной к левому (свободному) концу пружины (см. рис. 2). Сила трения прямо пропорциональна скорости тела.

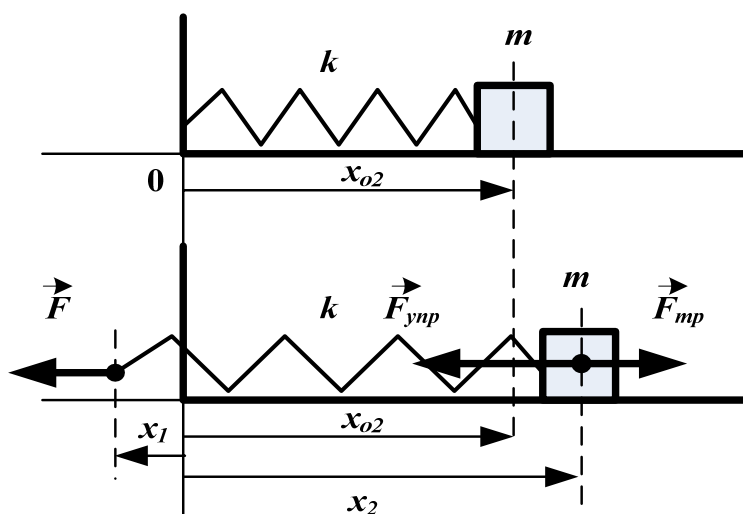


Рис. 2.

Введем следующие обозначения:  $x_{o2}$  – начальное положение тела (пружина не деформирована),  $x_{2o}$  – начальное смещение тела;  $x_2$  – смещение тела от положения равновесия в произвольный момент времени,  $x_{o1}$  – начальное

<sup>8</sup> Примерное значение амплитуды установившихся вынужденных колебаний определяется непосредственно по графику путем включения промежуточных линий сетки или простым наведением указателя мыши на один из максимумов графика в области установившихся колебаний. Можно также в отдельной ячейке таблицы исходных данных рассчитать амплитуду установившихся вынужденных колебаний по аналитической формуле

$$x_{\max} = \frac{F_{\max}}{m \sqrt{(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2 \omega_e^2}}.$$

положение левого конца недеформированной пружины (принимается за начало отсчета),  $x_{l_0} = x_{\max 1}$  – амплитуда колебаний левого конца пружины,  $x_1 = x_{\max 1} \cos \omega_0 t$  – смещение левого конца пружины в произвольный момент времени. Ось  $Ox$  направлена вправо. Уравнение движения тела:

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

В дифференциальной форме:

$$m \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k \cdot \Delta x_2 - f \cdot \frac{dx_2}{dt}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta x_2$  – удлинение пружины:

$$\Delta x_2 = (x_2 - x_1) - (x_{o2} - x_{o1}) = x_2 - x_1 - x_{o2} = x_2 - x_{\max 1} \cdot \cos \omega_0 t - x_{o2}. \quad (2.2)$$

С учетом (2.2) уравнение (2.1) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_{\max 1} \cdot \cos \omega_0 t - x_{o2}) - \frac{f}{m} \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad (2.3)$$

2.1. Решить (2.3) методом половинного интервала.

2.2. Открыть (или добавить) лист **Задача 2**. Заполнить *таблицу исходных данных* в программе *MS Excel* по аналогии с *Задачей 1* (см. ниже пример оформления рабочего листа **Задача 2** шаблона 1.3\_Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_Задача 1-3.XLT). Рассчитать собственную частоту колебаний пружинного маятника  $\omega_0$ . Частоту вынуждающей силы  $\omega_0$  выбрать для начала равной собственной.

Microsoft Excel - 1.3\_Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_Задача 1-3.xlt

Введите вопрос

D5

А В С D E F G H I J K L M N O P Q R S T

1

2 **Вынужденные колебания пружинного маятника под действием синусоидальной силы**

3

4 **Исходные данные:**

5 Масса тела	$m =$		кг
6 Жесткость пружины	$k =$		Н/м
7 Начальное положение тела	$x_{o2} =$		м
8 Начальная скорость тела	$v_{o2} =$		м/с
9 Начальное смещение тела	$\Delta x_{o2} =$		м
10 Коэффициент трения	$f =$		Н·с/м
11 Коэффициент затухания	$\beta =$		с <sup>-1</sup>
12 Собственная частота колебаний	$\omega_0 =$		с <sup>-1</sup>
13 Период свободных колебаний	$T_0 =$		с
14	$t_{\min} =$		с
15 Временной интервал	$t_{\max} =$		с
16	$\Delta t =$		с
17			
18 <b>Параметры переменной силы:</b>			
19			
20 Круговая частота	$\omega_0 =$		с <sup>-1</sup>
21 Начальное смещение левого конца	$x_{\max 1} =$		м
22			

Готово

NUM

Пример исходных данных:

масса тела .....	$m=1 \text{ кг};$
жесткость пружины .....	$k=100 \text{ Н/м};$
начальное положение тела в соответствии с выбором начала отсчета .....	$x_{02}=0,5 \text{ м};$
начальная скорость тела .....	$v_{0x}=0 \text{ м/с};$
начальное смещение тела из положения равновесия .....	$\Delta x_{02}=0 \text{ м};$
коэффициент трения .....	$f=10 \text{ Н}\cdot\text{с/м};$
временной интервал .....	$0-10 \text{ с};$
амплитуда смещения левого конца пружины .....	$x_{10}=0,1 \text{ м};$
частота внешней силы .....	$\omega_g = \omega_o.$

2.3. Смоделировать колебания тела (количество подинтервалов  $n$  – не менее 500), т.е. рассчитать скорость тела и его координату в каждый момент времени выбранного временного интервала (в отдельном столбце рассчитывается смещение левого конца пружины в те же моменты времени, что и смещение тела).

2.4. Построить графики зависимости скорости и смещения тела от времени, совместив их с графиками вынуждающей силы.

2.5. Выполнить исследование и ответить на вопросы п. 1.4.

2.6. Проследить за изменением амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от частоты внешней силы. Выписать несколько пар значений  $(\omega_g; x_{\max})$ . При каком значении частоты внешней силы амплитуда установившихся вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение?

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Открыть апплет "[Пружинный маятник Вынужденные колебания 1](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Ознакомиться с окном апплета и законспектировать его описание. Выполнить исследование модели:

- 1) Определить границы изменения всех параметров установки.
- 2) Получить свободные колебания. Подобрать коэффициент затухания, при котором процесс перестает быть периодическим (критическое затухание).
- 3) Установить влияние частоты внешней силы (отношения частот  $\omega_g/\omega_o$ ) на амплитуду колебаний груза (по демонстрации и графику) при неизменном значении коэффициента затухания. Подобрать отношение частот  $\omega_g/\omega_o$ , при котором амплитуда установившихся вынужденных колебаний будет максимальной.
- 4) Для трех различных значений отношения  $\omega_g/\omega_o$  (например, 0,5; 1; 1,5) определить сдвиг фаз между колебаниями внешней силы и груза. По результатам пп. 3-4 сделать вывод о зависимости амплитуды вынужденных колебаний и сдвига фаз между колебаниями вынуждающей силы и вынужденными колебаниями маятника от частоты внешней силы.
- 5) Исследовать поведение системы при значениях  $\omega_g/\omega_o$ , близких к 1 (например, 0,9; 1,1; 1,2). Какой характер будет иметь в этом случае переходный процесс?

2. Выполнить аналогичные исследования модели "[Пружинный маятник Вынужденные](#)



колебания 1а". Создать подобную модель в ЭТ *MS Excel* (лист **Задача 2.1**), взяв за основу задачу о колебаниях вертикального маятника (см. *Лабораторную работу № 1.2*). Построить графики смещения груза и верхнего конца пружины от времени. Сравнить результаты моделирования.

## Задание № 2. Моделирование вынужденных колебаний пружинного маятника под действием несинусоидальной силы

**Задача 3.** Тело массой  $m$ , закрепленное на пружине жесткостью  $k$  (рис. 3), совершает вынужденные колебания под действием внешней несинусоидальной силы. Сила трения прямо пропорциональна скорости тела.

Пусть на тело действует негармоническая периодическая кусочно-постоянная (прямоугольная) знакопеременная сила (рис. 3, а).

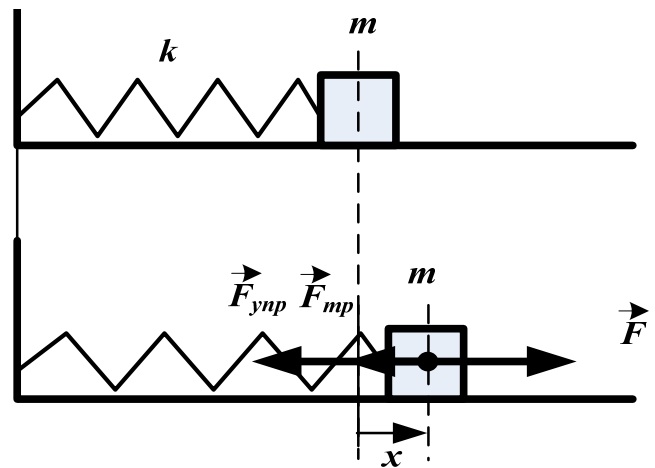


Рис. 3.

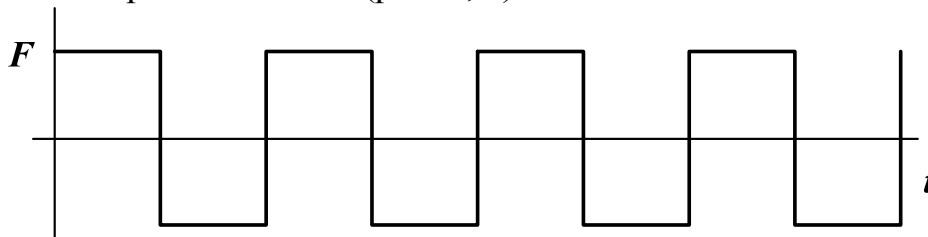


Рис. 3, а.

В этом случае тело также совершает вынужденные колебания. Уравнение движения:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{ynp} + \vec{F}_{mp},$$

в дифференциальной форме:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x - kx - f \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (3.1)$$

1. Решить (3.1) методом половинного интервала. Добавить новый рабочий лист (**Задача 3.1**).

2. Разработать и заполнить *таблицу исходных данных* в программе *MS Excel* (см. ниже пример оформления рабочего листа таблицы, исходные данные можно взять из предыдущих задач) или воспользоваться готовым шаблоном *1.3\_Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_Задача 1-3.XLT*. Рассчитать собственную частоту  $\omega_0$  и период колебаний пружинного маятника, а также коэффициент затухания. Частоту вынуждающей силы  $\omega_в$  выбрать для начала

равной собственной.

3. Смоделировать прямоугольную силу на основе синусоиды той же частоты и амплитуды с использованием логической функции ЕСЛИ().

**Вынужденные колебания под действием несинусоидальной силы.**

**Исходные данные:**

Масса тела	$m =$	кг
Жесткость пружины	$k =$	Н/м
Начальное положение тела	$x_0 =$	м
Начальная скорость тела	$v_{0x} =$	м/с
Начальное смещение тела	$\Delta x_0 =$	м
Коэффициент трения	$f =$	Н·с/м
Коэффициент затухания	$\beta =$	с <sup>-1</sup>
Собственная частота колебаний	$\omega_0 =$	с <sup>-1</sup>
Период собственных колебаний	$T_0 =$	с
Временной интервал	$t_{min} =$	с
	$t_{max} =$	с
	$\Delta t =$	с
<b>Переменная прямоугольная сила</b>		
Амплитуда внешней силы	$F_{max} =$	Н
Круговая частота	$\omega_e =$	с <sup>-1</sup>

Diagram illustrating a mass-spring system. A mass  $m$  is attached to a spring with stiffness  $k$ . The system is shown in two states: a static equilibrium state (top) and a dynamic state (bottom) where the mass is displaced by  $x$  and subjected to forces  $F_{упр}$  (spring force) and  $F_{тр}$  (friction force). An external force  $F$  is also shown acting on the mass.

4. Рассчитать скорость и смещение тела в интервале  $[t_0; t_{max}]$ .

5. Построить на отдельных диаграммах графики скорости и смещения тела, совместив с каждым из них график вынуждающей силы.

6. Проследить, как меняется вид графиков в зависимости от частоты вынуждающей силы ( $\omega_e = \omega_0$ ,  $\omega_e \gg \omega_0$ ,  $\omega_e \ll \omega_0$ ) и трения. Ответить на вопросы п. 1.4 Задания № 1.

7. Добавить новый рабочий лист **Задача 3.2**. Решить задачу в предположении, что внешняя сила действует на тело в течение очень короткого промежутка времени (импульсная сила) и, причем в тот момент, когда оно находится в одном из крайних положений (например, в крайнем левом, см. рис. 3, б). В этой точке скорость тела обращается в нуль.

Поскольку при численном решении нулевое значение, как правило, не получается, то толчок должен произойти в тот момент, когда одновременно выполняются следующие условия: 1) скорость неотрицательна; 2) она отличается от нуля на небольшую величину (например, 0,1 м/с или 0,01 м/с, или 0,001 м/с и т.д. в зависимости от данных задачи); 3) координата отрицательна. Количество подинтервалов  $n$  должно быть достаточно большим (не менее 1000).

За начало отсчета принято положение тела в равновесном состоянии (недеформированная пружина):  $x_0 = 0$ .

В целом решение задачи полностью аналогично рассмотренным выше случаям. Единственное отличие от предыдущей задачи состоит в том, что здесь задается только один параметр вынуждающей силы – ее амплитуда

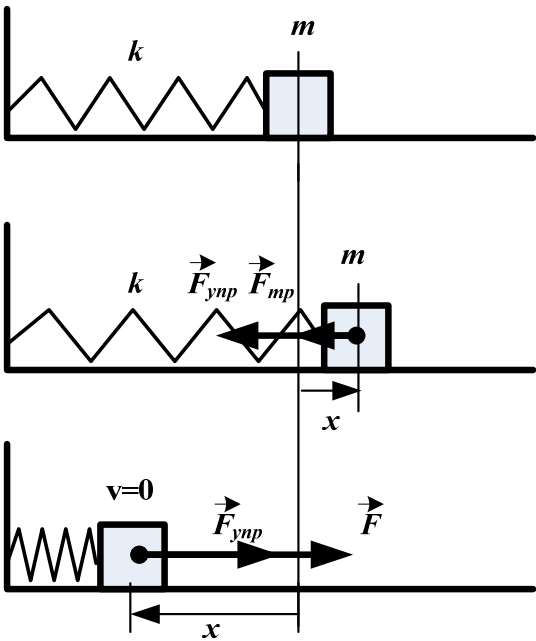


Рис. 3. б.

Ниже приведен пример оформления рабочего листа таблицы для этой задачи.

Microsoft Excel - 1.3\_Пружинный маятник\_Вынужденные колебания\_Задача 1-3.xls

Введите вопрос

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					
13																					
14																					
15																					
16																					
17																					
18																					
19																					
20																					
21																					
22																					

**Вынужденные колебания пружинного маятника под действием несинусоидальной силы**

**Исходные данные:**

Масса тела	$m =$		кг
Жесткость пружины	$k =$		Н/м
Начальная скорость тела	$v_{0x} =$		м/с
Начальное смещение тела	$x_0 =$		м
Коэффициент трения	$f =$		Н·с/м
Приближение скорости	$\Delta v =$		м/с
Собственная частота	$\omega_0 =$		с <sup>-1</sup>
Период колебаний	$T_0 =$		с
Коэффициент затухания	$\beta =$		с <sup>-1</sup>
	$t_{min} =$		с
Временной интервал	$t_{max} =$		с
	$\Delta t =$		с

**Переменная сила:**

Амплитуда	$F_{max} =$		Н
-----------	-------------	--	---

NUM

## Лабораторная работа № 1.4.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Цель работы: моделирование свободных колебаний физического маятника.

Оборудование: апплет "Физический маятник", ЭТ MS Excel.

**Введение**

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции. В состоянии равновесия центр инерции маятника находится под точкой подвеса, на одной с ней вертикали. Пусть маятник представляет собой однородный цилиндр массой  $m$ , подвешенный на нити длиной  $L$ . Высота цилиндра  $H$ , радиус основания  $R$  (см. рис. 1).

При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\theta$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M_o = -mg \cdot \ell \cdot \sin \theta,$$

где  $\ell$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра инерции цилиндра  $C$ , т.е. в нашем случае  $\ell = L + H/2$ . Обозначим момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой  $J_o$ . Тогда уравнение динамики вращательного движения для такого маятника запишется в виде:

$$J_o \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \cdot \left( L + \frac{H}{2} \right) \cdot \sin \theta. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что при малых отклонениях ( $\theta \approx \sin \theta$ ) (1) переходит в известное нам уравнение свободных незатухающих колебаний

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mg\ell}{J_o} \cdot \theta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_o^2 \theta = 0, \quad (1^*)$$

решение которого будет иметь вид  $\theta = \theta_{\max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o)$  (см. Лабораторную работу № 1.1). Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции его относительно оси вращения и от расстояния между осью вращения и центром инерции маятника.

Момент инерции маятника  $J_o$  по теореме Штейнера может быть представлен в виде

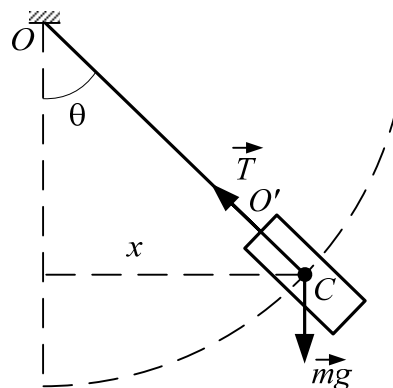


Рис. 1. Физический маятник.

$$J_o = J_C + m\ell^2 = J_C + m \cdot \left(L + \frac{H}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Момент инерции цилиндра  $J_C$  относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр инерции (эта ось перпендикулярна к геометрической оси цилиндра), рассчитывается по формуле:

$$J_C = \frac{1}{12}mH^2 + \frac{1}{4}mR^2. \quad (2^*)$$

Решая (1) методом половинного интервала, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} - \frac{mg}{J_o} \cdot \left(L + \frac{H}{2}\right) \cdot \sin \theta_o \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} - \frac{mg}{J_o} \cdot \left(L + \frac{H}{2}\right) \cdot \sin \theta_i \cdot \Delta t; \\ \theta_{i+1} \approx \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3)$$

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Моделирование колебаний физического маятника в программе MS Excel

1. Получить систему уравнений (3) и вывести формулу (2\*).

2. Составить и заполнить *таблицу исходных данных* (для трех различных значений начального отклонения, см. ниже образец оформления рабочего листа ЭТ, или воспользоваться готовым шаблоном 1.4\_Физический маятник.XLT).

**Физический маятник**

**Исходные данные**

Масса маятника	$m =$	кг
Угол отклонения	$\theta_o =$	град
Длина нити	$L =$	м
Высота цилиндра	$H =$	м
Радиус цилиндра	$R =$	м
Ускорение свободного падения	$g =$	м/с <sup>2</sup>
Начальная скорость	$v_o =$	м/с
Линейное отклонение	$x_o =$	м
Момент инерции маятника	$J =$	кг*м <sup>2</sup>
Коэффициент сопротивления	$f =$	Н*с
Временной интервал	$t_o =$	с
	$t_{max} =$	с
	$\Delta t =$	с
Частота колебаний	$\omega_o =$	с <sup>-1</sup>
Период колебаний	$T_o =$	с

$$\begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} - \frac{mg}{J_o} \left(L + \frac{H}{2}\right) \sin \theta_o \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} - \frac{mg}{J_o} \left(L + \frac{H}{2}\right) \sin \theta_i \cdot \Delta t; \\ \theta_{i+1} \approx \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Пример числовых данных:

$m=1$  кг;  $\theta_0=5$  град, 15 град, 45 град;  $L=5$  м;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $H=0,2$  м;  $R=0,05$  м;  $v_0=0$  м/с;  $f=0,05$  Н·с;  $t_0=0$  с;  $t_{max}=25$  с.

3. Рассчитать (в рамках созданной таблицы) момент инерции цилиндра  $J_o$ , начальное смещение  $x_o$  центра инерции цилиндра (для всех трех значений начального отклонения), а также собственную частоту колебаний маятника при малых отклонениях (см. (1\*)).

4. На отдельном листе (**Расчеты**) смоделировать данные для графического моделирования колебаний физического маятника, т.е. рассчитать скорость, отклонение маятника и линейное смещение центра инерции цилиндра в различные моменты времени для всех значений начальных отклонений  $\theta_o$ .

№№ n/n	Время, с	Угловая скорость, с <sup>-1</sup>			Время, с	Отклонение			Линейное смещение, м		
		θ <sub>o1</sub>	θ <sub>o2</sub>	θ <sub>o3</sub>		рад	рад	рад	θ <sub>o1</sub>	θ <sub>o2</sub>	θ <sub>o3</sub>
						θ <sub>o1</sub>	θ <sub>o2</sub>	θ <sub>o3</sub>			
1.											
2.											
3.											
...											

5. Построить графики колебательного процесса (зависимости угловой скорости, отклонения и смещения от времени) на различных диаграммах. Определить экспериментально, когда колебания перестают быть гармоническими. В чем это проявляется?

6. Рассчитать отклонение и смещение тела в случае малых колебаний (см. (1\*)). Сравнить полученные в пп. 5 и 6 решения.

7. Решить задачу для случая действия силы сопротивления, пропорциональной скорости тела.

8. Сохранить данные в файле 1.4\_Физический маятник.xls.

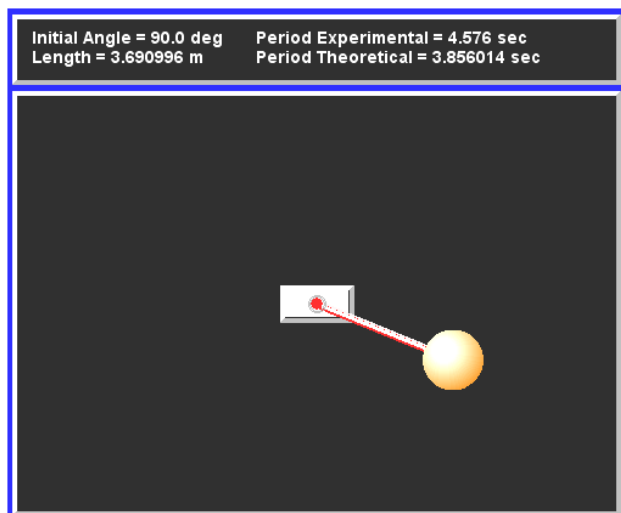
### Задания для самостоятельной работы

1. Рассмотреть колебания физического маятника, представляющего собой 1) тонкий однородный стержень длиной  $L$  и массой  $m$ ; 2) шар радиуса  $R$  и массой  $m$ , подвешенный на нити.

### **Задание № 2. Работа с компьютерной моделью "Физический маятник"**

1. Открыть апплет "[Физический маятник](#)".

В верхней части экрана выводятся длина нити и начальное отклонение, а также экспериментальное и теоретическое значения периода колебаний.



Теоретический период вычисляется по формуле для гармонических колебаний. Различие между этими величинами объясняется тем, что при определенных условиях (большом угле отклонения) колебания перестают быть гармоническими.

Длину нити и угол отклонения от вертикали можно изменять с помощью мыши (при нажатой левой кнопке).

2. Для произвольно установленной длины нити подобрать максимальный угол отклонения, при котором колебания еще остаются гармоническими.

3. Для 2÷3 значений начальных параметров рассчитать период колебаний и сравнить его с приводимым в апплете (экспериментальное значение).

## Лабораторная работа № 1.5.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Цель работы: моделирование параметрических колебаний на примере физического маятника.

Оборудование: апплет "Качели" (*Laboratoire virtuel* (Франция) <http://labo.ntic.org/>), ЭТ MS Excel.

**1. Понятие о параметрических колебаниях**

Параметрические колебания – это особый вид колебаний, возникающих в системе (предварительно приведенной в движение), при периодическом изменении ее параметров, от величины которых существенно зависит период собственных колебаний.

Происхождение параметрических колебаний можно пояснить на простой модели: маятник в виде груза массы  $m$ , подвешен на нити, длину которой можно изменять (рис. 1, а), втягивая и выпуская нить через отверстие  $O$ .

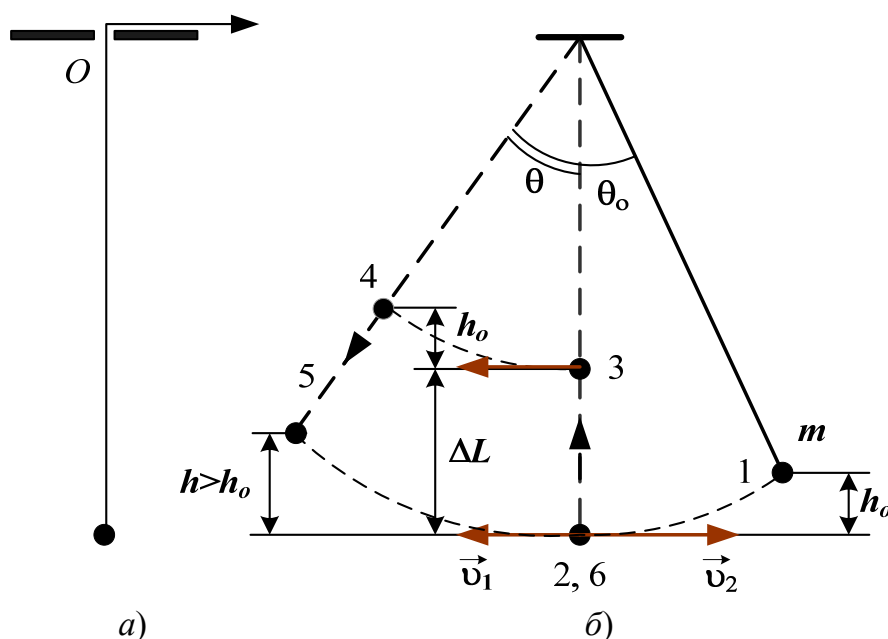


Рис. 1.

Т.к. период колебаний маятника зависит от длины подвеса, то при периодическом ее изменении, например, с периодом, вдвое меньшим периода собственных колебаний маятника, возможно возбуждение параметрических колебаний. Пусть маятник массой  $m$  и длиной  $L$  отклонен на угол  $\theta_0$  (рис. 1, б, положение 1) и начинает двигаться. Через положение равновесия он проходит со скоростью  $v_1$ . В тот же момент укоротим маятник на  $\Delta L$ , подняв его в положение 3. На скорости маятника это не отразится, но угловая скорость при этом изменится (т.к. уменьшается радиус дуги окружности). Поэтому, двигаясь дальше по дуге меньшего радиуса, маятник остановится в положении 4, поднявшись на прежнюю высоту  $h_0$  относительно положения 3, но, отклонившись на угол  $\theta > \theta_0$ . В этот момент следует быстро восстановить первоначальную длину маятника. Он займет положение 5 и при этом окажется



над положением равновесия на высоте  $h > h_0$ , т.е. будет обладать избытком энергии по сравнению с положением 1. Возвращаясь в положение равновесия, маятник пройдет его со скоростью  $v_2 > v_1$  (положение 6, совпадающее пространственно с положением 2).

Данную операцию можно совершать дважды за период колебаний маятника; при этом он будет раскачиваться все сильнее. Так как существует неизбежное трение, то раскачка будет происходить до тех пор, пока энергия, сообщаемая маятнику за половину периода, не сравняется с потерями на трение за это же время.

Этот процесс называют "параметрическим резонансом", чем подчеркивается связь между собственной частотой системы и частотой "накачки" (сообщения энергии маятнику). Физическая суть процесса заключается в том, что энергия, сообщаемая маятнику при его подъеме, больше энергии, теряемой маятником при опускании его на меньшую высоту:  $\Delta L_1 = \Delta L \cdot \cos \theta$ . Рассмотрим подробнее энергетику процесса.

Натяжение нити должно не только уравнивать направленную вдоль нити составляющую силы тяжести  $mg \cdot \cos \theta$  (где  $\theta$  – угол отклонения нити от вертикали), но и сообщать телу центростремительное ускорение  $v^2/L$ , поэтому

натяжение нити  $T = mg \cdot \cos \theta + \frac{mv^2}{L}$  имеет наибольшее значение, когда маятник проходит через каждое из крайних положений (где  $v=0$ , а  $\theta \neq 0$ ). Тогда при втягивании нити в среднем положении внешняя сила будет совершать работу

$$A_1 = mg \cdot \Delta L + \frac{mv_1^2}{L} \Delta L$$

большую, чем та отрицательная работа, которая будет совершаться при выпуске нити в крайних положениях:

$$A_2 = -mg \cdot \Delta L \cdot \cos \theta = -mg \cdot \Delta L \left(1 - \frac{h}{L}\right).$$

В результате за каждый период колебаний внешняя сила будет совершать положительную работу, и если эта работа превосходит потери энергии в системе за период, то энергия колебаний маятника, а значит и амплитуда этих колебаний, будет возрастать. Увеличение энергии маятника за половину периода его движения составляет:

$$\Delta E = A_1 + A_2 = 2 \frac{\Delta L}{L} E_0 \left(1 + \frac{h}{2h_0}\right) \cong 3 \frac{\Delta L}{L} E_0,$$

так как  $v_1^2 = 2gh_0$ ,  $E_0 = \frac{1}{2}mv_1^2$ ,  $h \cong h_0$ .

Наличие затухания приводит к уменьшению энергии до величины:

$$E_1 \cong E_o \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right),$$

где  $Q$  – добротность системы, а  $E_o$  – энергия системы в начале каждого полупериода. При больших добротностях убыль энергии составляет:

$$\Delta E_o = E_o - E_1 \cong E_o \frac{\pi}{Q}.$$

Для раскачки маятника (т.е. для параметрического возбуждения колебаний) необходимо выполнение неравенства:

$$\Delta E > \Delta E_o, \text{ т.е. } \frac{\Delta L}{L} > \frac{\pi}{3Q} \cong \frac{1}{Q}.$$

Величина  $\mu = \frac{\Delta L}{L}$  называется **глубиной модуляции параметра** (в данном случае длины маятника).

## 2. Моделирование параметрического резонанса в ЭТ MS Excel

Работу можно выполнять на основе модели физического маятника (с учетом сопротивления среды  $F_{mp} = f \cdot \frac{d\theta}{dt} = f \cdot \omega$ ), т.к. все расчетные формулы будут иметь аналогичный вид за небольшим исключением.

$$\begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{1/2} + \left[ -\frac{mg}{J_o} \cdot \ell \cdot \sin \theta_o - \frac{f}{J_o} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_o \cdot \ell^2 \right] \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} + \left[ -\frac{mg}{J_o} \cdot \ell \cdot \sin \theta_i - \frac{f}{J_o} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \ell^2 \right] \cdot \Delta t; \\ \theta_{i+1} \approx \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (1)$$

Действительно, мы будем исходить из того, что маятник начинает свое движение без начальной скорости из крайнего положения, определяемого начальным углом отклонения нити  $\theta_o$ . Центр тяжести маятника при этом движется по дуге радиусом  $r_1 = L + \frac{H}{2}$  и момент инерции

$$J_{o_1} = \frac{1}{12} mH^2 + \frac{1}{4} mR^2 + m \left( L + \frac{H}{2} \right)^2 = m \left[ \frac{1}{12} H^2 + \frac{1}{4} R^2 + \left( L + \frac{H}{2} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

При прохождении положения равновесия независимо от направления движения нить укорачивают на  $\Delta L$  и момент инерции маятника изменяется:

$$J_{o_2} = m \left[ \frac{1}{12} H^2 + \frac{1}{4} R^2 + \left( L - \Delta L + \frac{H}{2} \right)^2 \right], \quad (3)$$

причем линейная скорость маятника остается прежней, а угловая изменяется, ведь движение происходит теперь по дуге меньшей окружности

$$r_2 = L - \Delta L + \frac{H}{2}.$$

Поэтому вычисление угловой скорости организуется следующим образом:

1) пока маятник движется от одного из крайних положений к равновесному (или наоборот) по дуге радиусом  $r_1$  или  $r_2$ , его угловое смещение (или координата) и угловая скорость имеют либо противоположные знаки  $\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \theta_i < 0\right)$ , либо одинаковые  $\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \theta_i > 0\right)$ , а момент инерции не меняется и угловая скорость рассчитывается по одной из формул

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} + \left[ -\frac{mg}{J_{o1}} \cdot \left(L + \frac{H}{2}\right) \sin \theta_i - \frac{f}{J_{o1}} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \left(L + \frac{H}{2}\right)^2 \right] \cdot \Delta t$$

или

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} + \left[ -\frac{mg}{J_{o2}} \cdot \left(L - \Delta L + \frac{H}{2}\right) \sin \theta_i - \right. \\ \left. - \frac{f}{J_{o2}} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \left(L - \Delta L + \frac{H}{2}\right)^2 \right] \cdot \Delta t \end{aligned}$$

(за исключением середины первого интервала);

2) при прохождении положения равновесия (угол меняет знак на противоположный  $\theta_{i-1} \cdot \theta_i < 0$ ) нить укорачивают, что приводит к изменению угловой скорости, новое значение которой можно найти из условия, что линейная скорость при этом остается неизменной:

$$\begin{aligned} (v_x)_{i-1/2} = (v_x)_{i+1/2}; \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot r_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot r_2; \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i+1/2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} \cdot \frac{L + H/2}{L - \Delta L + H/2} - \end{aligned}$$

(условие записано для случая перехода с дуги бóльшего радиуса на дугу меньшего радиуса);

3) переход маятника через крайние положения (проекция скорости меняет знак  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-3/2} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{i-1/2} < 0$ ) сопровождается удлинением нити (восстановлением ее длины), поэтому он полностью аналогичен предыдущему случаю.

## Порядок выполнения работы

### Задание № 1. Составление и заполнение таблицы исходных данных и моделирование точек для построения графиков

1. Оформить таблицы в соответствии с предлагаемым ниже образцом (шаблон 1.5 *Параметрические колебания.XLT*). Можно также выполнять работу на основе модели физического маятника, скопировав лист и внося в него необходимые изменения.

Microsoft Excel - 1.5\_Параметрические колебания.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Вводите вопрос

Физический маятник (параметрические колебания)										№№ п/п	Время, с	Угловая скорость, с <sup>-1</sup>			Время, с	Угол, рад		
												Начальный угол, град				Начальный угол, град		
3	m=	кг								1		0	0	0		0	0	0
4	θ <sub>0</sub> =	град=								2								
5		град=								3								
6		град=								4								
7	L=	м								5								
8	g=	м/с <sup>2</sup>								6								
9	H=	м								7								
10	R=	м								8								
11	v <sub>0</sub> =	м/с								9								
12		м								10								
13	x <sub>0</sub> =	м								11								
14		м								12								
15	ΔL=	м								13								
16	μ=									14								
17	J=	кг*м <sup>2</sup>								15								
18		кг*м <sup>2</sup>								16								
19	f=	Н*с								17								
20										18								
21	t <sub>0</sub> =	с								19								
22	t <sub>max</sub> =	с								20								
23	Δt=	с								21								
24																		

Параметрические колебания

**Постоянные** величины: масса цилиндра и его геометрические размеры (высота и радиус), коэффициент сопротивления, шаг программы. **Переменные** величины: время, длина нити, скорость (линейная и угловая)

Пример числовых данных можно взять из предыдущей работы. Дополнительные данные – изменение длины нити  $\Delta L$  и момент инерции, соответствующий длине нити  $\ell = L - \Delta L$ . Число точек должно быть достаточно большим: не менее чем для  $2000 \div 5000$  подинтервалов.

2. Заполнить *таблицу исходных данных*. Изменение длины нити выбирается произвольно в интервале  $0 \leq \Delta L \leq L$  (для начала можно выбрать  $\Delta L = 0,5$  м или 1 м). Рассчитать шаг программы (ячейка **B23**), глубину модуляции  $\mu$  (ячейка **B16**) и моменты инерции маятника, соответствующие длине нити  $\ell = L$  и  $\ell = L - \Delta L$ , т.е. в ячейки **B17** и **B18** соответственно занести формулы:

$$=B3*(B9^2/12+B10^2/4+(B7+B9/2)^2);$$

$$=B3*(B9^2/12+B10^2/4+(B7-B15+B9/2)^2).$$

Ссылки на ячейки, содержащие необходимые числовые данные, указаны в соответствии с приведенным шаблоном, а формулы составлены на основе (2) и (2\*) модели "Физический маятник".

3. Выполнить пересчет углов из градусной меры в радианы и рассчитать линейное смещение для каждого из начальных углов отклонения.

4. Заполнить обе колонки "Время, с" таблицы с учетом того, что угловая скорость должна вычисляться в середине, а угловое смещение – в конце каждого временного подинтервала.

5. В ячейки **I3:K3** скопировать значения начальных углов отклонения маятника от положения равновесия с установлением связи между исходными и конечными ячейками. Аналогичную операцию проделать для диапазона ячеек **M3:O3**.

6. В ячейку **I4** занести формулу для расчета угловой скорости в начальный момент времени через значение начальной скорости  $v_0$ :

=B11/B7

7. Занести в столбец **I** формулы для вычисления угловой скорости:

1) в ячейку **I6** ввести следующую формулу (см. (1)):

=ЕСЛИ(M5\*M4<0;I5\*(\$B\$7+\$B\$9/2)/(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)-\$B\$3\*\$B\$8/\$B\$18\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)\*SIN(M5)\*\$B\$23-\$B\$19/\$B\$18\*I5\*(\$B\$7+\$B\$9/2)\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)\*\$B\$23;ЕСЛИ(I5\*I4<0;I5\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)/(\$B\$7+\$B\$9/2)-\$B\$3\*\$B\$8/\$B\$17\*(\$B\$7+\$B\$9/2)\*SIN(M5)\*\$B\$23-\$B\$19/\$B\$17\*I5\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)\*(\$B\$7+\$B\$9/2)\*\$B\$23;ЕСЛИ(I5\*M5<=0;I5-\$B\$3\*\$B\$8/\$B\$17\*(\$B\$7+\$B\$9/2)\*SIN(M5)\*\$B\$23-\$B\$19/\$B\$17\*I5\*(\$B\$7+\$B\$9/2)^2\*\$B\$23;I5-\$B\$3\*\$B\$8/\$B\$18\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)\*SIN(M5)\*\$B\$23-\$B\$19/\$B\$18\*I5\*(\$B\$7-\$B\$15+\$B\$9/2)^2\*\$B\$23)))

Эта формула копируется в нижележащие ячейки столбца **I**;

2) формула в ячейке **I5** несколько отличается от рассмотренной выше не только шагом (он составляет  $\Delta t / 2$ ), но и условиями вычисления угловой скорости:

=ЕСЛИ(И(I4<=0;M4>=0);I4-B3\*B8/B17\*(B7+B9/2)\*SIN(M4)\*B23/2-B19/B17\*I4\*(B7+B9/2)^2\*B23/2;ЕСЛИ(И(I4<=0;M4<=0);I4-B3\*B8/B18\*(B7-B15+B9/2)\*SIN(M4)\*B23/2-B19/B18\*I4\*(B7-B15+B9/2)^2\*B23/2;ЕСЛИ(И(I4>=0;M4<=0);I4-B3\*B8/B17\*(B7+B9/2)\*SIN(M4)\*B23/2-B19/B17\*I4\*(B7+B9/2)^2\*B23/2;I4-B3\*B8/B18\*(B7-B15+B9/2)\*SIN(M4)\*B23/2-B19/B18\*I4\*(B7-B15+B9/2)^2\*B23/2)))

Связано это с тем, что для использования формулы в ячейке **I6** (и ниже), необходимо иметь два предыдущих значения скорости или координаты (углового смещения), которых в данном случае нет.

8. Занести в ячейки столбца **M** формулы для расчета углового смещения  $\theta$  (см. (1)).

9. Аналогичным образом заполнить диапазоны ячеек столбцов **J**, **K** и **N**, **O**.

## Задание № 2. Построение графиков углового смещения и угловой скорости

1. По полученным данным построить график зависимости угловой скорости от времени для трех различных углов отклонения маятника в начальный момент времени. Изменяя от 0 коэффициент сопротивления, проследить за изменением поведения скорости. Можно ли добиться установившихся колебаний, при

которых амплитуда скорости меняться не будет? Как влияет величина  $\Delta L$  на скорость маятника?

2. Построить график зависимости углового смещения маятника от времени и ответить на вопросы п. 1 *Задания № 2*.

3. Экспериментально определить границы применимости модели. Объяснить сбои в работе модели. Каким образом можно было бы их устранить?

4. Сохранить данные в файле *1.5\_Параметрические колебания.xls*.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Открыть апплет "[Качели](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Ознакомиться с окном апплета, скопировать в тетрадь рисунок. Запустить демонстрацию, проследить за способом возбуждения колебаний. В чем его отличие от рассмотренного выше? Отметить максимальный угол раскачивания.

2. Разработать математическую модель процесса (взяв за основу модель параметрических колебаний), выполнить его моделирование в ЭТ *MS Excel* (лист **Качели** в книге *1.5\_Параметрические колебания.xls*). Параметры установки для таблицы исходных данных можно взять из апплета или модели параметрических колебаний. Коэффициент затухания вначале выбрать равным нулю.

3. После проверки работы модели изменить формулы, предусмотрев прекращение раскачивания и переход к свободным колебаниям при достижении определенного угла отклонения от равновесного положения. Подобрать экспериментально коэффициент затухания, так чтобы после прекращения раскачивания колебания постепенно затухали.

4. Сохранить данные.

Лабораторная работа № 1.6.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА, ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ

Цель работы: моделирование колебаний тела под действием архимедовой силы.

Оборудование: апплет "Колебания тела в жидкости" (Fu-Kwun Hwang, Dept. of physics, National Taiwan Normal University [www.phy.ntnu.edu.tw/java/buoyant](http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/buoyant)), ЭТ MS Excel.

## Введение

На тело, погруженное в жидкость, помимо силы тяжести действует выталкивающая (или *архимедова*) сила. Предположим, что погружаемый предмет имеет форму конуса высотой  $H$  и углом раствора  $2\alpha$ , и соотношение плотностей жидкости ( $\rho_{ж}$ ) и материала, из которого он изготовлен ( $\rho$ ), таково, что тело находится в равновесии, причем часть его выступает над поверхностью жидкости (рис. 1). Определим глубину погружения тела  $h_0$  в равновесном состоянии.

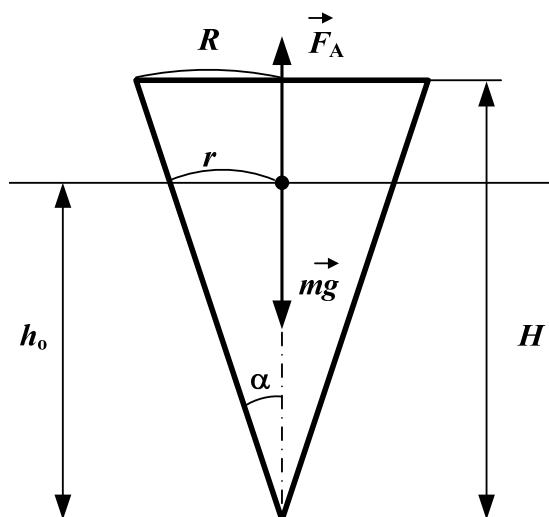


Рис. 1.

К определению глубины погружения тела в положении равновесия:  $H$  – высота тела,  $2\alpha$  – угол раствора конуса,  $R$  – радиус основания,  $h_0$  – глубина погружения в положении равновесия,  $r$  – радиус сечения поверхностью жидкости,  $\vec{F}_A$  – сила Архимеда,  $m\vec{g}$  – сила тяжести.

Условие равновесия тела в жидкости  $\vec{F}_A + m\vec{g} = 0$ , где  $m$  – масса тела – может быть найдена по его плотности и объему:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{1}{3} (\pi R^2) \cdot H = \frac{\pi \rho}{3} H \cdot (H \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{\pi \rho}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot H^3. \quad (1)$$

Сила Архимеда:

$$F_A = \rho_{ж} g \cdot \Delta V,$$

где  $\Delta V$  – объем погруженной части тела в положении равновесия.

$$F_A = \rho_{жс} g \cdot \frac{1}{3} \cdot (\pi r^2) \cdot h_o = \frac{\pi \rho_{жс}}{3} g h_o \cdot (h_o \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{\pi \rho_{жс}}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot h_o^3 \cdot g. \quad (2)$$

На основании (1) и (2) получим:

$$h_o = H \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_{жс}}}. \quad (3)$$

Выведем конус из положения равновесия (рис. 2) и отпустим его. При движении возникает сила сопротивления, направленная противоположно скорости тела. Уравнение движения

$$m\vec{a} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_{сопр}.$$

Направим ось  $Ox$  вверх, начало отсчета совместим с положением равновесия (на рис. 2 оно показано в виде горизонтальной пунктирной линии) и введем обозначения:  $x$  – смещение тела от положения равновесия и  $V_x$  – объем погруженной части тела в данный момент времени. Будем считать, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости тела и площади его поверхности, соприкасающейся с жидкостью  $S_x$ .

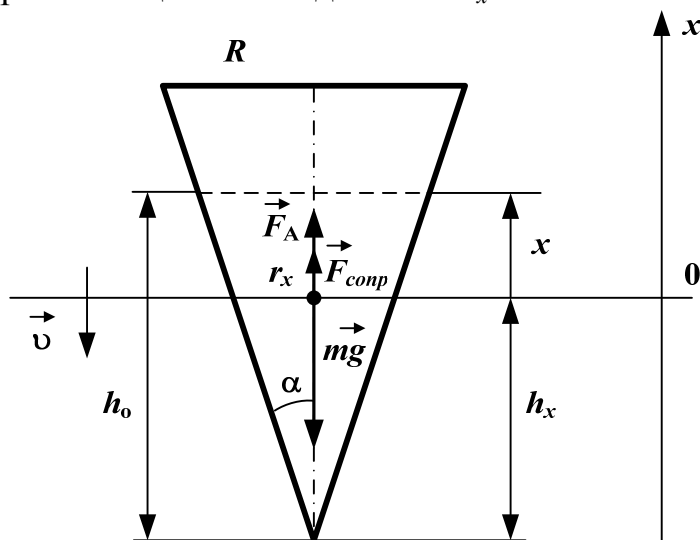


Рис. 2.

К составлению уравнения движения тела:  $x$  – смещение тела от положения равновесия;  $h_x$  – глубина погружения в данный момент времени;  $r_x$  – радиус сечения поверхностью жидкости.

Дифференциальное уравнение движения:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \rho_{жс} \cdot g \cdot V_x - mg - f \cdot \frac{dx}{dt} \cdot S_x,$$

где  $f$  – коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления  $F_{сопр\ x} = -f \cdot v_x \cdot S_x$ .

Расписывая  $S_x$  и  $V_x$  через  $h_x = h_o - x$  по аналогии с (2), получим



$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\pi \cdot \rho_{ж}}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (h_o - x)^3 \cdot g - mg - f \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \pi \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot (h_o - x)^2. \quad (4)$$

После небольших преобразований выражение (4) принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g + \frac{\pi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (h_o - x)^2}{m} \cdot \left( \frac{\rho_{ж} g}{3} \cdot (h_o - x) - \frac{f}{\sin \alpha} \cdot \frac{dx}{dt} \right). \quad (5)$$

Решение его методом половинного интервала приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{1/2} \approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_o - g \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{\pi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (h_o - x_o)^2}{m} \cdot \left( \frac{\rho_{ж} g}{3} \cdot (h_o - x_o) - \frac{f}{\sin \alpha} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_o \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} \approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} - g \cdot \Delta t + \frac{\pi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (h_o - x_i)^2}{m} \cdot \left( \frac{\rho_{ж} g}{3} \cdot (h_o - x_i) - \frac{f}{\sin \alpha} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} \right) \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (6)$$

Анализ процесса показывает, что движение тела является колебательным, так как при его смещении равнодействующая сил всегда будет направлена к положению равновесия, т.е. является возвращающей силой. Кроме того, в этой модели интересно отметить два момента: *во-первых*, скорость, с которой тело проходит положение равновесия, не зависит от направления движения и является максимальной по величине, и, *во-вторых*, смещение тела вверх и вниз от равновесного положения неодинаково. Докажем оба утверждения для случая отсутствия силы сопротивления, когда полная механическая энергия системы (тело+жидкость) остается неизменной.

Поскольку потенциальная энергия тела определяется только его положением (т.е. координатой), скорость в каждой точке не зависит от направления движения. Поэтому положение равновесия тело проходит всегда с одинаковой скоростью, не зависящей от того, смещается ли оно вверх или вниз. При этом направление равнодействующей меняется на противоположное, а вместе с тем меняется и знак приращения скорости. Например, если тело двигалось из крайнего нижнего положения вверх, и скорость его возрастала, т.к. равнодействующая была отлична от нуля и направлена вверх, то при прохождении положения равновесия равнодействующая изменяет направление, и скорость начинает уменьшаться. Следовательно, в момент прохождения положения равновесия скорость имеет максимальное значение.

Рассмотрим теперь вопрос о соотношении максимальных смещений тела вверх и вниз от положения равновесия. Обозначим модули этих смещений соответственно  $h_1$  и  $h_2$ . В соответствии с законом сохранения механической энергии работа, совершаемая равнодействующей сил при движении тела, например, из крайней верхней точки до положения равновесия, должна быть равна (по модулю) работе, совершаемой при движении тела от равновесного положения до крайнего нижнего. Построим график зависимости проекции

равнодействующей сил (без учета сопротивления среды) на ось  $Ox$  от смещения (рис. 3). Его вид свидетельствует о том, что при положительном смещении сила изменяется медленнее, чем при отрицательном.

Работа графически выражается площадью криволинейной трапеции под графиком функции  $F_{результ\ x} = f(x)$ . Тогда одинаковым по модулю смещениям (см. рис. 3, где  $h_1 = h_2$ ) будут соответствовать неодинаковые работы, что противоречит закону сохранения энергии. Следовательно, одинаковым работам, должны соответствовать разные смещения, причем всегда  $h_1 > h_2$ . График также позволяет установить, когда колебания перестают быть гармоническими: при малых смещениях график практически симметричен относительно начала координат, в дальнейшем же эта симметрия нарушается.

График зависимости результирующей силы от смещения (без учета сопротивления среды)

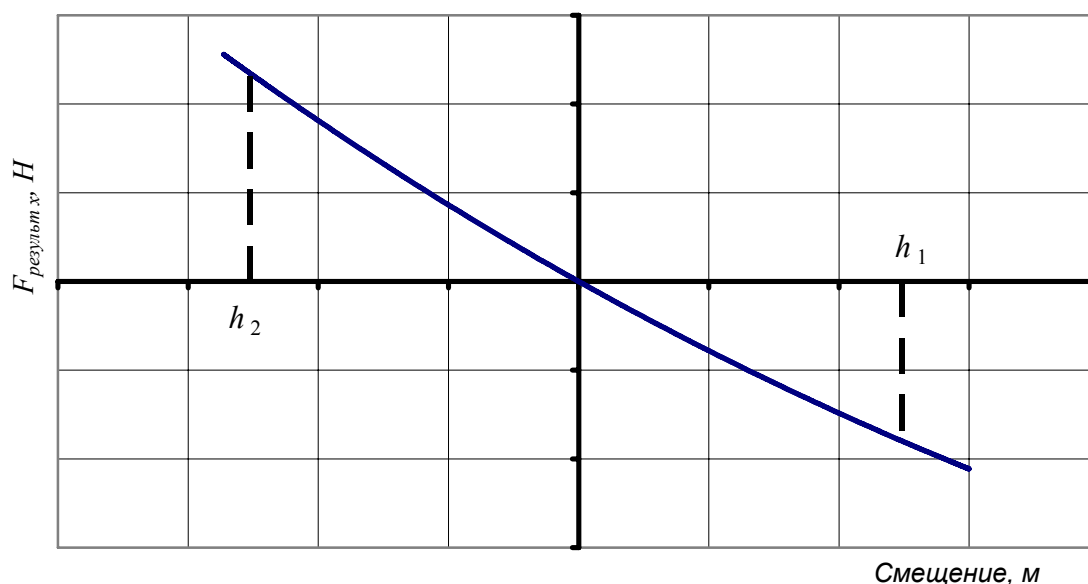


Рис. 3. График зависимости проекции равнодействующей сил, действующих на тело, от смещения его от положения равновесия.

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Наблюдение колебаний тела в жидкости в компьютерной модели

1. Открыть апплет "[Колебания тела в жидкости](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Познакомиться с окном апплета, освоить управление демонстрацией (по описанию апплета).

2. Экспериментально определить, при каком соотношении плотностей жидкости и вещества блока возникают колебания. Изменяя коэффициент сопротивления, проследить за его влиянием на протекание процесса.

3. Установить, как зависит частота колебаний от площади поверхности нижней грани (при  $m = \text{const}$ ). Блок каждый раз перед началом эксперимента устанавливают так, чтобы его нижняя грань соприкасалась с поверхностью жидкости.

4. Определить сдвиг фаз между колебаниями скорости и смещения тела.

## Задание № 2. Построение модели колебаний тела под действием архимедовой силы в ЭТ

1. Получить систему уравнений (6).

2. Составить и заполнить таблицу исходных данных (на листе **Конусообразное тело**) для трех различных значений начального смещения. Исходными данными для этой модели являются: высота конуса  $H$ , плотность материала  $\rho$ , из которого он изготовлен, и угол раствора  $2\alpha$ ; плотность жидкости  $\rho_{ж}$ ; коэффициент сопротивления  $f$ ; начальное смещение тела от положения равновесия  $x_0$  (несколько значений) и его скорость в начальный момент времени. Необходимо также задать (или рассчитать) шаг  $\Delta t$ . Пример числовых данных:

$$H=0,25 \text{ м}; \rho=500 \text{ кг/м}^3; 2\alpha=60^\circ; \rho_{ж}=1000 \text{ кг/м}^3; f=15 \frac{H \cdot c}{\text{м}^3};$$

$$x_0=0,05 \text{ м}, 0,1 \text{ м}, 0,15 \text{ м}; v_{0x}=0 \text{ м/с}; t_0 \div t_{\max}=[0;10] \text{ с}.$$

**Конусообразное тело**

1	<b>Колебания под действием архимедовой силы.</b>									
2										
3	<b>Конусообразное тело</b>									
4	$\rho =$		кг/м <sup>3</sup>							
5	$H =$		м							
6	$2\alpha =$		град							
7										
8	$\rho_{ж} =$		кг/м <sup>3</sup>							
9	$f =$		Н·с/м <sup>3</sup>							
10										
11	$x_0 =$		м							
12			м							
13	$v_0 =$		м/с							
14										
15	$t_0 =$		с							
16	$t_{\max} =$		с							
17	$\Delta t =$		с							
18										
19	$g =$		м/с <sup>2</sup>							
20										
21										
22	<b>Расчет:</b>									
23										
24	$m =$		кг							
25										
26	$h_0 =$		м							
27										
28										

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{1/2} &\approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 - g \frac{\Delta t}{2} + \frac{\pi \cdot \text{tg}^2 \alpha \cdot (h_0 - x_0)^2}{m} \cdot \left( \frac{\rho_{ж} g}{3} (h_0 - x_0) - \frac{f}{\sin \alpha} \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} &\approx \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} - g \Delta t + \frac{\pi \cdot \text{tg}^2 \alpha \cdot (h_0 - x_i)^2}{m} \cdot \left( \frac{\rho_{ж} g}{3} (h_0 - x_i) - \frac{f}{\sin \alpha} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i-1/2} \right) \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} &\approx x_i + \left( \frac{dx}{dt} \right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{aligned} \right.$$

$$m = \frac{\pi \rho}{3} \cdot \text{tg}^2 \alpha \cdot H^3$$

$$h_0 = H \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_{ж}}}$$

3. Рассчитать (в рамках созданной таблицы) массу тела и глубину его погружения в положении равновесия  $h_0$  по формуле (3).

4. На отдельном листе (**Расчеты**) рассчитать скорость, координату тела и фазу колебаний в соответствующие моменты времени для различных значений начального смещения.

## Задание № 3. Построение графиков колебательного процесса.

1. Построить графики колебательного процесса (зависимости скорости и смещения от времени) на различных диаграммах. Определить экспериментально, когда колебания перестают быть гармоническими. В чем это проявляется?

2. Рассчитать равнодействующую сил в те же моменты времени, что и смещение, и построить график зависимости  $F_{результ_x} = f(x)$ .

3. Доказать математически, используя закон сохранения энергии и теорему о кинетической энергии, что  $h_1 > h_2$ .

4. Построить график зависимости смещения тела от фазы колебаний.

5. Построить фазовую диаграмму, т.е. зависимость скорости тела от смещения в соответствующие моменты времени.

6. Сохранить результаты в файле 1.6\_Колебания тела в жидкости.xls.

7. Разработать аналогичную модель (лист **Цилиндр**) для случая, когда тело имеет форму тонкого цилиндра длины  $L$  и радиуса основания  $R$  ( $R \ll L$ ). Плотность материала цилиндра  $\rho$ , плотность жидкости  $\rho_{ж}$ . Силу сопротивления считать прямо пропорциональной скорости тела и длине погруженной части. Сохранить данные в том же файле.

Лабораторная работа № 1.7.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Цель работы: моделирование колебаний точечного заряда в неоднородном электростатическом поле.

Оборудование: ЭТ MS Excel.

## Введение

Разберем задачу о поведении точечного заряда  $q_o$ , помещенного между двумя закрепленными одноименными с ним зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Масса заряда  $q_o$  –  $m_o$ . Расстояние между зарядами  $q_1$  и  $q_2$  равно  $a$ . Введем ограничение: заряд  $q_o$  может смещаться только вдоль линии, соединяющей заряды  $q_1$  и  $q_2$ .

В каждой точке прямой, соединяющей заряды  $q_1$  и  $q_2$ , на заряд  $q_o$  действуют силы отталкивания  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  со стороны каждого из зарядов (рис. 1). Сила взаимодействия тем больше, чем больше величины взаимодействующих зарядов и меньше расстояние между ними. В некоторой точке этой прямой заряд  $q_o$  будет находиться в равновесии (ее положение определяется условием  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  или  $F_1 = F_2$ , где силы вычисляются по закону Кулона). Обозначим через  $r_{o1}$  и  $r_{o2}$  расстояния от этой точки до зарядов  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Если величины зарядов  $q_1$  и  $q_2$  равны, то  $r_{o1} = r_{o2}$ . Если же  $q_1 \neq q_2$ , то и  $r_{o1} \neq r_{o2}$ , причем заряд  $q_o$  будет находиться в равновесии в точке, лежащей ближе к меньшему заряду. Предположим для определенности, что  $|q_1| < |q_2|$ , тогда  $r_{o1} < r_{o2}$ .

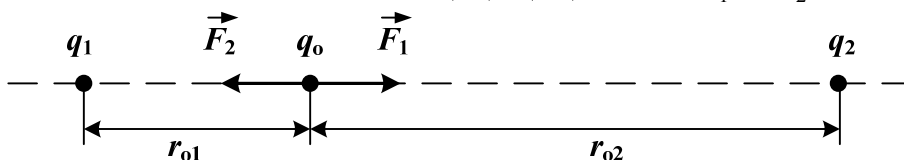


Рис. 1. Равновесное положение заряда  $q_o$ .

Нетрудно видеть, что при смещении заряда  $q_o$  в любую сторону от положения равновесия возникает возвращающая сила, стремящаяся вернуть заряд в исходную точку. В результате заряд  $q_o$  колеблется возле положения равновесия, причем отклонения его влево и вправо могут быть не равны друг другу.

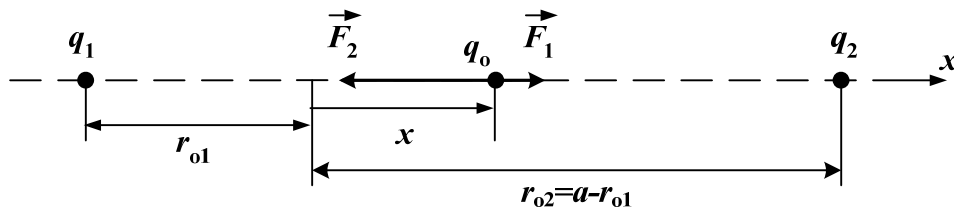


Рис. 2. К составлению уравнения движения заряда.

Примем точку равновесия заряда  $q_o$  за начало отсчета и направим ось  $Ox$  вправо (рис. 2). Уравнение движения заряда:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad ma_x = F_1 - F_2.$$

Отсюда:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{|q_o q_1|}{4\pi\epsilon_o (r_{o1} + x)^2} - \frac{|q_o q_2|}{4\pi\epsilon_o [a - (r_{o1} + x)]^2}.$$

Решая его методом половинного интервала, получим расчетные формулы

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_o + \frac{|q_o|}{4\pi\epsilon_o m} \left( \frac{|q_1|}{(r_{o1} + x_o)^2} - \frac{|q_2|}{[a - (r_{o1} + x_o)]^2} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} + \frac{|q_o|}{4\pi\epsilon_o m} \left( \frac{|q_1|}{(r_{o1} + x_i)^2} - \frac{|q_2|}{[a - (r_{o1} + x_i)]^2} \right) \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (1)$$

Моделирование движения заряда показывает, что при малых смещениях колебания являются гармоническими, при больших – становятся нелинейными.

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Моделирование колебаний заряда в ЭТ MS Excel

1. Получить систему уравнений (1).

2. Составить и заполнить *таблицу исходных данных* (для трех различных значений начального отклонения  $x_{\max}$ ). Образец оформления таблицы приведен ниже.

The screenshot shows a Microsoft Excel 2003 window titled "Microsoft Excel - 1.7\_Колебания заряда.xls". The spreadsheet is titled "Колебания заряда" in cell A1. The input fields are as follows:

Row	Cell	Parameter	Unit
3	B3	$q_1$	Кл
4	B4	$q_2$	Кл
5	B5	$q_o$	Кл
6	B6	$m_o$	кг
8	B8	$a$	м
9	B9	$k$	Н*м <sup>2</sup> /Кл <sup>2</sup>
10	B10	$x_o$	м
11	B11	$x_o$	м
12	B12	$x_o$	м
13	B13	$v_o$	м/с
15	B15	$t_o$	с
16	B16	$t_{\max}$	с
17	B17	$\Delta t$	с
19	B19	$r_{o1}$	м

The equations from (1) are displayed in the right side of the spreadsheet:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_o + \frac{|q_o|}{4\pi\epsilon_o m} \left( \frac{|q_1|}{(r_{o1} + x_o)^2} - \frac{|q_2|}{[a - (r_{o1} + x_o)]^2} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} + \frac{|q_o|}{4\pi\epsilon_o m} \left( \frac{|q_1|}{(r_{o1} + x_i)^2} - \frac{|q_2|}{[a - (r_{o1} + x_i)]^2} \right) \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases}$$

The diagram shows three point charges  $q_1$ ,  $q_o$ , and  $q_2$  on a horizontal axis.  $q_1$  is at a distance  $r_{o1}$  from  $q_o$ , and  $q_2$  is at a distance  $r_{o2} = a - r_{o1}$  from  $q_o$ . The displacement of  $q_o$  is  $x$ . Forces  $F_1$  and  $F_2$  are shown acting on  $q_o$ .

Пример числовых данных:

$$q_1 = 40 \text{ нКл}; q_2 = 90 \text{ нКл}; q_o = 2 \text{ нКл}; m_o = 0,04 \text{ з}; a = 1 \text{ м};$$

$$x_o = 0,05 \text{ м}; 0,25 \text{ м}; 0,5 \text{ м}; v_{ox} = 0 \text{ м/с}; t_{\max} = 10 \text{ с}.$$

3. Определить (в рамках созданной таблицы) шаг  $\Delta t$  и положение точки, в которой заряд  $q_o$  находится в положении равновесия ( $r_{o1}$ ).

4. На отдельном листе рассчитать скорость и координату заряда в соответствующие моменты времени для различных начальных смещений. При составлении формул предусмотреть ситуацию, когда начальное смещение может оказаться больше наименьшего из расстояний  $r_{o1}$  и  $r_{o2}$ .

5. Построить графики колебательного процесса, т.е. зависимости  $v_x(t)$  и  $x(t)$  на отдельных диаграммах. Установить влияние на вид графиков начального смещения и интервала  $\Delta t$ . В чем проявляется нелинейность процесса? Определить экспериментально границы применимости данной модели.

6. При  $q_1 \neq q_2$  выяснить соотношение максимальных отклонений заряда  $q_o$  в ту и другую сторону от положения равновесия. Объяснить различие в значениях отклонений.

7. Сохранить данные в файле 1.7\_Колебания заряда.xls.

## Лабораторная работа № 1.8.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С  
ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

Цель работы: изучение особенностей и основных характеристик колебаний систем с несколькими степенями свободы на примере связанных маятников.

Оборудование: апплеты "Связанные маятники\_1" (*Java Applets on Physics by Walter Fendt* <http://home.augsburg.baynet.de/walter.fendt/>), "Связанные маятники\_1a", "Связанные маятники\_1б", "Связанные маятники\_2" и "Связанные маятники\_3", "Двойной маятник\_1" (*Eric Weisstein's World of Physics*), "Двойной маятник\_2" (*Laboratoire virtuel* (Франция) <http://labo.ntic.org/>), ЭТ MS Excel.

**Введение**

До сих пор мы рассматривали системы с одной степенью свободы<sup>9</sup>, имевшие одну собственную частоту. При усложнении конструкции системы она может совершать более сложное движение. Во многих случаях (при отсутствии внешних сил) оно может быть сведено к сумме двух колебаний с различными частотами, зависящими от свойств системы. Такая система имеет две степени свободы. Даже простой математический маятник может совершать колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. в общем случае представляет собой систему с двумя степенями свободы.

Чаще всего несколькими степенями свободы обладают так называемые связанные системы – системы со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией между различными степенями свободы.

Основной чертой, характерной для всякой связанной системы, является то, что ее собственные колебания в общем случае негармоничны и, в зависимости от способа наблюдения, могут восприниматься либо как **биения**, происходящие таким образом, что энергия колебаний периодически перекачивается (полностью или частично) из одной части системы в другую и обратно, либо как сумма двух гармонических колебаний с частотами  $\omega^+$  и  $\omega^-$ , определяющимися структурой системы в целом.

В данной работе мы познакомимся со свободными и вынужденными колебаниями систем с двумя степенями свободы.

**1. Связанные физические маятники**

Наглядным и удобным для наблюдения примером подобной системы является система из двух физических маятников, связанных между собой невесомой пружиной с коэффициентом жесткости  $k$ . Пружина находится на расстоянии  $d$  от точек подвеса, расположенных на одной горизонтальной прямой (рис. 1).

<sup>9</sup> Степенью свободы механической системы называется всякий независимый параметр из числа тех, которые задают положение системы в пространстве. Число таких независимых параметров называется числом степеней свободы.



При движении маятников в одной вертикальной плоскости состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами – углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  отклонения маятников от вертикали, т.е. система имеет две степени свободы.

Уравнение движения для каждого маятника можно получить из общего уравнения динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M. \quad (1.1)$$

Здесь  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\theta$  – угол поворота,  $M$  – суммарный момент действующих сил относительно этой же оси.

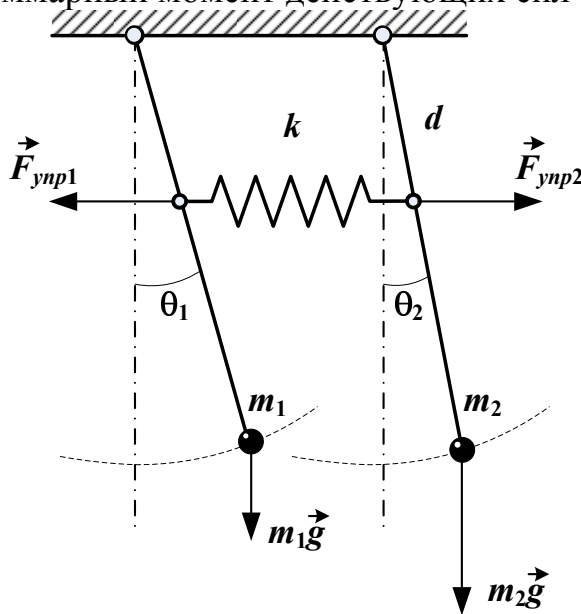


Рис. 1.

Так, например, в отсутствии трения на маятник 1 действует момент вращения

$$M_{11} = -m_1 g \cdot \ell_1 \cdot \sin \theta_1,$$

создаваемый силой тяжести, и момент силы упругости

$$M_{12} = k \cdot d^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cdot \cos \theta_1.$$

Поэтому уравнение движения маятника 1 будет иметь вид:

$$m_1 \ell_1^2 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -m_1 g \cdot \ell_1 \cdot \sin \theta_1 + k \cdot d^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cdot \cos \theta_1$$

или

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{\ell_1} \cdot \sin \theta_1 + \frac{k \cdot d^2}{m_1 \ell_1^2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cdot \cos \theta_1. \quad (1.2)$$

При выводе уравнения предполагается, что углы отклонения маятника невелики. Аналогичная формула получается и для маятника 2. Таким образом, мы получили систему уравнений, каждое из которых можно решить методом половинного интервала:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{\ell_1} \cdot \sin \theta_1 + \frac{k \cdot d^2}{m_1 \ell_1^2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cdot \cos \theta_1; \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{\ell_2} \cdot \sin \theta_2 - \frac{k \cdot d^2}{m_2 \ell_2^2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cdot \cos \theta_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Рассмотрим аналитическое решение системы (1.3) для частного случая  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  и малых углов отклонения ( $\sin \theta \approx \theta$ ). Система (1.3) в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \theta_1 + \frac{k \cdot d^2}{m \cdot \ell^2} (\theta_2 - \theta_1); \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \theta_2 - \frac{k \cdot d^2}{m \cdot \ell^2} (\theta_2 - \theta_1). \end{cases} \quad (1.4)$$

Упростим ситуацию, написав новые уравнения, получаемые сложением и вычитанием уравнений системы (1.4). Сложив эти два уравнения, получаем:

$$\frac{d^2(\theta_1 + \theta_2)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} (\theta_1 + \theta_2). \quad (1.5)$$

Разность уравнений имеет вид:

$$\frac{d^2(\theta_1 - \theta_2)}{dt^2} = -\left( \frac{g}{\ell} + 2 \cdot \frac{k d^2}{m \ell^2} \right) \cdot (\theta_1 - \theta_2). \quad (1.6)$$

В результате этого преобразования система (1.4) распалась на два независимых уравнения (1.5) и (1.6), т.е. с помощью этой операции нам удалось "развязать" эти уравнения. Рассматривая уравнение (1.5), можно заметить, что переменной величиной является сумма смещений ( $\theta_1 + \theta_2$ ), а в уравнении (1.6) – их разность ( $\theta_1 - \theta_2$ ). При этом каждое из этих уравнений описывает колебания гармонического осциллятора с собственными частотами соответственно

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ и } \omega^- = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k d^2}{m \ell^2}}. \quad (1.7)$$

Решение уравнений можно записать в следующем виде:

$$\theta_1 + \theta_2 = (\theta_{1_o} + \theta_{2_o}) \cdot \cos \omega^+ \cdot t, \quad (1.8)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = (\theta_{1_o} - \theta_{2_o}) \cdot \cos \omega^- \cdot t, \quad (1.9)$$

где  $\theta_{1_o}$  и  $\theta_{2_o}$  – угловые смещения маятников в момент времени  $t=0$ . Из уравнений (1.8) и (1.9) видно, что и сумма смещений, и разность смещений меняются с постоянной амплитудой.

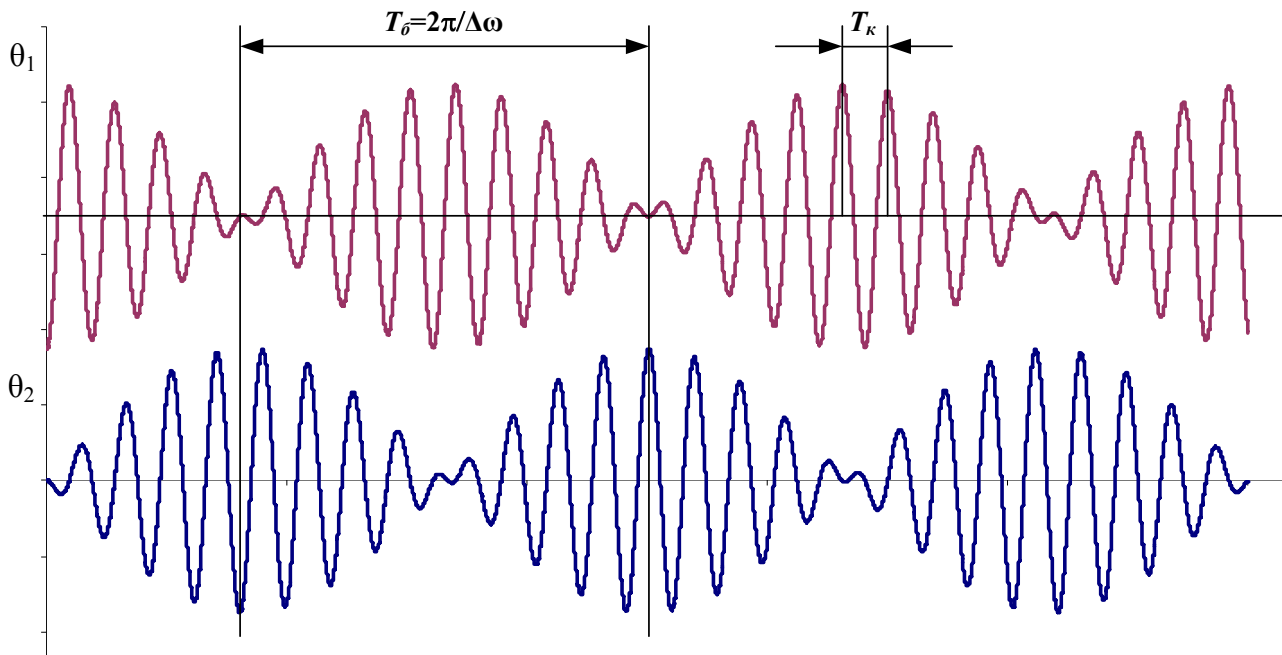


Рис. 2.

Рассмотрим поведение  $\theta_1$  и  $\theta_2$  для случая слабой связи ( $kd^2 \ll mgl$ ), когда вначале был отклонен только один из маятников, т.е. в момент времени  $t=0$  амплитуда смещения второго маятника  $\theta_2$  равна нулю (рис. 2). В этом случае маятник 1 начинает колебаться один, но с течением времени амплитуда  $\theta_2$  растет и в момент, когда амплитуда  $\theta_1$  спадает до нуля, амплитуда  $\theta_2$  достигает максимального значения и т.д.

Такая же картина наблюдается и при произвольном начальном смещении обоих маятников. И только в двух случаях не происходит обмена энергиями между маятниками:

а) если два одинаковых маятника в начальный момент времени были отклонены на один и тот же угол ( $\theta_{1_0} = \theta_{2_0}$ ) и имели одинаковые скорости

$\left( \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)_0 \right)$ , то они совершают синфазные гармонические колебания с

частотой  $\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ;

б) если при  $t=0$  отклонения и проекции скоростей равны и противоположны по знаку ( $\theta_{1_0} = -\theta_{2_0}$  и  $\left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)_0 = -\left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)_0$ ), маятники также

будут совершать гармонические колебания с частотой  $\omega^- = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2kd^2}{m\ell^2}}$ , но происходящие в противофазе (антифазные колебания).

Эти колебания называются нормальными модами колебаний (или нормальными колебаниями) системы связанных осцилляторов, а частоты  $\omega^+$  и  $\omega^-$  – нормальными частотами. Нормальная мода колебаний – это гармонические

колебания, которые совершают каждый из связанных маятников при специальном выборе начальных условий.

При любом другом выборе начальных отклонений в каждом из маятников возникают сразу оба нормальных колебания, другими словами, возникающие колебания представляют собой суперпозицию двух нормальных колебаний. Это следует из того, что любые начальные отклонение двух маятников можно представить как сумму двух начальных отклонений: одного, при котором оба маятника отклонены одинаково в одну сторону, и другого, при котором оба маятника одинаково отклонены в противоположные стороны. Чем слабее пружина, связывающая маятники, тем, очевидно, ближе друг к другу будут обе нормальные частоты.

Наличие слабой связи означает, что расстройка частоты  $\Delta\omega = \omega^- - \omega^+$  мала по сравнению с нормальными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и периодическое возрастание и убывание амплитуды колебаний каждого из маятников (т.е. биения), происходящее с частотой  $\omega_b = \Delta\omega$  (частота биений), легко наблюдается экспериментально. Амплитуды колебаний каждого из маятников периодически изменяются со сдвигом по фазе на  $\pi/2$ : когда одна из них достигает максимума, вторая обращается в нуль и наоборот (рис. 2).

Такое поведение маятников можно понять, апеллируя к нормальным модам колебаний. В случае четной моды нормальных колебаний, обозначенной знаком  $+$ , маятники движутся вместе, пружина не растянута и частота такая же, как для одиночного осциллятора. В случае нечетной моды нормальных колебаний (знак  $-$ ) пружина растянута, что увеличивает частоту этой моды колебаний. Если смещен только один из маятников, мы имеем две нормальные моды колебаний, находящиеся в определенной относительной фазе. Но поскольку частота нечетного колебания немного выше частоты четного колебания, относительная фаза изменяется. Через некоторое время два нормальных вида колебаний окажутся в противофазе, амплитуда  $\theta_1$  упадет до нуля, в то время как амплитуда  $\theta_2$  достигнет максимума, и т.д.

Можно также рассмотреть эту же ситуацию с энергетической точки зрения. При  $t=0$  вся энергия сосредоточена в маятнике 1. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от маятника 1 к маятнику 2 до тех пор, пока вся энергия не скопится в маятнике 2. Частота, с которой осцилляторы обмениваются энергией, равна разности нормальных частот  $(\omega^+ - \omega^-)$ .

Следует упомянуть также и о так называемых частных (парциальных) колебаниях, присущих связанным системам. Эти колебания получаются, если жестко закрепить один из маятников, а второй вывести из положения равновесия и предоставить самому себе (не уничтожая связи). Очевидно, парциальная частота будет превышать частоту уединенного маятника. В симметричной системе (одинаковые маятники) обе парциальные частоты равны друг другу, причем это общее значение заключено между значениями двух нормальных частот.

В случае различных маятников их движение носит более сложный характер, чем это описано выше для симметричной системы.

## 2. Связанные пружинные маятники

Рассмотрим теперь колебательную систему (рис. 3), составленную из двух пружинных маятников (массы  $m_1$  и  $m_2$ , жесткости пружин  $k_1$  и  $k_2$ ). Данный маятник также представляет собой систему с двумя степенями свободы (состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами  $x_1$  и  $x_2$  смещения тел от положения равновесия), поэтому необходимо составлять уравнение движения каждого тела в отдельности.

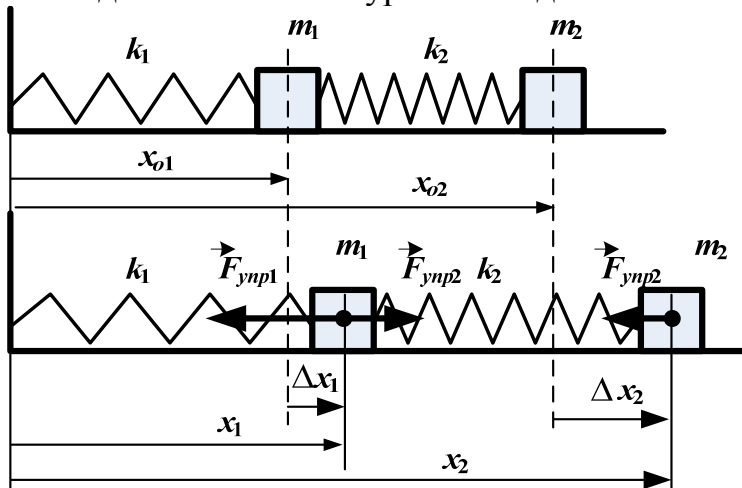


Рис. 3.

Направим ось  $Ox$  вправо и примем за начало отсчета точку крепления первой пружины<sup>10</sup>. Тогда начальная координата первого тела определяется длиной первой пружины в недеформированном состоянии  $x_{o1} = \ell_1$ . Начальное положение второго тела:  $x_{o2} = \ell_2 + x_{o1}$ , где  $\ell_2$  – длина второй пружины в недеформированном состоянии.

В отсутствии трения на второе тело действует только сила упругости со стороны второй пружины, а на первое – сила упругости со стороны обеих пружин. Введем обозначения:  $\Delta x_{1_0}$  и  $\Delta x_{2_0}$  – начальные смещения тел от положения равновесия;  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ ,  $x_1 = x_{o1} + \Delta x_1$  и  $x_2 = x_{o2} + \Delta x_2$  – соответственно смещения и координаты тел в произвольный момент времени. Очевидно, что смещения масс от положения равновесия определяют деформации пружин  $\Delta \ell_1$  и  $\Delta \ell_2$ .

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2}, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{упр3} \end{cases}$$

и спроектируем каждое из них на выбранное направление оси  $Ox$ :

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = F_{1x} + F_{2x}, \\ m_2 a_{2x} = F_{2x}. \end{cases}$$

В дифференциальной форме:

<sup>10</sup> Кроме того, за начало отсчета можно выбрать начальное положение первого тела в состоянии покоя:  $x_{o1} = 0$ .

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2((x_2 - x_1) - (x_{o2} - x_{o1})) - k_1(x_1 - x_{o1}), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2((x_2 - x_1) - (x_{o2} - x_{o1})). \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь:  $(x_2 - x_1) - (x_{o2} - x_{o1}) = \Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta \ell_2$  – удлинение (деформация) второй пружины в любой момент времени,  $(x_1 - x_{o1}) = \Delta x_1 = \Delta \ell_1$  – удлинение первой пружины. Решение уравнения движения первого тела методом половинного интервала:

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right)_{1/2} \approx \left( \frac{dx_1}{dt} \right)_o + \left( \frac{k_2}{m_1}((x_{2o} - x_{1o}) - (x_{o2} - x_{o1})) - \frac{k_1}{m_1}(x_{1o} - x_{o1}) \right) \frac{\Delta t}{2}, \\ \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right)_{i+1/2} \approx \left( \frac{dx_1}{dt} \right)_{i-1/2} + \left( \frac{k_2}{m_1}((x_{2i} - x_{1i}) - (x_{o2} - x_{o1})) - \frac{k_1}{m_1}(x_{1i} - x_{o1}) \right) \cdot \Delta t, \\ (x_1)_{i+1} \approx (x_1)_i + \left( \frac{dx_1}{dt} \right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для второго тела:

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right)_{1/2} \approx \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_o - \frac{k_2}{m_2}((x_{2o} - x_{1o}) - (x_{o2} - x_{o1})) \cdot \frac{\Delta t}{2}, \\ \left( \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right)_{i+1/2} \approx \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_{i-1/2} - \frac{k_2}{m_2}((x_{2i} - x_{1i}) - (x_{o2} - x_{o1})) \cdot \Delta t, \\ (x_2)_{i+1} \approx (x_2)_i + \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (2.3)$$

Данную систему можно разбить на две парциальные: жестко закрепим первое тело в положении равновесия (недеформированная пружина) и получим парциальную систему с собственной частотой  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ . Аналогично, закрепив второе тело в положении равновесия (и, тем самым, заблокировав вторую степень свободы), получим еще одну парциальную систему с частотой  $\omega_1 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m_1}$  (см. Лабораторную работу № 1.2, задача 3).

### **3. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы** **Успокоители механических систем**

При работе различных машин часто возникают периодические силы, действие которых может оказаться вредным, особенно при возникновении резонансных явлений. Для уменьшения этого вредного действия применяют различного рода успокоители. Присоединение успокоителя создает систему с двумя степенями свободы, нормальные частоты колебаний которых отличны от собственных частот ее частей, так что резонанса не возникает.

Предположим, например, что машина массы  $M$  испытывает действие периодической силы  $F$  частоты  $\omega_e$  (рис. 4). Такая сила может возникнуть из-за несовершенного центрирования вращающейся части машины. Пусть амортизаторы (пружины жесткостью  $K$ ) по тем или иным причинам не создают достаточного успокоения машины.

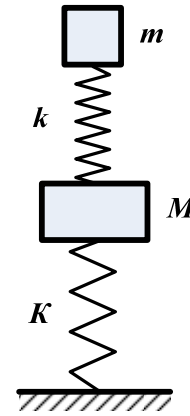


Рис. 4.

Оказывается, что добавление к машине успокоителя, состоящего из тела массы  $m < M$ , опирающегося на пружину с жесткостью  $k$ , позволяет достичь цели, если частота успокоителя  $\omega_0$  равна частоте внешней силы. Действительно, пусть  $X$  и  $x$  – смещения масс из положения равновесия. Тогда движение каждого маятника описывается уравнениями:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + (K + k)X - kx = F_{\max} \cos \omega t, \\ m\ddot{x} - k(X - x) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Вынужденные колебания под действием гармонической силы происходят с частотой этой силы и являются также гармоническими. Поэтому колебания каждой из масс происходят по закону:

$$X = X_{\max} \cos \omega_e t, \quad x = x_{\max} \cos \omega_e t.$$

Подставив их в уравнения движения, получим алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} X_{\max} (-M \cdot \omega_e^2 + (K + k)) - kx_{\max} = F_{\max}, \\ -X_{\max} k + (k - m\omega_e^2)x_{\max} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Из последнего уравнения системы следует, что при  $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \omega_e^2$  амплитуда  $X_{\max}$  обращается в нуль; масса успокоителя при этом движется по закону:

$$x = \frac{F_{\max}}{k} \cdot \cos(\omega_e t + \pi).$$

Сила, действующая со стороны пружины успокоителя на главную машину

$$F_2 = kx = F_{\max} \cdot (\cos \omega_e t + \pi),$$

оказывается равной по величине и противоположной по фазе вынуждающей силе, а потому, следовательно, машина перестает колебаться.

#### 4. Двойной маятник

Двойной маятник (рис. 5) можно представить следующим образом: в точке  $m_1$  имеется еще одно шарнирное соединение, к которому подвешивается второй математический маятник ( $m_2, \ell_2$ ), вынужденный качаться в той же плоскости. Колебания такой системы носят хаотический характер.

Составление дифференциального уравнения движения двойного маятника

в декартовых координатах (по аналогии с рассмотренными выше примерами) крайне затруднительно из-за наличия реакций, возникающих в шарнирных соединениях. Подобные задачи решаются составлением уравнений движения для обобщенных координат<sup>11</sup> (уравнения Лагранжа). Дело в том, что задание положения системы точек, скрепленных связями, в декартовых координатах не всегда удобно. Выбор параметров, необходимых для описания положения всех точек механической системы (т.е. обобщенных координат), должен определяться прежде всего целесообразностью. Так, например, если силы зависят только от расстояния между частицами, то разумно ввести эти расстояния в уравнения динамики в явном виде, а не через посредство декартовых координат. В нашем случае в качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения каждого из маятников от вертикали ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ).

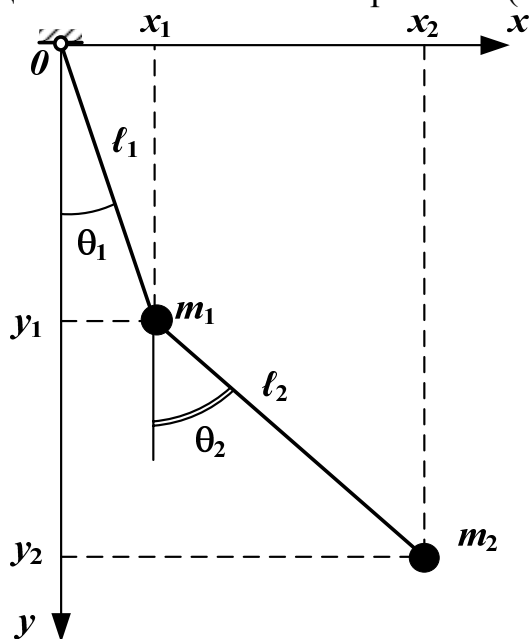


Рис. 5. Двойной маятник.

Рассмотрим последовательность составления уравнений Лагранжа на примере задачи колебаний двойного маятника (без трения!).

1) Ввести систему отсчета (рис. 5) и выразить декартовы координаты через обобщенные:

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1 \cdot \sin \theta_1, \\ y_1 = -\ell_1 \cdot \cos \theta_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = \ell_1 \cdot \sin \theta_1 + \ell_2 \cdot \sin \theta_2, \\ y_2 = -(\ell_1 \cdot \cos \theta_1 + \ell_2 \cdot \cos \theta_2). \end{cases}$$

2) Путем дифференцирования этих равенств получить декартовы составляющие скоростей, выраженные через обобщенные координаты ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ) и обобщенные скорости ( $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$ ):

<sup>11</sup> Обобщенные координаты – это независимые параметры, определяющие положение механической системы в пространстве. Эти параметры иногда могут совпадать с декартовыми координатами тех или иных точек.



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{x_1} = \ell_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1, \\ \dot{y}_1 = v_{y_1} = \ell_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = v_{x_2} = \ell_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 + \ell_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2, \\ \dot{y}_2 = v_{y_2} = \ell_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 + \ell_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2. \end{cases}$$

Тогда квадраты скоростей каждого маятника:

$$v_1^2 = v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin^2 \theta_1 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2;$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_1 + \ell_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \cos^2 \theta_2 + 2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \\ &+ \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin^2 \theta_1 + \ell_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \sin^2 \theta_2 + 2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \\ &= \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

3) Декартовы координаты, входящие в формулу потенциальной энергии, заменить на обобщенные:

$$\begin{aligned} E_p &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 g \ell_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 g \ell_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cdot \cos \theta_2) = \\ &= -(m_1 + m_2) g \ell_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 g \ell_2 \cdot \cos \theta_2. \end{aligned}$$

4) Скорости, входящие в формулу кинетической энергии, заменить на обобщенные скорости, так что кинетическая энергия в общем случае начинает зависеть не только от обобщенных скоростей, но и от обобщенных координат:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 \ell_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_1^2}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \frac{(m_1 + m_2) \ell_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 + m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

5) Составить выражение для функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = E_k - E_p &= \frac{(m_1 + m_2) \ell_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cdot \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

6) Составить уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Первый маятник:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ &\quad - m_2 \ell_1 \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_1 \ell_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2); \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2 \ell_1 \ell_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (4.2), получить уравнение Лагранжа для первого маятника:

$$(m_1 + m_2) \ell_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \cdot \sin \theta_1 = 0. \quad (4.3)$$

Второй маятник: (уравнение Лагранжа)

$$\ell_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \ell_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - \ell_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \cdot \sin \theta_2 = 0 \quad (4.4)$$

После несложных преобразований (4.3) и (4.4) получаем систему дифференциальных уравнений, которую легко решить методом половинного интервала:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2 \cdot \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \left[ \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \left( \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot \dot{\theta}_2^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{\ell_1} \cdot \left( \sin \theta_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{m_2 + m_1}{m_2} \cdot \sin \theta_1 \right) \right], \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{m_2 + m_1}{m_1 + m_2 \cdot \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \left[ \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \left( \frac{m_2}{m_2 + m_1} \dot{\theta}_2^2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{\ell_2} \cdot (\sin \theta_1 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_2) \right]. \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1. Работа с компьютерной моделью "Связанные математические маятники"**

1. Открыть апплет "[Связанные маятники\\_1](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Ознакомиться с окном апплета и назначением управляющих кнопок<sup>12</sup> (рис. 6).

<sup>12</sup> См. подробнее Лабораторную работу № 1.1.

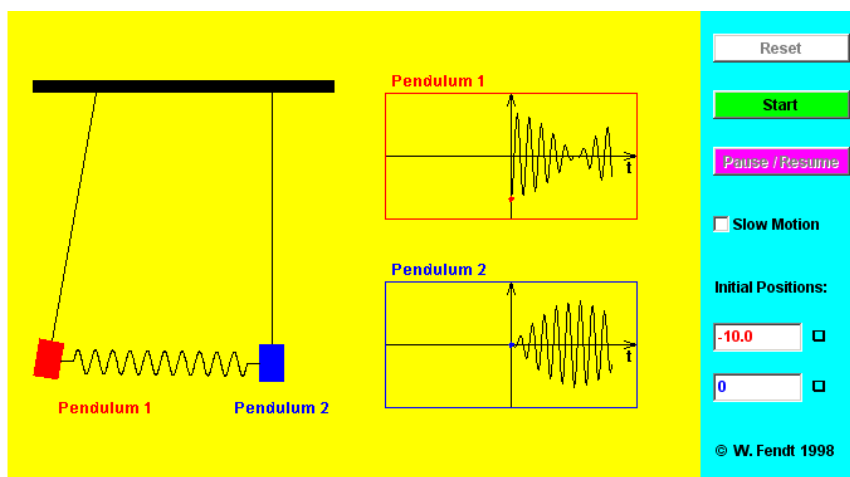


Рис. 6.  
Окно апплета "Связанные маятники\_1"

2. Определить экспериментально границы и шаг изменения начальных значений углов отклонения.

3. Смоделировать ситуацию, когда маятники совершают а) синфазные колебания, б) противофазные колебания. Каков характер колебаний каждого из маятников? Зарисовать схематично графики колебаний маятников.

4. Установить нулевое начальное смещение маятника 2. Запустить демонстрацию и определить по графикам, когда амплитуда смещения этого маятника достигает максимального значения. Зарисовать схематично графики колебаний.

### Задание № 2. Моделирование колебаний связанных физических маятников в ЭТ MS Excel по аналитическим формулам

1. Преобразовать уравнения (1.8) и (1.9), полученные для случая одинаковых маятников, путем их почленного сложения и вычитания (по аналогии с упрощением системы (1.4)). В результате должны получиться два независимых уравнения, описывающих изменение отклонения каждого из маятников.

2. На основании полученных уравнений выделить *постоянные* и *переменные* величины (для каждого маятника в отдельности!), разработать и заполнить *таблицу исходных данных* (лист **Аналитическое решение**) для случая одинаковых параметров маятников ( $m_1=m_2=0,2$  кг,  $\ell_1=\ell_2=1$  м). Величину  $d$  принять равной  $0,2 \cdot \ell$ . Начальные значения углов отклонений маятников:  $\theta_{1_0} \neq 0$  (в пределах  $5-6^\circ$ ) и  $\theta_{2_0} = 0$ . Выполнить перевод углов из градусной меры в радианы. Временной интервал выбирается самостоятельно. Шаг изменения переменной  $t$  рассчитывается не менее чем для 500 подинтервалов.

3. Выбрать коэффициент жесткости пружины таким, чтобы связь между маятниками была слабой, выполнив проверку соответствующего условия. Рассчитать в рамках созданной таблицы нормальные частоты колебаний, а также расстройку частоты (частоту биений).

4. На отдельном листе (лист **Расчеты**) по полученным формулам провести вычисление угловых смещений каждого из маятников в соответствующие моменты времени выбранного интервала  $[t_o = t_{\min}; t_{\max}]$  (т.е. смоделировать точки для построения графиков: таблица "*Время, с – Отклонение 1, рад – Отклонение 2, рад*"). Для удобства один из графиков можно сместить по вертикальной оси относительно другого (для этого в формулу отклонения соответствующего маятника необходимо добавить еще одно слагаемое, а именно – величину смещения, в качестве которого можно выбрать максимальное значение из модулей начальных отклонений, умноженное не менее чем на 2). В этом случае расположение графиков будет аналогично рис. 2.

5. Построить графики зависимости углового смещения каждого из маятников на одной диаграмме. Изменяя временной интервал и, при необходимости, некоторые из параметров маятников<sup>13</sup>, добиться появления картины биений (3-4 периода).

6. Исследовать влияние коэффициента жесткости пружины связи (не менее 5-6 значений) на поведение системы (период и частоту биений). Результаты (для определенных параметров маятников и начальных данных) занести в таблицу (составляется на листе **Аналитическое решение**). Сравнить полученные значения с теоретическими (см. п. 3 задания).

$\text{№№}$ $n/n$	$k, \text{Н/м}$	$T_0, \text{с}$	$\Delta\omega, \text{с}^{-1}$	
			<i>эксп.</i>	<i>теор.</i>
1.				
2.				
...				

7. Изменяя величину  $d$  (не менее 5÷6 значений в пределах  $0 < d \leq \ell$ ), выяснить, как изменяется частота биений (по аналогии с п. 6 задания). Результаты измерений (для определенных параметров маятников и начальных данных) занести в таблицу (составляется самостоятельно на листе **Аналитическое решение**).

8. Установить отличные от нуля начальные отклонения маятников  $\theta_{1o} \neq \theta_{2o}$ . Получить картины колебаний для нескольких значений начальных смещений. Установить по графику, обращается ли в нуль амплитуда смещений при таких начальных условиях? Что означает это с энергетической точки зрения?

9. Для выбранных параметров маятников установить начальные отклонения, соответствующие гармоническим колебаниям. Экспериментально (по графикам) определить период и рассчитать круговую частоту синфазных и противофазных колебаний. Сравнить полученные значения с нормальными частотами колебаний.

10. Выяснить влияние величины  $d$  на частоты синфазных и антифазных

<sup>13</sup> При всех изменениях такие параметры маятников, как масса и длина нити подвеса, всегда должны быть одинаковыми.

колебаний (не менее 8-10 значений в пределах  $0 < d \leq \ell$ ). Сравнить экспериментальные значения (полученные непосредственно по графикам колебаний) с теоретическими. Результаты представить в виде таблицы на рабочем листе **Аналитическое решение**. Построить на одной диаграмме графики зависимости  $\omega^+$  и  $\omega^-$  от  $d^2$  (тип и вид диаграммы – *Точечная*, с последующим добавлением *линии тренда*). Объяснить математически вид графиков.

№№ n/n	d, м	d <sup>2</sup> , м <sup>2</sup>	T <sup>+</sup> , с	$\omega^+$ , с <sup>-1</sup>		T <sup>-</sup> , с	$\omega^-$ , с <sup>-1</sup>	
				эксп.	теор.		эксп.	теор.
1.								
2.								
...								

11. Разбить систему на две парциальные, проанализировать их поведение и составить уравнение движения любой из них для случая малых отклонений (по аналогии с (1.4)). Рассчитать парциальные частоты колебаний, используя созданную в п. 2 задания *таблицу исходных данных*. Записать решение полученного уравнения (уравнение гармонических колебаний<sup>14</sup> с частотой, равной парциальной). Построить график колебаний парциальной системы на имеющейся уже диаграмме, установив начальные данные, при которых наблюдаются гармонические колебания. Изменяя величину  $d$ , определить:

- 1) в каком случае маятники колеблются с частотой, равной парциальной;
- 2) каков диапазон изменения парциальных частот и сравнить его с интервалом нормальных частот  $[\omega^+; \omega^-]$ .

Объяснить полученные результаты.

12. Сохранить результаты в файле 1.8\_Связанные физические маятники.xls.

### Задание № 3. Численное моделирование свободных колебаний связанных маятников в ЭТ MS Excel

1. Решить каждое из уравнений системы (1.3) методом половинного интервала.

2. На основании полученных уравнений выделить *постоянные* и *переменные* величины. Разработать и заполнить *таблицу исходных данных* (лист **Численное решение**<sup>15</sup>), выбрав для начала одинаковые параметры маятников

$$(m_1 = m_2, \ell_1 = \ell_2) \text{ и начальные условия } \left( \theta_{1_0} = \theta_{2_0}, \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)_0 = 0 \right).$$

3. На имеющемся листе **Расчеты** провести вычисление угловых скоростей и смещений маятников (таблица "Время, с – Скорость 1, м/с – Скорость 2, м/с –

<sup>14</sup> См. Лабораторную работу № 1.1, формулы (2) и (3).

<sup>15</sup> Его можно получить путем копирования листа **Аналитическое решение** и последующим внесением необходимых изменений.

Время, с – Отклонение 1, рад – Отклонение 2, рад") в выбранном временном интервале. Предусмотреть по аналогии с п. 4 Задания № 2 смещение одного из графиков по вертикали (для этого в отличие от предыдущего задания необходимо будет добавить новую колонку в созданную таблицу).

4. Построить графики колебаний системы связанных маятников на одной диаграмме. Сравнить графики, полученные на основании аналитического и численного решения, путем сравнения частот синфазных или антифазных колебаний (или построив графики на одной диаграмме).

5. Установить  $\theta_{1_0} \neq 0$  и  $\theta_{2_0} = 0$ . Получить картину биений (не менее 3-4 периодов колебаний биений).

6. Исследовать поведение системы при неодинаковых параметрах маятников ( $m_1 \neq m_2$  или  $\ell_1 \neq \ell_2$ ). Проверить, возможны ли в этом случае гармонические колебания.

7. Рассчитать *парциальные частоты* маятников. Смоделировать колебания парциальных систем на имеющейся диаграмме колебаний связанных маятников (численное решение). Возможно ли в данном случае совпадение нормальных и парциальных частот?

8. На отдельной диаграмме (**Сравнение решений**) построить графики колебаний одного и того же маятника по данным, полученным различными методами (т.е. на основе аналитического и численного решения). Установить одинаковые для обоих решений параметры исследуемого маятника, начальные отклонения (не более  $5-6^\circ$ ), и временной интервал, при котором наблюдается не более 5 периодов биений. Изменяя  $t_{\max}$  (а, следовательно, шаг изменения времени), проследить за изменением точности вычислений по приближенным формулам, сравнивая графики колебаний. Увеличить количество подинтервалов  $\Delta t$  до  $1000 \div 2000$  и вновь провести сравнение графиков. Сделать вывод о влиянии шага  $\Delta t$  на точность вычислений.

9. Составить и решить уравнения движений маятников с учетом действующей на них силы сопротивления среды (пропорциональной скорости или квадрату скорости – *по указанию преподавателя*). Ввести в *таблицу исходных данных* новые параметры – коэффициенты сопротивления для каждого из маятников. Изменить формулы скоростей в таблице данных на листе **Расчеты**. Объяснить изменение вида графиков.

10. Сохранить данные в том же файле.

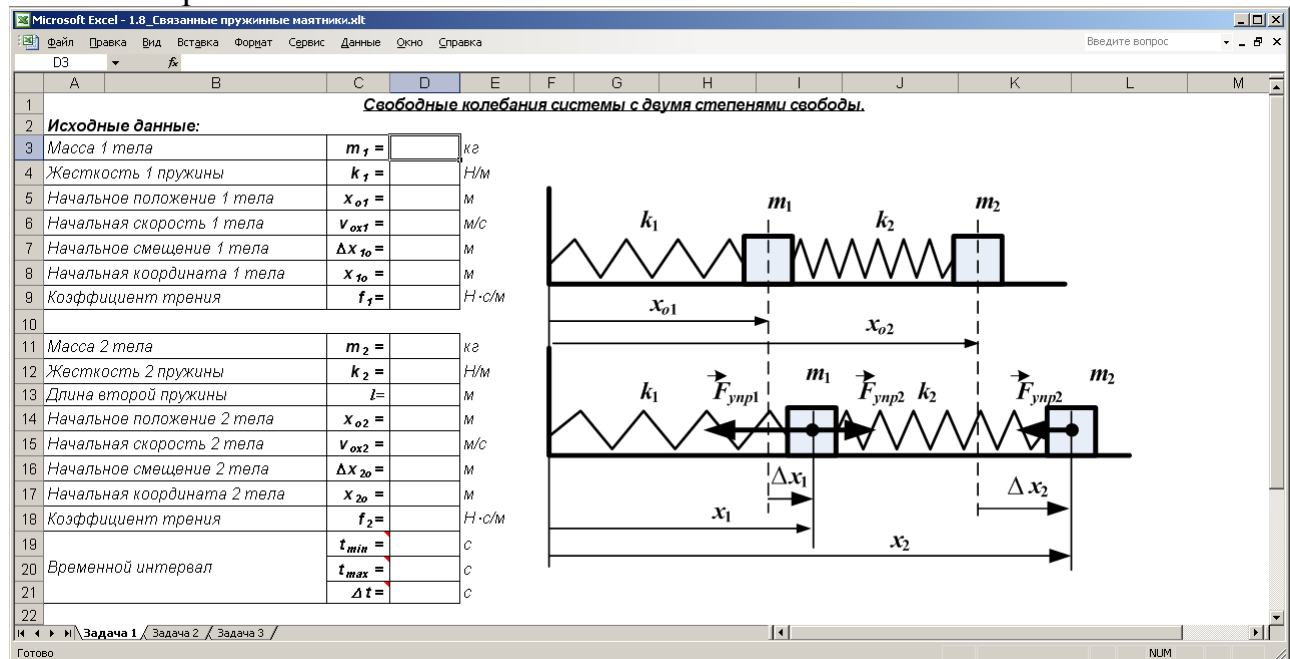
#### **Задание № 4. Моделирование колебаний горизонтального пружинного маятника с двумя степенями свободы**

1. Открыть новую книгу. Проанализировать колебания связанных пружинных маятников (системы (2.2) и (2.3)), выделить *постоянные и переменные* величины, составить и заполнить *таблицу исходных данных*

(см. ниже пример оформления рабочего листа) в новой книге. Переименовать лист (Задача 1).

2. Пользуясь системами (2.2) и (2.3), смоделировать колебания каждого тела в отдельности (количество подынтервалов не менее 500), т.е. рассчитать скорости тел и их координаты, а также удлинения пружин в соответствующие моменты времени.

3. По результатам задания построить графики зависимости положений тел от времени на одной диаграмме и графики изменения удлинения пружин с течением времени.



4. Рассмотреть колебания маятника с учетом трения.

5. Сохранить данные в файле 1.8\_Связанные Пружинные маятники.xls.

### Задания для самостоятельной работы

1. Открыть апплет "Связанные маятники 2" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Ознакомиться и законспектировать описание апплета. Выполнить моделирование при следующих параметрах установки:

- 1)  $m_1/m_2=1,1$ , и  $x_2, k_2$  – по умолчанию;
- 2)  $m_1/m_2=1$  и  $x_2=x_1, k_2$  – по умолчанию;
- 3)  $m_1/m_2=1$  и  $x_2=-x_1, k_2$  – по умолчанию;
- 4)  $m_1/m_2=1$  и  $x_2=0, k_2$  – по умолчанию;
- 5)  $m_1/m_2=1000, x_2=0, k_2$  – по умолчанию;
- 6)  $m_1/m_2=1000, x_2 \neq 0, k_2$  – по умолчанию;
- 7)  $m_1/m_2=0,01, x_2=0, k_2$  – по умолчанию;
- 8)  $m_1/m_2=0,01, x_2 \neq 0, k_2$  – по умолчанию;
- 9)  $k_2=0, m_1/m_2$  – любое,  $x_2 \neq 0$ ;
- 10)  $k_2=0, m_1/m_2$  – любое,  $x_2=0$ .

Зарисовать схематично графики колебаний с указанием параметров установки в каждой ситуации. В каком из них колебания имеют характер биений? Когда колебания

маятников гармонические? Объяснить поведение маятников в последних двух случаях. Проверить, как влияет жесткость пружины на поведение системы в случаях 1-8.

2. Добавить новый лист (**Задача 2**) в книгу 1.8\_Связанные пружинные маятники.xls. Проанализировать поведение системы, состоящей из двух маятников, связанных общей пружиной жесткости  $k_c$  (рис. 7):

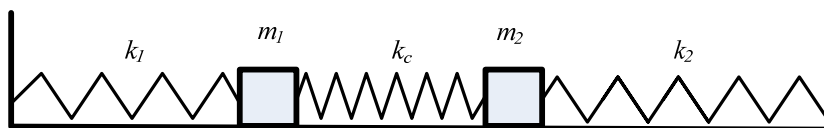


Рис. 7.

- 1) Составить дифференциальные уравнения движения и решить их методом половинного интервала. Разработать и заполнить *таблицу исходных данных*.
- 2) Определить нормальные и парциальные частоты колебаний каждого из тел в рамках созданной таблицы.
- 3) Выполнить расчет и построить графики скорости и смещения (или координат) тел в выбранном промежутке времени, а также графики изменения деформации каждой из пружин.
- 4) Смоделировать условия, при которых колебания тел будут гармоническими. Определить частоту колебаний в каждом из случаев непосредственно по графику и сравнить их с теоретическими значениями нормальных частот. Возможна ли ситуация, когда пружина связи не деформируется в процессе движения?
- 5) Определить экспериментально парциальные частоты колебаний системы и сравнить с теоретическими значениями.
- 6) Реализовать в созданной модели ситуации п. 1 **заданий для самостоятельной работы**, в том числе подобрать такие параметры системы, при которых наблюдаются биения.
- 7) Сохранить данные в файле 1.8\_Связанные пружинные маятники.xls.

3. Открыть апплет "[Связанные маятники\\_3](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны). Законспектировать описание апплета. Освоить управление демонстрацией.

1) Рассчитать собственную частоту колебаний первого (основного) пружинного маятника (масса  $m_1$ , жесткость пружины  $k_1$ , числовые значения параметров указаны в апплете) –  $\omega_{01}$ .

2) Установить коэффициент затухания (произвольно) и отношение масс  $m_2/m_1 < 1$ .

Рассчитать собственную частоту колебаний второго маятника (масса  $m_2$ , жесткость пружины  $k_2 = k_1$ ) –  $\omega_{02}$ .

3) Изменяя частоту вынуждающей силы, определить а) резонансные частоты  $\omega_{рез1}$  и  $\omega_{рез2}$ ; б) частоту, при которой амплитуда колебаний основного маятника имеет наименьшее значение (антирезонанс). Отметить случаи синфазных и антифазных установившихся колебаний маятников и сравнить частоты этих колебаний с частотой  $\omega_{02}$ .

4. Добавить новый лист (**Задача 3**) в книгу 1.8\_Связанные пружинные маятники.xls. Проанализировать поведение системы, аналогичной рассмотренной в апплете "Связанные маятники\_3" (рис. 8).



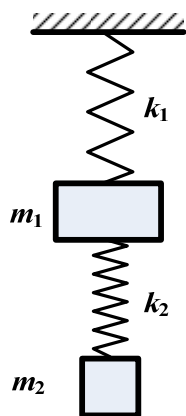


Рис. 8. Колебания связанных пружинных маятников под действием гармонической силы  $F = F_{\max} \sin \omega_0 t$ , действующей на первое тело.

- 1) Составить и решить дифференциальные уравнения движения маятников методом половинного интервала (с учетом сопротивления). Разработать и заполнить *таблицу исходных данных*, используя числовые данные апплета.
- 2) Определить собственные частоты колебаний каждого из маятников и парциальные частоты колебаний системы. Смоделировать колебания тел.
- 3) Построить графики смещения тел на одной диаграмме.
- 4) Подобрать частоту вынуждающей силы, при которой наблюдается антирезонанс. Сравнить ее с собственной частотой колебаний второго маятника.
- 5) Сохранить данные в файле 1.8\_Связанные пружинные маятники.xls.

#### Задание № 5. Работа с компьютерной моделью "Двойной маятник"

1. Открыть апплет "[Двойной маятник\\_1](#)" (папка C:\Виртуальный практикум Колебания и волны\Апплеты для курса Колебания и волны) (рис. 9). В апплете приведена анимация колебаний двойного маятника и диаграммы изменения углов отклонения каждого из маятников с течением времени. Проследить за поведением каждого маятника. Какова картина колебаний маятников?

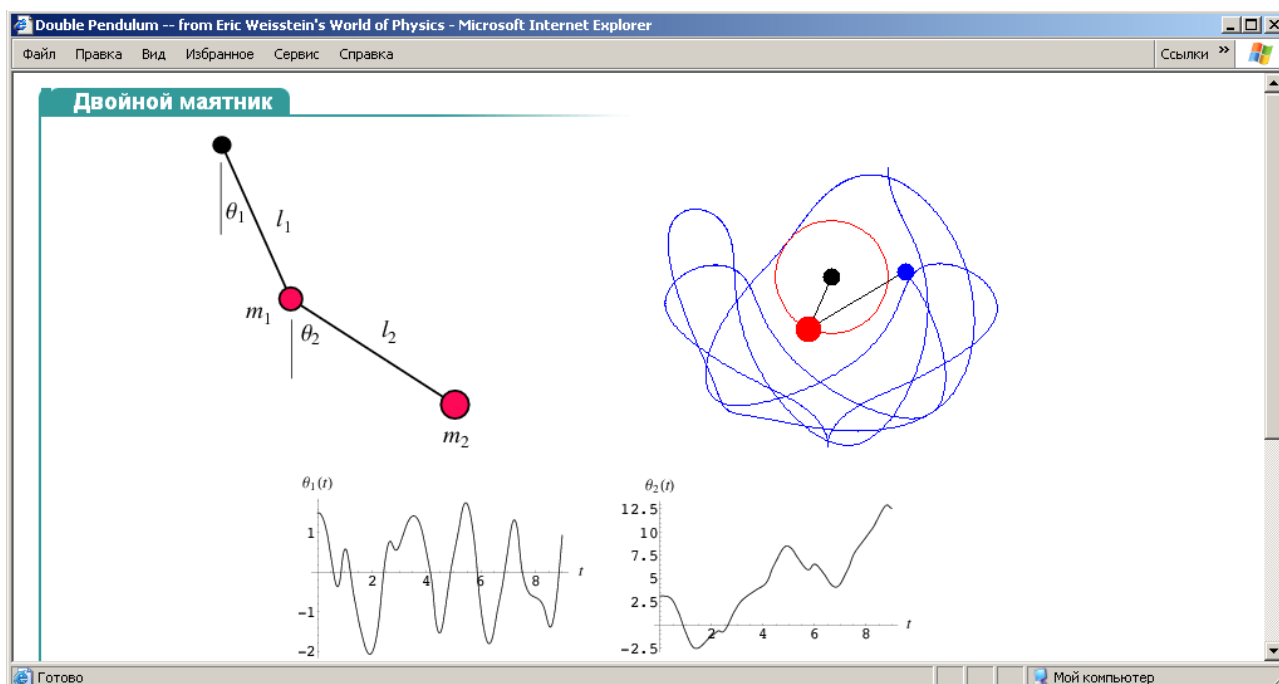


Рис. 9. Окно апплета "Двойной маятник\_1".

2. Открыть апплет "[Двойной маятник\\_2](#)". В апплете рассматриваются колебания двойного маятника при малых углах отклонения и при наличии

трения. Освоить управление демонстрацией (вывод графиков, изменение параметров эксперимента: коэффициента трения и начальных значений углов отклонения маятников). Проследить за поведением каждого маятника. Какова картина колебаний? Установить влияние параметров на процесс колебаний. Выяснить отличие от предыдущей модели.

**Задание № 6. Моделирование колебаний двойного маятника в ЭТ MS Excel**

1. Получить самостоятельно уравнение Лагранжа для второго маятника (4.4), а также систему (4.5).

2. Решить систему (4.5) методом половинного интервала. Выделить *постоянные* и *переменные* величины.

3. Открыть новую книгу. Разработать и заполнить *таблицу исходных данных*.

4. Смоделировать колебания каждого тела в отдельности (количество подинтервалов не менее 5000), т.е. рассчитать скорости тел ( $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$ ) и их угловые смещения ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ).

5. По результатам задания построить графики зависимости углов отклонения тел от времени на одной диаграмме. Сравнить результаты моделирования с диаграммами, представленными в апплетах "Двойной маятник".

6. Сохранить данные в файле 1.8\_Двойной маятник.xls.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Пользуясь изложенной в задании последовательностью, составить уравнение Лагранжа для обычного математического маятника и решить его методом половинного интервала. Добавить новый лист в книгу 1.1\_Математический маятник.xls. Смоделировать колебания маятника, используя некоторые *исходные данные* задачи. Сравнить результаты численного моделирования с аналитическим решением.

## РАЗДЕЛ II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкости  $C$ , катушки индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и источника переменной э.д.с.  $\mathcal{E}$  (рис. 1) называют *колебательным контуром*. При определенных условиях в такой цепи могут возникать электрические колебания, т.е. периодические изменения силы тока, заряда на обкладках конденсатора и напряжения на отдельных участках цепи. В зависимости от способа подключения источника к колебательному контуру различают последовательный и параллельный контур (рис. 1, а и б).

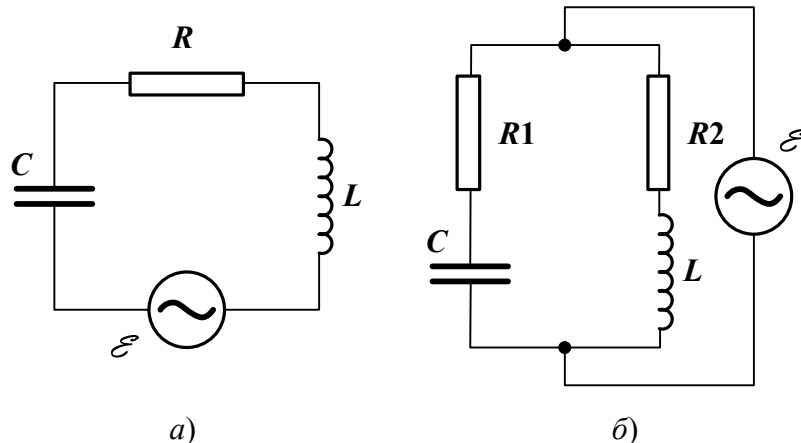


Рис. 1. Виды колебательных контуров: а) последовательный, б) параллельный.

Рассмотрим процесс возникновения электрических колебаний в простейшем колебательном контуре, состоящем из конденсатора и соединенной с ним последовательно катушки индуктивности. Сопротивлением проводников (так называемым активным сопротивлением) будем пренебрегать.

Колебания в контуре можно возбудить двумя способами: 1) сообщив обкладкам конденсатора некоторый заряд и 2) возбуждив в индуктивности ток.

Воспользуемся первым способом. Если присоединить отключенный от индуктивности конденсатор к источнику тока (рис. 2, положение 1), то на его обкладках возникают разноименные заряды  $-q_0$  и  $+q_0$ . Между обкладками возникает электрическое поле, энергия которого равна

$$W_{\text{э}} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

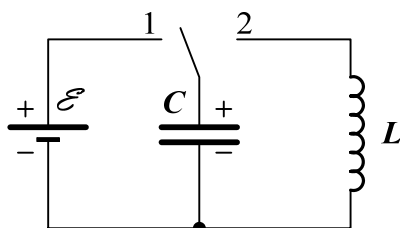


Рис. 2. Возбуждение колебаний в электрическом колебательном контуре.

После замыкания ключа (положение 2) конденсатор будет разряжаться, и в цепи возникает электрический ток, однако он не сразу достигает своего максимального значения, т.к. этому препятствует явление самоиндукции. В результате ток увеличивается постепенно. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в энергию магнитного поля, обусловленного током,

текущим через индуктивность. Эта энергия равна

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, состоящая из энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов и будет оставаться постоянной.

$$W = W_{\text{э}} + W_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}.$$

Поэтому в момент, когда конденсатор полностью разрядится (при этом напряжение на конденсаторе, а, следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль), энергия магнитного поля, а значит и ток достигают своего максимального значения:

$$W = W_m = \frac{LI_{\text{max}}^2}{2}.$$

Начиная с этого момента ток, не меняя своего направления, будет убывать. Однако из-за наличия в цепи индуктивности ток не может исчезнуть сразу, а будет убывать постепенно, перезаряжая конденсатор. Возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Поэтому, когда ток в цепи станет равным нулю, конденсатор вновь оказывается заряженным, но знаки заряда его обкладок будут противоположны первоначальным. Энергия магнитного поля полностью превращается в энергию электрического поля:

$$W_{\text{э}} = \frac{q_o^2}{2C}.$$

Затем процесс повторяется с той лишь разницей, что ток будет течь в противоположном направлении. Промежуток времени от начала разрядки конденсатора до его полной перезарядки (когда система возвращается в исходное состояние) соответствует периоду колебаний.

Поскольку в рассмотренной цепи полная энергия, запасенная в контуре (электрическая плюс магнитная), остается неизменной, колебания будут *незатухающими*. Включение в цепь активного сопротивления приводит к тому, что энергия электромагнитного поля постепенно переходит во внутреннюю энергию проводников, в результате чего амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

Рассмотренные колебания являются **свободными**, или **собственными**, т.к. они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).

Получим уравнение колебательного контура (рис. 3). Выберем произвольно направление обхода контура (на рисунке – по часовой стрелке) и обозначим через  $q$  заряд той обкладки конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с выбранным направлением обхода. Тогда знак тока

( $I = dq/dt$ ) всегда будет совпадать со знаком измерения заряда  $dq$ .

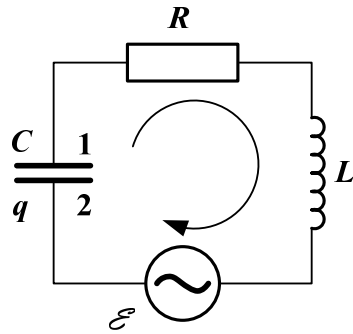


Рис. 3.

Данную цепь можно рассматривать как участок (в силу включения в нее конденсатора) 1- $R$ - $L$ -2. Закон *Ома* для него запишется в виде:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} + \mathcal{E}_c,$$

где  $\mathcal{E}_c$  – э.д.с. самоиндукции. Если индуктивность катушки не зависит от тока, то

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi_{mc}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Разность потенциалов на концах участка есть не что иное, как разность потенциалов на обкладках конденсатора:  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$ . Тогда

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \quad (1)$$

Это и есть *уравнение колебательного контура* – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Поделив обе части уравнения на индуктивность и введя другое обозначение первой и второй производной, получим:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (2)$$

Введем обозначения:  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная циклическая частота колебаний контура. Уравнение колебательного контура примет вид:

$$\ddot{q} + 2\beta \cdot \dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (3)$$

Механические и электрические колебания математически полностью подобны, для их описания используется одинаковая терминология. Поэтому все теоретические выводы, сделанные в разделе "Механические колебания", применимы и для электрических колебаний.

## Лабораторная работа № 2.1.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Цель работы: моделирование свободных электрических колебаний в программе схемотехнического моделирования *Electronics Workbench* и ЭТ MS Excel.

Оборудование: программа схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*, ЭТ MS Excel.

**1. Свободные колебания в электрическом контуре**

Перепишем уравнение колебательного контура для случая свободных колебаний ( $\mathcal{E}=0$  – в контуре не действует других э.д.с., кроме э.д.с. электромагнитной индукции):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

где в левой части стоит сумма падений потенциала на различных элементах контура в каждый момент времени (так называемых *мгновенных значений*):

$$U_L + U_R + U_C = 0. \quad (*)$$

Если затухание мало ( $\beta=0$ ), уравнение принимает вид:

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0 \quad (1)$$

– уравнение свободных незатухающих колебаний. Решением этого уравнения будет периодическая функция  $q(t)$ , изменяющаяся по закону синуса или косинуса. Присутствие в контуре активного сопротивления приводит к затуханию колебаний. Уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{q} + 2\beta \cdot \dot{q} + \omega_o^2 \cdot q = 0. \quad (2)$$

Аналитическим решением (2) является непериодическая функция

$$q(t) = q_{\max} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \psi_o). \quad (2a)$$

Решение уравнения (2) методом половинного интервала дает следующую систему:

$$\begin{cases} I_{1/2} \approx I_o - (2\beta \cdot I_o + \omega_o^2 \cdot q_o) \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - (2\beta \cdot I_{i-1/2} + \omega_o^2 \cdot q_i) \cdot \Delta t; \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2} \cdot \Delta t \end{cases} \quad (2б)$$

Как известно, при большом затухании колебания могут вообще не возникнуть<sup>16</sup>. Активное сопротивление контура, при котором наблюдается апериодический разряд конденсатора, называется *критическим*. Выражение для критического сопротивления получается из условия равенства нулю частоты

<sup>16</sup> См. раздел "Механические колебания".

затухающих колебаний:

$$\omega_o^2 = \beta^2; \frac{1}{LC} = \frac{R_{кр}^2}{4L^2} \Rightarrow R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3)$$

Случай  $\omega_o^2 - \beta^2 < 0$  также соответствует аperiодическому процессу.

## 2. Моделирование свободных колебаний в контуре в программе Electronics Workbench

Схема для наблюдения свободных колебаний в контуре представлена на рис. 1, установка – на рис. 2.

Возбуждение колебаний в контуре происходит следующим образом. В положении 1 ключа  $K$  конденсатор заряжается до напряжения источника. Затем ключ переводят в положение 2, замыкая цепь колебательного контура. Конденсатор будет разряжаться, и в цепи могут возникать свободные затухающие колебания.

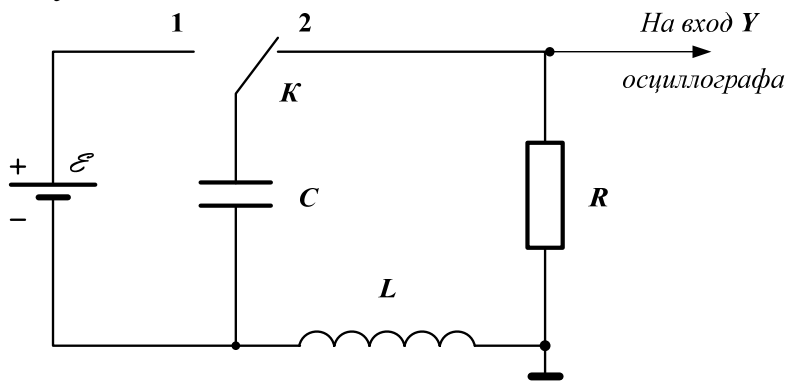


Рис. 1. Схема для изучения затухающих колебаний.

Переключатель в рабочей схеме можно взять обычный, управляемый выбранной клавишей, но в данном случае более удобным оказывается переключатель, срабатывающий через определенный промежуток времени, устанавливаемый пользователем. Наблюдать колебания будем с помощью осциллографа, на один из каналов которого (например, на вход канала А) подается исследуемое напряжение с резистора  $R$ . Таким образом исследуются колебания напряжения на активном сопротивлении. Аналогично можно изучать колебания напряжения и на других элементах схемы.

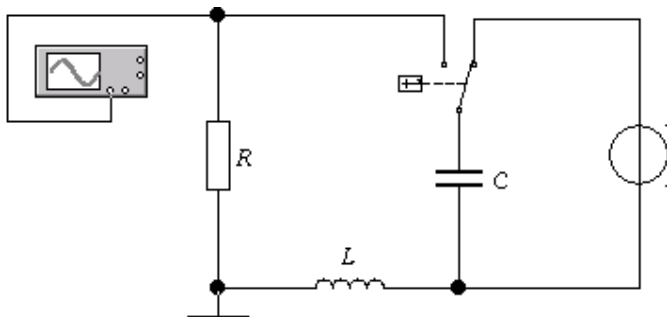


Рис. 2. Рабочая схема установки для наблюдения затухающих колебаний.

Начальные параметры установки:

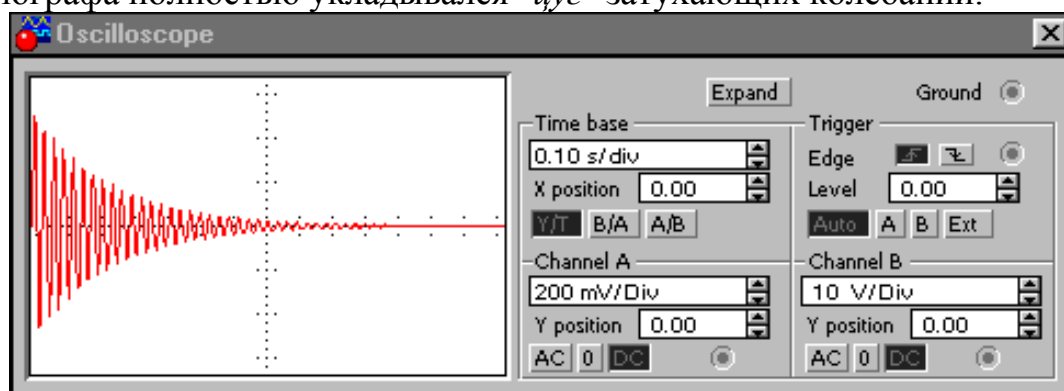
- емкость конденсатора – 10 мкФ;
- индуктивность катушки – 0,1 Гн;

- сопротивление резистора –  $20\ \Omega$ ;
- время срабатывания переключателя после включения питания (опция "Time on" на вкладке **Value**) –  $1\ \text{мс}$ ;
- напряжение на выходе источника –  $10\ \text{В}$ .

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Наблюдение осциллограммы затухающих колебаний в программе схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*

1. Подготовить окно программы *Electronics Workbench*: в диалоговом окне меню **Analysis**⇒**Analysis Options...** на вкладке **Instruments** включить опцию "Pause after each screen" для удобства наблюдения осциллограммы, а также увеличить минимальное число анализируемых точек до  $200\div 400$  (опция "Minimum number of time points").
2. Собрать цепь по рис. 2. Установить указанные выше параметры контура.
3. Подготовить осциллограф к работе. Подобрать коэффициент отклонения используемого канала и длительность развертки таким образом, чтобы на экране осциллографа полностью укладывался "цуг" затухающих колебаний.



4. Изменяя параметры контура, проследить за влиянием на колебательный процесс (в частности, на амплитуду, число и период колебаний) каждого из трех параметров. Результаты наблюдений оформить в виде *выводов*, сопровождая их математическими выкладками.

5. Подобрать параметры контура таким образом, чтобы число колебаний в "цуге" было не менее  $12\div 15$ . Сохранить осциллограмму в виде графика в файле типа \*.gra.

6. Для установленных параметров  $R$ ,  $L$  и  $C$  рассчитать собственную циклическую частоту колебательного контура, коэффициент затухания, циклическую частоту и период затухающих колебаний. Все вычисления оформить в виде таблицы в программе *MS Excel*.

#### Задание № 2. Построение графика изменения амплитуды затухающих колебаний с течением времени

1. Задание выполняется при полностью развернутом окне осциллографа



(кнопка **Expand**). Пользуясь одним из визиров, определить амплитуды колебаний ( $A=U_{R_{\max}}$ ,  $B$ ) и соответствующие им моменты времени ( $t$ ,  $c$ ) для полученного цуга из 12÷15 колебаний. Занести все данные в таблицу (составляется в *MS Excel*).

$N_{\text{д}}$ $n/n$	$t, c$	$A, B$	$T = t_{i+1}-t_i, c$
1.			
...			

2. Рассчитать период колебаний  $T$ , как разность двух соседних значений времени, а также среднее значение периода и циклическую частоту затухающих колебаний. Сравнить полученные значения с вычисленными в *Задании № 1*.

Период колебаний можно также определить непосредственно в программе *Electronics Workbench* при помощи осциллографа, используя оба визира (третье табло под экраном покажет разность моментов времени, соответствующих установленным положениям визиров). При этом визиры можно устанавливать так, чтобы их разделяло несколько периодов, а средний период найдется как отношение разности соответствующих моментов времени к числу полных колебаний между ними.

3. По полученным данным построить график зависимости амплитуды от времени (*Точечная диаграмма* с маркерами, но без соединяющих отрезков!).

4. Подобрать линию тренда с выводом уравнения на графике. Убедиться в том, что экспериментальные точки в пределах погрешности измерения укладываются на данную кривую.

### **Задание № 3. Определение логарифмического декремента затухания и критического сопротивления контура**

1. Используя данные *Задания № 2* (амплитуды затухающих колебаний) и определение логарифмического декремента затухания, рассчитать  $\lambda_{\text{эксп}}$  для каждой пары амплитуд и его среднее значение для всех измерений.

Логарифмический декремент затухания можно также определить для амплитуд, разделенных произвольным числом колебаний  $n$ :

$$\lambda = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)}.$$

2. Сравнить его с вычисленным по формуле  $\lambda_{\text{теор}} = \beta \cdot \langle T \rangle$ .

3. Используя визиры, по осциллограмме колебаний найти две амплитуды, отличающиеся примерно в 3 раза (точнее, в  $e$  раз), и подсчитать число полных колебаний между ними –  $N_e$ . Определить логарифмический декремент затухания  $\lambda_{\text{граф}}$  по графику, используя его связь с числом  $N_e$ . Сравнить со значениями, вычисленными в пп. 1 и 2 задания.

4. Увеличивать величину активного сопротивления контура до

исчезновения колебаний. Выписать соответствующее значение сопротивления – это и будет критическое сопротивление.

5. Для выбранных параметров  $L$  и  $C$  контура рассчитать величину критического сопротивления по формуле (3). Сравнить ее с экспериментально подобранным значением. Все результаты оформить в виде таблицы (см. пример ниже).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
43	<b>Задание № 3. Определение логарифмического декремента затухания и критического сопротивления контура.</b>											
44												
45	Расчетные формулы:											
46												
47	$\lambda_{\text{эксп}} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}; \lambda_{\text{теор}} = \beta T; \lambda_{\text{граф}} = 1/N_e \quad R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$											
48												
49												
50	№ п/п	$A_i, B$	$\lambda_{\text{эксп}}$	$\langle \lambda_{\text{эксп}} \rangle$				$\lambda_{\text{теор}}$	$N_e$	$\lambda_{\text{граф}}$		
51	1											
52	2											
53	3											
54	4											
55	5											
56	6											

$R_{\text{кр эксп}} =$   Ом

$R_{\text{кр теор}} =$   Ом

#### Задание № 4. Моделирование свободных электрических колебаний в ЭТ MS Excel

1. Решить (2) методом половинного интервала. Запустить *Excel* и открыть шаблон 2.1\_Затухающие электрические колебания.XLT. Проанализировать расчетные формулы и выделить постоянные и переменные величины. Разработать и заполнить таблицу исходных данных (см. ниже пример оформления рабочего листа).

2. Занести исходные числовые данные в следующие ячейки:

1) в **C18**: начальное значение силы тока (т.е. в момент времени  $t_o = 0$ );

2) в **C19**: заряд конденсатора в начальный момент времени;

3) в **C20**: величину активного сопротивления контура;

4) в **C21**: индуктивность катушки;

5) в **C22**: емкость конденсатора;

6) в **C31**: начальный момент времени, который при решении уравнений по методу половинного интервала выбирают равным нулю:  $t_o = 0$  с;

7) в **C32**: конечный момент времени.

Исходные данные, а также временной интервал  $[t_o; t_{\text{max}}]$  берутся из моделирующей программы *Electronics Workbench* (см. Начальные параметры установки). Величина заряда на обкладках конденсатора в начальный момент времени рассчитывается через э.д.с. источника, от которого он заряжается, и емкость:  $q_{\text{max}} = \mathcal{E} \cdot C$ , ток в начальный момент времени отсутствует.

Microsoft Excel - Модель 10\_Затухающие электрические колебания1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

С18 fx

А В С D E F G H I J K L M N O

1 Затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.

2

3 Расчетные формулы:

4

5 Уравнение затухающих колебаний: Решение уравнения методом половинного интервала:

6

7  $q'' + 2\beta \cdot q' + \omega_o^2 q = 0;$

8  $\beta = \frac{R}{2L}; \omega_o^2 = \frac{1}{LC}; I = q';$

9  $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}; T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}$

10  $I_{i/2} \approx I_o - (2\beta \cdot I_o + \omega_o^2 q_o) \cdot \frac{\Delta t}{2}$

11  $I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - (2\beta \cdot I_{i-1/2} + \omega_o^2 q_i) \cdot \Delta t;$

12  $q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2} \cdot \Delta t$

13

14

15

16 Исходные данные:

17

18  $I_o =$  А Сила тока в начальный момент времени

19  $q_{max} =$  Кл Заряд конденсатора в начальный момент времени

20  $R =$  Ом

21  $L =$  Гн

22  $C =$  Ф

23 } Параметры контура

24  $\beta =$  с<sup>-1</sup> Коэффициент затухания

25  $\omega_o =$  с<sup>-1</sup> Собственная циклическая частота колебаний

26  $T_o =$  с Период собственных колебаний

27  $\omega =$  с<sup>-1</sup> Частота затухающих колебаний

28  $T =$  с Период затухающих колебаний

29  $R_{кр} =$  Ом Критическое сопротивление

30

31  $t_o =$  с

32  $t_{max} =$  с

33  $\Delta t =$  с

34 } Временной интервал

35 } Шаг программы

№№ n/n	Время, с	Сила тока, А	Время, с	Заряд, Кл
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				

Модель 10

Готово

NUM

3. В ячейке **C33** рассчитать шаг изменения времени (интервал времени  $\Delta t$ ). Количество интервалов определяется по таблице.

4. Рассчитать:

- 1) коэффициент затухания (ячейка **C24**);
- 2) собственную частоту колебаний (ячейка **C25**);
- 3) период собственных колебаний (ячейка **C26**);
- 4) критическое сопротивление (ячейка **C29**).

5. Заполнить *таблицу данных* ("Время, с – Сила тока, А; Время, с – Заряд, Кл") в соответствии с расчетными формулами и учитывая, что при решении задачи методом половинного интервала сила тока (подобно скорости) вычисляется в середине каждого временного интервала  $\Delta t$ , а заряд (подобно координате) – в конце.

6. Изменить имя листа, содержащего таблицу (**Модель 2.1**).

7. По результатам расчетов необходимо построить два графика:  $I(t)$  (диапазон ячеек **K17:L1017**) и  $q(t)$  (диапазон **M17:N1017**). Построение ведется на отдельных диаграммах, т.к. масштаб по оси ординат может отличаться на несколько порядков, или один из рядов выводится по вспомогательной оси. Тип диаграммы – **Точечная**, вид – **Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров**.

8. Сохранить данные в файле 2.1\_Свободные электрические колебания.xls.

**Задания для самостоятельной работы.**

1. Изменяя момент времени  $t_{\max}$  (а, следовательно, и интервал  $\Delta t$ ), проследить за изменением вида графиков и определить, когда модель перестает работать. Сравнить этот временной интервал с периодом собственных колебаний.
2. Ввести в ячейки C27 и C28 формулы, позволяющие рассчитать частоту и период затухающих колебаний по аналитическим формулам.
3. Проследить за влиянием параметров контура ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) на вид графиков и величины  $\omega_0$  и  $T$ . Довести величину активного сопротивления до критического значения. Обратить внимание на некоторое различие графиков  $I(t)$  и  $q(t)$ .
4. Включить на диаграммах (или хотя бы на одной из них) промежуточные линии сетки по оси абсцисс. Определить экспериментально (по графику) период колебаний для заданных параметров контура и сравнить с теоретически рассчитанным значением. Для большей точности можно изменить *цену промежуточных делений* (выделить ось  $Ox$  и в меню **Формат**⇒**Выделенная ось**... на вкладке **Шкала** указать нужную цену деления).
5. Определить по графикам сдвиг фаз между колебаниями тока и заряда.
6. Добавить в таблицу два новых столбца: "*Падение потенциала на активном сопротивлении, В*" и "*Падение потенциала на конденсаторе, В*". Составить формулы и рассчитать падение потенциала на этих элементах в соответствующие моменты времени (столбцы **К** и **М**). Построить графики колебаний падения потенциала на одной диаграмме. Определить сдвиг фаз между ними. Сравнить со сдвигом фаз между колебаниями тока и заряда.
7. Рассчитать падение потенциала на катушке, с учетом (\*), и построить график зависимости  $U_L(t)$  на той же диаграмме. Определить сдвиг фаз между колебаниями падений потенциала на каждом из элементов контура.
8. Подобрать параметры контура так, чтобы наблюдалось не менее 10 периодов колебаний. Просмотреть таблицу данных (колонки "*Время, с* – *Заряд, Кл*") и выписать в отдельную таблицу амплитуды заряда (только положительные значения) и соответствующие им моменты времени. По этим данным построить новый график – график зависимости амплитуды заряда от времени (тип диаграммы – **Точечная**, вид – *Точечная*). Подобрать линию тренда (с выводом уравнения на графике) и, тем самым, определить закон, по которому уменьшается амплитуда затухающих колебаний.

Лабораторная работа № 2.2.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
КОЛЕБАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИНУСОИДАЛЬНОЙ Э.Д.С.**

Цель работы: моделирование вынужденных электрических колебаний в программе схемотехнического моделирования *Electronics Workbench* и ЭТ MS Excel.

Оборудование: программа схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*, ЭТ MS Excel.

**1. Основные сведения о вынужденных электрических  
колебаниях<sup>17</sup>**

Как видно из предыдущей работы, колебания в реальном контуре всегда будут затухать из-за наличия в нем активного сопротивления, т.е. из-за потери энергии на нагревание проводников. Для получения незатухающих колебаний необходимо извне подводить энергию, компенсируя эти потери. Такие колебания будут вынужденными. Для осуществления подобных колебаний в колебательный контур включают источник напряжения, э.д.с. которого изменяется по гармоническому закону, например, по закону косинуса:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cdot \cos \omega_{\circ} t, \quad (1)$$

где  $\omega_{\circ}$  – циклическая частота э.д.с. включенного в контур источника тока.

Уравнение такого колебательного контура можно получить, проводя аналогичные рассуждения, что и в случае затухающих колебаний. В результате получим:

$$L \frac{dI}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \quad (2)$$

где величина  $\mathcal{E}(t)$  описывается формулой (1). Нетрудно видеть, что в левой части формулы (2) стоит сумма падений напряжений на отдельных элементах контура в каждый момент времени, т.е. ее можно переписать в виде:

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}. \text{ Здесь } U_L = -\mathcal{E}_c = L \cdot I' = L \frac{dI}{dt}, \quad U_R = R \cdot I = R \frac{dq}{dt} \text{ и } U_C = \frac{q}{C}.$$

Разделим обе части равенства на  $L$ :

$$\frac{dq^2}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \cos \omega_{\circ} t - \quad (3)$$

уравнение вынужденных колебаний. Аналитическое решение уравнения (3) еще более сложно, чем для случая затухающих колебаний. В зависимости от ряда факторов (в частности, от величины активного сопротивления контура; соотношения частот  $\omega_o$  и  $\omega_{\circ}$ ) оно может иметь несколько решений. Воздействие на колебательную систему внешней периодически изменяющейся силы (в нашем случае это э.д.с. источника) приводит к возбуждению в контуре двух видов колебаний:

<sup>17</sup> См. также Лабораторную работу № 1.3.

1) **вынужденных колебаний**, которые всегда происходят с частотой внешней возбуждающей силы  $\omega_e$  (ее называют **внешней**, или **вынуждающей**, в отличие от э.д.с. самоиндукции, возникающей в катушке). Амплитуда этих колебаний зависит только от параметров контура, а не от начальных условий;

2) **собственных колебаний**, которые с течением времени затухают<sup>18</sup>.

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать, как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и сопротивлением  $R$ , переменного тока.

Характерной особенностью вынужденных колебаний является, как известно, тот факт, что амплитуда колебаний тока (а также заряда на обкладках конденсатора и напряжения на различных элементах контура) в значительной степени зависит от частоты внешней э.д.с. При определенных условиях может возникать явление, называемое *резонансом*. Резонанс в колебательном контуре играет чрезвычайно большую роль – полезную или вредную, смотря по условиям – в электро- и радиотехнике. В зависимости от способа включения элементов контура возможны два различных резонансных режима: режим резонанса напряжений и режим резонанса токов.

Решение (3) методом половинного интервала дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_{1/2} \approx I_o - \left( 2\beta \cdot I_o + \omega_o^2 q_o - \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \cdot \cos \omega \cdot t_o \right) \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - \left( 2\beta \cdot I_{i-1/2} + \omega_o^2 q_i - \frac{\mathcal{E}_{\max}}{L} \cdot \cos \omega \cdot t_i \right) \cdot \Delta t; \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4)$$

## 2. Резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре

Контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора, катушки, резистора и источника переменной э.д.с., изменяющейся по закону (1), называют **последовательным**. Амплитуда тока для случая установившихся колебаний в такой цепи:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega_e L - \frac{1}{\omega_e C} \right)^2}}. \quad (5)$$

Максимального значения  $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R}$  она достигает в момент, когда

<sup>18</sup> Подробнее см. *Лабораторную работу № 1.3.*

разность  $\left( \omega_{\varepsilon} L - \frac{1}{\omega_{\varepsilon} C} \right)$  обращается в нуль, т.е. в том случае, когда частота  $\omega_{\varepsilon}$  вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебательного контура  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Это явление называется **резонансом напряжений**. Частота внешней э.д.с., при которой наблюдается резонанс (т.е. резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний тока), называется **резонансной**  $\omega_{рез.}$ . Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней э.д.с. называется **резонансной кривой** (или **амплитудной резонансной кривой**). Различают резонансные кривые для амплитуд тока, заряда, напряжений на различных элементах.

Используя связь между амплитудным и действующим значениями синусоидального тока, перепишем (4) в виде:

$$I_{эфф} = \frac{\mathcal{E}_{эфф}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega_{\varepsilon} L - \frac{1}{\omega_{\varepsilon} C} \right)^2}}. \quad (6)$$

Как видно из формулы, одна и та же цепь будет иметь различное сопротивление для постоянного ( $\omega_{\varepsilon}=0$ ) и переменного ( $\omega_{\varepsilon} \neq 0$ ) тока. Величины  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  и  $X_L = \omega L$  получили название **реактивного сопротивления** – соответственно **емкостного** и **индуктивного**, в отличие от сопротивления  $R$ , называемого **активным**, которым обладает любая цепь постоянного тока. Величина, стоящая в знаменателе, называется **полным сопротивлением контура переменному току**. Формулы (4) и (5) выражают **закон Ома для переменного тока**. Он справедлив только для амплитудных или действующих значений тока.

Таким образом, цепь, состоящая из последовательно соединенных индуктивности, емкости и активного сопротивления, представляет для проходящего через нее переменного тока тем меньшее сопротивление, чем ближе частота тока к резонансной.

Соотношение между напряжениями на различных элементах контура можно получить с помощью векторной диаграммы (рис. 1):

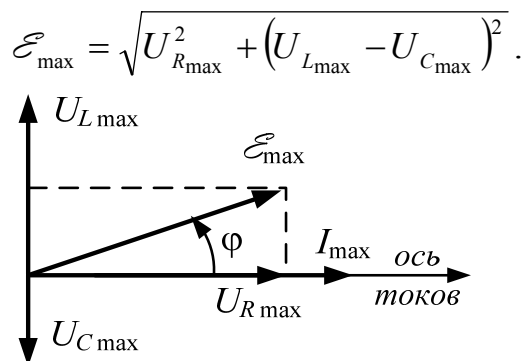


Рис. 1.

Векторная диаграмма последовательного колебательного контура.

Сдвиг фаз между током и э.д.с. источника (или разностью потенциалов на входе цепи):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L\max} - U_{C\max}}{U_{R\max}} = \frac{\omega_o L - 1/\omega_o C}{R} \quad (7)$$

зависит от соотношения напряжений на индуктивности и емкости, или, что то же самое, от соотношения реактивных сопротивлений.

Нетрудно также видеть, что *резонанс наступает, когда напряжения на индуктивности и емкости равны по величине* (напомним, что колебания напряжения на этих элементах происходят в противофазах), а, следовательно, *при резонансе напряжение на входе цепи (или э.д.с. источника) совпадает с напряжением на резисторе*. При этом ток в контуре определяется только активным сопротивлением и совпадает по фазе с напряжением входного сигнала, т.е. с колебаниями вынуждающей э.д.с. Его максимальная величина  $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R}$ ,

а амплитуды напряжений на индуктивности и емкости:

$$U_{C\max} = I_{\max} \cdot \frac{1}{\omega_o C} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad U_{L\max} = I_{\max} \cdot \omega_o \cdot L = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad U_{C\max} = U_{L\max}.$$

Интересно отметить, что максимум резонансных кривых для амплитуд напряжений на емкости и индуктивности наблюдается при частотах, отличных от  $\omega_{\text{рез}} = \omega_o$ .

При резонансе напряжения на индуктивности и емкости могут в несколько раз превышать напряжение входного сигнала (в нашем случае  $\mathcal{E}$ ). Отсюда становится понятным название явления – *резонанс напряжений*. Объясняется это тем, что напряжение источника при резонансе идет только на покрытие потерь в контуре. Напряжение на катушке и конденсаторе обусловлено накопленной в них энергией, значение которой тем больше, чем меньше потери в контуре. Можно показать, что отношение амплитуды напряжения на индуктивности или емкости при резонансе к амплитуде вынуждающей э.д.с. (или амплитуде входного напряжения), есть не что иное, как добротность контура:

$$\frac{U_{C\max}}{\mathcal{E}_{\max}} = \frac{U_{L\max}}{\mathcal{E}_{\max}} = Q.$$

Эта безразмерная величина показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности или емкости при резонансе превосходит входное напряжение контура. Преобразуем приведенную формулу для случая малых затуханий:

$$\frac{1}{R\omega_o C} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

Из последнего выражения видно, что добротность контура связана с его параметрами: она возрастает с увеличением индуктивности  $L$  и уменьшением сопротивления потерь  $R$  и емкости контура  $C$ .



### 3. Резонанс тока в параллельном колебательном контуре

Рассмотрим явление резонанса в *параллельном колебательном контуре* (рис. 2), э.д.с. источника в котором меняется по закону (1).

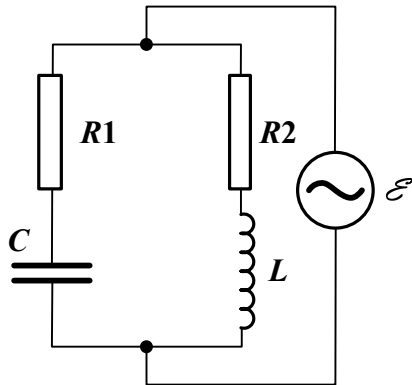


Рис. 2. Параллельный колебательный контур.

Обозначим активные сопротивления первой и второй ветви цепи через  $R_1$  и  $R_2$ , а токи в них через  $I_1$  и  $I_2$ . Токи в этих ветвях (так называемые **реактивные составляющие**) изменяются по закону:

$$I_1 = I_{\max 1} \cos(\omega_{\epsilon} t - \varphi_1), \quad (8)$$

$$I_2 = I_{\max 2} \cos(\omega_{\epsilon} t - \varphi_2), \quad (9)$$

где  $I_{\max 1}$ ,  $I_{\max 2}$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются выражениями:

$$\left\{ \begin{aligned} I_{\max 1} &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R_1^2 + \left(1/\omega_{\epsilon} C\right)^2}}, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{-1/(\omega_{\epsilon} C)}{R_1} = -\frac{1}{R_1 \cdot \omega_{\epsilon} C}, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_{\max 2} &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R_2^2 + (\omega_{\epsilon} L)^2}}, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\omega_{\epsilon} L}{R_2}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Сила тока в неразветвленной цепи представляет собой сумму токов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I = I_1 + I_2,$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – мгновенные значения токов. Амплитуда тока и сдвиг фаз:

$$I_{\max} = \sqrt{I_{\max 1}^2 + I_{\max 2}^2 + 2 \cdot I_{\max 1} \cdot I_{\max 2} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{\max 1} \cdot \sin \varphi_1 + I_{\max 2} \cdot \sin \varphi_2}{I_{\max 1} \cdot \cos \varphi_1 + I_{\max 2} \cdot \cos \varphi_2}.$$

Рассматриваемая задача упрощается, если активные сопротивления параллельных ветвей равны нулю:

$$I_{\max 1} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{1/\omega_{\epsilon} C}, \quad I_{\max 2} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\omega_{\epsilon} L}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\infty,$$

т.е.  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$  – токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда тока во внешней (неразветвленной) цепи в этом случае будет равна модулю разности амплитуд тока в параллельных ветвях:

$$I_{\max} = |I_{\max 1} - I_{\max 2}| = \mathcal{E}_{\max} \cdot \left| \omega_{\epsilon} C - \frac{1}{\omega_{\epsilon} L} \right|. \quad (14)$$

Если частота вынуждающей э.д.с.  $\omega_{\epsilon} = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{\max 1} = I_{\max 2}$  и  $I_{\max} = 0$ .

Явление резкого уменьшения силы тока во внешней цепи, питающей параллельно соединенные индуктивное и емкостное сопротивления, при приближении частоты внешней э.д.с. к собственной (резонансной) частоте колебательного контура, называется **резонансом тока**.

#### 4. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в программе *Electronics Workbench*

Рассмотрим возбуждение вынужденных колебаний в контуре, а также некоторые закономерности такого процесса на смоделированной в *Electronics Workbench* схеме. На рис. 3 представлена схема колебательного контура, а на рис. 4 – электрическая цепь, собранная в программе *Electronics Workbench*.

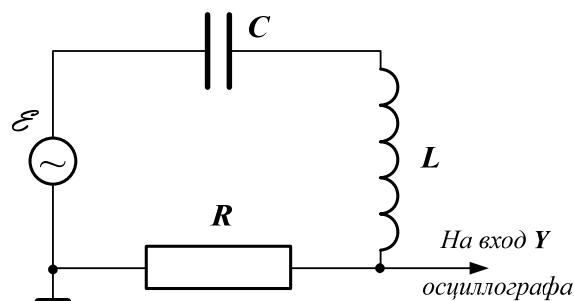


Рис. 3. Схема для изучения вынужденных колебаний в контуре.

Схему можно выполнить на основе созданной в предыдущей лабораторной работе. Различие между ними заключается в том, что в цепь включается источник вынуждающей э.д.с., в качестве которого можно использовать функциональный генератор (форма сигнала – *синусоида*; смещение (**Offset**) – 0; амплитуда напряжения на выходе (**Amplitude**), например, 10 В; скважность (**Duty cycle**) – любая, т.к. данная установка неприменима к синусоидальным колебаниям).

Как видим, в рабочей схеме задействованы оба канала осциллографа: на вход канала **A** подается напряжение с резистора, а на вход **B** – напряжение с выхода генератора. Такое подключение не является обязательным – достаточно наблюдать только сигнал, подаваемый с одного из элементов контура ( $R$ ,  $L$  или  $C$ ); но очень удобно для сравнения входного и выходного сигналов (цвет

осциллограмм совпадает с цветом проводников) и особенно – для наблюдения изменения величины выходного напряжения, т.к. напряжение генератора в процессе работы не изменяется.

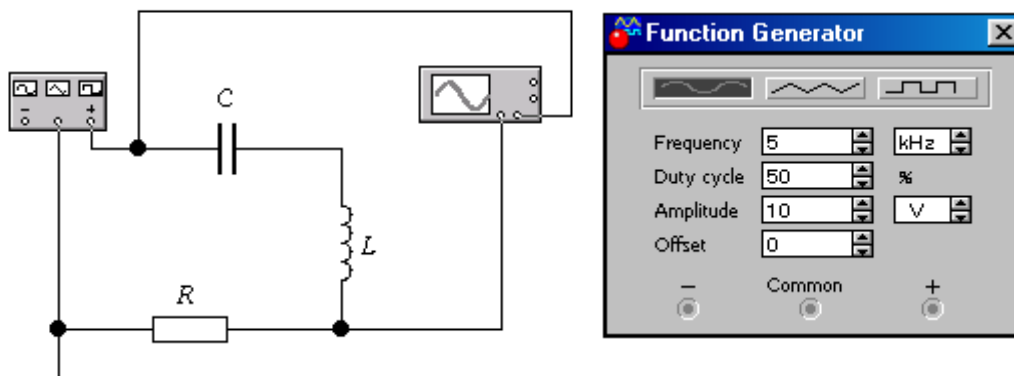


Рис. 4. Установка для наблюдения и изучения некоторых закономерностей вынужденных колебаний и внешний вид окна функционального генератора с примерами установок.

Подготовка окна программы *Electronics Workbench* проводится так же, как и в предыдущей работе (см. *Задание № 1*, п. 1)

### Порядок выполнения работы

**Задание № 1. Изучение зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней э.д.с. и величины активного сопротивления контура. Построение резонансных кривых для амплитуды напряжения и тока на активном сопротивлении**

1. Собрать цепь по рис. 4 (или 3). Для выбранных параметров контура (их можно взять из предыдущей лабораторной работы) рассчитать собственную (резонансную) циклическую частоту колебаний  $\omega_0$  и соответствующую ей частоту  $\nu_0$ , а также критическое сопротивление и амплитуду тока при резонансе (все вычисления выполняются в *ЭТ MS Excel*).

2. Для построения резонансной кривой необходимо получить 30÷40 точек ( $\nu_0$ ;  $U_{R_{\max}}$ ). Амплитуда напряжения на исследуемом элементе при заданной частоте сигнала генератора определяется с помощью осциллографа. Интервалы между точками выбирают так, чтобы наибольшее их количество приходилось на область вблизи предполагаемого максимума (т.е. вблизи резонансной частоты); при этом минимальное значение частоты генератора должно быть не более 1 Гц, а максимальное – в 3-4 раза больше резонансной.

Необходимо также помнить, что вынужденные колебания устанавливаются не сразу, а спустя некоторое время. Нас же будут интересовать только установившиеся колебания. Поэтому каждый раз при выборе новой частоты необходимо добиваться установки процесса, для чего после включения питания схемы (запуска симуляции) несколько раз нажимают кнопку **Resume**, пока амплитуда вынужденных колебаний не перестанет изменяться<sup>19</sup>.

<sup>19</sup> Перед выполнением задания необходимо проверить работу схемы при резонансной частоте: если амплитуда

3. Для данного активного сопротивления  $R_1 \ll R_{кр}$  провести измерение амплитуды вынужденных колебаний для различных значений частоты (**Frequency**) выходного напряжения генератора, начиная с  $\nu_{\min} = 1 \text{ Гц}$  и заканчивая выбранным в соответствии с п. 2 максимальным значением частоты. Занести полученные данные в таблицу.

$\begin{matrix} \text{\textit{№}} \\ n/n \end{matrix}$	$v_6, \Gamma u$	$U_{R_{\max}}, B$			$I_{\max}, A$		
		R1=___OM	R2=___OM	R3=___OM	R1=___OM	R2=___OM	R3=___OM
1.							
2.							
...							

4. Повторить измерения для двух других значений сопротивления ( $R1 < R2 < R_{кр}$  и  $R3 < R_{кр}$ , но того же порядка).

5. По полученным данным построить резонансные кривые для амплитуды напряжения на активном сопротивлении на одной диаграмме (вид диаграммы – *Точечная* или *Точечная со значениями, соединенными сглаживающими линиями*).

6. Учитывая, что амплитудные и мгновенные значения тока и напряжения на резисторе подчиняются закону *Ома*, выполнить расчет и построить резонансные кривые для амплитуды тока. Объяснить различие полученных в пп. 5 и 6 резонансных кривых.

### Задание № 2. Определение частоты вынужденных колебаний

1. Для 4÷5 значений частоты вынуждающей э.д.с. определить период (при помощи осциллографа) и частоту установившихся вынужденных колебаний. Результаты занести в таблицу. Выбранные значения частот не должны совпадать с резонансной для установленных параметров контура.

<i>№№ п/п</i>	<i>Частота внешней э.д.с. <math>\nu_6</math>, Гц</i>	<i>Период затухающих колебаний, с</i>	<i>Частота вынужденных колебаний, Гц</i>
1.			
2.			
...			

**Задание № 3. Построение резонансных кривых для амплитуд напряжений на емкости и индуктивности**

1. Изменить схему установки так, чтобы на один из каналов осциллографа подавалось напряжение с конденсатора  $C$ . Активное сопротивление контура необходимо выбрать достаточно большим (того же порядка, что и критическое сопротивление:  $R_3$  из *Задания № 1*).

2. Получая установившиеся вынужденные колебания *для тех же значений*

напряжения отличается от теоретического значения, следует попытаться изменить число анализируемых точек (**Analysis/Analysis Options...**, вкладка **Instruments**, поле **"Minimum number of time points"**).

частоты сигнала генератора, что и в Задании № 1, изучить поведение амплитуды напряжения на конденсаторе в зависимости от частоты вынуждающей э.д.с.

3. Результаты измерений представить в виде таблицы.

№№ n/n	$\nu, \text{Гц}$	$U_{\max}, \text{В}$	
		$C = \text{_____} \Phi$	$L = \text{_____} \text{Гн}$
1.			
2.			
...			

4. Повторить пп. 1-3 задания для катушки индуктивности  $L$ .

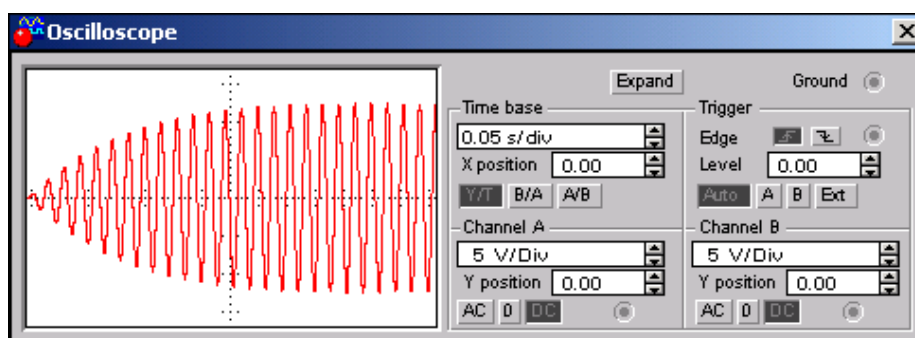
5. На одной диаграмме построить резонансные кривые для амплитуд напряжений на индуктивности и емкости, а также на резисторе (по данным Задания № 1) для одного и того же значения активного сопротивления контура.

6. Определить по графику частоту, соответствующую точке пересечения полученных кривых, и сравнить ее с резонансной частотой для амплитуды колебаний на активном сопротивлении.

#### Задание № 4. Сравнение колебаний напряжения на различных элементах схемы

1. Для начальных параметров схемы (см. Задание № 1, п. 1, рис. 4) установить частоту сигнала генератора, равную резонансной частоте колебательного контура.

2. Подать напряжение с резистора  $R$  на один из входов осциллографа. Подобрать длительность развертки и коэффициент отклонения (чувствительность канала) так, чтобы можно было наблюдать установление вынужденных колебаний в контуре и при этом колебания не должны сливаться друг с другом.



В дальнейшем длительность развертки должна оставаться неизменной в процессе выполнения всего задания, чтобы все данные были получены для одного и того же промежутка времени.

3. Включить питание схемы и получить на экране осциллограмму колебаний напряжения на резисторе. Развернуть окно осциллографа и сохранить

данные (кнопка **Save**) в файле *Резистор.scr*.

4. Изменить цепь и подать на осциллограф напряжение с катушки. Повторить пп. 2-3 задания. Данные сохранить в файле *Индуктивность.scr*.

5. Повторить задание для конденсатора (файл *Емкость.scr*).

6. Преобразовать данные трех полученных файлов в формат *MS Excel* и скопировать их на лист с вычислениями и графиками по данной работе в таблицу:


№ п/п	Время, с	$U_R, В$	$U_C, В$	$U_L, В$
1.				
2.				
...				

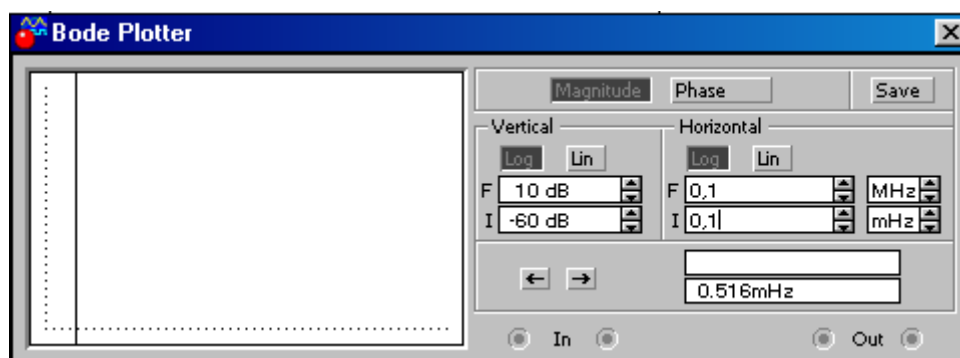
Колонка "Время, с" копируется только один раз – из любого файла, т.к. временной интервал (при выполнении условия п. 2 задания) одинаков для всех трех случаев.

7. Построить графики колебаний напряжения на различных элементах контура на одной диаграмме. Определить сдвиг фаз между ними.



8. Проследить за характером установления колебаний в контуре при различных значениях частоты внешней э.д.с. Рассмотреть случаи, когда 1)  $\omega_e = 10 \cdot \omega_0$ ; 2)  $\omega_e = \omega_0 / 10$ ; 3)  $\omega_e - \omega_0 = \Delta\omega$  где  $\Delta\omega \ll \omega_e$  и  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Сохранить несколько осциллограмм в виде графиков (\*.gra).

#### Задание № 5. Наблюдение амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик последовательного колебательного контура

Для наблюдения амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик последовательного колебательного контура используется **Измеритель АЧХ и ФЧХ (Bode Plotter)** .



Этот прибор предназначен для анализа амплитудно-частотных (при нажатой кнопке **Magnitude**) и фазо-частотных (при нажатой кнопке **Phase**) характеристик. По вертикальной оси (**Vertical**) откладывается **коэффициент передачи** (т.е. отношение амплитуды электрических колебаний на исследуемом элементе или приборе к амплитуде колебаний на входе измерителя); по горизонтальной (**Horizontal**) – частота. Масштаб по каждой из осей устанавливается автоматически при выборе шкалы (логарифмическая **Log** или

линейная **Lin**), а также максимального (**F**) и минимального (**I**) значений коэффициента передачи или частоты. Два нижних поля служат для индикации значений частоты и соответствующего ей коэффициента передачи или фазы для выбранного положения визира (вертикальной визирной линии), который перемещается с помощью мыши или кнопок  . Результаты измерений можно сохранить в виде текстового файла (кнопка **Save**, тип файла \*.bod) или в виде графика (\*.gra).

Подключение прибора к схеме осуществляется с помощью зажимов **In (ВХОД)** и **Out (ВЫХОД)**. На вход измерителя подается переменное напряжение с любого источника (эталонное напряжение), к выходу подключается исследуемое устройство (в нашем случае это может быть резистор, катушка индуктивности или конденсатор колебательного контура). При этом правые клеммы зажимов обязательно должны быть соединены с общей шиной (заземлены).

1. Подключить к колебательному контуру (рис. 4, можно без осциллографа) измеритель АЧХ и ФЧХ:

1). Вывести окно измерителя и установить *линейную шкалу* по вертикальной оси и *логарифмическую* – по горизонтальной.

2). Подать напряжение с резистора на зажимы **Out** прибора, а на зажимы **In** – напряжение непосредственно с функционального генератора<sup>20</sup> или дополнительного источника переменного напряжения<sup>21</sup>.

Активное сопротивление контура должно быть достаточно большим – порядка критического (*его величина должна совпадать со значением, выбранным в Задании № 3*). Рассчитать [добротность контура через его параметры](#).

2. Включить питание схемы и настроить измеритель таким образом, чтобы на экране наблюдалась АЧХ колебательного контура (число анализируемых точек (**Analysis**⇒**Analysis Options...**, вкладка **Instruments**, поле "Points per cycle") необходимо выбрать большим – порядка тысячи). С помощью визира определить *коэффициент передачи* (или *напряжение* – см. выше), а также *частоту*, соответствующие максимуму характеристики. Сохранить данные в файле *АЧХ\_Резистор.bod* и в виде файла графика с тем же именем. Нажать кнопку **Phase** и получить фазо-частотную характеристику. Сохранить ее в файле *ФЧХ\_Резистор.bod*. Объяснить вид ФЧХ, пользуясь векторной диаграммой колебательного контура.

3. Проследить за влиянием на АЧХ и ФЧХ величины сопротивления. Сохранить данные для трех различных значений активного сопротивления (величину сопротивления резистора желательно взять из *Задания № 1*).

4. Изменить расположение элементов в схеме так, чтобы исследуемым

<sup>20</sup> В этом случае по вертикальной оси АЧХ будет откладываться именно [коэффициент передачи](#).

<sup>21</sup> Если на вход измерителя АЧХ и ФЧХ подается напряжение с дополнительного источника, не используемого в рабочей цепи, то по вертикальной оси откладывается амплитуда напряжения на исследуемом элементе (в нашем случае – на резисторе).







3. Изучить явление резонанса в параллельном контуре по аналогии с *Задаaniem № 5* (получить АЧ и ФЧ характеристики только для неразветвленной части цепи) при наличии и в отсутствии сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ . Данные сохранить в виде графиков, а также в текстовом файле, преобразовав его в дальнейшем в формат ЭТ *MS Excel*. Определить при помощи измерителя АЧХ и ФЧХ частоту, при которой наблюдается резонанс, и сравнить ее с собственной частотой контура.

**Задаание № 6. Численное моделирование вынужденных колебаний в ЭТ MS Excel**

1. Запустить *Excel* и открыть файл, содержащий данные по *Лабораторной работе № 2.1* (2.1\_Свободные электрические колебания.xls). После открытия таблицы провести ее сохранение в другом файле (т.е. под другим именем: 2.2\_Вынужденные электрические колебания.xls) командой **Файл→Сохранить как...** Внести изменения в *расчетные формулы* (выполненные в *MS Equation*) в соответствии с (4). Переименовать лист: **Синусоидальная э.д.с.**

2. Восстановить исходные данные (см. пример в *предыдущей работе*). Исключение составляет начальное значение заряда на обкладках конденсатора – его необходимо выбрать равным нулю (конденсатор в начальный момент времени не заряжен). Изменить содержимое ячейки **B19**: заменить  $q_{\max}$  на  $q_0$  (значение величины заряда в начальный момент времени).

3. Открыть для редактирования ячейку **E27** и вместо слова "затухающих" ввести "вынужденных" (*Частота вынужденных колебаний*). Ввести в ячейку **C27** числовое значение частоты вынужденных колебаний. Для начала ее можно принять равной собственной циклической частоте контура.

4. Отредактировать содержимое ячейки **E28** (заменить слово "затухающих" на "вынужденных": *Период вынужденных колебаний*).

5. Провести вставку ячеек над диапазоном **B29:E29**. В ячейку **B29** ввести условное обозначение амплитуды внешней э.д.с. ( $\mathcal{E}_{\max} =$ ); в **C29** – ее величину (например, 10); в **D29** – единицы измерения (В); в **E29** – пояснение (*Амплитуда внешней э.д.с.*).

6. Провести вставку столбца перед столбцом **О**. Добавить новую колонку "Э.д.с., В" в таблицу (столбец **О**). Рассчитать в ней значение э.д.с. в соответствующие моменты времени из колонки "Время, с" (столбец **М**).

7. Внести изменения в формулы колонки "Сила тока, А". Новые формулы мало отличаются от тех, что записаны в этих ячейках (отличия показаны **полужирным курсивом**):

**L18:** 
$$=L17-(2*C24*L17+C25^2*N17-***O17/C21***))*C33/2$$
;

**L19:** 
$$=L18-(2*SC$24*L18+SC$25^2*N18-***O18/SC$21***)*SC$33$$
.

Отредактировать формулы в ячейках **L18** и **L19** и скопировать содержимое ячейки **L19** в диапазон **L20:L1017**. Графики, содержащиеся в данной рабочей книге, автоматически изменятся: теперь это графики вынужденных колебаний силы тока и заряда.

### Задания для самостоятельной работы

1. Изменяя шаг программы, определить границы применимости модели.
2. Изменяя частоту внешней э.д.с., проследить за видом графиков. Определить оптимальную частоту.
3. Построить график зависимости  $\mathcal{E}(t)$ .
4. Пользуясь графиками, определить сдвиг фаз между колебаниями тока и э.д.с., а также тока и заряда при различных начальных значениях этих величин. Остается ли сдвиг фаз при этом неизменным?
5. Изменить рабочие формулы в столбце **R** ("Падение потенциала на катушке,  $B$ ") в соответствии с (2).

### **Задание № 7. Резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре и построение резонансных кривых**

1. Открыть шаблон 2.1\_Затухающие электрические колебания.XLT. Внести изменения в *расчетные формулы* (выполненные в *MS Equation*) в соответствии с (4) и добавить новые для вычисления амплитуд тока в контуре и напряжений на всех его элементах. Переименовать лист: **Последовательный контур**. Повторить пп. 2-5 предыдущего задания. Провести сохранение данных в файле 2.2\_Резонансные кривые\_Оптимизация.xls. Провести дважды вставку **ячеек** над диапазоном **B21:E21**. Объединить ячейки **B20:B22**, а в ячейки **C21** и **C22** внести еще два значения активного сопротивления. Все три значения должны существенно отличаться друг от друга, но не превышать величину критического сопротивления контура. Аналогичным образом добавить ячейки (над блоком **B27:E27**) для вычисления коэффициента затухания. В ячейке **C40** рассчитать резонансную частоту контура  $\omega_{рез}$ .

2. В столбце **K** смоделировать значения частоты внешней э.д.с. в пределах от  $\omega_{\min} = 0,001 \text{ с}^{-1}$  до  $\omega_{\max} = 2 \cdot \omega_0$  с шагом, определяемом таблицей данных.

3. В трех следующих столбцах **L**, **M** и **N** рассчитать амплитуду тока (см. (5)) для трех различных значений активного сопротивления (все три столбца будут иметь общий заголовок "Амплитуда тока,  $A$ "). Построить резонансные кривые для амплитуды тока в контуре на одной диаграмме. Определить по графику, при какой частоте наблюдается максимум амплитуды тока, и сравнить ее с  $\omega_{рез}$ . Как ведет себя максимум кривой при увеличении активного сопротивления контура?

4. В столбцах **O**, **P** и **Q** рассчитать амплитуду напряжения на активном сопротивлении  $U_{R_{\max}} = I_{\max} \cdot R$  (для трех различных значений  $R$ ) и построить амплитудные резонансные кривые. Как изменяется вид кривой с увеличением активного сопротивления?

5. Рассчитать в *таблице исходных данных* (ячейки **C41**, **C42**, **C43**) резонансную частоту для амплитуды напряжения на конденсаторе  $\omega_{рез\ C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  для различных значений активного сопротивления. Добавить три новые колонки в таблицу данных под общим заголовком "Амплитуда

напряжения на конденсаторе,  $B''$  и смоделировать значения в соответствии с формулой  $U_{C_{\max}} = I_{\max} \cdot \frac{1}{\omega_{\epsilon} C}$ . Построить резонансные кривые. Как ведет себя максимум кривой при увеличении активного сопротивления контура?

6. Повторить п. 5 задания для катушки индуктивности ( $\omega_{\text{рез } L} = \frac{\omega_o^2}{\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}$ ,

$$U_{L_{\max}} = I_{\max} \cdot \omega_{\epsilon} \cdot L).$$

7. Определить по графику значения амплитуд напряжения на каждом элементе при 1)  $\omega_{\epsilon}=0$  и 2)  $\omega_{\epsilon} \rightarrow \infty$ . Объяснить полученные результаты.

8. Используя (7), получить выражение для сдвига фаз  $\phi$  между колебаниями тока в цепи и э.д.с., и смоделировать зависимость  $\phi(\omega)$  (угол  $\phi$  измеряется в градусах) для трех различных значений активного сопротивления в контуре.

### Задание № 8. Оптимизация задачи определения резонансной частоты

Программа *MS Excel* позволяет найти оптимальное решение для целого ряда задач. Оптимизация заключается в нахождении максимального, минимального или строго определенного значения некоторой функции, называемой *целевой*, путем изменения некоторых из ее параметров.

Решим задачу о нахождении резонансной частоты колебаний в последовательном колебательном контуре (исследование ведется на том же листе, что и предыдущее задание).

**Задача.** Для заданных параметров контура ( $L$ ,  $C$ ,  $R$ ) определить значения частоты внешней э.д.с., при которых ток в контуре, а также амплитуды напряжения на каждом из его элементов достигают максимального значения.

Решение проводится в несколько этапов:

1. Создание математической модели. Целевой функцией в данной задаче является амплитуда тока или напряжения на соответствующих элементах контура. Процедура оптимизации работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке. Чтобы получить по формуле заданный результат, процедура изменяет значения во влияющих ячейках. Так, например, амплитуда тока в контуре (*целевая функция*):

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega_{\epsilon} L - \frac{1}{\omega_{\epsilon} C} \right)^2}} \quad (15)$$

зависит как от параметров контура ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\mathcal{E}_{\max}$  – они имеют определенные значения), так и от частоты внешней э.д.с. ( $\omega_{\epsilon}$  – она-то и будет изменяемым параметром). Следовательно, необходимо определить, *при каком значении частоты вынужденных колебаний целевая функция будет максимальной* – это и есть резонансная частота, определяемая в п. 1 Задания № 7 ( $\omega_{\text{рез}}$ )

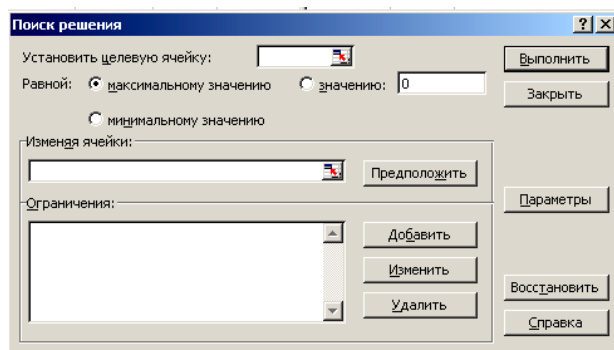
## 2. Решение задачи средствами MS Excel.

1). В ячейку **C50** (влияющая ячейка) ввести начальное значение частоты внешней э.д.с. (его принимают равным единице).

2). В ячейку **C51** (целевая ячейка) ввести формулу для целевой функции, составленную на основе (15).

3). Выполнить команду **Сервис**⇒**Поиск решения**... В диалоговом окне **Поиск решения** указать<sup>22</sup>:

- целевую ячейку,
- вариант оптимизации значения целевой ячейки (максимизация, минимизация или подбор заданного числа – его вводят в соответствующее поле),
- ячейки, значения которых изменяются в процессе поиска решения до тех пор, пока не будут выполнены наложенные ограничения и условие оптимизации (поле "**Изменяя ячейки**") – влияющие ячейки,



• граничные условия поставленной задачи (поле "**Ограничения**" в виде  $\geq$  (больше или равно),  $\leq$  (меньше или равно),  $=$  (равно), "целое" и некоторые другие), накладываемые, как правило, на влияющие ячейки. Для работы с ограничениями служат кнопки **Добавить** (отображает диалоговое окно **Добавление ограничения**), **Изменить** (для выделенного ограничения отображает окно диалога **Изменение ограничения**, аналогичное предыдущему) и **Удалить** (удаление выделенного ограничения). В качестве ограничения в нашей задаче выступает условие, что частота не может принимать отрицательное значение.

4). Нажать кнопку **Выполнить**. Сохранить найденное решение<sup>23</sup>.

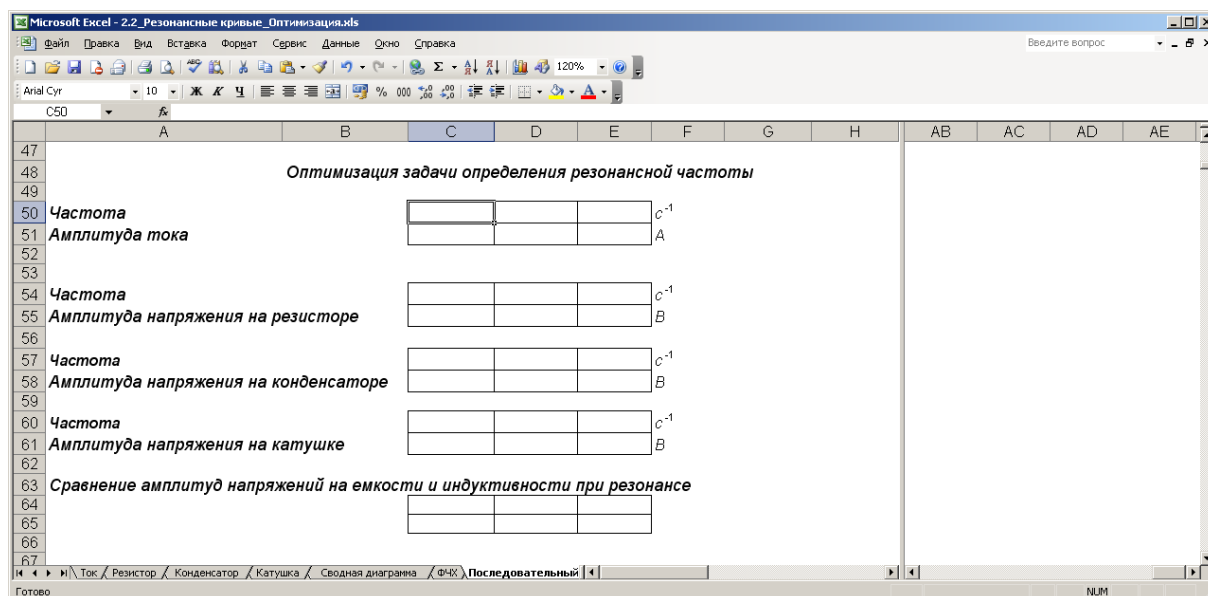
5). Повторить задание для двух других значений активного сопротивления контура (ячейки **D50:E51**).

6). Сравнить полученные значения частоты с теоретическим.

Ниже показан один из возможных вариантов оформления данного задания.

<sup>22</sup> В случае отсутствия подобной команды необходимо выполнить команду **Сервис**⇒**Надстройки**... и в появившемся диалоговом окне выбрать опцию "**Поиск решения**".

<sup>23</sup> Для получения более подробных сведений по параметрам диалогового окна необходимо просмотреть соответствующий раздел справки.



**Примечание:** при изменении исходных данных необходимо повторить п.п. 3 и 4, т.к. значения целевой и влияющих ячеек автоматически не пересчитываются.

### Задания для самостоятельной работы

1. Разработать математическую модель для определения резонансной частоты колебаний напряжения на активном сопротивлении  $U_{R_{\max}} = I_{\max} \cdot R$ , где  $I_{\max}$  вычисляется по формуле (15). Провести поиск решения и расчет по аналогии в изложенном выше плане в ячейках **C54:E55**.
2. Разработать математическую модель для определения резонансной частоты колебаний напряжения на конденсаторе  $U_{C_{\max}} = I_{\max} / (\omega_{\text{рез}} C)$ , где  $I_{\max}$  вычисляется по формуле (15). Провести поиск решения и расчет по аналогии в изложенном выше плане в ячейках **C57:E58**.
3. Разработать математическую модель для определения резонансной частоты колебаний напряжения на катушке индуктивности  $U_{L_{\max}} = I_{\max} \cdot \omega_{\text{рез}} \cdot L$ , где  $I_{\max}$  вычисляется по формуле (5). Провести поиск решения и расчет по аналогии в изложенном выше плане в ячейках **C60:E61**.
4. В ячейках **C64:E64** рассчитать амплитуду напряжения на конденсаторе, соответствующую резонансной частоте  $\omega_{\text{рез}}$ , для трех различных значений активного сопротивления контура. Провести аналогичное вычисление для амплитуды напряжения на индуктивности в ячейках **C65:E65**. Сравнить между собой полученные значения. Сделать вывод о величине амплитуд напряжений на емкости и индуктивности при резонансе.
5. На одной диаграмме построить амплитудные резонансные кривые для напряжений на различных элементах схемы, соответствующих наибольшему значению сопротивления контура. Добавить на нее прямую, соответствующую резонансной частоте контура  $\omega_{\text{рез}}$ . Сравнить с АЧХ, полученными в *MS Excel*.
6. Смоделировать явление резонанса в параллельном колебательном контуре и

построить резонансные кривые для амплитуды тока в каждой ветви и неразветвленной части цепи, а также ФЧ характеристику (в ЭТ *MS Excel*). Разработать математическую модель резонанса тока и оптимизировать задачу определения резонансной частоты. Сравнить результаты с полученными в программе *Electronics Workbench*.

*Лабораторная работа № 2.3.*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ Э.Д.С.**

Цель работы: моделирование вынужденных электрических колебаний под действием несинусоидальной э.д.с. в программе схемотехнического моделирования *Electronics Workbench* и ЭТ *MS Excel*.

Оборудование: программа схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*, ЭТ *MS Excel*.

**1. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в  
программе *Electronics Workbench***

Работа проводится на основе схемы рис. 4 *Лабораторной работы № 2.2*, где в качестве источника несинусоидальной э.д.с. используется функциональный генератор (треугольный и прямоугольный выходной сигнал).

Задание сводится к наблюдению и объяснению формы колебаний в контуре под действием несинусоидальной э.д.с. Необходимо рассмотреть следующие случаи для каждой формы внешнего сигнала: 1)  $\omega_g = 10 \cdot \omega_0$ ; 2)  $\omega_g = \omega_0 / 10$ ; 3)  $\omega_g - \omega_0 = \Delta\omega$  где  $\Delta\omega \ll \omega_g$  и  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

**2. Моделирование вынужденных колебаний в контуре в  
программе *MS Excel***

Работа также выполняется на основе предыдущей модели вынужденных колебаний. В данном случае необходимо на основе синусоидального сигнала смоделировать прямоугольный сигнал той же частоты и амплитуды и внести изменения в соответствующие формулы. Сравнить полученные результаты с моделированием в программе *Electronics Workbench*.

## Лабораторная работа № 2.4.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ**

Цель работы: моделирование параметрических колебаний в колебательном контуре в программе схемотехнического моделирования *Electronics Workbench* и ЭТ *MS Excel*.

Оборудование: программа схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*, ЭТ *MS Excel*.

**Введение**

Механические параметрические колебания (см. *Лабораторную работу № 1.5*) не нашли широкого применения. Гораздо более интересны (в практическом отношении) параметрические колебания в высокочастотных электрических цепях.

Вообразим электрический контур, содержащий постоянную индуктивность  $L$  и воздушный конденсатор переменной емкости. Для простоты будем считать конденсатор плоским, так что его емкость можно рассчитывать по формуле:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{h},$$

где  $S$  – площадь пластин,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $h$  – расстояние между пластинами. Пусть в момент  $t = 0$  на пластинах возник заряд  $q_0$  и соответствующая разность потенциалов  $U_0 = \frac{q_0}{C}$ . Увеличим расстояние между

пластинами на  $\Delta h$ , емкость конденсатора при этом уменьшится и станет равной  $C_1$ . При этом придется совершить работу против электрических сил, и энергия конденсатора увеличится на величину:

$$\Delta W = \frac{q_0^2}{2C_1} - \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \left[ \frac{C}{C_1} - 1 \right] = W_0 \frac{\Delta h}{h} = W_0 \mu,$$

где  $\mu$  – глубина модуляции. Теперь конденсатор разряжается через катушку. Через четверть периода, когда заряд его исчезнет, снова сдвинем пластины (работа не совершается). Еще через четверть периода конденсатор перезарядится током самоиндукции, и процесс можно начать снова. Таким образом, меняя параметр (емкость), мы накачиваем энергию в систему и увеличиваем интенсивность ее колебаний. Так как за половину периода колебаний контура его энергия (вследствие затухания) уменьшается на величину:

$$\Delta W_0 = W_0 \frac{\pi}{Q},$$

то для раскачки требуется выполнение неравенства  $\Delta W > \Delta W_0$ , т.е.  $\mu > \frac{\pi}{Q}$ .



Итак, глубина модуляции параметра может быть тем меньше, чем выше добротность системы (как и в механическом примере).

В реальных физических устройствах емкость меняется примерно по гармоническому закону:

$$C = C_o \cdot (1 + \mu \cos \omega_n t), \quad (1)$$

где  $\omega_n$  – частота накачки, обычно равная удвоенной частоте свободных колебаний контура. Конечно, вместо емкости можно было бы менять и индуктивность.

Так как в таких системах параметры зависят от времени, то решение дифференциального уравнения системы сильно усложняется. Это уравнение остается линейным, но его коэффициенты становятся функциями времени. Не вдаваясь в подробности, рассмотрим результаты решения таких уравнений. Они иллюстрируются рис. 1. По оси абсцисс отложено отношение частоты контура  $\omega_o$  к частоте накачки  $\omega_n$ . По оси ординат отложены значения глубины модуляции параметра. Точки, лежащие внутри острых углов с пунктирными сторонами, определяют те значения относительной частоты и глубины модуляции, при которых способна раскачаться система, лишенная трения.

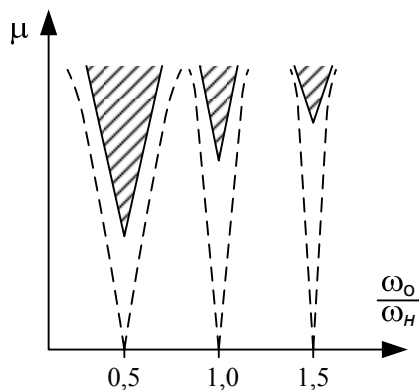


Рис. 1.

Из рисунка видно, что строгое соблюдение требования  $\frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{1}{2}$  не

является обязательным, но при его выполнении требуется наименьшая глубина модуляции, что вполне понятно, так как при этом энергия накачки используется наилучшим образом. Для нашей схемы это значит, что можно раздвигать пластины не в точности при максимальном заряде (и сближать их не в точности при нулевом заряде); нужно лишь, чтобы работа раздвигания была больше работы сближения, совершаемой системой.

При отсутствии затухания и  $\frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{1}{2}$  колебания могли бы возникнуть при

сколь угодно малой глубине модуляции. Но при существовании затухания вносимая энергия не должна быть слишком малой, а потому условия возбуждения становятся более жесткими.

Область значений  $\frac{\omega_o}{\omega_n}$  и  $\mu$ , при которых возможна раскачка системы с

затуханием, сужается (на рисунке она показана штрихованной площадью). Разумеется, при росте затухания эта область еще более сократится, а при больших затуханиях возбуждение может оказаться невозможным. При относительных частотах, равных

$$\frac{\omega_o}{\omega_n} = n \frac{1}{2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

возбуждение также возможно, но осуществить его труднее, так как накачка энергии происходит при этом реже, чем при  $n = 1$ .

Справедливость этих рассуждений была экспериментально доказана академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в 30-х годах. Они создали низкочастотные параметрические машины, где изменение емкости достигалось вращением пластин переменного конденсатора, а изменение индуктивности – периодическим введением в зазор между двумя катушками металлического диска. В диске возникали сильные вихревые токи; магнитное поле этих токов накладывалось на магнитное поле токов катушек и меняло его, что равносильно изменению индуктивности. Возбуждаемые таким образом колебания с частотой в несколько килогерц не нашли практического применения.

В конце 50-х годов нашего века идея параметрического возбуждения нашла выход в практику. В эти годы были созданы полупроводниковые приборы, представляющие комбинацию двух разнородных веществ, на границе между которыми происходит перераспределение носителей зарядов и возникает скачок потенциала. Границу раздела (**p-n-переход**) можно уподобить конденсатору, имеющему емкость:

$$C = \frac{q}{U},$$

где  $U$  – скачок потенциала,  $q$  – перераспределившийся заряд. Если приложить к прибору переменную разность потенциалов, то она изменит электрическое состояние на границе раздела, и это можно уподобить изменению емкости. Таким образом, при наложении переменной разности потенциалов емкость перехода будет периодически изменяться. Напряжение, меняющее емкость по заданному закону, является напряжением накачки. Если одновременно к прибору, включенному в колебательный контур, подводить еще и напряжение вдвое более низкой частоты, то можно добиться параметрического усиления этих более медленных колебаний – на этом принципе работают параметрические усилители.

Преимущество параметрических усилителей заключается в их компактности, способности работать на очень высоких частотах и в малой величине собственных шумов – именно в этом отношении они и превосходят другие системы высокочастотных усилителей.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Составить уравнение колебательного контура, емкость которого меняется в соответствии с (1). Решить его методом половинного интервала. Выделить постоянные и переменные величины.

2. Составить и заполнить *таблицу исходных данных*<sup>24</sup> для случая, когда конденсатор емкостью  $C_0$  первоначально заряжают до напряжения  $U_0$ , затухание в системе отсутствует ( $R=0$ ), глубина модуляции  $\mu=0,1$ , а частота накачки равна удвоенной собственной частоте контура.

3. Смоделировать поведение системы (число точек необходимо взять достаточно большим – не менее нескольких тысяч). Построить графики зависимости заряда и тока от времени на одной диаграмме.

4. Экспериментально определить, при какой наименьшей для данной частоты глубине модуляции происходит усиление колебаний. Повторить задание для частот накачки  $1,0 \cdot \omega_0$  и  $2/3 \cdot \omega_0$ . В каком из рассмотренных случаев возбуждение системы достигается при меньшей глубине модуляции?

5. Установить сопротивление контура много меньше критического. Выполнить исследование п. 4 для частот накачки  $1,0 \cdot \omega_0$  и  $2/3 \cdot \omega_0$ .

---

<sup>24</sup> За основу можно взять шаблон таблицы и данные из *Лабораторной работы № 2.1*.

## Лабораторная работа № 2.5.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ**

Цель работы: изучение особенностей колебаний в системе связанных колебательных контуров, проведение аналогии с колебаниями связанных маятников.

Оборудование: программа схемотехнического моделирования *Electronics Workbench*, ЭТ *MS Excel*.

**Введение**

В электродинамике аналогом двух связанных маятников является электрическая цепь, состоящая из двух колебательных контуров, связанных общей емкостью  $C_{св}$ . В зависимости от ее подключения различают контуры с внешней (рис. 1, а) и внутренней (рис. 1, б) емкостной связью.

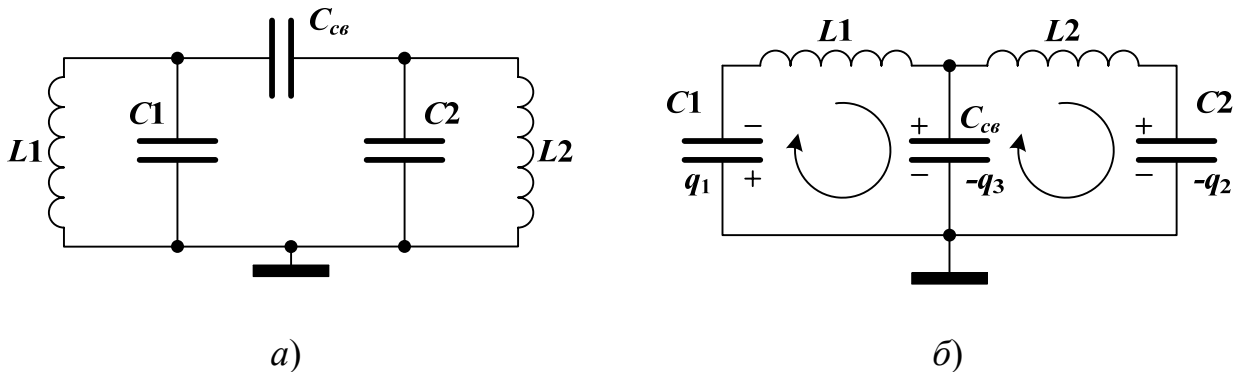


Рис. 1. Связанные контуры с внешней (а) и внутренней (б) связью.

Связанные контуры используются в резонансных усилителях приемопередающих устройств.

Рассмотрим два контура (рис. 1, а), слабо связанные через общую емкость  $C_{св}$ . Заметим, прежде всего, что в силу закона сохранения заряды соединенных между собой обкладок конденсаторов связаны между собой соотношением

$$q_3 = q_1 - q_2.$$

Разобьем цепь на два контура и для указанного направления обхода запишем два уравнения, учитывая, что алгебраическая сумма падений потенциалов при обходе такого контура равна нулю:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_{св}} = 0, \quad (1)$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_{св}} = 0. \quad (2)$$

Подставляя  $q_3 = q_1 - q_2$ ,  $I_1 = dq_1/dt$  и  $I_2 = dq_2/dt$ , получаем

$$L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2 - q_1}{C_{св}}, \quad (3)$$

$$L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_2 - q_1}{C_{св}}. \quad (4)$$

Объединим полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\frac{q_1}{L_1 C_1} + \frac{q_2 - q_1}{L_1 C_{св}}; \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\frac{q_2}{L_2 C_2} - \frac{q_2 - q_1}{L_2 C_{св}}. \end{cases} \quad (5)$$

Перепишем систему для случая  $C_1=C_2=C$  и  $L_1=L_2=L$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\frac{q_1}{LC} + \frac{q_2 - q_1}{LC_{св}}; \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\frac{q_2}{LC} - \frac{q_2 - q_1}{LC_{св}}. \end{cases} \quad (5^*)$$

При выводе уравнений мы пренебрегли потерями в цепи, связанными с наличием активного сопротивления катушек. Форма полученных уравнений (5\*) совпадает с формой уравнений системы (4) в *Лабораторной работе № 1.8* для системы связанных маятников. Отсюда следует, что и общий вид решения рассматриваемой системы и все основные его особенности могут быть найдены непосредственно из решений, полученных нами для двух связанных маятников. Для этого достаточно провести формальную замену:

$$m\ell^2 \rightarrow L, \quad kd^2 \rightarrow \frac{1}{C_{св}}, \quad mg\ell \rightarrow \frac{1}{C}. \quad (6)$$

В частности, в рассматриваемой цепи должны существовать два типа нормальных колебаний с частотами

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (7)$$

$$\omega^- = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{2}{C_{св}} \right)}. \quad (8)$$

Для четной моды колебаний токи в контурах текут в одинаковом направлении, и на емкости  $C_{св}$  нет заряда. Иными словами, колебания происходят так, как если бы отсутствовал участок цепи, содержащий емкость  $C_{св}$ . Это аналогично случаю с нерастянутой пружиной в механической задаче, при этом частота остается такой же, как для связанных осцилляторов. В случае нечетного вида колебаний токи в обоих связанных контурах все время равны по величине, но противоположны по направлению. В этом случае на емкости связи имеется заряд, и частота возрастает.

Так же как в связанных маятниках, типичная картина колебаний в связанных контурах имеет вид биений, которые выражены тем отчетливее, чем

слабее связь. Как видно из (7) и (8) для частот нормальных колебаний, при слабой связи ( $C_{св} \gg C$ ) биения происходят с частотой

$$\Delta\omega = \omega^- - \omega^+ \cong \frac{C}{C_{св}} \omega_0, \quad (9)$$

где  $\omega_0$  – собственная циклическая частота свободных колебаний в  $LC$ -контуре.

Как видно из (7) и (8), нормальные частоты при наличии связи являются различными ( $\omega^+ \neq \omega^-$ ), поэтому при возбуждении такой системы внешним периодическим воздействием характерное для резонанса возрастание амплитуды колебаний системы наблюдается при двух частотах – так называемый "двугорбый резонанс".

### Описание установки

На рис. 2 показана рабочая схема установки для изучения колебаний связанных контуров. Возбуждение колебаний в контуре происходит следующим образом. Вначале конденсатор  $C1$  заряжается от источника постоянного напряжения (см. *Лабораторную работу № 2.1*), а затем при помощи ключа включается в цепь колебательного контура. Конденсатор разряжается, и в цепи возникают свободные затухающие колебания.

Напряжение, снимаемое с сопротивления  $R$ , пропорционально току через это сопротивление, и является сложной функцией времени, так как соответствует сложению колебаний разных частот. Это напряжение подается на вход канала вертикального отклонения осциллографа (канал **A** или **B** в программе *Electronics Workbench*). В условиях балансировки контура, которая достигается путем регулирования величины емкости  $C2$ , на экране осциллографа должна наблюдаться хорошо выраженная картина биений.

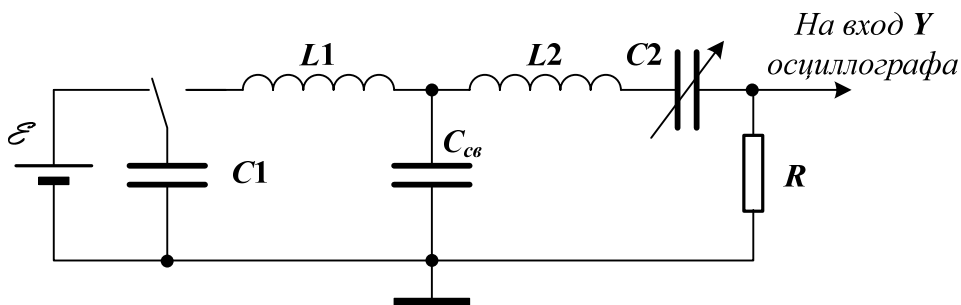


Рис. 2.

Параметры цепи:

- индуктивности катушек  $25 \text{ мГн}$ ;
- сопротивление резистора  $R=250 \text{ Ом}$ ;
- номинальные емкости конденсаторов:  $C_1=25 \text{ нФ}$ ,  $C_{св}=1000 \text{ нФ}$ ,  $C_2=50 \text{ нФ}$ ;
- выходное напряжение источника  $10 \div 15 \text{ В}$ ;
- время срабатывания переключателя после включения питания (опция "Time on" на вкладке **Value**) –  $0,5 \text{ мкс}$ .

### Порядок выполнения работы

#### Задание № 1. Наблюдение осциллограммы колебаний связанных маятников в программе Electronics Workbench

1. Подготовить окно программы *Electronics Workbench*: в диалоговом окне меню **Analysis**⇒**Analysis Options...** на вкладке **Instruments** отключить опцию **"Pause after each screen"** и увеличить минимальное число анализируемых точек до 2000-5000 (опция **"Minimum number of time points"**).

2. Собрать цепь по рис. 2 с указанными выше параметрами. Установить максимальную емкость конденсатора  $C_2$  (100% от номинала). При полностью развернутом окне осциллографа получить осциллограмму сигнала (отключив питание или приостановив симуляцию, *как только* произойдет полное затухание колебаний). Подобрать коэффициент вертикального отклонения (переключатель **V/div** в блоке канала вертикального усиления **Channel A** или **Channel B**) так, чтобы размах изображения не превышал размеров рабочей части ЭЛТ.

3. Уменьшая величину емкости  $C_2$ , добиться балансировки контура (при этом должна наблюдаться четкая картина биений вплоть до полного затухания колебаний). Изменяя длительность развертки (переключатель **Time/div** в блоке **Time base**), получить на экране 2-3 периода биений. Сохранить осциллограмму в текстовом файле типа \*.scr, преобразовать его в формат ЭТ *MS Excel* и построить график колебаний (для промежутка времени, соответствующего 3 периодам биений). Сохранить данные в файле 2.5\_Связанные контуры.xls.

4. Изучить зависимость периода модулированных колебаний и периода биений от емкости конденсатора связи  $C_{св}$  (не менее 10 значений в интервале от 200 до 2000  $nФ$ ). Построить графики зависимости  $T_k$  и  $T_б$  от  $C_{св}$  на одной диаграмме. Подобрать к ним линии тренда. Сделать вывод о зависимости периода биений от величины емкости связи. Сравнить полученные результаты с соответствующей теоретической зависимостью (см. (9)).

5. Проследить, как влияет величина активного сопротивления (5-6 значений) на период биений и быстроту затухания колебаний. Объяснить полученные результаты.

6. Включить в цепь первого контура активное сопротивление и подать напряжение с него на вход второго канала осциллографа. Установить  $R_1=R_2=1\text{ Ом}$ . По аналогии с *Лабораторной работой № 1.8* получить гармонические колебания в каждом из контуров (синфазные и противофазные).

#### Задание № 2. Получение амплитудно-частотной характеристики связанных контуров

1. Установить первоначальные параметры цепи и  $C_2=C_1$ , и рассчитать нормальные частоты колебаний связанных контуров  $\omega^+$  и  $\omega^-$ , а также  $v^+$  и  $v^-$  в ЭТ *MS Excel*.

2. Изменить цепь, включив последовательно с конденсатором  $C1$  источник синусоидального напряжения (выходное напряжение  $10\text{ В}$ , частота  $50\text{ Гц}$ , рис. 3).

3. Подключить к выходу цепи (вместо осциллографа) измеритель амплитудно-частотной характеристики (подробнее об измерителе АЧХ и ФЧХ см. *Лабораторную работу № 2.2, Задание № 5*).

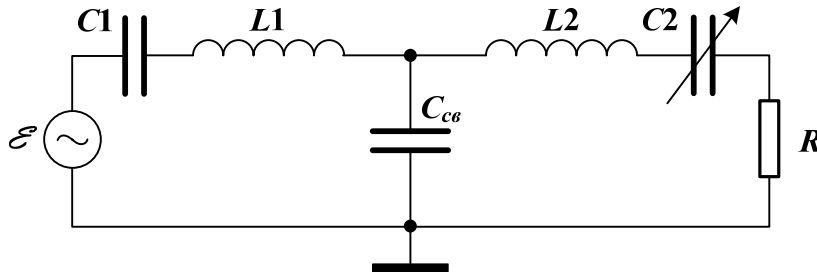


Рис. 3.

4. Включить питание и получить АЧХ контура. Определить частоты в максимумах кривой и сравнить их с  $\nu^+$  и  $\nu^-$ , полученными теоретически. Сохранить результаты в файле *АЧХ\_1.bod*. Преобразовать данные в формат *MS Excel* и построить характеристику.

5. Изменяя емкость связи (5-6 значений), проследить за изменением этих частот. Подтвердить математически полученные результаты. При каком значении емкости конденсатора связи резонанс становится "одногогорбым"? Сохранить результаты в файле *АЧХ\_2.bod* и построить характеристику на имеющейся уже диаграмме (см. п. 4).

### **Задание № 3. Моделирование колебаний в связанных контурах в ЭТ MS Excel**

1. Переписать уравнения системы (5) с учетом наличия в контуре активного сопротивления  $R$  (т.е. для цепи, изображенной на рис. 2) и решить их методом половинного интервала.

2. Составить и заполнить *таблицу исходных данных* (лист **Численное решение**). В момент времени  $t_0=0$  токи в обоих контурах отсутствуют;  $C_1=C_2=25\text{ нФ}$ ; конденсатор  $C2$  не заряжен, величина заряда  $q_{1_0}$  вычисляется по известным значениям емкости и э.д.с. источника, которые, как и остальные параметры контура, берутся из описания установки. Временной интервал должен соответствовать 3 периодам биений (см. *Задание № 2*), количество подинтервалов для вычисления величины  $\Delta t$  должно быть достаточно большим – не менее 5000. Ниже приведен пример оформления рабочего листа таблицы.

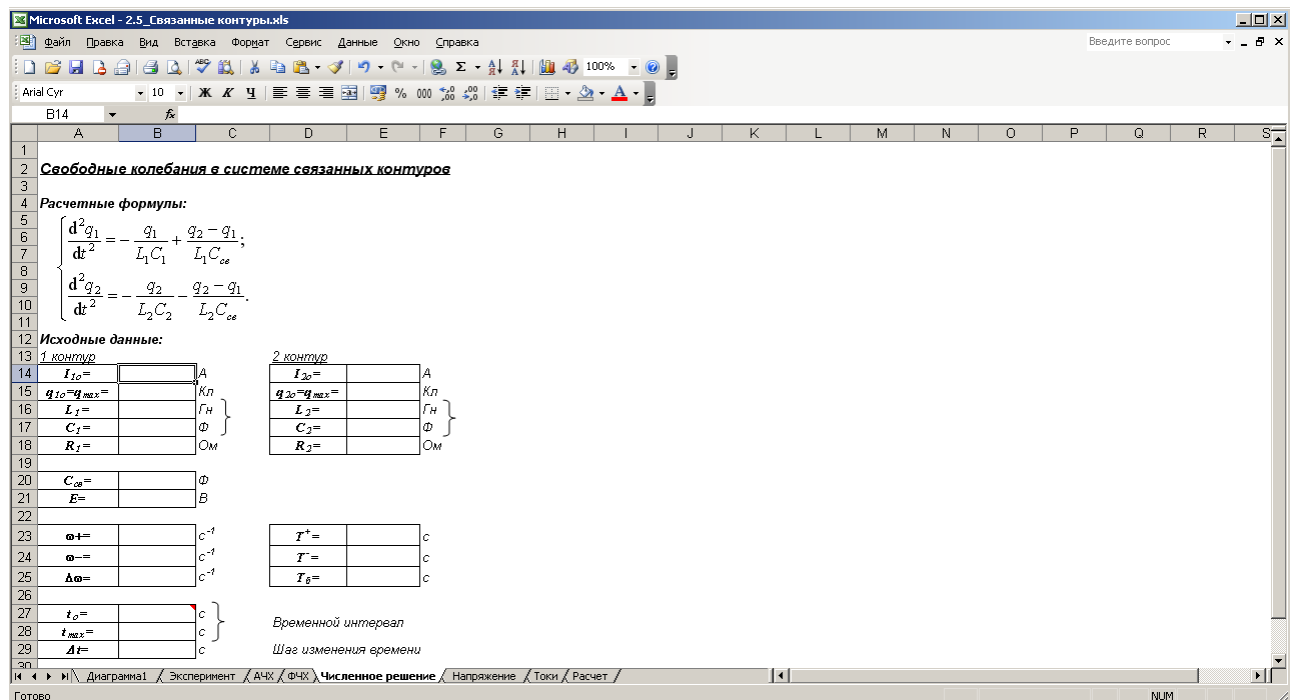
3. Рассчитать в рамках созданной таблицы нормальные частоты колебаний и частоту биений.

4. На отдельном листе (**Расчеты**) смоделировать колебания связанных контуров (т.е. рассчитать токи в контурах и заряды конденсаторов  $C1$  и  $C2$ ). В отдельном столбце рассчитать падение потенциала на резисторе  $R$ .

5. На двух различных диаграммах построить графики зависимости падения потенциала на резисторе  $R$  (выходного напряжения) и токов в контурах от



времени.



6. Определить непосредственно по графику период биений и сравнить его с теоретическим значением.

7. Проследить за влиянием на поведение системы величины сопротивления  $R$ , емкости конденсатора  $C_{св}$ , а также соотношения емкостей конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

8. Сравнить численное решение с аналитическим:

- преобразовать систему (5\*) (по аналогии с *Лабораторной работой № 1.8*) путем почленного сложения и вычитания уравнений; записать их решения и выражения для зарядов конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ ;
- дифференцируя их по времени, получить выражения для токов в контурах (в отсутствии активного сопротивления);
- рассчитать токи в те же моменты времени, что и в численном решении;
- добавить новые ряды данных на имеющуюся диаграмму, основанную на приближенном решении ДУ (параметры контуров одинаковые, активное сопротивление отсутствует). Сравнить точность решений.

### Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать в программе *Electronics Workbench* работу связанных контуров с внешней связью (рис. 1, а). Параметры контура  $C_1=C_2=5 \text{ нФ}$ ;  $C_{св}=1 \text{ нФ}$ ;  $L_1=L_2=0,5 \text{ Гн}$ . Получить осциллограмму биений и АЧХ контуров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малов, Н. Н. Основы теории колебаний [Текст] : пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1971.
2. Алешкевич, В. А., Деденко, Л. Г., Караваев, В. А. Колебания и волны. Лекции (Университетский курс общей физики) [Текст] – М. : Физический факультет МГУ, 2001.
3. Паршин, Д. А., Зегря, Г. Г. Колебания (конспект лекций по общему курсу физики) [Текст] – С.-Пб : Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе.
4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967.
5. Поршнев, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCad [Текст] : учеб. пособие. – М. : Горячая линия-Телеком, 2002.
6. Богуславский, А. А., Щеглова, И. Ю. Лабораторный практикум по курсу "Моделирование физических процессов" [Текст]: учебно-метод. пособие для студентов физико-математического факультета. – Коломна : КГПИ, 2002.
7. Щеглова, И. Ю., Печенов, В. В. Виртуальный физический практикум [Текст] : Сборник лабораторных работ по компьютерному моделированию для изучения законов постоянного и переменного тока. / Методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Коломна : КГПИ, 2005.
8. Лабораторный практикум по физике [Текст] : учебное пособие для студентов вузов / А. С. Ахматов, В. М. Андреевский, А. И. Кулаков и др.; под ред. А. С. Ахматова. – М. : Высш. школа, 1980.

*Учебно-методическое пособие*

**Щеглова Ирина Юрьевна**

ст. преподаватель кафедры теоретической физики

**Богуславский Александр Абрамович**

профессор кафедры теоретической физики

**Моделирование колебательных процессов  
(на примере физических задач)**

Компьютерная верстка Щегловой И. Ю.  
Редактор Капырина Т. А.

---

Формат 60×84 1/16

Бумага офсетная

---

Подписано в печать 21.05.2009

Усл. печ. л. 8,4. Тираж 100 экз.

Заказ №

---

Отпечатано с готового оригинал-макета в копировально-множительном центре  
ГОУ ВПО МО «КГПИ»

140410, г. Коломна, ул. Зеленая, д. 30. Коломенский госпединститут.

