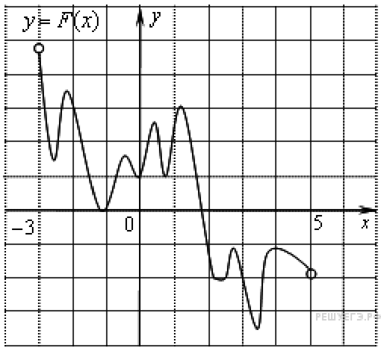
Первообразная

1. Задание 7 № 323077. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2;4]$.



Решение.

По определению первообразной на интервале $(-3; 5)$ справедливо равенство

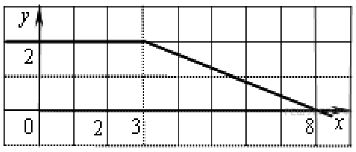
$$f(x) = F'(x).$$

Следовательно, решениями уравнения $f(x)=0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$ Это точки $-2{,}6$; $-2{,}2$; $-1{,}2$; $-0{,}5$; 0; $0{,}4$; $0{,}8$; $1{,}2$; $2{,}2$; $2{,}8$; $3{,}4$; $3{,}8$. Из них на отрезке $[-2;4]$ лежат 10 точек. Таким образом, на отрезке $[-2;4]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет 10 решений.

Ответ:10.

Ответ: 10

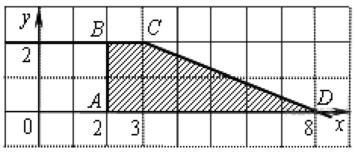
2. Задание 7 № 323078. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



Решение.

Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому

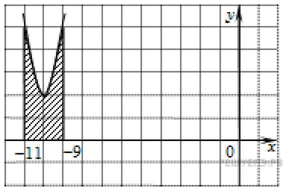
$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$



Ответ:7.

Ответ: 7

3. Задание 7 № 323079. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках -9 и -11. Имеем:

$$F(-9) = (-9)^3 + 30\cdot(-9)^2 + 302\cdot(-9) - \frac{15}{8} = -729 + 2430 - 2718 - \frac{15}{8} = -1018\frac{7}{8}.$$
$$F(-11) = (-11)^3 + 30\cdot(-11)^2 + 302\cdot(-11) - \frac{15}{8} = -1331 + 3630 - 3322 - \frac{15}{8} = -1024\frac{7}{8}.$$
$$F(-9) - F(-11) = -1018\frac{7}{8} + 1024\frac{7}{8} = 6.$$

Приведем другое решение.

Получим явное выражение для $f(x)$. Поскольку

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + 60x + 302 = 3(x^2 + 20x + 100) + 2 = 3(x+10)^2 + 2,$$

имеем:

$$\int_{-11}^{-9} (3(x+10)^2 + 2)dx = ((x+10)^3 + 2x)\Big|_{-11}^{-9} = 1 - (-1) + 2(-9 - (-11)) = 2 + 4 = 6.$$

Примечание.

Внимательный читатель отметит, что второй подход эквивалентен выделению полного куба:

$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8} = (x+10)^3 + 2x - 1000 - \frac{15}{8},$$

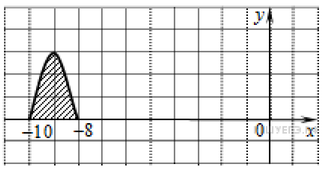
что позволяет сразу же найти $F(-9) - F(-11)$.

Еще один способ рассуждений покажем на примере следующей задачи.

Ответ:6.

Ответ: 6

4. Задание 7 № 323080. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

$$f(x) = F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3(x^2 + 18x) - 240 = 3 - 3(x+9)^2.$$

Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y = 3 - 3x^2$ на 9 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 - 3x^2$ и отрезком $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Имеем:

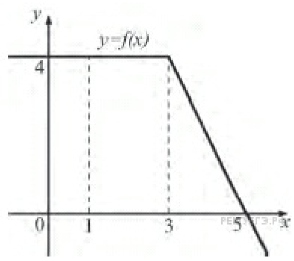
$$S = \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)dx = 2\int_{0}^{1} (3 - 3x^2)dx = 2(3x - x^3)\Big|_0^1 = 2(3-1) - 0 = 4.$$

Ответ: 4.

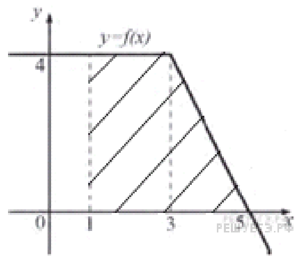
Еще несколько способов рассуждений покажем на примере следующей задачи.

Ответ: 4

5. Задание 7 № 500890. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx$.



Решение.



Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[1;5]$ дает значение площади подграфика функции $f(x)$ на отрезке. Область под графиком разбивается на прямоугольный треугольник, площадь которого $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$, и прямоугольник, площадь которого $S_{\text{пр}} = 2 \cdot 4 = 8$. Сумма этих площадей дает искомый интеграл

$$\int_1^5 f(x)\,dx = S_{\text{пр}} + S_{\text{тр}} = 4 + 8 = 12.$$

Ответ:12.

Ответ: 12