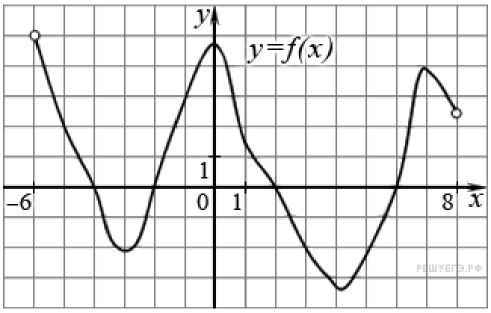
Применение производной к исследованию функций

1. Задание 7 № 27487. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



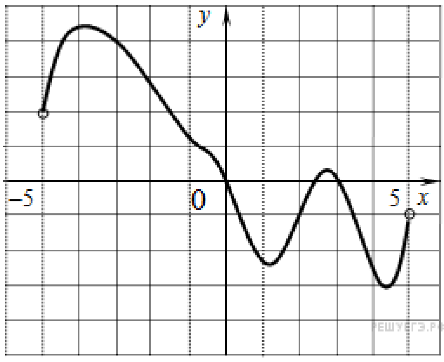
Решение.

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

Ответ: 4

2. Задание 7 № 27488. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



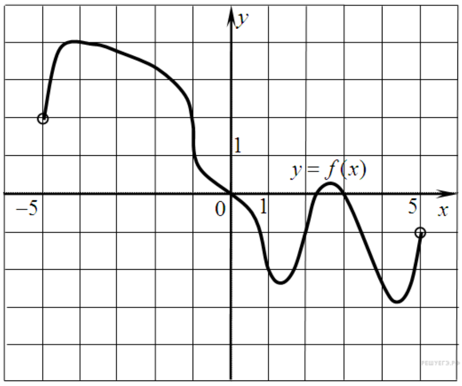
Решение.

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах (−3,8; 1,2) и (2,8; 4,4). В них содержатся целые точки −3, −2, −1, 0, 1, 3, 4. Их 7 штук.

Ответ: 7.

Ответ: 7

3. Задание 7 № 27489. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



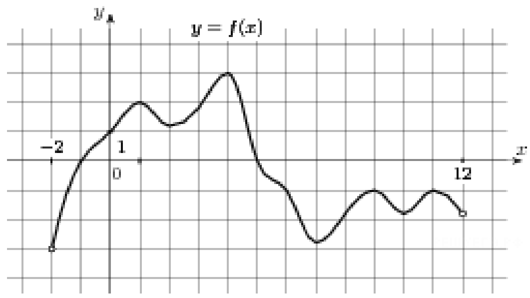
Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней в 4 точках.

Ответ: 4.

Ответ: 4

4. Задание 7 № 27490. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$,.



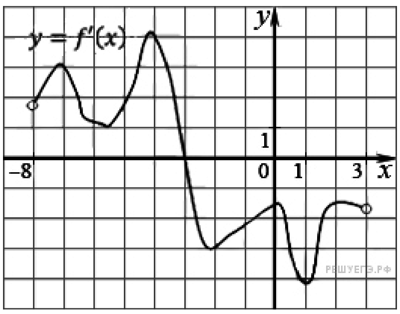
Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.

Ответ: 44.

Ответ: 44

5. Задание 7 № 27491. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



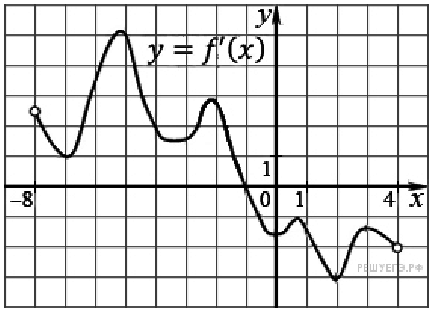
Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

Ответ: -3

6. Задание 7 № 27492. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



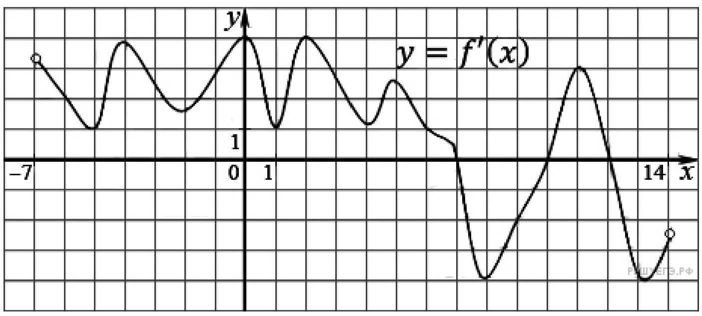
Решение.

На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7.

Ответ: −7.

Ответ: -7

7. Задание 7 № 27494. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].



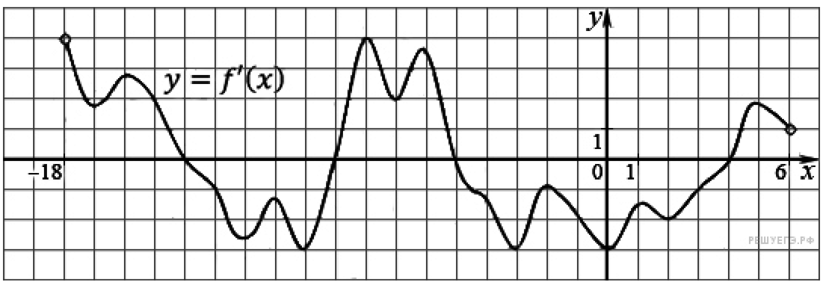
Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

Ответ: 1

8. Задание 7 № 27495. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



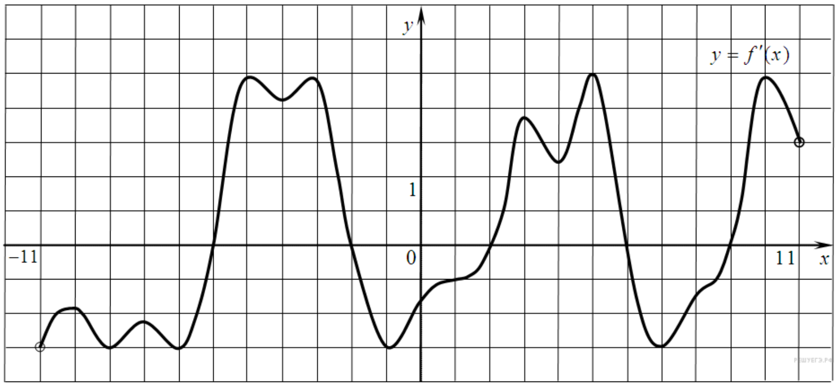
Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-13;1]$ функция имеет одну точку минимума $x = -9$.

Ответ: 1.

Ответ: 1

9. Задание 7 № 27496. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].

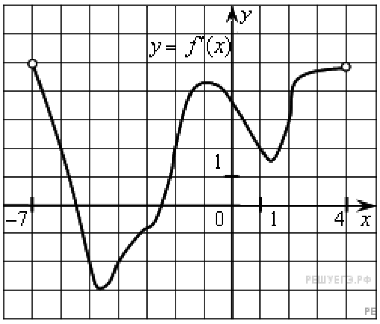


Решение.
Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках −6, −2, 2, 6, 9. Тем самым, на отрезке [−10; 10] функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.

Ответ: 5

10. Задание 7 № 27497. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 4). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

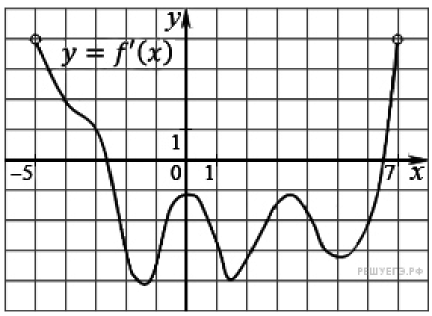


Решение.
Промежутки возрастания данной функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых ее производная положительна, то есть интервалам (−7; −5,5), (−2,5; 4). Данные интервалы содержат целые точки −6, −2, −1, 0, 1, 2, 3. Их сумма равна −3.

Ответ: −3.

Ответ: -3

11. Задание 7 № 27498. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

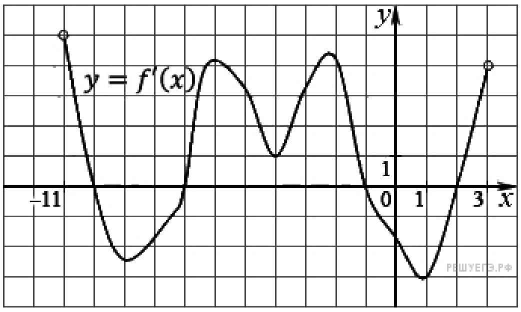


Решение.
Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−2,5; 6,5). Данный интервал содержит следующие целые точки: −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма которых равна 18.

Ответ: 18.

Ответ: 18

12. Задание 7 № 27499. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них.



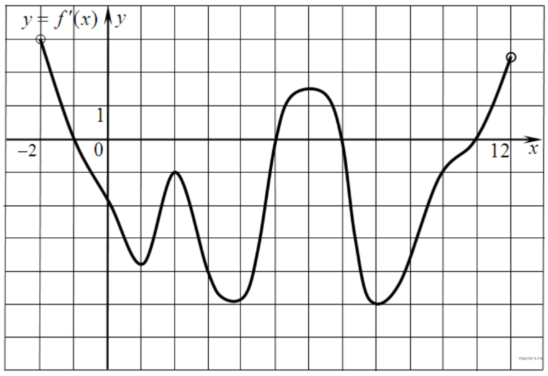
Решение.

Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (−11; −10), (−7; −1), (2; 3). Наибольший из них — интервал (−7; −1), длина которого 6.

Ответ: 6.

Ответ: 6

13. Задание 7 № 27500. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них.



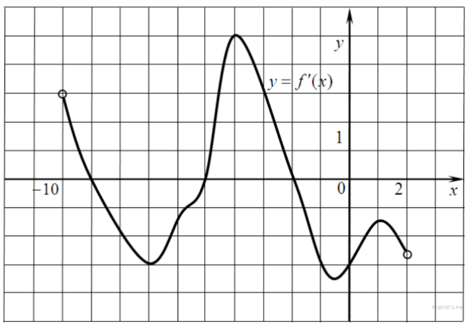
Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалам (−1; 5) длиной 6 и (7; 11) длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

Ответ: 6.

Ответ: 6

14. Задание 7 № 27501. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



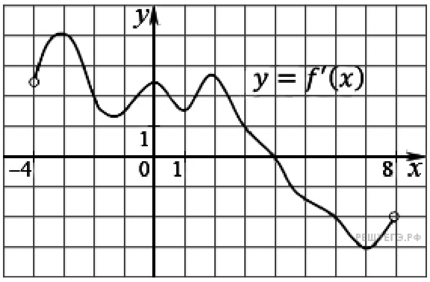
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $y'(x_0) = -2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

Ответ: 5

15. Задание 7 № 27502. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].



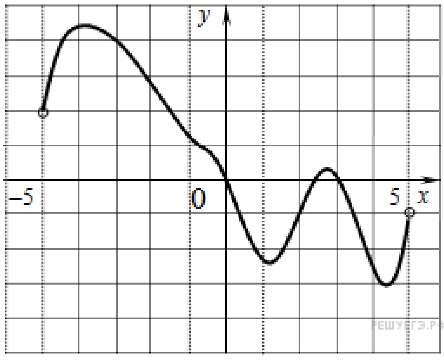
Решение.

Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [–2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

Ответ: 4

16. Задание 7 № 119971. На рисунке изображен график функции *f(x)*, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых производная функции *f(x)* равна 0.



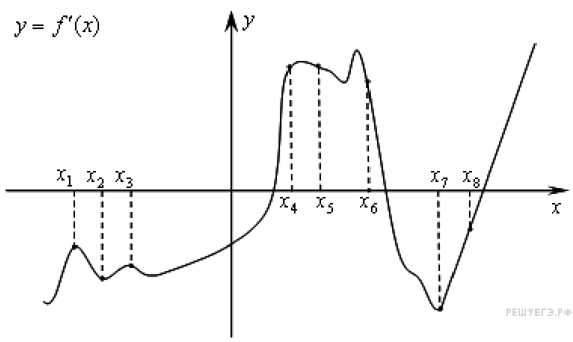
Решение.

Производная изображенной на рисунке функции *f(x)* равна нулю в точках экстремумов: −3,7; 1,4; 2,6 и 4,2. Производная равна нулю в 4 точках.

Ответ: 4.

Ответ: 4

17. Задание 7 № 317541. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



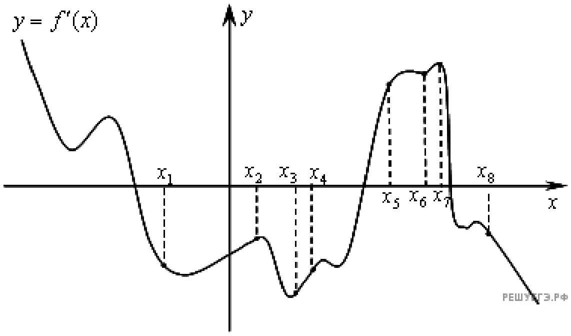
Решение.

Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках x_4, x_5, x_6. Таких точек 3.

Ответ:3.

Ответ: 3

18. Задание 7 № 317542. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



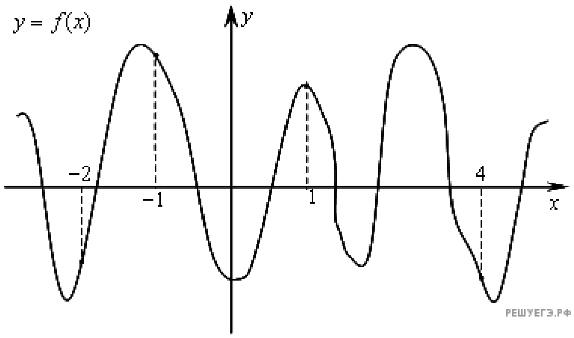
Решение.

Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные значения её производной. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательгы. Таких точек 5.

Ответ: 5.

Ответ: 5

19. Задание 7 № 317544. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



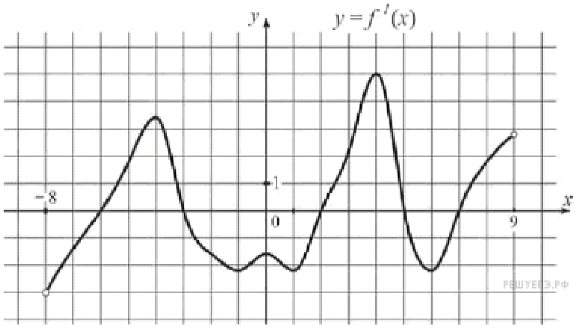
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший.

Ответ:4.

Ответ: 4

20. Задание 7 № 500910. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 8]$.



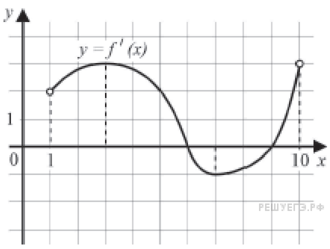
Решение.

Точки минимума дифференцируемой функции соответствуют изменению знака её производной с минуса на плюс. На отрезке $[-4; 8]$ лежат две такие точки: 2 и 7.

Ответ:2.

Ответ: 2

21. Задание 7 № 501188. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



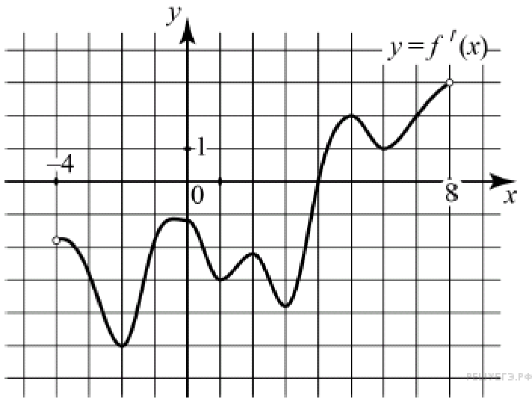
Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный. На интервале $(1; 10)$ функция имеет одну точку минимума $x = 9$.

Ответ: 9.

Ответ: 9

22. Задание 7 № 504233. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?



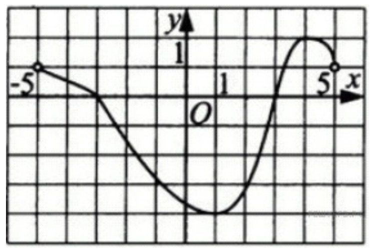
Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на правой границе отрезка, т. е. в точке 1.

Ответ: 1.

Ответ: 1

23. Задание 7 № 505119. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 5]$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.



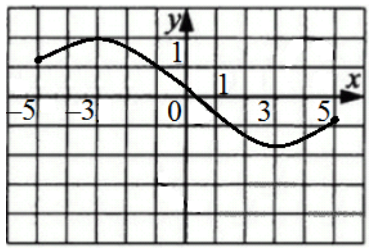
Решение.

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Тем самым, функция f, график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках $[-5; -3]$ и $[3; 5]$ и убывает на отрезке $[-3; 3]$.

Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке -5, или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке $[3; 5]$ справедливо неравенство $f(5) > f(3)$. Поскольку по условию $f(-5)$ не меньше, чем $f(5)$, справедлива оценка $f(-5) > f(3)$.

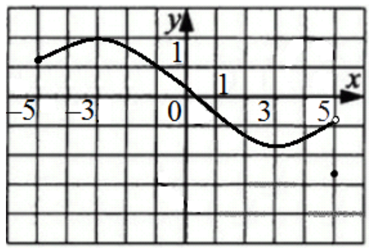
Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.



Ответ:3.

Примечание Б. М. Беккера (Санкт-Петербург).

Непрерывность функции на концах отрезка существенна. Действительно, если бы функция f имела в точке 5 разрыв первого рода (см. рис.), значение $f(5)$ могло оказаться меньше значения $f(3)$, а тогда наименьшим значением функции на отрезке $[-5; 5]$ являлось бы значение функции в точке 5.



Примечание портала РЕШУ ЕГЭ.

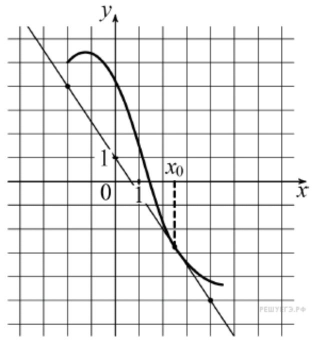
Мы были удивлены, обнаружив это задание в экзаменационной работе досрочного ЕГЭ по математике 28.04.2014 г. Это непростое задание отсутствует в Открытых банках заданий, что, несомненно, оказалось неприятным сюрпризом для выпускников.

Примечание Александра Ларина (Москва).

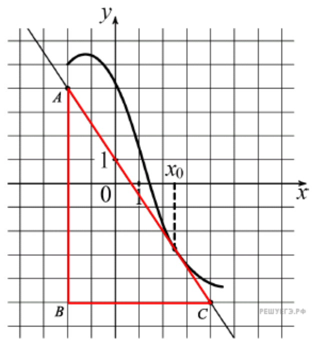
В этой задачке весь ужас «выстрелил вхолостую», 99,9999% решающих даже и не обратят внимание на потенциальную угрозу — ответ-то получается такой же. А про соотношение значений на границах и уж тем более про непрерывность никто читать и не собирается :-) А вот если условие слегка поменять, то «минус балл» всей стране обеспечен будет.

Ответ: 3

24. Задание 7 № 505400. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.



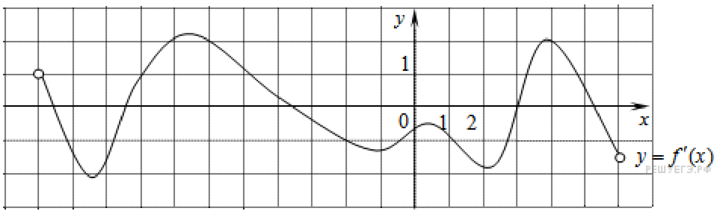
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; 4), B (−2; −5), C (4; −5). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{9}{6} = -1,5.$$

Ответ: −1,5.

Ответ: -1,5

25. Задание 7 № 505442. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−10; 6). В какой точке отрезка [−2; 4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



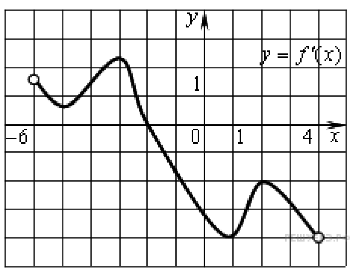
Решение.

Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак с минуса на плюс, то это точка минимума. На отрезке [−2; 4] график производной пересекает ось абсцисс в точке 3 и в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка 3 является точкой минимума на данном отрезке.

Ответ: 3.

Ответ: 3

26. Задание 7 № 508225. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



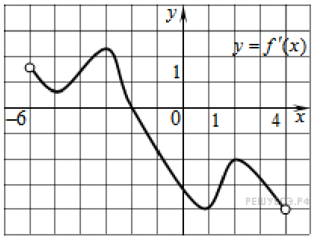
Решение.

Смена знака производной с положительного на отрицательный соответствует точке максимума, следовательно, в точке с абсциссой −2 достигается наибольшее значение функции.

Ответ: −2.

Ответ: -2

27. Задание 7 № 509035. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



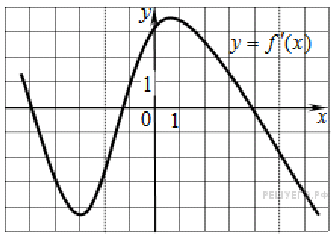
Решение.

Смена знака производной с положительного на отрицательный соответствует точке максимума, следовательно, в точке с абсциссой −2 достигается наибольшее значение функции.

Ответ: −2.

Ответ: -2

28. Задание 7 № 509056. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. При каком значении x эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-4; -2]$?



Решение.

Из графика видно, что производная функции на отрезке $[-4; -2]$ отрицательна, следовательно, функция на этом отрезке убывает. Значит, её наибольшее значение достигается на левом крае отрезка, то есть в точке −4.

Ответ: −4.

Ответ: -4