1. Классическая вероятность

Определение 1

Случайное событие - это событие, которое может произойти некого опыта, а может и не наступить.

Определение 2

События, которые нельзя разбить на более простые, именуют *элементарными*.

Определение 3

Элементарные события, при которых наступает событие A, называют *благоприятствующими* событию A.

Формула классической вероятности. Определение.

Вероятностью P события A — $P(A)$ называют отношение m благоприятствующих исходов этого события к числу n равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

1.1. Задача

На клавиатуре телефона 10 цифр $0..9$. Какова вероятность того, что случайно набранная цифра будет четной? А будет меньше 4? Или будет четной и больше 3?

Решение

- $m = 0; 2; 4; 6; 8 \longrightarrow m = 5, n = 0..9 \longrightarrow n = 10$. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{10} = 0.5$
- $m = 0; 1; 2; 3 \longrightarrow m = 4, n = 0..9 \longrightarrow n = 10$. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = 0.4$
- $m = 4; 6; 8 \longrightarrow m = 3, n = 0..9 \longrightarrow n = 10$. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$

1.2. Задача

Василий выбирает случайное трехзначное число. Найдите вероятность того, что число делится на 51.

Решение

$$999 = 100(n - 1) * 1$$

$$999 - 100 + 1 = n$$

$$n = 900$$

$$969 = 102 + (m - 1) * 51$$

$$m = 18$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18}{900} = 0.02$$

Геометрическая вероятность

Вероятность P события A — $P(A)$ есть отношение меры A: длины, площади, объема к мере Y – пространства элементарных событий.

1.3. Задача

В круг радиуса R случайным образом бросают точку. Найдите вероятность того, что это точка окажется внутри вписанного:

1) правильного треугольника
2) квадрата
3) правильного шестиугольника

Решение

1) Пусть a-сторона правильного треугольника, h — его высота, а B - вершина треугольника, противолежащая высоте. Тогда

$$n = S_{\text{окр}} = \pi R^2$$
$$S_{\text{пр.}\triangle} = \frac{1}{2}ah$$
$$h = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a^2)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$S_{\text{пр.}\triangle} = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$BO = R$$
$$BO = \frac{2}{3}h$$
$$BO = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$$
$$S_{\triangle} = \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$
$$P(A) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.41$$

2) Пусть a-сторона квадрата, h — его высота. Тогда

$$n = S_{\text{окр}} = \pi R^2$$
$$m = a^2$$
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$a = R\sqrt{2}$$
$$S_{\square} = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$$
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2R^2}{\pi R^2} \approx \frac{2}{3} = 0.04$$

3) Пусть a-сторона правильного шестиугольника. Тогда

$$n = S_{\text{окр}} = \pi R^2$$
$$R = a$$
$$m = S_{\text{шестиугольника}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.63$$

1.4. Задача

Случайным образом выбирается одно из решений неравенства $x^2 \leq 9$, найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

1) $x^2 \leq 10$

2) $2x - 3 \leq 17$

3) $x^2 \geq 10$

4) $x^3 + 2x \geq 0$

Решение

1)

$$x^2 \leq 10$$
$$x \in [-3; 3]$$
$$x^2 \leq 9$$
$$x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow P(A) = 1$$

2)

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq 17 \\ x &\leq 10 \\ x &\in [-3; 3] \longrightarrow \\ \longrightarrow &P(A) = 1 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 10 \\ x &\geq \sqrt{10} \\ x &\leq -\sqrt{10} \\ x &\in [-3; 3] \longrightarrow \\ \longrightarrow &P(A) = 0 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} x^3 + 2x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \\ x &\in [-3; 3] \longrightarrow \\ \longrightarrow &P(A) = \frac{[0; 3]}{[-3; 3]} = \frac{3}{6} = 0.5 \end{aligned}$$