Содержание

1. Динамика системы материальных точек (СМТ)

1.1. Законы сохранения для системы материальных точек

1.1.1. Теорема о изменении импульса СМТ

По определению,

$$\vec{p_i} = m_i \vec{v_i} \tag{1}$$

Введем:

$$\vec{p_c} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} \tag{2}$$

Можем расписать как

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i} = \vec{F}_i^{\text{внутр}} + \vec{F}_i^{\text{внеш}} \tag{3}$$

Где

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \ldots + \vec{F}_{i-1,i} + \vec{F}_{i+1,i} + \ldots + \vec{F}_{N,i} \tag{4}$$

Будем рассматривать $\vec{F}_i^{\text{внутр}}$ для $\forall i$:

$$\begin{aligned} i = 1: &\quad \vec{F}_{2,1} + \ldots \\ i = 2: &\quad \vec{F}_{1,2} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

По третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i} = 0 \tag{6}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внутр}} = 0 \tag{7}$$

Подействуем оператором суммы на левую и правую части уравнения (3):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внутр}}}_{\equiv 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}}}_{\equiv \vec{F}_c^{\text{внеш}}} \tag{8}$$

Перепишем левую часть, вытащив дифференцирование из-под суммы:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}_c}{dt} \tag{9}$$

И правую:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{10}$$

Тогда получаем **теорему о изменении импульса СМТ в дифференциальной форме**:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{11}$$

Интегрируя, получим **теорему о изменении импульса СМТ в интегральной форме**:

$$\vec{p}_c(t) - \vec{p}_c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_c^{\text{внеш}} \cdot dt \tag{12}$$

Рассматриваются следующие важные случаи.

Случай первый. Внешняя сила $\vec{F_i} = 1$ равна нулю при любых i. Тогда система называется *изолированной*. Такое состояние достигнуть очень сложно: оно, скорее, является гипотетическим.

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 1 \quad \forall i \tag{13}$$

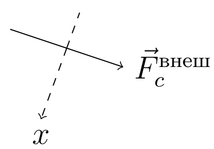
Тогда

$$\vec{F}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const \tag{14}$$

Случай второй. Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но сумма внешних сил $\vec{F}_c$ равна нулю. Это уже более реальный случай, чем предыдущий.

$$\vec{F}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const \tag{15}$$

Случай третий. Сумма внешних сил $\vec{F}_c^{\text{внеш}}$ не равна нулю, но сохраняется её направление.



Тогда можно выбрать такую ось x, что в проекции на неё

$$F_{cx}^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow p_{cx} = const \tag{16}$$

Случай четвертый. Сумма внешних сил $\vec{F}_c^{\text{внеш}}$ не равна нулю, но если выполняется система условий:

$$\begin{cases} |\vec{F}_c^{\text{внеш}}| \neq \infty \\ \Delta t \to 0 \end{cases} \tag{17}$$

Тогда

$$\vec{p}_c = const \tag{18}$$

1.1.2. Теорема о движении центра масс системы материальных точек

Разберемся с геометрическим местом центром масс СМТ.

Пусть мы имеем систему двух МТ $m_1 = m_2$, тогда интуитивно $x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$:

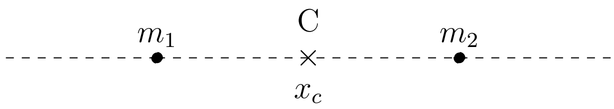


Рис. 1: Система из двух МТ с равными массами

Теперь пусть $m_1 \neq m_2$, тогда интуитивно $x_c = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$:

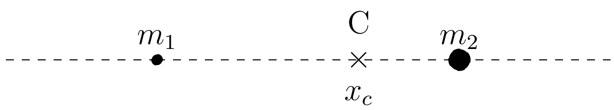


Рис. 2: Система из двух МТ с разными массами

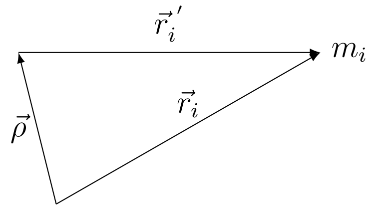
Теперь обобщаем на систему из N материальных точек с произвольными массами:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m_c} \\ y_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m_c} \\ z_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m_c} \end{cases} \tag{19}$$

Определение. Центр масс - это такая точка, которая задается радиус-вектором

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m_c} \tag{20}$$

Нужно задастся вопросом: *сменится ли положение центра масс от смены точки отсчета (полюса) O?*



Геометрически очевидно, что

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{\rho} \tag{21}$$

Тогда

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m_c} + \vec{\rho}\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{m_c} \tag{22}$$

И получаем что и требовалось найти:

$$\vec{R}_c = \vec{R}_c{}' + \vec{\rho} \tag{23}$$

Положение центра масс *не зависит* от положения полюса.

Определение. Скорость центра масс задается как:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{R}_c}{dt} \tag{24}$$

Оговорка: $v \ll c \Rightarrow m_i = const$. Тогда

$$\vec{V}_c = \frac{1}{m_c}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m_c} \tag{25}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m_c}\right)\Bigg| \cdot m_c \tag{26}$$

$$m_c \vec{a}_c = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\right) = \frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{27}$$

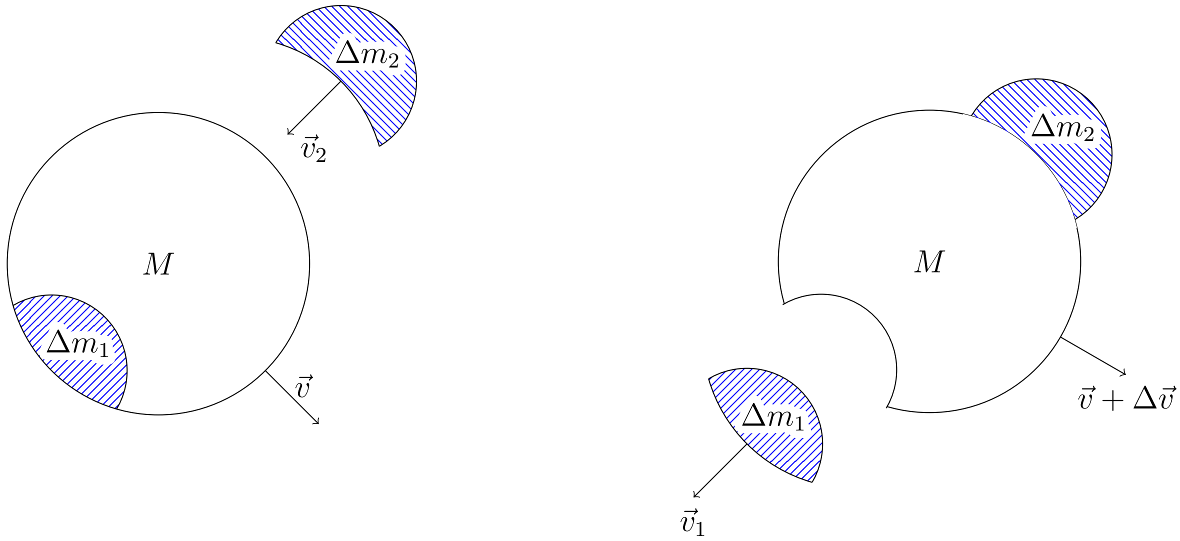
По сути, весь «размазанный» по пространству импульс системы мы можем причислить к одной точке – *центру масс* системы.

$$m_c \vec{a}_c = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{28}$$

Это и есть теорема о движении центра масс системы материальных точек.

Мы получили важный результат: внутренние силы *не могут* создать ускорения СМТ!

1.1.3. Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского



(a) Момент времени t_0 (b) Момент времени $t_0+\Delta t$

Пусть M – масса «основного» тела, Δm_1 – то, что «отвалится» ($\Delta m_1 > 0$), Δm_2 – то, что присоединится.

Запишем импульс системы до и после изменения конфигурации:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}(t_0) = M\vec{v} + \Delta m_2\vec{v}_2 = M\vec{v} + \Delta m_2(\vec{v}+\vec{u}_2) \tag{29}$$

$$\vec{p}(t) = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)[\vec{v}+\Delta\vec{v}] + \Delta m_1([\vec{v}+\Delta\vec{v}] + \vec{u}_1) \tag{30}$$

Тогда изменение импульса будет

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)[\vec{v}+\Delta\vec{v}] + \Delta m_1([\vec{v}+\Delta\vec{v}] + \vec{u}_1) - M\vec{v} - \Delta m_2(\vec{v}+\vec{u}_2) \tag{31}$$

Теперь нужно аккуратно раскрыть скобки:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = M\vec{v} - \Delta m_1\vec{v} + \Delta m_2\vec{v} + \\ + M\Delta\vec{v} - \boxed{\Delta m_1\Delta\vec{v}} + \boxed{\Delta m_2\Delta\vec{v}} + \\ + \Delta m_1\vec{v} + \boxed{\Delta m_1\Delta\vec{v}} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \\ - M\vec{v} - \Delta m_2\vec{v} - \Delta m_2\vec{u}_2 \end{aligned} \tag{32}$$

Величинами вида $\boxed{\Delta\cdot\Delta}$ пренебрежем, как величинами более высокого порядка малости, чем Δ. Приведем подобные:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = \cancel{M\vec{v}} - \cancel{\Delta m_1\vec{v}} + \cancel{\Delta m_2\vec{v}} + \tag{33}$$

$$+ M\Delta\vec{v} + \cancel{\Delta m_1\vec{v}} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \tag{34}$$

$$- \cancel{M\vec{v}} - \cancel{\Delta m_2\vec{v}} - \Delta m_2\vec{u}_2 \tag{35}$$

Тогда можем, наконец, окончательно записать изменение импульса:

$$\Delta\vec{p} \backsimeq M\Delta\vec{v} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \Delta m_2\vec{u}_2 \tag{36}$$

Физика оперирует не бесконечно малыми величинами, а дискретными. Отсюда следует

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{37}$$

Переходя к дифференциалам, равенство запишем строгим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \tag{38}$$

Под импульсом мы понимали импульс системы, поэтому его производная - равнодействующая внешних сил. Перепишем формулу:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \tag{39}$$

Это то, к чему мы стремились - уравнение Мещерского.

$$\vec{F}^{\text{реакт}} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \tag{40}$$

1.1.4. Теорема о изменении момента импульса СМТ

Определение. Момент импульса i-й материальной точки СМТ

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i] \tag{41}$$

Определение. Момент импульса СМТ

$$\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i] \tag{42}$$

Ранее мы доказали, что $\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$. Зададимся вопросом, так ли это для СМТ?

Для i-й материальной точки СМТ

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \quad \forall i \tag{43}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_i^{\text{внутр}})] \tag{44}$$

Распишем:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \ldots + \vec{F}_{j-1,i} + \vec{F}_{j+1,i} + \ldots + \vec{F}_{N,i} \tag{45}$$

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \tag{46}$$

Для взаимодействия i-й и j-й точек:

$$[\vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i}] + [\vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j}] = [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j,i}] = [\vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{j,i}] \equiv 0 \tag{47}$$

Это значит, что все $\vec{M}_i^{\text{внутр}} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{N}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{внеш}}] \tag{48}$$

Получили **теорему**: *Момент импульса СМТ меняется за счет* ***только*** *момента внешних сил.*

$$\frac{d\vec{N}_c}{dt} = \vec{M}_c^{\text{внеш}} \tag{49}$$

1.1.5. Закон сохранения момента импульса

Случай первый. Внешняя сила $\vec{F}_i = 1$ равна нулю при любых i.

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 1 \quad \forall i \Rightarrow \vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \tag{50}$$

Тогда

$$\vec{N}_c = const \tag{51}$$

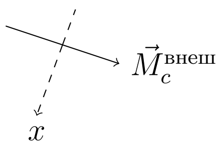
Случай второй. Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ равен нулю.

$$\vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N}_c = const \tag{52}$$

Случай третий. Произвольно выбранный момент внешней силы может быть не равна нулю, но момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ равен нулю.

$$\vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N}_c = const \tag{53}$$

Случай четвертый. Момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ не равен нулю, но сохраняет направление.



Тогда можно выбрать такую ось x, что в проекции на неё

$$M_{cx}^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow N_{cx} = const \tag{54}$$

Случай пятый. Запишем теорему о изменении момента импульса в интегральной форме.

$$\Delta\vec{N}_c = \vec{N}_c(t) - \vec{N}_c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_c^{\text{внеш}} \tag{55}$$

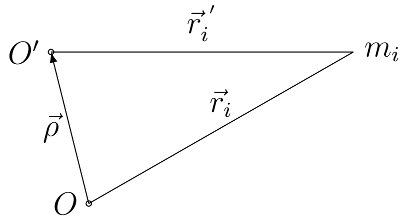
Тогда если выполняется система условий:

$$\begin{cases} |\vec{M}_c^{\text{внеш}}| \neq \infty \\ \Delta t = t - t_0 \to 0 \end{cases} \tag{56}$$

То

$$\vec{N}_c = const \tag{57}$$

Нужно задастся вопросом: *что зависит от смены точки отсчета (полюса) О?*



$$\vec{\rho} = \vec{OO'} \tag{58}$$

$$\vec{r}_i = \vec{\rho} + \vec{r'}_i \tag{59}$$

$$\vec{N}_{O'i} = [\vec{r'}_i \times \vec{p}_i] \tag{60}$$

$$\vec{N}_{Oi} = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = [\vec{r'}_i \times \vec{p}_i] + [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{61}$$

$$\vec{N}_{Oi} = \vec{N}_{O'i} + [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{62}$$

$$\vec{N}_O = \vec{N}_{O'} + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{63}$$

$$\vec{N}_O = \vec{N}_{O'} + [\vec{\rho} \times \vec{p}_c] \tag{64}$$

Если мы найдем такую СО, где импульс системы равен нулю, то в ней момент импульса не зависит от выбора точки отсчета.

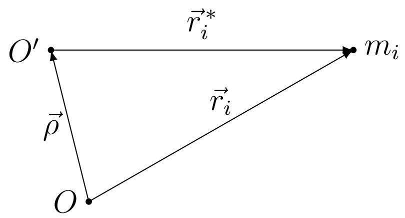
Такая СО - **центромассовая**, и если мы в ней – сопровождающая. Будем обозначать величины в ЦМСО звездочкой:

$$\vec{p}_c^{\,*} = 0 \tag{65}$$

1.1.6. Связь моментов импульса в лабораторной и центромассовой системах отсчета

O – начало отсчета в ЛСО (лабораторной системе отсчета), O' – в ЦМСО (центромассовой системе отсчета).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,*} + \vec{\rho} \tag{66}$$



$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_c \tag{67}$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \tag{68}$$

$$\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{N} [(\vec{r}_i^* + \vec{\rho}) \times m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_c)] = \tag{69}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*]}_{\equiv \vec{N}_c^*} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_c]}_{\equiv [\vec{r}_c^* \times \vec{p}_c]} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times m_i \vec{v}_i^*]}_{\equiv [\vec{\rho} \times \vec{p}_c^*] = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times m_i \vec{v}_c]}_{\equiv [\vec{\rho} \times \vec{p}_c]} = \tag{70}$$

$$= \vec{N}_c^* + [\vec{r}_c^* \times \vec{p}_c] + [\vec{\rho} \times \vec{p}_c] = \tag{71}$$

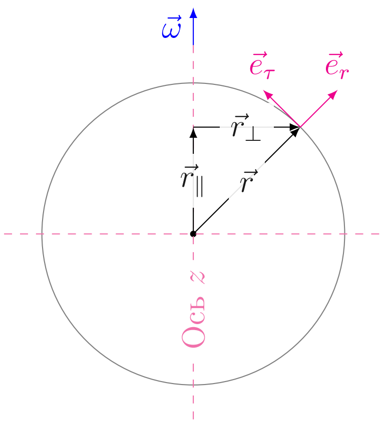
$$= \vec{N}_c^* + [(\vec{r}_c^* + \vec{\rho}) \times \vec{p}_c] = \tag{72}$$

$$= \vec{N}_c^* + [\vec{r}_c \times \vec{p}_c] \tag{73}$$

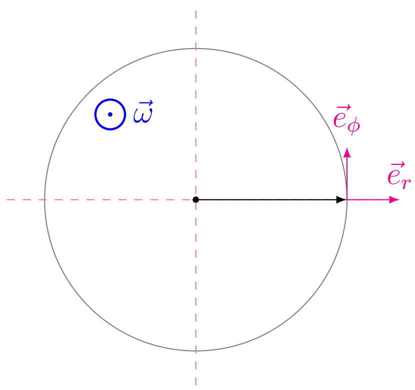
Причем здесь первое слагаемое отвечает за вращение СМТ относительно центра масс, а второе - за вращение центра масс относительно ЛСО.

1.1.7. Уравнение моментов относительно оси

Введем сферическую систему координат с центром O, ортонормированным базисом $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\tau, \vec{e}_\phi\}$



(a) Вид в разрезе



(b) Вид сверху

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau + \vec{v}_r + \vec{v}_\phi \tag{74}$$

Можем записать

$$\vec{v}_\phi = [\omega \times \vec{r}] = [\omega \times \vec{r}_\perp] \tag{75}$$

Запишем момент импульса по определению:

$$\vec{N} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = m([\vec{r} \times \vec{v}_\tau] + [\vec{r} \times \vec{v}_r] + [\vec{r} \times \vec{v}_\phi]) \tag{76}$$

Формально запишем его проекцию на z:

$$[\vec{N}]_z = [\vec{r} \times m\vec{v}_\phi] = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp]] \tag{77}$$

Откуда по бессмертному «бац минус цаб»

$$N_z = m\omega_z(\vec{r}, \vec{r}_\perp) - m\underbrace{(\vec{r}_\perp)_z}_{\equiv 0}(\vec{r}, \omega) = m\omega_z r_\perp^2 \tag{78}$$

Все вышеизложенные выкладки были для *одной* материальной точки. Для СМТ:

$$N_{cz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_{zi} r_{\perp i}^2 \tag{79}$$

В частном случае, когда все точки тела вращаются с одной угловой скоростью (твердое тело),

$$\omega_{zi} = \omega_z \quad \forall i \Rightarrow N_{cz} = \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 \tag{80}$$

Определение. Момент инерции - это мера инертности вращательного движения, выражающаяся как

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 \tag{81}$$

$$N_{cz} = I\omega_z \tag{82}$$

Можем записать закон сохранения момента импульса в таком виде:

$$I_1 \cdot \omega_{1z} = I_2 \cdot \omega_{2z} \tag{83}$$

1.2. Энергетические соотношения для СМТ

Для точки нам известно:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \tag{84}$$

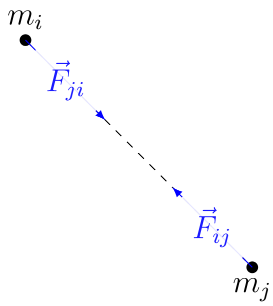
$$\Delta W_k = W_k^{\text{кон}} - W_k^{\text{нач}} = A_{1-2}^{\text{всех}} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{(1)}^{(2)} F_l \cdot dl \tag{85}$$

$$W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{86}$$

$$\Delta W_{ki} = A_i^{\text{всех}}, \quad \forall i \tag{87}$$

$$\Delta W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_{ki} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{\text{всех}} \tag{88}$$

Поставим себе задачу: *попробовать избавиться (по аналогии с импульсом и моментом импульса) от внутренних сил в «$A^{всех}$»*

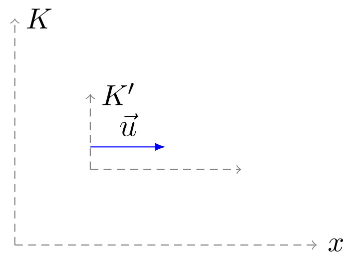


$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{89}$$
$$dA_i = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{l}_i \tag{90}$$
$$dA_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{l}_j \tag{91}$$
$$dA_i + dA_j = \vec{F}_{ji}(d\vec{l}_i - d\vec{l}_j) \tag{92}$$

Печально, но это – **не ноль в общем случае**. Избавиться от внутренних сил в «$A^{\text{всех}}$» не удалось.

1.2.1. Связь между W_{kc} в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как всегда, нас будет интересовать выделенная система отсчета. Обозначим K – лабораторную систему отсчета, K' – движущуюся относительно ЛСО со скоростью $\vec{u}$.



$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} \tag{93}$$
$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + m(\vec{v}\,', \vec{u}) \tag{94}$$
Для системы материальных точек
$$W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} W_{ki} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i'^2}{2}}_{\equiv W'_{kc}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u^2}{2}}_{\equiv \frac{m_c u^2}{2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v_i}\,', \vec{u})}_{\equiv (\vec{p}\,'_c, \vec{u})} \tag{95}$$

Если движущаяся система – ЦМСО, тогда $\vec{p'}_c = \vec{p}^*_c = 0$, $u = v_c$ и выполняется **теорема Кёнига:**
$$W_{kc} = W^*_{kc} + \frac{m_c v_c^2}{2} \tag{96}$$

1.2.2. Потенциальная энергия СМТ. Закон сохранения механической энергии для СМТ

Для материальной точки нам известно:

$$\underbrace{W_{\text{п}}^{\text{нач}} - W_{\text{п}}^{\text{кон}}}_{-\Delta W_{\text{п}}} = A_{1-2}^{\text{конс}} \tag{97}$$

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{к}} \tag{98}$$

По нашему определению,

$$W_{\text{п}c} = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{п}i} \tag{99}$$

$$W_{\text{мех}_c} = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{мех}_i} \tag{100}$$

$$-\Delta W_{\text{п}c} = \sum_{i=1}^{N} A_{1-2}^{\text{конс}} = A_c = A_c^{\text{внеш,конс}} + A_c^{\text{внутр,конс}} \tag{101}$$

Пусть все силы будут консервативными. **Тогда**

$$A_c = A_c^{\text{внеш,конс}} + A_c^{\text{внутр,конс}} = -\Delta W_{\text{п}c} \tag{102}$$

$$A_c = \Delta W_{kc} \tag{103}$$

Иначе говоря,

$$-\Delta W_{\text{п}c} = \Delta W_{kc} \tag{104}$$

$$\Delta(W_{\text{п}c} + \Delta W_{kc}) = 0 \tag{105}$$

Получили **закон сохранения механической энергии для СМТ**:

$$W_{\text{мех}_c} = \text{const} \tag{106}$$