

ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Движение каждого из электронов, поставленных эмиттером (катодом), в рабочем объёме происходит под действием внешних полей $\vec{E}_{\text{внеш}}$ и $\vec{B}_{\text{внеш}}$, созданных потенциальными электродами и токовыми катушками, и поля $\vec{E}_{\text{ПЗ}}$, созданного всеми остальными электронами. На рис. 3.1 показано поле $\vec{E}_{\text{внеш}}$, созданное парой плоских электродов и поля \vec{E}_i , созданные в точке e четырьмя электронами. Эти электроны распределены по всему рабочему объёму и образуют *пространственный* или *объёмный заряд* (ПЗ или ОЗ).

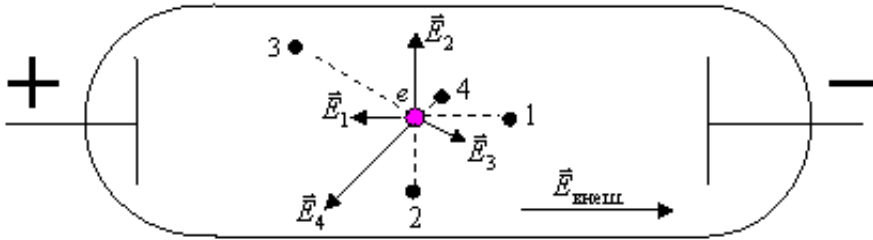


Рис.3.1 Внешнее поле и поле пространственного заряда

Уравнение движения электрона даётся вторым законом Ньютона

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) \quad (3.1)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{E}_{\text{ПЗ}}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{внеш}}$$

$$\vec{E}_{\text{ПЗ}}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}$$

Поле $\vec{E}_{\text{ПЗ}}(\vec{r}_i)$ есть сумма кулоновских полей, созданных в точке e каждым из движущихся электронов. Оно определяется их мгновенными положениями \vec{r}_i , которые как раз и должны находиться из (3.1). Поэтому задача сводится к решению системы из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = q_i \left(\vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{E}_{\text{ПЗ}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1}, \vec{r}_{i+1}, \dots, \vec{r}_N) + \vec{v}_i \times \vec{B}_{\text{внеш}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Решить её можно только численно с помощью компьютера, да и то при числе частиц N , не превышающем $10^6 + 10^7$. Поэтому используют другой подход. Считают, что поле $\vec{E}_{\text{ПЗ}}$ создаётся непрерывно распределённым зарядом с локальной плотностью

$$\rho_{\text{ПЗ}}(\vec{r}) = -e \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (3.2)$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ – так называемая δ - функция Дирака, отличная от нуля только в точке расположения j -го электрона $\vec{r} = \vec{r}_j$. Потенциал поля пространственного заряда удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_{\text{ПЗ}}(\vec{r}) = -\frac{\rho_{\text{ПЗ}}(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

$$\vec{E}_{\text{ПЗ}} = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{ПЗ}} \quad (3.4)$$

В большинстве случаев плотность пространственного заряда такова, что $\vec{E}_{\text{ПЗ}} \ll \vec{E}_{\text{внеш}}$. Тогда взаимным влиянием электронов друг на друга можно пренебречь. Все они будут двигаться одинаково, то есть по подобным траекториям, в полях $\vec{E} = \vec{E}_{\text{внеш}}$, $\vec{B} = \vec{B}_{\text{внеш}}$.

Разнообразие конфигураций полей в реальных приборах не слишком велико. Их можно свести к следующим базовым конфигурациям:

- постоянное однородное электрическое поле \vec{E} ;
- переменное однородное электрическое поле $\vec{E}(t)$;
- постоянное однородное магнитное поле \vec{B} ;
- скрещенные постоянные поля \vec{E} и \vec{B} ;
- постоянное неоднородное магнитное поле $\vec{B}(\vec{r})$.

Рассмотрим движение одиночного электрона в этих полях.

3.1. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.

Рассмотрим два частных, но часто встречающихся, случая.

3.1.1. НАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПОЛЮ.

Такая конфигурация обеспечивает отклонение электрона. Поле \vec{E} создаётся парой плоских электродов шириной L и бесконечной длины, к которым приложена разность потенциалов U_0 . Пусть расстояние между электродами равно d , тогда $\vec{E} = (0, -E_0, 0)$, $E_0 = \frac{U_0}{d}$ (рис. 3.2). Электрон влетает в поле в момент времени $t = 0$ в точке $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ со скоростью $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$, направленной по оси x .

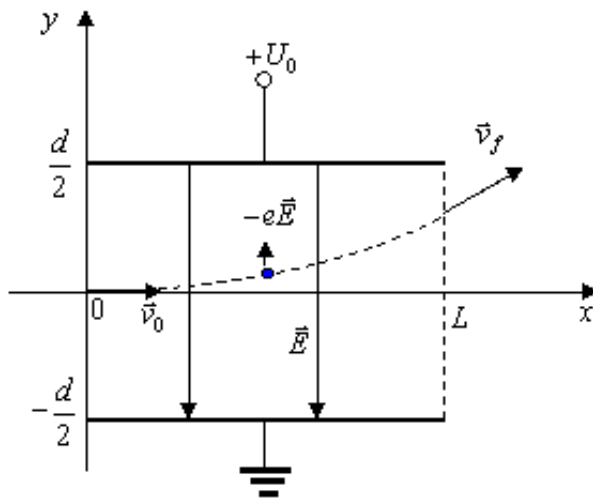


Рис. 3.2. Отклонение электрона полем, перпендикулярным скорости

Уравнение движения электрона $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}$ запишем в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -e(-E_0) = eE_0 \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Общие решения уравнений (3.5) находятся элементарно,

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 t + A_2 \\ y(t) &= \frac{eE_0}{2m} t^2 + B_1 t + B_2 \\ z(t) &= C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования получаем из начальных условий

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= A_2 & \dot{x}(0) = v_0 &= A_1 \\ y(0) = 0 &= B_2 & \dot{y}(0) = 0 &= B_1 \\ z(0) = 0 &= C_2 & \dot{z}(0) = 0 &= C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= \frac{eE_0}{2m} t^2 \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом,

Исключив время t , получим уравнение траектории

$$y(x) = \frac{eE_0}{2mv_0^2} x^2 \quad (3.7)$$

Это уравнение параболы.

3.1.2. НАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНА РАВНА НУЛЮ ИЛИ НАПРАВЛЕНА ПО ПОЛЮ

Такая конфигурация обеспечивает ускорение электрона при переносе его между двумя электродами (катодом и сеткой, двумя сетками, рис. 3.3).

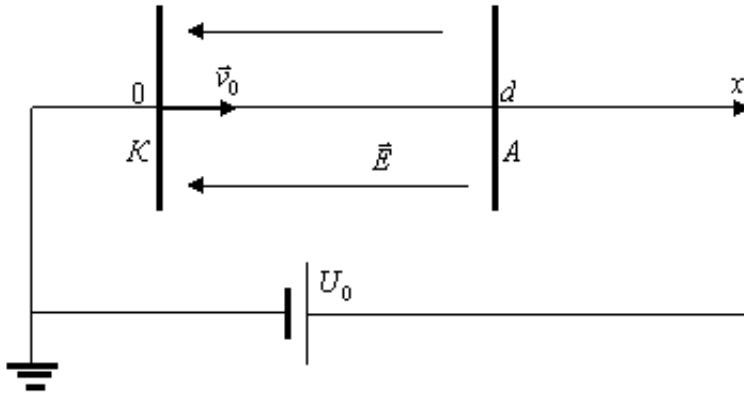


Рис. 3.3. Ускорение электрона продольным полем

Из уравнения движения $m\ddot{x} = eE_0$ и начальных условий $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ находим

$$x(t) = v_0(t - t_0) + \frac{eE_0}{2m}(t - t_0)^2 \quad (3.8)$$

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = v_0 + \frac{eE_0}{m}(t - t_0) \quad (3.9)$$

Полагая в (3.8) $x(t_0 + \tau) = d$, получим уравнение для времени пролёта τ электрона между электродами

$$\frac{eU_0}{2md}\tau^2 + v_0\tau - d = 0$$

$$\frac{eU_0}{2mv_0d}\tau^2 + \tau - \frac{d}{v_0} = 0$$

или

При $v_0 = 0$ из первого уравнения находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2md^2}{eU_0}} \quad (3.10)$$

При $v_0 \neq 0$ из второго уравнения имеем

$$\tau = \frac{mv_0d}{eU_0} \left(\sqrt{1 + 4\frac{eU_0}{2mv_0^2}} - 1 \right) \quad (3.11)$$

Ускоряющее напряжение U_0 во многих случаях таково, что $eU_0 \ll mv_0^2$, то есть приобретаемая электроном энергия намного меньше начальной кинетической энергии. Тогда, разлагая квадратный

корень в (3.11) по правилу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, получим

$$\tau = \frac{d}{v_0} \quad (3.11')$$

Время пролёта τ - важный параметр прибора, используемый при анализе его реакции на переменную разность потенциалов между электродами.

3.2. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПЕРЕМЕННОМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Пусть между плоскими электродами в предыдущей конфигурации приложено переменное напряжение $U(t) = U_0 \sin \omega t$. Начальную скорость v_0 в момент $t = t_0$ положим равной нулю. Дважды

интегрируя уравнение движения электрона $m\ddot{x} = e \frac{U_0}{d} \sin \omega t$, находим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{eU_0}{md\omega} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t) \\ x(t) &= \frac{eU_0}{md\omega^2} [(\omega t - \omega t_0) \cos \omega t_0 - \sin \omega t + \sin \omega t_0] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Полагая в (3.12) $t = t_0 + \tau$, $x(t) = d$, получим уравнение для времени пролёта,

$$\frac{md^2\omega^2}{eU_0} = (\omega\tau - \sin \omega\tau) \cos \omega t_0 + (1 - \cos \omega\tau) \sin \omega t_0 \quad (3.13)$$

В (3.13) время пролёта входит только в виде произведения

$$\vartheta = \omega\tau = 2\pi \frac{\tau}{T} \quad (3.14)$$

где T - период изменения напряжения между электродами. Безразмерный параметр ϑ называется *углом пролёта* электрона. Он показывает изменение фазы напряжения за время движения электрона между электродами. Если фаза изменяется на $\vartheta = \pi$, то поле меняет направление на противоположное, например, с ускоряющего на тормозящее. Линейная частота при этом равна

$$f_{\text{кр.}} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\tau} \quad (3.15)$$

Для её вычисления надо в (3.15) подставить τ , найденное из уравнения (3.13). Решить это трансцендентное уравнение можно только численно. Поэтому сделаем грубую оценку, подставив τ из (3.10),

$$f_{\text{кр.}} = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{eU_0}{2m}}$$

Примем $d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $U_0 = 10 \text{ В}$, тогда

$$f_{\text{кр.}} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-20} \cdot 10}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}}} = \frac{10^{-9}}{3\sqrt{2}} \text{ Гц} \approx 250 \text{ МГц}$$

Это граница между ВЧ и СВЧ диапазонами. При $f \leq f_{\text{кр.}}$ $\vartheta \leq \pi$, и изменение фазы напряжения не сказывается на движении электронов. Они движутся так, как в постоянном поле с мгновенным значением напряжённости. Это область классической низкочастотной электроники, которую мы и будем изучать. Если же $f > f_{\text{кр.}}$, то $\vartheta > \pi$. Движение электронов очень сильно зависит от соотношения между фазой напряжения и моментом начала движения t_0 . Это уже область СВЧ электроники, которой мы не коснёмся.

Принципиальные различия реакции прибора на низкие и сверхвысокие частоты можно проиллюстрировать графически, если построить по формулам (3.8) и (3.12) временные зависимости $x(t, t_0)$ положения электронов, влетающих в поле в различные моменты t_0 . Эти графики называются *пространственно-временными диаграммами*.

На рис. 3.4 показаны пространственно-временные диаграммы движения электронов под действием постоянного напряжения.

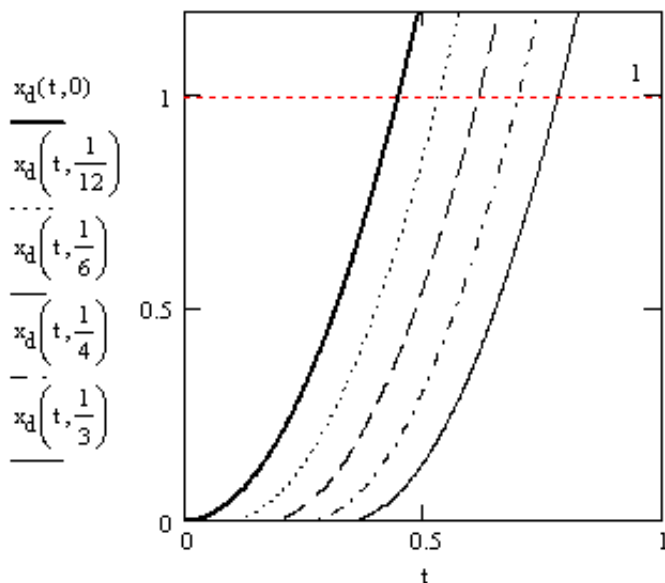


Рис. 3.4. Пространственно-временные диаграммы движения электронов $x(t, t_0)$ при постоянном напряжении.

Видно, что все электроны, не зависимо от времени начала движения t_0 , достигают второго электрода.

Иначе выглядят пространственно-временные диаграммы движения электронов под действием переменного напряжения (рис.3.5). Время пролёта τ возрастает по сравнению с предыдущим случаем даже при синфазном с полем начале движения. При $t_0 > 0$ τ возрастает ещё больше. Некоторые электроны достигают второго электрода после нескольких колебаний. Другие вообще не достигают его, а возвращаются назад.

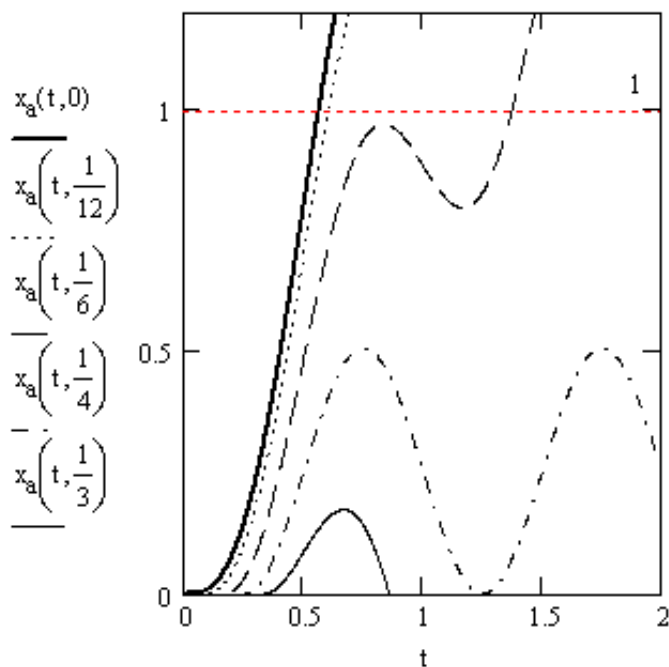


Рис. 3.5. Пространственно-временные диаграммы движения электронов $x(t, t_0)$ при переменном напряжении $U(t)$.

$$t_0 = 0, \frac{T}{12}, \frac{T}{6}, \frac{T}{4}, \frac{T}{3}, T - \text{период изменения } U(t).$$

Таким образом, движение электрона в сверхвысокочастотном электрическом поле существенно отличается от его движения в медленно меняющемся поле.

3.3. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ТОКОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

На любом участке замкнутой цепи, включающей электронный прибор, ток в данный момент одинаков по величине и направлению. Но на разных участках физическая природа тока может быть, и, как правило, является различной. Рассмотрим простейшую замкнутую цепь из вакуумного диода и источника питания. Диод есть прибор с двумя электродами – катодом и анодом. Катод эмиттирует электроны в рабочий объём. На анод подаётся положительный потенциал, создающий ускоряющее поле и обеспечивающий собирание электронов (рис. 3.6).

С поверхности катода истекает *ток эмиссии*. Он определяется главным образом внутренними процессами в катоде. Энергия электронов, с которой они покидают катод, намного меньше eU_a , поэтому её можно полагать равной нулю. Тогда все эмиттированные электроны начинают движение в рабочем объёме с нулевой начальной скоростью.

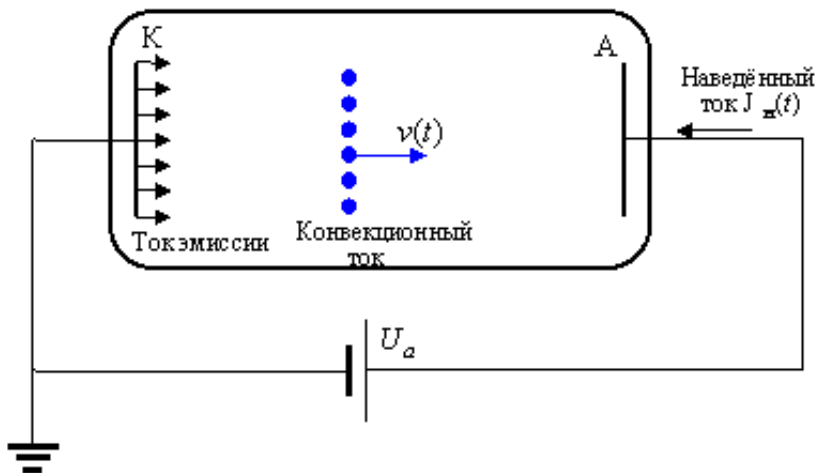


Рис. 3.6 Токи в электронном приборе

Под действием поля $E = \frac{U_a}{d}$ электроны приобретают к моменту времени t скорость

$$v(t) = \frac{eE}{m}t = \frac{eU_a}{md}t$$

Они образуют так называемый *конвекционный ток* или *ток переноса*. Конвекционный ток обусловлен перемещением носителей заряда на макроскопические расстояния. Плотность конвекционного тока \vec{j}_k равна произведению объёмной плотности заряда ρ на мгновенную скорость электронов \vec{v} ,

$$\vec{j}_k = \rho \vec{v}$$

Одиночный электрон создаёт конвекционный ток

$$\vec{j}_k = -e\vec{v}\delta(x - x_1(t))$$

Ток во внешней цепи прибора, например, в анодном выводе, не является конвекционным. Он обусловлен не макроскопическим переносом электронов, а *поляризацией электродов* электронами, движущимися в рабочем объёме. Рассмотрим слой электронов толщиной dx в сечении x рабочего объёма (рис. 3.7).

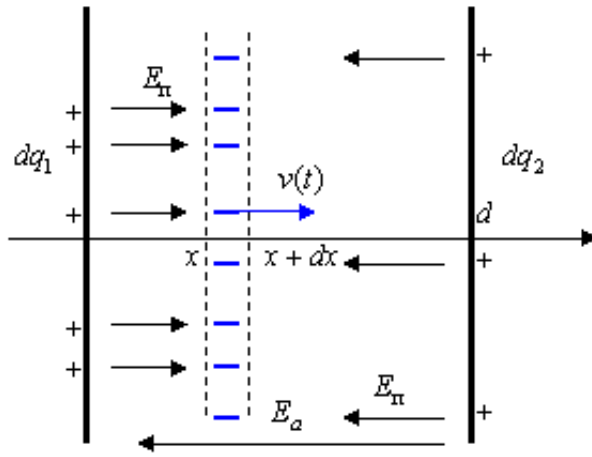


Рис. 3.7. Поляризация электродов конвекционным током

На единицу площади он содержит заряд $dq = S\rho(x)dx = -Sen(x)dx$. Этот заряд создаёт на катоде и аноде поляризационные заряды dq_1 и dq_2 такие, что

$$dq + dq_1 + dq_2 = 0 \quad (3.16)$$

Поляризация ослабляет поле у катода и усиливает его у анода. Если в отсутствие заряда dq на катоде и аноде напряжением U_a создаются заряды $\mp Q_0 = \mp \epsilon_0 E_a$ на единицу площади, то при наличии заряда dq плотность заряда на катоде равна $-Q_0 + dq_1$, а на аноде $+Q_0 + dq_2$. Перераспределение поля происходит таким образом, что работа по перемещению единичного заряда от катода к аноду остаётся равной U_a , то есть

$$E_1 x + E_2 (d - x) = U_a = E_a d \quad (3.17)$$

Подставив поля у катода $E_1 = E_a - \frac{dq_1}{\epsilon_0}$ и у анода $E_2 = E_a + \frac{dq_2}{\epsilon_0}$ в (3.17), получим связь между dq_1 и dq_2 ,

$$-x dq_1 + (d - x) dq_2 = 0 \quad (3.18)$$

Из (3.16) и (3.18) находим выражения для поляризационных зарядов

$$dq_1 = \left(1 - \frac{x}{d}\right) dq, \quad dq_2 = \frac{x}{d} dq \quad (3.19)$$

По мере перемещения заряда dq , создающего конвекционный ток, заряд dq_1 на катоде убывает, а заряд dq_2 на аноде увеличивается. Такое изменение поляризационных зарядов происходит за счёт смещения многих электронов в проводниках на небольшие по атомным масштабам расстояния. Это смещение, восстанавливающее электронейтральность, называется *максвелловской релаксацией*. Ток во внешней цепи равен скорости изменения *полного* заряда на одном из электродов. Полный заряд на

аноде равен $Q_2 = Q_0 + \frac{x}{d} dq$, а ток в анодном выводе

$$J_{\text{полн.}} = \frac{dQ_2}{dt} = \frac{dQ_0}{dt} + \frac{1}{d} \frac{dx}{dt} dq = \frac{dQ_0}{dt} + \frac{v}{d} dq \quad (3.20)$$

Он состоит из двух компонент. Первая компонента $J_c = \frac{dQ_0}{dt}$ есть ток перезарядки ёмкости анод-катод. При $U_a = \text{const}$ $J_c = 0$. Вторая компонента

$$J_{\text{н}} = \frac{v(t)}{d} dq \quad (3.21)$$

есть так называемый *наведённый ток*, индуцированный в выводе зарядом dq . Наведённый ток, созданный всеми зарядами из рабочего объёма, равен

$$J_{\text{н}} = \int_0^d \frac{v}{d} dq(x) = \frac{S}{d} \int_0^d v(x) \rho(x) dx = \frac{S}{d} \int_0^d j_{\text{конв.}}(x) dx$$

Наведённый ток в пересчёте на единицу площади конвекционного потока $j_{\text{н}}$ равен среднему значению плотности конвекционного тока в рабочем объёме,

$$j_{\text{н}} = \frac{1}{d} \int_0^d j_{\text{конв.}}(x) dx$$

Конвекционный ток в любом сечении рабочего объёма должен оставаться одинаковым по величине и равным току эмиссии, $j_{\text{конв.}}(x) = j_{\text{э}} = \text{const}$. Поэтому

$$j_{\text{н}} = j_{\text{конв.}} \cdot \frac{1}{d} \int_0^d dx = j_{\text{конв.}} \quad (3.22)$$

Таким образом, *постоянный конвекционный ток индуцирует во внешней цепи равный себе наведённый ток*. Это обычная ситуация в «классической» низкочастотной электронике.

Пусть теперь переменный конвекционный ток создаётся потоком электронов переменной плотности $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1 \sin \omega(t - t_0)$, влетающих в рабочий объём с постоянной скоростью v_0 . По определению,

$$j_{\text{конв.}} = \rho(t) S v_0 = J_0 + J_1 \sin \omega(t - t_0)$$

$$J_0 = \rho_0 S v_0, \quad J_1 = \rho_1 S v_0$$

Заряд $dq = j_{\text{конв.}} dx$ в слое $dx = v_0 dt$ индуцирует наведённый ток

$$dJ_{\text{н}} = \frac{v_0}{d} dq = j_{\text{конв.}} \frac{dx}{d}$$

Выбирая начало координат посередине между катодом и анодом, суммарный наведённый ток запишем в виде

$$J_{\text{н}} = \int_{-d/2}^{d/2} dJ_{\text{н}}(x) = \int_{-d/2}^{d/2} j_{\text{конв.}} \frac{dx}{d} =$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} \left[J_0 + J_1 \sin \left(\omega t_0 - \frac{\omega x}{v_0} \right) \right] \frac{dx}{d} =$$

$$= J_0 + J_1 \frac{v_0}{\omega d} \left[\cos \left(\omega t_0 - \frac{\omega d}{2v_0} \right) - \cos \left(\omega t_0 + \frac{\omega d}{2v_0} \right) \right] =$$

$$= J_0 + J_1 \sin \omega t_0 \frac{\sin \frac{\omega d}{2v_0}}{\frac{\omega d}{2v_0}} = J_0 + J_1 M \sin \omega t_0 \quad (3.23)$$

$$M = \frac{\sin \frac{\omega d}{2v_0}}{\frac{\omega d}{2v_0}} = \frac{\sin \vartheta/2}{\vartheta/2}$$

Параметр $\frac{\sin \frac{\omega d}{2v_0}}{\frac{\omega d}{2v_0}}$ называется коэффициентом взаимодействия электронного потока с полем. При значении угла пролёта $\vartheta = 2\pi$ $M = 0$, а наведённый ток вовсе не содержит переменной составляющей, хотя в конвекционном токе она присутствует. Но при $\vartheta \rightarrow 0$ $M \rightarrow 1$, и наведённый ток воспроизводит конвекционный ток. Этот пример ещё раз подчёркивает отличие низкочастотной электроники от электроники сверхвысоких частот.

Таким образом, полный ток, протекающий во внешней цепи любого электронного прибора, имеет две основные составляющие:

1. Наведённый ток, обусловленный движением зарядов в междуэлектродном пространстве;
2. Ёмкостной ток, обусловленный перезарядкой междуэлектродной ёмкости

Только при $\omega \rightarrow 0$ или $\vartheta \rightarrow 0$ ток во внешней цепи точно равен конвекционному току. Поэтому в низкочастотной электронике обычно не делают различия между конвекционным и наведённым током.

3.4 ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Однородное магнитное поле всюду имеет одинаковую величину и направление. Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена по полю. Тогда вектор \vec{B} имеет только одну компоненту, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Пусть электрон начинает движение в момент $t = 0$ из начала координат со скоростью

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Уравнение (3.1) запишем в проекциях на оси координат,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e(\vec{x} \times \vec{B})_x = -e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}_x = -eBv_y \quad (3.24')$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -e(\vec{x} \times \vec{B})_y = -e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}_y = eBv_x \quad (3.24'')$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -e(\vec{x} \times \vec{B})_z = -e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}_z = 0 \quad (3.24''')$$

Из (3.24''') сразу следует, что вдоль оси z электрон движется равномерно с начальной скоростью v_{0z} ,

$$z(t) = v_{0z}t \quad (3.25)$$

Уравнения (3.24') и (3.24'') можно проинтегрировать по t ,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB}{m}y + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{eB}{m}x + C_2$$

Величина $\Omega_B = \frac{eB}{m}$ имеет размерность обратного времени. Она называется *ларморовской* или *циклотронной частотой*. Первым термином отмечен вклад в науку английского физика *Джозефа Лармора* (1857 – 1942). Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий,

$$v_{0x} = -\Omega_B y_0 + C_1 = C_1, \quad v_{0y} = \Omega_B x_0 + C_2 = C_2$$

В системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\Omega_B y + v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} &= \Omega_B x + v_{0y} \end{aligned}$$

естественно перейти к искомым функциям $\xi(t) = x(t) + \frac{v_{0y}}{\Omega_B}$ и $\eta(t) = y(t) - \frac{v_{0x}}{\Omega_B}$: $\frac{d\xi}{dt} = -\Omega_B \eta$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Omega_B \xi$$

Исключив η из первого уравнения, получим уравнение гармонических колебаний, решение которого имеет вид $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\Omega_B^2 \xi$,

$$\xi(t) = A \cos \Omega_B t + B \sin \Omega_B t$$

Постоянные A и B снова найдём из начальных условий

$$\xi(0) = \frac{v_{0y}}{\Omega_B} = A, \quad \frac{d\xi}{dt}(0) = v_{0x} = \Omega_B B$$

Таким образом,

$$\xi(t) = \frac{v_{0y}}{\Omega_B} \cos \Omega_B t + \frac{v_{0x}}{\Omega_B} \sin \Omega_B t \quad (3.26')$$

$\eta(t)$ находим интегрированием,

$$\eta(t) = \Omega_B \int \xi(t) dt = \frac{v_{0y}}{\Omega_B} \sin \Omega_B t - \frac{v_{0x}}{\Omega_B} \cos \Omega_B t + C$$

$$\eta(0) = -\frac{v_{0x}}{\Omega_B} + C = -\frac{v_{0x}}{\Omega_B}, \Rightarrow, C = 0$$

$$\eta(t) = \frac{v_{0y}}{\Omega_B} \sin \Omega_B t - \frac{v_{0x}}{\Omega_B} \cos \Omega_B t \quad (3.26'')$$

Соотношения (3.26'), (3.26'') задают траекторию электрона в параметрическом виде. Удобно исключить из них время t . Для этого возведём оба соотношения в квадрат и сложим их,

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\Omega_B^2} = \frac{v_{0\perp}^2}{\Omega_B^2}$$

$$\left(x + \frac{v_{0y}}{\Omega_B}\right)^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\Omega_B}\right)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\Omega_B^2}$$

или
Получили уравнение проекции траектории на плоскость ХУ. Она представляет собой окружность с ларморовским радиусом

$$R_L = \frac{v_{0\perp}}{\Omega_B} = \frac{v_{0\perp} m}{eB} \quad (3.28)$$

с центром в точке $\left(-\frac{v_{0y}}{\Omega_B}, \frac{v_{0x}}{\Omega_B}\right)$.

Таким образом, ларморовская частота есть частота вращения электрона вокруг силовой линии магнитного поля. Она не зависит от начальной скорости электрона. Радиус же окружности пропорционален компоненте скорости, перпендикулярной полю. Если одновременно в начале координат влетают в поле электроны с разными $v_{0\perp}$, то при $v_{0x} = 0$ они одновременно будут возвращаться в ту же точку после 1, 2, 3, ... оборотов (рис.3.8)

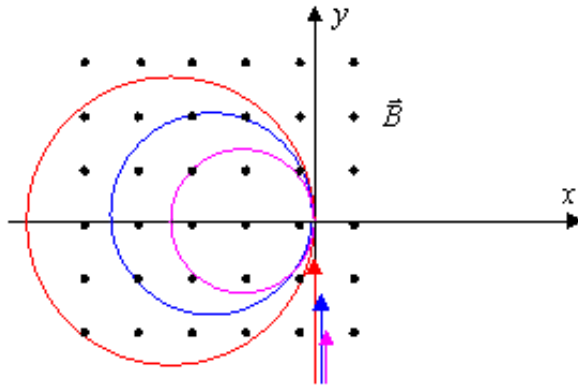
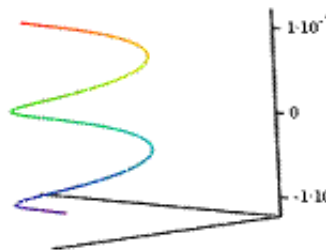


Рис. 3.8. Траектории электронов при $v_{0x} = 0$.

При $v_{0x} \neq 0$ траектория электрона будет винтовой линией, навитой на магнитную силовую линию (рис.3.9).



(x, y, z)

Рис. 3.9. Траектория электрона при $v_{0x} \neq 0$

3.5. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

Пусть поле \vec{E} направлено по оси z , то есть $\vec{E} = (0, 0, E)$, а поле \vec{B} - под произвольным углом к \vec{E} . Электрон начинает движение из начала координат со скоростью $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ (рис. 3.10).

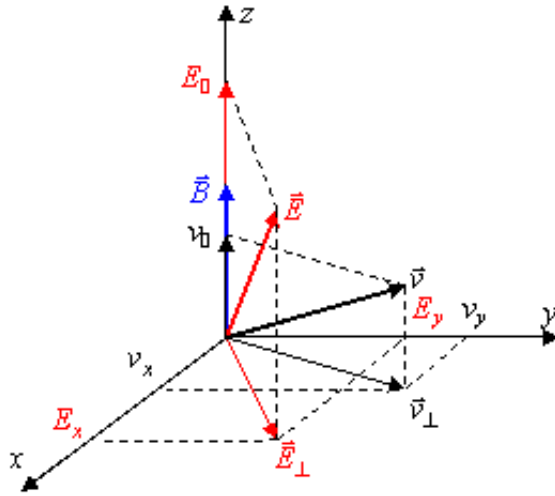


Рис. 3.10. Скрещенные поля \vec{E} и \vec{B}

Аналогично предыдущему пункту запишем уравнение движения

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

в проекциях на оси координат

$$\ddot{x} = -\frac{eE_x}{m} - \frac{eB}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{eE_y}{m} + \frac{eB}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\frac{eE_{\parallel}}{m}$$

Из последнего уравнения следует закон равномерно ускоренного движения электрона параллельно магнитному полю

$$z(t) = -\frac{eE_{\parallel}}{2m}t^2 + v_{0z}t \quad (3.29)$$

Через E_{\parallel} и v_{0z} обозначены z -компоненты электрического поля и начальной скорости соответственно.

Первое уравнение продифференцируем один раз и исключим из него \ddot{y} с помощью второго уравнения

$$\ddot{x} = -\frac{eE_x}{m} - \Omega_B \dot{y} = -\Omega_B^2 x + \frac{eE_y}{m}\Omega_B - \frac{eE_x}{m}$$

Интегрируя полученное уравнение,

$$\dot{x} = -\Omega_B^2 x + \frac{eE_y}{m}\Omega_B t + C$$

и исключая постоянную C с помощью начальных условий,

$$C = \dot{x}(0) + \Omega_B^2 x(0) = -\frac{eE_x}{m} - \Omega_B v_{0y},$$

$$\ddot{x} + \Omega_B^2 \left(x - \frac{E_y}{B}t + \frac{E_x}{B\Omega_B} + \frac{v_{0y}}{\Omega_B} \right) = 0 \quad (3.30)$$

получим

Аналогично для $y(t)$ получается уравнение

$$\ddot{y} + \Omega_B^2 \left(y + \frac{E_x}{B}t + \frac{E_y}{B\Omega_B} - \frac{v_{0x}}{\Omega_B} \right) = 0 \quad (3.30^*)$$

Из (3.30) немедленно следует, что выражения в скобках гармонически зависят от времени,

$$\begin{aligned} x(t) - \frac{E_y}{B}t + \frac{E_x}{B\Omega_B} + \frac{v_{0y}}{\Omega_B} &= C_1 \cos \Omega_B t + C_2 \sin \Omega_B t \\ y(t) + \frac{E_x}{B}t + \frac{E_y}{B\Omega_B} - \frac{v_{0x}}{\Omega_B} &= C_3 \cos \Omega_B t + C_4 \sin \Omega_B t \end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.31) есть параметрическое уравнение проекции траектории электрона на плоскость $\mathcal{X}\mathcal{Y}$. Постоянные $C_1 \div C_4$ определим из начальных условий:

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{B\Omega_B} + \frac{v_{0y}}{\Omega_B} &= C_1 = C_4 \\ \frac{E_y}{B\Omega_B} - \frac{v_{0x}}{\Omega_B} &= C_3 = -C_2 \end{aligned}$$

Возведя уравнения (3.31) в квадрат и сложив их, получим уравнение траектории в виде

$$(x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 = \left(\frac{v_{0y}}{\Omega_B} + \frac{E_x}{B\Omega_B} \right)^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\Omega_B} - \frac{E_y}{B\Omega_B} \right)^2 \quad (3.32)$$

где

$$x_c(t) = \frac{E_y}{B}t - \frac{1}{\Omega_B} \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right) \quad (3.33)$$

$$y_c(t) = -\frac{E_x}{B}t + \frac{1}{\Omega_B} \left(v_{0x} - \frac{E_y}{B} \right) \quad (3.34)$$

Согласно уравнению (3.32), в плоскости $\mathcal{X}\mathcal{Y}$, перпендикулярной магнитному полю, электрон движется по окружности с ларморовским радиусом

$$R_L = \frac{1}{\Omega_B} \sqrt{\left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right)^2 + \left(v_{0x} - \frac{E_y}{B} \right)^2}$$

При этом центр окружности перемещается согласно уравнениям $x = x_c(t)$, $y = y_c(t)$. Скорость этого движения

$$v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2} = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} = \sqrt{\frac{E_y^2}{B^2} + \frac{E_x^2}{B^2}} = \frac{E_{\perp}}{B}$$

направлена перпендикулярно векторам \vec{E} и \vec{B} , поскольку $\vec{v}_c \cdot \vec{E} = 0$. Движущийся центр ларморовской окружности называется *ведущим центром*, а само его движение – *поперечным дрейфом*.

Таким образом, движение электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях можно представить в виде суммы трёх движений – ускоренного движения параллельно магнитному полю, вращения по ларморовской окружности и дрейфа со скоростью

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.35)$$

Проекция траектории на плоскость $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ показана на рис. 2.4.11 для случая $e v_{\perp} B < e E_{\perp}$ (магнитная сила слабее электрической), и на рис. 3.12 – для случая $e v_{\perp} B > e E_{\perp}$ (магнитная сила превосходит электрическую).

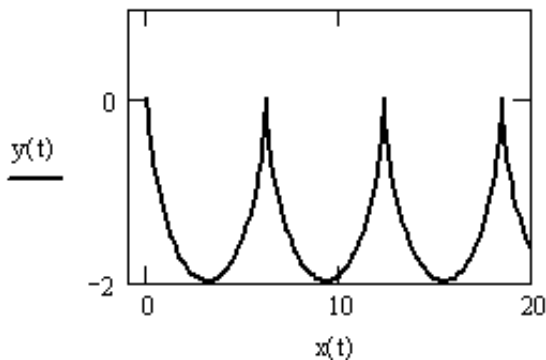


Рис. 3.11. Поперечный дрейф электрона при $\frac{v_{\perp} B}{E_{\perp}} = \frac{1}{5}$.

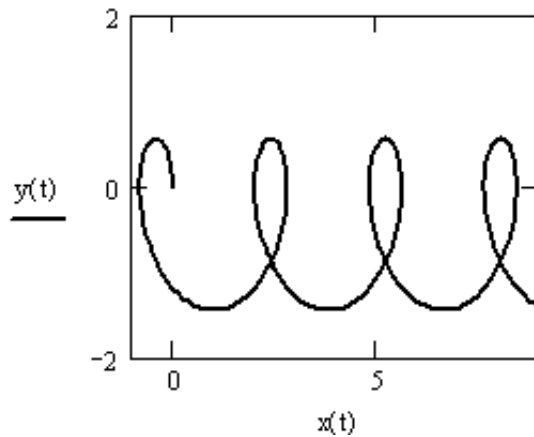


Рис. 3.12. Поперечный дрейф электрона при $\frac{v_{\perp} B}{E_{\perp}} = 2$.

Формулу (3.35) можно обобщить на случай, когда на электрон вместо электрического поля действует *однородная сила любой природы*, например, гравитационная, если подставить в неё

определение электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$,

$$\vec{v}_c = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.36)$$

Из (3.36) следует, что если на частицы с противоположными зарядами сила \vec{F} действует в одном направлении, то дрейфуют они в противоположных направлениях, тогда как в электрическом поле поперечный дрейф и электронов, и ионов происходит в одном направлении.

3.6. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Движение электрона в неоднородном магнитном поле описывается уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.37)$$

При произвольной зависимости магнитной индукции от координат $\vec{B}(\vec{r})$ получить его точное решение в замкнутом виде нельзя. Для конкретной конфигурации поля траектория электрона может быть найдена численными методами. Однако они не позволяют проанализировать решение качественно и дать наглядную интерпретацию изменения траектории при изменении поля. Поэтому физиками были разработаны приближённые методы решения уравнения (3.37), основанные на его упрощении.

При описании движения электрона в сильном неоднородном магнитном поле используют следующий подход. По аналогии с движением в скрещенных полях считают, что оно состоит из суммы движения $\vec{r}_L(t)$ по ларморовской окружности радиуса R_L вокруг силовой линии и перемещения центра этой окружности $\vec{r}_c(t)$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_L(t) + \vec{r}_c(t) \quad (3.38)$$

Рассмотрим два вида неоднородных магнитных полей.

1. *Силовые линии поля суть прямые, но величина поля (плотность силовых линий) изменяется в пространстве.* В этом случае градиент поля $\vec{\nabla}B$ всюду перпендикулярен \vec{B} . Если ларморовский радиус столь мал, что поле на расстоянии R_L изменяется слабо, то есть

$$R_L \ll \frac{B}{|\vec{\nabla}B|}$$

то $\vec{B}(\vec{r})$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Тогда уравнение (3.37) примет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{v} \times \vec{B}_0 - e\vec{v} \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Второе слагаемое в правой части после усреднения по промежутку времени $\Delta t \propto \Omega_B$ может быть приведено к виду $-M \vec{\nabla} B$, где M есть магнитный момент кругового тока J площадью S , созданного вращающимся электроном. По определению,

$$M = J S = \frac{e}{T} \pi R_L^2 = e \frac{\Omega_B}{2\pi} \pi \frac{v_\perp^2}{\Omega_B^2} = \frac{m v_\perp^2}{2B}$$

Таким образом, в среднем градиент магнитного поля действует как однородная сила $\vec{F} = -M \vec{\nabla} B$. Следовательно, он вызывает *градиентный магнитный дрейф* со скоростью

$$\vec{v}_c = -\frac{M}{e} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} \quad (3.39)$$

Физически градиентный дрейф обусловлен тем, что ларморовский радиус обратно пропорционален величине локального магнитного поля B . Траектория электрона подобна показанной на рис. 3.12.

2. *Градиент магнитного поля параллелен полю.* В этом случае силовые линии искривлены. Их возможная топология показана на рис.3.13. Она называется «магнитной бутылкой».

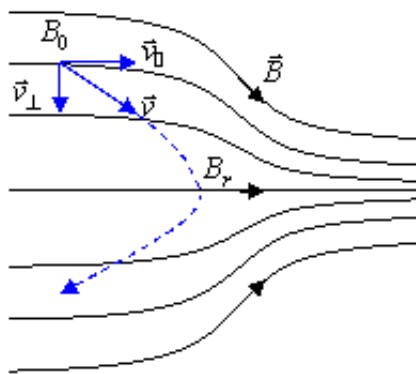


Рис.3.13. «Магнитная бутылка»

На электрон, движущийся в направлении горлышка бутылки и обладающий ненулевой перпендикулярной компонентой скорости \vec{v}_\perp , действует тормозящая сила $F_\parallel = M \frac{\partial B_z}{\partial z}$. Если градиент достаточно велик, то она может затормозить электрон вплоть до исчезновения параллельной компоненты скорости \vec{v}_\parallel , а затем ускорить его в противоположном направлении. Электрон как бы отражается от области с большей плотностью силовых линий. Поэтому горлышко бутылки называют магнитным зеркалом. Отражение имеет место, если поля в точке начала движения B_0 и в точке отражения B_r связаны соотношением

$$\frac{B_r}{B_0} = 1 + \frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} \quad (3.40)$$