

**Intro.** Данный документ создан на базе методических пособий кафедры электродинамики радиофизического факультета ННГУ. Свел в один документ и добавил содержание Сарафанов Ф.Г., 430 группа радиофака, 2019 год.

Содержание кликабельно, при нажатии на раздел произойдет переход к нужной странице.

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Введение</b>	<b>5</b>
Области приложения методов коротковолновой асимптотики . . . . .	8
Выvod уравнений Гельмгольца из уравнений Максвелла . . . . .	9
Выvod уравнений Гельмгольца из уравнений механики сплошных сред . . . . .	11
Приложение к введению. Уравнение Гельмгольца в вязкой жидкости . . . . .	19
<b>Геометрическая оптика</b>	<b>22</b>
<b>Уравнения геометрической оптики</b>	<b>22</b>
Выvod уравнений г.о. из уравнения Гельмгольца . . . . .	23
Выvod уравнений г.о. из уравнений Максвелла . . . . .	26
<b>Общие свойства и некоторые методы решения уравнения эйконала</b>	<b>29</b>
Аналогия эйконала и действия в механике . . . . .	29
Физический смысл эйконала и связанных с ним понятий . . . . .	30
Дифференциальные уравнения второго порядка для лучей. Аналогия уравнений г.о. и уравнений движения материальной точки . . . . .	35
<b>Уравнение переноса и закономерности изменения интенсивности в г.о.</b>	<b>36</b>
Интенсивность (света, поля волны) и закон сохранения энергии . . . . .	36
Законы изменения интенсивности в г.о. . . . .	38
Изменение поляризации электромагнитного поля вдоль лучей. . . . .	43
Геометрическая интерпретация уравнения для поляризации. . . . .	43
Электропроводность . . . . .	44
<b>Отражение и преломление волн на границе раздела сред</b>	<b>46</b>
Геометрическая оптика слоисто–неоднородной среды . . . . .	48
Сферически-слоистая среда . . . . .	48
Плоскослоистая среда . . . . .	51
Аксиально-симметричная среда . . . . .	55
Линзоподобные (или фокусирующие) среды . . . . .	59
Параксиальные лучи в аксиально-симметричных средах . . . . .	61

<b>Матричный метод описания лучей в центрированных линиях передачи силовых полей</b>	<b>63</b>
Математические основы матричного метода описания распространения параксиальных лучей . . . . .	63
Матрицы преобразований координат луча . . . . .	64
На участке однородной среды . . . . .	65
На плоской границе раздела . . . . .	66
В многослойной среде . . . . .	66
Матрица преобразования координат луча на плоской наклонной границе раздела сред . . . . .	66
На сферической границе раздела сред . . . . .	68
В толстой линзе . . . . .	68
В тонкой линзе . . . . .	69
Матрица преобразования Фурье . . . . .	71
Матрица преобразования масштаба . . . . .	72
Свойства матриц преобразования . . . . .	73
Сопоставление матриц и оптических систем . . . . .	74
<b>Цилиндрические линии передачи коротковолновых силовых полей (периодические центрированные системы)</b>	<b>76</b>
<b>Матричный метод описания лучей в нецентрированных системах передачи силовых полей</b>	<b>80</b>
Оператор смещения . . . . .	80
Эквивалентность центрированных и нецентрированных систем . . . . .	81
Устойчивость разъюстированных периодических систем . . . . .	81
<b>Квазиоптика</b>	<b>83</b>
<b>Элементы теории дифракции скалярных и векторных полей</b>	<b>83</b>
Дифракция и рассеяние . . . . .	83
Принцип Гюйгенса . . . . .	84
Принцип Гюйгенса–Френеля . . . . .	85
Принцип Гюйгенса–Кирхгофа . . . . .	86
Электродинамический принцип Гюйгенса . . . . .	89
Модификации электродинамического принципа Гюйгенса для задач дифракции на плоских объектах . . . . .	90
Приближённые методы решения дифракционных задач . . . . .	91
Приближение Кирхгофа . . . . .	92
Метод физической оптики . . . . .	93
<b>Основные закономерности распространения дифрагированных коротковолновых полей</b>	<b>93</b>
Диаграмма направленности простейшего излучателя коротко- волнового диапазона	93

Параксиальные волновые пучки гауссовой формы . . . . .	95
Угол дифракционной расходимости и дифракционная длина . . . . .	97
Параксиальное приближение теории дифракции скалярного поля на отверстии в плоском экране. Дифракционная формула Френеля . . . . .	98
<b>Дифференциальный подход к квазиоптическому описанию распространения коротковолновых полей</b>	<b>101</b>
Параболическое (или диффузионное) уравнение для лучевой амплитуды в однородной среде . . . . .	101
Соотношения между компонентами векторной комплексной амплитуды параксиального пучка электромагнитного поля . . . . .	102
Свойства параболического уравнения и уравнения Гельмгольца. Критерии применимости квазиоптического описания . . . . .	103
Сопоставление свойств функций Грина . . . . .	103
Изочастотные поверхности дисперсионных уравнений . . . . .	104
<b>Спектральный метод описания распространения параксиальных волновых пучков</b>	<b>105</b>
<b>Аналогия лучевого и волнового описаний полей в приближении параксиальной оптики</b>	<b>107</b>
Оператор преобразования амплитуды поля параксиального волнового пучка в свободном пространстве . . . . .	107
Преобразование линзы . . . . .	107
Операторы обратного преобразования поля параксиального пучка в свободном пространстве и тонкой линзой . . . . .	109
Оператор Фурье-преобразования поля . . . . .	109
<b>Распространение параксиальных волновых пучков гауссовой формы в однородном свободном пространстве</b>	<b>110</b>
Гауссов пучок с плоским фазовым фронтом . . . . .	111
Сфокусированный гауссов пучок . . . . .	113
Дефокусированный гауссов пучок . . . . .	115
<b>Волновые пучки в недиафрагмированных открытых цилиндрических линиях передачи силовых полей</b>	<b>116</b>
Интегральное уравнение для лучевой амплитуды поля моды открытой линии передачи . . . . .	117
Решения одномерного интегрального уравнения Фредгольма . . . . .	118
Структура поля моды открытой линии передачи . . . . .	119
<b>Сопоставление методов расчёта и свойств <math>TEM_{mn}</math>-мод и собственных лучей в открытых цилиндрических линиях передачи</b>	<b>122</b>
Сопоставление условий существования финитных траекторий лучей и энергетически реализуемых $mn$ -мод в открытых цилиндрических линиях передачи .	122

Сопоставление свойств геометрооптических и квазиоптических операторов преобразования характеристик распространяющегося поля . . . . .	123
Сопоставление характеристик квазиоптических $TEM_{mn}$ -мод и геометрооптических собственных лучей как сравнение свойств собственных волн открытых цилиндрических линий передачи на разных уровнях описания распространения поля в среде . . . . .	125
<b>Обобщения и приложения квазиоптической теории <math>TEM_{mn}</math>-мод открытых цилиндрических линий передачи</b>	<b>129</b>
Открытая линия передачи из эквидистантно расположенных двухфокусных корректоров фазы . . . . .	129
Открытая линия передачи из эквидистантно расположенных двух типов разнофокусных линз . . . . .	129
Открытая линия передачи в виде двойной периодической последовательности одинаковых линз . . . . .	132
Открытые линии передачи с потерями . . . . .	135
Диафрагмированные открытые линии передач . . . . .	136
Открытые резонаторы . . . . .	137
Вырождение мод . . . . .	139

## Введение

В настоящем курсе рассматриваются некоторые **асимптотические методы теоретического описания распространения волн** разной физической природы **в линейных неоднородных** (в общем случае) **средах**. Вначале рассмотрим определения основных понятий, на которых базируется содержание курса.

а) **Волна.** По Дж. Уизему [ 3 ] “не существует единого строгого определения волны. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее пользоваться интуитивным представлением о волне как *о любом различимом сигнале, передающемся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью*. Такой сигнал может быть возмущением некоторой физической величины **u** любого вида ... при условии, что это возмущение четко видимо и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом оставаться различимым”.

Итак, **волна** - это убегающее (перемещающееся) различимое возмущение физической величины **u**.

б) **Среда** - это **распределенная система**, состоящая из **бесконечно большого числа** связанных элементарных звеньев (ячеек или систем) и потому обладающая бесконечно большим числом степеней свободы (собственных нормальных колебаний). **Распределенная система** - это, как правило, система неограниченного объема, либо система ограниченного объема с бесконечно большим числом степеней свободы. **Распределенная система** может состоять из совокупности однородных, но различных по своим свойствам участков. Такая совокупность локально однородных в пространстве и во времени участков образует **неоднородную и нестационарную среду**. Волны физической величины **u** в **неоднородной и нестационарной среде** описываются одним дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных типа

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} + C = 0 \quad (1)$$

или системой из нескольких подобных дифференциальных, в которых коэффициенты  $A(x, y, z, t, u)$ ,  $B_\alpha(x, y, z, t, u)$ ,  $C(x, y, z, t, u)$  в общем случае зависят не только от координат и от времени, но и от амплитуды **u**. Эти уравнения дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

в) **Среда** является **линейной**, если её свойства не зависят от амплитуды волны физической величины **u**. Это значит, что все члены в уравнениях (1) могут быть пропорциональны только первой степени амплитуды **u** или совсем не должны зависеть от **u**. Поэтому коэффициенты  $A(x, y, z, t)$ ,  $B_\alpha(x, y, z, t)$  не должны зависеть от **u**, а члены  $C(x, y, z, t, u)$  уравнений типа (1) могут иметь вид  $C(x, y, z, t) = C_0(x, y, z, t) \cdot u$ . Процессы возбуждения волны (колебания) **u** в **линейной среде** имеют два важнейших свойства:

- 1) монохроматический источник на частоте  $\omega$  возбуждает волну только на частоте  $\omega$ ;
- 2) принцип суперпозиции: если источники  $\rho_{1,2}$  создают в *среде* поля  $u_{1,2}$ , то источник ( $\rho_1 + \rho_2$ ) создаёт в этой *среде* поле ( $u_1 + u_2$ ).

г) В различных областях физики волновые процессы, естественно, имеют разную *физическую природу*: физические механизмы распространения волн электромагнитного поля в электродинамике и оптике, упругих волн в газах, жидкостях и твёрдых телах сильно отличаются друг от друга. Различие физических механизмов, реализующих волновые процессы, приводит к различным способам описания, основанным на сильно отличающихся друг от друга системах уравнений. Однако для понимания наиболее фундаментальных явлений (интерференции, дифракции, отражения и преломления, а также дисперсии и диссипации), свойственных волнам различной природы, совсем необязательно исследовать исходные сложные системы уравнений. Простые эффекты описываются более простыми и поэтому более универсальными математическими моделями (уравнениями).

В теории распространения волн фундаментальное значение имеет однородное линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\Delta u - \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (2)$$

так называемое *волновое уравнение*, которое, кстати, всегда можно представить в виде системы двух связанных уравнений типа (1) относительно пары сопряжённых переменных величин<sup>1)</sup>. В этом уравнении  $u$  - некоторая характеристика поля (например, амплитуда одного из компонентов электромагнитного поля или давление в звуковой волне),  $v_f = v_f(x, y, z)$  - скорость распространения волнового движения. Для гармонических во времени процессов (описываемых фактором  $\exp\{i\omega t\}$ ), уравнение (B.2) переходит в **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta u + k^2(x, y, z)u = 0 \quad , \quad (3)$$

в котором волновое число

$$k = \frac{\omega}{v_f} \equiv \frac{2\pi}{v_f T} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad (4)$$

имея размерность обратной длины  $[k] = [L^{-1}]$ , определяет пространственный период  $\lambda$  волнового процесса. Используя свойства решений уравнений (2) и (3), сформулируем разделы теории волн, изучаемые в настоящем курсе.

Длина волны  $\lambda$  - это некоторый внутренний пространственный масштаб. На этом расстоянии в *бегущей волне* (в каждый фиксированный момент времени

<sup>1)</sup> В частности, в одномерном случае ( $\Delta \Rightarrow (\partial^2 / \partial z^2)$ ) в однородной среде ( $v_f = const$ ) в качестве такой системы уравнений можно использовать, например, два следующих уравнения:  $u'_z - (1/v_f)\dot{u}_t - v = 0$ ;  $v'_z + (1/v_f)\dot{v}_t = 0$ .

$t$ ) переменная физическая величина  $\mathbf{u}$ , изменяясь от точки к точке, принимает всю последовательность значений, обусловленную заданными граничными условиями. В **бегущей волне** мгновенное значение плотности энергии, пропорциональное  $|\mathbf{u}|^2$ , меняется на расстоянии  $(\lambda / 2)$  по гармоническому закону, а среднее за период высокочастотного колебания  $T$  значение плотности энергии, пропорциональное  $\overline{|\mathbf{u}|^2}^T$ , оказывается одинаковым во всех точках этого пространственного интервала. В **стоячей волне**, состоящей из суперпозиции двух встречных **бегущих волн** одинаковой интенсивности, среднее за период  $T$  значение плотности энергии  $\overline{|\mathbf{u}|^2}^T$  меняется по гармоническому закону на половине длины волны  $(\lambda / 2)$ .

Помимо *внутреннего* масштаба  $\lambda$  поле физической величины  $\mathbf{u}$ , возбуждённое какими-либо источниками в некотором замкнутом или открытом объёме, всегда имеет и другие пространственные **внешние** масштабы  $\Lambda_k$ , на которых **существенно изменяется** среднее за период  $T$  значение **плотности энергии**  $\overline{|\mathbf{u}|^2}^T$ . Эти масштабы определяются **размерами области, занятой полем, и размерами неоднородностей среды**. Между *внутренним*  $\lambda$  и *внешними*  $\Lambda_k$  масштабами возможны разные соотношения, изменяющиеся в широких пределах от одного предельного случая

1)  $\Lambda_k \gg \lambda$  (*области коротковолновой асимптотики*)

до противоположного предельного случая

2)  $\Lambda_k \ll \lambda$  (*области квазистатики*).

В этих предельных и некоторых других подобных случаях для описания распространения поля (или описания распределения в пространстве энергии монохроматического поля) используются **приближенные методы**, т.е. более простые уравнения, позволяющие получить более простые, более наглядные и более удобные для практического применения решения. Наш курс посвящен изучению **приближенных методов** (или способов) описания полей в *области коротковолновой асимптотики*.

В *области коротковолновой асимптотики* в зависимости от постановки задачи и от свойств **среды** можно выделить две части (или подобласти), отличающиеся друг от друга набором внешних пространственных масштабов. В каждой из них применяется свой метод описания полей.

Одним из этих методов является так называемый **метод геометрической оптики** (далее - *го*). Он используется для описания полей в той части *области коротковолновой асимптотики*, в которой не учитываются поперечные размеры пучка распространяющегося излучения. Следовательно, в приближении *го* не учитываются дифракционные явления, которые всегда обусловлены именно поперечными размерами области, занятой полем.

В другой части *области коротковолновой асимптотики*, где учитываются поперечные размеры пучка и тем самым принимаются во внимание дифракци-

онные эффекты, используется так называемый **квазиоптический способ** (метод, теория) описания распространения волновых пучков.

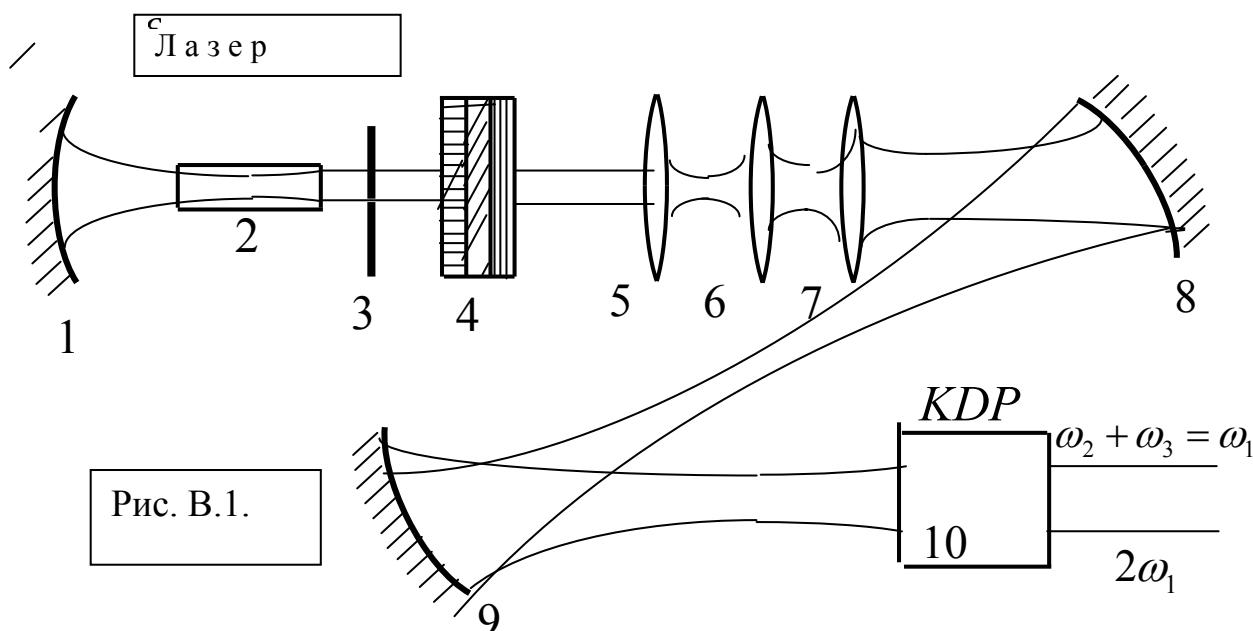
## Основные разделы курса

1. **Геометрическая оптика** однородных и неоднородных сред - метод описания полей в той части **области коротковолновой асимптотики** ( $\lambda \rightarrow 0$ ), где можно пренебречь дифракционными эффектами.
2. **Квазиоптика линейных сред** - теоретическое описание закономерностей распространения полей в той части **области коротковолновой асимптотики** ( $\Lambda_k \gg \lambda$ ), в которой существенны дифракционные явления.

## Области приложения методов коротковолновой асимптотики

1. Распространение волн в неоднородных средах (в частности, в ионосфере и океане).
2. Системы передачи электромагнитного излучения миллиметрового (1 мм - 10 мм), субмиллиметрового (0,1 мм - 1 мм) и оптического диапазонов длин волн, включая системы транспортировки излучения в лазерных устройствах и приборах нелинейной оптики, в голографии и интегральной оптике.
3. Коротковолновая диагностика лабораторной плазмы, ионосферы, земной коры и мутных сред (томография).

В качестве примера *системы передачи электромагнитного излучения* рассмотрим на Рис. В.1 открытую линию передачи оптического пучка в типичной экспериментальной установке по преобразованию частоты лазерного излучения с помощью нелинейного кристалла KDP (нелинейная оптика).



На этом рисунке изображены **лазер**, который состоит из активной среды **2** и диафрагмы **3** внутри объёмного **открытого резонатора**, образованного сфе-

рическим зеркалом **1** и многослойным зеркалом **4, нелинейная анизотропная среда 10** в виде кристалла KDP, в которой происходит преобразование лазерного излучения, имеющего частоту  $\omega$ , в излучение на второй гармонике этой частоты  $2\omega$ , и **открытая линия передачи оптического пучка** между элементами **4** и **10**, состоящая из набора зеркал **8,9** и линз **5,6,7**, а также четвертьволновых пластинок, поляроидов и пр.

### **Что необходимо знать для расчёта открытой линии передачи?**

1. Теорию распространения узкого пучка (луча) в свободном пространстве и через границу раздела двух сред (в общем случае в неоднородной плоскослоистой среде).
  2. Теорию открытых резонаторов и волноводов.
  3. Теорию дифракции на ограниченных апертурах.
- Именно эти разделы будут рассматриваться в настоящем курсе.

### **На какой основе базируется курс?**

Основным фундаментом является **уравнение Гельмгольца** с соответствующими граничными условиями, которые необходимы для решения конкретной физической задачи<sup>2)</sup>. Но фундамент тоже опирается на почву (грунт). Таким **основанием** (ground - земля, почва, грунт, основание) будут для нас **системы уравнений** с соответствующими граничными условиями, которые при определённых условиях трансформируются в **волновое уравнение** и далее в **уравнение Гельмгольца**. В нашем курсе это будут

- а) дополненная соответствующими **материальными уравнениями** система **уравнений Максвелла**, которая описывает распространение электромагнитных волн в разнообразных средах;
- б) **уравнения механики сплошных сред**, описывающие распространение звука в жидкостях и газах;
- в) уравнения теории упругости, с помощью которых можно описывать распространение упругих волн в твердых (анизотропных) телах.

Кроме указанных выше случаев, решения **уравнения Гельмгольца** широко используются для описания разнообразных физических явлений в **квантовой механике, в гидродинамике, в сейсмологии** и т.д.

**1. Вывод уравнений Гельмгольца из уравнений Максвелла.** Получим **уравнения Гельмгольца** (а также волновые уравнения второго порядка) из уравнений Максвелла в той области среды, где отсутствуют сторонние источники

<sup>2)</sup> На границе раздела двух сред из разнообразных законов сохранения (массы, импульса, энергии, заряда, потока вектора или его циркуляции по контуру) вытекают необходимые граничные условия для распространяющихся физических полей. В частности, граничные условия формулируются для того поля (или компонента поля) **u**, которое в рассматриваемом конкретном случае описывается **уравнением Гельмгольца** (3).

( $\vec{j}^{e,m} = 0$ ,  $\rho^{e,m} = 0$ ). Для простоты среду будем считать изотропной, непроводящей ( $\sigma = 0$ ) и недиспергирующей, но неоднородной. В такой среде диэлектрическая  $\varepsilon$  и магнитная  $\mu$  проницаемости являются действительными функциями координат, и система уравнений Максвелла вместе с материальными уравнениями имеет вид:

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & (2) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ (3) \quad \operatorname{div} \vec{D} &= 0; & (4) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ (5) \quad \vec{D} &= \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}; & (6) \quad \vec{B} &= \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим монохроматическое решение уравнений (5) в виде

$$\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}\} = (1/2) \left\{ \left[ \tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{H}}, \tilde{\vec{D}}, \tilde{\vec{B}} \right] \exp(i\omega t) \right\} + \text{k.c.}, \quad (6)$$

в котором векторные комплексные амплитуды являются функциями координат. Подставляя это решение в систему (5) и используя линейность её уравнений, получим систему уравнений относительно комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{rot} \tilde{\vec{E}} &= -(i\omega/c) \cdot \tilde{\vec{B}}; & (2) \quad \operatorname{rot} \tilde{\vec{H}} &= (i\omega/c) \cdot \tilde{\vec{D}}; \\ (3) \quad \operatorname{div} \tilde{\vec{D}} &= 0; & (4) \quad \operatorname{div} \tilde{\vec{B}} &= 0; \\ (5) \quad \tilde{\vec{D}} &= \varepsilon(\vec{r}) \cdot \tilde{\vec{E}}; & (6) \quad \tilde{\vec{B}} &= \mu(\vec{r}) \cdot \tilde{\vec{H}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Возьмем операцию ротора от первого уравнения системы (7)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \tilde{\vec{E}}) \equiv \operatorname{grad}(\operatorname{div} \tilde{\vec{E}}) - \Delta \tilde{\vec{E}} = -i(\omega/c) \cdot \left\{ \mu \cdot \operatorname{rot} \tilde{\vec{H}} + \left[ \nabla \mu \times \tilde{\vec{H}} \right] \right\}$$

и после преобразования обеих частей получившегося равенства с помощью первого

$$\tilde{\vec{H}} = (i c / \omega \mu) \cdot \operatorname{rot} \tilde{\vec{E}},$$

третьего

$$\operatorname{div} \tilde{\vec{E}} = - \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right)$$

и второго уравнений системы (7) получим векторное уравнение Гельмгольца для неоднородной среды

$$\Delta \tilde{\vec{E}} + \mu \varepsilon (\omega^2 / c^2) \tilde{\vec{E}} + \left[ \nabla (\ln \mu) \times \operatorname{rot} \tilde{\vec{E}} \right] + \operatorname{grad} \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right) = 0. \quad (8)$$

В однородной изотропной среде, где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и, следовательно, показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  - скалярные постоянные величины, это уравнение всегда может быть представлено в виде одного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta \tilde{E} + \mu \varepsilon (\omega^2 / c^2) \tilde{E} \equiv \Delta \tilde{E} + n^2 k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (8)_1$$

относительно комплексной амплитуды поля  $\tilde{E}$  независимо от того, как это поле поляризовано<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Этому уравнению Гельмгольца соответствует **волновое уравнение** типа (2) относительно  $\vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{e}^0 \cdot \exp(i\omega t) \right\}$ , которое получается из (8)<sub>1</sub> с помощью замен  $i\omega \rightarrow (\partial / \partial t)$  и  $v_f^2 \rightarrow (c/n)^2$ .

В однородной анизотропной среде, где  $\varepsilon \equiv \hat{\varepsilon}$  и  $\mu \equiv \hat{\mu}$  являются тензорами второго ранга, имеющими постоянные элементы, уравнение (8) преобразуется в общем случае в два независимых скалярных уравнения типа  $(8)_1$ , имеющих различные показатели преломления  $n_{1,2}$  и описывающих распространение ортогонально поляризованных полей  $\tilde{E}_{1,2} \cdot \vec{e}_{1,2}^0$ .

В неоднородной среде ( $\nabla \varepsilon \neq 0$ ;  $\nabla \mu \neq 0$ ), свойства которой меняются в пространстве, математически задачу о распространении гармонической волны, как правило, можно свести к нахождению решения **уравнения Гельмгольца** вида (3), где  $u$  - некоторая скалярная волновая функция. Решение этого уравнения при произвольной зависимости  $k^2$  от координат не может быть описано в известных функциях. Более простую форму имеет решение **уравнения Гельмгольца** в неоднородной слоистой среде, когда  $k^2$  меняется лишь в одном направлении, например, вдоль одной координаты  $z$  декартовой системы координат  $k^2 = k^2(z)$ . Но даже в этом случае точное решение уравнений Гельмгольца известно лишь для некоторых частных законов изменения  $k^2(z)$ . К тому же многие точные решения сложны по форме и не всегда удобны для анализа и практического использования. Поэтому весьма большое значение имеют приближенные методы нахождения волновых полей в неоднородных средах. При произвольной, но достаточно медленной зависимости свойств среды от координат можно построить приближенное решение, которое называется **приближением геометрической оптики**.

При наличии в среде дисперсии и проводимости ( $\sigma \neq 0$ ) вид уравнений (7) полностью сохраняется. В них изменяются только коэффициенты в правых частях двух последних материальных уравнений: действительные функции координат  $\varepsilon(\vec{r})$  и  $\mu(\vec{r})$  в этом случае трансформируются в соответствующие комплексные функции  $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, \omega)$  и  $\tilde{\mu}(\vec{r}, \omega)$ , которые зависят ещё и от частоты  $\omega$  (или от волнового числа, если дисперсия пространственная). Такие же изменения происходят и в **уравнении Гельмгольца** (8) или в его частном случае  $(8)_1^{(4)}$ .

Уравнение для магнитного поля  $\tilde{H}$ , аналогичное уравнению (8), можно получить из (8) по принципу двойственности с помощью следующих замен:

$$\tilde{E} \rightarrow \tilde{H}; \quad \tilde{H} \rightarrow -\tilde{E}; \quad \varepsilon \Leftrightarrow \mu. \quad (9)$$

В дальнейшем будем рассматривать немагнитные среды ( $\mu = 1$ ,  $\nabla \mu = 0$ ), поэтому в уравнении (8) не будет третьего слагаемого.

## 2. Вывод уравнений Гельмгольца из уравнений механики сплошных сред.

Для описания произвольных движений газа или жидкости обычно используют уравнения механики сплошных сред, записанные в координатах Эйлера. При

<sup>4)</sup> Вид восстановленного по правилу  $i\omega \rightarrow (\partial/\partial t)$  **волнового уравнения** в этом случае определяется конкретной зависимостью от  $\omega$  функций  $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, \omega)$  и  $\tilde{\mu}(\vec{r}, \omega)$ .

таком описании все величины, характеризующие состояние среды, зависят от координат  $x, y, z$  неподвижной системы и времени  $t$ .

Вначале не будем учитывать диссипативных процессов подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе Введения при выводе **уравнения Гельмгольца** (8). В этом случае достаточно знать распределения скорости гидродинамических частиц  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , плотности среды  $\rho(\vec{r}, t)$  и давления  $p(\vec{r}, t)$  в этой точке среды. Эти физические величины связаны системой уравнений, состоящей из уравнения непрерывности (закона сохранения массы вещества, записанного в дифференциальной форме)

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0 \quad , \quad (10.1)$$

уравнения движения Эйлера (закона сохранения импульса - второго закона Ньютона для элемента сплошной среды)

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \vec{F} = - \nabla p \quad (10.2)$$

и уравнения состояния

$$p = p(\rho) \quad . \quad (10.3)$$

Выражение в квадратных скобках в уравнении (10.2) представляет собой ускорение, т.е. полную производную скорости по времени.

Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и разрежения, сопровождаемые локальными изменениями температуры. В большинстве случаев эти процессы совершаются настолько быстро, что выравнивания температур не успевает произойти. Процессы сжатия и разрежения можно считать обратимыми и описывать адиабатическим уравнением состояния (10.3) типа

$$p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma \quad . \quad (10.3)^*$$

В идеальном газе  $p_0$ ,  $\rho_0$  - равновесные давление и плотность,  $\gamma = (C_p / C_v)$  - отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме. В случае жидкостей (10.3)\* можно рассматривать как приближённое эмпирическое уравнение, константы которого определяются по экспериментальным данным.

Для вывода из системы (10) **уравнения Гельмгольца** (и соответствующего волнового уравнения), например, для давления звукового поля (или плотности среды, или распределения скорости гидродинамических частиц) вначале сделаем **главное предположение** о том, что монохроматическая **звуковая волна**, характеризуемая физическими величинами

$$\{p', \rho', \vec{u}'\} = \operatorname{Re} \{(\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{\vec{u}}) \cdot \exp(i\omega t)\} \quad , \quad (11')$$

**вносит малые возмущения в основное состояние** ( $p_0, \rho_0, 0$ ) **среды**. Это значит, что физические величины

$$p = p_0 + p' ; \quad \rho = \rho_0 + \rho' ; \quad \vec{u} = 0 + \vec{u}' \quad (11)$$

нужно подставить в уравнения (10) и линеаризовать их вблизи стационарного состояния, сохраняя только члены первого порядка малости. В результате получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}' \right) &= 0 ; \\ \rho_0 \left( \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} \right) &= -\nabla p' ; \\ p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho' &= \gamma \left( \frac{p_0}{\rho_0} \right) \rho' \equiv v_S^2 \rho' , \end{aligned} \quad (12')$$

в которой

$$v_S^2 = \gamma \left( \frac{p_0}{\rho_0} \right)$$

- квадрат скорости звука (*sound*) в среде. Подставляя в (12)' монохроматическое решение (11'), можно сразу получить систему уравнений

$$i\omega \tilde{\rho} + \rho_0 \operatorname{div} \tilde{\vec{u}} = 0 ; \quad (12.1)$$

$$i\omega \rho_0 \tilde{\vec{u}} = -\nabla \tilde{p} = -v_S^2 \nabla \tilde{\rho} \quad (12.2)$$

для комплексных амплитуд. Выражая  $\tilde{\vec{u}}$  из второго уравнения (12) и подставляя в первое, получим **уравнение Гельмгольца** для плотности среды

$$\Delta \tilde{\rho} + \left( \omega / v_S \right)^2 \tilde{\rho} = 0 \equiv \Delta \tilde{\rho} + k^2 \tilde{\rho} , \quad (13)$$

в котором в соответствии с определением (4) введено волновое число  $k$ . Такое же уравнение можно написать для любой другой физической величины, которая пропорциональна  $\tilde{\rho}$ , и, в частности, для давления

$$\tilde{p} = v_S^2 \tilde{\rho} \quad (14)$$

Физическая величина  $\tilde{\varphi}$ , называемая *потенциалом скорости гидродинамических частиц* в силу определения скорости

$$\tilde{\vec{u}} = \nabla \tilde{\varphi} \quad (15)$$

как потенциального вектора, также описывается уравнением (13).

**Уравнение Гельмгольца** (13) имеет решения типа бегущей волны

$$\tilde{\rho}(x, y, z) = \tilde{\rho}_0^\pm \cdot \exp \left[ \mp i \left( \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] , \quad (16)$$

которые описывают распространение двух встречных плоских волн плотности среды

$$\rho'^\pm = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\rho}_0^\pm \cdot \exp \left[ i \omega t \mp i \left( \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \right\} \quad (17)$$

(а также давления и потенциала скорости гидродинамических частиц) по направлениям

$$\pm \left( \vec{k} / k \right) = \pm \vec{s}_0 . \quad (18)$$

Используя (15) - (17), можно установить связи

$$\tilde{\varphi} = \left( i v_S^2 / \omega \rho_0 \right) \tilde{\rho} , \quad \tilde{\vec{u}} = \pm \vec{s}_0 \cdot \vec{v}_S \cdot \left( \tilde{\rho} / \rho_0 \right) \quad (19)$$

между потенциалом скорости, скоростью гидродинамических частиц и плотностью среды в плоской волне звукового поля<sup>5)</sup> состоящей из сжатий и разрежений плотности по направлению распространения  $\vec{s}_0$ <sup>6)</sup>.

<sup>5)</sup> Соотношения (19) и (14) позволяют установить, что порядок малости возмущения, вносимого звуковой волной в основное состояние среды, оказывается практически одинаковым для возмущений всех физических величин  $|(\tilde{\rho} / \rho_0)| = |(\tilde{\vec{u}} / \vec{v}_S)| = (1/\gamma) |(\tilde{p} / p_0)|$ , включая так называемое число Maxa  $|(\tilde{\vec{u}} / \vec{v}_S)|$ .

В неидеальных средах нужно учитывать потери энергии, связанные с вязкостью и теплопроводностью. При этом движение будет описываться уравнениями, более сложными по сравнению с (10). Из-за наличия необратимого переноса импульса, обусловленного внутренним трением слоёв жидкости, появится вихревой компонент скорости гидродинамических частиц

$$\tilde{u}_T = \text{rot } \tilde{\vec{A}}_T .$$

который описывает поперечные сдвиговые волны. Поперечные сдвиговые волны не имеют компонента колебания плотности. Вихревой компонент скорости  $\tilde{u}_T$  удовлетворяет **уравнению Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{u}_T + k^2(-i\omega\rho_0/k^2\eta)\tilde{u}_T = 0 ,$$

которое имеет чисто мнимый квадрат волнового числа (см. Приложение).

---

<sup>6)</sup> **Волновое уравнение** типа (2) относительно  $\tilde{\rho}$  получается из (13) с помощью замен  $i\omega \rightarrow (\partial / \partial t)$  и  $v_f^2 \rightarrow v_s^2$ .

### 3. Вывод уравнения Гельмгольца из уравнений теории упругости.

В теории упругости при изучении механики твёрдых тел традиционно используется так называемое лагранжево описание сплошной среды, согласно которому считается, что все величины являются функциями времени  $t$  и положения частицы

$$\vec{r} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0 \equiv \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \vec{x}_i^0$$

в начальный момент времени  $t = 0$ . На Рис. В.2 изображены начальное и смещённое

$$\vec{r}' = x' \vec{x}_0 + y' \vec{y}_0 + z' \vec{z}_0 \equiv \sum_{i=1}^3 x'_i \cdot \vec{x}_i^0$$

положения деформированной частицы твёрдого тела. **Вектором деформации**  $\vec{R}$  указано **смещение элемента** бесконечно малого объёма  $\Delta V$  с центром в точке  $M$  в точку  $M'$ , вблизи которой он деформируется и приобретает объём  $\Delta V'$ . Переход от лагранжевых координат к эйлеровым осуществляется с помощью формулы

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}(\vec{r}, t) . \quad (20)$$

Зная **смещение**  $\vec{R}$  **элемента** объёма, не трудно найти гидродинамическую скорость

$$\vec{u} = (\partial \vec{R} / \partial t) \equiv (d \vec{R} / d t) \quad (21)$$

и далее написать уравнение движения для массы

$$\Delta m = \rho_0 \Delta V \quad (22)$$

этого элемента объёма. После сокращения на  $\Delta V$  уравнение движения примет вид

$$\rho_0 \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F} , \quad (23)$$

где  $\vec{F}$  - объёмная сила, обусловленная *внутренними напряжениями*.

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его *теплового равновесия*. При этом все части тела находятся друг с другом и в *механическом равновесии*. Это значит, что равнодействующая всех сил, приложенных к некоторому выделенному объёму, равна нулю.

При деформировании тела расположение молекул меняется, и тело выходит из состояния равновесия. В нём возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти силы называются *внутренними напряжениями*. Они обуславливаются силами взаимодействия молекул друг с другом. Молекулярные силы обладают очень незначительным "радиусом действия", распространяющимся на расстояния порядка межмолекулярных. Но в макроскопической теории упругости рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому "радиус действия" молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Отсюда следует, что **силы, действующие на ка-**

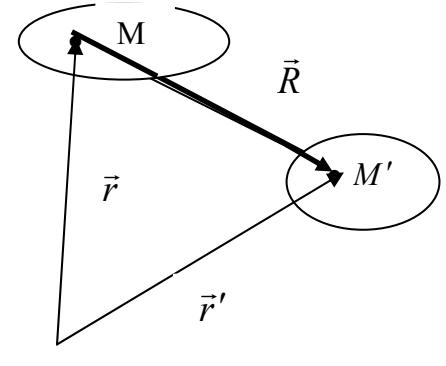


Рис. В.2

кую-нибудь **часть тела** со стороны окружающих её частей, **действуют лишь непосредственно через поверхность** этой части.

Выделим в теле какой-нибудь объём и рассмотрим действующую на него суммарную силу. Эта сила равна сумме всех сил, действующих на каждый из элементов рассматриваемого объёма, и поэтому может быть представлена в виде объёмного интеграла от плотности силы (силы, действующей на единицу объёма тела)

$$\overline{(\vec{F})} = \sum_{i=1}^3 (F)_i \cdot \vec{x}_i^0 = \iiint_V \vec{F} dV .$$

Силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объёма, не могут привести к появлению отличной от нуля равнодействующей силы, поскольку они в соответствии с законом равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому исковую силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объём со стороны окружающих его частей тела.

Из векторного анализа известно, что объёмный интеграл от скаляра может быть преобразован в интеграл по замкнутой поверхности объёма от некоторого вектора, дивергенцией которого является скаляр. В рассматриваемом случае мы имеем дело с тремя скалярами, объединёнными в вектор  $\vec{F}$ . Следовательно, вектор  $\vec{F}$  должен быть дивергенцией некоторого тензора второго ранга, называемого **тензором напряжений**. Это значит, что действующую на объём силу можно записать в виде

$$\overline{(\vec{F})} = \sum_{i=1}^3 (F)_i \cdot \vec{x}_i^0 = \iiint_V \vec{F} dV = \oint_S (\hat{\sigma} \cdot d\vec{S}) \equiv \iiint_V \operatorname{div} \hat{\sigma} dV . \quad (24)$$

**Тензор напряжений** рассмотренной выше невязкой жидкости связан только с давлением (всесторонним сжатием) элемента сплошной среды и поэтому имеет чисто диагональные элементы:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} \quad (\operatorname{div} \hat{\sigma} = -\nabla p) .$$

В отличие от текучих сред твёрдые тела упруго реагируют на деформацию сдвига, и выражение для элемента тензора  $\sigma_{ik}$  оказывается существенно более сложным и зависящим от элементов так называемого **тензора деформации**  $\hat{U}$ , который определяет изменение элемента длины при деформировании тела.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки среды до и после **деформирования**. В исходном состоянии при  $t=0$  радиус-векторы этих точек различались на  $d\vec{r}$ , в деформированном состоянии они будут различаться на

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{R} \equiv \sum_{i=1}^3 (dx_i + dR_i) \cdot \vec{x}_i^0 \cong \sum_{i=1}^3 \left( dx_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial R_i}{\partial x_k} dx_k \right) \cdot \vec{x}_i^0 . \quad (25)$$

Квадраты расстояний между этими точками в финальном и начальном состояниях будут отличаться на величину

$$\begin{aligned}
 (\vec{d}\vec{r}' \cdot \vec{d}\vec{r}') - (\vec{d}\vec{r} \cdot \vec{d}\vec{r}) &\equiv \sum_{i=1}^3 \left\{ d x_i'^2 - d x_i^2 \right\} = \\
 &= \sum_{i,k=1}^3 \left\{ \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial R_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R_s}{\partial x_k} \right\} d x_i d x_k \equiv \sum_{i,k=1}^3 2U_{ik} d x_i d x_k , \quad (26)
 \end{aligned}$$

которая находится с помощью **тензора деформации**  $\hat{U}$ , имеющего элементы<sup>7)</sup>

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial R_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R_s}{\partial x_k} \right\} . \quad (27)$$

Из (27) следует, что **тензор деформации** симметричен ( $U_{ik} = U_{ki}$ ) и что поэтому его всегда можно привести к диагональному виду с помощью поворота осей координат. В этом основном состоянии у **тензора деформации** будут отличны от нуля только диагональные элементы  $\bar{U}_{ii}$ .

В главных осях выражение (26) принимает вид

$$(d\vec{r}' \cdot d\vec{r}') = \sum_{i=1}^3 \left\{ d x_i^2 \right\} + \sum_{i=1}^3 2\bar{U}_{ii} d x_i d x_i \equiv \sum_{i=1}^3 (1 + 2\bar{U}_{ii}) d x_i^2 , \quad (26')$$

из которого ясно видно, что полное изменение элемента длины можно рассматривать как совокупность трёх независимых деформаций по каждой из трёх главных осей тензора  $\hat{U}$ . В главных осях элемент деформированного объёма равен

$$dV' = d x_1' \cdot d x_2' \cdot d x_3' = \{(1 + 2\bar{U}_{11}) \cdot (1 + 2\bar{U}_{22}) \cdot (1 + 2\bar{U}_{33})\}^{1/2} d x_1 \cdot d x_2 \cdot d x_3 . \quad (28)$$

*Линейная теория распространения упругих волн* справедлива в **приближении малых деформаций**

$$\bar{U}_{ii} \ll 1 \Leftrightarrow 2U_{ik} \approx \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} . \quad (29)$$

В приближении линейной теории относительное изменение объёма определяется **следом тензора деформации** в виде

$$dV' \cong \left( 1 + \sum_{i=1}^3 2\bar{U}_{ii} \right) dV \equiv (1 + Sp\hat{U}) dV = (1 + Sp\hat{U}) dV \cong (1 + \mathbf{div} \vec{R}) dV . \quad (30)$$

Кроме условия (29), при выводе этого выражения использован известный из тензорного анализа **физический закон инвариантности следа истинного тензора**,

<sup>7)</sup> При выводе (27) были использованы два очевидных равенства:

$$1) \sum_{i,k=1}^3 \left\{ \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right\} d x_i d x_k = 2 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \left\{ \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \right\} d x_i d x_k ;$$

$$2) \sum_{i,k,s=1}^3 \frac{\partial R_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R_s}{\partial x_k} d x_i d x_k = \sum_{i,k,s=1}^3 \frac{\partial R_i}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial x_k} d x_s d x_k .$$

согласно которому изменение объёма может быть выражено через след тензора  $\hat{U}$  и без приведения последнего к диагональному виду.

Представляя каждый элемент тензора деформации как тождество с правой частью в виде двух слагаемых

$$U_{ik} \equiv \left( U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \cdot Sp \hat{U} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \cdot Sp \hat{U}, \quad (31)$$

нетрудно понять, что любая деформация может быть представлена как сумма деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Действительно, первый член в (31) является элементом тензора, который не связан с изменением объёма, поскольку его след

$$Sp \left( U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \cdot Sp \hat{U} \right) \equiv Sp \left( \hat{U} - \frac{1}{3} \hat{I} \cdot Sp \hat{U} \right) = 0 ,$$

и потому описывает только сдвиговую деформацию. Второй член в (31) является элементом диагональной матрицы, которая как диагональный тензор изотропной среды  $\hat{I} \cdot Sp \hat{U}$  описывает только объёмную деформацию.

В рассматриваемом линейном приближении теории упругости наиболее общий вид связи тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  с тензором деформации  $\hat{U}$  выражается формулой

$$\sigma_{ik} \equiv 2 \mu \left( U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \cdot Sp \hat{U} \right) + K \delta_{ik} Sp \hat{U} = \mu \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right) + \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{R} , \quad (32)$$

которая носит название закона Гука. Константы  $K$ ,  $\mu$  называются модулями всестороннего сжатия и сдвига соответственно.

Совокупность формул (23), (24) и (32) позволяет получить<sup>8)</sup> линейное волновое уравнение для вектора деформации (смещения)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{R} + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{R} , \quad (33)$$

которое в случае монохроматических колебаний вектора смещения

$$\vec{R} = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\vec{R}}(x, y, z) \exp(i\omega t) \right\}$$

с помощью замены (\*) трансформируется в уравнение Гельмгольца

$$\mu \Delta \tilde{\vec{R}} + \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{\vec{R}} + \rho_0 \omega^2 \tilde{\vec{R}} = 0 \quad (34)$$

для комплексной амплитуды вектора смещения. Оно имеет решения, которые описывают распространение продольных и поперечных волн.

<sup>8)</sup> Для вывода (33) из (32) достаточно убедиться в справедливости двух математических тождеств. Во-первых, дивергенция диагонального изотропного тензора  $\hat{I} \cdot f(x, y, z)$  равна градиенту его элемента:  $\operatorname{div} (\hat{I} \cdot f(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z)$ . Во-вторых, дивергенция тензора деформации  $\hat{U}$  в линейной форме (29) элементарно преобразуется в выражение

$$\operatorname{div} \hat{U} = \Delta \vec{R} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{R}$$

Для продольных волн, у которых направление распространения  $\vec{s}_0$  совпадает с направлением **вектора смещения**

$$\vec{s}_0 \Updownarrow \vec{R} \equiv \vec{R}_l ,$$

справедливо векторное равенство

$$\text{grad div } \vec{R}_l = \Delta \vec{R}_l ,$$

и из (34) получается **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{\vec{R}}_l + k_l^2 \tilde{\vec{R}}_l = 0 \quad (34)_l$$

с волновым числом, определяемым по формуле

$$k_l^2 = \left\{ \omega^2 \rho_0 \cdot \left( K + \frac{4}{3} \cdot \mu \right)^{-1} \right\} \equiv \left( \omega^2 / v_l^2 \right) . \quad (35)_l$$

Для поперечных волн, направление распространения  $\vec{s}_0$ , которых перпендикулярно направлению **вектора смещения**

$$\vec{s}_0 \perp \vec{R} \equiv \vec{R}_T , \quad \text{div } \vec{R}_T = 0 ,$$

из (35) получается **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{\vec{R}}_T + k_T^2 \tilde{\vec{R}}_T = 0 \quad (34)_T$$

с волновым числом, определяемым по формуле

$$k_T^2 = \left\{ \omega^2 \rho_0 / \mu \right\} \equiv \left( \omega^2 / v_T^2 \right) . \quad (35)_T$$

Из сравнения формул (35)<sub>l</sub> и (35)<sub>T</sub> видно, что скорость поперечных волн меньше скорости продольных. Если модуль сдвига равен нулю ( $\mu = 0$ ), то из (34) следует, что поперечные волны в такой среде не существуют, т.е. среда себя ведёт как жидкость или газ при отсутствии диссипации.

## Приложение

В правой части уравнения Эйлера (10.2) появится дополнительная **сила трения**

$$\vec{F}_d = \text{div} \hat{\sigma} , \quad (\Pi.1)$$

где элемент

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ik} \cdot \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \xi \cdot \delta_{ik} \cdot \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \quad (\Pi.2)$$

**вязкого тензора напряжений**  $\hat{\sigma}$  определяется из довольно общих соображений: он должен зависеть только от первых производных скорости по координатам (трение существует только при неоднородном распределении скоростей по пространству) и обращаться в нуль при равномерном вращении жидкости как целого. С учётом силы трения уравнение движения Эйлера (10.2) примет вид **уравнения Навье - Стокса**

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div} \vec{u} = \vec{F} + \vec{F}_d , \quad (\Pi.3)$$

в правой части которого появились новые дифференциалы скорости  $\tilde{u}$  с постоянными коэффициентами сдвиговой  $\eta$  и объёмной  $\xi$  вязкости.

Поскольку в среде имеются потери, то вместо (10.3) нужно использовать более общее уравнение состояния

$$p = p(\rho, S), \quad (10.3.)^*$$

которое не предполагает постоянства энтропии  $S$ , и дополнить систему (10) ещё одним уравнением (следствием закона сохранения энергии), которое описывает изменение энтропии (в точке или внутри бесконечно малого объёма) из-за наличия объёмных источников тепла или вследствие его переноса через границу объёма из соседних областей, имеющих другую температуру.

Однако в большинстве случаев можно ограничиться приближением, которое позволяет считать, что поглощенная энергия звука слабо изменяет состояние среды и, несмотря на диссипативные процессы, среда остаётся в равновесии ( $S = const$ ). В этом приближении в системе уравнений гидродинамики (10) нужно заменить уравнение (10.2) на уравнение (П.3). В этом случае в системе (12), описывающей монохроматические распределения давления, плотности и скорости гидродинамических частиц, изменится лишь второе уравнение, которое примет вид

$$i\omega\rho_0\tilde{\tilde{u}} = -v_s^2\nabla\tilde{\rho} + \eta\Delta\tilde{\tilde{u}} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\text{grad div}\tilde{\tilde{u}}. \quad (\text{П.4})$$

Поле скоростей гидродинамических частиц в этом случае (в отличие от рассмотренного ранее) может быть представлено в виде суммы потенциального  $\tilde{u}_l$  и вихревого  $\tilde{u}_T$  компонентов:

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u}_l + \tilde{u}_T \equiv \nabla\tilde{\varphi} + \text{rot } \tilde{\tilde{A}}_T. \quad (\text{П.5})$$

Используя уравнение (12.1) и учитывая справедливость соотношений

$$\text{div } \tilde{\tilde{u}} = \text{div } \tilde{u}_l; \quad \text{grad div } \tilde{\tilde{u}} = \text{grad div } \tilde{u}_l = \text{grad } (\Delta \tilde{\varphi}) = \Delta \text{grad } \tilde{\varphi} \equiv \Delta \tilde{u}_l$$

для продольных (потенциальных) колебаний скоростей гидродинамических частиц, получим **уравнение Гельмгольца** для плотности среды

$$\Delta\tilde{\rho} + \left(\frac{\omega}{v_s}\right)^2\tilde{\rho} + \left(\frac{i\omega}{v_s^2\rho_0}\right)\cdot\beta\cdot\Delta\tilde{\rho} = 0 \rightarrow (\Delta\tilde{\rho} + \tilde{k}_l^2\tilde{\rho} = 0), \quad (\text{П.6})$$

в котором волновое число комплексное

$$\tilde{k}_l^2 = (\omega/v_s)^2 \cdot [1 + i(\omega\cdot\beta/v_s^2\cdot\rho_0)]^{-1} \equiv k^2 [1 + i\gamma]^{-1} \cong \{k[1 - i(\gamma/2)]\}^2 \quad (\text{П.7})$$

из-за потерь, учитываемых с помощью *диссипативного коэффициента*

$$\beta = \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right). \quad (\text{П.8})$$

*(Более точное выражение для диссипативного коэффициента, полученное с учётом изменения энтропии и переноса тепла, имеет вид  $\beta = \{\xi + (4/3)\eta\} + \kappa \cdot (C_V^{-1} - C_P^{-1})$ ).*

Уравнение (П.6) является обобщением (13), позволяющим учесть затухание волн из-за поглощения их энергии среде. С помощью тривиальных замен

$$\tilde{\rho} \Rightarrow \tilde{u}_l; \tilde{\varphi}; \tilde{p}. \quad (\text{П.9})$$

из (П.6) можно получить аналогичные **уравнения Гельмгольца** для каждой из этих физических величин, а с помощью замены

$$i\omega \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (*)$$

преобразовать их в соответствующие **волновые уравнения**.

Вихревой компонент скорости гидродинамических частиц

$$\tilde{u}_T = \text{rot } \tilde{A}_T \quad (\text{П.10})$$

описывает поперечные (сдвиговые) волны. Из очевидного условия

$$\text{div } \tilde{u}_T = 0 \quad (\text{П.11})$$

и уравнения непрерывности (12.1) следует, что сдвиговые волны являются поперечными и не имеют компонента колебания плотности среды

$$\tilde{\rho}_T = 0 \quad . \quad (\text{П.12.})$$

Это означает, что при сдвиговых колебаниях *жидкость можно рассматривать как несжимаемую*. В результате, из (П.4) получается **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{u}_T + k^2 (-i\omega\rho_0 / k^2\eta) \tilde{u}_T = 0 \equiv \Delta \tilde{u}_T + \tilde{k}_T^2 \tilde{u}_T \equiv \Delta \tilde{u}_T + k^2 (-i\alpha) \tilde{u}_T, \quad (\text{П.13})$$

в котором квадрат волнового числа

$$\tilde{k}_T^2 = -i(\omega\rho_0 / \eta) \equiv \left\{ (1-i) \sqrt{(\omega\rho_0 / 2\eta)} \right\}^2 \quad (\text{П.14})$$

является мнимой величиной. Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны, направление колебательной скорости которых перпендикулярно направлению распространения. Эти волны обычно возбуждаются колеблющейся границей и очень быстро затухают при удалении от неё.

### Литература к курсу:

1. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. Изд. «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., 1979.
2. Ю.А. Кравцов, Ю.А. Орлов. Геометрическая оптика неоднородных сред. Изд. «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., 1980.
3. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Изд. «Наука». М., 1973.
4. А. Ярив. Введение в оптическую электронику. Высшая школа, М., 1983.
5. А. Джеррард, Дж.М. Бёрн. Введение в матричную оптику. Изд. «Мир», М., 1978.
6. Д. Маркузе. Оптические волноводы. Изд. «Мир», М., 1974.
7. В.М. Бабич, В.С. Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Изд. «Наука». М., 1972.
8. Б.З. Каценеленбаум. Высокочастотная электродинамика. Изд. «Наука». М., 1966.

## 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### *§ 1 Уравнения геометрической оптики.*

Во многих практических важных случаях приходится иметь дело с распространением волн в *неоднородных* средах, свойства которых меняются в пространстве. В неоднородной среде скорость и направление распространения являются локальными характеристиками волны и рассматриваются как функции координат.

Распространение гармонических волн в неоднородной среде описывается решениями **уравнения Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{U} + k^2 n^2(\vec{r}) \tilde{U} = 0 , \quad (1)$$

где  $\tilde{U}$  - скалярная волновая функция,  $k = (\omega / c) = (2\pi / \lambda)$  - волновое число,  $c$  - скорость распространения волн в однородной (эталонной) среде,  $n(\vec{r})$  - коэффициент замедления скорости распространения волн в среде по отношению к эталонному значению (в электродинамике и оптике  $c$  - скорость света в вакууме,  $n(\vec{r})$  - показатель преломления среды). Решение этого уравнения при произвольной зависимости  $n^2(x, y, z)$  от координат **не может быть описано в известных функциях**. Точные решения **уравнений Гельмгольца** известны лишь для некоторых частных законов изменения  $n^2(\vec{r})$  в неоднородной слоистой среде, когда  $n^2(\vec{r})$  изменяется лишь в одном направлении, например, вдоль координаты  $z$  декартовой системы координат  $n^2(\vec{r}) = n^2(z)$ . Примерами таких сред в некотором приближении могут служить атмосфера и ионосфера Земли, морская вода, земная кора, оптические волокна и т.п. Но даже в этом случае многие точные решения сложны по форме и не всегда удобны для практического применения. **Поэтому весьма большое значение имеют приближенные методы нахождения волновых полей в неоднородных средах.**

При произвольной, но достаточно *медленной зависимости свойств среды от координат* можно построить приближенное решение, которое называется **приближением геометрической оптики**. Это приближение или **метод го** играет исключительно важную роль при анализе волновых полей. Простой и наглядный **метод го** обеспечивает хорошее качественное описание чрезвычайно широкого круга волновых явлений различной физической природы (электромагнитные и упругие волны, звук, волновые процессы в плазме и жидкостях, квантовомеханические явления и т.д.) в условиях  $\lambda \ll \Lambda$ , когда **длина волны  $\lambda$  мала по сравнению с характерными масштабами задачи  $\Lambda$** .

Число прикладных исследований, опирающихся на **метод го**, огромно. Особенно широко этот метод применяется в оптике и радиофизике, в физике плазмы, в теории распространения радиоволн через атмосферу Земли, солнечную корону и космическое пространство. Не преувеличивая, можно сказать, что львиная доля всех расчетов коротковолновых полей (особенно на начальном этапе оценок и прикидок) сейчас осуществляется при помощи **метода го** и его модификаций. Наиболее важна роль **метода го** при расчете полей в неоднородных сре-

дах. В частности, большой интерес представляют приложения, связанные с распространением и излучением волн в лабораторной, ионосферной и космической плазме, в атмосферах Земли и других планет, в неоднородном океане, в земной коре, в неоднородных линзах, в волноводах с неоднородным заполнением, в нерегулярных волноводах и в различных средах, содержащих случайные неоднородности.

### Пункт 1. *Вывод уравнений го из уравнения Гельмгольца.*

На примере скалярного поля  $\tilde{U}$  проиллюстрируем переход от **уравнения Гельмгольца** (1) к **уравнениям го**. Вначале заметим, что в однородной среде (т.е. в простейшем случае  $n^2 = \bar{n}^2 = \text{const}$ ) уравнение (1) в соответствии с (B.17) имеет решение в виде поля

$$\tilde{U}(\vec{r}) = \bar{A} \cdot \exp\left\{i[\bar{\varphi} - k(\vec{n} \cdot \vec{r})]\right\} \equiv \bar{A} \cdot \exp\left\{i[\bar{\varphi} - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\right\}, \quad (2)$$

которое имеет постоянную амплитуду  $\bar{A}$  и фазу

$$\Phi = \bar{\varphi} - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r}),$$

изменяющуюся наибыстрейшим образом в направлении орта  $\vec{s}_0$ . Поверхностью постоянной фазы, называемой волновым фронтом, является плоскость, перпендикулярная направлению орта  $\vec{s}_0$ . Решение (2) описывает распространение волны реальной физической величины

$$U = \operatorname{Re}\{\tilde{U} \exp(i\omega t)\} = \bar{A} \cdot \operatorname{Re}\langle \exp\{i[\bar{\varphi} + \omega t - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\} \rangle, \quad (2)'$$

изменяющейся во времени по гармоническому закону. В каждый фиксированный момент времени на поверхности (плоскости) постоянной фазы значение  $U$  постоянно, поэтому волна называется однородной. С течением времени эта плоскость перемещается в направлении орта  $\vec{s}_0$  с постоянной фазовой скоростью

$$v_f = (\omega / k \bar{n}) = (c / \bar{n}).$$

Поэтому волна называется плоской.

Будем считать, что свойства среды в уравнении (1) изменяются достаточно мало на расстояниях порядка длины волны  $\lambda$ . Это означает, что

$$\lambda \cdot |\nabla n| \ll n \quad (3*)$$

и что существует некоторый пространственный масштаб  $\Lambda$  изменения  $n$ , который определяется из условия

$$\Lambda \cdot |\nabla n| \approx n. \quad (3**)$$

Этот пространственный масштаб существенно больше  $\lambda$ , так что справедливо условие

$$k \cdot \Lambda = (2\pi\Lambda / \lambda) \equiv (1/\mu) \gg 1, \quad (3)$$

где  $\mu$  - малый безразмерный параметр, в предельном случае стремящийся к нулю<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Поле распространяющейся волны может изменяться не только из-за свойств среды, которые представлены в уравнении (1) коэффициентом  $n(\vec{r})$ , но и в результате особенностей возбуждения этого поля в пространстве. К этим особенностям относятся структура и размеры источ-

Если заметные изменения амплитуды  $A(\vec{r})$  и направления распространения волны происходят на расстояниях  $\Lambda$ , то всё пространство, где определяется решение **уравнения (1)**, можно разбить на участки с размерами

$$\lambda \ll l \ll \Lambda . \quad (3^{***})$$

В пределах каждого участка волну можно считать плоской, а направление её распространения можно определить как направление нормали к волновой поверхности. Это означает, что решение уравнения (1) следует искать в виде выражения

$$\tilde{U}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp\{-ik\Psi(\vec{r})\}, \quad (4)$$

которое *связывает* две неизвестные действительные функции  $A(\vec{r})$  и  $\Psi(\vec{r})$ , имеющие разные размерности и мало меняющиеся на расстоянии  $l$ :

$$\begin{aligned} l|\nabla A(\vec{r})| &\cong (l/\Lambda)|A(\vec{r})| \ll |A(\vec{r})| ; \\ l|\nabla\Psi(\vec{r})| &\cong (l/\Lambda)|\Psi(\vec{r})| \ll |\Psi(\vec{r})| . \end{aligned} \quad (3^{****})$$

При выполнении условий (3\*\*\*\*) такая монохроматическая волна, образованная двумя связанными функциями, будет **квазиплоской** (т.е. плоской на каждом участке  $l$ ). Она будет также **однородной**, если

$$A(\vec{r}) = \text{const}$$

на поверхности волнового фронта, которая определяется уравнением

$$\Psi(\vec{r}) = \text{const} .$$

Подставляя (4) в уравнение (1) и используя в качестве оператора Лапласа последовательно две дифференциальные операции первого порядка

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} , \quad (\Delta)$$

получим уравнение

$$\frac{\Delta A}{k^2 A} - 2i \frac{(\nabla A \cdot \nabla \Psi)}{k A} - i \frac{\Delta \Psi}{k} - [(\nabla \Psi)^2 - n^2(\vec{r})] = 0 . \quad (5)$$

В нём первый член в соответствии с (3) и (3\*\*\*\*) имеет порядок малости  $\mu^2$ , второй и третий имеют порядок малости  $\mu$  по отношению к членам, находящимся в квадратных скобках. Приравнивая нуль отдельно реальную и мнимую части (5) и пренебрегая членом второго порядка малости, получим два уравнения

$$(\nabla \Psi)^2 = n^2(\vec{r}) ; \quad (6)$$

$$A \Delta \Psi + 2(\nabla \Psi \cdot \nabla A) = 0 \quad (7)$$

относительно двух неизвестных функций  $A(\vec{r})$  и  $\Psi(\vec{r})$ .

Уравнение (6) через известное выражение коэффициента преломления  $n(\vec{r})$  определяет фазу (или эйконал) и, следовательно, структуры волновых фронтов. Оно называется *уравнением эйконала*. В переводе с греческого языка эйконал обозначает *изображение* и введён в качестве термина в 1885 году Брунсом

ников, расположение источников относительно области определения поля и т.д. Вторая причина никак не представлена в уравнении (1), но определяет характерные размеры  $\Lambda_A$  области изменения амплитуды поля. Будем считать, что  $\Lambda_A \gg \Lambda$  и что поэтому изменение амплитуды поля происходит (в основном) не из-за особенностей его возбуждения, а из-за неоднородного коэффициента преломления  $n(\vec{r})$ .

для обозначения *связанных функций*. Уравнение (7) определяет поведение амплитуды и называется *уравнением переноса*. Отметим ещё раз, что преобразование **уравнения Гельмгольца** (1) в два связанных уравнения (6) и (7) возможно только при условии (3).

Однако такой способ вывода уравнения, когда *приходится пренебречь его малыми членами, а не малыми членами его решения*, не всегда корректен. Поэтому рассмотрим второй подход и с этой целью введём безразмерные координаты

$$\vec{\rho} = \xi \cdot \vec{x}_0 + \eta \cdot \vec{y}_0 + \zeta \cdot \vec{z}_0 \equiv (\vec{r} / \Lambda) \quad , \quad (8)$$

нормированные на внешний масштаб  $\Lambda$ . Используя очевидные соотношения

$$\nabla_{\mu} = \Lambda \cdot \nabla \quad ; \quad \Delta_{\mu} = \Lambda^2 \cdot \Delta \quad , \quad (*)$$

представим уравнение Гельмгольца (1) в этих координатах

$$\Delta_{\mu} \tilde{U}(\vec{\rho}) + \frac{n^2(\vec{\rho})}{\mu^2} \tilde{U}(\vec{\rho}) = 0 \quad . \quad (1)'$$

По аналогии с (4) решение (1)' будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$\widetilde{U}(\vec{\rho}) = \left\{ a_0(\vec{\rho}) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m a_m(\vec{\rho}) \right\} \cdot \exp\left\{-i(1/\mu)\Phi(\vec{\rho})\right\}, \quad (9)$$

где безразмерная фаза  $\Phi(\vec{\rho})$  и эйконал  $\Psi(\vec{r})$ , имеющий размерность длины, связаны соотношением

$$\Psi(\vec{r}) = \Lambda \cdot \Phi(\vec{r}/\Lambda) \quad . \quad (**)$$

Подставляя (9) в (1)', применяя соотношение ( $\Delta$ ) к оператору Лапласа  $\Delta_{\mu}$  и приравнивая нулю члены одного порядка малости, получим систему уравнений

$$\left(\nabla_{\mu}\Phi\right)^2 = n^2(\vec{\rho}) \quad ;$$

$$a_0 \Delta_\mu \Phi + 2 (\nabla_\mu \Phi \cdot \nabla_\mu a_0) = 0 ;$$

$$\tilde{a}_1 \Delta_\mu \Phi + 2 (\nabla_\mu \Phi \cdot \nabla_\mu \tilde{a}_1) = -i \Delta_\mu a_0 \quad ; \quad (10)'$$

$$\tilde{a}_m \Delta_\mu \Phi + 2 (\nabla_\mu \Phi \cdot \nabla_\mu \tilde{a}_m) = -i \Delta_\mu \tilde{a}_{m-1} ;$$

По известному выражению  $n^2(\rho)$  определяется вначале  $\Phi(\rho)$ , затем вычисляются  $a_0(\rho)$ ,  $\tilde{a}_1(\rho)$  и т.д. Заметим, что  $a_0(\rho)$  и  $\Phi(\rho)$  - действительные величины, а  $\tilde{a}_1(\rho)$  - комплексная величина. Поэтому  $\Phi(\rho)$  является фазой волны с точностью до членов первого порядка малости.

С помощью соотношений (\*) и (\*\*) из системы (10)' получается полностью эквивалентная ей система дифференциальных уравнений

$$(\nabla \Psi)^2 = n^2(\vec{r}) ; \quad \quad \quad (10.1)$$

$$A_0 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla A_0) = 0 \quad ; \quad (10.2)$$

$$\tilde{A}_1 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla \tilde{A}_1) = -i \cdot \Delta A_0 ; \quad (10.3)$$

$$\tilde{A}_m \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla \tilde{A}_m) = -i \Delta \tilde{A}_{m-1} ; \quad (10.m+2)$$

записанная в размерных переменных. В этих уравнениях все неизвестные функции  $\tilde{A}_m(\vec{r})$  связаны с функциями  $\tilde{a}_m(\rho)$  системы (10)' соотношениями

$$\tilde{A}_m(\vec{r}) = (\tilde{a}_m(\rho) / \Lambda^m)$$

и в отличие от  $\tilde{a}_m(\rho)$ , которые имеют размерность поля  $\tilde{U}$ , имеют разные размерности. Первое (10.1) и второе (10.2) уравнения системы (10) совпадают соответственно с *уравнениями эйконала* (6) и *переноса* (7). Уравнения (6) и (7) справедливы даже в предельном случае, когда параметр  $k \rightarrow \infty$  и когда формально все остальные уравнения системы (10) не могут быть получены. Эти уравнения называют также *уравнениями геометрической оптики нулевого приближения для уравнения Гельмгольца*. Третье и последующие уравнения системы (10) для амплитудных коэффициентов  $\tilde{A}_1(\vec{r}), \tilde{A}_2(\vec{r})$  называются *уравнениями переноса первого, второго и т.д. приближений*.

Система (10) получается непосредственно из **уравнения Гельмгольца** (1), если его решение представляется в виде асимптотического ряда

$$\tilde{U}(\vec{r}) = \left\{ A_0(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} (1/k)^m \tilde{A}_m(\vec{r}) \right\} \cdot \exp\{-ik\Psi(\vec{r})\} \quad (9*)$$

по степеням малого параметра  $(1/k)$ , имеющего размерность длины. Несмотря на некоторые трудности, связанные с сопоставлением величин разных размерностей, именно такой подход широко используется в литературе, поскольку в конечном итоге приводит к той же системе уравнений (10), что и более строгий с математической точки зрения метод, в котором применяется безразмерный малый параметр  $\mu$ .

Определение поля в приближении *го* сводится к решению уравнений (10). Эти уравнения проще исходного **уравнения Гельмгольца** по двум причинам. Во-первых, эти уравнения в частных производных 1-го порядка, а, во-вторых, их решение сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения (6) и (7) являются скалярными и не учитывают поляризационные эффекты. Поскольку даже в названии метода отражено его широкое использование для описания распространения электромагнитных волн, где роль поляризационных эффектов чрезвычайно велика, то представляется крайне необходимым получить уравнения *го* непосредственно из уравнений Максвелла.

## Пункт 2. *Выход уравнений го из уравнений Максвелла.*

Воспользуемся системой уравнений Максвелла в форме (B.7), которая описывает гармонические процессы в неоднородной среде, а также следствием этой системы, **уравнением Гельмгольца** (B.8) для векторной комплексной амплитуды

электрического поля  $\tilde{\vec{E}}^2$ . В простейшем случае однородной ( $\nabla\mu=\nabla\varepsilon=0$ ) и изотропной ( $|\vec{n}|=\bar{n}=const$ ) среды система (B.7) имеет решение

$$\tilde{\vec{E}}=\vec{E}_0 \exp\{i[\bar{\varphi}-k\cdot\bar{n}(\vec{s}_0\cdot\vec{r})]\}; \quad \tilde{\vec{H}}=\vec{H}_0 \exp\{i[\bar{\varphi}-k\cdot\bar{n}(\vec{s}_0\cdot\vec{r})]\}, \quad (11)'$$

которое описывает распространение однородной плоской волны электромагнитного поля в направлении орта  $\vec{s}_0$  и полностью аналогично (2). Поля  $\tilde{\vec{E}}$  и  $\tilde{\vec{H}}$  согласно (B.7.3) и (B.7.4), представленным в форме

$$(\vec{E}_0\cdot\vec{s}_0)=0; \quad (B.7.3)' \quad (\vec{H}_0\cdot\vec{s}_0)=0, \quad (B.7.4)'$$

ориентированы перпендикулярно направлению распространения  $\vec{s}_0$  и в соответствии с (B.7.1) и (B.7.2), представленным в виде

$$\bar{n}[\vec{s}_0\times\vec{E}_0]=\mu\cdot\vec{H}_0; \quad (B.7.1)' \quad \bar{n}[\vec{s}_0\times\vec{H}_0]=-\varepsilon\cdot\vec{E}_0, \quad (B.7.2)'$$

ортогональны друг другу. Это хорошо известное частное решение даёт основание искать решение (B.7) для неоднородной среды в виде

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r})=\left\{\vec{E}_0(\vec{r})+\sum_{m=1}^{\infty}(1/ik)^m\tilde{\vec{E}}_m(\vec{r})\right\}\cdot\exp\{-ik\Psi(\vec{r})\}; \quad (11)$$

$$\tilde{\vec{H}}(\vec{r})=\left\{\vec{H}_0(\vec{r})+\sum_{m=1}^{\infty}(1/ik)^m\tilde{\vec{H}}_m(\vec{r})\right\}\cdot\exp\{-ik\Psi(\vec{r})\}, \quad (12)$$

где амплитуды полей  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  - действительные величины. Подставляя (11) и (12) в уравнения (B.7) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях малого размерного параметра ( $1/k$ ), получим систему уравнений нулевого приближения

$$[\nabla\Psi\times\vec{E}_0]=\mu\cdot\vec{H}_0; \quad (13.1) \quad [\nabla\Psi\times\vec{H}_0]=-\varepsilon\cdot\vec{E}_0, \quad (13.2)$$

$$(\vec{E}_0\cdot\nabla\Psi)=0; \quad (13.3) \quad (\vec{H}_0\cdot\nabla\Psi)=0, \quad (13.4)$$

из которой следует взаимная перпендикулярность векторов  $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \nabla\Psi$ . Если из (13.1) выразить  $\vec{H}_0$  и подставить в (13.2), то с учётом (13.3) получится уравнение эйконала в виде

$$(\nabla\Psi\cdot\nabla\Psi)=\varepsilon\mu\equiv n^2(\vec{r}). \quad (13.5)$$

Уравнения (13) и есть уравнения *го* для электромагнитного поля. Из них можно получить, в частности, *представление о поляризации поля*. Как нетрудно увидеть, поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  связаны друг с другом так же, как в плоской волне, и образуют правую тройку с  $\nabla\Psi$  (Рис. 1.1). Это *представление* носит локальный характер или в некотором приближении справедливо только на небольшом участке. Если ввести орт

$$\vec{s}_0=(\nabla\Psi/|\nabla\Psi|)\equiv(\nabla\Psi/n), \quad (14)$$

---

<sup>2)</sup> Можно использовать также **уравнение Гельмгольца** для векторной комплексной амплитуды магнитного поля  $\tilde{\vec{H}}$ . Оно полностью эквивалентно (B.8) и получается из него по принципу двойственности с помощью замен (B.9).

по направлению  $\nabla\Psi$ , то нетрудно убедиться, что (13) и (B.7)' полностью совпадают по содержанию.

Уравнения нулевого приближения для амплитуды поля можно получить из условия совместности уравнений нулевого и первого приближений<sup>3)</sup>. Но можно использовать для этой цели **уравнение Гельмгольца** (B.8). Подставим (11) в (B.8) и после преобразований получим разложение

$$\begin{aligned} \hat{K}\{\vec{E}_0\} - (ik)^{-1}\hat{L}\{\vec{E}_0\} + \\ + (ik)^{-2}\hat{K}\{\tilde{\vec{E}}_1\} + (ik)^{-2}\hat{M}\{\vec{E}_0\} - \\ - (ik)^{-2}\hat{L}\{\tilde{\vec{E}}_1\} + (ik)^{-2}\hat{K}\{\tilde{\vec{E}}_2\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

в ряд по малому параметру  $(1/ik)$ , в котором в качестве коэффициентов при степенях малого параметра выступают функционалы

$$\hat{K}\{\tilde{\vec{E}}\} = \left\{ \langle -(\nabla\Psi)^2 + n^2 \rangle \cdot \tilde{\vec{E}} \right\}; \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}\{\tilde{\vec{E}}\} = \left\{ \langle (\nabla\Psi \cdot \nabla(\ln\mu)) - \Delta\Psi \rangle \tilde{\vec{E}} - \right. \\ \left. - 2 \left\langle \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \nabla(\ln n) \right) \nabla\Psi \right\rangle - 2 (\nabla\Psi \cdot \nabla) \tilde{\vec{E}} \right\}; \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$\hat{M}\{\tilde{\vec{E}}\} = \left\{ \left[ \left[ \nabla \times \tilde{\vec{E}} \right] \times \nabla(\ln\mu) \right] - \Delta \tilde{\vec{E}} - \nabla \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \nabla(\ln\varepsilon) \right) \right\}. \quad (16.3)$$

Приравнивая в (15) последовательно нулю все члены одного порядка малости, получим вначале из членов нулевого приближения (16.1) с учётом условия  $\vec{E}_0 \neq 0$  уравнение эйконала в виде (10.1). Затем из равенства нулю членов первого порядка малости, учитывая уравнение эйконала, получим вытекающее из (16.2) уравнение для векторной амплитуды электрического поля

$$\{(\nabla\Psi \cdot \nabla(\ln\mu)) - \nabla^2\Psi\}\vec{E}_0 - 2\{(\vec{E}_0 \cdot \nabla(\ln n))\nabla\Psi\} - 2(\nabla\Psi \cdot \nabla)\vec{E}_0 = 0 \quad (17_E)$$

и, применяя принцип двойственности (B.9), найдём аналогичное уравнение

$$\{(\nabla\Psi \cdot \nabla(\ln\varepsilon)) - \nabla^2\Psi\}\vec{H}_0 - 2\{(\vec{H}_0 \cdot \nabla(\ln n))\nabla\Psi\} - 2(\nabla\Psi \cdot \nabla)\vec{H}_0 = 0. \quad (17_H)$$

для векторной амплитуды магнитного поля.

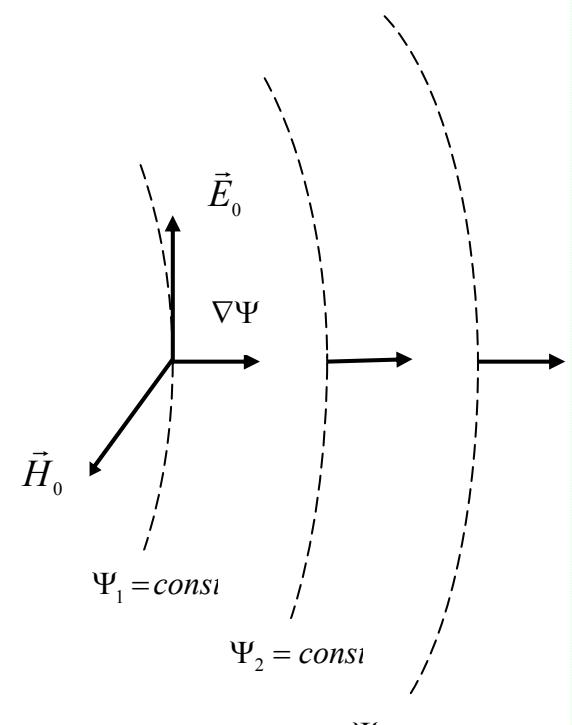


Рис. 1.1

<sup>3)</sup> Такая процедура проделана в книге В.И.Бабича, В.С.Булдырева «Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн» (гл.1, п.5).

## § 2. Общие свойства и некоторые методы решения уравнения эйконала.

### Пункт 1. Аналогия эйконала и действия в механике.

Уравнение эйконала (1.10.1) является основным уравнением го. Это - **нелинейное уравнение в частных производных первого порядка**, которое имеет в общем случае три независимых переменных. В соответствии с общей теорией решения уравнений в частных производных первого порядка<sup>1)</sup> его удобно представить в виде нелинейного уравнения с 6-тью переменными величинами

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 - n^2(\vec{r}) \equiv \sum_{i=1}^3 (p_i^2) - n^2(\vec{r}) \equiv F(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = 0 . \quad (1)$$

Помимо обозначения  $F()$  левой части уравнения (1) и обозначения

$$\nabla \Psi \equiv \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \vec{x}_0 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \vec{y}_0 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \vec{z}_0 = \vec{p} \equiv p_x \vec{x}_0 + p_y \vec{y}_0 + p_z \vec{z}_0 \equiv \sum_{i=1}^3 p_i \vec{x}_i^0 , \quad (2)$$

далее будут использоваться также следующие обозначения:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = X_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \equiv X_i; \quad \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = P_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \equiv P_i . \quad (2)$$

Решение уравнений типа (1) сводится к интегрированию системы 7-ми (в общем случае  $[2N+1]$ ) обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = - \frac{dp_1}{X_1} = - \frac{dp_2}{X_2} = - \frac{dp_3}{X_3} = \frac{d\Psi}{\sum_{i=1}^3 p_i P_i} \Leftrightarrow ds_1 , \quad (3)$$

записанных в так называемой **характеристической форме**. В уравнениях (3) все переменные ( $x_i, p_i$ ) предполагаются **зависящими от одного параметра**  $s_1$ , смысл которого будет ясен из дальнейшего изложения. Индекс 1 в дифференциале  $ds_1$  отражает тот факт, что система (3) получена из уравнения (1), которое можно представить в разных формах. Постоянные интегрирования должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Уравнение эйконала (1.10.1) имеет особенность, которая делает его частным случаем нелинейного уравнения (1). Его всегда можно разрешить относительно одной (любой) из частных производных первого порядка. Будем считать, что уравнение (1) разрешено относительно  $p_z \equiv p_3$  и потому имеет вид

$$\hat{F}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \equiv p_3 + H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2) = 0 . \quad (4)$$

Тогда в соответствии с (2) произойдут небольшие изменения в обозначениях

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial H}{\partial x_i} = \hat{X}_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2); \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial p_{1,2}} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} = \hat{P}_{1,2}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2); \quad \hat{P}_3 = 1 , \quad (5)$$

и система уравнений в характеристической форме (3) примет вид

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = - \frac{dp_3}{\frac{\partial H}{\partial x_3}} = - \frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = - \frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = - \frac{d\Psi}{p_3 + \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}} \Leftrightarrow ds_2 . \quad (6)$$

<sup>1)</sup> См., например, В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958 г.

Из (6) видно, что независимая переменная  $x_3 = z$  в этой новой системе уравнений в *характеристической форме*<sup>2)</sup> играет роль произвольного параметра  $s_2$ . Поэтому число уравнений в *характеристической форме* сокращается на единицу.

Если в системе (6) независимую переменную, имеющую смысл изменяющегося параметра, временно обозначить новым символом

$$z \equiv x_3 = s_2 \Rightarrow t , \quad (7)$$

то для переменных  $x_{1,2}$  и  $p_{1,2}$  из уравнений (2.6) получим систему уравнений

$$\frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} , \quad (8)$$

которая именно в такой форме часто встречается в теоретической механике и называется *канонической системой*. В уравнениях классической механики функция  $H$  называется *функцией Гамильтона* и является энергией механической системы, выраженной через обобщенные координаты  $x_i$  и обобщённые импульсы  $p_i$ , а  $t$  обозначает текущее время<sup>3)</sup>. Если использовать обозначение (7) и представить  $p_3$  в виде

$$p_3 \equiv (\partial \Psi / \partial x_3) \Rightarrow (\partial \Psi / \partial t) ,$$

то (4) приобретёт смысл уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H(t, x_i, p_i) \equiv -H\left(t, x_i, \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\right) , \quad (9)$$

в котором  $\Psi$  играет роль *действия* (обычно обозначаемого в механике символом  $S$ ). Последнее по счёту из уравнений в характеристической форме (6) позволяет получить для *действия* (или эйконала) уравнение первого порядка в виде

$$\frac{d \Psi}{d s_2} \Rightarrow \frac{d \Psi}{d t} = \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H(t, x_i, p_i) \equiv L(t, x_i, p_i) , \quad (10)$$

в котором функция  $L(t, x_i, p_i)$  в механике называется функцией Лагранжа.

Т.о., решение уравнения эйконала и расчёт величины  $(\Psi_2 - \Psi_1)$  при изменении параметра  $s_2$  в заданных пределах полностью эквивалентны вычислению *действия* за некоторый промежуток времени движения механической системы по её траектории в фазовом пространстве.

## Пункт 2. Физический смысл эйконала и связанных с ним понятий.

Рассмотрим связанные с эйконалом понятия и подходы к решению уравнения (1.10.1).

<sup>2)</sup> Поскольку уравнения (1) и (4) имеют разные формы, то отличаются друг от друга соответствующие им системы (3) и (6) обыкновенных уравнений в *характеристической форме*.

<sup>3)</sup> Следует заметить, что в уравнениях (8) осталось только две координаты ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ) и три импульса ( $p_1 = p_x$ ,  $p_2 = p_y$ ,  $p_3 = p_z$ ).

1) Поскольку термин *то* возник в связи с распространением света, то вначале установим связь эйконала с потоком мощности электромагнитного излучения. Используя уравнения нулевого приближения (1.13), найдём среднее за период высокочастотного колебания значение вектора Пойнтинга

$$\bar{\vec{P}}^T = \frac{c}{8\pi} \left[ \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right] = \left( \frac{c}{8\pi\mu} \right) \left[ \tilde{\vec{E}} \times [\nabla\Psi \times \tilde{\vec{E}}^*] \right] = \left( \frac{c}{8\pi\mu} \right) (\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^*) \nabla\Psi = \left( \frac{c n}{8\pi\mu} \right) |\vec{E}_0|^2 \vec{s}_0 . \quad (11)$$

Из (11) следует, что *направление усреднённого по времени вектора Пойнтинга совпадает с нормалью к геометрическому волновому фронту*. Это означает, что *геометрические световые лучи*, по которым распространяется световая энергия, можно определить как траектории (Рис. 1.2), ортогональные к геометрическим волновым фронтам

$\Psi = \text{const}$ . Мы будем приписывать *геометрическим световым лучам* направление  $\vec{s}_0$ , тем самым полагая, что в каждой точке

оно совпадает с направлением *усреднённого вектора Пойнтинга*<sup>4)</sup>. Из этого определения *луча* становится понятным, что орт  $\vec{s}_0$  можно назвать *ортом*

*лучевого вектора*. Т.о., *линии, параллельные вектору  $\vec{s}_0$ , называются лучами*, а сам *вектор  $\vec{s}_0$  - ортом лучевого вектора*.

2) Рассмотрим часть траектории *луча* на Рис. 1.3. Из рисунка следует определение вектора  $\vec{s}_0$  как

$$\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} , \quad (12)$$

где  $ds$  - элемент дуги, а радиус-вектор

$\vec{r}(s)$  точки, расположенной на *луче*, рассматривается как функция длины  $s$

*дуги луча*. Однако для определения траектории *луча* и, следовательно, длины дуги  $s$  требуется знание эйконала  $\Psi$ , который удовлетворяет нелинейному уравнению (1).

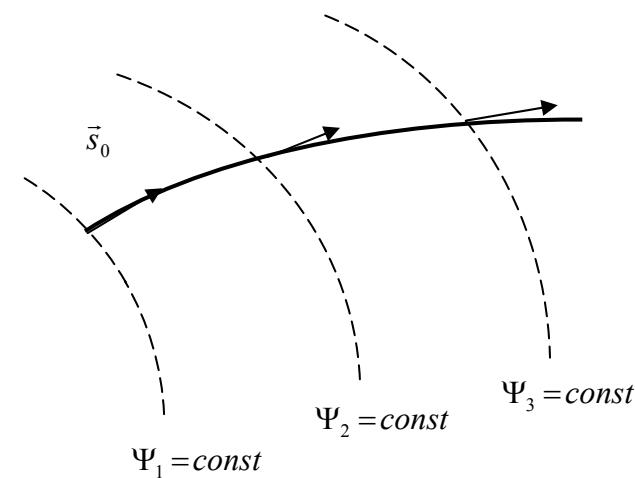


Рис. 1.2

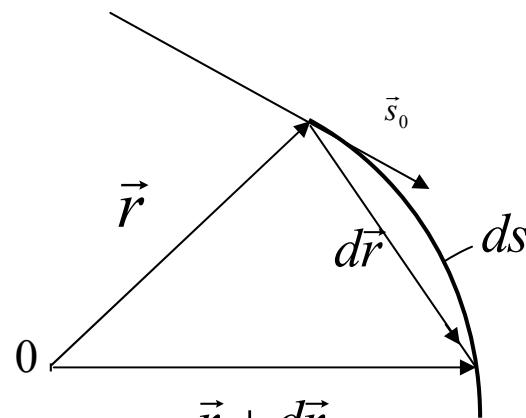


Рис. 1.3

<sup>4)</sup> Такое определение *световых лучей* справедливо лишь для изотропных сред. В анизотропной среде нормаль к волновому фронту в общем случае не совпадает с направлением вектора Пойнтинга.

Обратимся к системе уравнений в *характеристической форме* (3) и в соответствии с (2) найдём знаменатели всех отношений

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv X_i = -2n \frac{\partial n}{\partial x_i} ; \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv P_i = 2p_i ; \quad \sum_{i=1}^3 p_i P_i = 2n^2 , \quad (13)$$

образующих эту систему уравнений. Заметим, что каждое отношение в (3) можно умножить на один и тот же множитель, не равный нулю, и при этом все равенства сохраняются. Такой *интегрирующий множитель* во многих случаях упрощает процедуру решения уравнения, позволяя получить более простую форму параметрического представления *характеристических линий*. В нашем случае в качестве *интегрирующего множителя* удобно выбрать  $2n(x, y, z)$ , что позволяет представить уравнения (3) в следующей *характеристической форме* ( $i = 1, 2, 3$ )

$$n \frac{dx_i}{p_i} = \frac{d\Psi}{n} = \frac{dp_i}{(\partial n / \partial x_i)} = ds_3 \quad (3)'$$

или в виде системы из 7-ми обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds_3} = \frac{p_i}{n} ; \quad \frac{dp_i}{ds_3} = \frac{\partial n}{\partial x_i} ; \quad \frac{d\Psi}{ds_3} = n . \quad (14)$$

Умножая первые шесть скалярных уравнений системы (14) на соответствующие орты  $\vec{x}_i^0$  и используя определения (2) и (1.14), можно получить два векторных уравнения.

Одно из них находится как

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{ds_3} \vec{x}_i^0 \equiv \underline{\underline{d\vec{r}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{n} \vec{x}_i^0 \equiv \underline{\underline{\frac{d\vec{r}}{n}}} \equiv \underline{\underline{\vec{s}_0}} \equiv \underline{\underline{\frac{d\vec{r}}{ds}}} \quad (12)'$$

и полностью совпадает с (12) не только по форме, но и по существу<sup>5)</sup>.

Таким образом, при определённом (целесообразном и оптимальном) выборе *интегрирующего множителя* решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в *характеристической форме* (3) можно искать в виде функций одного параметра  $s_3 \equiv s$ , имеющего смысл длины дуги траектории *луча*.

3) Второе полученное из (14) векторное уравнение<sup>6)</sup>

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dp_i}{ds} \vec{x}_i^0 \equiv \underline{\underline{\frac{d\vec{p}}{ds}}} \equiv \underline{\underline{\frac{d}{ds} \left\{ n \frac{d\vec{r}}{ds} \right\}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial n}{\partial x_i} \vec{x}_i^0 \equiv \underline{\underline{\nabla n}} \quad (15)$$

вместе с граничными условиями, задающими направление луча в точке  $\vec{r} = \vec{r}(0)$ , определяет траекторию *луча*  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Используя определения градиента по поперечным координатам  $\nabla_{\perp} = \nabla - \vec{s}_0 (\vec{s}_0 \cdot \nabla)$  и производной по на-

<sup>5)</sup> Соотношение  $(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \underline{\underline{(ds)^2}} = (\vec{s}_0 \cdot \vec{s}_0)(ds_3)^2 = \underline{\underline{(d\bar{s})^2}}$ , вытекающее из (12)', с полной очевидностью свидетельствует о том, что выбранный при интегрировании уравнений (3)' параметр  $s_3$  является длиной дуги  $s$  траектории *луча*.

<sup>6)</sup> Уравнение (15) может быть найдено также из вариационного принципа Ферма, согласно которому интегральное изменение эйконала (или величина *действия* на языке теоретической механики) вдоль траектории *луча* должно иметь минимальное значение.

правлению  $(\partial n / \partial s) = (\vec{s}_0 \cdot \nabla n)$ , уравнение (15) можно преобразовать в уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \equiv \frac{d \vec{s}_0}{ds} = \nabla_{\perp} \ln n , \quad (15^*)$$

которое представляет собой закон изменения траектории **луча**, т.е. закономерности трансформации **лучевого вектора**.

4) Если уравнение (15) будет решено и траектория **луча** будет определена, то фаза (или эйконал) определится из уравнения<sup>7)</sup>

$$\frac{d \Psi}{ds} = n \equiv \frac{c}{v_f} , \quad (16)$$

являющегося седьмым по счёту в системе (14). Изменение эйконала может быть найдено в виде криволинейного интеграла вдоль траектории **луча**

$$\Delta \Psi_{12} = \int_{Q_1}^{Q_2} n(\vec{r}(s)) ds = \Psi_2 - \Psi_1 = c \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{ds}{v_f(\vec{r}(s))} = c \cdot \Delta T_{12} , \quad (17)$$

пересекающего волновые фронты (Рис. 1.2). Величина этого интеграла, называемого **оптической длиной луча**, обратно пропорциональна фазовой скорости  $v_f$  волны и тем самым прямо пропорциональна времени  $\Delta T_{12}$  распространения поля (света) между точками на волновых фронтах  $\Psi_{1,2}$  (рис. 1.2). Таким образом, в неоднородной среде **оптическая длина между точками луча, находящимися на двух волновых фронтах, равна произведению скорости в эталонной среде (скорости света в вакууме) на время распространения волны (света) от одного волнового фронта до другого.**

Это свойство длины дуги вдоль траектории делает удобным использование координат, связанных с **лучом**. Точки на **луче** можно характеризовать оптической

<sup>7)</sup> Заметим, что уравнение (16) является следствием определения орта  $\vec{s}_0$  как вектора, ортогонального к волновому фронту (1.14) и одновременно касательного к траектории **луча** (12). Совместность этих двух свойств орта  $\vec{s}_0$  позволяет получить (16) непосредственно из (1.14) путём преобразования  $\nabla \Psi$  в производную по направлению **лучевого вектора**:

$$(\vec{s}_0 \cdot \nabla \Psi) \equiv (d \Psi / ds) = n (\vec{s}_0 \cdot \vec{s}_0) \equiv n .$$

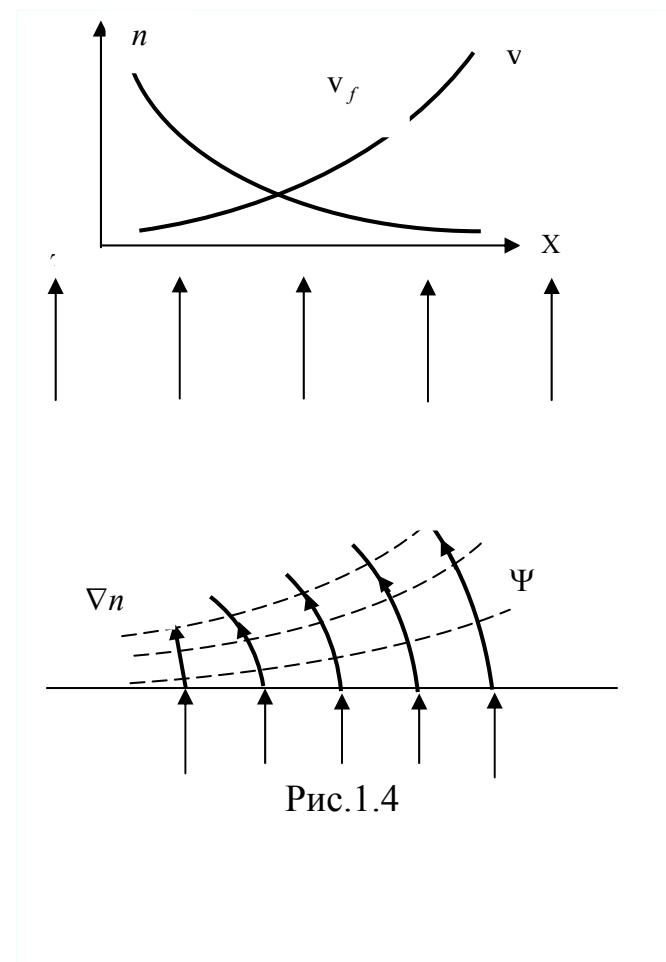


Рис.1.4

длинной (величиной эйконала или *действия*). Положение точки *луча* на поверхности волнового фронта позволяет определить направление *лучевого вектора*  $\vec{s}_0$  и уравнение *луча*.

Выражение (17) для *оптической длины луча* позволяет по заданной зависимости  $n(\vec{r})$  установить зависимость  $v_f(\vec{r})$ , затем по известному начальному волновому фронту, используя соотношение

$$(\Delta s)_{12} \equiv v_f(\vec{r})(\Delta T)_{12}, \quad (18)$$

построить волновой фронт, ближайший к нему, и, наконец, на этом качественном уровне определить тенденцию трансформации волновых фронтов и картину поведения лучей в такой среде.

**Пример.** На границу раздела сред с показателями преломления  $n = const$  и  $n(x)$  падает плоская волна (Рис. 1.4). Качественная картина поведения лучей в верхней среде изображена на Рис. 1.4. Она определяется по структуре волновых фронтов, расстояние между которыми согласно (18) пропорционально фазовой скорости  $v_f$ . В полном согласии с уравнением (15) *лучи* искривляются в сторону увеличения  $n$ , в сторону роста  $\nabla n$ .

5) Можно ввести определение оптической длины между двумя точками (1) и (2) на траектории луча (Рис. 1.5) как интеграл по произвольному контуру

$$(\Delta \Psi_{12})_\Gamma = \int_{(1)}^{(2)} n d\Gamma.$$

Согласно принципу Ферма (принципу наименьшего *действия* в механике) оптический путь между точками (1) и (2) по действительному лучу ( $\Gamma_L$ ) короче оптического пути по любому другому контуру ( $\Gamma$ ), соединяющему эти точки, т.е.

$$\int_{\Gamma_L} n ds \leq \int_{\Gamma} n d\Gamma \quad (\text{FRM})$$

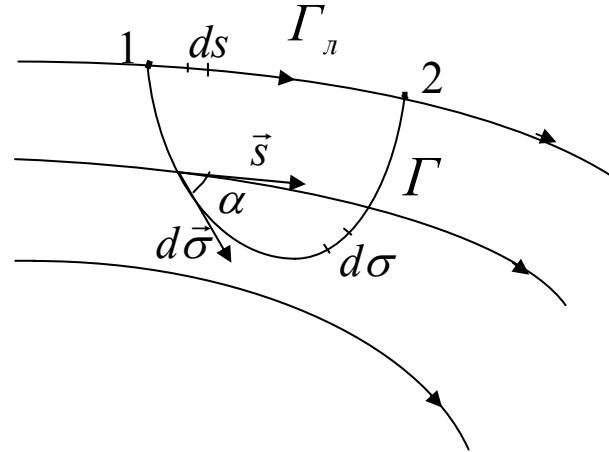


Рис. 1.5

Докажем это утверждение, опираясь на свойство эйконала как *потенциального поля*.

Поскольку *лучевой вектор* является потенциальным вектором

$$\text{rot} \nabla \Psi \equiv \text{rot} (\vec{s}_0 n) = 0, \quad (19')$$

то в соответствии с теоремой Стокса

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot} \nabla \Psi \bullet d\vec{\Sigma}) = \oint_L (\vec{s}_0 n \bullet d\vec{L}) = 0 \quad (19)$$

получим, что интеграл по замкнутому контуру  $L$  от вектора  $\nabla \Psi = \vec{s}_0 n$  будет равен нулю. Представив длину контура  $L$  в виде суммы  $L = \Gamma + \Gamma_L$  пути по

действительному лучу  $\vec{s}_0 ds$  и дополнительному пути  $d\vec{\Gamma}$  (рис. 1.5), из последнего равенства получим выражение

$$\int_{\Gamma_L} n (\vec{s}_0 \cdot \vec{s}_0) ds \equiv \int_{\Gamma_L} n ds = \int_{\Gamma} n (\vec{s}_0 \cdot d\vec{\Gamma}) = \int_{\Gamma} n \cos \alpha d\Gamma < \int_{\Gamma} n d\Gamma , \quad (20)$$

из которого с полной очевидностью следует, что путь  $\Gamma_L$  по действительному **лучу** короче любого другого пути  $\Gamma$ . Таким образом, **на истинном луче вариация оптического пути**

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} n ds = 0 \quad (21)$$

**Пункт 3. Дифференциальные уравнения второго порядка для лучей.**

**Аналогия уравнений го и уравнений движения материальной точки.**

Как отмечалось выше, при интегрировании системы уравнений в **характеристической форме** (3), составляющими которой являются выражения (13), можно использовать различные интегрирующие множители. Для более глубокого понимания аналогии между системами уравнений, описывающими движение материальной частицы в потенциальном поле и **траектории луча** в неоднородной среде, удобно взять в качестве интегрирующего множителя в системе уравнений (3) постоянный коэффициент 2, что эквивалентно умножению на  $n$  каждого из 7-ми уравнений (14). В такой новой системе уравнений

$$\frac{dx_i}{2ds_1} = p_i ; \quad \frac{dp_i}{2ds_1} = n \frac{\partial n}{\partial x_i} ; \quad \frac{d\Psi}{2ds_1} = n^2 \quad (14')$$

следует выбрать в качестве дифференциала параметра интегрирования величину<sup>7)</sup>  
 $ds_4 \equiv d\tau = (ds_3 / n) \equiv (ds / n) = 2ds_1$ . (22)

Умножая первые шесть скалярных уравнения системы (14') на соответствующие орты  $\vec{x}_i^0$  и используя определения (2) и (1.14), получим для описания изменения координат луча и градиента эйконала два векторных уравнения

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p} ; \quad (23)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = n \nabla n = \frac{1}{2} \nabla n^2 \equiv \frac{1}{2} \nabla (\epsilon \mu) . \quad (24)$$

Если уравнение (23) рассматривать как определение импульса частицы с массой  $m=1$ , то уравнение второго порядка (24) описывает изменение импульса и совпадает с уравнением движения этой частицы. Действующая на частицу сила

<sup>7)</sup> Величина  $\tau$  определяется как  $\tau = \int \frac{ds}{n} = \int \frac{\mathbf{v}_f}{c} ds = \int \mathbf{v}_f dt$ , где  $dt$  – время, необходимое для прохождения светом в вакууме расстояния  $ds$  вдоль луча.

$$\vec{F} = \nabla \left( \frac{\epsilon \mu}{2} \right) = \nabla \left( \frac{n^2}{2} \right) = -\nabla U_{nom} \quad (25)$$

потенциальна и направлена по  $\nabla n^2$ . Следовательно, *лучи* искривляются в сторону увеличения показателя преломления среды. Роли потенциальной энергии и гамильтониана классической частицы играют соответственно величины

$$U_{nom} = U_0 - \frac{\epsilon \mu}{2} ; \quad H = \frac{1}{2} (\vec{p} \cdot \vec{p}) + U_0 - \frac{\epsilon \mu}{2} . \quad (26)$$

Таким образом, движение луча представляется как движение частицы в потенциальном поле, что означает наличие **полной аналогии** между геометрической оптикой и классической механикой материальной точки.

### §3 Уравнение переноса и закономерности изменения интенсивности в го

Уравнение переноса

$$A_0 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla A_0) = 0 ; \quad (1.10.2)$$

содержит частные производные, но при известном эйконале  $\Psi(s)$  фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$2 \frac{d A_0}{d s} + A_0 \left( \frac{\Delta \Psi}{n} \right) = 0 , \quad (1)$$

в котором дифференцирование ведётся по лучевой координате  $s$ .

Умножим (1.10.2) на  $A_0$  и, принимая во внимание соотношения

$$\nabla A_0^2 = 2 A_0 \nabla A_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} B \vec{a} = B \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla B) ,$$

преобразуем его в уравнение

$$\operatorname{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \operatorname{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0 \quad (2)$$

для квадрата амплитуды поля волны. Прежде чем анализировать свойства этого уравнения и находить его решения, введём понятие **интенсивности света** и по аналогии также **интенсивности поля волны**.

#### Пункт 1. Интенсивность (света, поля волны) и закон сохранения энергии.

В электромагнитной теории **интенсивностью света**  $I$  называется поток энергии поля, и определяется  $I$  как абсолютное значение от (введённого формулой (2.11)) среднего по времени вектора Пойнтинга:

$$\bar{I}^r = \frac{c}{8\pi} \left[ \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right] = \left( \frac{c}{8\pi\mu} \right) \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^* \right) \nabla \Psi = \left( \frac{c n}{8\pi\mu} \right) \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 \vec{s}_0 \equiv I \vec{s}_0 . \quad (2.11)' .$$

Из курса электродинамики известно выражение для средней по времени плотности энергии электромагнитного поля

$$\bar{w}^r = \frac{\epsilon}{8\pi} \left| \tilde{\vec{E}} \right|^2 .$$

Подставляя это выражение в (2.11)', получим полное определение **интенсивности** света (волны электромагнитного поля) в виде

$$\overline{\vec{\Pi}}^T \equiv I \vec{s}_0 = \left( \frac{c}{8\pi\mu} \right) \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^* \right) \nabla \Psi = \left( \frac{c n}{8\pi\mu} \right) \left| \vec{E}_0 \right|^2 \vec{s}_0 = \overline{w}^T (c/n) \vec{s}_0 \equiv \overline{w}^T \mathbf{v}_f \vec{s}_0 . \quad (3)$$

В отсутствие потерь (в непроводящей среде) и сторонних источников энергии (например, механической работы) справедлив закон сохранения энергии электромагнитного поля, который для высокочастотного поля с медленно изменяющейся амплитудой записывается в дифференциальной форме в виде

$$(\partial / \partial t) \overline{w}^T + \operatorname{div} \overline{\vec{\Pi}}^T = 0 . \quad (4')$$

В стационарном случае это выражение упрощается до

$$\operatorname{div} \overline{\vec{\Pi}}^T = 0 . \quad (4'')$$

В таком виде оно справедливо и в приближении  $\omega$ , когда поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  действительны. В *стационарном случае* применительно к нулевому приближению  $\omega$  закон сохранения энергии трансформируется в уравнение для интенсивности света

$$\operatorname{div} I \vec{s}_0 \equiv \frac{c (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}{8\pi\mu} \cdot \left\{ \frac{n}{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)} \cdot \frac{\partial (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}{\partial s} + \Delta \Psi - \left( \nabla \Psi \cdot \frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \right\} = 0 . \quad (4)$$

Подобно вектору Пойнтинга существует вектор Умова для волн звука. С помощью введённых формулами (B.10) - (B.19) величин его можно представить в виде нескольких эквивалентных друг другу выражений

$$\left( \vec{s}_0 \cdot \overline{\vec{\Pi}}_y^T \right) = \frac{1}{2} \tilde{p} \tilde{u}^* = \frac{1}{2\rho_0 v_s} \tilde{p} \tilde{p}^* = \frac{v_s^3}{2\rho_0} \tilde{\rho} \tilde{\rho}^* = \frac{\rho_0}{2} v_s \tilde{u} \tilde{u}^* = \frac{\rho_0}{2} v_s \omega^2 (\tilde{R} \cdot \tilde{R}^*) = I , \quad (5)$$

каждое из которых пропорционально квадрату модуля амплитуды колебания физической величины, включая амплитуду одномерного смещения  $\tilde{R} = (\tilde{u} / \omega)$  гидродинамических частиц. Аналогичное выражение имеет место и для *упругих волн*. В отсутствие потерь и источников, возбуждающих колебания среды, уравнение в виде (4) как следствие закона сохранения энергии (и соответственно интенсивности потока энергии) будет справедливо для волнового движения любой физической природы.

Образуем с помощью решения  $\tilde{U}$  уравнения Гельмгольца (1.1), имеющего вещественный показатель преломления  $n(\vec{r})$ , вектор в виде квадратичной формы

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2ik} (\tilde{U} \nabla \tilde{U}^* - \tilde{U}^* \nabla \tilde{U}) . \quad (6)$$

Прямым расчётом с использованием решения (1.4) этого уравнения, а также определения (1.14) лучевого вектора можно преобразовать вектор  $\vec{\Pi}$  к виду

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2ik} (\tilde{U} \nabla \tilde{U}^* - \tilde{U}^* \nabla \tilde{U}) = A^2 \nabla \Psi \equiv A^2 n \vec{s}_0 . \quad (6')$$

Если считать, что  $A \equiv A_0$  является решением уравнения переноса (1), то согласно (2) получим, что вектор  $\vec{\Pi}$  удовлетворяет такому же уравнению (отсутствия источников)

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \operatorname{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \operatorname{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0 , \quad (7)$$

как и вектор Пойнтинга. Это означает, что вектор  $\vec{P}$  всегда можно принять в качестве меры плотности потока энергии или просто считать

$$\vec{P} = \frac{1}{2ik} (\tilde{U} \nabla \tilde{U}^* - \tilde{U}^* \nabla \tilde{U}) = A^2 \nabla \Psi \equiv A^2 n \vec{s}_0 \equiv I \vec{s}_0 \quad (8)$$

**интенсивностью** поля волны.

## Пункт 2. Законы изменения интенсивности в го.

Проанализируем уравнение (2). Для этого рассмотрим поверхность  $\Psi_1 = const$  и выделим на ней малую площадь  $d\vec{\Sigma}_1$ , ограниченную пучком лучей (Рис. 1.6), в пределах которой  $A_0 = A_{01}$ . Проведём лучи до пересечения с поверхностью  $\Psi_2 = const$ , на которой **пучок лучей**, называемый также **лучевой трубкой**

ограничивает площадь  $d\vec{\Sigma}_2$ . Проинтегрируем уравнение (2) по объёму  $\Delta V$  **лучевой трубы**. Применим теорему Остроградского-Гаусса, позволяющую преобразовать объёмный интеграл от дивергенции вектора Пойнтинга в интеграл по замкнутой вокруг объёма поверхности  $\Delta\Sigma$

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} dV = \iint_{\Delta\Sigma} (A_0^2 n \vec{s}_0 \cdot \vec{n}_0 d\Sigma) = 0 \quad , \quad (9)$$

которую пронизывает поток вектора Пойнтинга. В формуле (9) введён единичный вектор нормали к поверхности  $\vec{n}_0$ , внешний по отношению к рассматриваемому объёму. На боковой поверхности лучевой трубы имеем  $(\vec{s}_0 \cdot \vec{n}_0) = 0$ , а на торцах  $- (\vec{s}_0 \cdot \vec{n}_0)_{1,2} = \mp 1$ . Поэтому из (9) с учётом обозначения (8) получаем, что величина энергии

$$I_1 d\Sigma_1 = I_2 d\Sigma_2 = I d\Sigma = const \quad , \quad (10)$$

переносимой вдоль лучевой трубы, остается постоянной.

Изменение  $d\Sigma(s)$  определяется из уравнения (2.15), а интенсивность - из уравнения (10). Решение этих уравнений при произвольной зависимости  $n(\vec{r})$  от координат может быть найдено только численными методами. Однако в некоторых простых случаях (например, для однородной среды) можно получить аналитическое решение этих уравнений.

*Однородная среда.*

В однородной среде уравнения (2.15) и (2.12') имеют решение

$$\vec{r} = \vec{s}_0 s + \vec{b} \quad ,$$

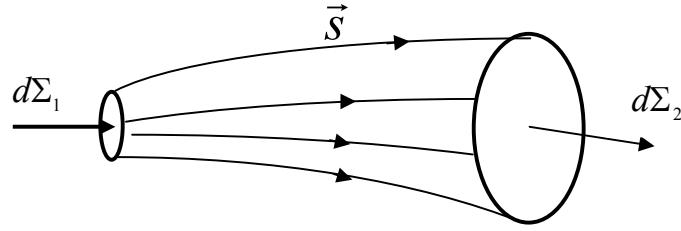


Рис. 1.6

из которого следует, что лучи – прямые линии.<sup>1)</sup> Возьмем на какой-либо из волновых поверхностей  $\Psi = \text{const}$  бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность в каждой своей точке имеет два различных главных радиуса кривизны и, следовательно, два центра кривизны (Рис. 1.7). Площадь выбранного элемента поверхности можно представить как

$$d\Sigma = R_1 R_2 d\varphi d\theta .$$

Это означает, что в однородной среде в соответствии с (10) интенсивность в **лучевой трубке** изменяется по закону

$$I = \frac{\text{const}_1}{d\Sigma} = \frac{\text{const}_2}{R_1 R_2} \equiv \text{const}_2 \cdot K , \quad (11)$$

где  $K = (1 / R_1 R_2)$  называется гауссовой (или второй) кривизной поверхности.

Вторая часть формулы (11) определяет изменение интенсивности вдоль **луча** как функцию расстояния от определённых точек (центров кривизны волновых поверхностей) на **луче**.

Если оба радиуса кривизны совпадают, то

$$A_0^2 = (C^2 / R^2) . \quad (11)'$$

В этом случае пучок **лучей** испускается точечным источником или сходится в точку. Поле фокусируется в точку или выходит из фокуса в виде сферической волны

$$\tilde{U} = (C / R) \exp \{ \mp i k R \} . \quad (12)$$

Волновые поверхности – концентрические сферы.

В общем случае (11) интенсивность обращается в  $\infty$  в центрах кривизны волновых поверхностей при  $R_1 = 0$  и  $R_2 = 0$ . Если применить это рассуждение ко всевозможным **лучам** пучка (Рис. 1.8a), то результат можно сформулировать следующим образом: интенсивность волны обращается в  $\infty$  на двух поверхностях, являющихся геометрическими местами двух главных центров кривизны каждой точки рассматриваемой части волновой поверхности. Эти поверхности называются **каустиками** (Рис. 1.8b).

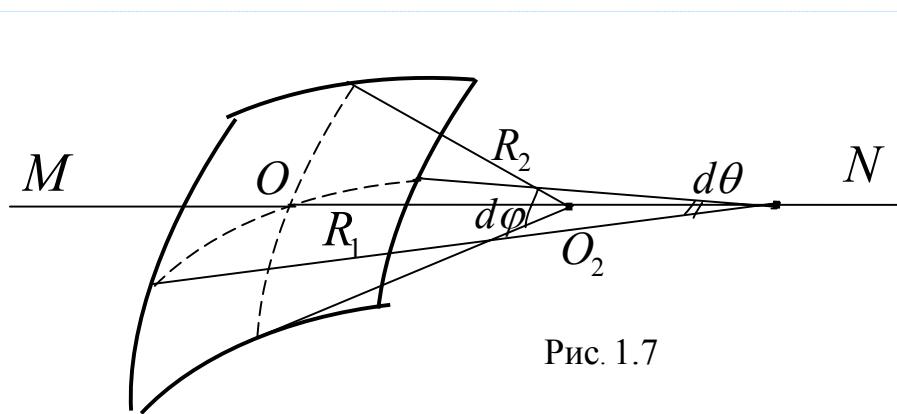


Рис. 1.7

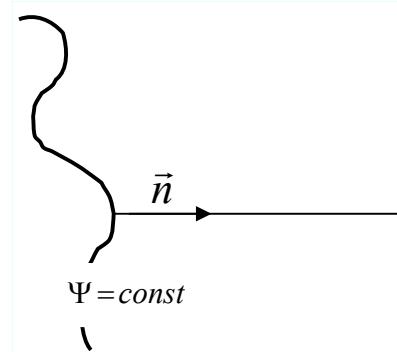


Рис. 1.8а

<sup>1)</sup> Следствие принципа Ферма – кратчайшее расстояние между двумя точками в однородной среде – прямая.

На *каустике* соседние лучи касаются друг друга, поэтому сечение лучевой трубы  $d\Sigma \rightarrow 0$  и, следовательно, интенсивность  $I \rightarrow \infty$ <sup>2)</sup>. *Каустики* фактически являются огибающими *лучей* (Рис. 1. 8b). Это второе определение *каустики* более общее, т.к. оно годится и для неоднородной среды. Поскольку каустические поверхности являются огибающими *лучей*, то *лучи* за *каустикой* не проникают, и в приближении геометрической оптики поле за *каустикой* равно нулю.

Если  $R_1 = R_2$ , то пересечением обеих *каустик* оказывается не кривая, а точка (*фокус*).

Пример 1. В качестве примера использования формулы (10) в однородной среде, имеющей показатель преломления

$n = 1$ , рассмотрим волну с цилиндрическим волновым фронтом. Это значит,

что в этом случае эйконал имеет вид  $\Psi = r_\perp$ , лучи распространяются по прямым линиям  $\vec{r} = r_\perp \vec{r}_\perp^0$ , которые являются линиями пересечения координатных поверхностей  $\varphi = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ , и элемент поверхности лучевой трубы

$d\Sigma = r_\perp dz d\varphi$  пропорционален расстоянию до оси  $r_\perp$ . Применяя формулу (10), находим закон изменения интенсивности в *лучевой трубке* цилиндрической волновой поверхности

$$I r_\perp = \text{const}. \quad (10_1)$$

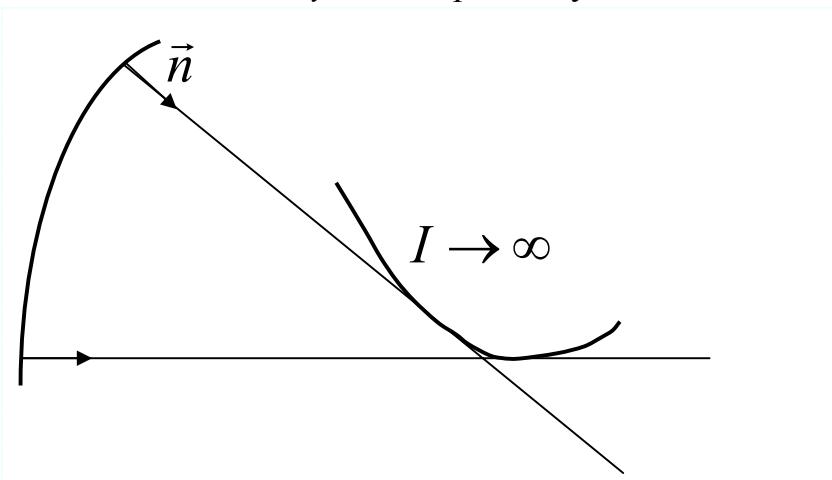
*Неоднородная среда.*

Найдем изменение интенсивности вдоль *лучей* в неоднородной среде, полагая, что основной закон (4) по-прежнему справедлив. Будем считать, что эйконал и, следовательно, вектор  $\vec{s}_0$  известны. Подставляя в (4) выражение (1.14), получим уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(I \vec{s}_0) &= \mathbf{div}\left(\frac{I}{n} \nabla \Psi\right) = \frac{I}{n} \Delta \Psi + \left(\nabla \Psi \cdot \nabla \left(\frac{I}{n}\right)\right) = \frac{I}{n} \Delta \Psi + \left(n \vec{s}_0 \cdot \nabla \left(\frac{I}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{\Delta \Psi}{(n/I)} + n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{I}{n}\right) = 0 \quad , \end{aligned}$$

которое можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{I}{n} + \frac{\Delta \Psi}{n} = 0 \quad . \quad (13)$$



<sup>2)</sup> Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках *каустики* остается конечной, но делается очень большой. Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики, во всяком случае, становится неприменимым вблизи *каустик*.

Решение этого уравнения в квадратурах

$$(I/n) = (I/n)_0 \exp \left\{ - \int_{s(0)}^s (\Delta\Psi / n) ds \right\}, \quad (14)$$

где  $(I/n)_0$  - значение величины  $(I/n)$  в точке  $s=s(0)$  траектории *луча*, по существу является законом изменения интенсивности вдоль *лучей* в неоднородной среде.<sup>3)</sup>

Пример 1. В качестве простого примера применения формулы (14) рассмотрим *плоскостную среду* с показателем преломления  $n(z)$ . Будем считать, что волна распространяется в этой среде вдоль оси  $z$ . Из уравнения эйконала

$$(d\Psi/dz) = n \quad \text{найдем}$$

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial z}$$

и далее из (14) получим

$$\frac{I}{n(z)} = \left( \frac{I}{n} \right)_0 \exp \left\{ - \int_0^z \frac{(\partial n / \partial z)}{n} dz' \right\} = \left( \frac{I}{n} \right)_0 \exp \left\{ - \ln \frac{n(z)}{n(0)} \right\} = \frac{I_0}{n(z)} \quad (14)_1$$

Из (14)<sub>1</sub> следует, что интенсивность в *лучевой* трубке  $I = I_0 = \text{const}$  не изменяется. Полученный результат легко объясним: *лучевые* трубы параллельны и площадь сечения трубы сохраняется вдоль всей её длины.

Пример 2. В качестве примера использования формулы (14) в однородной среде, имеющей показатель преломления  $n=1$ , можно рассмотреть изменение интенсивности волны с цилиндрическим волновым фронтом  $\Psi = r_\perp$ <sup>4)</sup>.

<sup>3)</sup> Учитывая определение *интенсивности* света (3) и принимая во внимание

$$(\mu/\mu_0) = \exp \{ \ln(\mu/\mu_0) \} = \exp \left\{ \int_{s(0)}^s (1/\mu) (d\mu / ds) ds \right\}, \quad \text{выражение (14) мож-}$$

но записать через амплитуду напряжённости электрического поля световой волны

$$\left\{ |\vec{E}_0|^2 / |\vec{E}_0|_0^2 \right\} = \exp \left\{ - \int_{s(0)}^s \sqrt{(\mu/\epsilon)} \operatorname{div} (\nabla\Psi / \mu) ds \right\}. \quad (14)'$$

<sup>4)</sup> Вначале для эйконала  $\Psi = r_\perp$  найдём  $\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r_\perp^2} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial\Psi}{\partial r_\perp} = \frac{1}{r_\perp}$ . Поскольку *лучи* рас-

пространяются по радиусу  $r_\perp$ , то в выражении (14) можно перейти от переменной  $s$  к пере-

менной  $r_\perp$ . Тогда интеграл в (14) будет равен  $\int_{s(0)}^s (dr_\perp / r_\perp) = \ln(r_\perp / r_{\perp 0})$ . Закон из-

менения интенсивности получим в виде  $I = I_0 \exp \{ - \ln(r_\perp / r_{\perp 0}) \} = I_0 (r_{\perp 0} / r_\perp)$  (14)<sub>2</sub> и со-ответственно закон сохранения для цилиндрической волны  $I r_\perp = \text{const}$ . (10<sub>1</sub>)

**Использование решений лучевых уравнений для определения изменения интенсивности вдоль лучей.**

По известной зависимости эйконала от длины дуги траектории *луча*  $s$  из (14) всегда можно определить изменение интенсивности вдоль *лучей*.

Попробуем определить изменение интенсивности вдоль *лучей* без использования уравнения эйконала. Предположим, что нам известны решения уравнений

$$\frac{d \vec{r}}{d \tau} = \vec{p} \quad (2.23) \quad \text{и} \quad \frac{d \vec{p}}{d \tau} = \frac{1}{2} \nabla(\varepsilon \mu) \quad (2.24).$$

Поскольку лучевое уравнение (2.24) является уравнением второго порядка относительно  $\vec{r}$ , то его решение должно содержать две произвольные постоянные.

Представим решение лучевого уравнения (2.24) в виде

$$\vec{r}(\tau) \equiv \vec{r}(\xi_0, \eta_0, \tau), \quad \vec{p}(\tau) = \vec{p}(\xi_0, \eta_0, \tau), \quad (15)$$

где  $\xi_0, \eta_0$  - произвольные постоянные. Постоянные  $\xi_0, \eta_0$  определяются из начальных условий, которыми служат точка выхода и направление выхода луча<sup>5)</sup>

$$\vec{r}(0) \equiv \vec{r}_0(\xi_0, \eta_0), \quad \vec{p}(0) = \vec{p}_0(\xi_0, \eta_0) \quad (16)$$

из некоторой поверхности  $S_0$  (рис. 1.9), имеющей связанную с ней систему координат  $(\xi, \eta)$ . В этом случае для решения задачи применима

**Лемма Соболева.**

**Если некоторые динамические уравнения типа**

$$\frac{d \vec{r}}{d \tau} = \vec{f}(\vec{r})$$

**имеют решение**

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi_0, \eta_0, \tau),$$

**зависящее от двух параметров  $(\xi_0, \eta_0)$ , то утверждается, что**

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln D(\tau), \quad (17)$$

где

$$D(\tau) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} \quad (18)$$

**- якобиан преобразования координат  $(x_1, x_2, x_3)$  в координаты  $(\xi, \eta, \tau)$ .**

Полагая  $\vec{f} = \vec{p} = \nabla \Psi$  и применяя лемму, согласно (17) получим

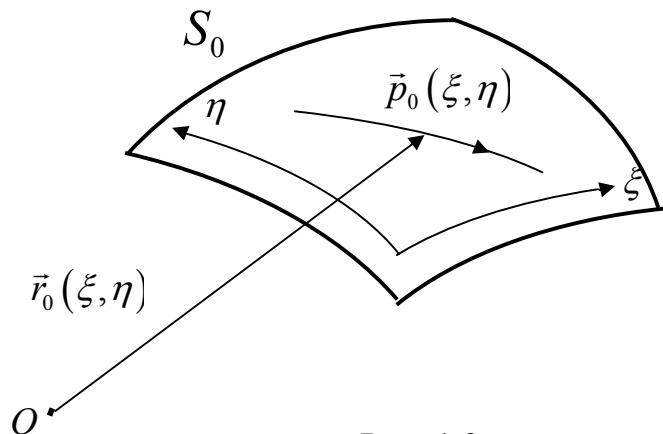


Рис. 1.9

<sup>5)</sup> Начальные условия в виде (16) могут быть получены, если на поверхности  $S_0$  в координатной системе  $(\xi, \eta)$ , связанной с  $S_0$ , задан эйконал  $\Psi|_{S_0} = \Psi_0(\xi, \eta)$  и составляющая импульса  $p_\tau = \nabla_\tau \Psi_0$ , касательная к поверхности. Составляющая импульса  $p_n$ , нормальная к поверхности, в этом случае определяется из условия  $|\vec{p}| = n$ .

$$\operatorname{div} \vec{f} = \Delta \Psi = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln D(\tau) . \quad (19)$$

Подставляя (19) в (14) и используя связь (2.22) между дифференциалами  $d\tau$  и  $ds$ , получим закон изменения интенсивности вдоль **луча** в виде соотношения

$$\frac{I}{n} = \left( \frac{I}{n} \right)_0 \frac{D(0)}{D(\tau)} , \quad (20)$$

которое определяет интенсивность через якобиан преобразования, зависящий от решения (16) лучевого уравнения (2.24).

### Пункт 3. Изменение поляризации электромагнитного поля вдоль лучей.

Введем орт напряжённости электрического поля монохроматической волны электромагнитного излучения в приближении *го*

$$\vec{e}_0 = \frac{\vec{E}_0}{|\vec{E}_0|} \equiv \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}} , \quad (21)$$

который полностью определяет поляризацию поля и потому может быть назван вектором поляризации, а затем представим поле в виде

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \sqrt{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)} . \quad (22)$$

Подставим (22) в третье слагаемое уравнения

$$\{(\nabla \Psi \cdot \nabla (\ln \mu)) - \nabla^2 \Psi\} \vec{E}_0 - 2\{(\vec{E}_0 \cdot \nabla (\ln n)) \nabla \Psi\} - 2\{\nabla \Psi \cdot \nabla\} \vec{E}_0 = 0 \quad (1.17_E)$$

для векторной амплитуды электрического поля и с учётом соотношения (1.14) преобразуем его к виду

$$2\{\nabla \Psi \cdot \nabla\} \vec{E}_0 = 2n \left( \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial s} \right) = 2n \left( \frac{\partial \vec{e}_0}{\partial s} \right) \sqrt{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)} + \frac{2n \vec{e}_0}{2 \sqrt{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}} \frac{\partial (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}{\partial s} \quad (23)$$

Подставим (23) в уравнение (1.17<sub>E</sub>) и поделим его на  $\sqrt{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}$

$$2n \frac{\partial \vec{e}_0}{\partial s} + \left\{ \frac{n}{(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)} \cdot \frac{\partial (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*)}{\partial s} + \Delta \Psi - \left( \nabla \Psi \cdot \frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \right\} \vec{e}_0 + 2(\vec{e}_0 \cdot \nabla n) \vec{s}_0 = 0 .$$

Фигурная скобка в этом выражении согласно (4) равна нулю и потому фактически представляет собой уравнение для квадрата модуля амплитуды электрического поля монохроматической электромагнитной волны. В результате *уравнение, определяющее изменение направления вектора  $\vec{e}_0$  вдоль луча*, имеет вид

$$n \frac{\partial \vec{e}_0}{\partial s} = -(\vec{e}_0 \cdot \nabla n) \vec{s}_0 . \quad (24)$$

Оно означает, что вектор поляризации поля  $\vec{e}_0$  по мере распространения по траектории **луча** имеет тенденцию изменяться в направлении лучевого вектора  $\vec{s}_0$ .

Это необходимо понять, потому что  $\vec{e}_0$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $\vec{s}_0$ .

### Геометрическая интерпретация уравнения для поляризации.

В некоторой точке **луча** введём сопровождающий трехгранник из единичных векторов (рис. 1.10), в котором  $\vec{s}_0$  – касательный к **лучу** единичный вектор,

$\vec{k}_0$  – нормальный к **лучу** единичный вектор,  $\vec{b}_0 = [\vec{s}_0 \times \vec{k}_0]$  – бинормальный к **лучу** единичный вектор. Вектор  $\vec{e}_0$  лежит в плоскости  $(\vec{k}_0, \vec{b}_0)$  и образует угол  $\theta$  с нормалью  $\vec{k}_0$ .

Спроектируем  $\vec{e}_0$  на направления  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$

$$\vec{e}_0 = \vec{k}_0 \cos \theta + \vec{b}_0 \sin \theta \quad (25)$$

и продифференцируем по  $s$ . При движении по **лучу** направления векторов  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$ , а также угол  $\theta$  могут изменяться. Поэтому в результате дифференцирования  $\vec{e}_0$  получим выражение

$$\frac{\partial \vec{e}_0}{\partial s} = \frac{\partial \vec{k}_0}{\partial s} \cos \theta + \frac{\partial \vec{b}_0}{\partial s} \sin \theta - \vec{k}_0 \frac{\partial \theta}{\partial s} \sin \theta + \vec{b}_0 \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \theta \quad . \quad (26)$$

Из аналитической геометрии известны три соотношения:

$$\frac{\partial \vec{s}_0}{\partial s} = \frac{\vec{k}_0}{R} \quad , \quad \frac{\partial \vec{k}_0}{\partial s} = -\frac{\vec{s}_0}{R} + \frac{\vec{b}_0}{T} \quad , \quad \frac{\partial \vec{b}_0}{\partial s} = -\frac{\vec{k}_0}{T} \quad , \quad (27)$$

где  $R$  – радиус кривизны луча и  $T$  – коэффициент кручения луча (в частности, для плоской траектории  $T = \infty$ ).

Подставим (26) с учётом (27) в уравнение (24) и спроектируем его на направления  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$ , ортогональные  $\vec{s}_0$ . Проекция правой части уравнения (24) при этом равна нулю. Проекции левой части уравнения на направления  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$  согласно (26) дают одинаковый результат:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{1}{T} \quad . \quad (28)$$

Это свидетельствует о том, что **угол  $\theta$  меняется не из-за изменения положения вектора  $\vec{e}_0$ , а за счет закручивания траектории луча**<sup>6)</sup>.

Подставляя (27) и (28) в (26), получим

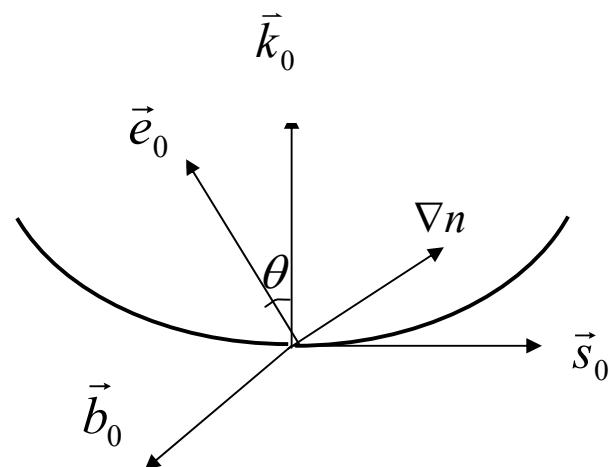


Рис. 1.10

<sup>6)</sup> Проекция на бинормаль  $\vec{b}_0$  нормали  $\vec{k}_0$ , которая изменяется при перемещении по траектории луча, согласно (27) имеет вид соотношения  $(\vec{b}_0 \cdot [\partial \vec{k}_0 / \partial s]) = (1/T)$ . Из сравнения этой формулы с формулой (28) заметим, что знаки производных  $(\vec{b}_0 \cdot [\partial \vec{k}_0 / \partial s])$  и  $(\partial \theta / \partial s)$  противоположны. Это также является доказательством того, что все изменения векторов  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{b}_0$  и угла  $\theta$  обусловлены исключительно закручиванием **луча**.

$$\frac{\partial \vec{e}_0}{\partial s} = - \frac{\vec{s}_0}{R} \cos \vartheta \quad , \quad (29)$$

что вектор поляризации поля волны  $\vec{e}_0$  по мере распространения по траектории *луча* не имеет тенденции отклоняться в плоскости векторов  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$ .

Подставляя в левую часть (24) правую часть (29), а в правую часть (24) в качестве  $\vec{e}_0$  выражение (25), получим соотношение

$$-\frac{n}{R} \cos \theta = -(\vec{k}_0 \cdot \nabla n) \cos \theta - (\vec{b}_0 \cdot \nabla n) \sin \theta \quad . \quad (30)$$

Второй член в правой части (30) равен нулю, поскольку в соответствии с (2.15) и (27) вектор

$$\nabla n = \frac{d \vec{p}}{ds} \equiv \frac{d}{ds} \nabla \Psi = \frac{d n}{ds} \vec{s}_0 + n \frac{d \vec{s}_0}{ds} \equiv \frac{d n}{ds} \vec{s}_0 + \frac{n}{R} \vec{k}_0 \equiv \frac{d n}{ds} \vec{s}_0 + \nabla_{\perp} n \quad (31)$$

лежит в (соприкасающейся) плоскости векторов  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{s}_0$  и потому ортогонален вектору  $\vec{b}_0$ . Учитывая ортогональность  $\vec{b}_0$  и  $\nabla n$ , из (30) получим выражение

$$\frac{1}{R} = \left( \vec{k}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n} \right) \equiv \left( \vec{k}_0 \cdot \nabla_{\perp} \ln n \right) \quad . \quad (32)$$

Из (31) следует, что *вектор кривизны луча* (27) в каждой точке

$$(\partial \vec{s}_0 / \partial s) \equiv \vec{K} \equiv (\vec{k}_0 / R) = \nabla_{\perp} \ln n \quad (33)$$

определяется изменением коэффициента преломления в данной точке траектории *луча*. В однородной среде ( $\nabla n = 0$ ) радиус кривизны  $R = \infty$ , и *лучи* представляют собой прямые линии.

Если  $(\partial \theta / \partial s) = 0$ , то положение вектора поляризации поля  $\vec{e}_0$  в плоскости векторов  $\vec{k}_0$  и  $\vec{b}_0$  сохраняется. Согласно (28) и (27) в этом случае траектория *луча* оказывается плоской.

В заключение отметим, что при движении по траектории *луча* поляризация  $\vec{e}_0$  поля волны в бесконечно близкой точке *луча* сохраняется параллельной самой себе.

#### §4. Отражение и преломление волн на границе раздела сред

До сих пор предполагалось, что показатель преломления  $n$  является непрерывной функцией координат. Рассмотрим поведение лучей, пересекающих поверхность раздела двух однородных сред с различными показателями преломления. Любая сложная задача теории дифракции об отражении волн от криволинейной границы раздела сред в приближении *го* сводится к существенно более простой задаче о совокупности локальных отражений плоской волны или луча от плоской границы. В нулевом приближении *го* отражение волны в каждой точке границы происходит так, как если бы падающая волна была плоской, а криволинейная граница была бы заменена касательной плоскостью. В этом состоит так называемый *принцип локальности*.

Рассмотрим поведение лучей, пересекающих поверхность раздела двух сред с различными показателями преломления. Поставим граничные условия для лучей на границе раздела двух сред 1 и 2, в каждой из которых справедлива геометрическая оптика (рис. 1.11).

Для установления законов преломления и отражения лучей на границе раздела сред применим тождество

$$\operatorname{rot} \nabla \Psi \equiv \operatorname{rot} (\vec{s}_0 n) = 0 \quad (2.19)$$

подобно тому, как оно было использовано для доказательства принципа Ферма. С этой целью вначале заменим поверхность раздела переходным слоем, в котором величины

$\epsilon, \mu, n$  меняются быстро, но непрерывно от своих значений на одной стороне границы до своих значений на другой её стороне.

Далее рассмотрим плоскость падения луча, образованную нормалью к поверхности

$\vec{n}_{12}$  в точке падения *луча* на границу раздела и *лучевым* вектором  $\vec{s}_{10}$ , и плоский элемент поверхности в этой плоскости, две стороны которого параллельны границе, а две другие перпендикулярны ей (Рис. 1.12). Используя (2.19) и теорему Стокса, позволяющую заменить интеграл по площади поверхности от ротора вектора на интеграл по контуру площади от собственно вектора, получим интеграл по контуру  $L$  от лучевого вектора

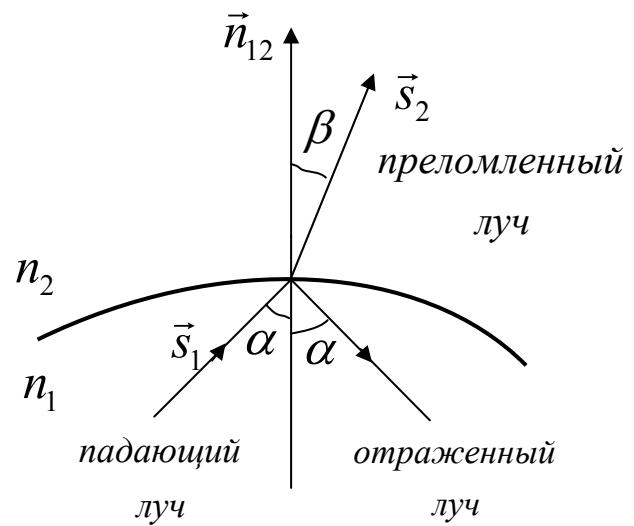


Рис. 1.11

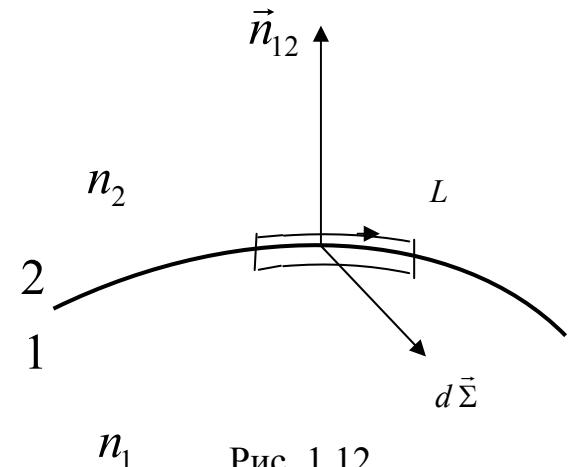


Рис. 1.12

$$\iint_{\Sigma} \left( \operatorname{rot} \nabla \Psi \bullet d\vec{\Sigma} \right) = \oint_L (\vec{s}_0 \bullet d\vec{L}) = 0 . \quad (1)$$

При вычислении второго интеграла по контуру  $L$ , ограничивающему выбранный элемент поверхности, устремим к нулю размер контура, перпендикулярный границе. Введём вектор  $\vec{\tau}_0$ , касательный к границе и образующий правую тройку с векторами  $d\vec{\Sigma}$  и  $\vec{n}_{12}$ . Тогда из (1) получим граничное условие в виде

$$n_2 (\vec{s}_{20} \cdot \vec{\tau}_0) = n_1 (\vec{s}_{10} \cdot \vec{\tau}_0) , \quad (2)$$

которое означает, что тангенциальная компонента лучевого вектора  $(n\vec{s})_\tau$  непрерывна при переходе через границу раздела сред. Это граничное условие чаще записывается в виде

$$[\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{20} - n_1 \vec{s}_{10})] = 0 \quad (3)$$

или

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta , \quad (4)$$

который называется законом Снеллиуса.

Смысл формулы (3) состоит в том, что преломлённый **луч** лежит в плоскости, образованной падающим **лучом** и нормалью к поверхности раздела (плоскости падения), а формулы (4) - в том, что отношение синуса угла преломления к синусу угла падения равно отношению показателей преломления. Этот закон Снеллиуса был выведен и хорошо известен для частного случая падения **электромагнитной плоской волны** (с произвольным значением  $\lambda_0$ ) на плоскую **отражающую поверхность**. Настоящий закон относится к волнам различной физической природы с произвольной структурой волнового фронта и отражающим поверхностям более общей формы при условии, что длина волны достаточно мала ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ). Последнее условие практически означает, что радиусы кривизны волнового фронта и поверхности раздела должны быть велики по сравнению с длиной волны падающего физического поля.

Как и в случае отражения плоских электромагнитных волн следует ожидать, что на границе появится отражённая волна физического поля. Для отраженных лучей необходимо положить  $n_1 = n_2$ , и тогда из (4) получим, что отражённый луч лежит в плоскости падения и

$$\sin \alpha = \sin \beta , \quad (5)$$

или

$$\beta = \pi - \alpha . \quad (5)'$$

Последний результат выражает **закон отражения в го**.

## §5. Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды.

Рассмотрим несколько примеров применения *го* для исследования распространения волн в слоисто-неоднородных средах и, в частности, в плоскослоистых и сферически-слоистых средах. Примером таких сред в некотором приближении является земная атмосфера. **Модель плоскослоистой среды**, показатель преломления которой зависит лишь от одной декартовой координаты  $z$ , часто используется при исследовании распространения электромагнитных волн в тропосфере и ионосфере, звуковых волн в океане и атмосфере, упругих волн в земной коре. Задача о распространении лучей в сферически-неоднородных средах помимо очевидного случая распространения волн в околосземном пространстве может встретиться также при анализе прохождения оптического излучения через прозрачные капли, газовые пузырьки в твёрдых телах и жидкостях, тепловые ореолы поглощающих частиц.

### Пункт 1. Сферически-слоистая среда.

Рассмотрим поведение лучей в среде, обладающей центральной симметрией. В этой среде показатель преломления

$$n(\vec{r}) = n(r) \quad (1)$$

зависит только от расстояния  $r$  до фиксированной точки  $O$ . Найдём изменение вектора  $[\vec{r} \times n \vec{s}_0]$  вдоль **луча**. Дифференцируя вектор  $[\vec{r} \times n \vec{s}_0]$  по длине дуги **луча** и учитывая при преобразовании полученных векторных произведений определение (2.12) **лучевого вектора**, а также уравнение (2.15) траектории **луча** в центрально-симметричном поле, получим

$$\frac{d}{ds} [\vec{r} \times n \vec{s}_0] = \left[ \frac{d\vec{r}}{ds} \times n \vec{s}_0 \right] + \left[ \vec{r} \times \frac{d}{ds} (n \vec{s}_0) \right] \equiv [\vec{s}_0 \times n \vec{s}_0] + [\vec{r} \times \nabla n] = 0, \quad (2)$$

что

$$[\vec{r} \times n \vec{s}_0] \equiv \vec{M} = \overrightarrow{\text{const}} \quad (3)$$

сохраняется вдоль траектории<sup>1)</sup>. Это - уравнение плоскости, проходящей через центр симметрии. Отсюда следует, что все **лучи** являются плоскими кривыми и лежат в плоскости, проходящей через начало координат. Вдоль каждого **луча** (Рис. 1.13) выполняется условие

$$n r \sin \varphi \equiv n d \equiv |\vec{M}| = \text{const}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  - угол между радиусом-вектором  $\vec{r}$  и касательной, а величи-

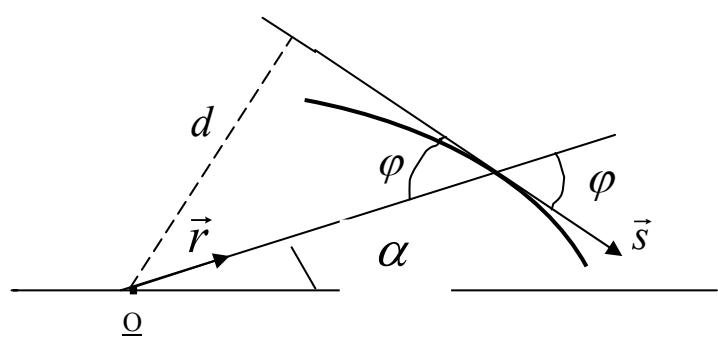


Рис. 1.13

<sup>1)</sup> Этот результат легко получить, опираясь на аналогию *го* и движения материальной точки. В аналитической механике известно, что в поле центральных сил  $n = n(r)$  сохраняется момент количества движения  $\vec{M} \equiv [\vec{r} \times \vec{p}] = \overrightarrow{\text{const}}$ , поскольку в этом поле  $(d\vec{M}/dt) = 0$ .

на  $d = r \sin \varphi$  равна расстоянию от начала координат до касательной. *Луч* идет таким образом, что в любой точке *луча* постоянно  $n d = |\vec{M}|$ . Это соотношение называют иногда формулой или законом Бугера и часто используют для построения хода *лучей*. Соотношение (4) представляет собой закон *Снеллиуса* для сферически-слоистой среды. Константа может быть определена из граничных условий в точке  $s=0$  на траектории *луча*. Например, если известно решение  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  уравнения (2.15) и *луч* попадает в такую среду из эталонной среды (вакуума), имеющей показатель преломления  $n(s=0) \equiv n_0 = 1$ , под некоторым заданным углом  $\varphi(s=0) \equiv \varphi_0$  в точке  $\vec{r}(0)$  на расстоянии  $r_0 = |\vec{r}(0)|$  от центра сферической симметрии, то (4) преобразуется в удобную для расчётов формулу

$$|\vec{M}| = n(r) r \sin \varphi = r_0 \sin \varphi_0 . \quad (4*)$$

Опираясь на аналогию уравнений *гю* и уравнений движения материальной точки, рассмотрим поведение *луча* в сферически-слоистой среде как движение в потенциальном центрально-симметричном поле инертного тела, имеющего в соответствии с (2.26) гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(\vec{p} \cdot \vec{p}) - \frac{\varepsilon \mu}{2} = 0 . \quad (5)$$

Энергия эквивалентной частицы равна нулю, поскольку в *гю* гамильтониану  $H = 0$  точно соответствует уравнение эйконала именно с такой правой частью. Введём в плоскости, в которой находится траектория *луча*, полярную систему координат  $r, \alpha$  с началом координат в центре сферической симметрии (Рис. 1.13). Импульс движущейся эквивалентной частицы, направленный по касательной к траектории  $\vec{s}_0$ , можно разложить на две ортогональные составляющие

$$\vec{p} = p_\alpha \vec{\alpha}_0 + p_r \vec{r}_0 \equiv r(d\alpha/dt)\vec{\alpha}_0 + p_r \vec{r}_0 . \quad (6)$$

Движение по координате  $\alpha$  с угловой скоростью  $d\alpha/dt$  определяет согласно Рис. 1.13 проекция импульса

$$p_\alpha = |\vec{p}| \sin \varphi = n \sin \varphi = (|\vec{M}|/r) , \quad (7)$$

в которой  $|\vec{M}|$  - сохраняющийся в центрально-симметричном поле **момент количества движения** (4). Радиальное движение определяет проекция импульса  $p_r$ . Подставляя (6) с учетом (7) в (5), представим гамильтониан в виде

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \left( \frac{M^2}{2r^2} - \frac{\varepsilon \mu}{2} \right) = 0 . \quad (8)$$

В аналитической механике выражение в скобках представляет собой эффективную потенциальную энергию радиального движения  $U_{\varphi}$ , в котором первое слагаемое  $(M^2 / 2r^2)$  называют *центробежной энергией*. Радиальное движение *лучей* эквивалентно движению материальной точки в поле с потенциальным рельефом  $U_{\varphi}(r)$ . Из (8) видно, что радиальные движения  $p_r(r)$  возможны

там, где  $U_{\varphi} \leq 0$ . Как следует из (8), в тех точках, где эффективная потенциальная энергия  $U_{\varphi}$  равна нулю, радиальное движение отсутствует ( $p_r = 0$ ). Эти точки являются «точками поворота» траектории по радиусу.

Поскольку в сферически-слоистой среде траектория **луча** всегда плоская, то все приведённые выше формулы и их следствия полностью применимы также для описания одного частного случая распространения **лучей** в **цилиндрически-слоистых средах с центрально-осевой симметрией**, когда траектория **луча** находится в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Такие среды нашли широкое применение во многих оптических приборах.

### Пример 1.

1. На цилиндр с показателем преломления  $n$  падает **луч** (Рис. 1.14). Найти дальнейший ход **луча**.

По закону Бугера (4), который в этих условиях принимает вид

$$n r \sin \varphi \equiv d,$$

на границе цилиндра **луч** изменит направление распространения. Внутри цилиндра **луч** пойдет по прямой линии, и в каждой точке этой траектории будет справедлив закон (4). Когда траектория **луча** будет находиться на минимальном расстоянии от оси цилиндра, то угол  $\varphi = 90^\circ$  и, следовательно, расстояние до траектории будет  $r_1 = (d / n)$ . Можно сказать, что внутри цилиндра луч пойдет по касательной к окружности радиуса  $r_1 = (d / n)$ .

Аналогичным образом найдём направление траектории **луча** в свободном пространстве после выхода из цилиндра. После прохождения цилиндра **луч** пойдёт по траектории, продолжение которой будет касательной к окружности радиуса  $r_2 = d$ .

**Пример 2. Распределение света внутри активного элемента лазера.**

Рассмотрим диэлектрический цилиндр с коэффициентом преломления  $n$  в диффузном световом поле и определим его освещенность в

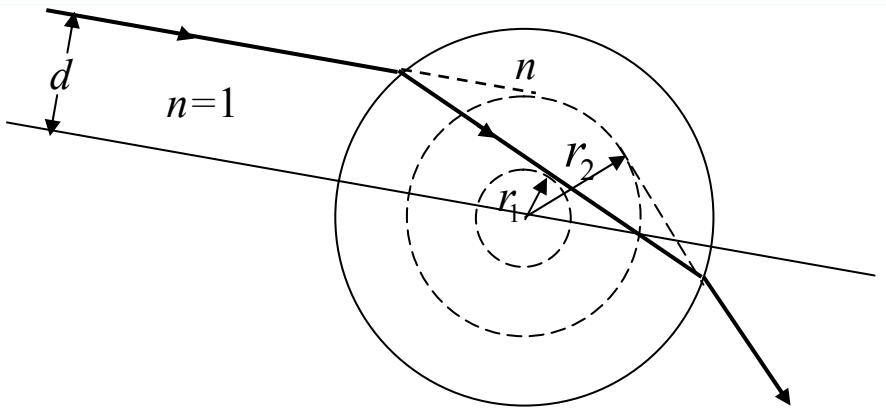


Рис. 1.14

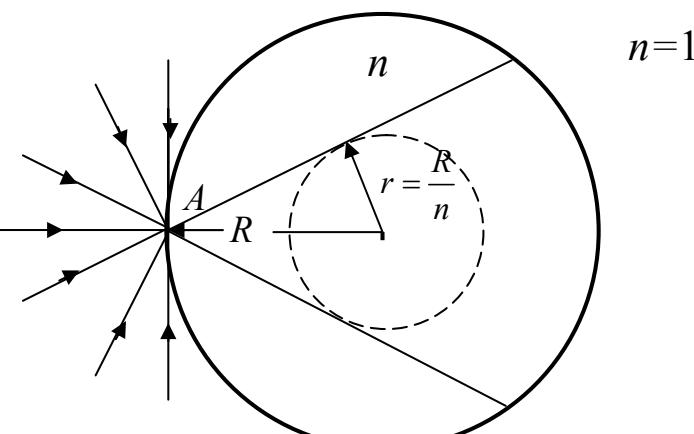


Рис. 1.15

центре и на краях. Рассмотрим точку  $A$  на поверхности цилиндра, в которую приходят лучи всех направлений (Рис. 1.15). Внутри цилиндра *лучи* из этой точки пойдут в некотором конусе, образующая которого касается цилиндра радиуса  $r_n = (R / n)$ .

В некоторую точку  $B$  внутри цилиндра (как в вершину двух конусов) попадают *лучи*, которые идут из областей поверхности цилиндра, находящихся внутри конусов, образующие которых касаются цилиндра радиуса  $r_n$ . В центральную область цилиндра ( $r \leq r_n$ ) попадают лучи из всех точек поверхности, и она освещена сильнее, чем периферийные области ( $r > r_n$ ). Освещённость в цилиндре меняется по закону  $I \sim \arcsin(R / nr)$ .

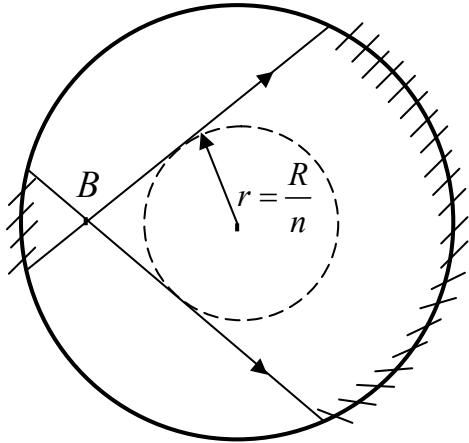


Рис. 1.15'

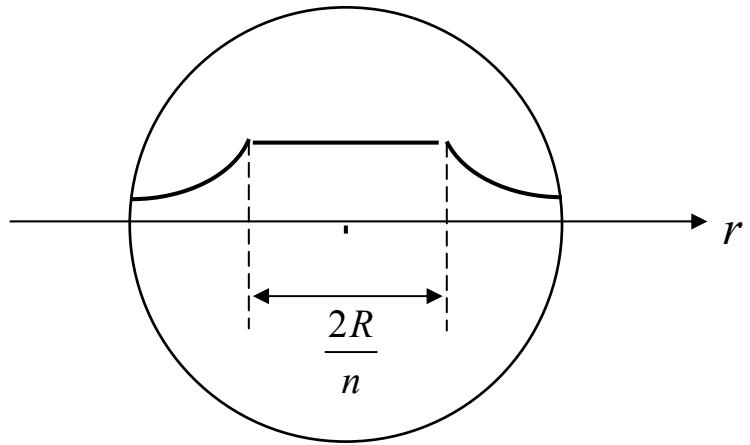


Рис. 1.15"

### Пункт 2. Плоскослоистая среда.

В плоскослоистой среде показатель преломления  $n$  зависит от одной декартовой координаты. Для определённости без уменьшения общности можем считать, что этой координатой будет координата  $z$  вдоль вертикально ориентированной оси  $OZ$ , так что

$$n = n(z) \quad (9)$$

и  $n(0) \equiv n_0 = 1$ . Поскольку траектория *луча* в этом случае точно так же, как и в случае сферически-слоистой среды, будет плоской, то тоже без уменьшения общности можно считать, что *луч* распространяется в плоскости  $XOZ$ .

Подставим в векторное уравнение траектории *луча* (2.15) выражение для **лучевого вектора**

$$\nabla \Psi \equiv n \vec{s}_0 = n \cos \theta \vec{z}_0 + n \sin \theta \vec{x}_0 \quad (10)$$

и, спроектировав его на ось  $OX$

$$\frac{d}{ds} (n \sin \theta) = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad ,$$

сразу получим закон сохранения

$$n(z) \sin \theta(z) = n(0) \sin \theta(0) \equiv \sin \theta_0 = \text{const} , \quad (11)$$

аналогичный по форме и по содержанию закону сохранения Бугера в виде (4\*). Из (10) и (11) получается уравнение траектории **луча** в виде выражения

$$\frac{p_x}{p_z} = \tan \theta = \frac{p_x}{\sqrt{p^2 - p_x^2}} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}} = \frac{dx}{dz} . \quad (12)$$

для угла наклона **луча** к вертикали. Из (12) видно, что угол наклона **луча** к вертикали по мере распространения в слоистой среде изменяется, т.е. **лучи** искривляются. Искривление **лучей** в неоднородной среде называется *рефракцией*.

Воспользуемся уравнением (12) для описания распространения радиоволн в лучевом приближении в неоднородной по высоте земной атмосфере. С этой целью вначале рассмотрим более корректное с геометрической точки зрения уравнение Бугера (4\*) для сферически-слоистой среды. Введём в формуле (4\*) следующие обозначения

$$r \cong R_0 + z , \quad \varphi \equiv \theta , \quad (13)$$

где  $R_0$  - радиус Земли,  $z$  - высота, отсчитываемая от поверхности Земли,  $\varphi \equiv \theta$  - угол, отсчитываемый от вертикальной оси  $OZ$ , и будем использовать при  $z=0$  граничные условия  $r_0 = R_0$  и  $\varphi_0 \equiv \theta_0$ . При введённых обозначениях очевидном условии

$$z \ll R_0 \quad (14)$$

из (5) получим закон *Снеллиуса* в виде

$$n(z) \{ 1 + (z / R_0) \} \sin \theta(z) = \sin \theta_0 \equiv n_E(z) \sin \theta(z) . \quad (15)$$

Выражение (15) можно считать обобщением закона сохранения поперечной компоненты эйконала (11). Обозначая расстояние вдоль поверхности Земли через  $x$ , найдём, что уравнение траектории радиолуча над земной поверхностью будет выражаться формулой (12), в которой роль  $n(z)$  должен играть **приведённый показатель преломления околосземного пространства**

$$n(z) \{ 1 + (z / R_0) \}_0 \equiv n_E(z) . \quad (16)$$

Таким образом, при условии  $z \ll R_0$  задача о распространении лучей в сферически-слоистой среде может быть сведена к более простой задаче о распространении лучей в плоскослоистой среде с **приведённым показателем преломления** (16).

Абсолютное значение  $n(z)$  и градиент этой величины существенно различаются в разных слоях (ионосфере, тропосфере) околосземного пространства. В условиях так называемой *нормальной рефракции*

$$(d n / d z) < 0 \quad (17)$$

учёт члена  $(z / R_0)$  в приведённом показателе преломления в некоторых случаях (в тропосфере) изменяет не только абсолютную величину  $n_E(z)$ , но и знак градиента  $n_E(z)$ .

Рассмотрим возможные варианты поведения лучей в плоскослоистой среде в приближении *го* (Рис. 1.16). С этой целью, учитывая закон сохранения (11) для (горизонтальной)  $x$ -проекции **лучевого вектора**, из уравнения эйконала, записан-

ного в форме (6), найдём зависимость (вертикальной)  $z$  – проекции **лучевого вектора** от координаты  $z$  в виде

$$\{ n_E \cos \theta \}^2 = n_E^2 - \sin^2 \theta_0 . \quad (18)$$

В соответствии (2.23) по известным проекциям **лучевого вектора** (градиента эйконала) нетрудно получить записанные в параметрической форме уравнения для координат **луча**<sup>2)</sup>

$$\frac{dx}{d\tau} = \sin \theta_0 ; \quad (19)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \pm \sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta_0} . \quad (20)$$

Уравнение (19) интегрируется элементарно, и его решение в виде

$$x = \tau \cdot \sin \theta_0 + x_0 \quad (21)$$

позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между параметром  $\tau$  и координатой  $x$  точки на траектории **луча**. В результате интегрирования уравнения (20) получаем выражение

$$\tau = \pm \int_{z(0)}^z \frac{dz'}{\sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta_0}} = \frac{x - x_0}{\sin \theta_0} \quad (22)$$

для определения величины  $\tau$  в разных точках **луча**. Стоящие перед интегралом знаки означают, что по **лучу** можно двигаться как в сторону увеличения координаты  $z$  (т. е. вверх), так и вниз в сторону её уменьшения. Знак (+) соответствует восходящей ветви  $(dz/d\tau) > 0$ , знак (-) отвечает нисходящей ветви  $(dz/d\tau) < 0$ . Направление начального движения луча определяется начальным значением угла места  $\theta_0$ . Если  $\theta_0 < 90^\circ$ , то первая часть траектории является восходящей ветвью и, следовательно, перед интегралом выбирается знак (+).

В точке  $n_E(z_R) = \sin \theta_0$ , где производная  $(dz/d\tau) = 0$ , происходит поворот луча. Эта точка называется точкой поворота (символ  $R$  - начальное от *return*). Точка поворота существует только в том случае, если по пути движении по траектории приведённый показатель преломления убывает, т.е. знак изменения координаты  $z$  противоположен знаку  $\nabla n_E$ . В частности, если  $\theta_0 < 90^\circ$  и  $\nabla n_E$  направлен по  $z$ , то точки поворота быть не может. В этом случае угол

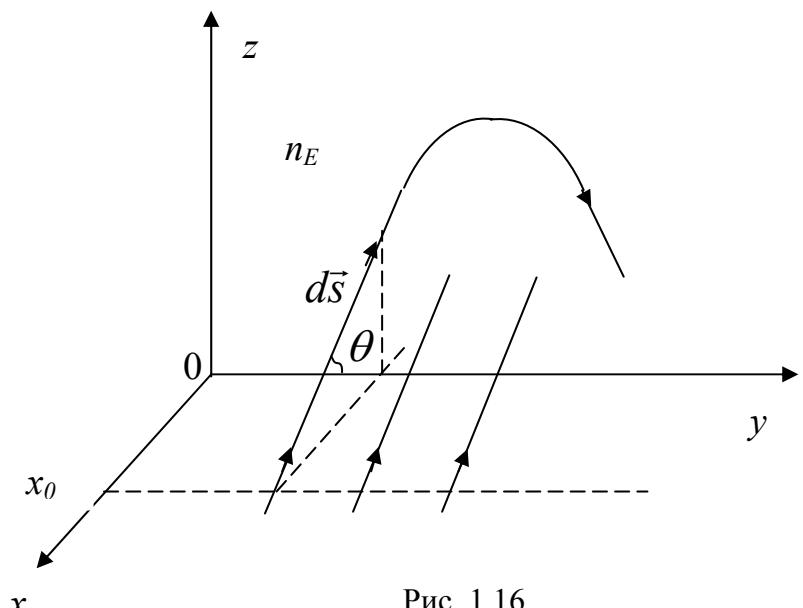


Рис. 1.16

<sup>2)</sup> В качестве параметра можно было бы также использовать длину дуги  $s$ , но для этого следует воспользоваться уравнением (2.12).

$\theta$  лучевого вектора с осью  $OZ$  уменьшается, т. е. **луч** загибается (вверх) в направлении вектора  $\nabla n_E$ .

Найдем интенсивность в различных точках восходящей ветви траектории **луча**. В качестве поверхности  $\Sigma_0$  возьмем плоскость ( $XOY$ ) и определим на этой поверхности начальные координаты луча  $\xi = x_0$ ,  $\eta = y_0$ . Движение по восходящей ветви траектории луча в координатах  $x, y, z$  описывается уравнениями

$$\frac{dz}{d\tau} = \sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta_0}, \quad y = y_0 \equiv \eta, \quad x = \tau \sin \theta_0 + x_0 \equiv \tau \sin \theta_0 + \xi.$$

Подсчитаем якобиан преобразования координат  $x, y, z$  в координаты  $\xi, \eta, \tau$

$$D(\tau) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\tau \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\tau \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta_0} \end{vmatrix} = \sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta_0}.$$

Подставляя  $D(\tau)$  в (3.20), получим закон распределения интенсивности вдоль **луча**

$$\frac{I}{n_E} = \left( \frac{I}{n_E} \right)_0 \sqrt{\frac{n_E^2(0) - \sin^2 \theta_0}{n_E^2(z) - \sin^2 \theta_0}}. \quad (23)$$

Как следует из (23), на восходящей ветви траектории **луча**, где  $(\partial n_E / \partial z) < 0$ , знаменатель подкоренного выражения будет убывать в направлении распространения **луча** и может обратиться в нуль в некоторой точке  $z_R$ . Все **лучи**, идущие параллельно друг другу, имеют одну точку поворота. Совокупность этих точек образует линию поворота (Рис. 1.17), являющуюся касательной **лучей** или **каустикой**. На каустике интенсивность обращается в бесконечность, т.к. знаменатель (23) обращается в нуль.

Найдём поперечное сечение **лучевой трубы**  $d\Sigma$  в точке поворота, где  $D(\tau) = 0$ .

Для этого рассмотрим (некоторый) фиксированный элемент объёма **лучевой** трубы  $dV \equiv dx \cdot dy \cdot dz$ . Представим элемент объёма в криволинейных координатах, в качестве одной из которых выберем длину дуги  $s$ , а в качестве двух других -  $\xi$  и  $\eta$ . Элемент объёма **лучевой** трубы в криволинейных координатах  $\xi, \eta, s$  по определению и в соответствии с (3.18) и (2.22) имеет вид

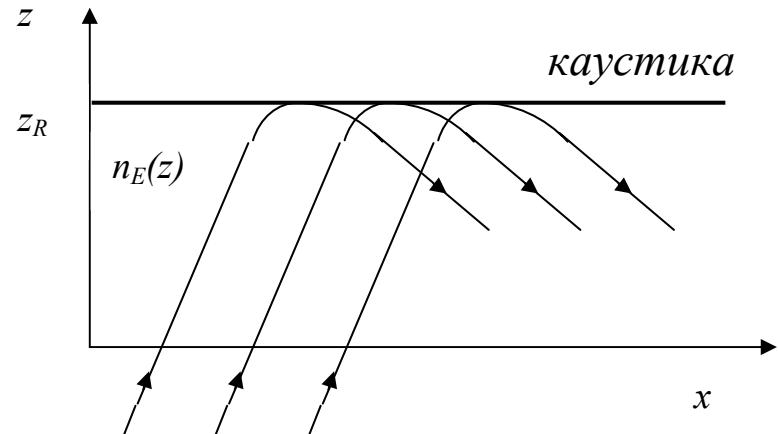


Рис. 1.17

$$dV \equiv dx \cdot dy \cdot dz \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \tau)}{\partial(\xi, \eta, s)} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot ds = D(\tau) \cdot (1/n_E) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot ds \equiv d\Sigma \cdot ds \quad (24)$$

Из (24) видно, что при приближении к точке поворота, когда  $D(\tau) \rightarrow 0$ , элемент объема лучевой трубы в криволинейных координатах также стремится к нулю. Опираясь на определение объема лучевой трубы как на  $dV = d\Sigma \cdot ds$ , из (24) можно найти площадь поперечного сечения лучевой трубы

$$d\Sigma = D(\tau) \cdot \frac{1}{n_E} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (25)$$

и установить, что вблизи точки поворота  $d\Sigma$  стремится к нулю, поскольку она пропорциональна  $D(\tau) \rightarrow 0$ . Из закона сохранения величины энергии в **лучевой трубке** (3.10) нетрудно увидеть, что именно из-за уменьшения площади поперечного сечения  $d\Sigma$  до нуля интенсивность в точке поворота обращается в бесконечность<sup>3)</sup>.

**Каустика** – это область, где происходит фокусировка поля за счет сжатия лучевых трубок. В нашем приближении на каустике  $I = \infty$ . Это означает, что приближение *го* в этой области неприменимо.

На **каустике** якобиан преобразования координат обращается в нуль

$$D(\tau) = 0. \quad (26)$$

Это общее условие определения каустических поверхностей. Задача отыскания **каустик** сводится к отысканию корней  $\tau = \tau_k$  уравнения (26).

### Пункт 3. Аксиально-симметричная среда.

Введём цилиндрическую систему координат  $\rho \equiv |\vec{r}_\perp|, \varphi, z$  и рассмотрим среду, показатель преломления которой

$$n = n(\rho) \quad (27)$$

в этой системе координат зависит только от поперечной координаты  $\rho$ . В некотором приближении многочисленными примерами таких сред могут служить разнообразные элементы оптических систем, через которые проходит пучок лазерного излучения и, теряя при этом часть своей мощности, создает в их объеме аксиально-симметричный градиент температуры и, следовательно, градиент показателя преломления.

Лучевое уравнение (2.24) с учётом определения градиента эйконала (2.23) для данного случая  $n = n(\rho)$  имеет вид

---

<sup>3)</sup> Этот результат можно получить также непосредственно из (24). Подставляя (24) в выражение для величины сохраняющейся интенсивности в **лучевой трубке** (3.10), получим, что интенсивность в точке поворота в соответствии с (3.3) и (3.4) должна неограниченно возрастать, стремясь к бесконечно большому значению. Поскольку скорость переноса энергии по **лучу**  $v_f$  всегда остаётся конечной, то это означает, что плотность энергии в лучевых координатах  $\bar{w}^T(\xi, \eta, s)$  вблизи точки поворота также стремится к бесконечности.

$$\frac{d \vec{p}}{d \tau} = \frac{d^2 \vec{r}}{d \tau^2} \equiv \frac{d}{d \tau} \left\{ \frac{d \rho}{d \tau} \vec{\rho}_0 + \rho \frac{d \varphi}{d \tau} \vec{\phi}_0 + \frac{d z}{d \tau} \vec{z}_0 \right\} = \frac{1}{2} \nabla n^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 \quad (28)$$

и полностью аналогично по содержанию уравнению движения второго порядка (второму закону Ньютона) материальной частицы, имеющей массу  $m=1$ , в

потенциальном поле  $U(\rho) = -\frac{1}{2}n^2(\rho)$ . В соответствии с (2.26) и (5.6) гамильтониан такого движения материальной точки

$$H = \frac{1}{2} \left\{ (\dot{\rho}_\tau)^2 + (\rho \dot{\varphi}_\tau)^2 + (\dot{z}_\tau)^2 \right\} - \frac{1}{2} n^2(\rho) = 0 \quad (29)$$

не содержит координат  $z$  и  $\varphi$  (называемых *циклическими*). Соответствующие обобщённые импульсы

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_\tau} \right) = \rho^2 \dot{\varphi}_\tau \equiv \rho^2 \left( \frac{d \varphi}{d \tau} \right) = M = \text{const}_\varphi \equiv \rho^2(0) \cdot \dot{\varphi}_\tau(0) \quad ; \quad (30)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \dot{z}_\tau} \right) = \dot{z}_\tau \equiv \left( \frac{d z}{d \tau} \right) = \bar{p} = \text{const}_z \equiv p_z(0) \equiv \dot{z}_\tau(0) \quad (31)$$

(согласно общей теории интегрирования уравнений движения) будут первыми интегралами движения двух последних (из трёх) скалярных уравнений (28). Абсолютные значения постоянных интегрирования  $M$  и  $\bar{p}$  определяются начальными условиями при значении параметра  $\tau = 0$ .

Выражения (30) и (31) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка в полных производных по параметру  $\tau$ , с помощью которых рассчитываются координаты траектории *луча* как функции  $\tau$ . Выражая из (30)

$$\dot{\varphi}_\tau = (M / \rho^2) \quad (32)$$

и подставляя эту величину вместе с  $\dot{z}_\tau \equiv \bar{p}$  в гамильтониан<sup>4)</sup>

$$H = \frac{1}{2} \left\{ (\dot{\rho}_\tau)^2 + (M / \rho)^2 + \bar{p}^2 \right\} - \frac{1}{2} n^2(\rho) , \quad (33)$$

нетрудно получить из (33) одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в полных производных

$$p_\rho \equiv \frac{d \rho}{d \tau} = \pm \sqrt{n^2 - (M / \rho)^2 - \bar{p}^2} \quad (34)$$

по параметру  $\tau$  для третьей координаты *луча*  $\rho$ .

Как нетрудно заметить из уравнения (31), движение вдоль оси  $z$  будет равномерным. По известным начальным условиям (данным) эта координата *луча* легко находится

$$z = \bar{p} \tau + z(0) \equiv \bar{p} \tau + z_0 \quad (35)$$

<sup>4)</sup> Следует сравнить получившийся гамильтониан (33) с абсолютно аналогичным по смыслу гамильтонианом (8) для случая движения луча в сферически слоистой среде (или движения материальной точки в центрально симметричном поле).

как линейная функция параметра  $\tau$ . Подобно аналогичному решению (21) для случая плоскослоистой среды оно позволяет установить однозначное соответствие между параметром  $\tau$  и координатой  $z$  точки на траектории **луча** в аксиально-симметричной среде.

В результате интегрирования уравнения (34) получаем выражение

$$\tau = \pm \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{n^2 - (M/\rho')^2 - \bar{p}^2}} = \frac{z - z_0}{\bar{p}}, \quad (36)$$

позволяющее определить величину  $\tau$  в разных точках **луча** и через посредство (35) установить взаимнооднозначное соответствие координат  $z$  и  $\rho$  в разных точках траектории **луча**.

Стоящие перед интегралом знаки означают, что **луч** может распространяться как в сторону увеличения координаты  $\rho$  (т. е. от оси симметрии на периферию), так и в сторону её уменьшения (к оси симметрии). Знак (+) соответствует увеличению  $\rho$ , поскольку  $\dot{\rho}_\tau > 0$ , а знак (-) – его уменьшению ( $\dot{\rho}_\tau < 0$ ). Направление начального движения **луча** определяется начальным значением  $\dot{\rho}_\tau(0)$ . Если  $\dot{\rho}_\tau(0) > 0$ , то первая часть траектории является "восходящей" ветвью и, следовательно, знак перед интегралом (+).

В точке  $\rho_R$ , где производная  $\dot{\rho}_\tau = 0$ , происходит поворот **луча**. Координат  $\rho_R$  определяется из уравнения

$$n(\rho_R) = \sqrt{(M/\rho_R)^2 + \bar{p}^2}. \quad (37)$$

При возрастании  $\rho$  точка поворота **луча** существует только в том случае, если показатель преломления  $n^2$  убывает достаточно быстро

$$\frac{dn^2}{d\rho} < -\frac{2M^2}{\rho^3},$$

быстрее, чем "эффективная потенциальная энергия  $(M/\rho)^2$  радиального движения" (если использовать терминологию аналитической механики). В противном случае траектория **луча** будет уходить от оси симметрии или, как говорят, станет инфинитной (неограниченной). При движении по "нисходящей" ветви траектории точка поворота **луча** существует всегда, поскольку  $(M/\rho)^2$  при  $\rho \rightarrow 0$  неограниченно растёт и условие (37) обязательно выполняется.

Исключая из обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (32) и (34) переменное  $\tau$ , получим явное выражение  $(d\varphi/d\rho)$  и найдём решение этого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в такой форме

$$\varphi - \varphi(0) = \pm \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{(\sqrt{M}/\rho')^2 d\rho'}{\sqrt{n^2 - (M/\rho')^2 - \bar{p}^2}}, \quad (38)$$

которая устанавливает прямую взаимнооднозначную связь координат  $\rho$  и  $\varphi$  траектории **луча**.

Рассмотрим некоторые частные случаи траекторий **лучей** в аксиально-симметричной среде, обусловленные различием начальных условий. Они помогут понять основные закономерности распространения силовых полей в таких средах и установить связь этих законов с законами **го** в других слоисто-неоднородных средах (в первую очередь, в плоско-слоистой и сферически-слоистой).

1. Расположение траектории **луча** в плоскости  $z = z_0 \equiv z(0)$  осуществляется в частном случае начальных условий  $\bar{p} \equiv p_z(0) \equiv \dot{z}_\tau(0) = 0$ , (39) когда в точке старта отсутствует продольная компонента эйконала (или **луч** "запущен" перпендикулярно оси). В этом случае траектории **лучей** в плоскости  $\rho$  и  $\varphi$  полярных координат точно совпадают с траекториями **лучей** в сферически-симметричной среде (Рис. 1.18), где роль поперечной координаты  $\rho$  играет расстояние  $r$  до центра симметрии. **Луч** в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , будет совершать ограниченное движение между внутренней и внешней **каустиками**. Поле локализовано между этими **каустиками** и не попадает в области тени (1,2 – на Рис. 1.18).

2. Расположение траектории **луча** в плоскости  $\varphi = \varphi_0 \equiv \varphi(0)$  (Рис. 1.19) осуществляется в частном случае, когда в начальной точке отсутствует проекция эйконала по направлению орта  $\dot{\varphi}_0$  (обобщённый импульс по этой координате в терминологии теоретической механики). В этом случае

$$M = 0, \quad (40)$$

и в соответствии с (36) **луч** имеет лишь одну точку поворота на внешней **каустике**, если вообще выполняется условие её образования  $n'_\rho < 0$ . Учитывая необходимость уменьшения коэффициента преломления  $n(\rho)$  с ростом  $\rho$ , нетрудно сообразить, что радиус этой **каустической**

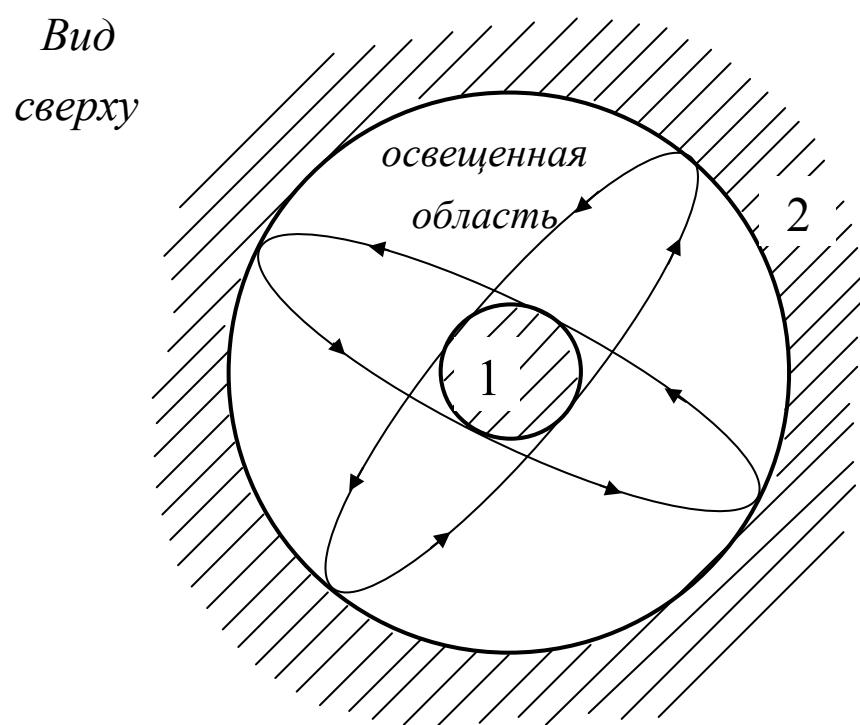


Рис. 1.18

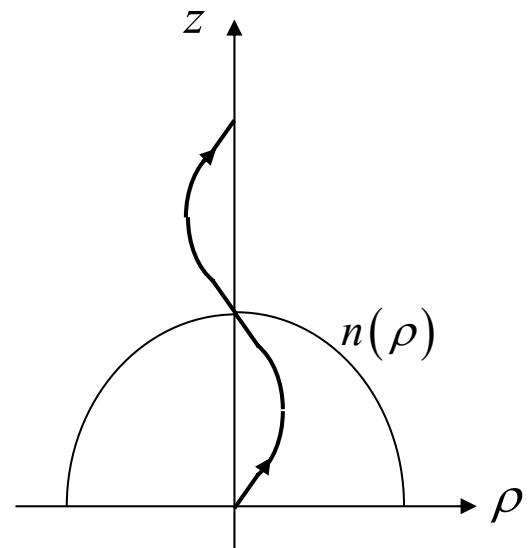


Рис. 1.19

поверхности  $\rho_R$  будет тем больше, чем меньше будет начальная проекция эйконала на направление оси симметрии  $\bar{p}$ . В этом случае **луч** идет в меридиональной плоскости, многократно пересекая ось. Чем больше  $\rho_R$ , тем меньше расстояние между точками пересечения оси **лучом**.

3. Если аксиально-симметрична среда состоит из слоев конечной толщины, в каждом из которых показатель преломления является постоянной величиной, то в соответствии с (28) внутри каждого  $j$ -того слоя скалярное уравнение для радиальной координаты **луча** будет иметь вид

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{d\rho}{d\tau} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial n_j^2}{\partial \rho} \equiv \frac{1}{2} \nabla n_j^2 = 0 . \quad (41)$$

Если в начальной точке траектории **луча** проекция эйконала на радиальное направление отсутствует  $\dot{\rho}_\tau(0)=0$ , то уравнение (41) имеет решение

$$\rho(\tau) = \rho(0) \equiv \rho_0 \equiv \text{const}_\rho , \quad (42)$$

и траектория луча располагается на расстоянии  $\rho_0$  от оси

симметрии (Рис. 1.20). Если в начальной точке траектории две другие проекции эйконала отличны от нуля (т.е. **луч** направлен по касательной к цилиндру радиуса  $\rho_0$ ), то траектория **луча** будет винтовой линией, охватывающей поверхность цилиндра радиуса  $\rho_0$  (Рис. 1.20).

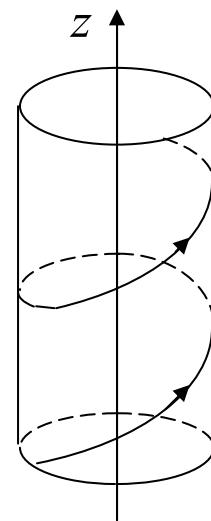


Рис. 1.20

#### Пункт 4. Линзоподобные (или фокусирующие) среды.

Линзоподобными средами называют среды, в которых функция распределения  $n(\rho)$  имеет колоколообразный вид, напоминающий по форме функции Лоренца или Гаусса (рис. 1.21). Если ограничиваться рассмотрением малых значений  $\rho$ , то распределение  $n(\rho)$  можно аппроксимировать параболой.

##### 1. Плоский случай.

Рассмотрим только симметричные решения уравнения Гельмгольца, **лучевые вектора** которых не содержат составляющих, направленных по азимутальному углу  $\varphi$ . В этих случаях  $M=0$ , траектория каждого **луча** располагается в плоскости, проходящей через ось симметрии, и поэтому без уменьшения общности можно ограничиться рассмотрением двухмерной задачи (например, в плоскости XOZ). Для описания траектории **луча**, имеющего в начальной точке

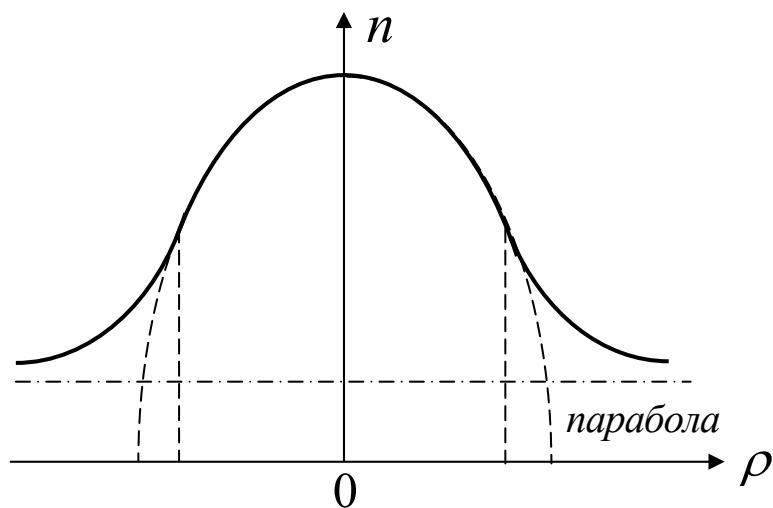


Рис. 1.21

$$\tau = 0 ; \quad \rho(0) \equiv \rho_0 ; \quad z(0) \equiv z_0$$

**компоненты лучевого вектора**

$$p_\rho(0) \equiv \dot{\rho}_\tau(0) = n_0 \sin \theta(0) \equiv n_0 \sin \theta_0 ; \quad p_z(0) \equiv \dot{z}_\tau(0) = n_0 \cos \theta(0) \equiv n_0 \cos \theta_0 ,$$

следует воспользоваться решением (36). Положив в нём  $M = 0$  и произведя замену  $\bar{p} \rightarrow n_0 \cos \theta_0$ , получим выражение

$$\tau = \pm \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{n^2 - (n_0 \cos \theta_0)^2}} = \frac{z - z_0}{n_0 \cos \theta_0} , \quad (36')$$

позволяющее установить однозначное соответствие координат  $z$  и  $\rho$  в разных точках траектории **луча**.

Предположим, что в отмеченной на рис. 1.21 области показатель преломления среды можно аппроксимировать параболической зависимостью

$$n^2 \equiv n^2(\rho) \cong \bar{n}^2(1 - \beta^2 \rho^2) . \quad (43)$$

В этом случае векторное уравнение траектории **луча**

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} \equiv \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{d\rho}{d\tau} \vec{\rho}_0 + \frac{dz}{d\tau} \vec{z}_0 \right\} = \frac{1}{2} \cdot \nabla n^2 = -\bar{n}^2 \beta^2 \rho \vec{\rho}_0 \quad (28')$$

(см. также (2.24)) с учётом связи координат  $z$  и  $\tau$ , которая отражена в формуле (36'), преобразуется в уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = -\frac{\beta^2}{(1 - \beta^2 \rho_0^2) \cos^2 \theta_0} \rho \equiv -K_{LM}^2 \cdot \rho , \quad (44)$$

устанавливающего простое однозначное соответствие поперечной  $\rho$  и продольной  $z$  координат. В уравнении (44) волновое число  $K_{LM}$  определяет пространственный период

$$\Lambda_{LM} = (2\pi / K_{LM}) = (2\pi / \beta) \sqrt{1 - \beta^2 \rho_0^2} \cdot \cos \theta_0 \quad (45)$$

изменения поперечной координаты траектории **луча**, распространяющегося в линзоподобной среде (Lens Medium), в зависимости от свойств среды ( $\beta$ ) и направ-

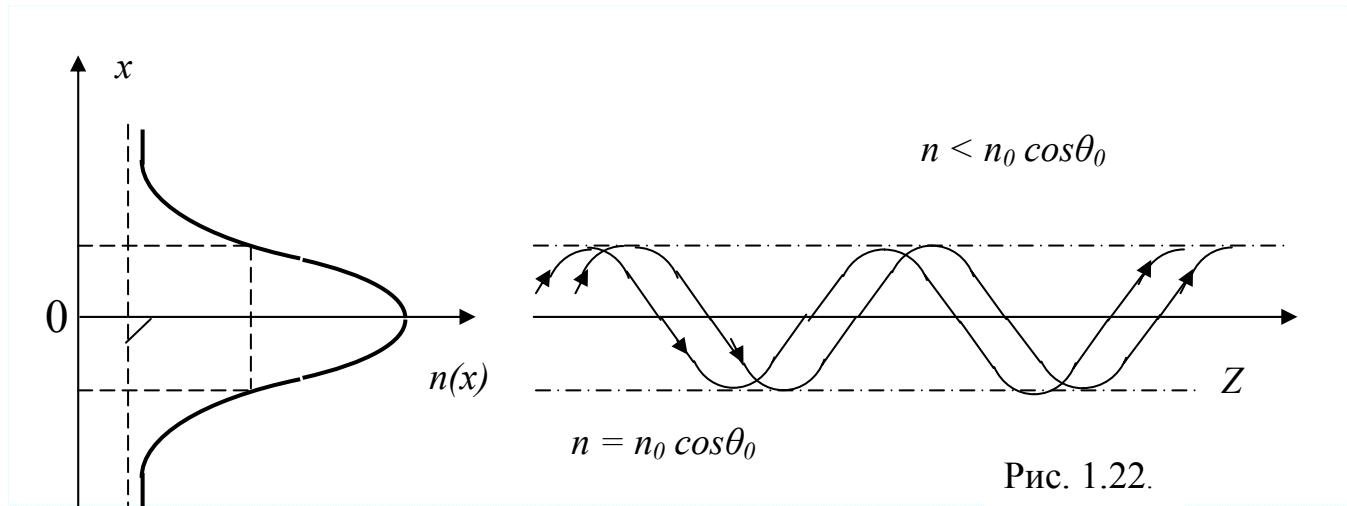


Рис. 1.22.

ления **лучевого** вектора ( $\cos \theta_0$ ) в начальной точке ( $\rho_0, z_0$ ) траектории (см.

Рис. 1.22). Амплитуда колебания поперечной координаты *луча* как граница области

$$n^2 \equiv \bar{n}^2 (1 - \beta^2 \rho^2) \geq n_0^2 \cos^2 \theta_0 \equiv \bar{n}^2 (1 - \beta^2 \rho_0^2) \cos^2 \theta_0 , \quad (46)$$

в которой должна располагаться траектория *луча*, может быть названа также точкой поворота  $\rho_R$ . В отличие от общих численных методов в частном случае параболического рельефа амплитуда

$$\rho_R = \sqrt{(\sin \theta_0 / \beta)^2 + (\rho_0 \cos \theta_0)^2} \quad (47)$$

находится аналитически из уравнения границы (46).

### Пункт 5. *Параксиальные лучи в аксиально-симметричных средах.*

*Параксиальные лучи* – это лучи, которые распространяются почти параллельно оптической оси системы. В каждой точке траектории *параксиального луча* угол наклона *лучевого вектора* к оси симметрии  $\theta$  должен удовлетворять приближению *параксиальности*

$$\theta \ll 1 , \quad (48)$$

позволяющему во всех расчётах считать корректными следующие замены

$$\tg \theta \approx \sin \theta \approx \theta ; \quad \cos \theta \approx 1 ; \quad \frac{dF}{ds} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dF}{dz} \cdot \cos \theta \approx \frac{dF}{dz} . \quad (49)$$

Используя приближение *параксиальности*, преобразуем основное векторное уравнение траектории *луча* (2.15) к виду

$$\underline{\underline{\frac{d\vec{p}}{ds}}} \equiv \underline{\underline{\frac{d}{ds} \left\{ n \frac{d\vec{r}}{ds} \right\}}} = \underline{\underline{\nabla n}} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dz} \left\{ n \frac{d\vec{r}}{dz} \right\}}} \approx \frac{\partial n}{\partial z} \vec{z}_0 + \nabla_{\perp} n . \quad (50)$$

Подставляя в (50) вектор координат точки на траектории *луча*

$$\vec{r} = z \vec{z}_0 + \vec{r}_{\perp} , \quad (51)$$

получим уравнение для *параксиальных лучей*

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dz} \right) \approx \nabla_{\perp} n , \quad (52)$$

в котором  $z$  играет роль лучевой координаты  $s$ .

*Случай A.* Весьма распространённым является случай, когда переменная часть коэффициента преломления

$$n = \bar{n} + \tilde{n}(z, \vec{r}_{\perp}) \quad (53)$$

оказывается много меньше постоянной составляющей

$$|\tilde{n}| \ll \bar{n} . \quad (54)$$

Подставляя (53) в (52) и пренебрегая в левой части малым членом, уравнение для *луча в параксиальном приближении* для этого случая получим в виде

$$\bar{n} \frac{d^2 \vec{r}_{\perp}}{dz^2} \approx \nabla_{\perp} \tilde{n}(z, \vec{r}_{\perp}) . \quad (55)$$

*Случай B.* Рассмотрим симметричные эйконалы  $\Psi(|\vec{r}_{\perp}| \equiv \rho, z)$  и, следовательно, отвечающие им *плоские* траектории *лучей*. В этих случаях *лучевые*

**вектора** ( $\nabla \Psi$ ) не содержат составляющих, направленных по азимутальному углу  $\varphi$ :

$$(d\varphi/dz) = 0 \quad \Rightarrow \Rightarrow \varphi(z) = \text{const} \equiv \varphi_0 \quad . \quad (56)$$

Это означает, что векторное уравнение (52) по существу является скалярным

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\rho}{dz} \right) \cong \frac{\partial n}{\partial \rho} \quad . \quad (57)$$

**Случай C.** Часто встречаются среды, у которых изменение показателя преломления  $n(\rho, z)$  вдоль координаты  $z$  происходит существенно более медленно, чем в поперечном направлении

$$|(\partial n / \partial \rho)| \gg |(\partial n / \partial z)| \quad . \quad (58)$$

Примерами таких сред могут служить разнообразные элементы оптических систем, которые нагреваются узким пучком лазерного излучения.

В случае плоских траекторий условие (58) может упростить уравнение (57), если наряду с (61) выполняется дополнительное условие

$$|\langle \partial(\ln n) / \partial z \rangle| \ll |\langle \partial(\ln \{\partial \rho / \partial z\}) / \partial z \rangle| \quad , \quad (59)$$

которое не является жестким для сред с показателем преломления  $|n| \geq 1$ . Подставляя (58) в (57) и пренебрегая в левой части малым слагаемым, получим уравнение

$$n \frac{d^2 \rho}{dz^2} \cong \frac{\partial n}{\partial \rho} \quad (60)$$

для **параксиальных лучей** с плоскими траекториями в плавно-неоднородных аксиально-симметричных средах<sup>5)</sup>. Решение (приближенного) уравнения (60) совпадает<sup>6)</sup> с решением (36') уравнения (28) в плоском случае с точностью до замен (49), справедливых в **приближении параксиальности** (48).

**Случай D. Параксиальные лучи** в аксиально-симметричной среде с параболическим рельефом показателя преломления.

В приближении (49) **параксиальности лучей** пространственный период изменения поперечной координаты траектории **луча**

$$\Lambda_{LM} = (2\pi / K_{LM}) \cong (2\pi / \beta) \sqrt{1 - \beta^2 \rho_0^2} \quad (61)$$

оказывается одинаковым для всех **лучей**, выходящих под малыми углами из точки с координатами  $\rho_0, z_0$ . Это значит, что все **параксиальные лучи** собираются в одну точку и для них выполняется **условие идеальной фокусировки**.

<sup>5)</sup> Используя приближение **параксиальности лучей** (49) и условие **плоской траектории луча** (56), уравнение (60) можно получить также непосредственно из (2.15\*).

<sup>6)</sup> Умножая обе части (60) на  $(2\dot{\rho}_z / n)$  и интегрируя, найдём с учётом начальных условий первый интеграл в виде  $(\dot{\rho}_z)^2 = \ln n^2 - \ln n_0^2 + \tan^2 \theta_0$ . Этот интеграл преобразуется в выражение  $z - z_0 = \pm \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\ln(n/n_0)^2 + \tan^2 \theta_0}} \cong \pm \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(n/n_0)^2 - 1 + \sin^2 \theta_0}}$ , которое совпадает с (36').

## §6. Матричный метод описания лучей в центрированных линиях передачи силовых полей

**Центрированной оптической системой** или открытой линией передачи оптического излучения называется совокупность отдельных элементов или участков разнообразных аксиально-симметричных сред, оси симметрии которых на границах разделов имеют общие точки. Такими элементами могут быть, например, тонкие линзы, сферические поверхности раздела и искривлённые зеркала, состоящие из нескольких слоёв разных диэлектриков границы раздела двух сред и, конечно, участки пространства, заполненные аксиально-симметричной средой. Подобные линии передачи могут использоваться в акустике, а также для транспортировки других силовых полей. Математической основой матричного метода описания распространения лучей в таких системах является **параксиальное приближение** (5.48) и (5.49) **геометрической оптики**.

### Пункт 1. Математические основы матричного метода описания распространения параксиальных лучей.

Используя определение орта **лучевого вектора** (2.12), найдём в **параксиальном приближении** орт

$$\vec{s}_0 \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} \equiv \frac{d}{dz} (z\vec{z}_0 + \vec{r}_\perp) = \vec{z}_0 + \frac{d\vec{r}_\perp}{dz} \equiv \vec{z}_0 + \vec{s}_\perp . \quad (1)$$

Убедимся, что модуль этого вектора оказывается несколько больше единицы

$$(\vec{s}_0 \cdot \vec{s}_0) \cong 1 + (\vec{s}_\perp \cdot \vec{s}_\perp) = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta \cong 1 + \theta^2 \cong 1 ,$$

но эта разница вполне укладывается в рамки приближения (5.48). Из уравнений (5.50) и (5.52) следует, что внутри каждого отдельного **элемента центрированной системы** изменение **лучевого вектора**  $\nabla\Psi \equiv n\vec{s}_0$  можно полностью определить по изменению его поперечной компоненты

$$n(d\vec{r}_\perp / dz) \equiv n\vec{s}_\perp \quad (2)$$

и что согласно модифицированному варианту уравнения (5.52) траектории луча

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\vec{r}_\perp}{dz} \right) \cong \nabla_\perp n \Rightarrow \frac{d}{dz} (n\vec{s}_\perp) \cong \nabla_\perp n \quad (3)$$

поперечная компонента остаётся неизменной в среде **элемента системы**, показатель преломления которой *не зависит* от поперечной координаты ( $\nabla_\perp n = 0$ ).

Заметим, что на границе раздела сред согласно (4.2) сохраняется тангенциальная составляющая лучевого вектора  $n(\vec{s}_0 \cdot \vec{\tau}_0) = \operatorname{const}_\tau$ . Если касательная плоскость в граничной точке образует малый угол с плоскостью, перпендикулярной оси системы, то по существу это означает сохранение на границе поперечной компоненты лучевого вектора  $n\vec{s}_\perp = \vec{c}_\tau$ .

В **параксиальном приближении**, когда траектория луча задаётся как функция координаты  $z$  каждой его точки (а не координаты  $s$  точки на дуге траектории) для определения координат  $\vec{r}$  точки **луча** в пространстве (при известных

начальных условиях) достаточно задать только поперечную компоненту  $\vec{r}_\perp$  вектора

$$\vec{r} = z \vec{z}_0 + \vec{r}_\perp. \quad (4)$$

Т.о., в **параксиальном приближении** вектор  $\vec{r}_\perp$  и вектор  $n \vec{s}_\perp$  полностью определяют координаты луча и направление **лучевого вектора** (направление наибыстрейшего изменения эйконала).

### Пункт 2. Матрицы преобразований координат луча.

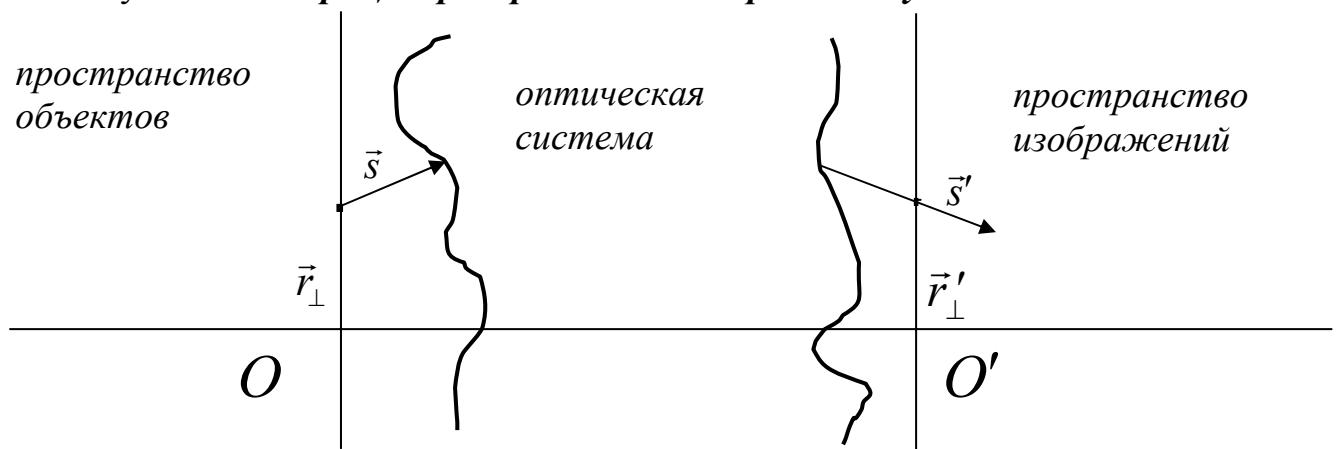


Рис. 1.23

Рассмотрим оптическую систему, имеющую ось симметрии и расположенную между двумя сечениями  $O$  и  $O'$  (Рис. 1.23). **Луч**  $\vec{s}_0$ , проходящий через сечение  $O$ , попадает внутрь оптической системы и выходит из нее в сечении  $O'$  под другим углом. За координаты **луча** возьмём вектор  $\vec{r}_\perp$ , определяющий расстояние от оси  $OO'$  до точки пересечения **луча** с плоскостью, перпендикулярной оси  $OO'$ ; и вектор  $n \vec{s}_\perp$ , определяющий направление луча в этой точке. **Эти вектора не обязательно лежат в одной плоскости.**

Разрабатывая аппарат, связывающий координаты **луча**  $n \vec{s}_\perp$ ,  $\vec{r}_\perp$  на входе системы (**в пространстве объектов**) с его координатами  $n \vec{s}'_\perp$ ,  $\vec{r}'_\perp$  на выходе (**в пространстве изображений**), примем в качестве аксиом, не уменьшающих общности рассмотрения, следующие положения (см. Рис. 1.24).

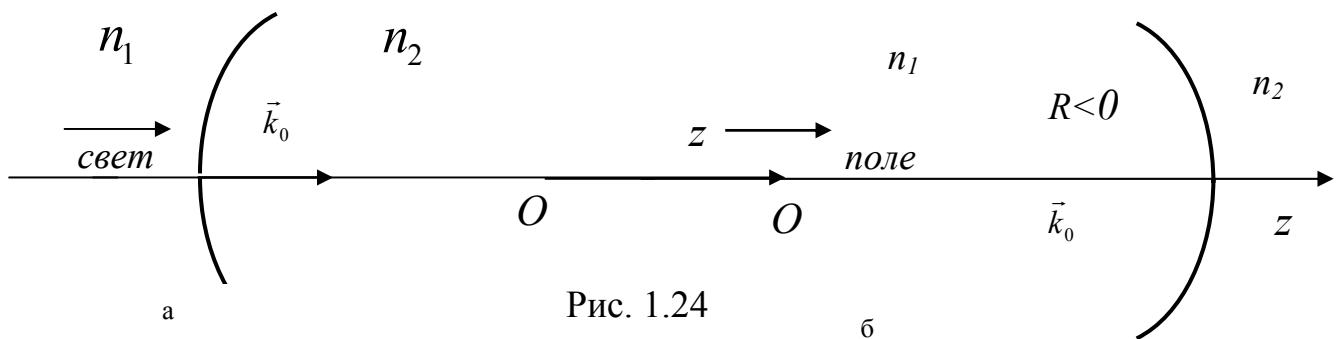


Рис. 1.24

1. Поле (в оптике свет) распространяется в  $+Z$ -направлении оси  $OZ$ . Это направление называется **положительным**.

2. На границе раздела сред, имеющих кривизну, радиус кривизны отсчитывается от вершины поверхности к центру кривизны. Если нормаль к границе раздела  $\vec{k}_0$ , направленная к центру кривизны, совпадает с направлением распространения поля (света), то радиус кривизны  $R > 0$  (Рис. 1.24а), в противном случае  $R < 0$  (Рис. 1.24б).

Введем вектор-столбец координат точки траектории и поперечных компонент **лучевого вектора**

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} n \vec{s}_\perp \\ \vec{r}_\perp \end{pmatrix}, \quad (5)$$

определяющий в каждом сечении положение и направление **луча**. Вектор-столбец в общем случае имеет 4 скалярные величины. Конкретные связи между входными и выходными координатами **луча** будем устанавливать с помощью матриц. Очевидно, что однозначную связь между 4-мя входными и 4-мя выходными координатами **луча**

$$\begin{pmatrix} n \vec{s}_\perp \\ \vec{r}_\perp \end{pmatrix}' = \hat{S} \bullet \begin{pmatrix} n \vec{s}_\perp \\ \vec{r}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A n \vec{s}_\perp + B \vec{r}_\perp \\ C n \vec{s}_\perp + D \vec{r}_\perp \end{pmatrix} \quad (6)$$

можно установить с помощью 4-элементной матрицы

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (7)$$

## 2.1. Матрица преобразования координат луча на участке однородной среды.

В однородной среде **лучи** прямолинейны (Рис. 1.25). Поскольку вектора  $\vec{s}$  и  $\vec{s}'$  имеют одно направление, то связь выходных и входных координат **луча** устанавливается двумя простыми соотношениями

$$\begin{cases} n \vec{s}'_\perp = n \vec{s}_\perp, \\ \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp + n \vec{s}_\perp (L/n) \end{cases}, \quad (8)$$

где  $T \cong L$  – длина траектории **луча в параксиальном приближении** (5.48). Соотношения (8) можно переписать в виде (6) с помощью  $S$ -матрицы

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L/n & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{G}_{(L/n)}, \quad (9)$$

которая называется **матрицей перемещения**. **Матрица перемещения** имеет собственное обозначение и норму  $\|\hat{G}_{(L/n)}\| = 1$ .

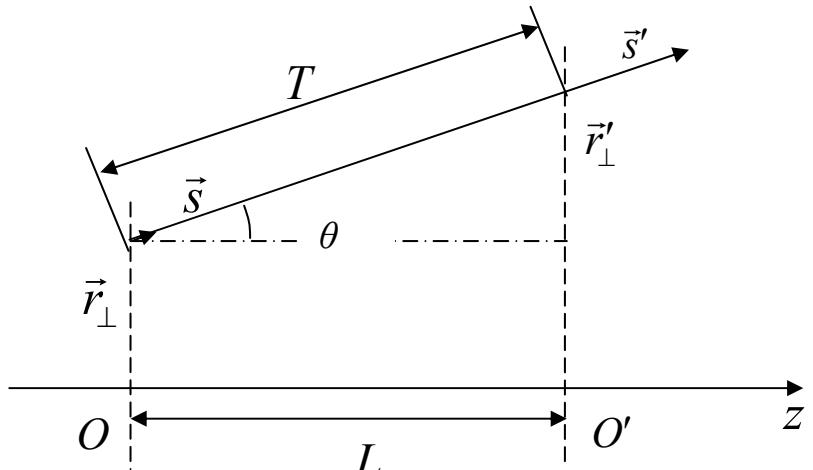


Рис. 1.25

## 2.2. Матрица преобразования координат луча на плоской границе раздела сред, перпендикулярной оси симметрии.

Подставим выражение (1) для орта **лучевого вектора**, справедливое в **параксиальном приближении**, в граничное условие (4.3) и преобразуем его к виду

$$[\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{20} - n_1 \vec{s}_{10})] \approx [\vec{z}_0 \times (n_2 \vec{s}_{2\perp} - n_1 \vec{s}_{1\perp})] = 0 \quad . \quad (10^*)$$

Представим границу раздела сред как центрированную (оптическую) систему с бесконечно близкими сечениями  $O$  и  $O'$  и получим связь координат **луча** в виде

$$(n_2 \vec{s}_{2\perp}) \equiv (n \vec{s}_\perp)' = (n \vec{s}_\perp) \equiv (n_1 \vec{s}_{1\perp}) \quad ; \quad \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \quad . \quad (10)$$

Из (10) следует, что **матрица преломления** является единичной матрицей

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I} \quad . \quad (11)$$

## 2.3. Матрица преобразования координат луча в многослойной среде.

Имеется среда, свойства которой дискретно меняются (Рис. 1.26) вдоль оси  $z$ . Считается, что  $n$  изменяется достаточно плавно, **отражения на границе раздела сред малы и не учитываются**.

Используя **матрицы перемещения** (9) и **преломления** (11), найдём вначале матрицу преобразования координат **луча** после прохождения двух слоёв

$$\hat{G}_{\frac{L_2}{n_2}} \cdot \hat{I} \cdot \hat{G}_{\frac{L_1}{n_1}} = \hat{G}_{\frac{L_2}{n_2}} \cdot \hat{G}_{\frac{L_1}{n_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L_2}{n_2} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L_1}{n_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L_2}{n_2} + \frac{L_1}{n_1} & 1 \end{pmatrix} = \hat{G}_{\frac{\frac{L_1}{n_1} + \frac{L_2}{n_2}}{n_1 + n_2}} \quad (12^*)$$

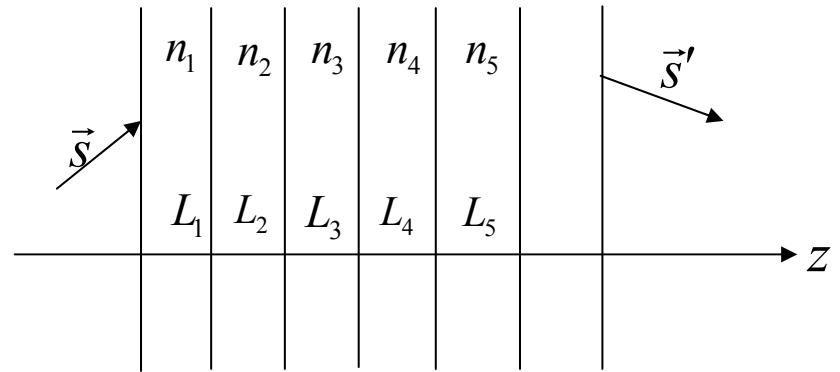


Рис. 1.26

и фактически получим закон образования **матрицы перемещения** в слоистой среде. Приведённый результат нетрудно обобщить на третий и последующие слои, что позволяет получить **матрицу перемещения** для координат **луча** через многослойную ( $N$  слоев) систему и среду-систему с плавно изменяющимся показателем преломления

$$\hat{G}_{\sum_{i=1}^N \frac{L_i}{n_i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{n_i} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{G}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \int_0^L \frac{dz}{n(z)} & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (12)$$

## 2.4. Матрица преобразования координат луча на плоской наклонной границе раздела сред.

Расчёт элементов **матрицы преломления на наклонной плоской границе** (Рис. 1.27) целесообразно начать с того, что следует применить **параксиальное**

**приближение (5.48)** к условиям на границе раздела сред. С этой целью подставим выражение (1) для орта **лучевого вектора**, справедливое в **параксиальном приближении**, в граничное условие (4.3) и преобразуем его к виду

$$[\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{20} - n_1 \vec{s}_{10})] \approx [\vec{n}_{12} \times \vec{z}_0] \cdot (n_2 - n_1) + [\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{2\perp} - n_1 \vec{s}_{1\perp})] = 0 \quad .(13)$$

Ограничимся изучением случаев относительно малых углов падения на границу. Будем считать, что угол  $\alpha$  между пограничной плоскостью и плоскостью, перпендикулярной оси  $OZ$ , имеет такой же порядок малости, какой имеет угол  $\theta$  наклона **луча** к оси системы. Это означает, что нормаль к границе можно представить в таком же виде

$$\vec{n}_{12} \approx \vec{z}_0 + \vec{n}_\perp \quad , \quad (14)$$

в котором представлен в формуле (1) орт **лучевого вектора**  $\vec{s}_0$ .

Подставляя (14) в правую часть (13) и ограничиваясь учётом членов одного порядка малости, преобразуем (13) в граничное условие на наклонной границе в "дважды параксиальном приближении" **то** к виду

$$[\vec{n}_{12} \times \vec{z}_0] \cdot (n_2 - n_1) + [\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{2\perp} - n_1 \vec{s}_{1\perp})] \approx [\vec{z}_0 \times \{n_2 \vec{s}_{2\perp} - n_1 \vec{s}_{1\perp} - \vec{n}_\perp (n_2 - n_1)\}] = 0 \quad .(15)$$

Используя (15) и рассматривая наклонную границу раздела сред в точке падения **луча** как центрированную (оптическую) систему с бесконечно близкими сечениями  $O$  и  $O'$ , получаем связь координат **луча** в виде

$$\begin{cases} (n_2 \vec{s}_{2\perp})' = n_1 \vec{s}_{1\perp} + \vec{n}_\perp (n_2 - n_1) \\ \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \end{cases} \quad . \quad (16)$$

Из (16) нетрудно найти необходимую систему двух векторных (и соответственно двух пар скалярных) линейных уравнений для определения четырёх неизвестных коэффициентов **матрицы преломления на наклонной плоской границе**. Для любого произвольного значения вектора  $\vec{n}_\perp$  эти уравнения всегда имеют решение, если вектора  $\vec{r}_\perp$  и  $\vec{s}_{1\perp}$  не параллельны друг другу. Простые алгебраические расчёты позволяют найти **матрицу преобразования координат луча на наклонной плоской границе** в виде

$$\hat{S}_{\alpha\theta} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \cdot \frac{(\vec{z}_0 \cdot [\vec{r}_\perp \times \vec{n}_\perp])}{(\vec{z}_0 \cdot [\vec{r}_\perp \times \vec{s}_{1\perp}])} & (n_2 - n_1) \cdot \frac{(\vec{z}_0 \cdot [\vec{n}_\perp \times \vec{s}_{1\perp}])}{(\vec{z}_0 \cdot [\vec{r}_\perp \times \vec{s}_{1\perp}])} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (17)$$

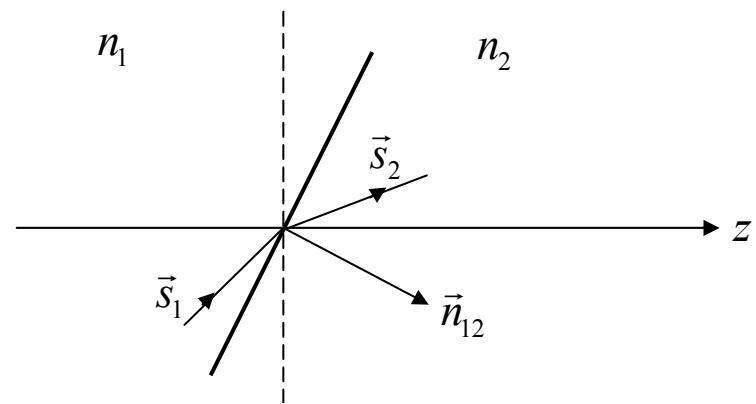


Рис. 1.27

## 2.5. Матрица преобразования координат луча на сферической границе раздела сред.

Из геометрии, изображённой на Рис. 1.28, следует, что в точке падения **луча** в использованном выше "дважды параксиальном приближении" **то** поперечная составляющая нормали к границе раздела легко находится в виде

$$\vec{n}_\perp = -\frac{\vec{r}_\perp}{R} . \quad (18)$$

Рассматривая (18) как составляющую нормали к касательной плоскости, подставим это выражение в соотношения (16), связывающие координаты **луча** в двух бесконечно близких сечениях центрированной системы, и представим их в виде

$$\begin{cases} (n_2 \vec{s}_{2\perp})' = n_1 \vec{s}_{1\perp} - \frac{n_2 - n_1}{R} \vec{r}_\perp \\ \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \end{cases} . \quad (19)$$

Подставляя (18) в (17), получим *S-матрицу преобразования координат луча на сферической границе раздела сред*

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{T}_{[(n_2 - n_1)/R]} . \quad (20)$$

Она имеет собственное обозначение, называется **матрицей преломления на сферической границе**, и обладает нормой  $\| \hat{T}_{[(n_2 - n_1)/R]} \| = 1$ . При расчёте матрицы сферическая граница практически была заменена на плоскую (Рис. 1.29). Тем самым мы пренебрегли ходом **луча** от плоскости до сферической поверхности.

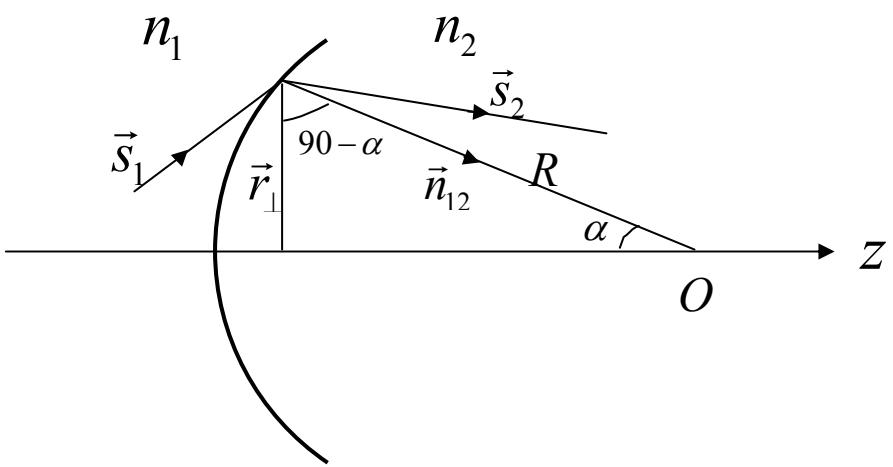


Рис. 1.28



Рис. 1.29

## 2.6. Матрица преобразования координат луча в толстой линзе.

Матрица преобразования координат **луча** таким элементом (Рис. 1.30) находится как результат трёх последовательных преобразований координат **луча**

$$\begin{aligned} \hat{S}_{oo'} &= \hat{T}_{(2)} \hat{G}_{(L/n_2)} \hat{T}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n_2} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -\{(n_1 - n_2)/R_2\} \\ 0 & 1 + \{(n_1 - n_2)/n_2\} \cdot (L/R_1) \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \frac{L}{R_2} & \left( n_1 - n_2 \right) \left\{ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \frac{L}{R_1 R_2} \right\} \\ \frac{L}{n_2} & 1 + \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2} \right) \frac{L}{R_1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

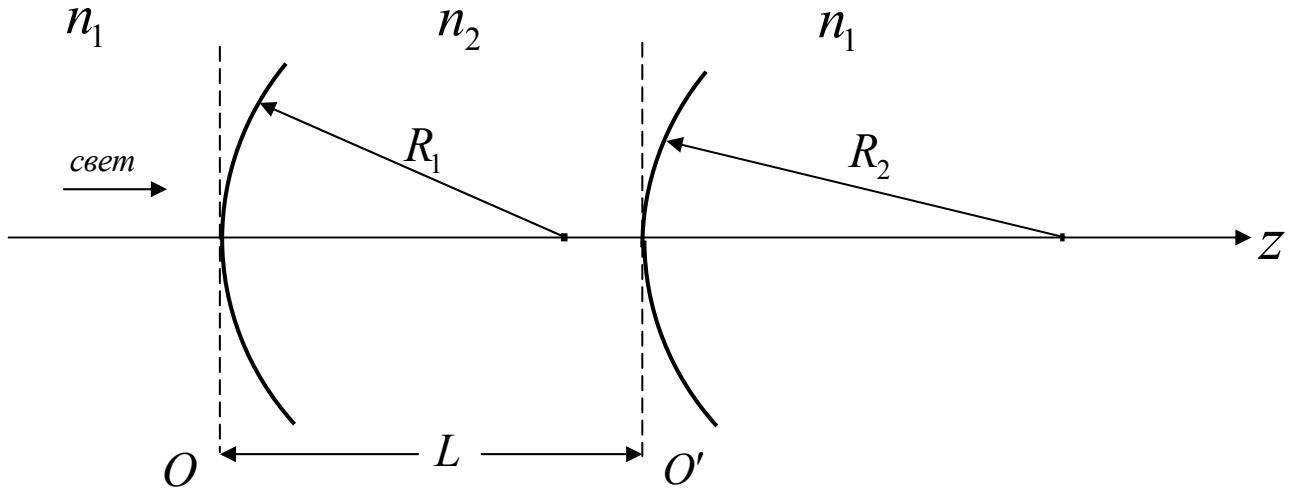


Рис. 1.30

В случае  $L \ll R_{1,2}$  в элементах матрицы малыми величинами  $L / R_{1,2}$  можно пренебречь, и матрица преобразования (21) примет вид

$$\hat{S}_{OO'} = \begin{pmatrix} 1 & - (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{L}{n_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Преобразование координат **луча** такой линзой

$$\begin{cases} (n\vec{s}_\perp)' = n_1 \vec{s}_\perp - (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{r}_\perp , \\ \vec{r}'_\perp = \frac{L}{n_2} (n_1 \vec{s}_\perp) + \vec{r}_\perp \end{cases}, \quad (23)$$

показывает, что из-за прохождения толщины линзы под углом к оси **луч** дополнительно смещается от оси системы на величину  $(L / n_2)(n_1 \vec{s}_\perp)$ .

## 2.7. Матрица преобразования координат луча тонкой линзой.

**Тонкая линза** является приближением

$$(L / n_2)(n_1 \vec{s}_\perp) \ll \vec{r}_\perp, \quad \vec{r}'_\perp \approx \vec{r}_\perp, \quad (24)$$

означающим, что смещение *луча* на толщине линзы мало по сравнению с первоначальным отклонением *луча* от оси и им можно пренебречь. Это приближение выполняется для *параксиальных лучей* тем лучше, чем дальше они отстоят от оси симметрии. Таким образом, *тонкая линза* считается бесконечно тонким корректором, который меняет фазовый фронт поля и направление распространения *луча*, но не производит дополнительного смещения *луча* в поперечном направлении. *Матрица преобразования тонкой линзы* совпадает по форме с *матрицей преломления на сферической границе* и представляется в виде

$$\hat{T}_{oo'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_1}{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{T}_{\frac{n}{F}} \Rightarrow \hat{T}_b = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{T}_{\frac{n}{F}}, \quad (25)$$

где фокусное расстояние *тонкой линзы*  $F$  определяется выражением

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (26)$$

Если на линзу (рис. 1.30) падает пучок *лучей*, параллельных оптической оси системы ( $\vec{s}_\perp = 0$ ), то согласно (23) получим  $\vec{s}'_\perp = -(\vec{r}_\perp / F)$ . Из Рис. 1.31 следует, что все лучи собираются в одну точку на оси системы на расстоянии  $F$  от линзы.

Согласно (26) линза будет собирающей линзой ( $F > 0$ ), если, например, показатель преломления линзы больше показателя преломления окружающей линзу среды ( $n_2 > n_1$ ) и радиус кривизны первой поверхности линзы положителен ( $R_1 > 0$ ), а второй поверхности линзы отрицателен ( $R_2 < 0$ ) или положителен, но  $R_2 > R_1$ .

*Матрица преобразования координат луча тонкой линзой*  $\hat{T}_b$ , а также *матрица преломления на сферической границе* имеют два важных свойства, которые проверяются простым перемножением матриц.

Первым назовём свойство *аддитивности*

$$\hat{T}_a \cdot \hat{T}_b = \hat{T}_{a+b} \quad (27)$$

и заметим, что оно имеет точно такой же физический смысл, как аналогичное свойство (12\*) *матрицы перемещения*  $\hat{G}_a$ .

*Матрица преобразования координат луча тонкой линзой*  $\hat{T}_b$  имеет обратную матрицу  $\hat{T}_b^{-1}$ . *Матрица*  $\hat{T}_b^{-1}$  как и любая обратная матрица, определяется из основного соотношения

$$\hat{T}_b \cdot \hat{T}_b^{-1} = \hat{I} \quad . \quad (28)$$

Подставляя (25) в левую часть соотношения (28) и (11) в его правую часть, получим четыре линейных уравнения относительно 4-х неизвестных элементов обратной матрицы, в результате решения которых найдём эту матрицу в виде

$$\hat{T}_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{T}_{-b} . \quad (29)$$

Заметим, что формулу (29) можно получить, комбинируя (27) и (28) с учётом определения (11) единичной матрицы.

**Матрица преломления лучей на сферической поверхности (25) и матрица перемещения лучей**

$$\hat{G}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Rightarrow G_{(L/n)} \quad (9)$$

- основные матрицы преобразования координат луча в центрированных системах. Используя комбинации двух основных матриц, можно получить несколько важных физических следствий преобразования координат **луча** в центрированных системах, которые в математическом аспекте представляют собой особые *S*-матрицы таких преобразований.

### 2.8. Матрица преобразования Фурье.

Введем матрицу

$$\hat{\Phi}_a = \hat{T}_{\frac{1}{a}} \cdot \hat{G}_a \cdot \hat{T}_{\frac{1}{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

и выразим через элементы этой матрицы новые координаты луча

$$\begin{cases} (n \vec{s}_\perp)' = -a^{-1} \vec{r}_\perp \Rightarrow -n(\vec{r}_\perp / L) , \\ \vec{r}'_\perp = a(n \vec{s}_\perp) \Rightarrow (L \vec{s}_\perp) \end{cases} . \quad (31)$$

Как можно увидеть из (31), матрица  $\hat{\Phi}_a$  осуществляет преобразование угловых координат **луча** в *пространственные* координаты, и наоборот. Поэтому матрица  $\hat{\Phi}_a$  называется **матрицей преобразования Фурье**<sup>1)</sup>.

Если положить  $a = (F/n)$ , то геометрический образ **матрицы преобразования Фурье**

$$\hat{\Phi}_F = \hat{T}_{\frac{n}{F}} \cdot \hat{G}_{\frac{F}{n}} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F}}$$

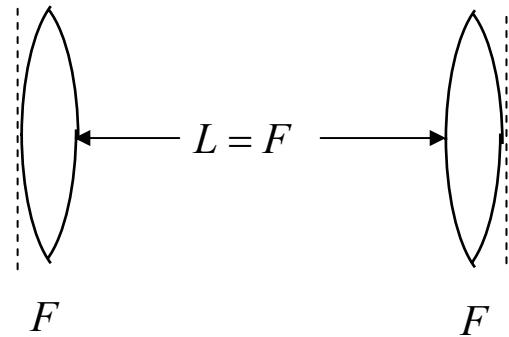


Рис. 1.32

окажется совершенно наглядным (Рис.1.32) и само преобразование экспериментально вполне осуществимым.

<sup>1)</sup> При изучении интегральных преобразований полей увидим, что этому матричному преобразованию будет соответствовать обычное интегральное преобразование Фурье.

Применим **матрицу**  $\hat{T}_{(1/a)}^{-1}$ , обратную матрице  $\hat{T}_{(1/a)} \Rightarrow \hat{T}_{(n/F)}$ , к обеим сторонам соотношения (30), определяющего **матрицу преобразования Фурье**. В результате получим ещё одну важную формулу

$$\hat{G}_a = \hat{T}_{(1/a)}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_a \cdot \hat{T}_{(1/a)}^{-1}, \quad (32)$$

устанавливающую связь матриц  $\hat{\Phi}_a$ ,  $\hat{T}_{(1/a)}$  и **перемещения лучей**  $\hat{G}_a$ .

### 2.9. Матрица преобразования масштаба.

Проведём последовательно два Фурье-преобразования и увидим, что получившаяся в результате матрица

$$\hat{\Phi}_a \cdot \hat{\Phi}_b = \begin{pmatrix} -(b/a) & 0 \\ 0 & -(a/b) \end{pmatrix} = \hat{A}_{-(b/a)} \Rightarrow \hat{A}_{-\alpha} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

преобразуя координаты **луча** по правилам

$$\begin{cases} (n \vec{s}_\perp)' = -\alpha (n \vec{s}_\perp) \equiv -(b/a)(n \vec{s}_\perp), \\ \vec{r}_\perp' = \frac{-1}{\alpha} \vec{r}_\perp \equiv -(a/b) \vec{r}_\perp \end{cases}, \quad (34)$$

уменьшает расстояние изображаемой точки **луча** от оси в  $\alpha \equiv (b/a)$  раз и меняет её положение относительно оси на противоположное. Угол наклона **луча** к оси системы, наоборот, увеличивается в  $\alpha \equiv (b/a)$  раз и также изменяется на противоположный. Изображение получается перевёрнутым и уменьшенным (или увеличенным в зависимости от величины  $\alpha$ ) в  $\alpha \equiv (b/a)$  раз. Матрица такого преобразования, изменяющая масштаб изображения, называется **матрицей преобразования масштаба**.

**В качестве примера применения матриц** рассмотрим преобразование лучей системой (Рис. 1.33), состоящей из линзы и участка свободного пространства. Найдем матрицу этого преобразования

$$\hat{S}_{oo'} = \hat{G}_L \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{F} \\ \frac{L}{n} & 1 - \frac{L}{F} \end{pmatrix}$$

и соответствующие этому преобразованию координаты **луча**

$$\begin{cases} (n \vec{s}_\perp)' = n \vec{s}_\perp - \frac{n}{F} \vec{r}_\perp, \\ \vec{r}_\perp' = \frac{L}{n} (n \vec{s}_\perp) + \left(1 - \frac{L}{F}\right) \vec{r}_\perp \end{cases}$$

в сечении  $O'$ . Рассмотрим следствия этого преобразования.

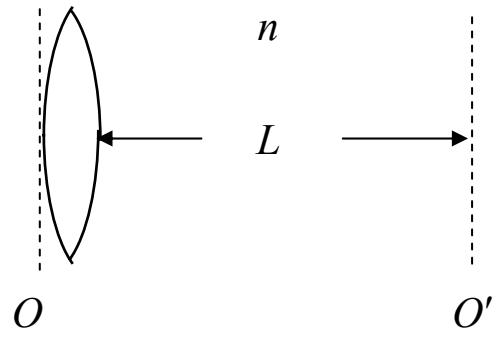


Рис. 1.33

1) Если **лучи** распространяются параллельно оптической оси системы  $n \vec{s}_\perp = 0$ , то на расстоянии  $L = F$  они все собираются в одной точке  $\vec{r}'_\perp = 0$  на оси, т.е. в фокусе линзы.

2) Если **лучи** распространяются параллельным пучком под некоторым углом к оптической оси системы  $n \vec{s}_\perp \neq 0$ , то на расстоянии  $L = F$  в фокальной плоскости линзы они все собираются в одной точке на расстоянии  $\vec{r}'_\perp = (L \vec{s}_\perp)$  от оси.

3) Если  $L = F$ , то матрицу преобразования  $\hat{S}_{oo'}$  можно представить в виде

$$\hat{S}_{oo'} = \hat{G}_{\frac{F}{n}} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F}} = \hat{T}_{\frac{n}{F}}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\frac{F}{n}} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F}}^{-1} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F}} = \hat{T}_{\frac{n}{F}}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\frac{F}{n}}, \quad (**)$$

который упрощает нахождение фокуса линзы в слоистой среде.

### Пункт 3. Свойства матриц преобразования.

1.) Все рассмотренные  $S$ -матрицы имели вид (7) и одинаковую норму

$$\| \hat{S} \| = AD - BC = 1. \quad (35)$$

Это свойство матриц преобразования координат луча похоже на **закон сохранения** и на самом деле является законом сохранения. Из курса теоретической механики известно, что при описании движения материальных частиц в потенциальном поле имеет место **закон сохранения элемента фазового объема в фазовом пространстве**, который называется теоремой Лиувилля. Поскольку уравнения *го* по существу совпадают с уравнениями движения материальной точки, то и в *го* существует аналогичный закон сохранения в виде  $\| \hat{S} \| = 1$ .

2.) Поскольку  $\| \hat{S} \| = 1$ , то нетрудно убедиться прямым расчётом, что каждая обратная матрица имеет вид<sup>2)</sup>

$$\hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Это свойство с большой лёгкостью позволяет установить простые соотношения

$$\hat{G}_a^{-1} = \hat{G}_{-a}, \quad \hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a}, \quad \hat{\Phi}_a^{-1} = \hat{\Phi}_{-a}. \quad (37)$$

между обратными и прямыми матрицами основных преобразований координат.

3.) Существует **таблица матричных тождеств** (38), которая определяет **алгебру матричных преобразований координат луча**, прошедшего сложную центрированную систему. Тождества (38) можно использовать для упрощения расчётов не только в этом случае. Они также позволяют устанавливать эквивалентность оптических систем, содержащие разные элементы. Например, на осно-

---

<sup>2)</sup> Заметим, что приведённая в формуле (29) обратная матрица  $\hat{T}_b^{-1} = \hat{T}_{-b}$  могла быть получена из (25) по формуле (36).

вании тождества  $\hat{\Phi}_a \hat{G}_b = \hat{T}_{\frac{b}{a^2}} \hat{\Phi}_a$  можно сделать вывод об эквивалентности систем, описываемых матрицами  $\hat{\Phi}_a \hat{G}_b$  и  $\hat{T}_{\frac{b}{a^2}} \hat{\Phi}_a$ .

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \hat{G}_a \hat{G}_b = \hat{G}_{a+b} , \quad 5. \quad \hat{A}_\alpha^{-1} = \hat{A}_{\frac{1}{\alpha}} , \quad 9. \quad \hat{G}_a = \hat{T}_{\frac{1}{a}}^{-1} \hat{\Phi}_a \hat{T}_{\frac{1}{a}}^{-1} , \\
 2. \quad & \hat{T}_a \hat{T}_b = \hat{T}_{a+b} , \quad 6. \quad \hat{\Phi}_b \hat{A}_\alpha = \hat{\Phi}_{\alpha b} , \quad 10. \quad \hat{\Phi}_a \hat{G}_b = \hat{T}_{\frac{b}{a^2}} \hat{\Phi}_a , \\
 3. \quad & \hat{\Phi}_a \hat{\Phi}_b = \hat{A}_{-\frac{b}{a}} , \quad 7. \quad \hat{T}_b \hat{\Phi}_a = \hat{\Phi}_a \hat{G}_{ba^2} , \quad 11. \quad \hat{A}_\alpha \hat{T}_b = \hat{T}_{b\alpha^2} \hat{A}_\alpha , \\
 4. \quad & \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta = \hat{A}_{\alpha\beta} , \quad 8. \quad \hat{\Phi}_a \hat{T}_b = \hat{G}_{ba^2} \hat{\Phi}_a , \\
 12. \quad & \hat{\Phi}_{a_1} \hat{T}_b^{-1} \hat{\Phi}_{a_2} = \hat{T}_{\frac{1}{ba_1^2}} \hat{\Phi}_{ba_1 a_2} \hat{T}_{\frac{1}{ba_2^2}} , \quad 13. \quad \hat{A}_\alpha \hat{\Phi}_b = \hat{\Phi}_{\frac{b}{\alpha^2}} \hat{A}_\alpha = \hat{\Phi}_b \hat{A}_{\frac{1}{\alpha}} = \hat{\Phi}_{\frac{b}{\alpha}} .
 \end{aligned} \tag{38}$$

#### Пункт 4. Сопоставление матриц и оптических систем.

Поскольку элементы каждой  $S$ -матрицы преобразования координат **луча**, имея норму  $\|\hat{S}\| = 1$ , удовлетворяют соотношению (35), то фактически в каждой  $S$ -матрице имеется только три независимых коэффициента-параметра. Ровно столько же независимых коэффициентов-параметров имеют  $S$ -матрицы, которые описывают преобразование координат **луча** в изображённых на Рис. 1.34а и Рис. 1.34б центрированных системах. Эти  $S$ -матрицы являются особыми в том смысле, что они скомбинированы из основных матриц преобразования координат **луча** (матриц перемещения и преломления лучей в тонкой линзе), параметры которых имеют прозрачный физический смысл.

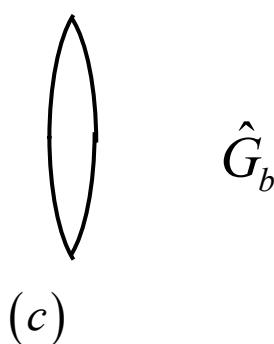


Рис. 1.34а

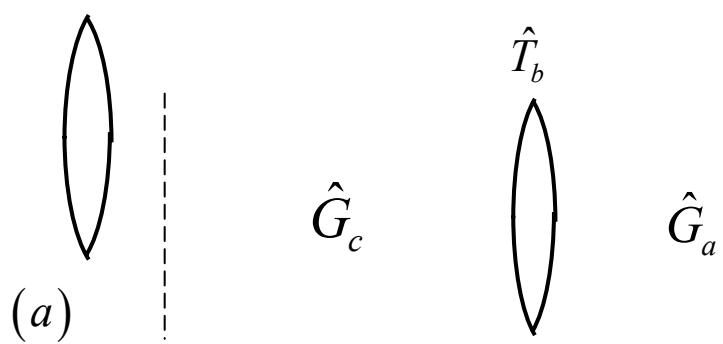
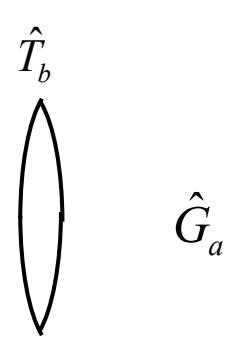


Рис. 1.34б

 $\hat{G}_a$ 

Рассмотрим ограничения на возможности сопоставления произвольной  $S$ -матрицы с  $S$ -матрицами преобразования координат **луча** в одной из двух эталонных оптических систем и тем самым на возможность приведения в соответствие друг с другом параметров сопоставляемых систем.

**Случай а.** Матрица преобразования координат луча, прошедшего через изображённую на Рис. 1.34а эталонную систему, имеет вид

$$\hat{S} = \hat{T}_a \hat{G}_b \hat{T}_c \equiv \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-ab & -c(1-ab)-a \\ b & 1-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Из (39) следует, что элементы  $a, b, c$  этой эталонной системы связаны с элементами  $A, B, C, D$  произвольной системы следующими соотношениями

$$a = \frac{1-A}{C}, \quad b = C, \quad c = \frac{1-D}{C}. \quad (40)$$

Из (40) видно, что однозначное выражение параметров эталонной системы, изображённой на Рис. 1.34а, через параметры преобразования координат **луча** в произвольной центрированной системе возможно при выполнении условия

$$C \neq 0. \quad (41)$$

Если  $A = 1$  или  $D = 1$ , то эквивалентная система на Рис. 1.34а будет состоять только из двух элементов (будет отсутствовать одна из линз).

**Случай б.**  $S$ -матрица преобразования координат **луча**, прошедшего через изображённую на Рис. 1.34б центрированную оптическую систему, имеет вид

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1-bc & -b \\ a+c(1-ab) & 1-ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Из сопоставления соответствующих элементов  $S$ -матриц преобразования координат **луча** в произвольной и эталонной системах находим, что они должны быть связаны соотношениями

$$a = \frac{D-1}{B}, \quad b = -B, \quad c = \frac{A-1}{B}. \quad (43)$$

В этом случае однозначное выражение параметров эталонной системы, изображённой на Рис. 1.34б, через параметры преобразования координат **луча** в произвольной центрированной системе возможно при выполнении условия

$$B \neq 0. \quad (44)$$

Поскольку ограничения на коэффициенты произвольной матрицы  $\hat{S}$  в двух рассмотренных случаях разные, то произвольную оптическую систему практически всегда можно сопоставить либо с одной из систем, представленных на Рис. 1.34а и Рис. 1.34б, либо с любой из них.

## §7. Цилиндрические линии передачи коротковолновых силовых полей (периодические центрированные системы).

В общем случае периодическая система состоит из бесконечной последовательности одинаковых (элементарных) оптических систем (Рис. 1.35), каждая из которых характеризуется 4-элементной  $S$ -матрицей типа (6.7). В таких системах возможны два типа поведения **луча**.

Если **луч** на неограниченно большой длине периодической системы находится вблизи оси системы, оставаясь в ограниченной области, то такое **финитное** движение луча является *поведением первого типа*. Второй тип поведения - апериодическая раскачка колебаний **луча** или **инфinitное** движение.

Типичный пример периодической системы изображён на рис.1.36. Резонатор из двух одинаковых зеркал с радиусом кривизны  $R$ , в котором **луч** должен находиться неограниченно долго, полностью эквивалентен бесконечно длинной

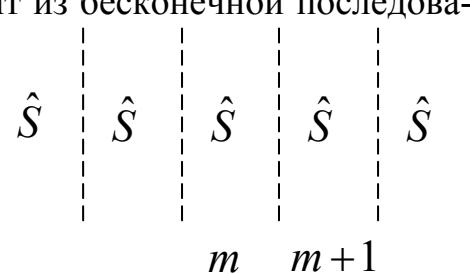


Рис. 1.35

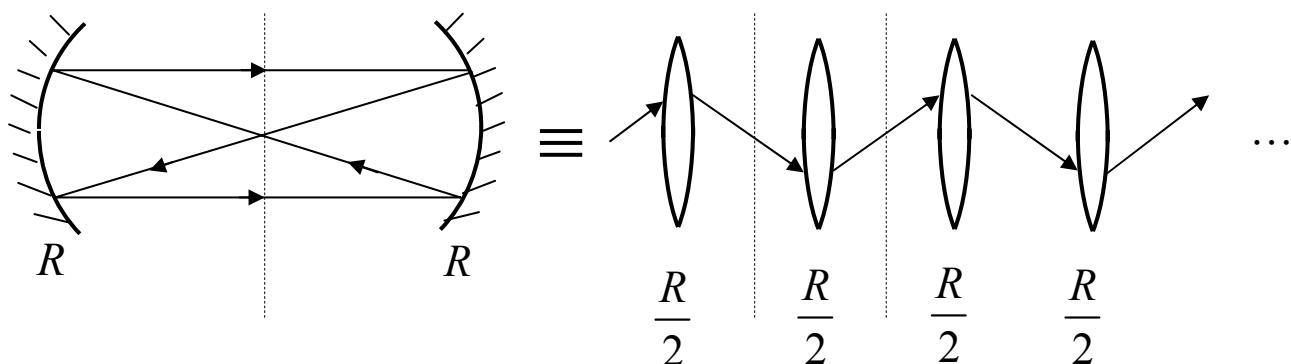


Рис. 1.36

последовательности одинаковых линз, имеющих фокусное расстояние  $F = (R/2)$  и расположенных на расстоянии длины резонатора  $L$  друг от друга. Эту последовательность линз **луч** будет проходить также неограниченно долго, а  $S$ -матрица преобразования координат **луча** на периоде линзовой линии и  $S$ -матрица преобразования координат **луча**, прошедшего два раза половину длины резонатора и отразившегося при этом от одного зеркала, совершенно одинаковы.

Цель настоящего параграфа заключается в разработке теории, которая позволяет различать два типа поведения **луча** по виду элементарной  $S$ -матрицы, играющей роль одной ячейки в бесконечной периодической центрированной системе. Разрабатывая эту теорию нужно иметь в виду, что поведение **луча** полностью определяет закономерности распространения реального силового поля в такой периодической центрированной системе, которую в электродинамике называют **цилиндрической линией передачи**.

Закономерности трансформации произвольного поля, распространяющегося в **цилиндрической линии передачи** определяются структурами полей собственных волн (**мод**), которые фиксированы во всех сечениях линии или периодически повторяются, а также их постоянными распространения. Таким модам (собствен-

ным волнам) в приближении *го* должны соответствовать "собственные *лучи*" центрированной линии передачи. Эти собственные *лучи* должны обладать особым свойством: их *лучевые* координаты должны периодически повторяться.

Рассмотрим неограниченную периодическую систему (Рис. 1.35) и с помощью матрицы преобразования координат луча  $\hat{S}$  на одном элементе периодической системы установим связь

$$\vec{Q}_{m+1} = \hat{S} \vec{Q}_m \quad (1)$$

между координатами *луча* на входах  $(m+1)$ -го и  $m$ -го элементов. Поскольку все элементы центрированной линии равноправны и в этом смысле неразличимы, то результат преобразования (1) не должен зависеть от номера  $m$  элемента, выбранного в качестве первого. Поэтому потребуем, чтобы координаты *луча* в этих двух сечениях совпадали с точностью до постоянного множителя

$$\vec{Q}_{m+1} = \tilde{\lambda} \vec{Q}_m , \quad (2)$$

где  $\tilde{\lambda}$  - постоянное и в общем случае комплексное число. После подстановки (2) в соотношение (1) последнее преобразуется в матричное уравнение<sup>1)</sup>

$$\vec{Q}_{m+1} \Rightarrow \tilde{\lambda} \vec{Q}_m = \hat{S} \vec{Q}_m \Rightarrow \Rightarrow (\hat{S} - \tilde{\lambda} \hat{I}) \bullet \vec{Q} = 0 . \quad (3)$$

Чтобы получить собственные решения этого уравнения, отвечающие *лучам* с повторяющимися через период координатами, необходимо найти собственные значения  $\tilde{\lambda}_k$  матрицы  $\hat{S}$  и собственные векторы  $\vec{Q}_{(k)}$ .

Таким образом, определение устойчивости центрированной оптической системы сводится к решению матричного уравнения (3). Уравнение (3) по существу представляет собой систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, роль которых играют элементы  $S$ -матрицы, относительно двух неизвестных векторов  $(n\vec{s}_\perp)_{(k)}$  и  $(\vec{r}_\perp)_{(k)}$ . Эта однородная система линейных алгебраических уравнений будет иметь нетривиальные решения, если детерминант системы будет равен нулю

$$\begin{vmatrix} A - \tilde{\lambda} & B \\ C & D - \tilde{\lambda} \end{vmatrix} = 0 . \quad (4)$$

Из (4) получается характеристическое уравнение второго порядка

$$\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}(A + D) + 1 = 0 \quad (5)$$

относительно коэффициента преобразования координат *луча* (или поля) на периоде (линии передачи) центрированной системы  $\tilde{\lambda}$ . Из (5) видно, что для определения  $\tilde{\lambda}$  достаточно знать сумму двух диагональных элементов  $S$ -матрицы или, как говорят, её след  $Sp \hat{S} \equiv A + D$ . Два решения уравнения (5) в виде

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} \equiv \cos \tilde{\phi} \pm i \sin \tilde{\phi} \equiv \exp(\pm i \tilde{\phi}) , \quad (6)$$

дают два собственных значения матрицы  $\hat{S}$ .

<sup>1)</sup> Аналогичные по смыслу уравнения для полей в цилиндрических линиях передачи называются *дисперсионными*, а в резонаторах - *характеристическими*.

а) Величина  $\tilde{\phi}$  будет действительной  $\tilde{\phi} \equiv \phi$  в случае

$$(1/2) |Sp \hat{S}| \equiv (1/2) |A + D| \leq 1 , \quad (7)$$

и, следовательно, модуль коэффициента преобразования координат **луча** на периоде системы будет равен единице  $|\tilde{\lambda}_{1,2}| = 1$ .

б) Величина  $\tilde{\phi}$  оказывается чисто мнимой  $\tilde{\phi} = -i\chi$  во втором случае

$$Sp \hat{S} \equiv A + D > 2 \quad (8)$$

и комплексной  $\tilde{\phi} = -i\chi + \pi$  в третьем случае

$$Sp \hat{S} \equiv A + D < -2 . \quad (9)$$

Собственные векторы  $\vec{Q}_{(k)}$  матрицы  $\hat{S}$  определяются из системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (A - \tilde{\lambda}_k)(n\vec{s}_\perp)_{(k)} + B(\vec{r}_\perp)_{(k)} = 0 \\ C(n\vec{s}_\perp)_{(k)} + (D - \tilde{\lambda}_k)(\vec{r}_\perp)_{(k)} = 0 \end{cases} . \quad (10)$$

Из (10) для двух разных случаев  $k = 1, 2$  определяется величина отношения

$$\frac{(n\vec{s}_\perp)_{(k)}}{(\vec{r}_\perp)_{(k)}} = -\frac{B}{A - \tilde{\lambda}_k} = -\frac{D - \tilde{\lambda}_k}{C} \quad (11)$$

поперечных компонент **лучевого вектора** к вектору, определяющему поперечное смещение **луча** от оси в каждом векторе-столбце. В результате каждый собственный вектор-столбец  $\vec{Q}_{(k)}$ , имеющий смысл моды **лучевода**, определяется с точностью до несущественной произвольной постоянной величины, которая, кстати, не содержит никакой информации о свойствах периодической центрированной системы передачи энергии силового поля.

Если на входе такой центрированной системы в начальном сечении  $z = 0$  в точке с поперечными координатами  $(\vec{r}_\perp)_0 \equiv \vec{\rho}$  имеется **луч** с направлением **лучевого вектора**  $(n\vec{s}_\perp)_0 \equiv n\vec{\sigma}$ , то из этих начальных условий

$$\begin{cases} -\frac{D - \tilde{\lambda}_1}{C}(\vec{r}_\perp)_{(1)} - \frac{D - \tilde{\lambda}_2}{C}(\vec{r}_\perp)_{(2)} = n\vec{\sigma} \\ (\vec{r}_\perp)_{(1)} + (\vec{r}_\perp)_{(2)} = \vec{\rho} \end{cases} , \quad (12)$$

определяется абсолютная величина каждого собственного вектора-столбца (воздушной моды **лучевода**)

$$\begin{cases} (\vec{r}_\perp)_{(1)} = -\frac{Cn\vec{\sigma} + (D - \tilde{\lambda}_2)\vec{\rho}}{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1} ; \quad (n\vec{s}_\perp)_{(1)} = -\frac{D - \tilde{\lambda}_1}{C}(\vec{r}_\perp)_{(1)} \\ (\vec{r}_\perp)_{(2)} = \frac{Cn\vec{\sigma} + (D - \tilde{\lambda}_1)\vec{\rho}}{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1} ; \quad (n\vec{s}_\perp)_{(2)} = -\frac{D - \tilde{\lambda}_2}{C}(\vec{r}_\perp)_{(2)} \end{cases} . \quad (13)$$

Произвольное решение на  $m$ -ном элементе может быть представлено в виде суммы собственных решений

$$\left\{ \begin{array}{l} (n\vec{s}_\perp)_m = \tilde{\lambda}_1^m (n\vec{s}_\perp)_{(1)} + \tilde{\lambda}_2^m (n\vec{s}_\perp)_{(2)} \equiv \exp(im\tilde{\phi})(n\vec{s}_\perp)_{(1)} + \exp(-im\tilde{\phi})(n\vec{s}_\perp)_{(2)}, \\ \vec{r}_{\perp m} = \tilde{\lambda}_1^m (\vec{r}_\perp)_{(1)} + \tilde{\lambda}_2^m (\vec{r}_\perp)_{(2)} \equiv \exp(im\tilde{\phi})(\vec{r}_\perp)_{(1)} + \exp(-im\tilde{\phi})(\vec{r}_\perp)_{(2)} \end{array} \right. , \quad (14)$$

где компоненты  $(n\vec{s}_\perp)_{(k)}$  и  $(\vec{r}_\perp)_k$  собственных векторов определены выражениями (13).

В первом случае (7), когда модуль следа  $S$ -матрицы относительно невелик, координату **луча** на входе  $m$ -го элемента периодической системы в соответствии с (13) и (14) можно найти в виде

$$\vec{r}_{\perp m} = \{(D\vec{\rho} + Cn\vec{\sigma})\sin m\phi - \vec{\rho} \sin(m-1)\phi\} / \sin\phi . \quad (15)$$

Из (15) следует, что координата **луча** остается на ограниченном расстоянии от оси системы. Это соответствует **финитному** или **устойчивому** распространению **луча** вдоль периодической системы.

2. Во втором случае (8), когда след  $S$ -матрицы больше 2 и когда выполнено условие

$$Cn\vec{\sigma} + (D - e^{-\chi})\vec{\rho} \neq 0 \quad (16)$$

возбуждения  $(\vec{r}_\perp)_{(1)} \neq 0$  первого вектор-столбца  $\vec{Q}_{(1)}$  (первой моды **лучевода**), координата **луча** монотонно растёт от элемента к элементу<sup>2)</sup>. В результате, на входе  $m$ -го элемента поперечная координата **луча** будет иметь величину

$$\vec{r}_{\perp m} = \{(D\vec{\rho} + Cn\vec{\sigma})\operatorname{sh} m\chi - \vec{\rho} \operatorname{sh}(m-1)\chi\} / \operatorname{sh}\chi . \quad (17)$$

Этому (второму) случаю соответствует неограниченный уход **луча** от оси системы, т.е. так называемое инфинитное движение **луча**.

3. В третьем случае (9) знак координаты **луча** при переходе от одного элемента системы к другому будет изменяться, и вместе с переменой знака будет происходить увеличение амплитуды колебаний **луча**<sup>3)</sup>

$$\vec{r}_{\perp m} = (-1)^{m+1} \{(D\vec{\rho} + Cn\vec{\sigma})\operatorname{sh} m\chi + \vec{\rho} \operatorname{sh}(m-1)\chi\} / \operatorname{sh}\chi . \quad (18)$$

Таким образом, **условие (7) в общем случае является условием финитного движения или условием устойчивости лучей в периодической центрированной системе. Результаты этого параграфа имеют важное практическое значение при расчёте резонаторов со сферическими зеркалами.**

<sup>2)</sup> Второй вектор-столбец  $(\vec{Q})_{(2)}$  в качестве второй моды **лучевода** согласно (6), (8) и (14) вносит в решение (15) вклад, величина которого монотонно уменьшается с ростом номера элемента периодической центрированной системы и асимптотически стремится к нулю.

<sup>3)</sup> Как и во втором случае, мода **лучевода** в виде первого вектора-столбца  $(\vec{Q})_{(1)}$  при специально подобранных начальных условиях  $Cn\vec{\sigma} + (D + \exp[-\chi])\vec{\rho} = 0$  согласно (15) не возбуждается  $(\vec{Q})_{(1)} = 0$ , и поэтому решение будет экспоненциально уменьшаться с ростом номера элемента.

## §8. Матричный метод описания лучей в нецентрированных системах передачи силовых полей.

В реальных случаях при создании центрированных систем возможны экспериментальные ошибки, в результате которых один (или несколько) оптических элементов оказываются смещёнными с оптической оси  $z$ . Типичная ситуация почти всегда такова, что один из элементов резонатора имеет перекос относительно оси, проходящей через центры зеркал, или смещение центра относительно оси системы (Рис. 1.37). Оптическая ось  $z'$  нецентрированного элемента (линзы) на Рис. 1.37 смещена на вектор  $\vec{\rho}$  относительно оптической оси  $z$  системы вдоль которой размещены остальные элементы. Старые координаты **луча**  $\vec{Q}$  определены относительно оси  $z$ , новые координаты **луча**  $\vec{Q}' = \vec{Q} - \vec{q}$  определены как координаты относительно новой оси  $z'$ . Вместо смещения элемента можно рассмотреть смещение координат **луча** на вектор-столбец  $\vec{q}$ , который определяет координаты оси  $z'$  как координаты нового эталонного луча.

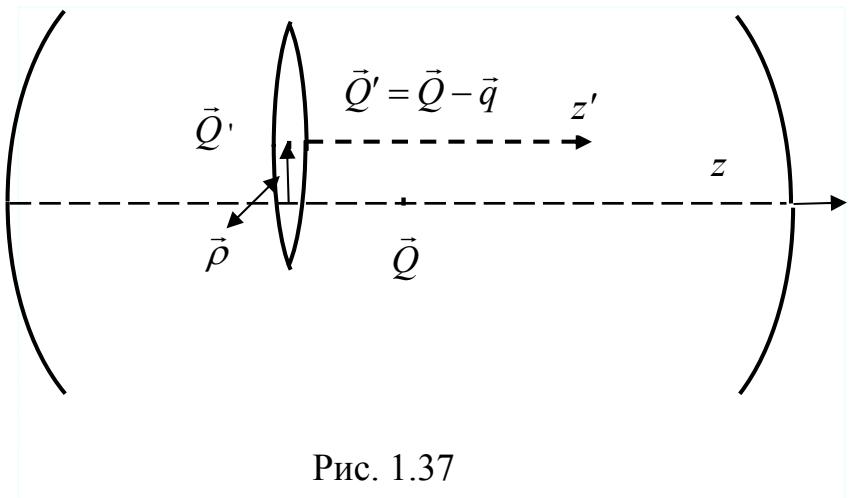


Рис. 1.37

Пункт 1. **Оператор смещения**  
Для формального описания поведения **лучей** в таких нецентрированных системах введём **оператор смещения**

$$\hat{N}_{\vec{q}} \vec{Q} = \vec{Q} - \vec{q} = \begin{pmatrix} n\vec{s}_\perp - n\vec{\sigma} \\ \vec{r}_\perp - \vec{\rho} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

смещающий вектор-столбец координат луча  $\vec{Q}$  на вектор-столбец

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} n\vec{\sigma} \\ \vec{\rho} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В силу линейности матриц имеют место соотношения

$$\hat{S} \hat{N}_{\vec{q}} \vec{Q} = \hat{S}(\vec{Q} - \vec{q}) = \hat{S}\vec{Q} - \hat{S}\vec{q} = \hat{N}_{\hat{S}\vec{q}} (\hat{S}\vec{Q}), \quad ; \quad (3)$$

и

$$\hat{N}_{\vec{q}} (\hat{S}\vec{Q}) = \hat{S}\vec{Q} - \vec{q} = \hat{S}(\vec{Q} - \hat{S}^{-1}\vec{q}) = \hat{S} \left( \hat{N}_{\hat{S}^{-1}\vec{q}} \vec{Q} \right), \quad (4)$$

из которых следуют два следующих свойства оператора смещения:

$$\hat{S} \hat{N}_{\vec{q}} = \hat{N}_{\hat{S}\vec{q}} \hat{S}, \quad \hat{N}_{\vec{q}} \hat{S} = \hat{S} \hat{N}_{\hat{S}^{-1}\vec{q}}. \quad (5)$$

## Пункт 2. Эквивалентность центрированных и нецентрированных систем.

Установим **эквивалентность центрированных и нецентрированных систем**. В качестве примера найдём матрицу преобразования координат **луча**, прошедшего через смещенный с оси  $z$  элемент (линзу) в изображенной на Рис. 1.37 оптической системе. На основании свойств **оператора смещения** (5) она может быть преобразована к такой форме

$$\hat{S} = \hat{\Pi}_{-\vec{q}} \hat{T}_b \hat{\Pi}_{\vec{q}} = \hat{\Pi}_{-\vec{q}} \hat{\Pi}_{\hat{T}_b \vec{q}} \hat{T}_b = \hat{\Pi}_{-\vec{q} + \hat{T}_b \vec{q}} \hat{T}_b = \hat{\Pi}_{(\hat{T}_b - \hat{I}) \vec{q}} \hat{T}_b = \hat{\Pi}_{\begin{pmatrix} -b \vec{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}} \hat{T}_b \quad . \quad (6)$$

Эта форма означает, что **луч** вначале прошёл через несмешённый элемент, а затем приобрёл дополнительное смещение на вектор-столбец:

$$(\hat{T}_b - \hat{I}) \bullet \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & \vec{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7)$$

Вектор-столбец  $(\hat{T}_b - \hat{I}) \bullet \vec{q}$  не имеет элемента, определяющего смещение с оси, но имеет элемент, устанавливающий угловое смещение **луча**. Это значит, что в эквивалентной системе **луч** должен приобрести угловое смещение. Таким образом, пространственно смещенный элемент действует как несмешённый, но создающий дополнительное угловое смещение **луча**.

Если в системе имеется элемент типа оптического клина, то его действие тоже описывается оператором смещения  $\hat{\Pi}_{\vec{q}}$ , в векторе-столбце  $\vec{q}$  которого имеется вектор  $n\vec{\sigma}$  углового смещения **луча**.

Если есть несколько смещенных элементов, то матрицу преобразования координат **луча** в такой оптической системе можно представить в виде произведения нескольких S-матриц типа (6). Это произведение в соответствии со свойствами (5) **оператора смещения** можно преобразовать к относительно простой форме с единственным оператором смещения:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \dots \hat{S}_3 \hat{\Pi}_{\vec{q}_3} \hat{S}_2 \hat{\Pi}_{\vec{q}_2} \hat{S}_1 \hat{\Pi}_{\vec{q}_1} = \dots \hat{S}_3 \hat{\Pi}_{\vec{q}_3} \hat{S}_2 \hat{\Pi}_{\vec{q}_2} \hat{\Pi}_{\hat{S}_1 \vec{q}_1} \hat{S}_1 = \\ &= \dots \hat{S}_3 \hat{\Pi}_{\vec{q}_3} \hat{\Pi}_{\hat{S}_2(\vec{q}_2 + \hat{S}_1 \vec{q}_1)} \hat{S}_2 \hat{S}_1 = \dots \hat{S}_3 \hat{\Pi}_{\vec{q}_3 + \hat{S}_2(\vec{q}_2 + \hat{S}_1 \vec{q}_1)} \hat{S}_2 \hat{S}_1 \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

Таким образом, любую не полностью отьюстированную систему можно свести к юстированной, а фактор разьюстировки учесть позднее.

## Пункт 3. Устойчивость разьюстированных периодических систем.

Резонатор с перекошенными или неотцентрированными зеркалами может быть представлен в виде периодической разьюстированной системы линз. Будем считать, что преобразование вектора-столбца  $\vec{Q}$  координат произвольного **луча** отдельным элементом разьюстированной (неотцентрированной) периодической системы происходит с помощью матрицы  $\hat{\tilde{S}}$  и заключается фактически в двух независимых преобразованиях. Одним из них является преобразование координат **луча** матрицей  $\hat{S}$  отдельного элемента **лучеводной** линии, которая идеально от-

центрирована. Вторым преобразованием является смещение координат *луча*, прошедшего через элемент центрированной линии, на вектор-столбец  $\vec{q}$ , определённый соотношением (2). Такое преобразование с учётом определения оператора смещения (1) можно представить в виде соотношения

$$\hat{\tilde{S}}\vec{Q} = \hat{S}\vec{Q} - \vec{q} \equiv \hat{\Pi}_{\vec{q}} \hat{S}\vec{Q}, \quad (9)$$

которое можно рассматривать как определение свойств матрицы  $\hat{\tilde{S}}$ .

Матричное уравнение типа уравнения (7.3), из которого рождается характеристическое уравнение типа уравнения (7.5) и определяются собственные вектора, в этом случае запишется в виде

$$\hat{\Pi}_{\vec{q}} \hat{S}\vec{Q} = \tilde{\lambda} \vec{Q}. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\vec{Q} = \hat{\Pi}_{\vec{P}} \vec{Q}' \equiv \vec{Q}' - \vec{P} \quad (11)$$

вектора-столбца  $\vec{Q}'$ , который смещён относительно вектора-столбца  $\vec{Q}$ , связанного с осью симметрии  $OZ$ , на постоянный вектор-столбец  $\vec{P}$ . Фактически это означает, что искомый вектор-столбец  $\vec{Q}'$  привязан к новой оси  $OZ'$ , смещённой относительно оси  $OZ$  на постоянный вектор-столбец  $\vec{P}$ .

Подставим (11) в (10) и, используя определение (1) и соотношение (4), по отдельности преобразуем его левую

$$\hat{\Pi}_{\vec{q}} \hat{S}\vec{Q} = \hat{\Pi}_{\vec{q}} \hat{S} \hat{\Pi}_{\vec{P}} \vec{Q}' = \hat{\Pi}_{\vec{q} + \hat{S}\vec{P}} \hat{S} \vec{Q}' \equiv \hat{S} \vec{Q}' - \vec{q} - \hat{S}\vec{P}$$

и правую

$$\tilde{\lambda} \vec{Q} = \tilde{\lambda} \hat{\Pi}_{\vec{P}} \vec{Q}' = \tilde{\lambda} (\vec{Q}' - \vec{P}) \equiv \hat{\Pi}_{\tilde{\lambda} \vec{P}} \tilde{\lambda} \vec{Q}'$$

части. Полученное в результате этих преобразований соотношение

$$\hat{\Pi}_{\vec{q} + \hat{S}\vec{P}} \hat{S} \vec{Q}' = \hat{\Pi}_{\tilde{\lambda} \vec{P}} \tilde{\lambda} \vec{Q}' \quad (12)$$

вполне может рассматриваться как матричное уравнение. Оно превращается в уравнение типа уравнения (7.3) относительно вектора-столбца  $\vec{Q}'$ , связанного с новой центральной осью, если действующие на обе части соотношения (12) операторы смещения будут одинаковыми. Это возможно, если неизвестный вектор-столбец  $\vec{P}$  можно будет определить из уравнения

$$\vec{q} + \hat{S} \vec{P} = \tilde{\lambda} \vec{P}. \quad (13)$$

Обычное алгебраическое уравнение (13), записанное в матричном виде, всегда имеет однозначное решение, за исключением случая тождественного преобразования, когда  $\tilde{\lambda} = 1$  и  $\hat{S} \vec{P} \equiv \vec{P}$ . Фактически определяется новая оптическая ось, относительно которой остаётся справедливым прежнее матричное уравнение (7.3)  $\hat{S} \vec{Q}' = \tilde{\lambda} \vec{Q}'$ . Зная решение отьюстированной задачи (в частности, зная  $\tilde{\lambda}$ ), можно получить решение задачи с разьюстировкой, не решая ее. Поэтому устойчивость системы не зависит от её юстировки!!!

**Часть 2.**  
**К В А З И О П Т И К А.**

**Квазиоптика линейных сред** – это теоретическое описание закономерностей распространения полей в той части **области коротковолновой асимптотики**, в которой (в отличие от геометрической оптики) существенны дифракционные явления.

Как отмечалось выше, помимо внутреннего масштаба (длины волны  $\lambda$ ) поле физической величины  $u$  (возбуждённое какими-либо источниками в некотором замкнутом или открытом объёме) всегда имеет другие пространственные (**внешние**) масштабы  $\Lambda_k$ , на которых *существенно изменяется* среднее за период высокочастотного колебания ( $T$ ) значение **плотности энергии**  $\overline{|\tilde{u}|^2}^T$ . В неоднородной среде таким масштабом  $\Lambda_k$  является размер неоднородностей среды. В однородной среде внешним масштабом  $\Lambda_k$  может быть **размер области, занятой полем**<sup>1)</sup>. Между внутренним  $\lambda$  и внешним  $\Lambda_k$  масштабами справедливо соотношение  $\Lambda_k \gg \lambda$ , изменяющееся в широких пределах.

**Квазиоптическое** описание распространения пучков коротковолнового излучения в линейной среде справедливо при определённом соотношении между внутренним и внешним параметрами. Для осознания закономерностей распространения силового поля с короткой длиной волны  $\lambda$  в свободном однородном пространстве вначале необходимо рассмотреть дифракцию однородной плоской волны на прямоугольном отверстии в плоском непрозрачном экране, размеры которого велики по сравнению с длиной волны.

### §1. Элементы теории дифракции скалярных и векторных полей

#### Пункт 1. Дифракция и рассеяние.

Термины *дифракция* и *рассеяние* обозначают различные стороны одного и того же физического явления. Суть *дифракции* в том, что волны могут огибать препятствия, и поэтому не существует идеально резких границ между "светом" и "тенью", т.е. силовым полем и его полным отсутствием. Из-за **этого явления реальное распределение силового поля** в неоднородном пространстве, содержащем различные препятствия для распространяющихся волн (экраны, непрозрачные объекты, элементы пространства с отличным от  $\bar{n}$  показателем преломления и пр.), отличается от того, которое получилось бы по законами *го*.

В теории дифракции силовое поле  $\tilde{u}$ , которое образуется в реальном пространстве и которое называется *дифрагированным*, всегда определяется как сумма

---

<sup>1)</sup> В приближении геометрической оптики в областях однородного пространства за пределами **каустик** интенсивность поля обращается в нуль (и соответственно в бесконечность на **каустиках**) из-за сходимости геометрооптических лучей.

$$\tilde{u} = \tilde{u}^0 + \tilde{u}^R \quad (1)$$

невозмущенного поля  $\tilde{u}^0$ , которое существовало бы при тех же источниках в отсутствие препятствий, и *рассеянного* неоднородностями поля  $\tilde{u}^R$ . Задачей *дифракции* является отыскание поля  $\tilde{u}$  или поля  $\tilde{u}^R$  в некоторой заданной части пространства.

В дифракционной задаче сторонние источники обычно считаются гармоническими  $\exp[i\omega t]$ , что в силу линейности уравнений Максвелла фактически не ограничивает общности её постановки. Как правило, сторонние источники предполагаются далеко расположеными от рассеивающих препятствий, а пространство, в котором размещены объекты, рассеивающие поле, обычно считается однородным и изотропным. Это позволяет *невозмущённое* поле  $\tilde{u}^0$  считать известным и в большинстве случаев полагать его плоской волной. Типичной дифракционной задачей является задача определения *рассеянного* (или *дифрагированного*) поля в полупространстве вне объекта на достаточно большом расстоянии от него (например, *рассеяние* электромагнитного поля на непрозрачном экране или *дифракция* на отверстии в экране).

## Пункт 2. *Принцип Гюйгенса*

Для понимания закономерностей распространения волн и применения этих законов в расчётах *дифракционных* полей большое значение имеет *принцип Гюйгенса*, согласно которому волна распространяется в результате действия создаваемых ею *вторичных источников*.

*Теорема Гюйгенса* (1690 г.)

*Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны. Волновым фронтом в любой последующий момент времени служит огибающая этих вторичных сферических волн.*

Если сторонний источник  $Q$ , создающий в пространстве силовое поле  $\tilde{u}$ , является элементарным точечным источником, то невозмущённое поле  $\tilde{u}^0$  будет сферической волной (Рис. 2.1), волновым фронтом которой служит сферическая поверхность. В соответствии с *теоремой Гюйгенса* каждая точка  $Q_s$  этого волнового фронта  $S_R$  в момент времени  $t$  является элементарным вторичным источником, также излучающим сферическую волну. Через промежуток времени  $\Delta t = t' - t$  волновые фронты сферических волн, рожденными вторичными источниками  $Q_s$ , образуют огибающую  $S'_R$ , которая также будет сферой, имеющей радиус  $R' = R_0 + c\Delta t$ . По *принципу Гюйгенса* положение волновой поверхности  $S'_R$  полностью определя-

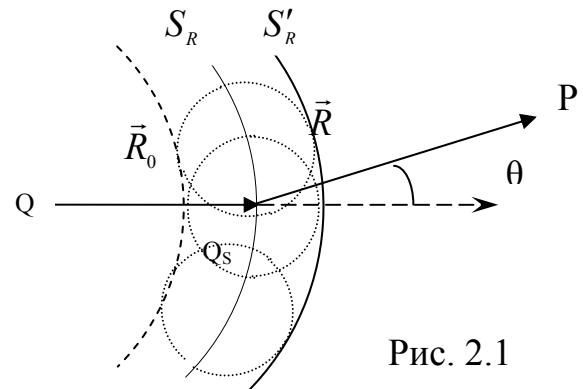


Рис. 2.1

ется её состоянием в предшествующий момент времени и не зависит от предыстории волнового процесса, от волн в других областях пространства и пр.

К недостаткам **принципа Гюйгенса** следует отнести его описательный (качественный) характер и отсутствие какой-либо интерпретации смысла и роли второй огибающей волновых фронтов вторичных источников, смещённой в сторону источника  $Q$ .

### Пункт 3. Принцип Гюйгенса–Френеля.

В 1818 году Френель уточнил **принцип Гюйгенса** и смог объяснить явление **дифракции**, дополнив построение Гюйгенса утверждением, что **вторичные волны интерферируют между собой**. Суть расчётов Френеля, называемая **принципом Гюйгенса–Френеля**, состоит в следующем.

По Френелю амплитуду поля  $\tilde{u}$  в точке  $Q_S$  волнового фронта  $S_R$  можно представить в виде

$$\tilde{u}(Q_S) = (\tilde{u}_0 / R_0) \exp(-ikR_0), \quad (2)$$

где  $\tilde{u}_0$  - амплитуда поля на расстоянии единицы длины от источника. Вклад, вносимый в поле  $\tilde{u}(P)$  в точке наблюдения  $P$  элементом площади волнового фронта  $dS$  вблизи точки  $Q_S$ , определяется как

$$d\tilde{u}(P) = (\tilde{u}_0 / R_0) \exp(-ikR_0) \{ \exp(-ikR)/R \} f(\theta) dS. \quad (3)$$

Функция  $f(\theta)$ , называемая **коэффициентом наклона**, определяет зависимость амплитуды вторичных сферических волн от угла  $\theta$  между направлением вектора  $\vec{R}$  и нормалью к волновой поверхности в точке  $Q_S$  (вектором  $\vec{R}_0$ ) и фактически имеет смысл диаграммы направленности вторичного источника. Наличие в (3) **коэффициента наклона** по существу является **вторым важнейшим теоретическим вкладом Френеля** в содержание **принципа Гюйгенса**.

Полное поле в точке наблюдения  $P$  находится как интеграл

$$\tilde{u}(P) = \iint_{S_R} (\tilde{u}_0 / R_0 R) \exp\{-ik(R_0 + R)\} f(\theta) dS, \quad (4)$$

по замкнутой поверхности  $S_R$  волнового фронта (которая в рассмотренном на Рис. 2.1 случае является сферой). Надлежащим **выбором функции  $f(\theta)$  можно добиться, чтобы вторичные источники излучали только в одну сторону** и чтобы, таким образом, для точек  $P_*$ , находящихся внутри  $S_R$ , выполнялось соотношение

$$\tilde{u}(P_*) = 0. \quad (*)$$

Френелю не удалось дать убедительного обоснования тому или иному выбору функции  $f(\theta)$  и, следовательно, отсутствию волны, распространяющейся назад. Однако оказалось, что результаты расчёта волны, распространяющейся вперёд, практически не зависят от конкретного выбора функции  $f(\theta)$ . Достаточно считать, что  $f(\theta)$  уменьшается с ростом  $\theta$ .

#### Пункт 4. Принцип Гюйгенса-Кирхгофа

В 1882 году Кирхгоф дал строгую формулировку *принципа Гюйгенса* на основе точного решения однородного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (B.3)$$

для комплексной амплитуды волнового поля в области 2, свободной от источников (Рис. 2.2). Для интегрирования (B.3) используется *функция Грина*  $\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ , которая является решением уравнения

$$\Delta \tilde{G} + k^2 \tilde{G} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

с точечным источником в правой части. Это решение зависит от граничных условий на поверхности  $S = S_0 + S_*$ , ограничивающей свободную от источников область 2. В однородной изотропной безграничной среде *функция Грина* имеет вид<sup>1)</sup>

$$\tilde{G} = \frac{-\exp(-ikR)}{4\pi R}, \quad (6)$$

где использовано обозначение

$$R \equiv |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| . \quad (7)$$

*Функция Грина* (6)

удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial R} + ik \tilde{G} \right) = 0 , \quad (8)$$

которое фактически играет роль граничного условия (поскольку  $\tilde{G}$  является решением для бесконечного пространства).

Интегрирование уравнения (B.3) производится стандартным способом при помощи второй формулы Грина

$$\iiint_{V_2} \{ \tilde{u} \Delta' \tilde{G} - \tilde{G} \Delta' \tilde{u} \} dV' = \oint_S \{ \tilde{u} (\vec{n}' \cdot \nabla' \tilde{G}) - \tilde{G} (\vec{n}' \cdot \nabla' \tilde{u}) \} dS' , \quad (9)$$

в которой используется произвольная *функция Грина*  $\tilde{G}$ , удовлетворяющая уравнению (5). В формуле (9) дифференцирование и интегрирование производят-

<sup>1)</sup> В сферической системе координат уравнение (5) приобретает вид (5')

$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial R} \right) + k^2 \tilde{G} = \frac{1}{2\pi R^2} \delta(R)$ . Прямой подстановкой (6) в уравнение (5') можно

убедиться, что (6) является его решением.

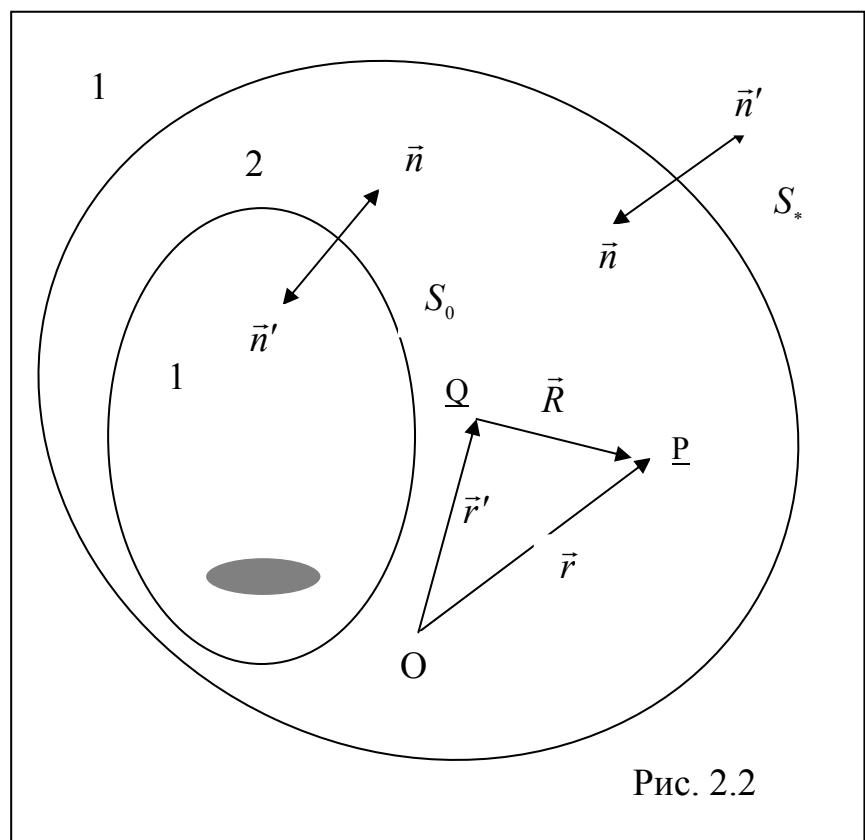


Рис. 2.2

ся по штрихованным координатам произвольной точки  $Q$ , находящейся в области 2, а  $\vec{n}'$  обозначает внешнюю нормаль к поверхности  $S = S_0 + S_*$ , ограничивающей область 2.

Производя в уравнении (5) замену  $\vec{r} \Leftrightarrow \vec{r}'$  и подставляя  $\Delta' \tilde{G}$  и  $\Delta' \tilde{u}$  в левую часть (9), получим (после вычисления объёмного интеграла), что левая часть (9) равна значению поля в точке наблюдения  $\tilde{u}(\vec{r}) \equiv \tilde{u}(P)$ . Вычисление поверхностного интеграла, находящегося в правой части (9), зависит от выбора конкретной функции Грина  $\tilde{G}$ , удовлетворяющей на поверхности  $S = S_0 + S_*$  столь же определённым граничным условиям. Если в качестве  $\tilde{G}$  выбрать функцию Грина (6) и вместо внешней нормали  $\vec{n}'$  использовать нормаль

$$\vec{n} = -\vec{n}', \quad (10)$$

направленную внутрь области 2, то поле  $\tilde{u}(\vec{r}) \equiv \tilde{u}(P)$  в точке  $P$  определится в результате вычисления интеграла

$$\tilde{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \tilde{u} \left( \vec{n} \cdot \nabla' \left[ \frac{\exp(-ikR)}{R} \right] \right) - \left[ \frac{\exp(-ikR)}{R} \right] (\vec{n} \cdot \nabla' \tilde{u}) \right\} dS' \quad (11)$$

по замкнутой поверхности  $S = S_0 + S_*$ , на которой должны быть заданы значения  $\tilde{u}$  и  $\nabla' \tilde{u}$ .

Из общих физических соображений ясно, что интеграл (11) может быть отличен от нуля только в том случае, если вне поверхности  $S = S_0 + S_*$  имеются источники. Поэтому интеграл по поверхности  $S_0$  (или по поверхности  $S_*$ ) будет равен нулю, если в объёме, который окружает эта поверхность, источники отсутствуют.

Пусть отсутствуют источники вне поверхности  $S_*$  (включая источники на бесконечности). Тогда интеграл по поверхности  $S_*$  будет равен нулю вне зависимости от её формы и местоположения. Интеграл по поверхности  $S_*$  не изменится, если форма поверхности  $S_*$  будет трансформирована или объём области 2 будет изменён (в частности, неограниченно увеличен). В этом случае поле  $\tilde{u}(\vec{r}) \equiv \tilde{u}(P)$  в точке  $P$  будет отлично от нуля только при условии, что источники имеются внутри поверхности  $S_0$ . Причём поле  $\tilde{u}(P)$  не изменится, если будет трансформирована форма поверхности  $S_0$ , но внутри ограниченной ею области 1 останутся неизменными источники (как по величине, так и по местоположению). Разумеется, при этом будут изменяться значения  $(\tilde{u})_{S_0}$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_{S_0}$  на поверхности  $S_0$ , но величина интеграла (11) останется постоянной.

В поверхностном интеграле (11) величины  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_{S_0}$  и  $(\tilde{u})_{S_0}$  играют роли *плотности поверхностного заряда* и *плотности поверхностного дипольного слоя* соответственно. По своему действию эти «вторичные поверхностные источники» полностью эквивалентны объёмным источникам, находящимся в

**области 1** внутри  $S_0$ . Фактически принцип Гюйгенса заключается в этой формулировке, и потому она называется *принципом Гюйгенса-Кирхгофа*.

Для определения диаграммы направленности «вторичных источников» рассмотрим наиболее простой предельный случай. Будем считать, что внутри области 1 находится **объёмный (точечный) источник**, создающий сферическую волну и что поверхность  $S_0$  совпадает с поверхностью её сферического волнового фронта. При этом Рис. 2.2 фактически преобразуется в Рис. 2.1, а поэтому в качестве  $(\tilde{u})_{S_0}$  в поверхностный интеграл (11) можно подставить амплитуду  $\tilde{u}(Q_s)$  поля сферической волны в точке  $Q_s$  волнового фронта, представленную формулой (2). При такой геометрии поверхности  $S_0 \equiv S_R$  будут справедливы следующие выражения для находящихся под знаком интеграла (11) векторных функций:

$$\vec{n} = (\vec{R}_0 / R_0) \equiv \nabla' R_0 ; \quad \nabla' R = -(\vec{R} / R) ; \quad (\vec{R} \cdot \vec{R}_0) = R R_0 \cos \theta . \quad (12)$$

Будем также считать, что справедливо приближение волновой зоны, в рамках которого все характерные расстояния велики по сравнению с длиной волны

$$kR \gg 1; \quad kR_0 \gg 1 . \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13), а также факт преобразования поверхности  $S_0$  в сферу  $S_R$ , из (11) получим для поля в точке наблюдения  $P$  выражение

$$\tilde{u}(P) = (ik/4\pi) \iint_{S_R} (\tilde{u}_0 / R_0 R) \exp\{-ik(R_0 + R)\} (1 + \cos \theta) dS' . \quad (14)$$

Оно совпадает с (4), и роль коэффициента наклона в (14) играет функция

$$f(\theta) = (ik/4\pi)(1 + \cos \theta) , \quad (15)$$

которая имеет смысл *диаграммы направленности «вторичных источников»*.

Предположим, что объёмные источники в области 1 внутри поверхности  $S_0$  перестали существовать и вместо них на  $S_0$  размещены *поверхностные плотности заряда и дипольного момента*, точно соответствующие значениям  $(\tilde{u})_{S_0}$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_{S_0}$ . Тогда поле в области 2 (вне поверхности  $S_0$ ) не почувствует этой подмены и не изменится ни в одной точке, поскольку сохранятся все компоненты интеграла (11). Воспользуемся новыми «поверхностными источниками» и перенесём точку наблюдения из области 2 в область 1, фактически произведя замену  $P \Rightarrow P_*$ . При расчёте поля в точке  $P_*$  в (11) следует заменить нормаль  $\vec{n} \rightarrow \vec{n}'$  по правилу (10). Получится выражение (11\*), которое совпадает с (11) с точностью до замены  $\tilde{u}(P) \equiv \tilde{u}(\vec{r}) \rightarrow -\tilde{u}(P_*) \equiv -\tilde{u}(\vec{r}_*)$  и которое далее преобразуется в соответствующее выражение (14\*), отличающееся от (14) только этой же заменой. Поскольку (14\*) совпадает с формулой Френеля (4) и в ней коэффициент наклона (диаграмма направленности) имеет форму (15), то с полной обоснованностью в результате интегрирования получим

$$\tilde{u}(P_*) = 0 . \quad (16)$$

Таким образом, поле  $\tilde{u}(P)$ , которое создаётся в области 2 «вторичными источниками», расположенными на ограничивающей область поверхности  $S_0$ ,

точно совпадает с тем **истинным полем**, которое создают в точке  $P$  реальные **объёмные источники**, размещённые в области 1. Столь же определённо «вторичные источники» в каждой точке  $P_*$  области 1 не создают никакого поля. Другими словами, поле, создаваемое «вторичными источниками», терпит скачок на той граничной поверхности  $S_0$ , на которой эти «вторичные источники» размещены. **Физическая причина этого скачка заключена в особенностях диаграммы направленности излучения, созданного вторичными источниками.**

В современной теоретической оптике приближенные решения дифракционных задач практически всегда находятся с помощью *принципа Гюйгенса-Кирхгофа*. При этом приближённый характер получаемых результатов обусловлен в основном тем, что в интеграл (11) подставляются приближённые значения  $(\tilde{u})_{S_0}$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_{S_0}$ .

### Пункт 5. Электродинамический принцип Гюйгенса.

При формулировке **электродинамического принципа Гюйгенса** нужно воспользоваться интегралом Кирхгофа (11) для каждой отдельной декартовой составляющей электрического  $\tilde{\vec{E}}$  и магнитного  $\tilde{\vec{H}}$  поля. После некоторых достаточно трудоёмких математических преобразований можно получить векторные аналоги поверхностного интеграла (11), с помощью которых будут вычисляться  $\tilde{\vec{E}}$  и  $\tilde{\vec{H}}$  поля. Если в эти поверхностные интегралы подставлять истинные значения полей  $(\tilde{\vec{E}})_{S_0}$  и  $(\tilde{\vec{H}})_{S_0}$  на поверхности  $S_0$ , то в результате вычислений всегда получатся правильные (*истинные*) поля  $\tilde{\vec{E}}(\vec{r})$  и  $\tilde{\vec{H}}(\vec{r})$  в каждой точке  $P$ , находящейся в области 2, и соответственно «вакуумное» поле  $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{H}} = 0$  в каждой точке  $P_*$ , находящейся внутри поверхности  $S_0$  в области 1. Это значит, что *электрическое  $\tilde{\vec{E}}$  и магнитное  $\tilde{\vec{H}}$  поля при переходе через поверхность  $S_0$  теряют скачок и что в силу существующих в электродинамике законов (требующих выполнения граничных условий) по поверхности  $S_0$  должны течь *поверхностные электрический и магнитный токи с плотностями**

$$\tilde{j}_{S_0}^e = \frac{c}{4\pi} \left[ \bar{n} \times (\tilde{\vec{H}})_{S_0} \right] ; \quad \tilde{j}_{S_0}^m = -\frac{c}{4\pi} \left[ \bar{n} \times (\tilde{\vec{E}})_{S_0} \right], \quad (17)$$

где  $(\tilde{\vec{E}})_{S_0}$  и  $(\tilde{\vec{H}})_{S_0}$  - истинные значения полей на поверхности  $S_0$ <sup>2)</sup>.

Применительно к электродинамике поверхностные токи (17) являются именно теми «вторичными источниками», о которых говорится в *принципе Гюйгенса* (и которые **можно получить, преобразуя подынтегральные выражения в**

<sup>2)</sup> Скачки нормальных компонент векторов индукций  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  можно рассматривать как наличие на поверхности  $S_0$  электрических и магнитных зарядов, которые однозначно определяются с помощью уравнений непрерывности из выражений (17).

**векторных аналогах поверхностного интеграла** (11.) Каждый элемент поверхности  $S_0$ , по которому текут токи (17) и размеры которого малы по сравнению с длиной волны, фактически представляет собой совокупность **электрического и магнитного диполей**. Векторные комплексные амплитуды диполей этого элементарного «вторичного источника» монохроматического электромагнитного излучения жёстко связаны между собой уравнениями Максвелла, поскольку этим уравнениям удовлетворяют поля  $(\tilde{E})_{S_0}$  и  $(\tilde{H})_{S_0}$  на поверхности  $S_0$ .

Поскольку произвольное электромагнитное поле можно представить в виде суперпозиции плоских волн, то самым элементарным будет «вторичный источник», образованный полем плоской волны на элементе поверхности  $S_0$ , нормаль к которой  $\vec{n}$  ориентирована по направлению распространения волны. Такой простейший «вторичный источник» в виде двух ортогонально ориентированных диполей

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{1}{i\omega} \tilde{\vec{j}}^m ds \equiv \frac{-c ds}{i4\pi\omega} \left[ \vec{n} \times \tilde{\vec{E}}_0 \right] ; \\ \tilde{P} &= \frac{1}{i\omega} \tilde{\vec{j}}^e ds \equiv \frac{c ds}{i4\pi\omega} \left[ \vec{n} \times \tilde{\vec{H}}_0 \right] \equiv \frac{c ds}{i4\pi\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ \vec{n} \times \left[ \vec{n} \times \tilde{\vec{E}}_0 \right] \right] \equiv \frac{-c ds}{i4\pi\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \tilde{\vec{E}}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

называется элементом *Гюйгенса*. Излучаемая элементом *Гюйгенса* плотность потока мощности и, следовательно, его диаграмма направленности легко определяются:

$$\overline{\vec{S}}^T = \left( \frac{c}{8\pi} \right) \left( \frac{k ds}{4\pi r} \right)^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left| \tilde{\vec{E}}_0 \right|^2 (1 + \cos \theta)^2 \vec{r}_0 . \quad (19)$$

Из (19) следует, что излучение элемента *Гюйгенса* в направлении  $\theta = \pi$  отсутствует. Как отмечалось выше, этого достаточно для того, чтобы не появилась волна, распространяющаяся в сторону источника первоначального поля, и, в конечном счёте, не появилось поле в области 1.

Основное содержание электродинамического принципа *Гюйгенса* заключается в том, что он позволяет заменить задачу об определении поля внутри области 2 по заданным на границе  $S_0$  полям  $(\tilde{E})_{S_0}$  и  $(\tilde{H})_{S_0}$  на эквивалентную задачу об излучении в свободном безграничном пространстве сторонних токов, определяемых по формулам (17).

#### Пункт 6. Модификации электродинамического принципа Гюйгенса для задач дифракции на плоских объектах.

Для расчёта излучения из отверстия в плоском экране (Рис. 2.3) удобно воспользоваться **электродинамическим принципом Гюйгенса** в его строгой формулировке, которая предполагает введение по формулам (17) поверхностных токов, излучающих в свободном пространстве. Поскольку в этом случае излучающие в свободном пространстве токи создают в каждой точке  $P_*$  полупространства 1

так «называемое вакуумное поле»  $\tilde{E} = \tilde{H} = 0$ , то с полной очевидностью в об-

ласти 1 не произойдет никаких изменений, если плоскость  $Z = 0$  сделать **поверхностью, идеально отражающей излучение**.

Тем самым задача об излучении поверхностных токов в свободном пространстве преобразуется в задачу об излучении «вторичных источников» в полупространстве 2, плоская граница которого является **идеальным проводником или идеальным магнетиком**.

1) Излучение источников в полупространстве 2, ограниченном **идеально проводящей плоскостью  $Z = 0$** , согласно методу «отражения токов» эквивалентно излучению в **свободном пространстве** реальных и дополнительных «фиктивных» токов. Компоненты «фиктивных» источников располагаются в пространстве 1 определённым симметричным образом по отношению к компонентам реальных источников, находящихся в области 2. Если реальные источники являются токами, текущими по поверхности  $Z = 0$ , то «фиктивные» электрические *поверхностные токи будут одинаковы по величине и противоположны по направлению реальным поверхностным электрическим токам, а «фиктивные» поверхностные магнитные токи, напротив, будут совпадать с реальными не только по величине, но и по направлению*. В результате амплитуда излучающего в свободном пространстве полного магнитного поверхностного тока возрастёт в два раза, а полный электрический поверхностный ток будет равен нулю:

$$\tilde{j}_{z=0}^e = 0 ; \quad \tilde{j}_{z=0}^m = -2 \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{n} \times (\tilde{\vec{E}})_{S_0} \right] . \quad (17)_1$$

Поскольку при замене «вторичных источников» (17) на источники (17)<sub>1</sub> поле в области 2 не изменяется, то это значит, что располагающиеся на плоской поверхности  $S_0$  электрический  $\tilde{j}_{S_0}^e$  и магнитный  $\tilde{j}_{S_0}^m$  поверхностные токи вносят совершенно одинаковые вклады в поле в правом полупространстве, излучая (в область 2) одинаковую мощность в фазе друг с другом. В левое полупространство (в область 1) эти токи излучают в противофазе и потому полностью подавляют друг друга.

2) Если в качестве **идеально отражающей плоскости  $Z = 0$**  используется поверхность из **идеального магнетика**, то совокупность реальных и «фиктивных» источников, формирующих истинное поле в области 2, будет иметь вид

$$\tilde{j}_{z=0}^e = 2 \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{n} \times (\tilde{\vec{H}})_{S_0} \right] ; \quad \tilde{j}_{z=0}^m = 0 . \quad (17)_2$$

### Пункт 7. Приближённые методы решения дифракционных задач.

Изложенная теория вычисления дифракционных полей является абсолютно строгой, и поля в области 2 определяются абсолютно точно, если точно известны

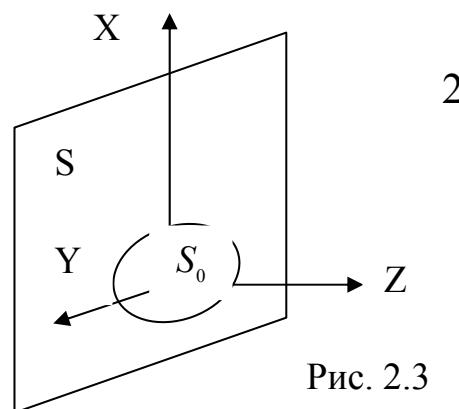


Рис. 2.3

поля на поверхности  $S_0$ . Но они практически всегда не могут быть определены точно и поэтому задаются приближённо.

Исторически развитие *дифракции* началось с решения оптических задач. В оптике измеряются не мгновенные значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а интенсивность света (плотность потока мощности, усреднённая за большое по сравнению с периодом колебания время и по площади приёмного устройства, большой по сравнению с  $\lambda^2$ ). Эта характеристика поля является скалярной величиной, и поэтому для описания большинства дифракционных явлений в оптике оказалось вполне пригодным приближение скалярной теории. Типичным примером применения такой теории является расчёт излучения из отверстия в плоском экране (Рис. 2.3), который расположен в плоскости  $Z = 0$ .<sup>3)</sup>

### 7.1. Приближение Кирхгофа.

Кирхгоф предложил рассчитывать поле в области 2 по формуле (11), подставляя в неё в качестве  $(\tilde{u})_s$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_s$  разрывные функции<sup>4)</sup>

$$(\tilde{u})_s ; (\partial \tilde{u} / \partial n)_s = \begin{cases} \tilde{u}^0, (\partial \tilde{u}^0 / \partial n) & \text{для } S \in S_0 \\ 0, 0 & \text{для } S \notin S_0 \end{cases}, \quad (20)$$

где  $S_0$  - площадь плоской поверхности отверстия,  $\vec{n} \Rightarrow \vec{z}_0$  - нормаль к плоскости, проходящей через поверхность экрана,  $\tilde{u}^0$  - создаваемое источником невозмущённое поле, падающее на отверстие (и экран) слева из области 1. Эти граничные условия являются основным содержанием *приближённой скалярной теории дифракции Кирхгофа*.

<sup>3)</sup> По существу расчёт поля в полупространстве  $Z \geq 0$  сводится к вычислению поля в произвольной точке  $P$  в области 2, которая ограничена замкнутой поверхностью  $S + S^\infty$ , состоящей из плоскости  $Z = 0$  и полусферы бесконечно большого радиуса с центром в начале координат  $(0, 0, 0)$ . Поверхность полусферы и участки плоскости за пределами экрана  $S$  образуют поверхность  $S^\infty$ , на которой «вторичные источники» либо отсутствуют, либо в силу своей малости не дают никакого вклада в поле в точке  $P$ .

<sup>4)</sup> Граничные условия, предложенные Кирхгофом, имеют несколько недостатков. Во-первых, они избыточны, ибо для однозначного решения уравнения Гельмгольца вполне достаточно задать на границе объёма значение  $(\tilde{u})_s$  (задача Дирихле) или только  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_s$  (задача Неймана). Если задать на  $S_0$  обе величины независимо, то объёмное решение в области 2 не сойдётся к этим значениям на поверхности. Во-вторых, предположение о равенстве нулю на части внутренней поверхности  $S$  (на экране) функции  $(\tilde{u})_s$  и её производной  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_s$  фактически означает разрыв непрерывности функции на контуре, ограничивающем отверстие  $S_0$ . Это противоречит условиям применимости интеграла (11), поскольку это решение уравнения Гельмгольца получено с помощью формулы Грина, которая справедлива исключительно для функций, непрерывных на всей поверхности  $S$ .

## 7.2. Метод физической оптики.

**Метод физической оптики** заключается в том, что при решении задач с помощью **электродинамического принципа Гюйгенса** для определения поверхностных токов на границах области 2 используются для векторов  $\tilde{E}$  и  $\tilde{H}$  приближённые граничные условия

$$\left(\tilde{E}\right)_S ; \left(\tilde{H}\right)_S = \begin{cases} \tilde{E}^0, & \tilde{H}^0 \quad \text{для } S \in S_0 ; \\ 0, & 0 \quad \text{для } S \notin S_0 , \end{cases} \quad (21)$$

аналогичные по своему физическому смыслу условиям (20). В соответствии с (17) вводятся приближённые значения сторонних поверхностных токов и рассчитываются поля в свободном пространстве. **Метод физической оптики** широко применяется для модификаций **электродинамического принципа Гюйгенса**. Он имеет те же недостатки, которые присущи *приближённой скалярной теории дифракции Кирхгофа*.<sup>5)</sup>

## §2. Основные закономерности распространения дифрагированных коротковолновых полей.

### Пункт 1. Диаграмма направленности простейшего излучателя коротковолнового диапазона.

Для осознания закономерностей распространения коротковолнового излучения рассмотрим дифракцию однородной плоской волны оптической частоты на прямоугольном отверстии  $S_0 = A_x \times A_y$  в плоском непрозрачном экране (Рис. 2.3), размеры которого  $A_{x,y}$  велики по сравнению с длиной волны. На основании **модифицированного варианта электродинамического принципа Гюйгенса** поле в области 2 будем искать как поле излучения в безграничной однородной среде стороннего магнитного тока (1.17)<sub>1</sub>, текущего по поверхности  $S$ . Это – типичная задача об излучении антенны, имеющей большую апертуру. Воспользуемся приближением физической оптики (1.21), полагая, что волна падает нормально на поверхность  $S$  и её электрическое поле поляризовано по оси ОХ. В этом случае в соответствии с (1.17)<sub>1</sub> роль стороннего источника, излучающего в свободном пространстве, будет играть поверхностный магнитный ток

$$\tilde{j}_{z=0}^m = \begin{cases} -\frac{c}{2\pi} \left[ \vec{z}_0 \times \tilde{E}^0 \right] \equiv -\frac{c}{2\pi} \tilde{E}_0 \vec{y}_0 & \text{для } S \in S_0 ; \\ 0 & \text{для } S \notin S_0 , \end{cases} \quad (1)$$

где  $\tilde{E}_0$  – комплексная амплитуда напряженности электрического поля падающей на экран из области 1 однородной плоской волны.

<sup>5)</sup> Несмотря на внутреннюю противоречивость, приближённая теория Кирхгофа позволяет получить удовлетворительные решения многих дифракционных оптических задач, потому что все неточности граничных условий (20), (21) при  $(\lambda / \sqrt{S_0}) \ll 1$  выглядят как малые математические погрешности.

Поле излучения такого тока (*простейшего излучателя оптического диапазона*) в дальней волновой фраунгоферовой зоне рассчитывается по стандартной схеме. Вначале определяется электрический вектор-потенциал

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{A}}^m &= \frac{\epsilon}{c r} \exp(-i k r) \iiint \tilde{\vec{j}}_{z=0}^m(\vec{r}') \exp\{i k (\vec{r}_0 \cdot \vec{r}')\} dV' \equiv \frac{\epsilon}{c r} \exp(-i k r) \left\{ \tilde{\vec{N}}^m(\vartheta, \alpha) \right\} = \\ &= \frac{\epsilon}{c r} \exp(-i k r) \left\{ \left[ \frac{-c}{2\pi} \tilde{E}_0 A_x A_y \vec{y}_0 \right] \left( \frac{\sin \Theta_x}{\Theta_x} \right) \left( \frac{\sin \Theta_y}{\Theta_y} \right) \right\} ,\end{aligned}\quad (2)$$

в котором аргументы углового распределения векторного поля

$$\Theta_x = \left( \frac{k A_x}{2} \right) \sin \vartheta \cos \alpha \equiv \left( \frac{k_x A_x}{2} \right); \quad \Theta_y = \left( \frac{k A_y}{2} \right) \sin \vartheta \sin \alpha \equiv \left( \frac{k_y A_y}{2} \right) \quad (3)$$

являются функциями угла места  $\vartheta$  и азимутального угла  $\alpha$  сферической системы координат. Затем находятся электрическое поле

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{E}} &= \frac{-1}{\epsilon} \text{rot} \tilde{\vec{A}}^m \equiv \frac{i k}{c r} \exp(-i k r) \left[ \vec{r}_0 \times \tilde{\vec{N}}^m \right] = \\ &= \left( \frac{-i k}{2\pi r} \right) \exp(-i k r) \left\{ \left[ \tilde{E}_0 A_x A_y \right] \left( \frac{\sin \Theta_x}{\Theta_x} \right) \left( \frac{\sin \Theta_y}{\Theta_y} \right) \right\} \left[ \vec{r}_0 \times \vec{y}_0 \right] \quad (4)\end{aligned}$$

и вектор Пойнтинга

$$\begin{aligned}\vec{S}^T &= \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^* \right) \vec{r}_0 = \\ &= \frac{c |\tilde{E}_0|^2}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \left( \frac{k A_x A_y}{2\pi r} \right) \left( \frac{\sin \Theta_x}{\Theta_x} \right) \left( \frac{\sin \Theta_y}{\Theta_y} \right) \right\}^2 (1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha) \vec{r}_0 ,\end{aligned}\quad (5)$$

при расчёте которого используется разложение

$$\vec{y}_0 = \vec{r}_0 \sin \vartheta \sin \alpha + \vec{\vartheta}_0 \cos \vartheta \sin \alpha + \vec{\alpha}_0 \cos \alpha \quad (6)$$

орта декартовой системы координат по ортам сферической системы координат.

Используя (3), нетрудно оценить ширину диаграммы направленности этой излучающей апертуры, установив, например, положение нулей главного лепестка. В плоскостях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = (\pi / 2)$  получим соответственно

$$\pi = (\pi A_x / \lambda) \sin \Delta \vartheta_x \approx (\pi A_x / \lambda) \Delta \vartheta_x ; \quad \pi \approx (\pi A_y / \lambda) \Delta \vartheta_y . \quad (7)$$

Поскольку интенсивность излучения в ближайших боковых лепестках (соседних с главным) в  $\pi^2$  раз меньше, то можно считать, что основная часть (около 80%) всей излучаемой мощности сосредоточена внутри телесного угла  $4 \Delta \Omega = 4 \Delta \vartheta_x \Delta \vartheta_y$ , образованного главным лепестком<sup>1)</sup>. По определению *ширина диаграммы направленности оценивается по уровню излучения половины максимальной мощности в главном лепестке*. При таком общепринятом опре-

<sup>1)</sup> Согласно формулам 0.233.3 и 9.71 справочника И.С. Градштейн и И.М. Рыжик, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений» имеем  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = (\pi^2 / 6)$ .

делении найдём, что ширина диаграммы направленности рассматриваемой *гигантской антенны* ( $A_{x,y} \gg \lambda$ ) в соответствии с (7) есть

$$\Delta\Omega = \Delta\vartheta_x \Delta\vartheta_y \cong (\lambda^2 / A_x A_y) \equiv (\lambda^2 / S_0); \quad \Delta\vartheta_{x,y} = (\lambda / A_{x,y}) \quad (8)$$

Совершенно очевидно, что абсолютно идентичными свойствами обладает излучение плоского идеально отражающего зеркала, которое имеет размеры  $S_0 = A_x \times A_y$  и на которое из области 2 по нормали к его поверхности падает плоская волна<sup>2)</sup>.

В оптическом диапазоне ( $\lambda \cong 5 \cdot 10^{-5}$  см) отверстие размером в 0.5 см, подсвеченное из области 1 плоской волной, излучает как *гигантская антenna*, имеющая очень узкую диаграмму направленности с угловой шириной

$$\Delta\vartheta_{x,y} = (\lambda / A_{x,y}) \cong 10^{-4} \text{ рад}.$$

Поперечные размеры объёма пространства, в котором находится энергия, излучаемая основным лепестком диаграммы направленности этой антенны, будут неизначительно расти по мере удаления от светящейся поверхности. Так даже в зоне Фраунгофера на расстоянии

$$R_{FR} \cong r_{FR} = 10 (A^2 / \lambda) \cong 5 \cdot 10^4 \text{ см}$$

от антенны поперечные размеры основного лепестка её диаграммы направленности, рассчитанные по уровню излучения половины максимальной мощности, будут только в 10 раз больше размера апертуры:

$$\Lambda_{\perp} \cong r_{FR} \Delta\vartheta_{\perp} = 10 (A^2 / \lambda) (\lambda / A) = 10 A \cong 5 \text{ см}.$$

## Пункт 2. *Параксиальные волновые пучки гауссовой формы.*

В оптике имеют дело не с плоскими волнами, а с пучками конечной ширины, в которых интенсивность поля уменьшается в направлении периферии освещаемой апертуры. Пучок такого типа, имеющий большие по сравнению с длиной волны  $\lambda$  поперечные размеры  $\Lambda_{\perp} \equiv a$ , представляет собой суперпозицию плоских волн, волновые вектора которых образуют узкий конус направлений вокруг основного направления распространения пучка вдоль оси OZ. Каждая из этих волн по правилам *го* может рассматриваться как отдельный луч. Если направления распространения всех лучей близки направлению оси OZ и удовлетворяют *приближению параксиальности* (1.5.48), (1.5.49), то образованный этими плоскими волнами пучок называется *параксиальным волновым пучком*.

*Параксиальные волновые пучки* могут иметь различные *поперечные структуры*. Поперечную структуру поля *параксиального волнового пучка* и соответственно спектральный состав образующих его плоских волн (*лучей*) определяют зависимости амплитуды и фазы от поперечных координат.

---

<sup>2)</sup> В этом случае необходимо в соответствии с (1.1) рассмотреть рассеянную часть электромагнитного поля  $\tilde{\vec{E}}^R, \tilde{\vec{H}}^R$  и именно для неё сформулировать задачу об излучении стороннего тока в свободном пространстве.

Особенно важную роль в теории распространения коротковолнового излучения играют *параксиальные волновые пучки* с так называемой *гауссовой зависимостью амплитуды поля* от поперечных координат

$$\tilde{u}(x, y, 0) = \tilde{U}_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \equiv \tilde{U}_0 \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{2a^2}\right). \quad (9)$$

При таком определении интенсивность поля, пропорциональная  $|\tilde{u}|^2$ , уменьшается в  $e^1$  раз на расстоянии  $r_\perp = a$ , поэтому  $a$  можно считать шириной пучка на уровне 0.36 по мощности.

Эти пучки (как будет показано позднее) являются *собственными типами волн в открытых центрированных линиях передачи* силовых полей. При распространении в линии передачи в промежутках между линзами (или зеркалами) фазовый фронт и ширина гауссова пучка меняются в небольших пределах. Линзы (или зеркала) корректируют эти изменения. Поэтому внутри каждой отдельной ячейки, из совокупности которых состоит линия передачи, имеется сечение, в котором поле гауссова пучка имеет плоский фазовый фронт. В этом *особом сечении*, условно обозначенном  $z = 0$ , комплексная амплитуда поля параксиального симметричного гауссова пучка представляется в виде (9).

В *параксиальном приближении* спектр пространственных частот волнового гауссова пучка по определению находится как Фурье-преобразование поля (9) и представляется в виде

$$\tilde{U}(k_x, k_y) = \frac{\tilde{U}_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2a^2} + i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp)\right\} dx dy = \frac{\tilde{U}_0 a^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2 k_\perp^2}{2}\right). \quad (10)$$

При расчёте спектра (10) помимо *приближения параксиальности*  $|\vec{k}_\perp| \ll k$  использован фундаментальный математический результат в виде известного значения<sup>3)</sup> определённого интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tilde{\alpha} x^2 + \tilde{\beta} x) dx = \sqrt{(\pi / \tilde{\alpha})} \cdot \exp(\tilde{\beta}^2 / 4\tilde{\alpha}), \quad \text{при } \operatorname{Re} \tilde{\alpha} > 0. \quad (11)$$

Из выражения (10) видно, что основная часть энергии спектра

$$|\tilde{U}(k_x, k_y)|^2 = |\tilde{U}_0|^2 \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^2 \exp(-a^2 k_\perp^2) \quad (12)$$

сосредоточена внутри области  $k_\perp = (1/a)$ , на границе которой интенсивности плоских волн (лучей), образующих пучок, составляют около 36% от интенсивности центрального *луча*. Применительно к гауссову пучку *приближение параксиальности*

$$|\Delta \vec{k}_\perp| \approx (1/a) \ll k \equiv (2\pi / \lambda) \quad (13)$$

позволяет установить простые связи между шириной пучка, шириной его пространственного спектра и длиной волны. Примерно такие же соотношения между

<sup>3)</sup> Смотрите формулы 3.462 (с. 351), 9.242 (с. 1078) и 9.254 (с. 1081) справочника И.С. Градштейн и И.М. Рыжик, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений».

этими параметрами имеют место в **параксиальных волновых пучках** с иной поперечной структурой поля.

### Пункт 3. Угол дифракционной расходимости и дифракционная длина.

Угловая ширина диаграммы направленности зависит от распределения плотности тока по поверхности апертуры антенны, т.е. от распределения амплитуды и фазы поля на освещаемой поверхности отверстия  $S_0 = A_x \times A_y$  в экране. При освещении отверстия в экране пучком конечной ширины типа (9) диаграмма направленности эффективной антенны оказывается заметно уже, чем в ранее рассмотренном случае падения на отверстие экрана плоской волны.

Для оценки угловой ширины диаграммы направленности неоднородно освещённой апертуры рассмотрим дифракцию на отверстии  $S_0 = A_x \times A_y$  в плоском непрозрачном экране (Рис. 2.3) одномерного параксиального пучка, который распространяется вдоль оси OZ и в плоскости экрана  $z = 0$  имеет комплексную амплитуду поля

$$\tilde{\vec{E}}_0 = \vec{x}_0 \tilde{E}_0 \exp(-y^2 / 2a^2). \quad (14)$$

Воспользуемся формулами (1) - (5). Вначале найдём магнитный поверхностный ток  $\tilde{\vec{j}}_{z=0}^m$ , а затем вычислим электрический вектор-потенциал  $\tilde{\vec{A}}^m$ . Для упрощения расчётов будем считать, что поперечный размер отверстия по координате  $y$  существенно больше поперечного размера пучка ( $A_y \gg a$ ). Это допущение позволяет применить формулу (11) и, используя обозначения (3), получить выражение для электрического векторного потенциала в виде

$$\tilde{\vec{A}}^m = \frac{\epsilon}{c r} \exp(-ikr) \left\{ \left[ \frac{-c}{2\pi} \tilde{E}_0 A_x \vec{y}_0 \right] \left( \frac{\sin \Theta_x}{\Theta_x} \right) (\sqrt{2\pi} a) \exp\left(-\frac{a^2 k_y^2}{2}\right) \right\}. \quad (15)$$

Сопоставляя (15) и (2), нетрудно найти явное выражение для вектора Пойнтинга и соответствующую диаграмму направленности этой излучающей апертуры

$$\left( \left| \bar{\vec{S}}^T \right| / \left| \bar{\vec{S}}^T \right|_{\max} \right) = \left( \frac{\sin \Theta_x}{\Theta_x} \right)^2 \exp(-a^2 k_y^2) (1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha) \quad (16)$$

Подставляя в (16) обозначения (3), нетрудно установить, что в приближении параксиальности ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ) ширину диаграммы направленности в плоскости  $\alpha = (\pi / 2)$  определит условие

$$k_y a \approx k \vartheta a = 1. \quad (17)$$

Именно на основании условия (17) **принято считать, что в этом случае шириной диаграммы направленности «вторичных источников», образованных полем параксиального волнового пучка, является величина**

$$\vartheta_{df} = (1 / ka) \equiv (\lambda / 2\pi a), \quad (18)$$

которая называется **углом дифракционной расходимости излучения с апертурой  $a$**  (где  $a$  - характерный поперечный размер пучка).

Поскольку плоскую поверхность волнового фронта  $z = 0$ , на которой определено поле (9) гауссового пучка, можно рассматривать как апертуру антенны, на которой задано распределение «вторичных источников», то понятие **угловой дифракционной расходимости** полностью применимо к волновым пучкам, распространяющимся в свободном пространстве. Из сопоставления (18) и (13) следует, что **параксиальные волновые пучки** должны иметь очень небольшие **углы дифракционной расходимости**:

$$\vartheta_{df} \ll 1. \quad (18')$$

Расстояние до зоны Фраунгофера, в которой поперечные размеры пучка увеличиваются примерно в 10 раз, малоинтересно для коротковолновых полей, потому что на такой большой длине излучение сильно рассеивается и затухает. В оптике **волновых параксиальных пучков** в связи с **углом дифракционной расходимости** (18) вводится понятие **дифракционной длины**

$$a = l_{df} \cdot \vartheta_{df} \Rightarrow l_{df} = \left( a / \vartheta_{df} \right) = k a^2 \equiv k \Lambda_{\perp}^2, \quad (19)$$

на которой ширина пучка увеличивается в два раза.

В геометрооптическом приближении (без учёта дифракции) на длине  $l_{df}$  в 4 раза увеличивается площадь сечения лучевой трубы и, следовательно, в отсутствие поглощения и рассеяния можно ожидать уменьшения в 4 раза интенсивности поля. Дифракция вносит некоторую коррекцию, уменьшая ослабление вплоть до значения 2 для гауссовых пучков. Поэтому  $l_{df}$  можно рассматривать как характерный пространственный масштаб по направлению распространения пучка

$$l_{df} \cong \Lambda_{\parallel} = k \Lambda_{\perp}^2 \equiv k a^2 \quad (20)$$

на котором интенсивность поля уменьшается в пределах от 2 до 4 раз.

Расстояние  $l_{df}$  также весьма велико, если иметь в виду оптические экспериментальные установки. Значительно больший интерес представляют такие расстояния от излучателя

$$L_n = \left( A^2 / \lambda n \right) \equiv \left( a^2 / \lambda n \right) \equiv \left( \Lambda_{\perp}^2 / \lambda n \right) = \left( l_{df} / 2\pi n \right), \quad (21)$$

с которых его апертура представляется площадкой, состоящей из нескольких ( $n$ ) зон Френеля. На таких расстояниях  $L_n$  ширина пучка меняется незначительно, и мало меняется абсолютная величина интенсивности поля. Но все закономерности изменения поля сохраняются, включая характерный масштаб его изменения по направлению распространения ( $\Lambda_{\parallel} = k \Lambda_{\perp}^2 \equiv k a^2$ ).

#### **Пункт 4. Параксиальное приближение теории дифракции скалярного поля на отверстии в плоском экране. Дифракционная формула Френеля.**

Для расчёта скалярного поля в области 2 в соответствии с *принципом Гюйгенса-Кирхгофа* воспользуемся интегралом (1.11). Будем считать, что источник

скалярного поля  $\tilde{u}$ , освещдающий отверстие  $S_0 = A_x \times A_y$  в экране (Рис. 2.3), находится в области 1 достаточно далеко от границы  $z = 0$  и на поверхности апертуры создаёт поле

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}_0(\vec{r}) \exp(-i k z) , \quad (22)$$

которое представляет собой ограниченный по поперечным координатам параксиальный волновой пучок, распространяющийся вдоль оси OZ. Комплексная амплитуда  $\tilde{u}_0(\vec{r})$  этого поля предполагается функцией координат, которая мало изменяется на масштабе  $\lambda$ .

Воспользуемся приближением Кирхгофа (1.20) и подставим в (1.11) в качестве  $(\tilde{u})_s$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial n)_s$  невозмущённые значения падающего поля (22) и нормальной производной от него. При вычислении нормальной производной учтём малость вклада, вносимого производной от амплитуды  $\tilde{u}_0$ , и получим

$$\left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right)_s \approx \left( \frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial n} \right)_s \equiv \left( \frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial z} \right)_s = \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z} - i k \tilde{u}_0 \right)_s \exp(-i k z) \right\}_{z=0} \cong -i k (\tilde{u}_0)_s . \quad (23)$$

Поле таких «вторичных источников» будем искать в области 2 в точках  $P$ , находящихся в волновой зоне. Поэтому при вычислении нормальной производной от функции Грина (1.6), которая входит в подынтегральное выражение (1.11), используем приближение (1.14) волновой зоны ( $k R \gg 1$ ) и учтём, что нормаль к поверхности  $S$  направлена по оси OZ. Используем также выражение (1.13) для  $\nabla' R$  и получим вначале

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \nabla' [\exp(-i k R) / R])_s &\cong -i k ([\exp(-i k R) / R] (\vec{z}_0 \cdot \nabla' R))_s \equiv \\ &\equiv i k ([\exp(-i k R) / R^2] (\vec{z}_0 \cdot \vec{R}))_s = i k ([\exp(-i k R) / R] \cos \vartheta)_s , \end{aligned} \quad (24)$$

а затем и выражение

$$\tilde{u}(P) = \frac{i k}{4\pi} \iint_{S_0} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \left[ \frac{\exp(-i k R)}{R} \right] (1 + \cos \vartheta) d x' d y' \quad (25)$$

для поля в точке  $P$  в области 2, которое напоминает полученную ранее аналогичную по содержанию формулу (1.15). В отличие от (1.15) в (25) поверхность  $S_0$  плоская (а не сферическая), и поле на поверхности  $S_0$  не постоянное, а произвольным образом зависит от поперечных координат<sup>4)</sup>.

В **параксиальном приближении** (1.5.48), (1.5.49) интеграл (25) упрощается. Во-первых, в этом приближении следует считать  $\cos \vartheta \cong 1$ . Во-вторых, при выполнении условий (1.5.48), (1.5.49) можно разложить в ряд по малому параметру

$$(a / L)^2 \cong \left( |\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2 / z^2 \right) \equiv \tan^2 \vartheta \cong \vartheta^2 \quad (26)$$

функцию

---

<sup>4)</sup> В (25) диаграмма направленности каждого элементарного «вторичного источника»  $f(\vartheta) \sim (1 + \cos \vartheta)$  по-прежнему имеет вид кардиоиды. Но в отличие от (25) в формуле (1.15) угол  $\theta$  образован направлением на источник и нормалью к сферическому волновому фронту, а не нормалью к плоскости  $z = 0$ , как это имеет место в формуле (25)

$$R = \sqrt{z^2 + |\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2} = z \left\{ \sqrt{1 + \frac{|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{z^2}} \right\} \approx z + \frac{|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z} - \frac{|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^4}{8z^3} + \dots . \quad (27)$$

и далее использовать это разложение для преобразования функции Грина (1.6) в выражение, упрощающее вычисление интеграла (25). В соответствии с условиями (1.5.48), (1.5.49) в амплитудном сомножителе функции Грина следует оставить только первый член разложения (27). В фазовом сомножителе  $\exp(-ikR)$ , кроме первого, необходимо учитывать второй член разложения (27), поскольку его учёт изменяет фазу поля, создаваемого «вторичным источником» в точке  $P$  на расстоянии  $L_n$ , на достаточно большую величину порядка

$$(ka^2/2L) \equiv (l_{df}/2L_n) \approx \pi n . \quad (28)$$

Третьим членом разложения можно пренебречь, поскольку его вклад в изменение фазы поля, создаваемого отдельным элементарным «вторичным источником» в точке  $P$ , во всех реальных случаях оказывается несущественным:

$$k(a^4/8L_n^3) = (l_{df}/8L_n)(a/L_n)^2 = (\pi n/4)\vartheta^2 \ll (\pi/2) . \quad (29)$$

Таким образом, в **параксиальном приближении** функция Грина точечного источника (1.6) преобразуется к виду

$$\tilde{G} \approx \tilde{G}_\uparrow = \frac{-1}{4\pi z} \exp \left\{ -\frac{ik|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z} - ikz \right\} , \quad (30)$$

а выражение (25) после всех трансформаций и сокращения правой и левой частей на несущественный сомножитель  $\exp(-ikz)$  приобретает форму

$$\tilde{u}_0(P) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \iint_{S_0} \tilde{u}_0(\vec{r}', 0) \exp \left[ -\frac{ik|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z} \right] d\vec{x}' d\vec{y}' \right\} , \quad (31)$$

которая носит название *преобразования или дифракционной формулы Френеля*. В *дифракционной формуле* Френеля,<sup>5)</sup> с помощью которой рассчитывается медленно меняющаяся комплексная амплитуда  $\tilde{u}_0(P)$  поля в произвольной точке области 2, роль функции Грина играет функция

$$\tilde{G}_0 = \{ -2ik \exp(+ikz) \} \cdot \tilde{G}_\uparrow , \quad (32)$$

совпадающая с точностью до несущественных постоянных сомножителей с функцией Грина (30).

<sup>5)</sup> Если в формулу (31) вместо поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}', 0)$  подставить постоянную величину, то каждый одномерный интеграл преобразуется в две хорошо изученные и табулированные функции

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos t + i \sin t}{\sqrt{t}} dt \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} (\cos t^2 + i \sin t^2) dt , \text{ называемые}$$

интегралами Френеля. В оптике преобразованием и интегралами Френеля пользуются для расчёта освещённости за экраном (в области света и полутени) в случаях, когда поле наблюдается под малыми углами к направлению облучения.

### §3. Дифференциальный подход к квазиоптическому описанию распространения коротковолновых полей.

**Пункт 1. Параболическое (или диффузионное) уравнение для лучевой амплитуды в однородной среде.**

Дифференциальный подход оказывается очень полезным и плодотворным для описания распространения параксиальных волновых пучков

$$\tilde{u}(P) \equiv \tilde{u}(\vec{r}) = \tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z) \cdot \exp(-ikz), \quad (1)$$

комплексная амплитуда поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  которых изменяется в поперечном и продольном направлениях на соответствующих масштабах  $\Lambda_\perp$  и  $\Lambda_\parallel$ , значительно превышающих длину волны  $\lambda$  и удовлетворяющих соотношению (2.20).

Подставим (1) в уравнение Гельмгольца (B.3) и после дифференцирования по координате  $z$  получим строгое уравнение для амплитуды  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  параксиального волнового пучка

$$\Delta_\perp \tilde{u}_0 + \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial z^2} \right) - 2ik \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z} \right) = 0. \quad (2)$$

Оценивая члены уравнения (2) по порядку величины

$$\Delta_\perp \tilde{u}_0 \sim \left( \frac{\tilde{u}_0}{\Lambda_\perp^2} \right); \quad \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial z^2} \right) \sim \left( \frac{\tilde{u}_0}{\Lambda_\parallel^2} \right); \quad k \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z} \right) \sim k \left( \frac{\tilde{u}_0}{\Lambda_\parallel} \right),$$

найдём, что второй член существенно меньше двух других, которые в соответствии с соотношением  $l_{df} \cong \Lambda_\parallel = k \Lambda_\perp^2 \equiv ka^2 \quad (2.20)$  имеют примерно одинаковую величину. Это означает, что вторым членом можно пренебречь и что изменение поля параксиального волнового пучка описывается уравнением

$$\left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z} \right) + \frac{i}{2k} \Delta_\perp \tilde{u}_0 = 0 \quad (3)$$

Оно имеет характер параболического уравнения. К уравнениям такого типа принадлежит, например, уравнение диффузии

$$(\partial N / \partial t) = D \Delta N, \quad (4)$$

описывающее расплывание возмущения концентрации ( $N$ ) частиц в плотном газе (а также теплового возмущения и др.). Однако в отличие от уравнения (4), в котором концентрация  $N$  и коэффициент диффузии  $D$  действительные величины, в уравнении (3) амплитуда поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  комплексная функция, а коэффициент диффузии является мнимой величиной

$$\tilde{D} = (1/2ik). \quad (5)$$

Кроме того, в уравнении (3) лапласиан двумерный, и вторые производные берутся только по поперечным координатам. Поэтому параболическое уравнение (3) называется также *уравнением диффузии комплексной лучевой амплитуды поля*.

Таким образом, при распространении параксиального волнового пучка (1) медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$ , удовлетворяющая уравнению (3), меняется так (Рис. 2.4), как будто происходит диффузия амплитуды в направлении, перпендикулярном оси  $OZ$ . Локализованное распределение

ние поля диффундирует в область, где его не было. Причем наряду с диффузией абсолютной величины амплитуды наблюдается диффузия фазы: по мере расплывания пучка происходит искривление его фазового фронта (Рис. 2.4). На Рис. 2.4 сплошными линиями изображено сечение плоскостью, содержащей ось  $OZ$ , поверхности, на которой интенсивность поля пучка в определённое число раз меньше интенсивности поля на оси. Пунктирными линиями указаны сечения волновых фронтов.

Решение параболического уравнения (3) заключается в определении комплексной амплитуды поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  в произвольном сечении  $z = \text{const}$  по заданному значению  $\tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0)$  в плоскости  $z = 0$ . Непосредственной подстановкой (2.31) в (3) можно убедиться, что (2.31) является решением *уравнения диффузии комплексной лучевой амплитуды поля* (3). Это означает также, что функция  $\tilde{G}_0$ , представленная выражением (2.32), является функцией Грина уравнения (3).

Поскольку решение уравнение (3) эквивалентно интегральному преобразованию Френеля (2.31), то оба подхода к описанию закономерностей распространения пучков в однородных средах, приводящие к одинаковым результатам, не имеют преимущества друг перед другом. Поле можно определить как из интегрального преобразования (2.31), так и с помощью дифференциального уравнения (3). Однако в некоторых случаях и, в частности, в плоскослоистой среде удобнее решать дифференциальное уравнение. Для этого задают поле в сечении  $z = 0$  и, делая шаг на  $\Delta z$ , определяют поле в новом сечении. Такой метод решения дифференциальных уравнений называется *методом прямых*<sup>1)</sup>.

## Пункт 2. Соотношения между компонентами векторной комплексной амплитуды параксиального пучка электромагнитного поля.

Будем считать, что поле волнового параксиального пучка электромагнитного излучения в области 2 (Рис. 2.3) с однородной изотропной средой по аналогии с (1) может быть представлено в виде

$$\tilde{\vec{E}}(P) \equiv \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r}_\perp, z) \exp(-ikz). \quad (6)$$

Векторную комплексную (лучевую) амплитуду электрического поля  $\tilde{E}_0(\vec{r}_\perp, z)$  в выражении (6) образуют три ортогонально поляризованных компонента, каждый из которых подобно функции  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  медленно меняется в поперечном и продольном направлениях. Будем считать, что поле (6) в области 2 не имеет сторонних источников и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = 0. \quad (7)$$

Используем уравнение (7) для определения связи продольных и поперечных компонент напряженности электрического поля. Подставляя в (7) выражение (6),

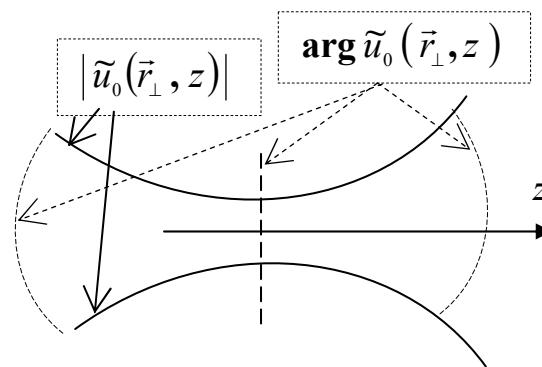


Рис. 2.4

<sup>1)</sup> Для неоднородных сред интегральный подход совершенно не развит.

после простых математических операций получим связь поперечных и продольных компонент поляризации поля в пучке

$$\operatorname{div}_{\perp} \tilde{\vec{E}}_{0\perp} + \frac{\partial \tilde{E}_{0z}}{\partial z} = i k \tilde{E}_{0z} . \quad (8)$$

Поскольку производная от продольной компоненты поля  $\tilde{E}_{0z}$  по продольной координате мала по сравнению с правой частью (8), то этим членом в левой части можно пренебречь. В результате, связь продольной и поперечной компонент поля в волновом параксиальном пучке электромагнитного излучения получается в виде

$$\tilde{E}_{0z} \cong \frac{1}{ik} \operatorname{div}_{\perp} \tilde{\vec{E}}_{0\perp} . \quad (9)$$

Из (9) получается, что абсолютная величина продольной компоненты мала по сравнению с абсолютной величиной поперечной компоненты

$$\left( |\tilde{E}_{0z}| / |\tilde{E}_{0\perp}| \right) \sim (1/k \Lambda_{\perp}) \equiv \theta_{df} \ll 1 . \quad (10)$$

Таким образом, **поперечные компоненты векторной комплексной лучевой амплитуды** параксиального волнового пучка электромагнитного поля определяются из решения

$$\tilde{\vec{E}}_{\perp 0}(\vec{r}_{\perp}, z) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \iint_{S_0} \tilde{\vec{E}}_{\perp 0}(\vec{r}'_{\perp}, 0) \exp \left[ -\frac{ik|\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2z} \right] dx' dy' \right\} \quad (11)$$

параболического уравнения для этой физической величины

$$\left( \frac{\partial \tilde{\vec{E}}_{\perp 0}}{\partial z} \right) + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \tilde{\vec{E}}_{\perp 0} = 0 , \quad (12)$$

а продольная компонента  $\tilde{E}_{0z}$  находится из соотношения (9).

### Пункт 3. Свойства параболического уравнения и уравнения Гельмгольца. Критерии применимости квазиоптического описания.

#### 3.1. Сопоставление свойств функций Грина.

Сопоставим свойства функций Грина уравнения Гельмгольца (1.6)

$$\tilde{G} = \frac{-\exp(-ikR)}{4\pi R}$$

и параболического уравнения (2.30)

$$\tilde{G}_{\uparrow} = \frac{-1}{4\pi z} \exp \left\{ \frac{-ik|\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2z} - ikz \right\}$$

соответственно.

**Поверхности равных амплитуд** функций (1.6) и (2.30), являющиеся соответственно сферой радиуса  $R=L$  и плоскостью  $z=L$ , имеют общую точку касания (Рис. 2.5). Как видно из рисунка, описания совпадают в пределах малого угла  $\theta$ .

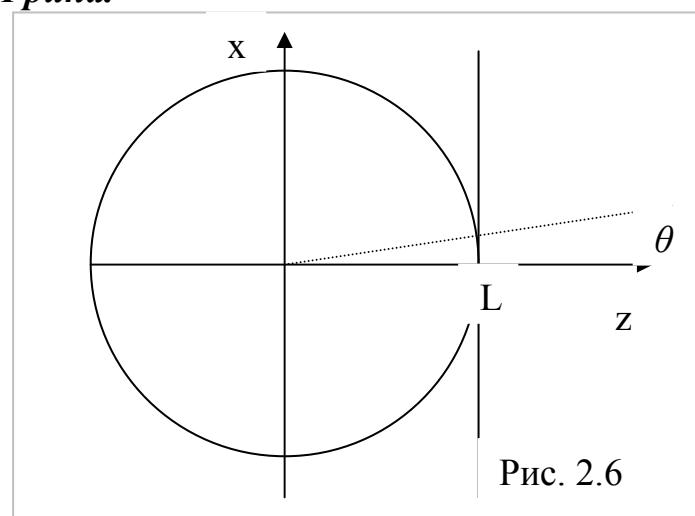


Рис. 2.6

**Поверхностью постоянной фазы** функции Грина (1.6), которая создаётся источником, находящимся в начале координат, является сфера радиуса  $R$ , изображённая на Рис.2.6 сплошной линией. Уравнение **поверхности постоянной фазы** функции Грина (2.30), которая создаётся таким же источником, имеет вид

$$z + \frac{(\vec{r}_\perp - 0)^2}{2z} = \text{const} . \quad (14)$$

Полагая, что по направлению  $\vec{r}_\perp = 0$  изменение фаз обеих функций Грина одинаково, найдём постоянную в правой части уравнения (14)

$$\text{const} = R \quad (15)$$

и преобразуем получившееся выражение к виду

$$\frac{r_\perp^2}{(R^2/2)} + \frac{\{z - (R/2)\}^2}{(R^2/4)} = 1 . \quad (16)$$

Сечение этой поверхности эллипсоида вращения плоскостью  $y = 0$  изображено на Рис. 2.6. пунктирной линией. Как следует из рисунка, описания совпадают в пределах малого угла  $\theta$ .

### 3.2. Изочастотные поверхности дисперсионных уравнений.

**Дисперсионным** уравнением называется **соотношение**, которое устанавливает связь волнового числа с частотой волнового процесса, протекающего в среде и описываемого линейным дифференциальным уравнением. **Дисперсионное уравнение** получается как условие существования монохроматического решения линейного дифференциального уравнения (описывающего волновой процесс) в виде однородной плоской волны

$$\left\langle \tilde{\vec{E}}, \tilde{u} \right\rangle = \left\langle \tilde{\vec{E}}_0, \tilde{U}_0 \right\rangle \exp \left\{ i\omega t - i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp) - ik_z z \right\} \quad (17)$$

и, следовательно, как возможность представления комплексной амплитуды волнового параксиального пучка в виде

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(k_x, k_y) \exp \left\{ -i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp) - ik_z z + ik_z z \right\} dk_x dk_y . \quad (18)$$

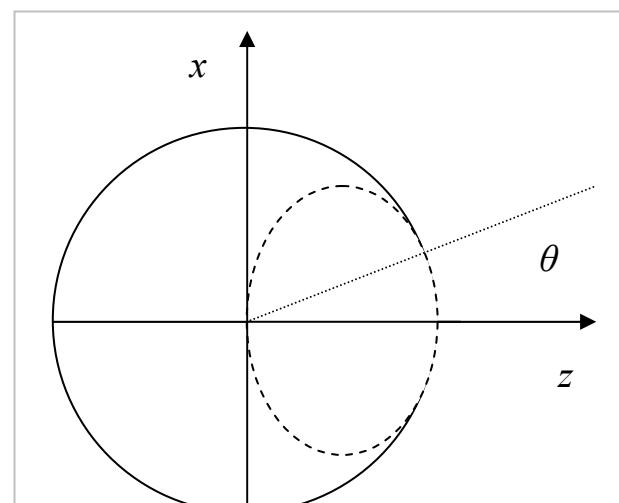


Рис. 2.7

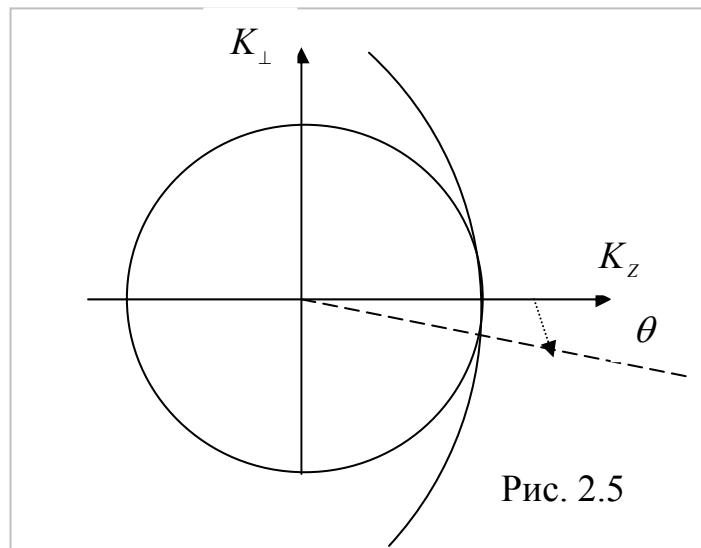


Рис. 2.5

**Дисперсионное соотношение** является свойством дифференциального уравнения. Оно отражает свойства среды и используемых приближений для описания протекающего в ней волнового процесса. **Дисперсионное уравнение** для однородной изотропной среды<sup>1)</sup>, получающееся из уравнения Гельмгольца (В.3) при подстановке в него (17), имеет вид

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 = k^2 \equiv (\omega / v_f)^2 . \quad (19)$$

Изочастотной поверхностью этого уравнения является сфера радиуса  $k$ .

В рассматриваемом квазиоптическом приближении комплексная амплитуда поля параксиального волнового пучка  $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z)$  удовлетворяет *параболическому уравнению* (3). **Дисперсионное уравнение**, отвечающее *параболическому уравнению*, находится с помощью подстановки (18) в (3). Оно имеет вид

$$k_z^2 + \frac{k_{\perp}^2}{2k} = k^2 . \quad (20)$$

Соответствующая этому уравнению изочастотная поверхность является параболой (Рис. 2.7), имеющей со сферой точку касания второго порядка<sup>2)</sup>. Из рисунка видно, что *квазиоптическое приближение* справедливо в пределах малого угла  $\theta \ll 1$ , внутри которого изочастотные поверхности, соответствующие двум описаниям, не сильно расходятся. Таким образом, соответствие двух результатов имеет место в пределах так называемого *параксиального* или *малоуглового приближения* (1.5.48), (1.5.49) в пределах малого угла  $\theta$  около направления распространения (оси  $z$ ).

Основной вывод из проведённых сопоставлений решений уравнения Гельмгольца и параболического уравнения заключается в том, что оба решения практически совпадают и полностью применимы для описания распространения *параксиальных волновых* пучков.

#### §4. Спектральный метод описания распространения параксиальных волновых пучков.

Воспользуемся преобразованием Фурье и представим поле параксиального волнового пучка (3.1) в виде суперпозиции плоских волн

$$\tilde{u}(\vec{r}) = \tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z) \exp(-ikz) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{U}_0(k_x, k_y) \exp\{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})\} dk_x dk_y , \quad (1)$$

в которой  $\tilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$  является амплитудой парциальной плоской волны. Далее преобразуем Фурье-представление (1) в выражение

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{U}_0(k_x, k_y) \exp\left\{-i\left[(\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}) + (k_z - k)z\right]\right\} d\vec{k}_{\perp} , \quad (2)$$

позволяющее найти по спектру  $\tilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$  комплексную амплитуду параксиального волнового пучка  $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z)$ .

<sup>1)</sup> В анизотропной среде дисперсионное уравнение зависит от направления распространения волны (1).

<sup>2)</sup> Приближенное описание привело к анизотропии пространства, для устранения которой необходимо работать в пределах угла  $\theta \ll 1$ .

При вычислении интеграла (2) следует учесть, что параксиальный волновой пучок в соответствии с (1.5.48), (1.5.49) имеет узкий угловой спектр

$$(k_{\perp}/k) \equiv \vartheta \ll 1 \quad (3)$$

и что продольная составляющая  $(k_z - k)$  вектора  $(\vec{k} - k \vec{z}_0)$ , зависящая от  $k_{\perp}^2$ , представляет собой разность двух больших чисел и может быть разложена в ряд по малому параметру  $\vartheta$ :

$$k - k_z = k - \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2} = k \left( 1 - \sqrt{1 - \vartheta^2} \right) \approx \left( k_{\perp}^2 / 2k \right) + \left( k_{\perp}^4 / 8k^3 \right) + \dots \quad (4)$$

Для оценки вкладов членов разложения (4) в интеграл (2) используем выражение (2.13), связывающее ширину углового спектра с шириной пучка  $|\Delta \vec{k}_{\perp}| \approx |\vec{k}_{\perp}| \approx (1/a)$ , и подставим в качестве координаты  $z$  точки наблюдения  $P$  согласно (2.21) расстояние  $L_n = (a^2 / \lambda n) \approx (\Lambda_{\perp}^2 / \lambda n) = \left( l_{df} / 2\pi n \right)$ .

В этом случае учёт первого члена разложения (4) вносит в фазовый сомножитель подынтегрального выражения (2) малую поправку порядка

$$\left( k_{\perp}^2 z / 2k \right) \approx \left( L_n / 2ka^2 \right) \approx \left( l_{df} / l_{df} 4\pi n \right) = \left( 1 / 4\pi n \right). \quad (5)$$

Поправка, которую вносит в fazu второй член разложения (4), меньше первой в  $\vartheta^{-2}$  раз и поэтому заведомо удовлетворяет условию

$$\left( k_{\perp}^4 z / 8k^3 \right) \approx \left( L_n / 8k^3 a^4 \right) \approx \left( \vartheta_{df}^2 / 16\pi n \right) \ll \left( \pi / 2 \right), \quad (6)$$

которое позволяет её не учитывать. Полагая условие (6) выполненным и подставляя в интеграл (2) первый член из правой части (4), преобразуем его к виду

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int \widetilde{U}_0(k_x, k_y) \exp \left\{ -i \left[ (\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}) - (k_{\perp}^2 / 2k) z \right] \right\} d\vec{k}_{\perp}. \quad (7)$$

Будем считать, что поле (1) образуется в результате дифракции на отверстии  $S_0$  в экране (Рис. 2.3), находящемся в плоскости  $z = 0$ , поля, которое создаётся расположенными в области 1 источниками, и что распределение этого поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, 0)$  по поверхности отверстия  $S_0$  известно. Тогда спектральная плотность комплексной амплитуды  $\widetilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$  определится как Фурье-образ граничного значения поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, 0)$  в плоскости отверстия  $S_0$  в экране

$$\widetilde{U} \left( k_x, k_y \right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{S_0} \tilde{u}_0(\vec{r}', 0) \exp \left\{ +i(\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}') \right\} dx' dy' \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и проинтегрируем по переменным  $k_x, k_y$ . В результате вычисления определённых (табличных) интегралов типа (2.11) получим *дифракционную формулу Френеля* (2.31). Таким образом, использование спектрального преобразования (7) для определения комплексной лучевой амплитуды поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z)$  по его известному спектральному составу  $\widetilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$  **эквивалентно приближению Френеля** в рассмотренных ранее интегральных уравнениях (приводит к *дифракционной формуле Френеля*).

## §5. Аналогия лучевого и волнового описаний полей в приближении параксиальной оптики.

Матрицы, с помощью которых описываются преобразования координат **лучей** в **го**, имеют свои аналоги в квазиоптической теории распространения **параксиальных волновых** пучков (поля). Установим соответствие между преобразованиями поля **параксиального волнового** пучка и преобразованиями координат **луча** на участке свободного пространства и в тонкой линзе. Эти преобразования имеют прозрачный физический смысл, и соответствующие им матрицы-операторы **перемещения**  $\hat{G}_{(L/n)}$  и **преобразования координат луча тонкой линзой**  $\hat{T}_{(n/F)}$  являются основными операторами-матрицами преобразования координат луча в **го** однородных сред.

### Пункт 1. Оператор преобразования амплитуды поля параксиального волнового пучка в свободном пространстве.

Из содержания §1 и §2 следует, что заданное на некоторой поверхности поле эквивалентно «вторичным источникам», излучающим в свободном пространстве. В частности, согласно §2 «вторичные источники» в виде заданного на поверхности плоскости  $z=0$  поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0)$ , создают в области 2 поле  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$ , которое рассчитывается с помощью *дифракционной формулы Френеля* (2.31). Этот метод расчёта полностью применим к **недифрагированному** случаю, когда поверхность отверстия  $S_0$  является неограниченно большой и интеграл в (2.31) берётся в бесконечных пределах. В этом **недифрагированном** случае, когда волны распространяются в свободном пространстве, *преобразование Френеля* фактически играет роль квазиоптического (интегрального) оператора преобразования поля на участке однородной среды. Поэтому для сокращения записи такого преобразования удобно ввести обозначение

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \exp\left[ -\frac{ik|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z} \right] d\vec{r}'_\perp \right\} \equiv \hat{G}_{(z/k)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0), \quad (1)$$

коррелирующее с обозначением матричного оператора  $\hat{G}_{(L/n)}$  преобразования координат **луча** в **го** (матрицей **перемещения** (1.6.9)).

### Пункт 2. Преобразование линзы.

Матрица преобразования координат луча **тонкой линзой**

$$\hat{T}_b = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{T}_{\frac{n}{F}} \quad (1.6.25)$$

преобразует пучок параллельных **лучей** таким образом, что они сходятся за линзой (в её фокальной плоскости на расстоянии  $F$  от линзы) в одну точку, называемую фокусом (Рис. 2.8). Плоская волна преобразуется линзой в сферическую,

сходящуюся на расстоянии  $F$

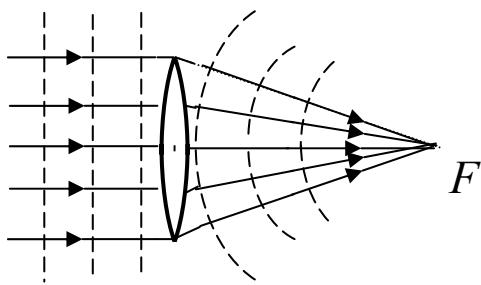


Рис. 2.8

называемая разность хода  $\Delta$  двух сопоставляемых **лучей** в направлении оси системы. Для поля **параксиального** пучка ( $\alpha \ll 1$ ) и конкретной линзы разность хода **лучей**  $\Delta$  в лучевой трубке, находящейся на расстоянии  $|\vec{r}_\perp| = r_\perp$  от оси, и центральной равна

$$\Delta = F - \sqrt{F^2 - r_\perp^2} = F \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r_\perp^2}{F^2}} \right) \approx \frac{r_\perp^2}{2F}. \quad (2)$$

Это означает, что на выходе линзы фаза поля в периферийной **лучевой** трубке отличается от фазы поля в центральной **лучевой** трубке на величину

$$k \Psi(z_{вых}, \vec{r}_\perp) - k \Psi(z_{вых}, \vec{r}_\perp = 0) = -k n \Delta \equiv -k n \cdot (r_\perp^2 / 2F) \quad (3)$$

и что комплексные амплитуды поля  $\tilde{u}_0(z_{вых}, \vec{r}_\perp)$  на выходе и  $\tilde{u}_0(z_{вых}, \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp)$

на входе линзы связаны очевидным соотношением

$$\tilde{u}_0(z_{вых}, \vec{r}_\perp) = \tilde{u}_0(z_{вых}, \vec{r}_\perp) \exp \left\{ + i \bar{k} n (r_\perp^2 / 2F) \right\} \equiv \tilde{u}_{вых} \exp \left\{ + i k (r_\perp^2 / 2F) \right\}. \quad (4)$$

Считая линзу по направлению  $z$  **бесконечно тонкой**  $z_{вых} - z_{вх} = \Delta z = 0$  и полагая  $z_{вых} = z_{вх} = z$ , получим

$$\tilde{u}_0(z' = z, \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp) = \tilde{u}_0(z, \vec{r}_\perp) \exp \left\{ + i \bar{k} n (r_\perp^2 / 2F) \right\}. \quad (4')$$

Т.о., линза работает как **бесконечно тонкий квадратичный корректор фазы поля**.

Для сравнения из выражения (3), которое устанавливает связь фаз волн на входе и выходе линзы в волновом описании, нетрудно получить связь

$$\Psi_{вых} = \Psi_{вх} - (n r_\perp^2 / 2F) \quad (5)$$

значений **эйконала**, а также связь значений компонент **лучевого** вектора

$$(n \vec{s}_\perp)' \equiv \nabla_\perp \Psi_{вых} = \nabla_\perp \Psi_{вх} - (n \vec{r}_\perp / F) \equiv (n \vec{s}_\perp) - (n / F) \vec{r}_\perp \quad (6)$$

на границах этого **бесконечно тонкого квадратичного корректора фазы**. Это соотношение точно соответствует преобразованию угловых координат **луча**, которое можно получить с помощью **матрицы тонкой линзы** (1.6.25). Соотношение

$$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp, \quad (7)$$

за линзой (Рис. 2.8). Следовательно, на линзе возникает пространственное запаздывание центра волнового фронта по отношению к точкам на периферии (Рис. 2.9). Пространственное запаздывание центрального **луча** по отношению к периферийному **лучу** обусловлено тем, что он преодолевает слой оптически более плотной среды.

В результате возникает так

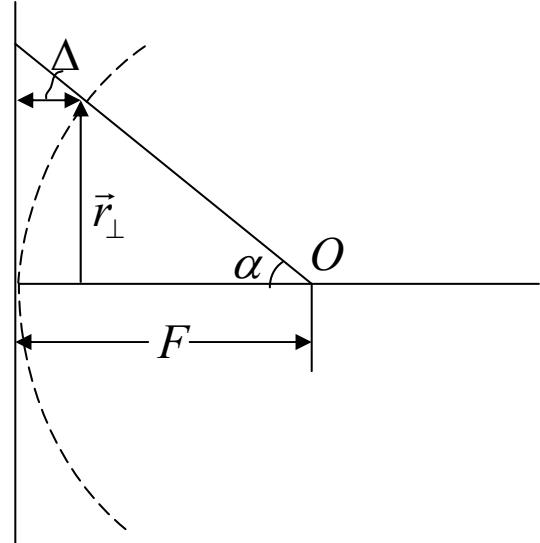


Рис. 2.9

В результате возникает так

пространственное запаздывание центра волнового фронта по отношению к точкам на периферии (Рис. 2.9). Пространственное запаздывание центрального **луча** по отношению к периферийному **лучу** обусловлено тем, что он преодолевает слой оптически более плотной среды.

являющееся следствием второй строки матрицы  $\hat{T}_b$ , означает, что *лучи* входят и выходят из одной и той же точки (из одного сечения  $z$ ) линзы. В волновом описании это означает равенство амплитуд поля слева и справа от линзы.

Таким образом, действие линзы (как корректора фазы) на проходящее через неё излучение адекватно описывается преобразованием, которое заключается в умножении комплексной лучевой амплитуды поля на фазовый множитель

$$\hat{T}_{(k/F)} = \exp\left(i k r_{\perp}^2 / 2F\right), \quad (8)$$

соответствующий согласно (4) – (7) матричному преобразованию (1.6.25) *го и потому* имеющий смысл **оператора преобразования поля параксиального волнового пучка тонкой линзой** (бесконечно тонким квадратичным корректором фазы). С помощью (8) связь полей (4) на входе и выходе линзы можно представить в более общей (удобной и компактной) форме

$$\tilde{u}_{\text{вых}} = \tilde{u}_{\text{вх}} \exp\left(i \bar{k} b r_{\perp}^2 / 2\right) \equiv \hat{T}_b \tilde{u}_{\text{вх}} \Leftrightarrow \tilde{u}_{\text{вых}} = \tilde{u}_{\text{вх}} \exp\left(i k r_{\perp}^2 / 2F\right) \equiv \hat{T}_{(k/F)} \tilde{u}_{\text{вх}}. \quad (9)$$

### Пункт 3. *Операторы обратного преобразования поля параксиального пучка в свободном пространстве и тонкой линзой.*

Операторы  $\hat{G}_{z/k}$  и  $\hat{T}_{(k/F)}$  обладают свойством аддитивности

$$\hat{G}_{z_1/k} \cdot \hat{G}_{z_2/k} = \hat{G}_{(z_1+z_2)/k}; \quad \hat{T}_{(k/F_1)} \cdot \hat{T}_{(k/F_2)} = \hat{T}_{(k/F_1)+(k/F_2)}, \quad (10)$$

которое в силу своей полной очевидности не нуждается в доказательстве. Опираясь на это свойство, получаем, что в случаях

$$z_2 = -z_1; \quad F_2 = -F_1 \quad (11)$$

два последовательных преобразования (10) оставляют поле неизменным

$$\hat{G}_{z_1/k} \cdot \hat{G}_{-z_1/k} = \hat{G}_{(z_1-z_1)/k} = 1; \quad \hat{T}_{(k/F_1)} \cdot \hat{T}_{(-k/F_1)} = \hat{T}_{(k/F_1)-(k/F_1)} = 1. \quad (12)$$

Это означает, что каждое такое второе преобразование, удовлетворяющее условию (11), по существу является обратным по отношению к первому в силу определения обратного преобразования. Отсюда находим, что операторы обратного преобразования поля параксиального пучка  $\hat{G}_{z/k}^{-1}$  и  $\hat{T}_{(k/F)}^{-1}$  связаны с соответствующими операторами прямого преобразования  $\hat{G}_{z/k}$  в свободном пространстве и  $\hat{T}_{(k/F)}$  тонкой линзой простыми соотношениями

$$\hat{G}_{z/k}^{-1} = \hat{G}_{-z/k}; \quad \hat{T}_{(k/F)}^{-1} = \hat{T}_{(-k/F)} \equiv \hat{T}_{(k/F)}^*. \quad (13)$$

### Пункт 4. *Оператор Фурье-преобразования поля.*

Согласно соотношению

$$\hat{G}_a = \hat{T}_{(1/a)}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_a \cdot \hat{T}_{(1/a)}^{-1} \quad (1.6.32)$$

**матрицу перемещения**  $\hat{G}_a$  можно представить в виде произведения трех матриц-операторов преобразования координат **луча**. Используя определения (1) и (8)

волновых аналогов матриц перемещения  $\hat{G}_a$  и преобразования тонкой линзой  $\hat{T}_{(k/F)}$ , а также определение (13) оператора обратного преобразования  $\hat{T}_{(k/F)}^{-1}$ , получим из (1) прямое Фурье-преобразование поля в свободном пространстве виде

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp \cdot k / z) = \frac{i k}{2 \pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp) \exp\left\{+i(k \vec{r}'_\perp \cdot \vec{r}_\perp)/z\right\} d\vec{r}'_\perp \equiv \hat{\Phi}_{(z/k)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp) . \quad (14)$$

Таким образом, матричному преобразованию Фурье (1.6.31), с помощью которого преобразуются координаты **лучей** из плоскости  $O$  в плоскость  $O'$ , соответствует интегральное преобразование Фурье (14), посредством которого производится преобразование комплексной амплитуды поля **параксиального** пучка из плоскости  $z=0$  в плоскость  $z=const > 0$ .

### §6. Распространение параксиальных волновых пучков гауссовой формы в однородном свободном пространстве.

Однородное свободное пространство является типичным и наиболее простым примером **недиафрагмированной** системы. Для описания распространения параксиальных волновых пучков в нём применимы операторы (5.1) и (5.8).

Рассмотрим распространение в свободном однородном пространстве **параксиального волнового пучка** гауссовой формы, поле которого в плоскости  $z=0$  имеет сферический волновой фронт. Для определённости можем считать, что рассматривается поле волнового пучка (2.9) на выходе тонкой линзы (Рис. 2.10), имеющей фокусное расстояние

$F = R_0$ . Тогда комплексная амплитуда поля этого **параксиального волнового пучка** в плоскости  $z=0$  в соответствии с (5.8) будет следующим образом зависеть от координат:

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0) = \hat{T}_{(k/R_0)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \equiv \tilde{U}_0 \exp(-r_\perp^2 / 2a_0^2) \cdot \exp(i k r_\perp^2 / 2R_0) . \quad (1)$$

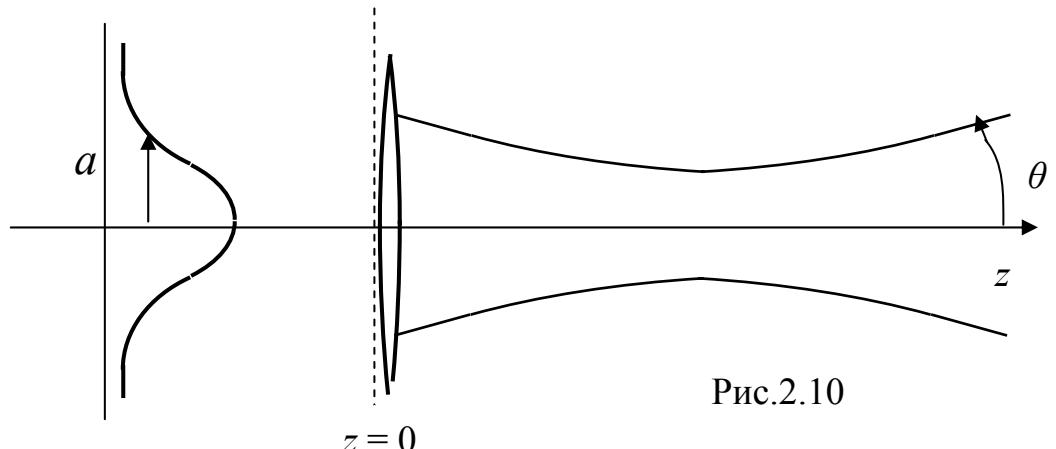


Рис.2.10

Подставим в **недиафрагмированное преобразование Френеля** (5.1) выражение (1) для комплексной амплитуды поля гауссова пучка. Используя определённый интеграл (2.11), получим поле в произвольной точке области 2

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z) = \left\{ \frac{i k}{2 \pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{U}_0 \exp\left(-\frac{r'^2_\perp}{2a_0^2} + i \frac{k \vec{r}'_\perp^2}{2R_0}\right) \exp\left[-\frac{i k |\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z}\right] d\vec{r}'_\perp \right\} =$$

$$= \frac{\tilde{U}_0}{1 - (z/R_0) - i(z/k a_0^2)} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}\right) \exp\left(+i\frac{k r_\perp^2}{2R(z)}\right) \quad (2)$$

в виде гауссова пучка, имеющего поперечный размер

$$a^2(z) = a_0^2 \left\langle \left(1 - \frac{z}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{k a_0^2}\right)^2 \right\rangle \quad (3)$$

и кривизну волнового фронта

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{z} \left\{ -1 + \frac{1 - (z/R_0)}{\langle 1 - (z/R_0) \rangle^2 + (z/k a_0^2)^2} \right\} \equiv \frac{1}{R_0} \left\{ \frac{1 - (z/R_0) - \langle z R_0 / (k a_0^2)^2 \rangle}{\langle 1 - (z/R_0) \rangle^2 + (z/k a_0^2)^2} \right\} \quad (4)$$

Из интегрального результата (2) видно, что поле  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, z)$  в произвольной плоскости  $z = \text{const} > 0$  имеет вид **лучевой** комплексной амплитуды пучка гауссовой формы со сферическим волновым фронтом. Таким образом, **гауссов пучок при распространении в свободном пространстве сохраняет свою структуру, и его поле остается гауссовым.**

Помимо ширины  $a(z)$  и радиуса кривизны волнового фронта  $R(z)$  гауссова пучка, основной характеристикой этого поля является интенсивность  $I(0, z)$  на оси пучка

$$\langle I(0, z) / I(0, 0) \rangle = \left\{ \langle 1 - (z/R_0) \rangle^2 + (z/k a_0^2)^2 \right\}^{-1} \equiv [a_0^2 / a^2(z)]. \quad (5)$$

Исследуем зависимости этих характеристик от параметров поля пучка в плоскости  $z = 0$  и от расстояния  $z$ .

### Пункт 1. Гауссов пучок с плоским фазовым фронтом.

1) В этом важном частном случае поверхность волнового фронта распространяющегося поля является **выпуклой** на всей трассе  $z > 0$ . Исключением является плоскость  $z = 0$ , где радиус кривизны волнового фронта

$$R(z) = -z - (k^2 a_0^4 / z) \quad (6)$$

бесконечно велик по абсолютному значению (и поверхность постоянной фазы является плоскостью). По мере увеличения расстояния  $z$  абсолютная величина радиуса кривизны  $R(z)$  уменьшается (Рис. 2.11) и достигает своего минимального значения в плоскости

$$z = z_{\min} = k a_0^2 \equiv l_{df}, \quad (7)$$

которая находится на расстоянии **дифракционной длины пучка** от плоскости  $z = 0$ . Абсолютное значение радиуса кривизны волнового фронта в этой плоскости определяется **дифракционной длиной апертуры пучка**:

$$|R|_{\min} \equiv -R(z_{\min}) = 2l_{df}. \quad (8)$$

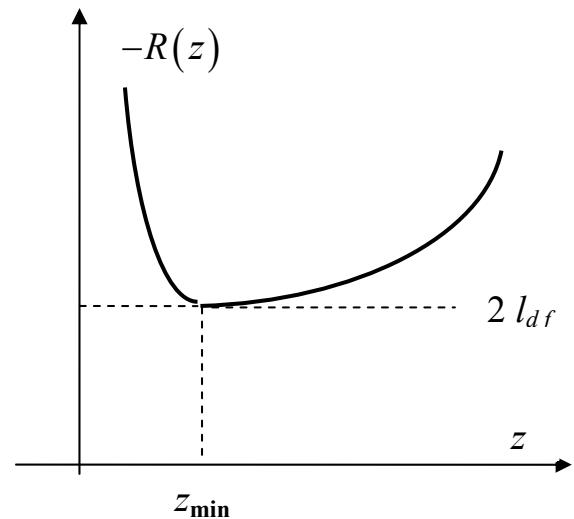


Рис.2.11

В области  $z > z_{\min}$  абсолютное значение радиуса кривизны волнового фронта монотонно увеличивается (Рис. 2.11) и асимптотически при  $z \rightarrow \infty$  радиус кривизны волнового фронта параксиального пучка меняется как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = -z . \quad (9)$$

2) Площадь поперечного сечения пучка (Рис. 2.12) изменяется по гиперболическому закону

$$\langle a^2(z)/a_0^2 \rangle = 1 + \left\langle z/l_{df} \right\rangle^2 . \quad (10)$$

На расстоянии **дифракционной длины пучка**  $k a_0^2 \equiv l_{df}$  от плоскости  $z=0$  площадь поперечного сечения пучка увеличивается вдвое (а не в четыре раза, как получилось бы в приближении *го*).

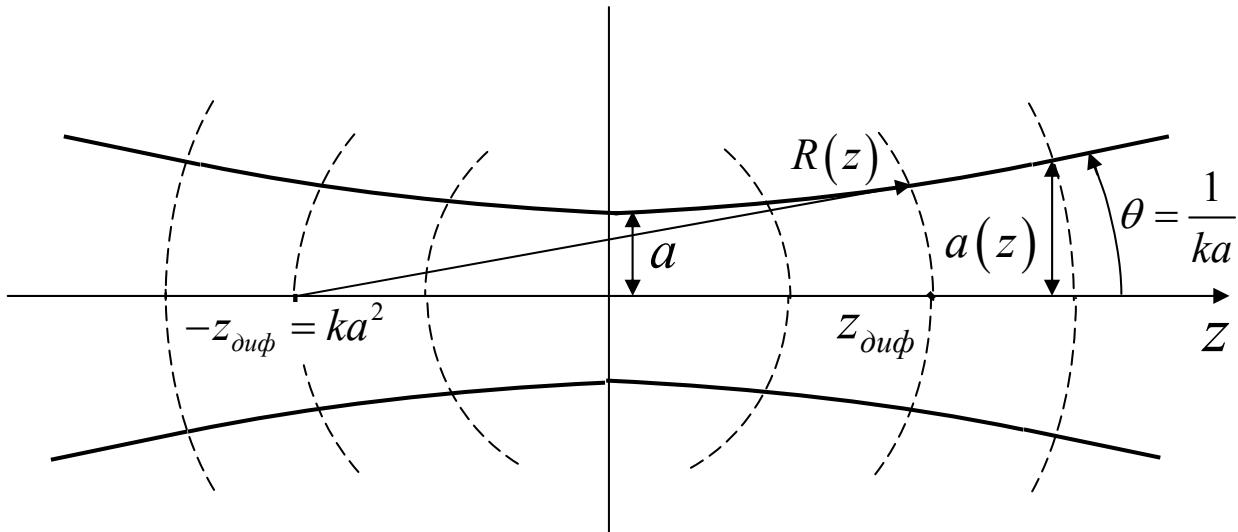


Рис. 2.12

В области

$$z \gg k a_0^2 = l_{df}$$

ширина пучка согласно (10) растёт практически по линейному закону

$$a(z) \approx a_0 \frac{z}{k a_0^2} = \frac{1}{k a_0} z . \quad (11)$$

3) Угловая ширина диаграммы направленности излучения «вторичных источников», находящихся в плоскости  $z=0$ , или в иной терминологии угол расходимости поля гауссова пучка на уровне  $e^{-1}$  по интенсивности определяется как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{a(z)/z\} = (1/k a_0) \equiv (\lambda/2\pi a_0) \equiv \vartheta_{df} \quad (12)$$

и совпадает с определением (2.18) *угловой дифракционной расходимости*.

4) Интенсивность поля на оси пучка согласно (5) и (3) изменяется обратно пропорционально изменению площади поперечного сечения пучка. Поэтому на

расстоянии **дифракционной длины пучка**  $k a_0^2 \equiv l_{df}$  от плоскости  $z = 0$  уменьшается в два раза (а не в четыре раза, как в приближении го).

Учитывая характер изменения радиуса кривизны волнового фронта и ширины пучка, можно сделать вывод, что дифракционные явления достаточно заметно сказываются в пределах **дифракционной длины пучка**  $k a_0^2 \equiv l_{df}$ .

## Пункт 2. Сфокусированный гауссов пучок.

1) Характер изменения ширины пучка (3) (как функции координаты  $z$  точки наблюдения) зависит от знака радиуса кривизны волнового фронта в плоскости  $z = 0$ . Если в плоскости  $z = 0$  волновой фронт пучка вогнутый ( $R_0 > 0$ ), то вначале  $0 \leq z \leq z_{ext}$  ширина пучка будет уменьшаться и достигнет наименьшей величины в плоскости

$$z_{ext} = \left( R_0 / \langle 1 + (R_0 / k a_0^2)^2 \rangle \right) \equiv \left( R_0 / \langle 1 + \chi^2 \rangle \right). \quad (13)$$

Как видно из формулы (13), расстояние  $z = z_{ext}$  до плоскости наибольшей фокусировки поля с точностью до поправки

$$\chi^2 = (R_0 / k a_0^2)^2, \quad (14)$$

обусловленной дифракцией на конечной апертуре пучка, совпадает с расстоянием  $z = R_0$  до фокальной плоскости, в осевую точку которой (в фокус) сфокусировались бы **лучи**, образованные (в приближении го) **эйконалом**, т.е. волновым фронтом начального распределения поля.

В плоскости  $z = z_{ext}$  пучок будет иметь наименьший размер

$$a^2(z_{ext}) = a_0^2 \left\langle \frac{(R_0 / k a_0^2)^2}{1 + (R_0 / k a_0^2)^2} \right\rangle \equiv a_0^2 \left\langle \frac{\chi^2}{1 + \chi^2} \right\rangle, \quad (15)$$

и согласно (15) минимальная ширина пучка в значительной мере определяется величиной отношения  $\chi$  радиуса кривизны волнового фронта  $R_0$  в плоскости  $z = 0$  к дифракционной длине  $k a_0^2 \equiv l_{df}$ . Если это отношение мало, то пучок фокусируется до малого размера

$$a^2(z_{ext}) \approx a_0^2 \langle R_0 / k a_0^2 \rangle^2 \equiv \langle R_0 g_{df} \rangle^2 \quad (15')$$

Асимптотически в области

$$z \gg F_0$$

ширина сфокусированного пучка (3) растёт пропорционально расстоянию

$$a(z) \approx z \cdot \sqrt{(a_0 / R_0)^2 + (1 / k a_0)^2}. \quad (16)$$

2) Согласно определению (12) и формуле (16) **угловая расходимость** сфокусированного пучка (Рис. 2.10)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{a(z) / z\} \equiv g = \sqrt{(a_0 / R_0)^2 + g_{df}^2} \quad (17)$$

оказывается больше **угловой дифракционной расходимости** (12) пучка, который имеет такую же ширину  $a_0$  и плоский фазовый фронт. Дополнительный по сравнению с (12) член в формуле (17) появляется из-за наличия линзы. Поэтому связанную с ним расходимость

$$\theta_{eo} = (a_0 / R_0) \quad (18)$$

можно интерпретировать как геометрооптическую

расходимость, которую приобретает плоская волна, прошедшая через линзу с попечерным размером  $a_0$  и фокусным расстоянием  $R_0$ . В общем случае полная расходимость гауссова пучка определяется по теореме Пифагора  $\theta^2 = \theta_{eo}^2 + \theta_d^2$ .

Таким образом, **фокусировка всегда приводит к увеличению расходимости.**

3) Кривизна волнового фронта изменяется с ростом  $z$  как

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{R_0 - z \{1 + \chi^2\}}{z^2 \chi^2 + (R_0 - z)^2} \quad (19)$$

и в случае сфокусированного пучка ( $R_0 > 0$ ) в плоскости  $z = z_{ext}$  оказывается равным нулю (соответствующая поверхность волнового фронта оказывается плоскостью)<sup>1)</sup>. Из (19) видно, что в случае  $R_0 > 0$  радиус кривизны  $R(z)$  остаётся положительным (волновой фронт вогнутым) до  $z = z_{ext}$ . В области

$z > z_{ext}$  знак кривизны поверхности волнового фронта становится отрицательным (поверхность становится выпуклой). В пределе при  $z \rightarrow \infty$  радиус кривизны волнового фронта параксиального пучка (2) меняется по формуле (9) вне зависимости от его начальной величины.

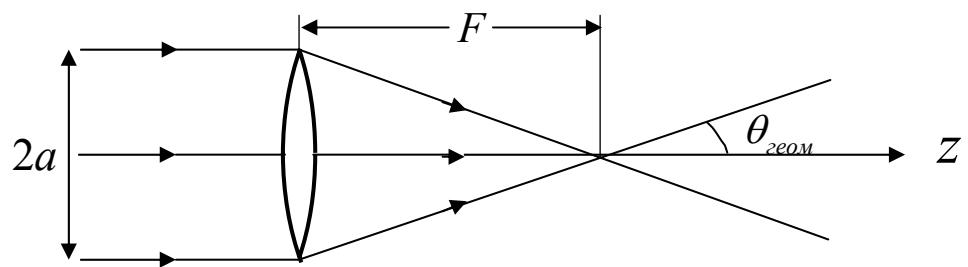


Рис. 2.13

<sup>1)</sup> Если параметр  $\chi$  мал ( $\chi^2 < 1$ ), то в области  $z < z_{ext}$  радиус кривизны  $R(z)$  вначале уменьшается до  $R_1 = R_0 \langle \chi / (1 + \chi^2) \rangle$  при  $z_1 = R_0 \langle (1 - \chi) / (1 + \chi^2) \rangle$ , а затем растёт, стремясь к  $\infty$  при  $z \rightarrow z_{ext}$ . В области  $z > z_{ext}$ , где  $R(z) < 0$ , абсолютное значение  $R(z)$  вначале уменьшается до значения  $|R_2| = R_0 \langle \chi / (1 + \chi^2) \rangle$  при  $z_2 = R_0 \langle (1 + \chi) / (1 + \chi^2) \rangle$ , а затем монотонно увеличивается до  $\infty$ . Если параметр  $\chi^2 > 1$ , то в области  $z < z_{ext}$  радиус кривизны монотонно растёт до  $\infty$  и остаётся лишь один экстремум  $|R_2| = R_0 \langle \chi / (1 + \chi^2) \rangle$  в сечении  $z > z_{ext}$ .

4) Согласно (5) интенсивность на оси пучка изменяется обратно пропорционально площади поперечного сечения пучка (3) и в плоскости наибольшей фокусировки поля  $z = z_{ext}$  увеличивается в

$$\left\langle I(0, z_{ext}) / I(0, 0) \right\rangle = \langle 1 + \chi^{-2} \rangle \quad (20)$$

раз по сравнению с её начальной величиной.

### Пункт 3. Дефокусированный гауссов пучок.

Рассмотрим характеристики гауссова пучка, который прошёл через дефокусирующую линзу с фокусным расстоянием  $F = R_0 < 0$  (Рис. 2.10) и в плоскости  $z = 0$  имеет выпуклый фазовый фронт.

1) Ширина  $a(z)$  пучка согласно (3) монотонно растёт с ростом  $z$ .

2) Интенсивность поля на оси согласно (5) монотонно уменьшается.

3) **Угловая расходимость** дефокусированного пучка совпадает с **угловой расходимостью** (17) сфокусированного пучка. Таким образом, **дефокусировка приводит к увеличению расходимости так же, как фокусировка**.

4) Знак кривизны поверхности волнового фронта **дефокусированного гауссского пучка** (на всех расстояниях  $z$ ) согласно (19) не меняется<sup>2)</sup>.

---

<sup>2)</sup> Если  $\chi^2 < 1$ , то с ростом  $z$  абсолютное значение радиуса кривизны волнового фронта монотонно растёт и асимптотически стремится к  $\infty$ . В случае  $\chi^2 > 1$  абсолютное значение радиуса кривизны волнового фронта вначале убывает до значения  $|R_1| = |R_0| \langle \chi / (1 + \chi^2) \rangle$  в сечении  $z_1 = |R_0| \langle (\chi - 1) / (1 + \chi^2) \rangle$ , а затем монотонно растёт до  $\infty$ .

## §7. Волновые пучки в недиафрагмированных открытых цилиндрических линиях передачи силовых полей.

*Открытыми цилиндрическими линиями передачи* будем называть *периодические центрированные линии передачи силовых полей*. Типичными примерами таких линий передачи являются линзовье линии передачи оптического излучения, изображённые на рисунках 2.14 и 2.15.

Поскольку физические размеры зеркал конечны, то *недиафрагмированными* будем считать только такие линии передачи, в которых поперечный размер (апертура) линзы настолько превышает ширину параксиального волнового пучка силового поля (в 10 или более раз), что дифракционные потери на краях апертуры линзы можно считать несущественными.

Открытые линии передачи обладают *основным свойством* всех линий передачи цилиндрического типа: в них существуют *собственные* (или *нормальные*) *типы волн (моды)*, у которых поперечная структура поля определённым образом связана с параметрами линзовой линии. В отличие от волноводов, полосковых или коаксиальных линий, в которых поперечная структура поля моды фиксирована по всей длине линии, *модами открытых линий передачи* являются пучки, параметры поперечной структуры поля которых, изменяясь в пространстве между корректорами фазы (линзами и зеркалами), точно повторяются только через период системы<sup>1)</sup>.

В открытой линии передачи в пределах каждой *элементарной ячейки* (периодической системы) всегда имеется одно или несколько *особых сечений*, в которых поверхность фазового фронта можно установить из общих соображений и, в частности, из принципов симметрии пространства и взаимности условий распространения поля. Например, в линзовой линии передачи, изображённой на Рис.14, особыми будут сечения посередине каждого фазового корректора и, если линзы одинаковы, то ещё и посередине расстояния между ними. В этих сечениях фазовый фронт поля моды в силу симметрии системы должен быть плоским. Такая дополнительная информация важна при выводе инте-

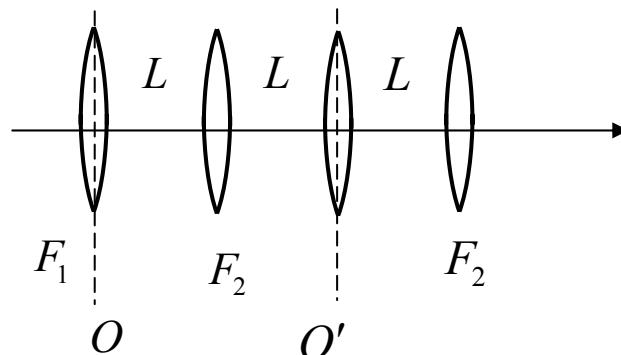


Рис. 2.14

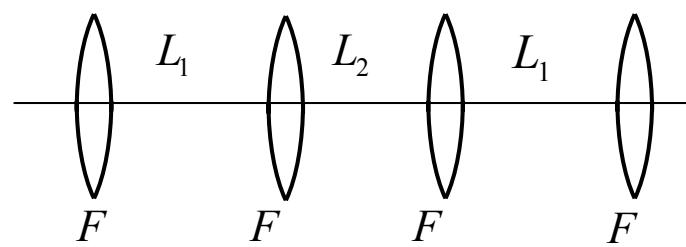


Рис.2.15

<sup>1)</sup> Мода может существовать лишь в линии передачи, состоящей из строгого периодической последовательности фазовых корректоров.

грального уравнения для лучевой амплитуды поля, ибо существенно упрощает процедуру определения структуры поля собственной волны в этом сечении.

### Пункт 1. *Интегральное уравнение для лучевой амплитуды поля моды открытой линии передачи.*

Найдём вначале *интегральное уравнение* для лучевой амплитуды поля моды линзовой линии простейшего типа, в которой все линзы одинаковы ( $F_1 = F_2$  на Рис. 14) и одинаковы все расстояния между ними ( $L_1 = L_2$  на Рис. 15). В этом случае *элементарная ячейка* периодической системы элементов, образующих транспортную линию, содержит наименьшее количество параметров (только  $F$  и  $L$ ). Это упрощает исследование зависимостей структуры поля моды от параметров линии передачи, но никак не уменьшает общности постановки задачи.

Будем рассматривать *моду* линзовой линии простейшего типа как волну (параксиальный пучок) с повторяющейся поперечной структурой поля, имеющей плоский фазовый фронт в середине фазового корректора (линзы). Используя введённые соотношениями (5.1) и (5.8) операторы преобразования лучевой комплексной амплитуды поля параксиального пучка на участке свободного пространства и на тонкой линзе, представим связь лучевых амплитуд поля моды  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0)$  и  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L)$  в серединных сечениях  $z = 0$  и  $z = L$  двух соседних фазовых корректоров в операторном виде<sup>2)</sup>

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L) = \hat{T}_{(k/2F)} \hat{G}_{(L/k)} \hat{T}_{(k/2F)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) . \quad (1)$$

Поскольку поперечные структуры поля *моды* в сечениях  $z = 0$  и  $z = L$  должны быть одинаковы, то поля  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0)$  и  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L)$  истинной моды в этих сечениях должны совпадать друг с другом с точностью до постоянного комплексного сомножителя

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L) = \tilde{p} \cdot \tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0) , \quad (2)$$

который можно назвать *коэффициентом трансформации поля моды на периоде системы*. Подставляя в левую часть (1) правую часть (2), получим интегральное уравнение

$$\tilde{p} \tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0) = \left\{ \frac{i k}{2 \pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \exp \left[ \frac{-i k |\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2L} + i k \frac{|\vec{r}'_\perp|^2 + |\vec{r}_\perp|^2}{4F} \right] d\vec{r}'_\perp \right\} , \quad (3)$$

которое называется *уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром*.

Симметрия ядра по координатам  $x$  и  $y$  позволяет искать решение интегрального уравнения (3) методом разделения переменных в виде произведения двух функций

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0) = \tilde{X}(x) \cdot \tilde{Y}(y) . \quad (4)$$

---

<sup>2)</sup> В соотношении (1) учтено, что при прохождении половины фазового корректора поле изменяется так же, как при прохождении линзы с двойным фокусным расстоянием.

Каждая из функций (4) удовлетворяет одномерному интегральному уравнению Фредгольма

$$\tilde{p}_v \tilde{V}(v) = \left\{ \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\xi) \exp \left[ -i \frac{gk}{2L} v^2 + i \frac{k}{L} v \cdot \xi - i \frac{gk}{2L} \xi^2 \right] d\xi \right\}, \quad (5)$$

в ядре которого фокусировка поля пучка корректором фазы учитывается с помощью параметра

$$g = 1 - (L / 2F), \quad (6)$$

называемого *параметром фокусировки пучка*.

Одномерное интегральное уравнение (5) можно записать более компактно в символическом операторном виде

$$\tilde{p}_v \tilde{V}(v) = {}^1\hat{T}_{gk/L}^{-1} \hat{\Phi}_{L/k} {}^1\hat{T}_{gk/L}^{-1} \tilde{V}(v'), \quad (7)$$

если по аналогии с (5.8) и (5.14) ввести одномерные операторы

$${}^1\hat{T}_{k/F} = \exp(i k v^2 / 2F) \equiv \exp(i k x^2 / 2F) \quad (8)$$

преобразования лучевой амплитуды поля тонкой цилиндрической линзой (или цилиндрической поверхностью) и

$${}^1\hat{\Phi}_{L/k} \tilde{V}(v') = \left\{ \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(v') \exp \left[ +i \frac{k}{L} v \cdot v' \right] dv' \right\} \quad (9)$$

прямого одномерного Фурье-преобразования поля в свободном пространстве.

## Пункт 2. Решения одномерного интегрального уравнения Фредгольма.

Решениями уравнения (5) являются функции Эрмита<sup>3)</sup>

$$V_m \left( \sqrt[4]{1-g^2} \sqrt{(k/L)} \cdot v \right) \equiv \bar{V} w_m(v/a_0) \equiv \bar{V} w_m(\eta) = \bar{V} H_m(\eta) \exp \left( -\frac{\eta^2}{2} \right), \quad (10)$$

в которых коэффициенты  $H_m(\eta)$  при экспоненциальном сомножителе, называемые полиномами Эрмита, определяются по правилу

$$H_m(\eta) = (-1)^m \exp(\eta^2) \frac{d^m}{d\eta^m} \langle \exp(-\eta^2) \rangle. \quad (11)$$

Несколько первых полиномов Эрмита являются достаточно простыми функциями:

$$H_0(\eta) = 1; \quad H_1(\eta) = 2\eta; \quad H_2(\eta) = 4\eta^2 - 2; \dots \quad (12)$$

<sup>3)</sup> Используя безразмерные переменные  $(\xi', \xi) = \sqrt{(k/L)} \cdot (\zeta, v)$ , показатель экспоненты в подынтегральном выражении (5) можно преобразовать к такой форме

$$\left[ -i \frac{gk}{2L} v^2 + i \frac{k}{L} v \cdot \xi - i \frac{gk}{2L} \xi^2 \right] = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{ig} \xi' - \sqrt{\frac{i}{g}} \xi \right)^2 + \frac{i}{2g} (1-g^2) \xi^2,$$

которая позволяет увидеть, что поле  $V(\xi)$  в виде гауссовой функции в соответствии с преобразованием (6.2) преобразуется в гауссову функцию и поэтому может быть решением уравнения (5).

Индекс  $m$  называется **числом функции Эрмита**  $w_m(\eta)$ . Полиномы Эрмита  $H_m(\eta)$  и соответствующие им функции Эрмита  $w_m(\eta)$  с чётным индексом  $m$  симметричны относительно  $\eta = 0$ , а с нечётным – антисимметричны.

Функции Эрмита  $w_m(\eta)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{d\eta^2}w_m(\eta) - (2m+1-\eta^2)w_m(\eta) = 0, \quad (13)$$

из которого следует, что в области

$$\eta > \eta_m \equiv \sqrt{2m+1} \quad (14)$$

они являются **экспоненциально убывающими функциями аргумента**.

### Пункт 3. Структура поля моды открытой линии передачи.

1) Поперечная структура поля моды рассматриваемой открытой линии передачи в плоскости  $z=0$  описывается произведением двух (в общем случае имеющих разные числа) функций Эрмита

$$\tilde{u}_{mn}(\vec{r}_\perp, 0) = \tilde{U}_0 w_m\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot w_n\left(\frac{y}{a_0}\right) \equiv \tilde{U}_0 H_m\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot H_n\left(\frac{y}{a_0}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a_0^2}\right), \quad (15)$$

определяющих изменение лучевой амплитуды поля по двум взаимно ортогональным направлениям  $OX$  и  $OY$ . Произведение двух функций Эрмита с индексами  $m=n=0$  описывает **структуру поля главной** (или основной) моды и представляет собой симметричный гауссов пучок<sup>4)</sup>.

2) Поверхность, за которой поле моды оказывается экспоненциально затухающим, является **каустикой**. В простейшем случае симметричной зависимости поля от поперечных координат  $m=n$  сечение каустической поверхности моды плоскостью  $z=const$  представляет собой окружность, радиус которой в сечении  $z=0$  есть

$$(r_\perp)_m \equiv a_m \equiv a_0 \eta_m = \sqrt{\frac{L}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1-g^2}} \sqrt{2m+1} \equiv a_0 \sqrt{2m+1}. \quad (16)$$

Внутри каустической поверхности сосредоточена практически вся мощность, переносимая модой.

3) Радиус каустической поверхности главной симметричной моды  $m=n=0$  совпадает с шириной  $a_0$  гауссова пучка, которая в сечении  $z=0$  в соответствии с (16) и (6) довольно сложным образом зависит от параметров  $F$  и  $L$  рассматриваемой простейшей линзовой линии

<sup>4)</sup> Метод разделения переменных координат (4) может быть применён также для расчёта мод открытых линий передачи, которые состоят из корректоров фазы (линз), имеющих разные фокусные расстояния  $F_{x,y}$  по осям  $OX$  и  $OY$ . В этом случае сечение каустической поверхности моды плоскостью  $z=const$  представляет собой эллипс, и ширина пучка главной моды различна по координатам  $x$  и  $y$ .

$$a_0^2 = \frac{L}{k \sqrt{1 - g^2}} = \frac{2LF}{k \sqrt{L(4F - L)}} \quad (17)$$

Из (16), (17) и (6) видно, что при фиксированной длине  $L$  минимальный размер *каустики* каждой моды будет в случае

$$g \equiv 1 - (L/2F) = 0 ,$$

когда  $L = 2F$ . В этом случае фокусы двух соседних линз лучевода находятся в одной точке, и поэтому такая открытая линия передачи называется *конфокальной*.

В случае  $g = 1$ , когда  $F = \infty$  и фокусировка отсутствует, а также в случае  $g = -1$ , когда  $L = 4F$  и фокусировка, наоборот, очень сильная, поперечные размеры мод теоретически оказываются бесконечно большими. Это, разумеется, означает малую пригодность таких линий для передачи энергии.

В области  $|g| > 1$ , где аргумент функций Эрмита оказывается комплексным, решение (10) уравнения (5) теряет физический смысл. При таких параметрах линзовой линии собственные функции уравнения (5) не локализованы в пространстве и поэтому квадратично не интегрируемы. «Моды», отвечающие этим решениям, нельзя возбудить по энергетическим соображениям.

Таким образом, *условием существования* энергетически реализуемых мод в исследуемой простейшей линзовой линии (с симметричным расположением квадратичных корректоров) **является условие**

$$|g| < 1 \Rightarrow 0 < L < 4F . \quad (18)$$

4) Компоненты векторной лучевой амплитуды поля моды в открытой линии передачи оптического излучения связаны друг с другом в соответствии с соотношениями (3.16) – (3.20). Поэтому поляризация электромагнитного поля имеет так называемый квазипоперечный характер: поле поляризовано практически перпендикулярно оси симметрии линии передачи, продольная компонента поля существует, но по порядку величины в соответствии с (3.18) в  $(1/\vartheta_{df})$  раз меньше поперечной составляющей. Это обстоятельство даёт основание называть моды открытой линии передачи коротковолнового электромагнитного поля **TEM<sub>mn</sub>-модами** (типами нормальных или собственных волн).

5) В пространстве внутри элементарной ячейки периодической системы, образующей открытую линию передачи, структура поля моды изменяется как за счёт коррекции фазы в линзах (или других фазовых корректорах), так и за счёт дифракционного расплывания поля пучка в области, свободной от этих элементов. Используя (5.1) и (5.8), свяжем поле  $\tilde{u}_{mn}(\vec{r}_\perp, z)$  **TEM<sub>mn</sub>-моды** в плоскости  $z \leq L$  с полем этой моды (15) в плоскости  $z = 0$  и, вычислив интеграл, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{mn}(\vec{r}_\perp, z) &= \hat{G}_{z/k} \cdot \hat{T}_{k/2F} \cdot \tilde{u}_{mn}(\vec{r}'_\perp, 0) = \\ &= \left\{ \frac{ik\tilde{U}_0}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int H_m\left(\frac{x'}{a_0}\right) H_n\left(\frac{y'}{a_0}\right) \exp\left[ \frac{-ik|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z} + ik\frac{|\vec{r}'_\perp|^2}{4F} - \frac{r'^2}{2a_0^2} \right] d\vec{r}'_\perp \right\} = (19) \end{aligned}$$

$$= \tilde{U}_0 \left\{ \left( 1 - \frac{z}{2F} \right)^2 + \left( \frac{z}{ka_0^2} \right)^2 \right\}^{-1} w_m \left( \frac{x}{a(z)} \right) w_n \left( \frac{y}{a(z)} \right) \exp \left( \frac{i k r_\perp^2}{2R(z)} + i(m+n+1)\beta(z) \right)$$

лучевую амплитуду поля моды в плоскости  $z$ , где введены обозначения

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \arccos \left\{ \left( 1 - \frac{z}{2F} \right) \Big/ \sqrt{\left( 1 - \frac{z}{2F} \right)^2 + \left( \frac{z}{ka_0^2} \right)^2} \right\}; \\ a^2(z) &= a_0^2 \left\langle \left( 1 - \frac{z}{2F} \right)^2 + \left( \frac{z}{ka_0^2} \right)^2 \right\rangle = a_0^2 \left\langle \left( 1 - \frac{z}{2F} \right)^2 + \frac{z^2(4F-L)}{4F^2L} \right\rangle; \quad (20) \\ \frac{1}{R(z)} &= \frac{2F-z\{1+(2F/ka_0^2)^2\}}{z^2(2F/ka_0^2)^2+(2F-z)^2} \equiv \frac{2F-z\{4F/L\}}{z^2\{(4F-L)/L\}+(2F-z)^2}. \end{aligned}$$

В случае главной симметричной моды  $m=n=0$  формулы (19) – (20) точно преобразуются в соответствующие выражения (5.2) – (5.4) для случая сфокусированного гауссова пучка, имеющего начальную ширину (17).

Во *втором особом сечении*  $z=(L/2)$  (*в середине пространства внутри элементарной ячейки*) рассматриваемой линзовой линии фазовый фронт моды согласно (20) оказывается плоским

$$\langle 1/R(L/2) \rangle = 0, \quad (21)$$

а ширина пучка минимальной

$$a^2 \left( \frac{L}{2} \right) = a_0^2 \left\langle \left( 1 - \frac{L}{4F} \right)^2 + \frac{L^2(4F-L)}{16F^2L} \right\rangle = a_0^2 \left\langle 1 - \frac{L}{4F} \right\rangle = a_0^2 \left\langle \frac{1+g}{2} \right\rangle = a_{\min}^2. \quad (22)$$

Таким образом, в пространстве между корректорами фазы кривизна волнового фронта моды меняется в пределах

$$\frac{1}{2F} > \frac{1}{R} > -\frac{1}{2F} \quad (23)$$

на величину  $(1/F)$ , которую компенсирует фазовый корректор, а ширина пучка изменяется от максимального значения (17) в центре фазового корректора до минимального значения (22) в середине расстояния между линзами, которая называется *перетяжкой*.

6) *Угловая расходимость* сфокусированного пучка поля главной **TEM<sub>00</sub>-моды**, выходящего из последнего фазового корректора открытой линии передачи в свободное пространство в качестве излучения эффективной антенны, в соответствии с определением (6.17) и шириной пучка (20) находится как

$$\vartheta = \sqrt{(a_0/2F)^2 + (1/ka_0)^2} = \left\{ \lambda / \pi \sqrt{L(4F-L)} \right\}^{1/2} \quad (24)$$

и оказывается минимальной

$$\vartheta_{\min} = \left\{ \lambda / 2\pi F \right\}^{1/2}$$

для конфокального резонатора ( $L=2F$ ).

## §8 Сопоставление методов расчёта и свойств ТЕМ<sub>mn</sub>-мод и собственных лучей в открытых цилиндрических линиях передачи.

Основой для сопоставления квазиоптической теории нормальных волн (TEM<sub>mn</sub>-мод) и геометрооптического метода расчёта **собственных лучей в открытых цилиндрических линиях передачи** является совершенно однозначное соответствие результатов воздействия на поле волнового пучка в квазиоптике и на координаты луча в геометрической оптике **двух главных линейных** операторов  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$  преобразования (в параксиальном приближении) характеристик распространяющегося силового поля.

### Пункт 1. Сопоставление условий существования финитных траекторий лучей и энергетически реализуемых ТЕМ<sub>mn</sub>-мод в открытых цилиндрических линиях передачи.

Рассмотрим центрированные периодические системы, в которых **лучи** обладают *первым типом поведения* (т.е. имеют траектории в ограниченной области вблизи оси системы). **Лучи** такого типа существуют только в таких открытых цилиндрических линиях передачи, у которых параметры S-матрицы элементарной ячейки периодической центрированной системы удовлетворяют условию (1.8.7). С другой стороны, **ТЕМ<sub>mn</sub>-моды** открытой цилиндрической линии передачи могут быть возбуждены и, следовательно, могут иметь практическое применение (т.е. могут рассматриваться как существующие) при выполнении условия (7.18) на величину **параметра фокусировки**  $g$ , который зависит от параметров элементов открытой линии. Покажем, что эти два условия совпадают.

Найдём условие устойчивости (условие финитного движения) **лучей** в рассматриваемой простейшей открытой линзовой линии передачи и с этой целью **определим S<sub>1</sub>-матрицу преобразования координат луча на периоде центрированной системы между плоскостями, находящимися в серединах фазовых корректоров**. Преобразуя элементы **S<sub>1</sub>-матрицы** такой элементарной ячейки периодической структуры, используем выражение (7.6) для параметра фокусировки  $g$  и в результате получим матрицу

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \hat{T}_{n/2F} \cdot \hat{G}_{L/n} \cdot \hat{T}_{n/2F} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{L}{2F} & -\frac{n}{2F} \left( 2 - \frac{L}{2F} \right) \\ \frac{L}{n} & 1 - \frac{L}{2F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & \frac{n}{L} (g^2 - 1) \\ \frac{L}{n} & g \end{vmatrix}. \quad (1) \end{aligned}$$

Из (1) следует, что в исследуемой линии передачи **лучи** имеют финитные траектории при выполнении условия устойчивости (1.8.7) в виде выражения

$$(1/2) |Sp \hat{S}| \equiv |g| < 1, \quad (2)$$

которое точно совпадает с **условием существования** энергетически реализуемых мод (7.18).

Условие (2) является фундаментальным свойством линии и не зависит от выбора **элементарной ячейки периодической системы**, использованной для расчёта S-матрицы. В частности, если в качестве таковой выбрать отрезок линии между двумя другими **особыми** плоскостями, находящимися в серединах свободного пространства между фазовыми корректорами на расстоянии  $L$  одна от другой, то новая **S<sub>2</sub>-матрица** преобразования координат луча на периоде центрированной системы будет иметь несколько иной вид

$$\hat{S}_2 = \hat{G}_{L/2n} \cdot \hat{T}_{n/F} \cdot \hat{G}_{L/2n} = \begin{vmatrix} g & (2n/L)(g-1) \\ (L/2n)(g+1) & g \end{vmatrix}, \quad (3)$$

но останутся неизменными её диагональные элементы и, значит, условие (2).

Таким образом, известное в **геометрооптическом** описании условие (1.8.7) **устойчивости** траекторий **лучей** в периодической центрированной системе трансформируется в **квазиоптической** теории в условие (7.18) **существования энергетически реализуемых мод** в цилиндрической открытой линии передачи.

## Пункт 2. Сопоставление свойств геометрооптических и квазиоптических операторов преобразования характеристик распространяющегося поля.

Как отмечалось ранее (§6 части ГО и §6 части Квазиоптика), оба **главных линейных** оператора  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$ , с помощью которых в геометрооптическом и квазиоптическом приближениях описываются преобразования характеристик распространяющихся параксиальных пучков силового поля в свободном пространстве и на тонкой линзе, обладают свойством аддитивности

$$1) \quad \hat{G}_a + \hat{G}_b = \hat{G}_{a+b}; \quad \hat{T}_a + \hat{T}_b = \hat{T}_{a+b}, \quad (5.10)$$

а также связаны простыми соотношениями<sup>1)</sup>

$$2) \quad \hat{G}_a^{-1} = \hat{G}_{-a} = \hat{G}_a^*; \quad \hat{T}_b^{-1} = \hat{T}_{-b} = \hat{T}_b^*, \quad (5.13)$$

с обратными себе операторами  $\hat{G}_a^{-1}$  и  $\hat{T}_b^{-1}$ .

3) В недиафрагмированном случае и в средах без диссипации квазиоптические операторы  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$  не вносят потерь, и в преобразованных с их участием полях сохраняется энергия. В таких консервативных системах (для материальных частиц в механике) или средах без потерь (для силовых полей) согласно **теореме Лиувилля** сохраняется фазовый объём и соответственно нормы матриц  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$  равны единице.

4) На фундаментальных свойствах **линейных** матричных операторов  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$  основана **алгебра линейных матричных преобразований координат луча**, представленная таблицей матричных тождеств (1.6.38). Поскольку **квазиоптиче-**

<sup>1)</sup> Вторые равенства в (5.13), полностью справедливые для квазиоптических операторов, верны и для матриц геометрической оптики, если последние имеют только действительные элементы.

ские операторы  $\hat{G}_a$  и  $\hat{T}_b$  имеют такие же фундаментальные свойства, то это означает, что должны существовать квазиоптические аналоги матричных преобразований и что таблица матричных тождеств (1.6.38) может без изменений использоваться в расчётах квазиоптических полей, если под используемыми в таблице символами иметь в виду квазиоптические операторы (5.1), (5.8) и (5.14).

5) В *квазиоптической теории* распространения полей в открытых цилиндрических линиях передачи **фундаментальное значение** имеет уравнение Фредгольма второго рода (7.5), поскольку его решения описывают структуры полей распространяющихся мод. Роль ядра этого уравнения играет *квазиоптический оператор*  $\hat{K}^{FE}$  симметричного типа<sup>2)</sup>. В символической форме (7.7) оператор  $\hat{K}^{FE}$  можно представить в виде трёх последовательных преобразований

$$\hat{K}^{FE} = \hat{T}_{\bar{g} k / \bar{l}}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\bar{l} / k} \cdot \hat{T}_{\bar{g} k / \bar{l}}^{-1}, \quad (4)$$

в которых  $\bar{g}$  является эффективным параметром фокусировки, а  $\bar{l}$  - эквивалентной длиной ячейки периодической системы.

Найдём геометрооптический аналог этого преобразования в виде соответствующей симметричной S-матрицы в канонической форме

$$\begin{aligned} \hat{S}^{KFE} &= \hat{T}_{\bar{g} n / \bar{l}}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{\bar{l} / n} \cdot \hat{T}_{\bar{g} n / \bar{l}}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{g}(n / \bar{l}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -(n / \bar{l}) \\ (\bar{l} / n) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \bar{g}(n / \bar{l}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{g} & (n / \bar{l})(\bar{g}^2 - 1) \\ (\bar{l} / n) & \bar{g} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из сопоставления выражений (5) и (1) видно, что матрицы  $\hat{S}^{KFE}$  и  $\hat{S}_1$  полностью совпадут, если

$$\bar{g} = g \equiv g_1 \quad ; \quad \bar{l} = L \equiv l_{ef_1} \quad . \quad (6)$$

Сопоставляя (5) и (3), найдём, что вторая симметричная матрица  $\hat{S}_2$  нашей лучеводной линии также принимает каноническую форму матрицы  $\hat{S}^{KFE}$ , если

$$\bar{g} = g \equiv g_2 \quad ; \quad \bar{l} = (L / 2)(1 + g) \equiv l_{ef_2} \quad . \quad (7)$$

Попробуем апробированным выше способом с использованием связи

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L) = \hat{G}_{(L/2k)} \cdot \hat{T}_{(k/F)} \cdot \hat{G}_{(L/2k)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \equiv \hat{K}_2^{FE} \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \quad (8)$$

между лучевыми амплитудами  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0)$  и  $\tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, L)$  поля моды в особых сечениях  $z = 0$  и  $z = L$ , находящихся в середине пространства между линзами, получить ещё одно интегральное уравнение<sup>3)</sup> для рассматриваемой линии передачи и найти его симметричное ядро  $\hat{K}_2^{FE}$ . Используя **квазиоптические аналоги** тождеств №9 и №12 таблицы (1.6.38) матричных тождеств, следует преобразовать

<sup>2)</sup> Обозначение оператора связано с аббревиатурой английских терминов kernel Fredgolms equation (ядро уравнения Фредгольма).

<sup>3)</sup> Оно должно содержать столь же полную информацию о ТЕМ<sub>mn</sub>-модах рассматриваемой открытой цилиндрической линии передачи, как и уравнение (7.3).

*квазиоптический оператор*  $K_2^{FE}$  к канонической форме (4). Проделав эти преобразования, получим каноническую форму  $K_2^{FE}$  в виде

$$\hat{K}_2^{FE} = \hat{T}_{g k / l_{ef} 2}^{-1} \cdot \hat{\Phi}_{l_{ef} 2 / k} \cdot \hat{T}_{g k / l_{ef} 2}^{-1},$$

где параметры  $g$  и  $l_{ef} 2$  точно совпадают с (7). При эффективной длине  $l_{ef} 2 = (L / 2)(1 + g)$  в соответствии с (7.17) ширина пучка **TEM<sub>00</sub>-моды** в плоскости, находящейся в середине расстояния между линзами, будет равна

$$a_{02}^2 = \frac{l_{ef} 2}{k \sqrt{1 - g^2}} = \frac{L}{k \sqrt{1 - g^2}} \left\langle \frac{1 + g}{2} \right\rangle \equiv a_0^2 \left\langle \frac{1 + g}{2} \right\rangle \equiv a_{min}^2. \quad (9)$$

Эта величина точно совпадает с шириной основной моды (7.22), которая была определена как минимальная ширина сфокусированного линзой пучка в середине свободного пространства между фазовыми корректорами.

Основные выводы из материала этого пункта заключаются в следующем.

1) Матричные тождества (1.6.38) полностью применимы при преобразованиях аналогичных квазиоптических операторов.

2) В каждой цилиндрической линии передачи существуют *особые симметрично расположенные сечения, в которых мода имеет плоский фазовый фронт*. В силу этой симметрии они с наибольшей эффективностью могут быть использованы в качестве опорных плоскостей для получения интегральных уравнений Фредгольма (с симметричным ядром), решения которых описывают поперечное распределение поля в **TEM<sub>mn</sub>-модах**. Все такие уравнения Фредгольма эквивалентны друг другу и содержат совершенно одинаковую по своей полноте информацию о **TEM<sub>mn</sub>-модах** конкретной открытой линии передачи.

3) *Квазиоптическому оператору* (4) как симметричному ядру интегрального уравнения Фредгольма (7.5) полностью эквивалентен **канонический матричный оператор** (5), что в необходимых случаях позволяет использовать матричные преобразования для определения параметров  $\bar{g} = g$  и  $\bar{l} = l_{ef}$  открытой цилиндрической линии передачи и далее для определения ширины пучка в *особом сечении*.

### Пункт 3. Сопоставление характеристик квазиоптических TEM<sub>mn</sub>-мод и геометрооптических собственных лучей как сравнение свойств собственных волн открытых цилиндрических линий передачи на разных уровнях описания распространения поля в среде

1. В цилиндрических линиях передачи каждая **собственная** (или **нормальная**) **волна**, называемая **модой**, имеет два свойства, отличающих её от других мод. Одним из этих свойств является **индивидуальная структура поля** моды, т.е. **зависимость всех компонент поля** от координат.

При распространении волн вблизи продольно однородных цилиндрических поверхностей (металлические и диэлектрические волноводы, полосковые и коаксиальные линии, импедансные поверхности и пр.) поля мод зависят только от поперечных координат. Компоненты поля моды связаны между собой однозначными соотношениями, поэтому структура поля моды в таких цилиндрических лини-

ях передачи считается однозначно определённой, если известна зависимость от координат одного из компонентов поля.

*Кв)* В линзовых и других цилиндрических открытых линиях передачи с фазовыми корректорами структура поля **TEM<sub>mn</sub>-моды** повторяется только через период. В особых сечениях открытой цилиндрической линии передачи, где поле **TEM<sub>mn</sub>-моды** имеет плоский фазовый фронт, зависимость компонент лучевой амплитуды поля от поперечных координат описывается произведением функций Эрмита, являющихся решениями интегрального уравнения Фредгольма (7.3). В пространстве между корректорами фазы и при прохождении корректоров поле изменяется. Поле основной **TEM<sub>00</sub>-моды** трансформируется как поле сфокусированного гауссова пучка. Поперечные и продольные компоненты векторной лучевой амплитуды электромагнитного поля **TEM<sub>mn</sub>-моды** связаны между собой одним дифференциальным соотношением (3.16). В результате этой связи продольные компоненты оказываются существенно меньше поперечных, и поэтому поляризация поля **TEM<sub>mn</sub>-моды** называется квазипоперечной. Соотношение (3.16) никак не связывает между собой амплитуды двух ортогонально поляризованных поперечных компонент напряжённости электрического (или магнитного) поля и не накладывает никаких ограничений на их величину. Поэтому **TEM<sub>mn</sub>-мода** в линзовой линии передачи коротковолнового электромагнитного излучения может иметь две независимые поляризации или две ортогонально поляризованные структуры поля.

*Г)* Собственные лучи согласно (1.8.4) – (1.8.13) представляют собой два типа собственных вектор-столбцов  $\vec{Q}_{1,2}$  цилиндрической линии передачи. Собственных лучей бесчисленное множество. Поперечной составляющей  $(n\vec{s}_\perp)_0 \equiv n\vec{\sigma}$  лучевого вектора, который выходит из произвольной точки, имеющей поперечные координаты  $(\vec{r}_\perp)_0 \equiv \vec{\rho}$  в плоскости  $z = 0$ , можно поставить в соответствие два собственных вектор-столбца  $\vec{Q}_{1,2}$ . В каждом собственном вектор-столбце  $\vec{Q}_{1,2}$  отношение поперечных компонент лучевого вектора  $(n\vec{s}_\perp)_{1,2}$  и вектора  $(\vec{r}_\perp)_{1,2}$ , характеризующего смещение луча в поперечном (по отношению к оси симметрии) направлении, регламентируется свойствами S-матрицы элементарной ячейки периодической центрированной системы.

Поскольку элементы S-матрицы зависят от выбора начального сечения элементарной ячейки периодической центрированной системы, то для более наглядного сопоставления **TEM<sub>mn</sub>-мод** и двух собственных лучей в качестве плоскости  $z = 0$  выберем одно из **особых сечений** открытой линии передачи. В этом случае S-матрица будет иметь каноническую форму (5), а поперечные компоненты вектор-столбцов  $\vec{Q}_{1,2}$  в выбранном **особом сечении** линии передачи согласно (1.8.13) - (1.8.15) будут связаны соотношениями<sup>4)</sup>

---

<sup>4)</sup> Если в качестве элементарной периодической ячейки линии передачи выбрать элемент линии с начальной плоскостью, находящейся на произвольном расстоянии  $z$  от линзы, то соответствующая S-матрица будет иметь несимметричную форму

$$(n\vec{s}_\perp)_{1,2} = \pm i \frac{n}{l} \sqrt{1-g^2} \bullet (\vec{r}_\perp)_{1,2} = \pm i \frac{n}{l} \sqrt{1-g^2} \bullet \frac{1}{2} \left\langle \vec{\rho} \mp i \frac{\bar{l} \vec{\sigma}}{\sqrt{1-g^2}} \right\rangle. \quad (10)$$

Из (10) видно, что основными характеристиками *собственного луча* являются угол *собственного лучевого вектора* с осью системы

$$\theta_{1,2} \cong |(\vec{s}_\perp)_{1,2}| = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + \frac{\rho^2}{l^2} (1 - \bar{g}^2)} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g_{eo}^2 + g_{df}^2} \quad (11)$$

и *собственное эффективное смещение от оси системы*

$$|(\vec{r}_\perp)_{1,2}| = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + l^2 \frac{\sigma^2}{1-g^2}}. \quad (12)$$

Именно они характеризуют поперечную структуру того поля, которое может ассоциироваться с *собственным лучом*.

Векторное поле, которое описывает *собственный луч* открытой линии передачи, в соответствии с уравнениями нулевого приближения *го* должно быть поляризовано ортогонально лучевому вектору, и поэтому в параксиальном приближении, в котором справедливо матричное описание распространения лучей, оно должно иметь поляризацию, ортогональную оси системы.

2. Вторым основным свойством *моды (собственной волны)* цилиндрической линии передачи является величина постоянной распространения фазового фронта волны в направлении оси системы  $h$  или однозначно связанная с ней соотношением

$$v_f = (\omega / h) \quad (13)$$

величина скорости перемещения поверхности постоянной фазы.

*Кв0*) При определении постоянной распространения **TEM<sub>mn</sub>-моды** необходимо учитывать полное изменение фазы, включая изменение фазы комплексной лучевой амплитуды поля пучка. Поскольку при распространении в свободном пространстве изменяется кривизна фазового фронта и, следовательно, скорость его распространения, то постоянную распространения  $h_{mn}$  следует определить по величине полного изменения фазы поля на длине  $L$  периодического элемента открытой линии передачи из соотношения

$$\exp\{-i[\varphi_{mn}(L) - \varphi_{mn}(0)]\} \equiv \exp\{-ih_{mn}L\} = \exp\{i[-kL + \Delta\varphi_{mn}^0(L)]\}, \quad (14)$$

$$\hat{S}_2 = \hat{G}_{z/n} \cdot \hat{T}_{n/F} \cdot \hat{G}_{(L-z)/n} = \begin{vmatrix} 1 - \langle (L-z)/F \rangle & -(n/F) \\ (L/n) \{ 1 - \langle z(L-z)/LF \rangle \} & 1 - \langle z/F \rangle \end{vmatrix}.$$

Соответственно изменяются пары поперечных компонент двух разных *собственных лучей*

$$\begin{aligned} (n\vec{s}_\perp)_{1,2} &= \frac{-(n/F) \bullet (\vec{r}_\perp)_{1,2}}{1 - \langle (L-z)/F \rangle - g \mp i \sqrt{1-g^2}} = \\ &= \left( \frac{-n}{2F} \right) \cdot \frac{\bar{\rho} \mp i \{ [1 - (z/F) + (z^2/LF)] L \vec{\sigma} + [1 - (z/F) - g] \vec{\rho} \}}{1 - \langle (L-z)/F \rangle - g \mp i \sqrt{1-g^2}} \quad \text{и, следо-} \\ &\quad \text{вательно, характеристики их поперечной структуры поля.} \end{aligned}$$

в котором  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  описывает изменение на периоде системы фазы комплексной лучевой амплитуды поля, а  $kL$  представляет собой разность фаз между волновыми фронтами, находящимися на расстоянии  $L$  по направлению изменения эйконала. В качестве граничных плоскостей периодического элемента линии передачи следует выбирать особые сечения, в которых фазовый фронт является плоскостью, перпендикулярной оси системы и, следовательно, направлению изменения эйконала.

Чтобы установить вклад  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  лучевой амплитуды в полное изменение фазы на периоде системы (14), следует найти собственные значения  $\tilde{p}_{mn}$  интегрального уравнения Фредгольма (7.3). Из общей теории решения интегральных уравнений типа (7.3) известно, что собственным функциям (7.10) одномерного уравнения Фредгольма (7.5) соответствуют собственные значения

$$\tilde{p}_m = \left( g + i \sqrt{1 - g^2} \right)^{m+0.50} \equiv \exp \{ i(m+0.50) \arccos g \}. \quad (15)$$

Лучевая комплексная амплитуда поля **TEM<sub>mn</sub>-моды**, зависящая от двух поперечных декартовых координат как произведение двух функций Эрмита (7.10), на периоде системы изменяется в

$$\tilde{p}_{mn} = \tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n = \left( g + i \sqrt{1 - g^2} \right)^{m+n+1} \equiv \exp \{ i(m+n+1) \arccos g \} \quad (16)$$

раз. Именно эта величина была названа *коэффициентом преобразования лучевой комплексной амплитуды поля на периоде системы*.

Аргумент коэффициента  $\tilde{p}_{mn}$  является вкладом  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  лучевой амплитуды в полное изменение фазы поля на периоде системы. Выражая  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  из (16) и подставляя в (14), найдём аналитическое выражение постоянной распространения **TEM<sub>mn</sub>-моды** в цилиндрической линии передачи:

$$h_{mn} = k - (1/L)(m+n+1) \arccos g. \quad (17)$$

Из (17) видно, что  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  уменьшает постоянную распространения **TEM<sub>mn</sub>-моды** и что абсолютная величина  $\Delta\phi_{mn}^0(L)$  растёт с ростом фокусировки поля в линии (уменьшением параметра фокусировки  $g$  в диапазоне его изменения  $-1 < g < 1$ ). Это означает, что **TEM<sub>mn</sub>-моды** являются быстрыми волнами ( $h_{mn} < k$ ) и что их фазовые скорости увеличиваются с ростом фокусировки (уменьшением  $g$ ).

*Го*) Постоянная распространения *собственных лучей* (как геометрооптических мод) вдоль оси центрированной системы в используемом параксиальном приближении точно равна волновому числу  $k$ .

## §9. Обобщения и приложения квазиоптической теории ТЕМ<sub>mn</sub>-мод открытых цилиндрических линий передачи.

### Пункт 1. Открытая линия передачи из эквидистантно расположенных двухфокусных корректоров фазы.

В рамках изложенной теории можно получить полное решение задачи о **ТЕМ<sub>mn</sub>-модах** открытой линии передачи, в которой эквидистантно расположенные одинаковые линзы (Рис. 14) или отражающие под большим углом  $\alpha$  сферические зеркала (Рис. 16) имеют разные фокусные расстояния по каждой из двух взаимно ортогональных координатных осей  $OX$  и  $OY$ . Квазиоптический оператор преобразования лучевой амплитуды поля параксиального пучка на такой двухфокусной линзе будет иметь вид

$$\hat{T}_{k/\hat{F}} = \exp\left(i \frac{k x^2}{2 F_x} + i \frac{k y^2}{2 F_y}\right). \quad (1)$$

Подобное (7.3) интегральное уравнение Фредгольма будет иметь индивидуальное симметричное ядро по каждой поперечной координате. Поиск его решения методом разделения переменных (7.4) приведёт к двум одномерным интегральным уравнениям Фредгольма типа (7.5), симметричные ядра которых будут иметь различные параметры фокусировки пучка

$$g_{x,y} = 1 - (L / F_{x,y}). \quad (2)$$

Распределение поля **ТЕМ<sub>mn</sub>-моды** по поперечным координатам будет описываться произведением двух функций Эрмита, в каждой из которых переменные будут нормированы на собственную ширину пучка основной моды

$$(a_0)_{x,y} = \left\{ L / k \sqrt{1 - g_{x,y}^2} \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Сечение каустической поверхности главной **ТЕМ<sub>00</sub>-моды** плоскостью  $z = 0$  будет иметь вид эллипса, имеющего полуоси  $(a_0)_{x,y}$ . Поле главной **ТЕМ<sub>00</sub>-моды**, выходящее из линии передачи в свободное пространство, в соответствии с (8.24) будет иметь различную угловую расходимость в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ .

### Пункт 2. Открытая линия передачи из эквидистантно расположенных двух типов разнофокусных линз.

Важную роль в приложениях квазиоптической теории открытых линий передачи и открытых двухзеркальных резонаторов (Рис. 1.37) играет лучеводная линия (Рис. 17), в которой все нечётные линзы имеют фокусное расстояние

$F_1 = (R_1 / 2)$ , а все чётные – фокусное расстояние  $F_2 = (R_2 / 2)$ . Пространственный период этой линии равен  $2L$ , и для получения интегрального уравнения следует преобразовать поле из одного **особого сечения**, в

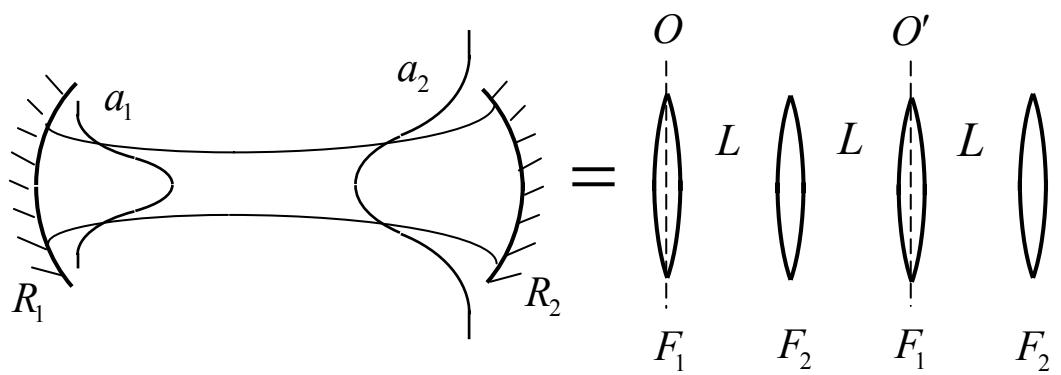


Рис. 2.17

котором поверхность фазового фронта поля **TEM<sub>mn</sub>-моды** является плоскостью, в аналогичное сечение, находящееся на расстоянии  $2L$ . Если линзы обоих типов фокусирующие, то в этой линии в пределах одного пространственного периода должно быть четыре **особых сечения**: два в серединах линз и два в промежутках между ними.

В качестве начального **особого сечения** следует выбрать середину линзы, поскольку в этом случае определение ядра уравнения Фредгольма оказывается более простым. Расчёт ядра интегрального уравнения можно осуществить двумя способами: преобразованием комбинации квазиоптических операторов с помощью тождеств (1.6.38) или прямым перемножением матриц-операторов и последующим определением по полученной канонической матричной форме её квазиоптического аналога. Выбирая второй вариант, получим

$$\hat{T}_{\frac{n}{2F_1}} \cdot \hat{G}_{\frac{L}{n}} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{F_2}} \cdot \hat{G}_{\frac{L}{n}} \cdot \hat{T}_{\frac{n}{2F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{F_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \hat{S}_{11} = \begin{vmatrix} 2g_1g_2 - 1 & \frac{n}{L} 2g_1(g_1 g_2 - 1) \\ 2g_2 \frac{L}{n} & 2g_1g_2 - 1 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где

$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{2F_{1,2}} \equiv 1 - \frac{L}{R_{1,2}} ; \quad g = 2g_1g_2 - 1 . \quad (5)$$

Прежде всего, исследуем область устойчивость этой открытой линии передачи, которая согласно (1.8.7) определяется из условий

$$0 < \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) < 1 . \quad (6)$$

С этой целью изобразим (Рис. 18) на плоскости параметров  $g_1, g_2$  границы условий (6). Границами области устойчивости будут оси координат  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 0$

и две ветви гиперболы  $g_2 = \left(1 / g_1\right)$ . При изменении длины резонатора изображающая точка на плоскости  $g_1, g_2$  будет перемещаться по прямой линии, начало которой ( $L = 0$ ) находится на ветви гиперболы и имеет координаты  $g_1 = g_2 = 1$ . Изображающая точка достигнет второй ветви гиперболы, когда длина резонатора будет равна  $L = R_1 + R_2$ . Она будет иметь координаты  $g_1 = -(R_2 / R_1)$  и  $g_2 = -(R_1 / R_2)$ . В промежутке между этими предельными (для устойчивости) значениями длины резонатора находится область  $R_1 < L < R_2$ , где система также оказывается неустойчивой.

**Общая симметрия** системы позволяет получить вторую каноническую форму  $S$ -матрицы без детального преобразования матриц-операторов на пространственном периоде  $2L$ , начало которого находится во

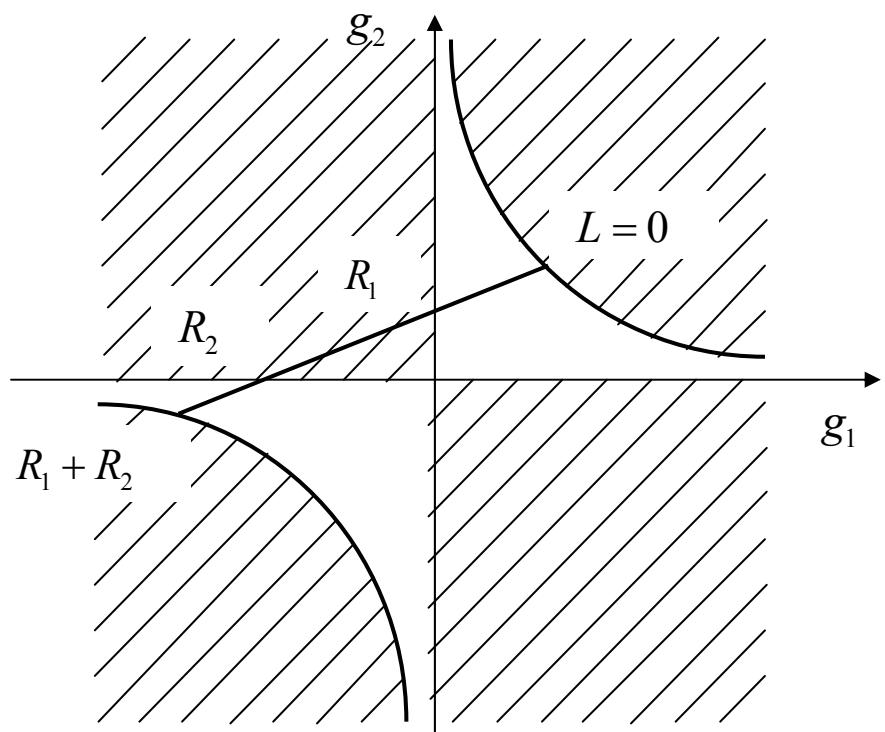


Рис. 2.18

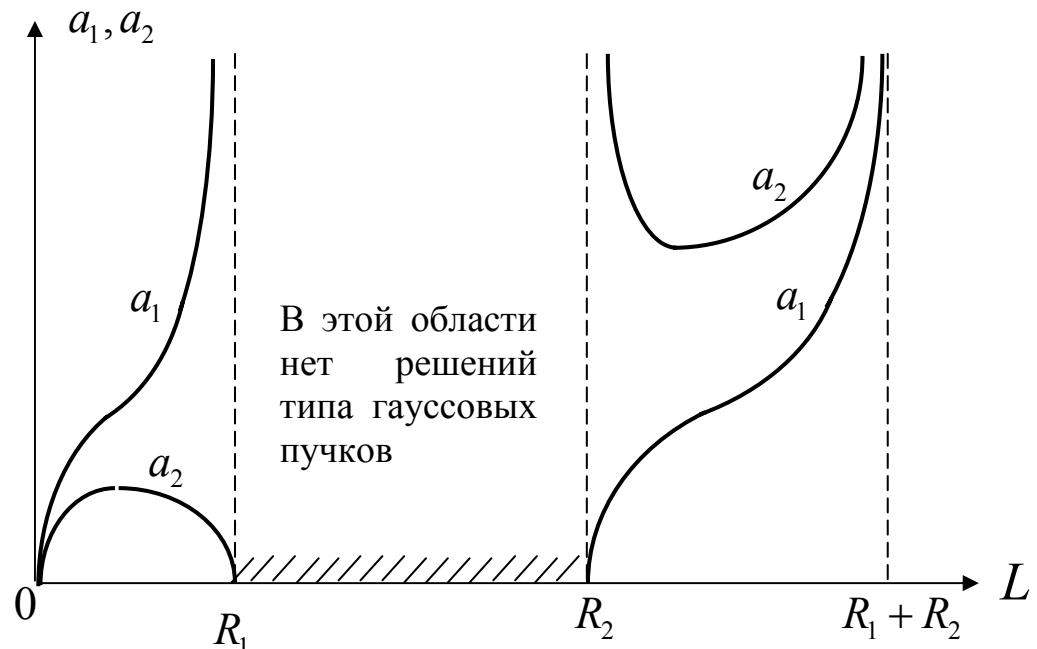


Рис. 2.19

втором **особом сечении** в середине линзы  $F_2$ . Матрица  $\hat{S}_{22}$  получается из матрицы  $\hat{S}_{11}$  простой заменой индексов  $1 \Leftrightarrow 2$ . Используя (8.7) – (8.9) и получен-

ные канонические матрицы  $\hat{S}_{11}$ ,  $\hat{S}_{22}$ , найдём размеры пучка главной **TEM<sub>00</sub>-моды** на поверхностях линз  $F_{1,2}$  (зеркалах резонатора  $R_{1,2}$ )

$$a_{1,2}^2 = \left( 2Lg_{2,1} / k\sqrt{1-g^2} \right) = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{k\sqrt{R_1 + R_2 - L}} \cdot \sqrt{\frac{1 - (L/R_{2,1})}{1 - (L/R_{1,2})}} . \quad (7)$$

Типичные зависимости величин  $a_{1,2}$  от  $L$  изображены на Рис. 2.19.

### Пункт 3. Открытая линия передачи в виде двойной периодической последовательности одинаковых линз.

Важную роль в приложениях квазиоптической теории открытых линий передачи и открытых двухзеркальных резонаторов с размещенными в них оптическими элементами (корректорами фазы) играет лучеводная линия (Рис. 2.20), в

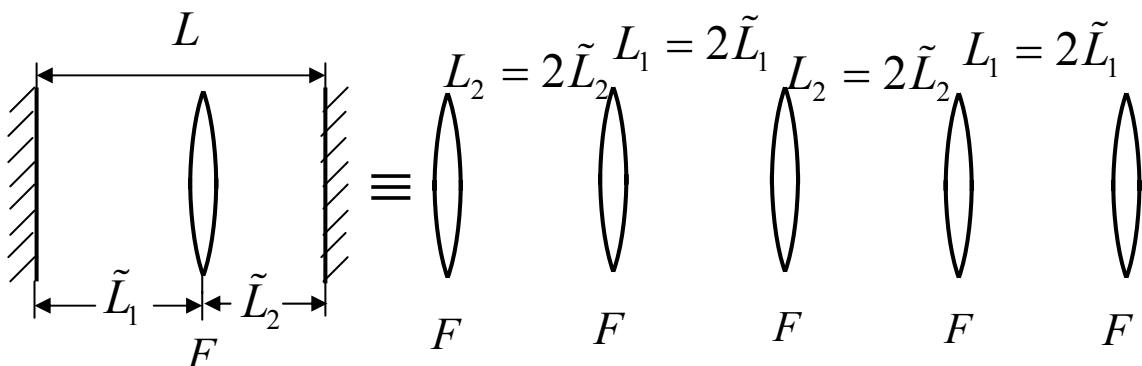


Рис. 2.20

которой все линзы, имеющие одинаковое фокусное расстояние  $F$ , расположены вдоль оси системы в виде двойной периодической последовательности, так что расстояния по направлению распространения **луча** от чётных по номеру линз до нечётных равны  $L_1$ , а расстояния от нечётных до чётных равны  $L_2$ . Метод последовательных отражений **луча** от зеркал резонансной системы позволяет увидеть эквивалентность свойств мод такой лучеводной линии<sup>1)</sup> и открытого резонатора, изображённого на Рис. 2.20. Поэтому по свойствам мод, являющихся собственными волнами в линзовой линии и собственными колебаниями открытого резонатора, обе периодические системы должны быть полностью эквивалентны.

Одной из важнейших практических задач является определение области устойчивости резонатора, имеющего фиксированную длину, при изменении положения линзы в нём, т.е. при выполнении условия

$$\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = L = \text{const} \Rightarrow \Rightarrow 2\tilde{L}_1 + 2\tilde{L}_2 \equiv L_1 + L_2 = 2L . \quad (8)$$

Для получения ядра интегрального уравнения или канонической матричной формы этого ядра следует преобразовать поле из одного **особого сечения**, в котором поверхность фазового фронта поля **TEM<sub>mn</sub>-моды** является плоскостью, в аналогичное сечение, находящееся на расстоянии пространственного периода этой ли-

<sup>1)</sup> Лучеводная линия на Рис. 2.20 может быть представлена в виде двух одинаковых периодических (с периодом  $2L$ ) последовательностей линз  $F$ , которые размещены вдоль оси системы и сдвинуты одна относительно другой на расстояние  $2\tilde{L}_1$ .

нии, равного  $2L$ . В этой линии в пределах одного пространственного периода находятся два **особых сечения** в серединах расстояний между линзами (на местах плоских зеркал резонатора), и поэтому в качестве начального **особого сечения** следует выбрать одно из них. Используя прямое перемножение матриц<sup>2)</sup>, получим

$$\hat{G}_{(\tilde{L}_1/n)} \hat{T}_{(n/F)} \hat{G}_{(2\tilde{L}_2/n)} \hat{T}_{(n/F)} \hat{G}_{(\tilde{L}_1/n)} = \hat{S}_{11} = \begin{vmatrix} 2g_1 g_2 - 1 & -\frac{n}{F} 2g_2 \\ 2g_1 \frac{\tilde{L}_1 g_2 + \tilde{L}_2}{n} & 2g_1 g_2 - 1 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$g_{1,2} = 1 - \frac{\tilde{L}_{1,2}}{F};$$

$$g = 2g_1 g_2 - 1.$$

(10)

Выражая  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{L}_2$  из соотношений (10) и подставляя их в (8), получим

$$g_1 + g_2 = 2 - \frac{L}{F}$$

(11)

уравнение траектории, по которой будет перемещаться на плоскости  $g_1$   $g_2$  изображающая точка при изменении положения линзы в резонаторе. Из (11) следует, что траекторией будет прямая. Диаграмма областей устойчивости положений линзы в ре-

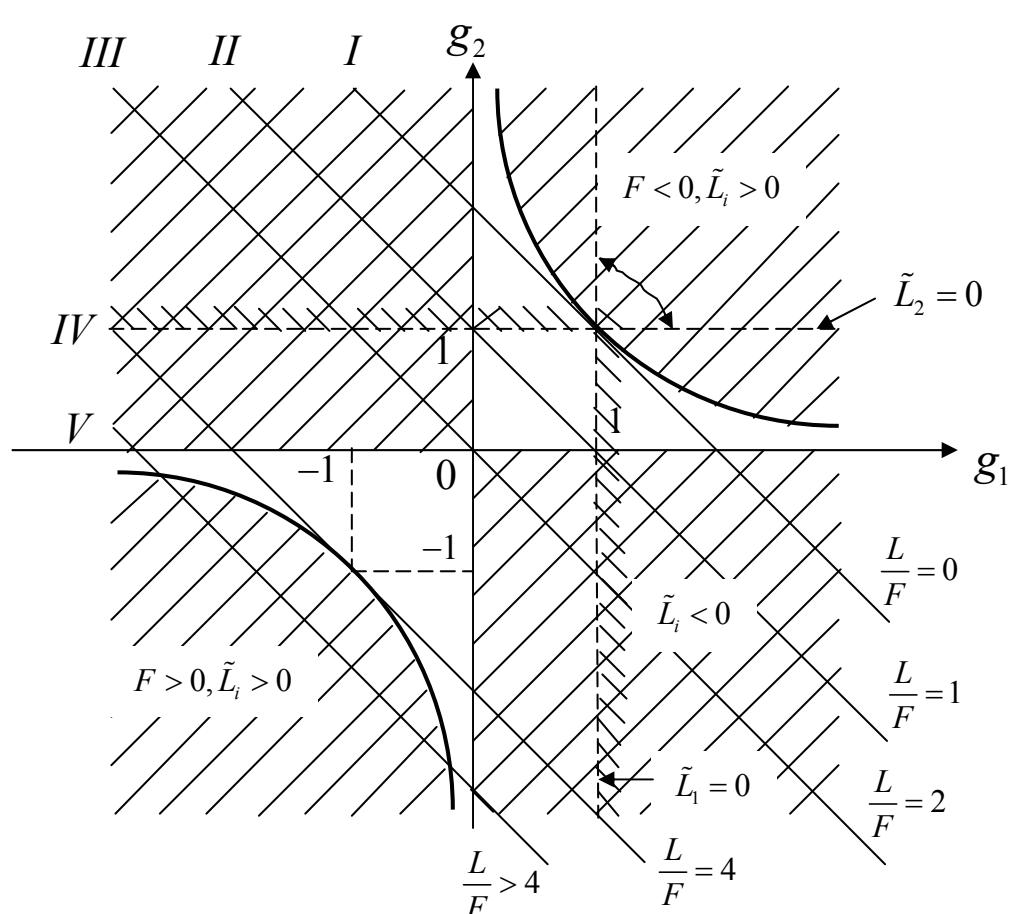


Рис. 2.21

<sup>2)</sup> Расчёт ядра интегрального уравнения можно осуществить с помощью преобразований (1.6.38) комбинации квазиоптических операторов. В частности, к успеху приводит двойное применение тождества №12 из таблицы матричных тождеств (1.6.38). Можно воспользоваться эквивалентными преобразованиями (1.6.39) – (1.6.43) и преобразовать матрицу периодического элемента линии передачи, изображённой на Рис. 2.20, в матрицу периодического элемента исследованной линии передачи, изображённой на Рис. 2.17. Эквивалентные преобразования не могут повлиять на устойчивость системы, поэтому их использование вполне правомерно. Однако в рассматриваемом случае прямое перемножение матриц-операторов (третий способ) оказывается существенно менее трудоёмким способом и потому наиболее эффективным.

зонаторе (Рис. 2.21) изображена на плоскости  $g_1 g_2$ . Заштрихованные области диаграммы – области неустойчивости. Заштрихованные прямые  $\tilde{L}_1 = 0$  ( $g_1 = 1$ ) и  $\tilde{L}_2 = 0$  ( $g_2 = 1$ ) соответствуют положениям линзы у стенок резонатора. При смещении линзы вдоль оси резонатора изображающая точка на плоскости  $g_1 g_2$  перемещается по прямой (11), расположение которой на этой плоскости определяется отношением  $(L/F) \equiv \alpha$ . Хотя области устойчивости на Рис. 2.21 определены, необходима дополнительная аналитическая расшифровка ответа на вопрос о том, на каком расстоянии

$$x = (\tilde{L}_1 / F), \quad (12)$$

от первого зеркала может находиться линза при фиксированном значении безразмерной длины  $(L/F) \equiv \alpha$  резонансной полости. Для этого необходимо дополнительное аналитическое исследование условия устойчивости (1.8.7), которое в безразмерных переменных имеет вид

$$0 \leq (1-x) \cdot (1-\alpha+x) \leq 1. \quad (13)$$

Условие правого неравенства (13) выполняется для всех действительных значений  $x$ , за исключением  $x$ , находящихся внутри области, границы которой

$$x_{3,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha} \quad (14)$$

имеют реальные (действительные) значения только при  $\alpha \geq 4$ . Таким образом, правое неравенство (13) не накладывает ограничений на положение линзы в резонаторе, относительная длина которого не очень велика ( $\alpha \leq 4$ ).

Левое неравенство (13) выполняется для всех значений  $x$ , которые в случае «длинного» резонатора ( $\alpha \geq 2$ ) находятся внутри диапазона значений

$$x_1 \equiv 1 \leq x \leq \alpha - 1 \equiv x_4, \quad (15)$$

а в случае малой относительной длины  $\alpha \leq 2$  резонатора, когда  $x_4 < x_1$ , – внутри диапазона значений

$$x_1 \equiv 1 \geq x \geq \alpha - 1 \equiv x_4. \quad (16)$$

Анализируя совместность этих двух условий, необходимо учитывать, что реальные пределы изменения  $x$  ограничены относительной длиной резонатора. Рассмотрим частные случаи отношения  $(L/F) \equiv \alpha$ , полагая, что длина резонатора растёт (или уменьшается фокусное расстояние линзы).

a). В случае

$$0 < \alpha < 1 \quad (a)$$

линза может находиться в любом сечении резонатора, и при этом резонатор будет устойчив.

б). В случае

$$1 < \alpha < 2 \quad (\delta)$$

области устойчивых и неустойчивых положений линзы в резонаторе указаны на Рис. 2.22.

в) В случае

$$\alpha = 2 \quad (\varepsilon)$$

имеется единственное устойчивое положение линзы в середине резонатора (изображающей точки на плоскости  $g_1, g_2$  в начале координат). При иных положениях линзы резонатор оказывается неустойчивым.

г). В случае

$$2 < \alpha < 4 \quad (\zeta)$$

резонатор устойчив, если линза располагается вблизи середины резонатора (Рис. 2.23).

д). В случае

$$\alpha > 4 \quad (\delta)$$

резонатор будет устойчив, если

линза находится в одной из двух указанных на Рис. 2.24 областей. На границе области устойчивости (2) выполняется соотношение

$$\frac{1}{\tilde{L}_1} + \frac{1}{\tilde{L}_2} = \frac{1}{F}, \quad (17)$$

которое означает, что одно зеркало изображается во втором, и наоборот.

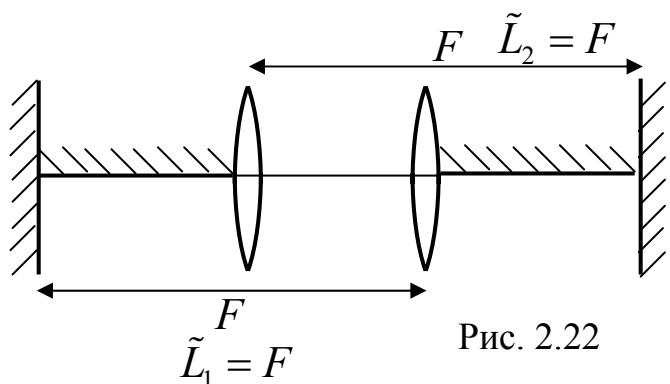


Рис. 2.22



Рис. 2.23

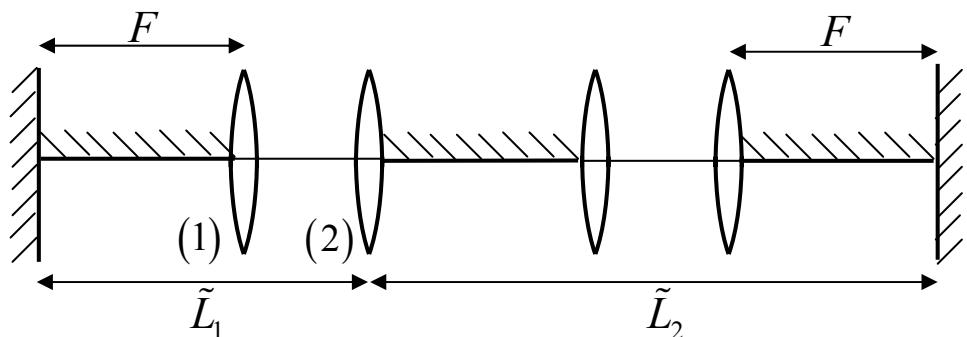


Рис. 2.24

#### Пункт 4. Открытые линии передачи с потерями.

Полученные выше теоретические результаты легко обобщаются на линии передачи с потерями энергии в приближении малой диссипации, когда можно считать неизменными структуры полей распространяющихся мод.

Потери в линии могут быть сосредоточенными в некоторых сечениях<sup>1)</sup> (или распределёнными на некоторых участках) в каждой отдельной ячейке периодиче-

<sup>1)</sup> Например, плоскопараллельная пластинка под углом к оси резонатора, выводящая из полости часть энергии наружу, или в эквивалентной открытой линии передачи в каждом из промежутков между корректорами фазы находится по одной плоскопараллельной пластинке, ориентированной под некоторым углом к оси на пути пучка излучения.

ской системы, а также распределёнными по всему свободному пространству вдоль всей цилиндрической системы. Учёт потерь сводится к изменению комплексного коэффициента  $\tilde{p}_{mn}$  трансформации лучевой амплитуды поля моды на периоде открытой линии передачи. Изменение  $\tilde{p}_{mn}$  будет состоять в том, что наряду с фазовым сомножителем, который определяется правой частью выражения (8.16), появляется дополнительный амплитудный сомножитель  $\tau$ , который по модулю меньше единицы и имеет смысл коэффициента передачи поля через диссипативные элементы в элементарной ячейке периодической системы.

При наличии потерь, включая потери в однородной среде пространства между линзами ( $\tilde{k} = k' - i k''$ ), можно ввести понятие *постоянной затухания моды в открытой линии передачи*, определив её как мнимую часть постоянной распространения  $h_{mn} = h'_{mn} - i h''_{mn}$  из соотношения

$$\tilde{P}_{mn} \equiv \tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n \cdot \tau \cdot \exp(-i \tilde{k} L) = \exp\left\{-i(h'_{mn} - i h''_{mn})L\right\}, \quad (18)$$

являющегося естественным обобщением соотношений (8.15) и (8.17) на периодические системы с диссипацией энергии.

### Пункт 5. Диафрагмированные открытые линии передачи.

Теория допускает обобщение на случай диафрагмированных систем и, в частности, лучеводов, состоящих из линз с конечными поперечными размерами, которые сравнимы с размерами моды. В этом случае интегралы в одномерных уравнениях (7.5) будут иметь конечные пределы. Так в частном случае конфокальной линии передачи ( $g = 0$ ,  $a_0 = \sqrt{(L/k)}$ ) из диафрагмированных линз интегральное уравнение (7.5) будет иметь вид

$$\tilde{p}_v \tilde{V}(v) = \left\{ \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} \tilde{V}(\zeta) \exp\left[+i(v \cdot \zeta / a_0^2)\right] d(\zeta / a_0) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\sqrt{N} = \left( A_v / a_0 \right) \quad (20)$$

- отношение поперечного размера линзы к ширине пучка главной **TEM<sub>00</sub>-моды**.

Решениями уравнения (19) являются функции

$$\tilde{V}_q([v/a_0], \sqrt{N}) = S_{0q}\left(N, [v/a_0 \sqrt{N}]\right) \equiv S_{0q}(N, t), \quad (21)$$

которые называются *угловыми функциями вытянутого сфероида*. Эти зависящие от параметра  $N$  функции табулированы. При  $N \rightarrow \infty$  они переходят в функции Эрмита и практически не отличаются от последних уже при  $N = 25$ .

Собственные значения

$$\tilde{p}_q = \sqrt{(2/\pi)} \cdot N \cdot R_{0q}^{(1)}(N^2, 1) \cdot (i)^{q+0,50} \quad (22)$$

интегрального уравнения (19) выражаются через *радиальные функции вытянутого сфероида*  $R_{0q}^{(1)}$ , которые также табулированы. Значения  $|\tilde{p}_q|$  оказываются меньше единицы, поэтому диафрагмированная линия передачи – это линия с потерями из-за дифракции на линзах (или зеркалах).

## Пункт 6. Открытые резонаторы

*Открытый резонатор* в простейшем конструктивном исполнении представляет собой два расположенных симметричным образом относительно общей оси зеркала (Рис. 2.17), отражающие поверхности которых являются сегментами сферических поверхностей. *Модами открытых резонаторов* называются собственные типы колебаний электромагнитного (или иного силового) поля, отличительными признаками которых являются фиксированная структура поля, а также частота и коэффициент затухания колебания во времени в виде собственной комплексной частоты

$$\tilde{\omega}_{mnq} = \omega'_{mnq} + i \omega''_{mnq} . \quad (23)$$

Такие экспоненциально затухающие во времени  $\sim \exp(-\omega''_{mnq} t)$  поля мод резонатора описываются *изочастотными решениями однородных уравнений Максвелла* (без источников) для однородной (заполняющей резонатор) среды, которые должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях зеркал (и других резких границах сред).

Учитывая характерные масштабы длины волны ( $\lambda \approx 10^{-2} - 10^{-4}$  см) излучения, расстояния между зеркалами ( $L \approx 100$  см) и поперечные размеры зеркал ( $A \approx 5 - 15$  см), естественно предположить, что моду в открытом оптическом резонаторе (типа изображённого на Рис. 2.17) следует искать в виде *суперпозиции двух встречных изочастотных параксиальных пучков*, у которых в отличие от волновых пучков в линиях передачи частота должна быть комплексной и точно равной одной из тех неизвестных частот (23), принадлежащих спектру дискретных комплексных частот резонатора. В соответствии с этой идеей представим поле в резонаторе в виде

$$u_{mnq}(\vec{r}) = \operatorname{Re} \left\langle \tilde{u}_0^+(\vec{r}_\perp, z) \exp(i\tilde{\omega}_{mnq}t - i\tilde{k}_{mnq}z) + \tilde{u}_0^-(\vec{r}_\perp, z) \exp(i\tilde{\omega}_{mnq}t + i\tilde{k}_{mnq}z) \right\rangle$$

суперпозиции двух полей, каждое из которых напоминает волну, распространяющуюся в  $\pm Z$ -направлении и имеющую комплексную частоту (23), а также соответствующее ей комплексное волновое число

$$\tilde{k}_{mnq} = (\tilde{\omega}_{mnq} / v_f) = k'_{mnq} + i k''_{mnq} \Rightarrow \tilde{k}_{mnq} = (\tilde{\omega}_{mnq} / c) \sqrt{\epsilon \mu} . \quad (25)$$

Поле (24) должно быть решением уравнения **Гельмгольца** с комплексным волновым числом (25). Комплексные амплитуды  $\tilde{u}_0^\pm(\vec{r}_\perp, z)$  двух его компонент как функции координат должны меняться столь же медленно, как лучевые амплитуды параксиальных волновых пучков, и поэтому должны удовлетворять уравнению диффузии типа уравнения (3.3) с комплексным волновым числом (25). Структура поля (24) должна быть неизменной (фиксированной) во все моменты времени. Следовательно, комплексные амплитуды  $\tilde{u}_0^\pm(\vec{r}_\perp, z)$  должны быть решениями интегрального уравнения Фредгольма типа уравнений (7.3), (7.5), имеющего комплексное волновое число (25). Поскольку мнимая часть  $\tilde{k}_{mnq}$  мала по сравнению с действительной частью  $k'_{mnq}$ , то её можно не учитывать в интегральном уравнении ( $\tilde{k}_{mnq} \approx k'_{mnq}$ ) и тем самым не учитывать различий в

решении этого уравнения и уравнений (7.3), (7.5) с действительным значением комплексного волнового числа. Таким образом, после детального уточнения всех приближений можно утверждать, что структуры мод открытых резонаторов (Рис. 2. 17) фактически определены в виде решений интегральных уравнений (7.3) и поэтому совпадают со структурами мод открытой линии передачи (Рис. 2.17).

Если каждую составляющую поля (24) рассматривать как «волну, распространяющуюся в  $\pm Z$  – направлении», то следует заметить, что амплитуда такой «волны» экспоненциально нарастает ( $\sim \exp(\pm k''_{mnq} z)$ ) в направлении «распространения» в свободном пространстве резонатора и скачком уменьшается на зеркалах и других элементах, где имеются сосредоточенные потери. Именно экспоненциальный рост каждой «встречной» компоненты поля моды в свободном пространстве резонатора совместно со скачкообразным её уменьшением на диссипативных элементах обеспечивают неизменность структуры поля моды во все моменты времени во всех сечениях резонатора. Если по аналогии с комплексным коэффициентом трансформации амплитуды поля моды на периоде открытой линии передачи, который определён соотношениями (18) и (8.17), ввести комплексный коэффициент трансформации поля моды резонатора (Рис. 2.17) из сечения  $z = const$  в это же самое сечение через полный пространственный период  $2L$ , то его величина должна быть равна единице:

$$\tilde{P}_{mn} \cdot \tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2 \cdot \exp(-i \tilde{k}_{mnq} 2L) \equiv \tilde{P}'_{mn} \cdot \exp(-i \tilde{k}_{mnq} 2L) = \exp(-i 2\pi q). \quad (26)$$

По существу соотношение (26), в котором символами  $\tilde{r}_{1,2}$  обозначены комплексные коэффициенты отражения поля от зеркал резонатора, а  $q$  обозначает целое число, является следствием основного свойства моды и одновременно фундаментальным принципом для получения *характеристического уравнения* открытого резонатора. Подставляя в (26) соотношение (25), связывающее комплексные волновые числа и собственные комплексные частоты резонатора, получим характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{mnq} &\equiv \omega'_{mnq} + i \omega''_{mnq} = (\mathbf{v}_f / 2L) \left\{ 2\pi q - i \ln(\tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n \cdot \tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2) \right\} = \\ &= (\mathbf{v}_f / 2L) \left\{ 2\pi q + (m+n+1) \cdot \arccos g + \varphi_{r_1} + \varphi_{r_2} - i \ln(r_1 \cdot r_2) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27), в котором учтены лишь потери на излучение через прозрачные поверхности зеркал  $|\tilde{r}_{1,2}| \leq 1$ , тривиальным образом обобщается на более сложные случаи, когда имеются другие виды сосредоточенных потерь (например, ориентированная под углом к оси резонатора отражающая пластина) или потери, распределённые в объёме резонатора. Дифракционные потери на зеркалах и других диафрагмированных элементах резонатора в соответствии с (22) учитываются величиной комплексного коэффициента  $|\tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n|$ .

Добротностью моды резонатора по определению является отношение частоты моды  $\omega'_{mnq}$  к удвоенной величине коэффициента затухания  $\omega''_{mnq}$ , которое с учётом обобщения на произвольные виды потерь в открытом резонаторе можно представить в виде

$$Q_{m n q} = \left( \omega'_{m n q} / \omega''_{m n q} \right) \equiv \left\{ k'_{m n q} \cdot L / -\ln \left| \tilde{p}_m \tilde{p}_n \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \right|^2 \right\} . \quad (28)$$

Таким образом, модами открытых резонаторов в оптике называются **TEM<sub>m n q</sub>-типы** колебаний, которые имеют квазипоперечную поляризацию электромагнитного поля (отсюда происходит обозначение **TEM<sub>m n q</sub>-мода**) и зависимости компонент поля от поперечных координат точно такие же, какие имеют моды соответствующих открытых линий передачи. В обозначении **TEM<sub>m n q</sub>** индексы **m** и **n** указывают на число вариаций поля по поперечным координатам **x** и **y** соответственно, а индекс **q** указывает на число полуволн, которые укладываются на длине резонатора **L**. Число **q**, по порядку величины равное  $10^4$  -  $10^6$ , значительно превышает **m** или **n** и потому не содержит в себе достаточно ценной информации, достойной упоминания в названии моды. В этой связи его абсолютное значение никогда в названии моды не фигурирует, а иногда и сам индекс опускается.

### Пункт 7. Вырождение мод.

Из формулы (27) можно увидеть, что разные типы мод могут иметь одинаковые частоты. Это явление называется вырождением мод по частоте.

Если зеркала резонатора одинаковы, то пространственный период эквивалентной линзовой линии уменьшается в два раза. Это значит, что поля на зеркалах такого резонатора должны иметь одинаковую структуру и что в соответствующем интегральном уравнении Фредгольма типа (7.3) в качестве длины периодической структуры должна рассматриваться именно длина резонатора **L**. Тогда роль коэффициента трансформации поля **TEM<sub>m n q</sub>-моды** резонатора из сечения **z = const** в это же самое сечение через полный пространственный период **2 L** будет играть квадрат собственного значения интегрального уравнения, и характеристическое уравнение (26) примет форму

$$(\tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n)^2 \cdot \tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2 \cdot \exp(-i \tilde{k}_{m n q} 2 L) = \exp(-i 2 \pi q) . \quad (29)$$

Если резонатор конфокальный (**g = 0**), то согласно (29) определим собственные частоты

$$\omega'_{m n q} = (v_f / 2 L) \pi (2q + m + n + 1) \quad (30)$$

и из приведённой формулы найдём, что в таком резонаторе присутствует сильное вырождение мод по частоте.

Более слабое вырождение мод по частоте имеет место во всех случаях, когда  $\arccos g = (f \pi / l)$ , где **f**, **l** - целые положительные числа.