

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №6

Исследование нелинейных преобразований сигналов

Выполнили студенты 430 группы
Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В.

Нижний Новгород, 2018

Содержание

Введение	2
1. Краткая теория лабораторной работы	2
1.1. Применение аппроксимации в исследовании нелинейных цепей	2
1.1.1. Полиномиальная аппроксимация	2
1.1.2. Кусочно-линейная аппроксимация	3
1.2. Метод определения спектра сигнала на выходе нелинейной цепи	3
1.2.1. Тригонометрические формулы кратного аргумента	4
1.2.2. Нелинейное преобразование бигармонического и полигармонического ко- лебаний	5
1.3. Метод угла отсечки	7
1.4. Преобразование частоты	8
1.5. Амплитудное детектирование	9
2. Экспериментальная часть	10
2.1. Исследование нелинейности с RC -нагрузкой	10
2.2. Исследование нелинейности с резонансной нагрузкой	11
2.3. Исследование амплитудного детектора	12
2.3.1. Детекторная характеристика	13
2.3.2. Зависимость выходного напряжения от частоты модуляции	14
2.4. Резонансные характеристики усилителя	16
2.4.1. Входное сопротивление детектора	17
3. Результаты	17

Введение

В данной работе исследуются процессы прохождения сигналов через радиотехнические цепи с нелинейным элементом. В качестве таких цепей рассматривается полупроводниковый преобразователь частоты и амплитудный диодный детектор.

- Преобразователь частоты позволяет сдвинуть спектр сигнала по частоте без изменения структуры спектра – соотношений между компонентами спектра.
- Амплитудный детектор преобразует модулированного колебания в низкочастотное колебание, соответствующее модулирующему сигналу.

Схема установки, содержащей эти цепи, а также порядок их включения приведены в приложении.

1. Краткая теория лабораторной работы

1.1. Применение аппроксимации в исследовании нелинейных цепей

В общем случае, радиотехнические цепи можно описать дифференциальным уравнением:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x \quad (1)$$

Если хоть один из коэффициентов a_i является функцией y или ее производных, либо один из коэффициентов b_i – функцией x или ее производных, то цепь называют нелинейной.

Для описания нелинейных элементов обычно используют известный вид ВАХ, а для применения формальных математических методов ВАХ аппроксимируется различными кривыми. Выбор аппроксимирующей функции зависит от вида нелинейности, а также от режима работы нелинейного элемента.

1.1.1. Полиномиальная аппроксимация

Полиномиальная аппроксимация заключается в представлении ВАХ $i = f(u)$ полиномом n -й степени:

$$i(v_0 + u) = i(v_0) + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \quad (2)$$

где v_0 – напряжение, определяющее исходное положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента, u – подаваемое на нелинейный элемент напряжение сигнала. Коэффициенты $a_1, a_2, a_3 \dots$ определяются выражениями

$$a_1 = \left. \frac{di}{du} \right|_{u=v_0}, \quad a_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{du^2} \right|_{u=v_0}, \quad a_3 = \left. \frac{1}{3!} \frac{d^3 i}{du^3} \right|_{u=v_0} \quad (3)$$

Причем коэффициент a_1 – по определению крутизна ВАХ в рабочей точке, а остальные коэффициенты – производные крутизны с постоянными коэффициентами.

1.1.2. Кусочно-линейная аппроксимация

Кусочно-линейная аппроксимация заключается в замене реальной плавно меняющейся зависимости $i = f(u)$ приближенной, состоящей из отрезков прямых линий, выбираемых, касательными к реальной характеристике в нескольких точках.

Например, если рабочая точка v_0 находится на нижнем сгибе характеристики и изменение подводимого напряжения настолько велико, что используется участок ab на оси абсцисс, то характеристика аппроксимируется выражениями

$$i = \begin{cases} 0, & \text{при } u \leq v_1; \\ s(u - v_1), & \text{при } u \geq v_1. \end{cases}$$

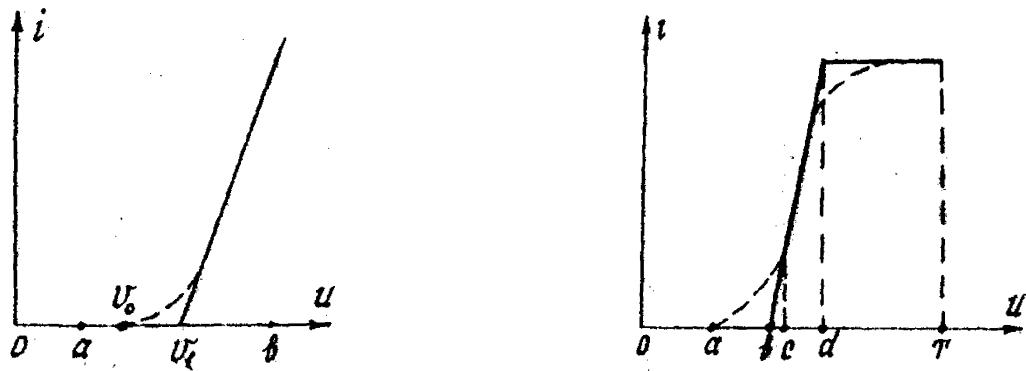


Рис. 1

Данная аппроксимация имеет смысл при рассмотрении воздействия сигналов большой амплитуды. Если амплитуда входного сигнала невелика, такая аппроксимация непригодна.

1.2. Метод определения спектра сигнала на выходе нелинейной цепи

Рассмотрим задачу определения спектра отклика безинерционного нелинейного элемента. Приближенно элемент будет описываться аппроксимирующей ВАХ:

$$i = f(u) \quad (4)$$

Пусть действует гармоническое

$$u = e_s(t) = E_1 \cos(f_1 t + \phi) \quad (5)$$

или полигармоническое колебание

$$u = e_s(t) = \sum_{k=1}^n E_k \cos(f_k t + \phi) \quad (6)$$

Классический метод решения заключается в подстановке выражений (5), (6) в правую часть (4) с последующим определением спектральных компонент путем использования аппарата рядов Фурье в случае гармонического воздействия или кратных рядов Фурье в случае полигармонического воздействия. Однако такой метод оказывается очень трудоемким. Поэтому на практике применяются специальные методы, каждый из которых связан с определенными способами аппроксимации нелинейной зависимости (4) и характером воздействующего сигнала.

1.2.1. Тригонометрические формулы кратного аргумента

Рассмотрим воздействие на нелинейный элемент, характеристика которого аппроксимирована полиномом n -ой степени

$$i = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \quad (7)$$

гармонического колебания (5). Подставляя (5) в (7) получим.

$$i = a_0 + a_1 E_1 \cos(f_1 t + \phi) + \cdots + a_n u E_1^n \cos^n(f_1 t + \phi) \quad (8)$$

Для представления правой части (8) в виде суммы синусоидальных компонент воспользуемся известными тригонометрическими формулами, позволяющими заменить степени косинусов (или синусов) через тригонометрические функции кратных аргументов. Выполнив тригонометрические преобразования, выражение (8) приводим к виду

$$i = J_0 + J_1 \cos(f_1 t + \phi) + J_2 \cos(2f_1 t + 2\phi) + \cdots + J_n \cos(n f_1 t + n\phi) \quad (9)$$

где

постоянная составляющая $J_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_2 E_1^2 + \frac{3}{8}a_4 E_1^4 + \cdots$

амплитуда первой гармоники $J_1 = a_1 E_1 + \frac{3}{4}a_3 E_1^3 + \frac{5}{8}a_5 E_1^5 + \cdots$

амплитуда второй гармоники $J_2 = \frac{1}{2}a_2 E_1^2 + \frac{1}{2}a_4 E_1^4 + \cdots$

амплитуда третьей гармоники $J_3 = \frac{1}{4}a_3 E_1^3 + \frac{5}{16}a_5 E_1^5 + \cdots$

амплитуда n -ой гармоники J_n

Сравнивая (9) с (5), нужно следить важные выводы:

- 1) Спектр тока нелинейного элемента при воздействии на него гармонического сигнала оказывается линейчатым, содержащим составляющие с частотами, кратными частоте входного сигнала, а наивысший номер составляющей спектра получаемой при расчетах равен степени используемого аппроксимирующего полинома.
- 2) Постоянная составляющая и амплитуды четных гармоник определяются четными степенями напряжения в полиноме (7), а нечетных гармоник – только нечетными.
- 3) Текущая фаза ψ_k -ой гармоники с частотой $f_k = kf_1$ в k раз больше значения текущей фазы действующего сигнала

$$\psi_k = f_k t + \phi_k = k(f_1 t + \phi)$$

1.2.2. Нелинейное преобразование бигармонического и полигармонического колебаний

Рассмотрим действие на нелинейный элемент *бигармонического* колебания

$$e_s(t) = E_1 \cos f_1 t + E_2 \cos f_2 t. \quad (10)$$

Ограничимся рассмотрением режима когда достаточно учитывать только линейный и квадратичный члены в полиноме (2).

Подстановка (10) в (2) приводит к следующим результатам:

линейная часть

$$e_s(t) = E_1 \cos f_1 t + E_2 \cos f_2 t \quad (11)$$

квадратичная часть

$$\begin{aligned} a_2 e_s^2(t) &= a_2(E_1 \cos f_1 t + E_2 \cos f_2 t)^2 = \\ &\frac{1}{2} a_2(E_1^2 + E_2^2) + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 \cos 2f_1 t + \frac{1}{2} a_2 E_2^2 \cos 2f_2 t + \\ &a_2 E_1 E_2 [\cos(f_1 + f_2)t + \cos(f_1 - f_2)t] \end{aligned} \quad (12)$$

Первое слагаемое, не зависящее от времени, определяет приращение постоянного тока. Слагаемые с частотами $2f_1$ и $2f_2$ представляют собой вторые гармоники от соответствующих компонентов входного сигнала. Слагаемые с частотами $f_1 + f_2$ и $f_1 - f_2$ представляют собой колебания комбинационных частот.

В более общем случае, если в качестве аппроксимирующего полинома взять полином k^u – степени, при бигармоническом воздействии на нелинейное устройство, в спектре колебания

на выходе нелинейного элемента, могут присутствовать следующие частоты: $f = 0$ – постоянная составляющая; $f = nf_1$, $n = 1, 2, \dots, k$ – гармоники частоты f_1 ; $f = nf_2$, $n = 1, 2, \dots, k$ – гармоники частоты f_2 ; $f = |nf_1 \pm mf_2|$, $n = 1, 2, \dots, k$, $m = 1, 2, \dots, k$ – комбинационные частоты (при условии $n + m \leq k$).

Спектрограмма колебания на входе и выходе нелинейного элемента, описываемого полиномом второй степени ($k = 2$) изображена на рис.2.

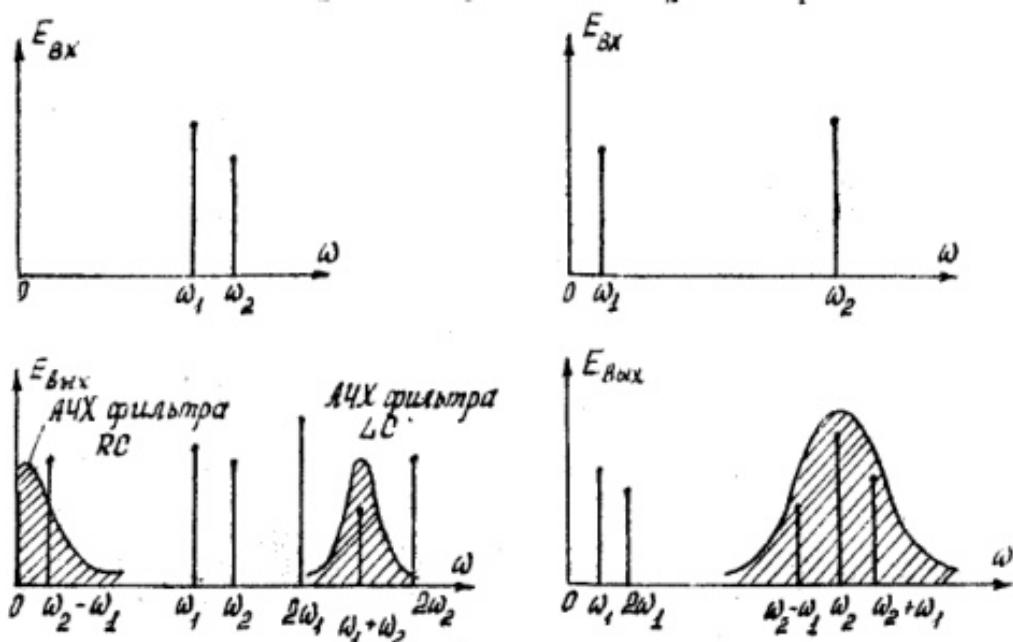


Рис. 2

Из рисунка видно, что взаимодействие двух гармонических колебаний с неодинаковыми частотами в нелинейном устройстве второй степени приводит к возникновению разностной $|f_1 - f_2|$ и суммарной $f_1 + f_2$ частот (помимо гармоник $2f_1$ и $2f_2$). Для практического использования этих новых частот достаточно включить последовательно с нелинейным элементом линейную цепь (фильтр), выделяющий полезную составляющую спектра.

И в случае $f_1 \ll f_2$, когда комбинационные частоты располагаются близи частоты f_2 и все три частоты: f_1 , $f_2 + f_1$ и $f_2 - f_1$ могут быть выделены одним общим фильтром (см.рис.2), можно получить спектр, соответствующий амплитудной модуляции колебания частоты f_2 относительно низкой частотой f_1 . При нелинейности более высокого порядка ($k > 2$) можно осуществить выделение любой из частот вида $f = |nf_1 \pm mf_k|$, $n + m \leq k$. При более сложном составе входного спектра, содержащем частоты f_1 , f_2 , f_3 , f_4, \dots , на выходе нелинейного элемента возникают частоты nf_1 , nf_2 , nf_3 , nf_4, \dots и комбинационные частоты $nf_i \pm mf_k$, где n и m любые целые числа, а f_i и f_k – любая из пар частот входного спектра.

1.3. Метод угла отсечки

Рассмотрим теперь работу нелинейного элемента в случае кусочно-линейной аппроксимации вольт-амперной характеристики рис. 3. При гармоническом возбуждении ток $i(t)$ нели-

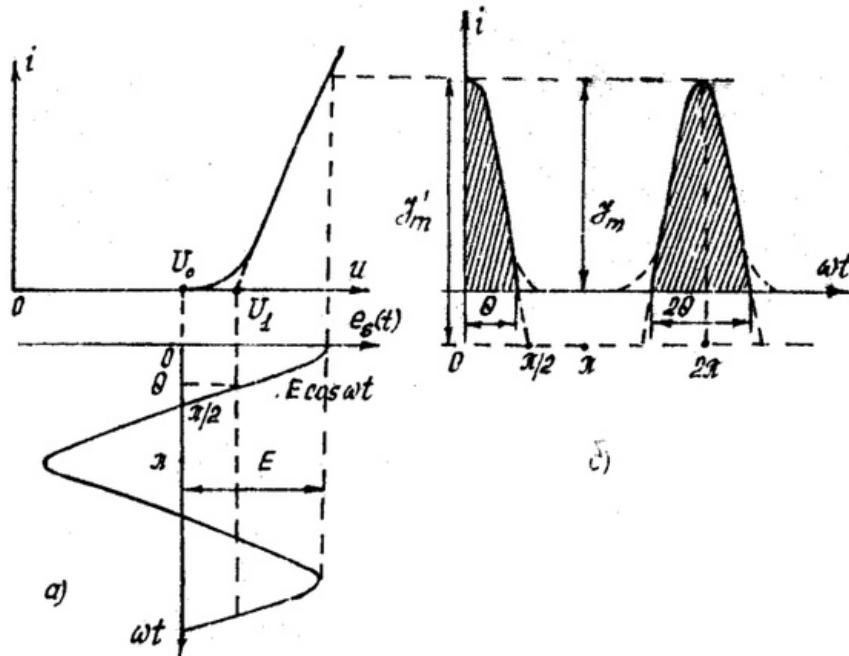


Рис. 3

нейного элемента приобретает импульсную форму рис. 3б. Угол θ , соответствующий изменению тока от максимального значения J_m до нуля, получил название *угла отсечки тока*. Длительность импульсов тока равна 2θ . Из рис. 3а очевидно, что

$$\cos \theta = \frac{v_1 - v_0}{E}. \quad (13)$$

Амплитуда тока

$$J_m = a_1 [E - (v_1 - v_0)] = a_1 E (1 - \cos \theta), \quad (14)$$

где a_1 – крутизна линейной части вольт-амперной характеристики.

При гармоническом воздействии на нелинейный элемент форма импульсов тока в пределах $-\theta < ft < \theta$ близка к отсеченной косинусоиде и, если пренебречь кривизной вольт-амперной характеристики на нижнем сгибе, мгновенное значение тока можно выразить уравнением

$$i(t) = J'_m (\cos ft - \cos \theta), \quad -\theta < ft < \theta \quad (15)$$

J'_m – амплитуда импульса тока при $\theta = \pi/2$.

Т.к. амплитуда J_m реального импульса соответствует моменту $ft = 0$, имеет место соотношение

$$J_m = i(0) = J'_m(1 - \cos \theta)$$

откуда

$$J'_m = \frac{J_m}{1 - \cos \theta}$$

Подставив это в (15) получим

$$i(t) = \frac{J_m}{1 - \cos \theta} (\cos ft - \cos \theta), \quad -\theta < ft < \theta \quad (16)$$

Используя это выражение, легко вычислить коэффициенты ряда Фурье (17) для периодической последовательности импульсов тока (16) нелинейного элемента рис. 3б. Ввиду четности функции $i(t)$ относительно t , ряд (17) содержит одни лишь косинусоидальные члены.

$$i(t) = J_0 + J_1 \cos ft + J_2 \cos 2ft + J_3 \cos 3ft + \dots + J_n \cos nft. \quad (17)$$

1.4. Преобразование частоты

Сдвиг спектра сигнала по оси частот на определенную постоянную величину при сохранении структуры сигнала называется *преобразованием частоты*.

Для выяснения процессов, происходящих при преобразовании частоты, вернемся к вопросу о воздействии на нелинейный элемент двух напряжений. Однако, в данном случае только одно из колебаний, колебание создаваемое вспомогательным генератором (гетеродином), будем считать гармоническим. Под вторым колебанием будем подразумевать сигнал, подлежащий преобразованию, который может представлять собой любой сложный, но узкополосный процесс

Получаемое на выходе нелинейного элемента колебание с частотой $f_s(t) + f_r$ соответствует сдвигу спектра сигнала в область высоких частот, а колебание с частотой $f_s(t) - f_r$ в область низких частот. Для выделения одной из этих частот разностной или суммарной нужно применять соответствующую нагрузку на выходе преобразователя.

Пусть, например, частоты f_s и f_r очень близки и требуется выделить низкую частоту, расположенную около нуля. Такая задача встречается в измерительной технике (метод «нулевых биений»).

В этом случае нагрузка должна состоять из параллельного соединения R и C (рис. 4а), обеспечивающих отфильтровывание (подавление) высоких частот f_s и f_r и выделение разностной частоты $|f_s - f_r|$. Если частота $|f_s - f_r|$ лежит в радиотехническом диапазоне, то для ее выделения следует применять колебательную цепь (рис.4б).

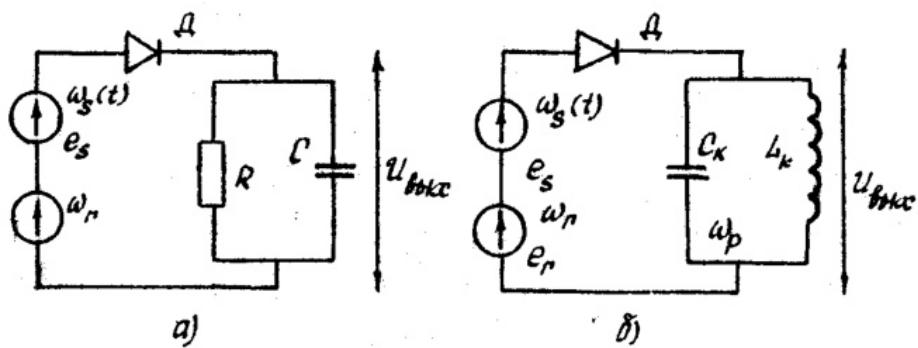


Рис. 4

1.5. Амплитудное детектирование

Детектированием принято называть преобразование модулированного колебания в низкочастотное колебание, соответствующее модулирующему сигналу. Радиотехническое устройство, предназначенное для этой цели, называют детектором.

Рассмотрим высокочастотный сигнал, модулированный по амплитуде низкочастотным колебанием:

$$u(t) = E(1 + M \cos ft) \cos f_0 t,$$

$$f \ll f_0$$

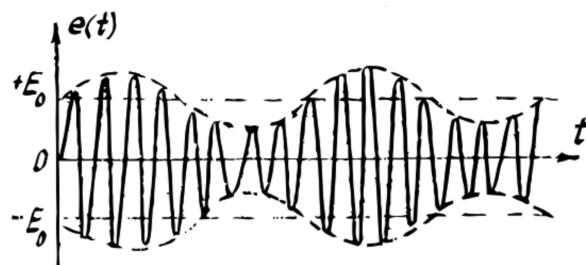


Рис. 5: Амплитудно модулированное колебание

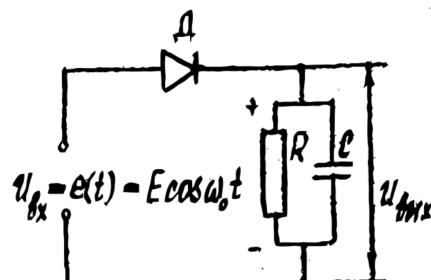


Рис. 6: Амплитудный детектор

M - глубина модуляции. Пример такого колебания показан на рис. 5. В этом сигнале есть три гармоники: f_0 , $f_0 - f$ и $f_0 + f$. Подадим этот сигнал на диод. В выходном сигнале должен появиться набор комбинационных частот. Среди них будет гармоника с частотой f . Частоты остальных гармоник будут много больше этой частоты. Для их устранения из выходного сигнала служит RC -фильтр. Таким образом, на выходе детектора получается колебание с частотой модуляции.

2. Экспериментальная часть

2.1. Исследование нелинейности с RC -нагрузкой

Мы включили схему I на апериодическую нагрузку и получение сигнала с внешнего генератора стандартных сигналов (см. рис. 16).

С диода, выделяющего низкочастотные импульсы, сигнал снимается осциллографом, работающим в режиме подавления постоянной составляющей.

Изменяя частоту на генераторе, мы сняли АЧХ данной схемы:

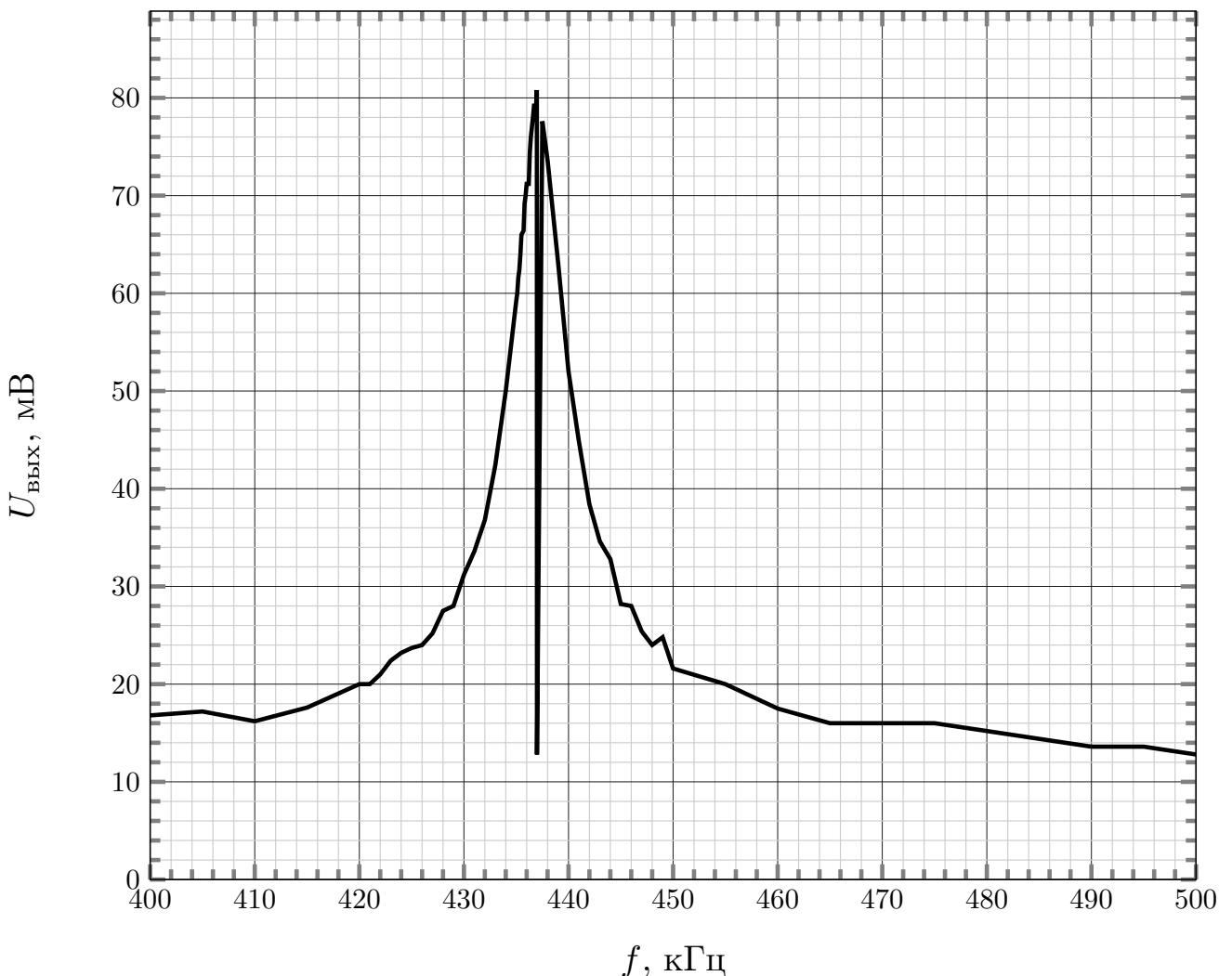


Рис. 7: АЧХ схемы при нагрузке R_h

Когда частота встроенного генератора совпадает с частотой подаваемого сигнала, огибающая содержит в себе только постоянную составляющую, при этом на осциллографе амплитуда наблюдаемого сигнала резко падает.

На графике $U_{\text{вых}}(f)$ наблюдается резкий спад амплитуды выходного сигнала на частоте нулевых биений $f = 436.973$ кГц. Следовательно, это и есть частота встроенного генератора.

2.2. Исследование нелинейности с резонансной нагрузкой

Аналогично предыдущему заданию, снимается АЧХ первой схемы с нагрузкой в виде LC -конттура (резонансная нагрузка)

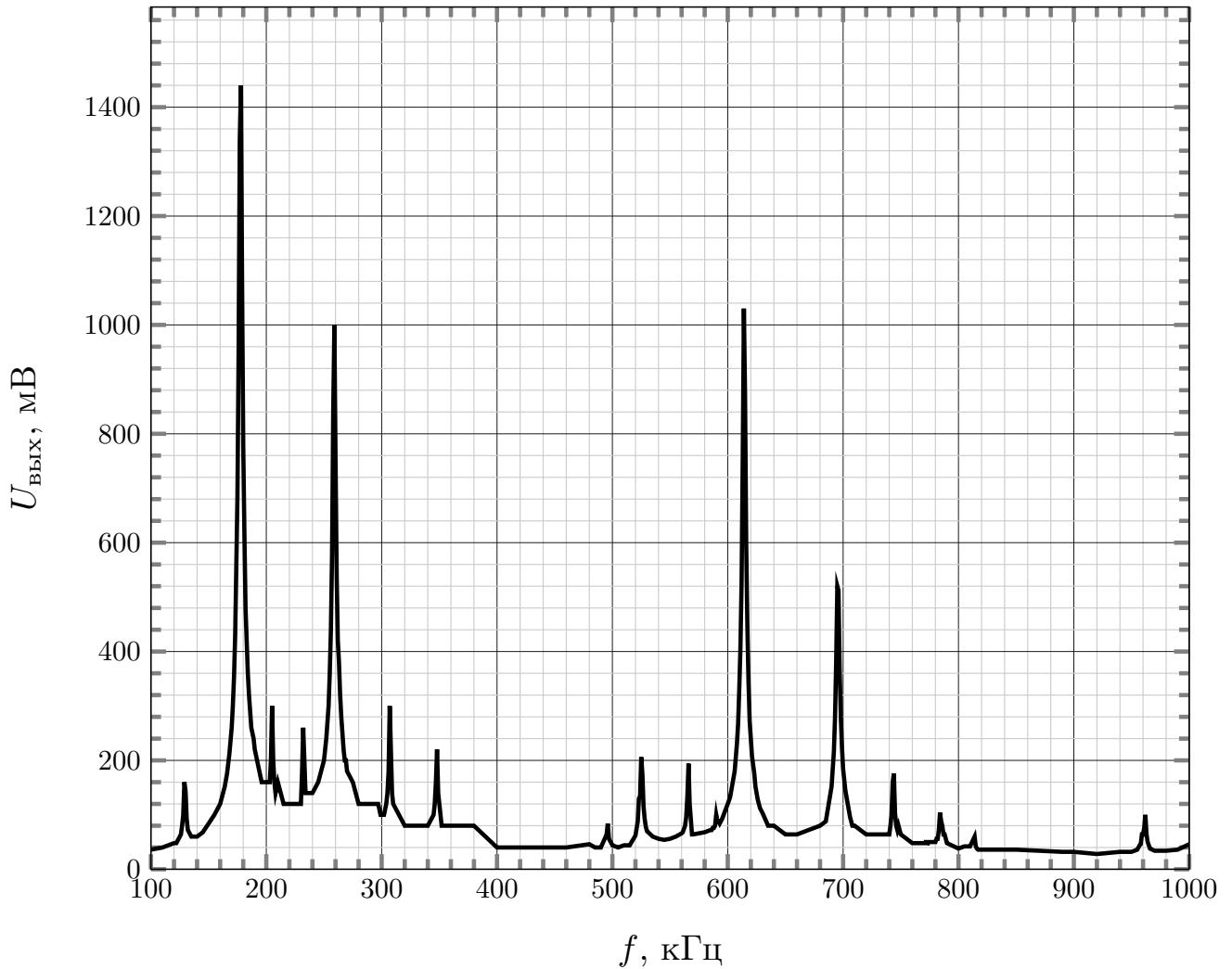


Рис. 8: АЧХ преобразователя

В выходном сигнале нелинейной цепи должны присутствовать кратные и комбинационные частоты. Снятая зависимость представляет собой частотную характеристику преобразователя (зависимость модуля его комплексного коэффициента передачи от частоты принимаемого сигнала при постоянной частоте гетеродина). При взаимодействии колебаний некоторых частот сигнала с колебаниями частот f_g и $n f_g$ получаются колебания промежуточной

$f_{\text{пч}}$ частоты ($f_{\text{рез}} = f_{\text{пч}}$). Где $f_{\text{рез}}$ – резонансная частота контура. Комбинационные частоты, совпадающие с $f_{\text{пч}}$, определяем в виде $mf_{\text{г}} - nf_s = f_{\text{пч}}, mf_s - nf_{\text{г}} = f_{\text{пч}}$ откуда $f_s = \frac{n}{m}f_{\text{г}} \pm \frac{f_{\text{пч}}}{m}$.

При $n = 0$ и $m = 1$ частота f_s соответствует частоте прямого канала, т.е. $f_s = f_{\text{пч}}$.

При $n = 1$ и $m = 1$ преобразование осуществляется по первой гармонике частоты гетеродина: $f_s = f \pm f_{\text{пч}}$.

Мы определили резонансную частоту колебательного контура а также комбинационные:

$$f_{\text{рез}} = f_{\text{пч}} = 178 \text{ кГц}$$

$$f_{\text{г}} - f_{\text{пч}} = 258 \text{ кГц}$$

$$f_{\text{г}} + f_{\text{пч}} = 614 \text{ кГц}$$

Отсюда частота генератора $f_{\text{г}} = 436$ кГц, что близко к полученной ранее $f_{\text{г}} = 436.973$ кГц.

2.3. Исследование амплитудного детектора

В данном эксперименте включается вторая схема. Осциллограф включается так, что тумблером T_2 можно переключать его между генератором и детектором.

В качестве нагрузки выбирается одна из R_1C_1 или R_2C_2 цепей с разными $\tau = RC$.

На детектор подается сигнал с амплитудой 1 В и частотой $f_s = 140$ кГц.

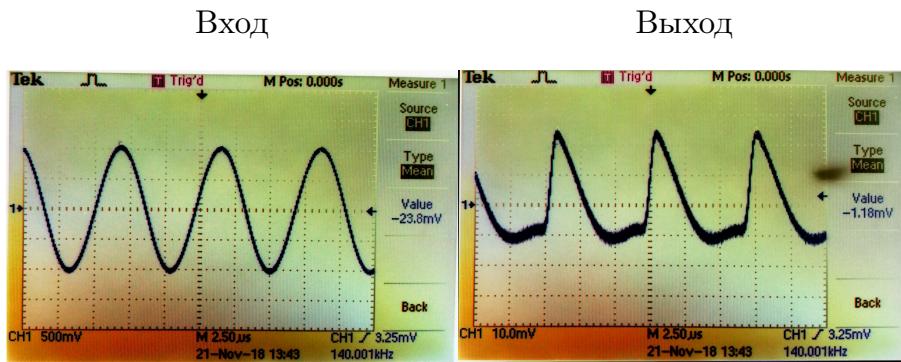


Рис. 9: Сигнал на входе и выходе детектора

Среднее значение на графике – постоянное напряжение смещения (рабочая точка детектора). Ток через детектор имеет импульсный характер, а его вид зависит от постоянной RC -цепи: В промежутках между импульсами тока происходит разряд конденсатора C через резистор R , и $u_{\text{вых}}(t)$ убывает. Когда напряжение падает ниже напряжения смещения, диод закрыт.

2.3.1. Детекторная характеристика

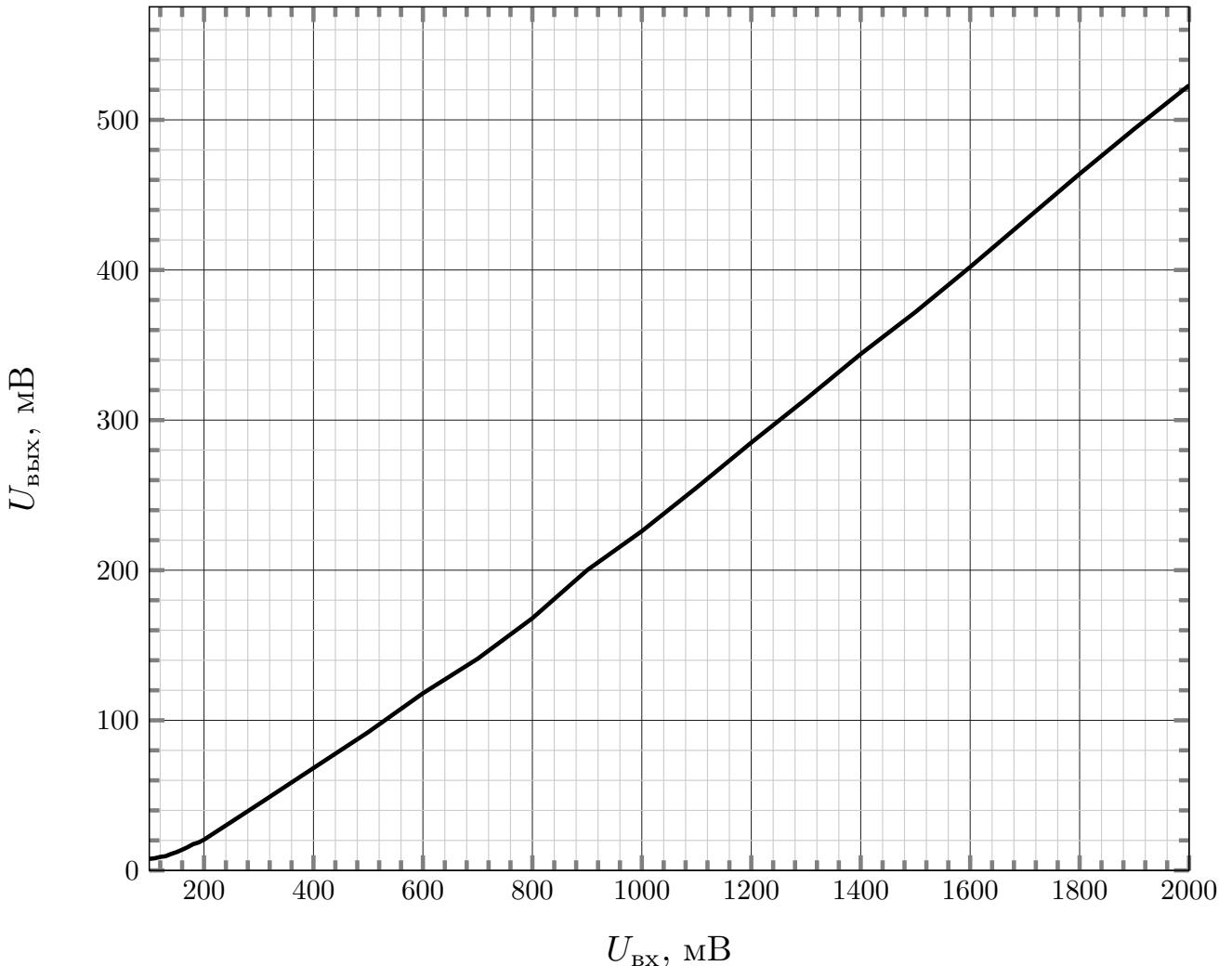


Рис. 10

При малой амплитуде входного сигнала, выпрямление происходит на нелинейном участке ВАХ диода, и детектирование квадратичное (что видно на графике для частот, меньших 200 кГц)

При больших амплитудах режим детектора аналогичен режиму выпрямления высокочастотного сигнала с постоянной амплитудой $u_{\text{вх}}$, где соотношение между $u_{\text{вых}}$ и $u_{\text{вх}}$ определяется выражением $u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}} \cos \theta = \text{const}$, а так как угол отсечки θ мал, то отношение $u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$ близко к 1 и мы наблюдаем линейную зависимость.

2.3.2. Зависимость выходного напряжения от частоты модуляции

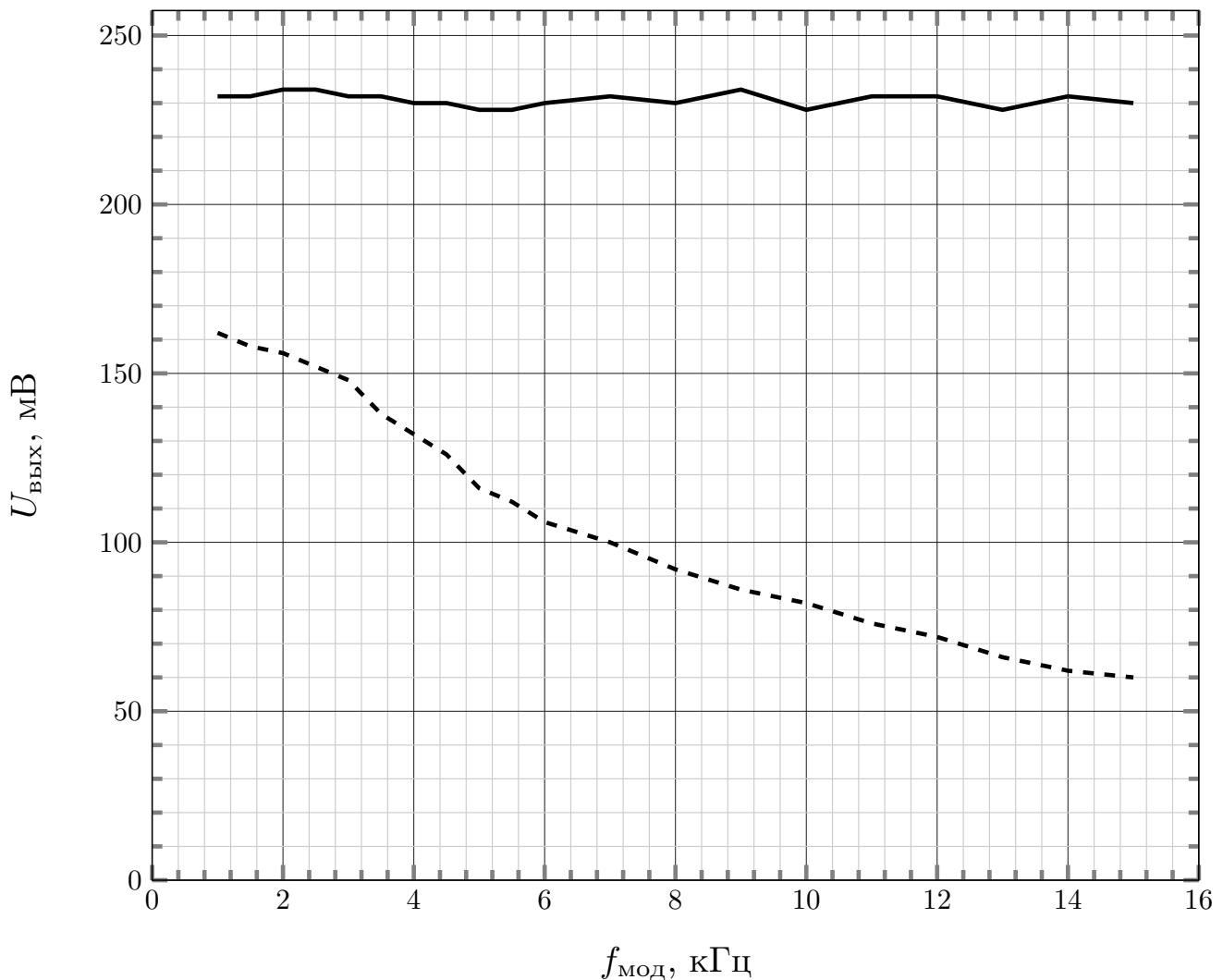


Рис. 11

При выборе элементов нагрузки детектора необходимо, чтобы постоянная времени RC была мала по сравнению с периодом модуляции. В противном случае изменение выпрямленного напряжения на нагрузке может отставать от изменения огибающей входной ЭДС (см. рис. 12.) Получается нелинейное искажение сигнала.

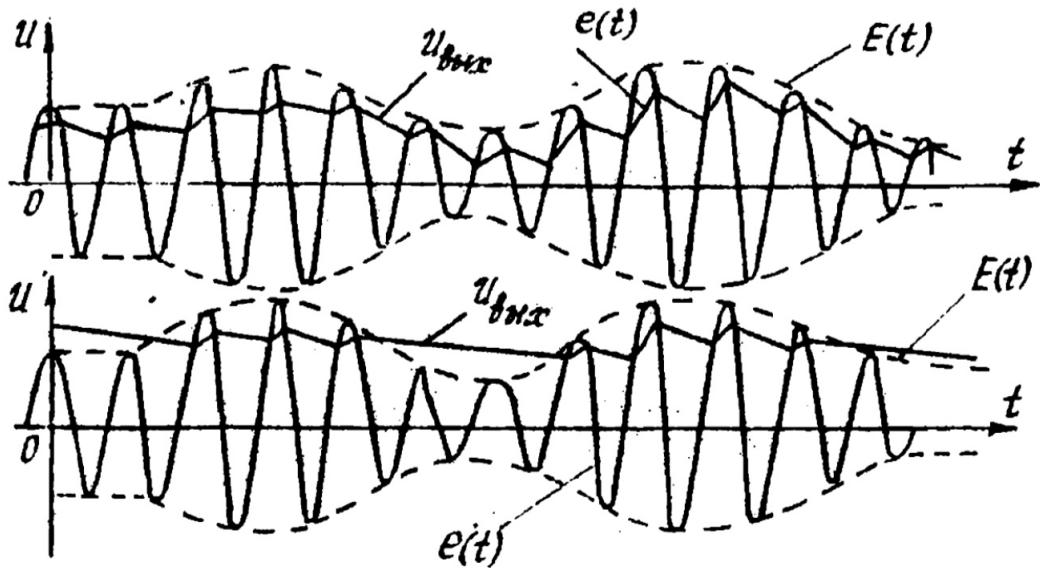


Рис. 12

Искажения обусловлены взаимодействием нелинейного элемента (диода) с линейной цепью RC .

Степень нелинейных искажений зависит здесь от частоты модуляции. Эти искажения возрастают с повышением частоты, а также глубины модуляции входной ЭДС.

Для устранения искажений необходимо $RC \ll 2\pi/f$. С другой стороны, для сглаживания высокочастотных пульсаций необходимо, чтобы $RC \gg 2\pi/f_c$:

$$\frac{2\pi}{f_c} \ll RC \ll \frac{2\pi}{f_m}$$

В нашей схеме постоянные времени цепочек $R_1C_1 = 2\text{мс}$, $R_2C_2 = 200\text{мс}$. Сравнивая эти значения с характерным периодом модуляции сигнала (при $f_m = 10\text{ кГц}$ период модуляции равен $T_m = 100\text{мс}$), заметим, что $R_2C_2 > T_c$, что не удовлетворяет неравенству написанному выше.

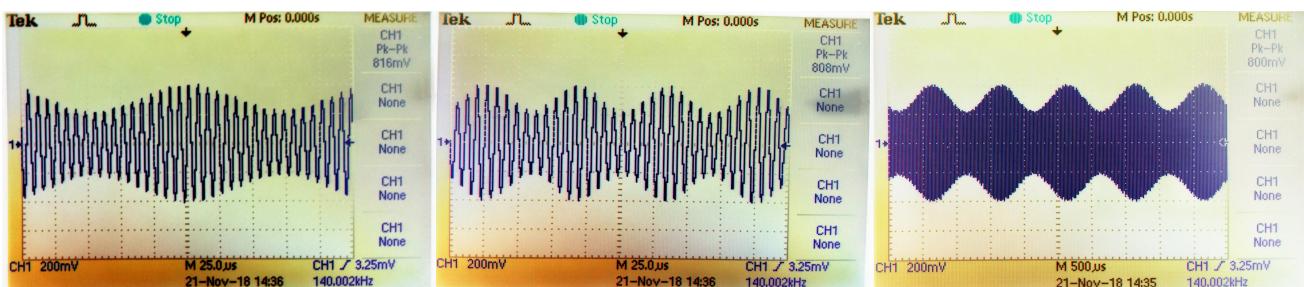
 $R_1C_1 - 1\text{ кГц}$ $R_1C_1 - 7\text{ кГц}$ $R_1C_1 - 15\text{ кГц}$ 

Рис. 13

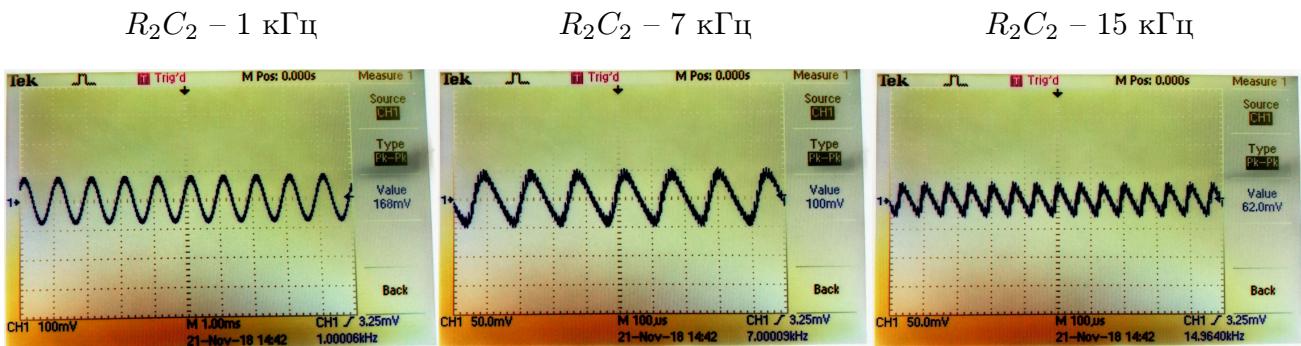


Рис. 14

2.4. Резонансные характеристики усилителя

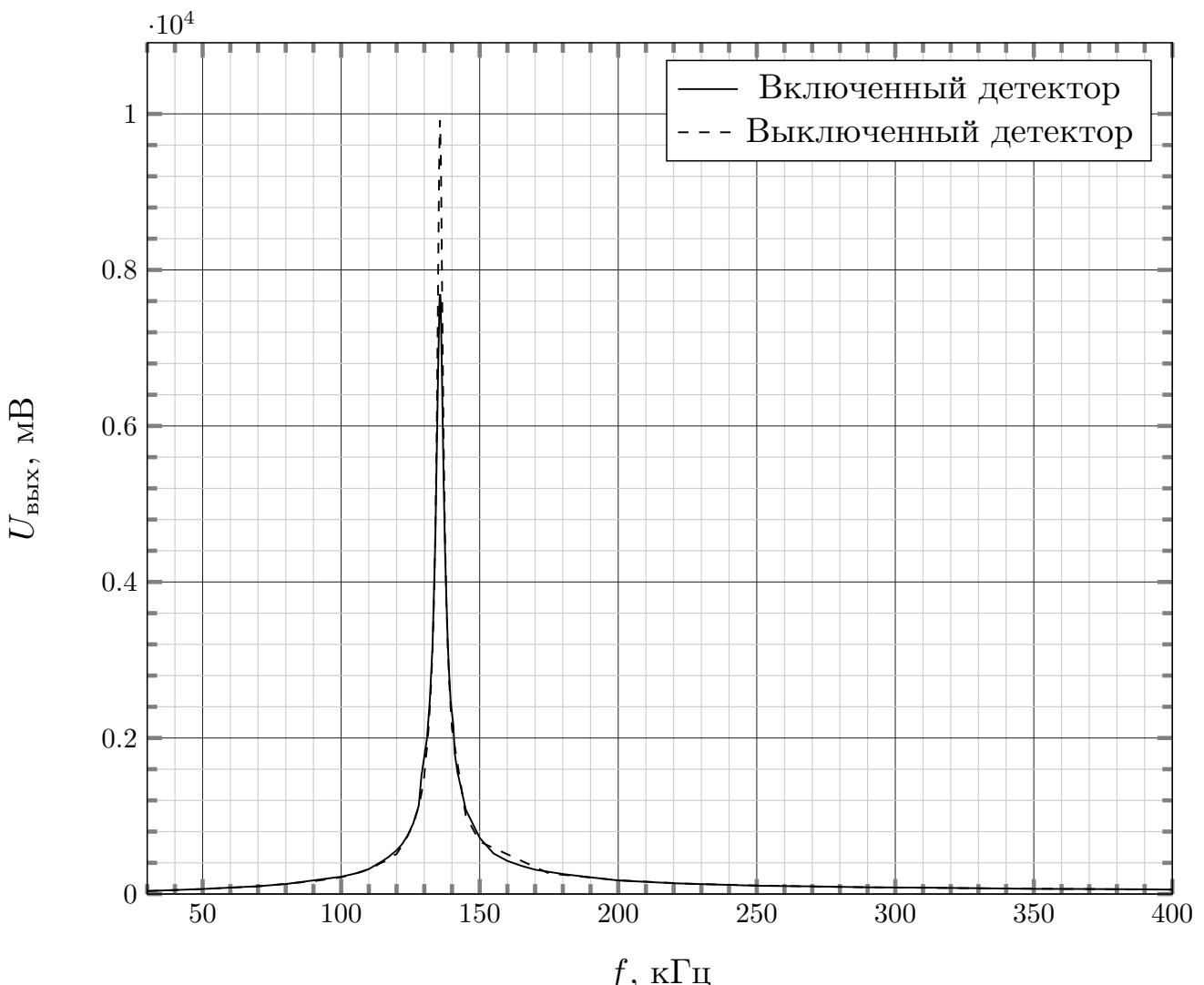


Рис. 15

Мы получили резонансную частоту усилителя при включенном детекторе

$$f_{on} = 135.7 \text{ кГц}$$

И выключенном:

$$f_{off} = 135.678 \text{ кГц}$$

2.4.1. Входное сопротивление детектора

На вход был подан гармонический сигнал от генератора с амплитудой 1 В и установлена нагрузка R_2C_2 , при этом сопротивление $R_{\text{ЭКВ}}$ отключено.

После фиксации максимального значение на контуре при подключенном детекторе, детектор был отключен и включено $R_{\text{ЭКВ}}$.

Изменяя $R_{\text{ЭКВ}}$, было достигнуто равенство напряжения на контуре максимальному значению при подключенном детекторе.

Соответствующее этому значению $R_{\text{ЭКВ}} = 104.5 \text{ кОм}$. $R_{\text{вх}} = 2R_{\text{ЭКВ}} = 209 \text{ кОм}$.

3. Результаты

Проведя ряд экспериментов, мы получили:

- Методом нулевых биений частота встроенного генератора

$$f_0 = 436.9 \text{ кГц}$$

- Исследуя нелинейность с резонансной нагрузкой, найдена промежуточная (резонансная контура) частота

$$f_{\text{пч}} = 178 \text{ кГц}$$

- Используя комбинационные частоты, получили другим способом частоту генератора:

$$f_0 = 436 \text{ кГц}$$

- Детекторную характеристику. Качественно показали наличие нелинейности детекторной характеристики.
- Наличие нелинейных искажений при неудачном согласовании нагрузки детектора и частоты модуляции

- Резонансные характеристики транзисторного усилителя с включенным и отключенным детектором, найдя соответствующие резонансные частоты:

$$f_{on} = 135.7 \text{ кГц}$$

$$f_{off} = 135.678 \text{ кГц}$$

- Определили входное сопротивление детектора $R_{bx} = 209 \text{ кОм}$.

Приложение. Схема экспериментальной установки

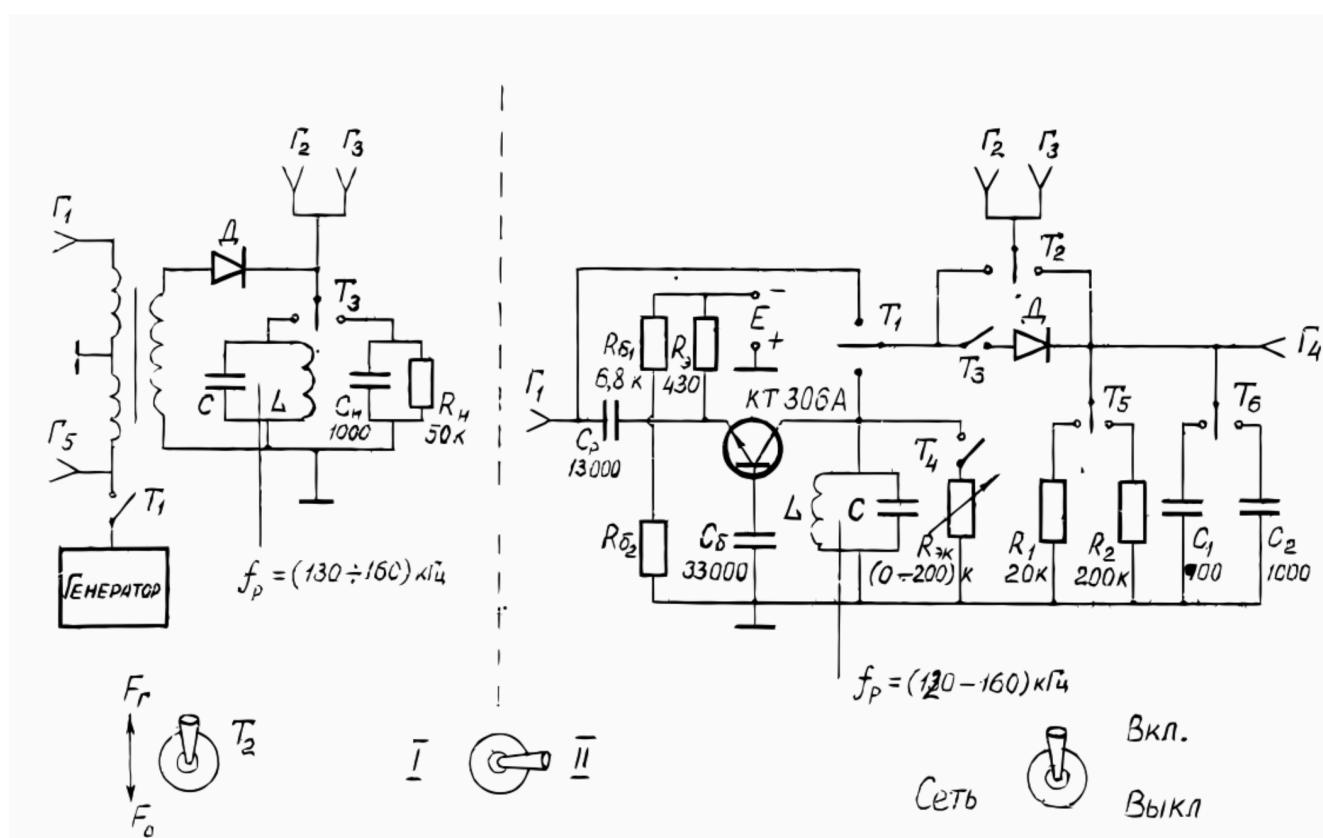


Рис. 16: Схема экспериментальной установки