

ГЛАВА 8

Некоторые задачи механики

§ 8.1. Задача двух тел

Рассмотрим в инерциальной системе отсчета (рис.1) замкнутую систему из двух взаимодействующих частиц с массами m_1 и m_2 и координатами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Пусть потенциальная энергия системы U зависит от расстояния между частицами $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, т.е. $U = U(r)$. Напишем функцию Лагранжа системы

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(r). \quad (8.1.1)$$

Надо найти законы движения каждой частицы $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$.

Поступим следующим образом. В качестве новых переменных выберем радиус-вектор \vec{r} первой частицы относительно второй и радиус-вектор центра масс \vec{R} . Формулы перехода от старых координат \vec{r}_1 и \vec{r}_2 к новым \vec{r} и \vec{R} легко установить. По определению

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (8.1.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (8.1.3)$$

Разрешая соотношения (2) и (3) относительно \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , получим обратные преобразования. Из (2) выразим \vec{r}_1 :

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 \quad (8.1.4)$$

и подставим его в определение (3)

$$\vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 - \vec{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{R} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} (\vec{R} - \vec{r}_2).$$

Из этого уравнения найдем

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (8.1.5)$$

Осталось и в \vec{r}_1 избавиться от \vec{r}_2 . Для этого заменим в (4) \vec{r}_2 на (5)

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1} \left(\vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1} \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Это дает

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (8.1.6)$$

Дифференцируя выражения (5) и (6), выразим скорости частиц $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1$ и $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$ через скорость центра масс $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ и относительную скорость $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}. \quad (8.1.7)$$

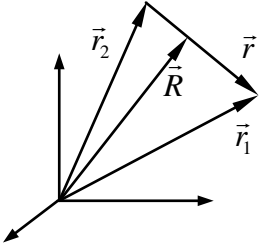


Рис. 1.

Теперь можем перейти к новым переменным и в функции Лагранжа.

Подставим (5)-(7) в (1)

$$L = \frac{m_1}{2} \left(\vec{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\vec{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \right)^2 - U(r).$$

Осуществим возведения в квадрат

$$L = \frac{m_1}{2} \left(V^2 + 2\vec{V} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 \right) + \frac{m_2}{2} \left(V^2 - 2\vec{V} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 \right) - U(r).$$

Проведя не сложные преобразования, получим функцию Лагранжа системы в новых координатах

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 - U(r).$$

Обозначим:

$m = m_1 + m_2$ - полная масса системы,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ - приведенная масса системы.} \quad (8.1.8)$$

Следовательно

$$L = \frac{m}{2} V^2 + \frac{\mu}{2} v^2 - U(r). \quad (8.1.9)$$

Функция Лагранжа системы из двух частиц, потенциальная энергия взаимодействия которых зависит от расстояния между ними, распалась на две независимые слагаемые

$$L = L(\vec{V}) + L(\vec{r}, \vec{v}).$$

Первое из них

$$L(\vec{V}) = \frac{m}{2} V^2 \quad (8.1.10)$$

описывает поведение центра масс системы, второе

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\mu}{2} v^2 - U(r). \quad (8.1.11)$$

- движение одной частицы с массой μ во внешнем поле $U(r)$.

Формально, задача двух реальных тел с массами m_1 и m_2 в новых координатах преобразовалась в задачу свободного независимого движения частицы с массой $m = m_1 + m_2$ по закону $\vec{R}(t)$ и движению частицы с приведенной массой μ во внешнем поле $U(r)$ по закону $\vec{r}(t)$. Эти движения оказались независимыми, поэтому $\vec{R}(t)$ и $\vec{r}(t)$ находятся независимо. Функция Лагранжа $L(\vec{V})$ (10) не содержит \vec{R} , следовательно \vec{R} - циклическая координата. Тогда соответствующий этой координате суммарный импульс всей системы \vec{P} сохраняется

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m \vec{V} = m \frac{d\vec{R}}{dt} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}}{m}.$$

Из этого выражения находим зависимость радиус-вектора \vec{R} от времени

$$\vec{R}(t) = \frac{\vec{P}}{m} t + \vec{R}_0 = \vec{V} t + \vec{R}_0, \quad (8.1.12)$$

где \vec{V} - скорость центра масс, т.е. скорость движения всей системы в целом. Получили закон свободного движения центра масс замкнутой системы $\vec{R}(t)$. Это равномерное и прямолинейное движение и не представляет интереса.

Важно другое. Движение частиц друг относительно друга описывается функцией Лагранжа (11), как движение одной точки с приведенной массой μ (8) во внешнем поле $U(r)$. Если эту задачу мы решим, т.е. найдем $\vec{r}(t)$, то, подставив ее в (5) и (6), получим закон движения каждой частицы в первоначальной системе отсчета (в лабораторной системе отсчета)

$$\vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t), \quad (8.1.5a)$$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t). \quad (8.1.6a)$$

Используя результаты решения уравнения движения с функцией Лагранжа (11) следует помнить, что движение тела с массой равной приведенной массе μ и с законом движения $\vec{r}(t)$ под действием поля $U(r)$ не является реальным. В таких случаях говорят: движение приведенной массы изображает движение системы или движение изображающей точки. Соотношения (5a) и (6a) дают переход к действительному движению каждой частицы в произвольной инерциальной системе отсчета (лабораторной системе отсчета) не связанной с изучаемой механической системы из двух частиц.

В некоторых случаях удобнее и нагляднее перейти в систему отсчета, связанную с центром масс. Система отсчета связанная с центром масс замкнутой системы является инерциальной. Обозначим радиус-векторы двух рассматриваемых частиц в этой системе отсчета через \vec{r}'_1 и \vec{r}'_2 . Их связь с радиус-вектором \vec{r} можно получить формально, положив равным нулю в формулах (5) и (6) величину $\vec{R} = 0$. Получим

$$\vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (8.1.13)$$

$$\vec{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (8.1.14)$$

Таким образом, радиус-векторы \vec{r}'_1 и \vec{r}'_2 пропорциональны \vec{r} . Значит, траектории, описываемые этими тремя векторами, будут подобными. Причем, центр подобия находится в центре масс.

По этой причине, воображаемый центр поля, под действием которого движется частица с массой μ , нужно предполагать помещающимся в той же точке, от которой откладываются векторы \vec{r}'_1 и \vec{r}'_2 , т.е. в центре масс системы.

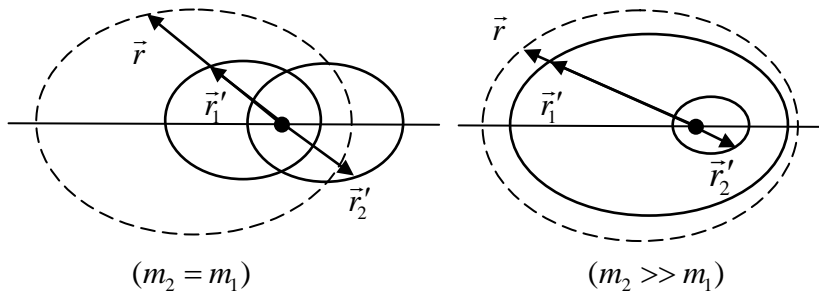


Рис. 2

Итак, в замкнутой системе две частицы будут двигаться относительно центра масс системы по геометрически подобным траекториям, отличающимся лишь своими размерами, обратно пропорциональными массам частиц

$$\frac{\vec{r}'_1}{\vec{r}'_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Во время движения частицы всегда находятся на концах некоторой прямой, проходящей через центр масс. Например, если $\vec{r}(t)$ описывает траекторию - эллипс, то $\vec{r}_1'(t)$ и $\vec{r}_2'(t)$ дадут подобные эллипсы.

Чтобы представить себе движение реальных тел с массами m_1 и m_2 относительно центра инерции при заданной траектории движения приведенной массы μ , рассмотрим два предельных случая.

1. При $m_1 = m_2$ получим $\vec{r}_2' = -\vec{r}/2$, $\vec{r}_1' = \vec{r}/2$;
2. Если же $m_2 \gg m_1$, то $\vec{r}_1' = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \vec{r} \approx \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{r}$, $\vec{r}_2' \approx -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}$.

Вектор \vec{r}_2' всегда противоположен вектору \vec{r} , а вектор \vec{r}_1' имеет такое же направление, что и \vec{r} . В нашем примере приведенная масса μ движется по эллипсу. Тогда траектории частиц будут выглядеть так, как показано на рис. 2.

§ 8.2. Одномерное движение

Одномерным движением называют движение механической системы с одной степенью свободы во внешнем поле U , не зависящем от времени.

Функция Лагранжа такой системы имеет следующую общую форму

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q),$$

причем, поскольку U не зависит от времени t , энергия должна сохраняться

$$E = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} + U(q) = \text{const}$$

В общем случае q - обобщенная координата, описывающая положение системы, $a(q)$ - кинематический параметр системы, \dot{q} - обобщенная скорость.

Если, в частности, q - это декартова координата, скажем x , материальной точки, которая может двигаться только вдоль по прямой, то коэффициент $a(q) = \mu$ - масса частицы. В этом случае закон сохранения энергии принимает вид

$$E = \frac{\mu\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}. \quad (8.2.1)$$

Так как функция Лагранжа известна, то можно составить уравнение движения Лагранжа, решением которого будет закон одномерного движения.

Однако сохранение энергии (1) позволяет обойти интегрирование уравнения движения. Воспользуемся этим методом, что послужит хорошим примером того, какую пользу могут сослужить законы сохранения.

Разрешим соотношение (1) относительно скорости частицы \dot{x} :

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu}(E - U(x)).$$

Из этого выражения находим

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(x))}. \quad (8.2.2)$$

Для определения зависимости координаты x от времени t , мы получили дифференциальное уравнение первого порядка. Подчеркнем, что если бы мы обратились к уравнениям движения Лагранжа или Ньютона, то получили бы дифференциальное уравнение второго порядка.

В уравнении (2) переменные разделяются

$$dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (8.2.3)$$

Интегрирование дает

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0. \quad (8.2.4)$$

Здесь две произвольные постоянные: t_0 - начальный момент времени и E - полная энергия. Так как энергия сохраняется, то ее можем выбрать через начальные условия:

$$x_0 = x(t = t_0) \text{ и } v_0 = \dot{x}(t = t_0).$$

Если эти значения известны, то

$$E = \frac{\mu v_0^2}{2} + U(x_0). \quad (8.2.5)$$

Таково общее решение задачи. В формуле (4) содержится исчерпывающая информация о поведении одномерной механической системы (например, одной материальной точки) во внешнем поле $U(x)$. Если вид $U(x)$ будет известен, то интеграл (4) можно вычислить, а значит, будет известна и аналитическая зависимость $t(x)$. Затем полученный результат можно обратить и привести к виду $x(t)$, который нам более привычен как закон движения. Нельзя, конечно, забывать, что интеграл (4) может быть взят в известных функциях не всегда. Все зависит от вида функции $U(x)$.

Но есть вопросы, которые остались не исследованными - это вопрос о выборе знаков корня и пределов интегрирования по x в формуле (4).

Вообще, не только ответы на эти вопросы, но и многие свойства одномерного движения можно узнать из качественного исследования и не обращаясь к аналитическому решению (4).

Например, можно получить ответ на следующие вопросы.

1. При каких значениях полной энергии E система в принципе может двигаться в заданном поле $U(x)$?
2. В каких областях изменения x возможно движение системы? По существу это и есть вопрос о пределах интегрирования.
3. Какой характер имеет движение в каждой разрешенной области движения?

Заметим, что кинетическая энергия существенно положительная величина

$$\frac{\mu \dot{x}^2}{2} \geq 0.$$

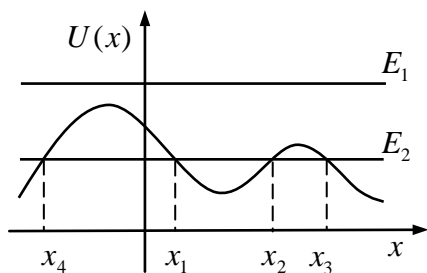


Рис. 1

Тогда из закона сохранения энергии следует требование

$$E - U(x) \geq 0 \quad \text{или} \quad E \geq U(x). \quad (8.2.6)$$

Итак, одномерное движение возможно только в том случае, если полная энергия E больше потенциальной энергии U . Это ответ на первый вопрос.

Ясен ответ и на второй вопрос. Движение возможно для тех значений x , где выполняется условие (6). Это обстоятельство хорошо просматривается на рис.1. Пусть

зависимость $U(x)$ дана, и ее мы изобразили графически. Тогда для выяснения ответа на приведенные выше вопросы достаточно отложить на этом же графике зависимость полной энергии E от x . Но так как $E = \text{const}$, она не зависит от x и полная энергия изобразится горизонтальной прямой. Величина E задана начальными условиями (5).

Для каждого изображенного значения E наглядно видно, где условие (6) выполняется, а где нет. Например, при $E = E_2$ движение возможно при $x \leq x_4$, $x_1 \leq x \leq x_2$ и $x \geq x_3$,

а при $x_4 \leq x \leq x_1$ и $x_2 \leq x \leq x_3$ - движение не возможно.

Границей между допустимыми и запрещенными для движения областями являются точки, в которых

$$U(x) = E. \quad (8.2.7)$$

Эти точки называются точками остановки или точками поворота. Они же и служат пределами интегрирования в выражении (4).

В этих точках кинетическая энергия частицы обращается в нуль, а, следовательно, и ее скорость обращается в нуль. Вообще говоря, в точке остановки скорость меняет знак. Причем, в каждой точке, лежащей по одну сторону от точки остановки, будут соответствовать два, отличающиеся знаком (направлением), значения скорости: одно значение соответствует движению к точке остановки, а другое - от точки остановки. В таком случае, два знака \pm у интеграла (4) как раз и дают нам для каждого значения координаты два возможных движения, отличающихся знаком (направлением) скорости.

Таким образом, в принципе решается и вопрос об однозначности интеграла (4). При прохождении точки поворота движение переходит с одной ветви корня на другую (с одного знака на другой). Но какой же знак взять изначально? Здесь надо понимать, что неопределенность знака связана с обратимостью законов механики, т.е. с их неизменностью при замене t на $-t$. Поэтому знак можно выбрать произвольно, например, плюс (+) (в каждой физической задаче это устанавливается физическим условием). Затем, при прохождении точки поворота уже поступают так, как обсуждалось выше.

Точки остановки можно использовать для классификации движения в целом. Если разрешенная область движения ограничена с обеих сторон, т.е. движение происходит в ограниченной, конечной области пространства и носит периодически характер, то такое движение называется финитным. Пример такого движения на рис.1 - движение для $E = E_2$ между точками x_1 и x_2 .

Если же область движения не ограничена или ограничена с одной стороны, т.е. частица может уйти на бесконечность, то движение называется инфинитным. Пример и такого движения легко указать на рис.1. Это движение для $E = E_1$ при любом x или для $E = E_2$ при $x > x_3$.

Иногда пользуются классификацией и самих областей движения. Разрешенную для движения область, ограниченную с двух сторон, т.е. область, где возможно финитное движение, называют потенциальная яма. Запрещенную область между двумя разрешенными называют потенциальный барьер. Эти названия соответствуют наглядным впечатлениям от рисунка. Например, при $E = E_2$ область между x_1 и x_2 является потенциальной ямой, а область между x_2 и x_3 - потенциальный барьер.

Запомним, что в классической механике закон сохранения энергии запрещает движение под потенциальным барьером. Это является итогом приведенных выше результатов. А важно помнить потому, что в квантовой механике все обстоит не так и интересней.

Возвращаясь в классическую механику, решим вопрос о периоде финитного движения. В случае финитного движения частица совершает повторяющееся движение между точками поворота. Поэтому можно ввести понятие периода T такого движения, т.е. промежутка времени, по истечении которого состояние частицы, т.е. x и \dot{x} , повторяется. Период можно определить как удвоенное время, необходимое частице для прохождения из x_1 в x_2 :

$$T = \sqrt{2\mu} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (8.2.8)$$

где x_1 и x_2 - точки остановки, найденные как корни уравнения (7).

Период колебаний одномерной механической системы в общем случае является

функцией ее полной энергии и, следовательно, полностью определяется начальными условиями. Существует только одна одномерная механическая система - линейный гармонический осциллятор, период колебаний которой не зависит от энергии. Эта задача будет рассмотрена отдельно.

§ 8.3. Общие свойства движения тел в центрально-симметричном поле

Центральным или центрально-симметричным полем называется поле, потенциальная энергия которой зависит только от расстояния до определенной неподвижной точки. Эту точку называют центром поля.

В соответствии с механической концепцией дальнего действия, взаимодействие тел должно быть центральным. Таковыми являются и гравитационное, и электростатическое взаимодействия, играющие важную роль в практических приложениях ньютоновской механики. Все это подчеркивает важность рассматриваемой темы.

Пусть частица массой μ движется в центральном поле. Обозначим \vec{r} - радиус-вектор частицы, проведенный из центра поля (начало отсчета координат выбрано в центре поля). Потенциальная энергия частицы может быть задана в общем виде как $U(r)$, где r - модуль вектора \vec{r} , т.е. расстояние от центра поля до частицы.

Тогда функция Лагранжа частицы запишется так

$$L = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r), \quad (8.3.1)$$

где $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v} = d\vec{r}/dt$ - скорость частицы.

Поскольку функция Лагранжа (1) не зависит от времени, то полная механическая энергия должна сохраняться

$$E = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = \text{const}. \quad (8.3.2)$$

Кроме того, ясно, что поворот частицы в центральном поле $U(r)$ относительно системы координат, связанной с центром поля, не может привести к изменению ее функции Лагранжа. Это означает, что сохраняется момент импульса

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}] = \text{const}, \quad (8.3.3)$$

где $\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$ - импульс частицы.

Если вектор момент импульса \vec{M} постоянен, то сохраняются неизменным и его абсолютная величина, и его направление в пространстве. По самому определению (3) векторы \vec{r} и \vec{M} перпендикулярны, значит при неизменном векторе \vec{M} вектор \vec{r} всегда будет лежать в одной плоскости, перпендикулярной вектору \vec{M} . Как видно из определения (3), в этой же плоскости лежит и вектор скорости частицы \vec{v} . Это означает, что траектория движения частицы в центральном поле является плоской кривой. Данный вывод - первое следствие из закона сохранения момента импульса \vec{M} .

Итак, траектория движения частицы в центральном поле лежит в одной плоскости. Положение этой плоскости в пространстве определяется начальным значением момента импульса \vec{M} , т.е. начальным радиус-вектором \vec{r} и начальной скоростью частицы $\dot{\vec{r}}$.

Совместим с этой плоскостью декартову плоскость xy , тогда движение частиц всегда будет происходить так, что $z = 0$ и $\dot{z} = 0$. В этом случае:

1. Расстояние от частицы до начала координат будет равно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

2. Функция Лагранжа запишется так

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(r);$$

3. Сохранение энергии примет вид

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r) = \text{const};$$

4. Момент импульса \vec{M} будет иметь только составляющую вдоль оси z и

она сохраняется

$$|\vec{M}| = M = M_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}.$$

Теперь удобно и естественно ввести полярные координаты ρ и φ . Полус совмещим с центром поля, а полярная ось (ее направление) пока произвольная. Связи между декартовыми и полярными координатами известны

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad \text{и} \quad r = \rho.$$

Тогда, с учетом того, что в полярных координатах

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

получим следующие выражения для функции Лагранжа L , энергии E и момента импульса \vec{M} в полярных координатах:

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r); \quad (8.3.4)$$

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const}; \quad (8.3.5)$$

$$\begin{aligned} M &= \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu(r\dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r^2\dot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r^2\dot{\varphi} \sin^2 \varphi) = \\ &= \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

В этих формулах: $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ - угловая скорость, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ - радиальная скорость.

В полярных координатах исследование движения частицы в центральном поле сводится к определению законов движения в виде функций $r(t)$ и $\varphi(t)$.

Законы движения находятся проще, если исходить из законов сохранения (5) и (6), образующих систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций $r(t)$ и $\varphi(t)$. Так мы и поступим.

Из (6) выразим угловую скорость

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2 \mu} \quad (8.3.7)$$

и подставим в (5). Получим

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{M}{\mu r^2} \right)^2 \right) + U(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (8.3.8)$$

Обычно величину

$$\frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r) = V(r) \quad (8.3.9)$$

называют эффективной потенциальной энергией.

Величину

$$\frac{M^2}{2\mu r^2}$$

называют центробежной потенциальной энергией, хотя это часть кинетической энергии частицы, связанная с ее вращением относительно центра поля.

Теперь можем уравнение (8) записать так

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V(r). \quad (8.3.10)$$

Задача о движении частицы в центральном поле свелась к задаче об одномерном

движении с эффективной потенциальной энергией $V(r)$. Это второе следствие закона сохранения момента импульса.

Уравнение (10) просто приводится к квадратуре. Получим

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r))}.$$

Отсюда найдем

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))/\mu}}. \quad (8.3.11)$$

Переменные разделились и можно провести интегрирование

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))/\mu}} + t_0. \quad (8.3.12)$$

Эта формула определяет в неявном виде расстояние от центра поля r как функцию времени t , т.е. это искомый закон движения $r(t)$.

Но еще надо найти и зависимость полярного угла φ от времени t , т.е. функцию $\varphi(t)$. Она связана с уже найденной функцией $r(t)$ уравнением (6) (или (7)). Значит, зависимость $\varphi(t)$ можно в принципе найти, подставив $r(t)$ из (12) в уравнение (7) и проинтегрировав полученное выражение

$$\varphi(t) = \frac{M}{\mu} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \varphi_0. \quad (8.3.13)$$

Законы движения $r(t)$ и $\varphi(t)$, полученные в результате интегрирования (12) и (13), будут содержать четыре постоянные: M , E , φ_0 и t_0 . Два из них определяются законами сохранения - это M и E , величина φ_0 зависит от выбора полярной оси.

Если нас интересует уравнение траектории, то ее можно получить, исключив из уравнений (12) и (13) время t . Останется зависимость между r и φ , а это и будет уравнением траектории.

Уравнение траектории $r(\varphi)$ или $\varphi(r)$ можно найти в явном виде и избегая предварительного определения законов движения $r(t)$ и $\varphi(t)$.

Для этого из уравнения (7) выразим $d\varphi$ и подставим в нее dt из (11):

$$d\varphi = \frac{M}{\mu r^2} dt = \frac{M}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))/\mu}}.$$

Остается взять интеграл

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}} + \varphi_0. \quad (8.3.14)$$

Это и есть уравнение траектории частицы движущейся в центральном поле. Здесь три свободных параметра: M , E и φ_0 .

Траектория оказалась независимой явно от времени, значит она может быть найдена без отыскания законов движения.

Отметим, что интегралы (12), (13) и (14) могут быть вычислены только тогда, когда потенциальная энергия $U(r)$ будет дана в явном виде. Тогда же возможна и дальнейшая детализация законов движения и уравнения траектории.

Однако некоторые общие соображения о характере и свойствах движения частицы в центральном поле можно высказать и не конкретизируя вида функции $U(r)$.

Как и в одномерном движении, допустимая область движения в центральном поле определяется законом сохранения энергии (5), записанном в виде (10): движение возмож-

но при тех значениях r , для которых

$$E - V(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} \geq 0. \quad (8.3.15)$$

Здесь знак равенства дает уравнение $E - V(r) = 0$, решением (корнями) которого являются границы области движения по расстоянию от центра поля. Эти же границы являются пределами интегрирования в формулах (12) и (14).

Минимальное значение r_{\min} , ограничивающее область изменения r , называется перигеом, а его максимально возможное значение $r = r_{\max}$ - апогеом. Теперь можно выбрать и полярную ось (до сих пор она была произвольной), от которой отсчитывается угол φ .

Если за полярную ось взять прямую, проходящую через центр поля и через перигеом траектории, то при $r = r_{\min}$ должно быть $\varphi = \varphi_0 = 0$. Такую ось называют апсидой. При этом уравнение траектории (14) принимает вид

$$\varphi = \pm \int_{r_{\min}}^r \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}}. \quad (8.3.16)$$

Наличие двух знаков перед интегралом в (16) указывает, что соответствующая траектория частицы симметрична относительно апсиды. Т.е. на одном и том же расстоянии r частица может находиться как под углом $+\varphi$, так и под углом $-\varphi$, отсчитываемым от апсиды. Аналогично, разные знаки в (12) означают, что время движения от точки r_{\min} до заданной точки r в обоих направлениях от r_{\min} одинаково. При прохождении точки поворота r_{\min} или r_{\max} , выражения (12) или (16) переходят с одного знака на другой.

Одномерное движение с эффективным потенциалом $V(r)$ (9) имеет и существенные отличия от истинного одномерного движения, рассмотренного в §33. Например, и там и тут в точке поворота скорость $\dot{r} = 0$. Но в центральном поле это не означает остановку частицы, как в истинном одномерном движении. Это связано с тем, что в этих точках угловая скорость не может стать равным нулю $\dot{\varphi} \neq 0$, иначе, согласно (7), нарушился бы закон сохранения момента \vec{M} .

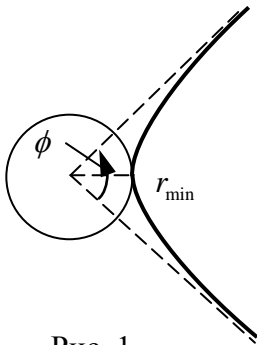


Рис. 1

Равенство $\dot{r} = 0$ означает, что при переходе через точку поворота радиальная компонента скорости $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ меняет знак: если до точки поворота она была положительной $\frac{dr}{dt} > 0$, т.е. движущееся тело удалялось от центра поля, то после прохождения точки поворота величина $\frac{dr}{dt}$ станет отрицательной $\frac{dr}{dt} < 0$ и расстояние между телом и центром поля будет уменьшаться.

Если область допустимого значения r ограничена лишь одним условием $r \geq r_{\min}$, то движение называют инфинитным. При этом частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность (Рис. 1).

Причем, если поле такое, что на бесконечности $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, то траектория частицы на бесконечности должна быть прямолинейной, так как частица становится свободной. Следовательно, в этом случае траектория инфинитного движения имеет асимптоты.

Из симметрии траектории относительно апсиды следует, что асимптоты пересекаются в точке, лежащей на апсиде. Угол между асимптотами ϕ легко находится из (16):

$$\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}}. \quad (8.3.17)$$

Этот угол называют полным углом отклонения, испытываемого частицей за все время инфинитного движения, начинающегося на бесконечности и заканчивающегося уходом частицы на бесконечность (Рис. 1).

Если область изменения r имеет две границы

$$r_{\min} < r < r_{\max},$$

то движение финитное и траектория будет лежать внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$ (Рис.2).

Легко заметить из (7), что при прохождении точки $r = r_{\min}$ угловая скорость частицы будет $\dot{\phi}_{\min} = \frac{M}{\mu r_{\min}^2}$, а в точке $r = r_{\max}$ будет $\dot{\phi}_{\max} = \frac{M}{\mu r_{\max}^2}$ и всегда

$$\dot{\phi}_{\min} > \dot{\phi}_{\max}. \quad (8.3.18)$$

Траектория финитного движения не всегда замкнута. За период времени ΔT , в течение которого r изменяется от r_{\min} до r_{\max} а затем снова до r_{\min} , радиус-вектор повернется на угол равный, согласно (16),

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}}. \quad (8.3.19)$$

Сама траектория вращается вокруг центра с угловой скоростью $\Delta\phi/\Delta T$, где

$$\Delta T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))/\mu}}. \quad (8.3.20)$$

Но, возможен случай, когда радиус-вектор частицы, сделав n_1 оборотов вокруг центра, совпадет со своим первоначальным значением, т.е. траектория замкнется. При этом период времени ΔT повторится n_2

раза. Такое явление возможно, если $\Delta\phi$ равен рациональной части 2π , т.е.

$$n_2 \Delta\phi = n_1 2\pi \quad \text{и} \quad \Delta\phi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}.$$

Отметим без доказательства, что согласно теореме Бертрана существуют только два типа центральных полей, в которых выполняется это условие, и траектории финитных движений замкнуты. Это поля, где зависимость потенциальной энергии U от расстояния имеет вид $U(r) \approx \frac{1}{r}$ или $U(r) \approx r^2$. Во всех остальных центральных полях траектория финитного движения незамкнута. Она бесчисленное число раз проходит минимальное и максимальное расстояния и заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.

В центральном поле, кроме финитного и инфинитного движения, возможен и третий тип движения, который не встречался при истинном одномерном движении. По своему смыслу, полярная координата r меняется только в пределах $0 \leq r \leq \infty$. Может ли эта координата частицы дойти до нуля? Такое движение, если оно возможно, называется лимитационным.

Условие падения на центр можно получить из выражения (15). Перепишем (15), подставив значение эффективной потенциальной энергии (9), в виде

$$\frac{M^2}{2\mu} + r^2 U(r) \leq r^2 E.$$

Падение на центр возможно в том случае, если при $r \rightarrow 0$ это равенство не нарушится.

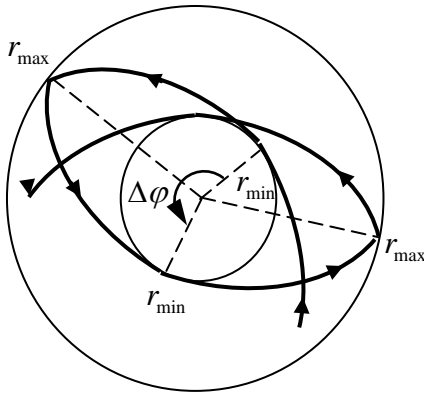


Рис. 2

Значит, должно выполняться

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r^2 U(r)) \leq -\frac{M^2}{2\mu}.$$

Ясно, что это условие выполняется только для некоторых полей, определенных видов потенциальной энергии $U(r)$. В общем случае это должно быть поле притяжения $U < 0$ и при $r \rightarrow 0$ функция $U(r)$ должна стремиться к бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$ или как $\frac{1}{r^2}$, но с коэффициентом большим, чем $\frac{M^2}{2\mu}$. Ясно и то, что лимитационное движение может иметь только одну точку поворота $r = r_{\max}$ или же вообще ее не иметь.

И еще об одной закономерности движения, общей для всех центральных полей. Представим выражение (7) в следующем виде

$$dt \frac{M}{\mu} = r^2 d\varphi = 2 \left(\frac{r \cdot r d\varphi}{2} \right). \quad (8.3.21)$$

Величине, стоящей в скобках, можно дать геометрическую интерпретацию (рис. 3). За бесконечно малый промежуток времени dt радиус-вектор \vec{r} повернул на малый угол $d\varphi$ и описал площадь dS . Площадь dS - это площадь треугольника, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами $r(t)$, $r(t + dt)$ и элементом дуги траектории. В силу малости угла $d\varphi$ можем записать $h = r d\varphi$. Тогда для площади треугольника с той же точностью получим

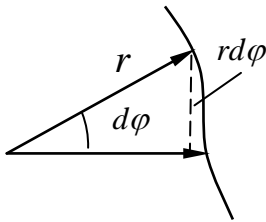


Рис. 3

$$dS = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r \cdot r d\varphi}{2}.$$

Теперь выражение (21) примет вид

$$dt \frac{M}{\mu} = 2dS. \quad (8.3.22)$$

Так как $\frac{M}{\mu} = \text{const}$, то получили еще одно следствие закона сохранения момента импульса для частицы в центральном поле: за равные промежутки времени dt радиус-вектор \vec{r} движущейся частицы описывает равные площади dS . Поэтому закон сохранения момента импульса (3) или (6) называют интегралом площадей или вторым законом Кеплера.

Величина $\sigma = \frac{dS}{dt}$ представляет собой площадь, описываемую радиус-вектором движущейся частицы в единицу времени и носит название секториальная скорость. Тогда сохранение момента импульса означает постоянство секториальной скорости.

§ 8.4. Задача Кеплера

Общие закономерности движения в кулоновском поле. Закон движения и траектория частицы в центральном поле в общем случае задаются соотношениями (8.3.12), (8.3.13) и (8.3.16). Не всегда, не для всякого вида поля $U(r)$ удастся провести аналитическое интегрирование в этих формулах. Разумеется, специальный интерес представляют те случаи, когда ответ все же получается в виде известных и хорошо изученных элементарных функций. Такой результат легко поддается наглядному и количественному исследованию.

Рассмотрим пример, когда указанные выше интегралы могут быть до конца вычислены в элементарных функциях. Это так называемая задача Кеплера - движение частицы в поле, потенциальная энергия в которой убывает обратно пропорционально расстоянию.

Такая потенциальная энергия задается функцией

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (8.4.1)$$

Если $\alpha > 0$, то это поле притяжения, а если $\alpha < 0$ - поле отталкивания. Примеры таких полей: поле тяготения, кулоновское электростатическое поле. В общем случае все эти поля назовем кулоновскими полями.

Эффективный потенциал кулоновского поля получим, поставив (1) в (8.3.9)

$$V(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (8.4.2)$$

Построим график этой функции. Начнем с отталкивающего поля, когда $\alpha < 0$. В этом случае всегда $V(r) > 0$ и при $r \rightarrow 0$ получим $V(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$, а при $r \rightarrow \infty$ имеем $V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. График такой функции $V(r)$ представлен кривой *a* на рис.1.

Уже можно предсказать, что в отталкивающем поле движение возможно только тогда, когда частица имеет положительную полную энергию $E > 0$. Это движение имеет инфинитный характер.

А что можно сказать о функции $V(r)$ в случае поля притяжения, когда $\alpha > 0$? Начнем выяснять поведение функции (2) при разных значениях r .

а) Пусть $r \rightarrow \infty$. В этом случае $\left| \frac{\alpha}{r} \right| > \frac{M^2}{2\mu r^2}$, значит $V(r \rightarrow \infty)$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений.

б) Если $r \rightarrow 0$, то $-\frac{\alpha}{r}$ стремится к $-\infty$, а $\frac{M^2}{2\mu r^2}$ стремится к $+\infty$. Но при $r \rightarrow 0$ имеем $\frac{M^2}{2\mu r^2} > \frac{\alpha}{r}$, поэтому $V(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$.

в) Между двумя рассмотренными пределами эффективный потенциал поля притяжения имеет минимум V_μ при некотором $r = r_\mu$. Найдём его из условия

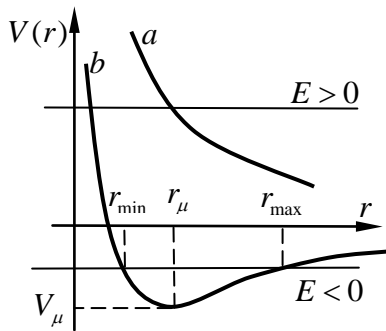


Рис. 1

Отсюда:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{2M^2}{2\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

$$r_\mu = \frac{M^2}{\mu\alpha}.$$

Подставив это значение в формулу (2), получим

$$V_\mu = \frac{M^2}{2\mu r_\mu^2} - \frac{\alpha}{r_\mu} = \frac{M^2}{2\mu} \frac{\mu^2 \alpha^2}{M^4} - \alpha \frac{\mu\alpha}{M^2} = -\frac{\alpha^2 \mu}{2M^2}. \quad (8.4.3)$$

Следовательно, график эффективной потенциальной энергии поля притяжения должен иметь вид кривой *b*, приведенный на рис. 1. Очевидно, что при $E \geq 0$ движение инфинитное. Финитное движение возможно для частиц с энергией $E < 0$, причем должно быть $V_\mu < E < 0$. Такое движение происходит внутри кольца (r_{\min}, r_{\max}) . Если $E \rightarrow V_\mu$, то кольцо сжимается в окружность радиуса r_μ и будет наблюдаться устойчивое движение по окружности по минимуму эффективного потенциала.

Итак, мы качественно установили связь между видом траектории и полной энергией частицы как для поля притяжения, так и для поля отталкивания.

Рассмотрим аналитическое решение задачи Кеплера. Нас сейчас будет интересовать не вопрос о том, как протекает движение во времени, т.е. не закон движения, а форма траектории. Уравнение траектории можно получить из общей формулы (8.3.16). Подста-

вим в нее значение $V(r)$ из (2)

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\alpha\mu}{r} - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (8.4.4)$$

Сделаем замену

$$x = \frac{M}{r} - \frac{\alpha\mu}{M}. \quad (8.4.5)$$

Тогда

$$dx = -\frac{M}{r^2} dr. \quad (8.4.6)$$

Кроме того, из

$$x^2 = \left(\frac{M}{r} - \frac{\alpha\mu}{M} \right)^2 = \frac{M^2}{r^2} - 2\frac{M}{r} \frac{\alpha\mu}{M} + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2} = -\left(-\frac{M^2}{r^2} + 2\frac{\alpha\mu}{r} \right) + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2}$$

найдем, что

$$2\frac{\alpha\mu}{r} - \frac{M^2}{r^2} = \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2} - x^2. \quad (8.4.7)$$

В формуле (4) произведем замены (6) и (7). Получим

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\mu E + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2} - x^2}}.$$

Обозначив

$$B = 2\mu E + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2} \quad (8.4.8)$$

получим табличный интеграл

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{B - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{B}}\right).$$

Поставим в эту формулу величину x из (5) и величину B из (8) и возвратимся к переменной r :

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{\alpha\mu}{M}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2}}} \bigg|_{r_{\min}}^r.$$

Полярная ось (апсида) нами выбрана проходящей через r_{\min} , т.е. при $r = r_{\min}$ всегда $\varphi = 0$. Поэтому подстановка нижнего предела должна дать нуль. Значит, для уравнения траектории получим

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{\alpha\mu}{M}}{\sqrt{2\mu E + \alpha^2\mu^2/M^2}}. \quad (8.4.9)$$

Придадим ей более наглядный и знакомый вид. Обратим формулу (9)

$$\cos \varphi = \left(\frac{M}{r} - \frac{\alpha\mu}{M} \right) / \sqrt{2\mu E + \frac{\alpha^2\mu^2}{M^2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части на $\alpha\mu/M$ и получим следующую запись уравнения траектории (9):

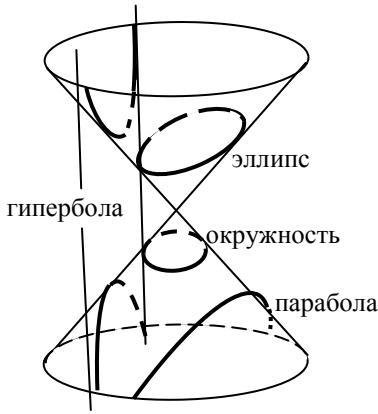


Рис. 2

$$\left(\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu} + 1} \right) \cos \varphi = \frac{M^2}{\alpha \mu r} - 1.$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu} + 1}, \quad (8.4.10)$$

$$p = \frac{M^2}{\alpha \mu}, \quad (8.4.11)$$

то рассматриваемое уравнение траектории запишется в виде известного из аналитической геометрии уравнения

$$\varepsilon \cos \varphi = \frac{p}{r} - 1,$$

которую перепишем в следующем виде

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (8.4.12)$$

Это уравнение конического сечения в полярных координатах с фокусом в начале координат (рис. 2). В геометрии величина p называется фокальным параметром, а ε - относительным эксцентриситетом. Знак параметра p определяется знаком α , т.е. $p > 0$ в поле притяжения и $p < 0$ в поле отталкивания.

Из геометрии известно и то, что вид конического сечения, т.е. вид траектории частицы, определяется величиной параметра ε (рис. 3).

1. Если $\varepsilon < 1$, то уравнение (12) дает эллипс. В частности, при $\varepsilon = 0$ получим окружность.
2. Если $\varepsilon = 1$, то уравнение (12) дает параболу.
3. Если $\varepsilon > 1$, то уравнение (12) дает гиперболу.

Первая траектория окружность или эллипс соответствует финитному движению, два последних типа траекторий - инфинитному движению.

От чего же зависит вид траектории? Ответ на этот вопрос следует из определения эксцентриситета (10). Перепишем ее в виде

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2M^2}{\alpha^2 \mu} E. \quad (8.4.13)$$

Видно, что соотношение между ε и 1, а значит и форма траектории, зависит от знака полной энергии частицы E (этот результат в предыдущем параграфе был получен качественно).

Полная энергия E сохраняется и она равна начальной энергии частицы E_0 :

$$E = E_0 = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{\alpha}{r_0}. \quad (8.4.14)$$

Здесь v_0 скорость частицы в некоторой начальной точке r_0 .

Таким образом, величина полной энергии при заданном поле (заданном α) определяется начальной скоростью частицы v_0 . Значит, в конечном счете, и траектория частицы определяется этой скоростью.

Если имеем поле отталкивания ($\alpha < 0$), то, как следует из (14), всегда $E > 0$, значит из (10) получим $\varepsilon > 1$ и траектория частицы является гиперболой и этот вывод не зависит от величины начальной скорости.

Для притягивающего поля ($\alpha > 0$) траектория намного разнообразней.

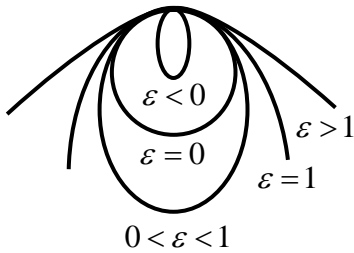


Рис. 3

1. Если $E > 0$, то $\varepsilon > 1$ и траектория будет гиперболой. Это возможно, если кинетическая энергия больше потенциальной. Тогда из (14) получим

$$\frac{\mu v_0^2}{2} > \frac{\alpha}{r_0}.$$

Значит, если начальная скорость частицы v_{01} удовлетворяет условию

$$v_{01} > \sqrt{2\alpha/r_0\mu}, \quad (8.4.15)$$

то движение частицы в поле притяжения будет происходить по гиперболе.

2. Если $E = 0$, то $\varepsilon = 1$ и получим параболу. Но это возможно, если кинетическая энергия по величине равна потенциальной энергии. Опять из (14) получим, что для этого начальная скорость частицы v_{02} должна быть равной

$$v_{02} = \sqrt{2\alpha/r_0\mu}. \quad (8.4.16)$$

Получили условие движения частицы в поле притяжения по параболической траектории.

3. Если $E < 0$, то $\varepsilon < 1$ и траектория будет иметь вид эллипса. Для этого кинетическая энергия должна быть меньше потенциальной, что возможно при

$$v_{03} < \sqrt{2\alpha/r_0\mu}. \quad (8.4.17)$$

Значит, если скорость частицы v_{03} удовлетворяет условию (17), то частица будет двигаться по эллипсу. В частном случае, когда

$$E = -\frac{\alpha^2\mu}{2M^2} \quad (8.4.18)$$

получим $\varepsilon = 0$ и траекторией будет окружность.

Для этого случая так же можно оценить скорость v_{04} . Подставим значение энергии (18) в формулу (14)

$$-\frac{\alpha^2\mu}{2M^2} = \frac{\mu v_{04}^2}{2} - \frac{\alpha}{r_0}.$$

Из этого равенства надо найти v_{04} . Проведем необходимое преобразование

$$\frac{\mu v_{04}^2}{2} = \frac{\alpha}{r_0} - \frac{\alpha^2\mu}{2M^2} = \frac{\alpha}{r_0} \left(1 - \frac{\alpha\mu r_0}{2M^2}\right).$$

Отсюда

$$v_{04} = \sqrt{\frac{2\alpha}{r_0\mu} \left(1 - \frac{\alpha\mu r_0}{2M^2}\right)}. \quad (8.4.19)$$

Такова скорость частицы, движущейся по кругу в поле притяжения.

Таким образом, в поле притяжения движение возможно при начальной скорости $v_0 \geq v_{04}$. Причем, скорость v_{03} является границей, разделяющей финитное и инфинитное движения.

В нашем случае поле на бесконечности равно нулю. Тогда для частиц приходящих из бесконечности в такое поле притяжения, из приведенного выше анализа траекторий можно получить следующие выводы.

Из (14) следует, что такие частицы и на бесконечности могут иметь отличную от нуля скорость $v_\infty \geq 0$. Эти частицы, сблизившись с полем (с ее центром), обязательно уйдут обратно на бесконечность. Такое движение называют рассеянием. Причем, если $v_\infty = 0$, то траектория будет параболой, а если $v_\infty > 0$ - гиперболой. Такие частицы (входящие в поле из бесконечности) могут перейти на финитную траекторию, только если они

часть своей энергии отдадут куда-либо.

Финитное движение в задаче Кеплера. Нам уже известны условия, когда в центральном поле, убывающем как $1/r$, движение частицы будет финитным. Во-первых, поле должно быть полем притяжения ($\alpha > 0$), во-вторых - полная энергия $E < 0$. Как мы убедились, это возможно при ограниченных сверху и снизу значениях начальной скорости частицы:

$$v_{04} \leq v_0 \leq v_{02}.$$

Финитная траектория может иметь вид эллипса или окружности. Если траектория - эллипс, то нагляднее характеризовать его большой a и малой b полуосями (рис.4). Величины a и b определяются эксцентриситетом ε и параметром p :

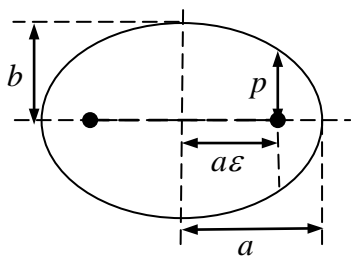


Рис. 4

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad (8.4.20)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (8.4.21)$$

Если $\varepsilon = 0$, то получим окружность с радиусом

$$R = a = b = p.$$

Теперь найдем зависимость полуосей a и b от характеристик поля и частицы: α, E, \vec{M} . Для этого достаточно вспомнить зависимости от этих характеристик величин p и ε , т.е. надо обратиться к формулам (10) и (11). Напомним: знак p зависит от знака α и в поле притяжения $p > 0$.

Подставляя (10) и (11) в (20), для большой полуоси получим

$$a = \frac{M^2}{\alpha\mu} \frac{1}{1 - \left(\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu} + 1 \right)} = -\frac{M^2}{\alpha\mu} \frac{\alpha^2\mu}{2EM^2} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (8.4.22)$$

Здесь учтено, что для финитного движения $E < 0$.

Таким образом, большая полуось эллиптической траектории частицы зависит от полной энергии частицы E , но не зависит от момента импульса \vec{M} .

Для малой полуоси из (21) получим

$$b = \frac{\alpha}{2|E|} \sqrt{1 - \left(\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu} + 1 \right)} = \frac{\alpha}{2|E|} \sqrt{\frac{2|E|M^2}{\alpha^2\mu}} = \frac{M}{\sqrt{2|E|\mu}}, \quad (8.4.23)$$

т.е. малая полуось эллиптической траектории частицы зависит и от E , и от $|\vec{M}|$. При заданной полной энергии E эллиптическая траектория частицы сплюснута тем больше, чем меньше ее момент импульса M .

Финитное движение в задаче Кеплера - это периодическое движение. Вычислим период T такого движения.

Это можно было бы найти способом - общим для центральных полей, т.е. использовать соотношение (8.3.20). Или воспользоваться формулой для угловой скорости (8.3.7), полученной из закона сохранения момента,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{r^2\mu}.$$

Тогда, разделяя переменные и проинтегрировав, найдем зависимость $t(\varphi)$:

$$t = \int \frac{r^2\mu}{M} d\varphi.$$

По смыслу период финитного движения T - это время, затрачиваемое на измене-

ние полярного угла φ от 0 до 2π . Следовательно

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\mu r^2}{M} d\varphi. \quad (8.4.24)$$

Для вычисления интеграла надо вместо r подставить уравнение траектории.

Но всего этого можно избежать, если обратиться к геометрической интерпретации закона сохранения момента импульса, т.е. к формуле (8.3.22)

$$dt \frac{M}{\mu} = 2dS.$$

В случае финитного движения в кулоновском поле за время равное периоду T радиус-вектор движущейся частицы опишет площадь равную площади орбиты S . Значит, можем записать

$$T \frac{M}{\mu} = 2S.$$

Но в нашем случае площадь орбиты S это площадь эллипса $S = \pi ab$. Тогда

$$T = \frac{2\mu}{M} S = \frac{2\mu}{M} \pi ab.$$

Подставив значения a и b из (22) и (23), получим

$$T = \frac{2\mu}{M} \pi ab = \frac{2\mu}{M} \pi \frac{\alpha}{2|E|} \frac{M}{\sqrt{2|E|\mu}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}. \quad (8.4.25)$$

Период обращения по финитной траектории зависит только от энергии частицы и не зависит от момента.

В формулу (25) подставим значение $|E| = \frac{\alpha}{2a}$ из (22) и возведем в квадрат полученное выражение

$$T^2 = \pi^2 \alpha^2 \frac{\mu}{2} \frac{2^3 a^3}{\alpha^3}.$$

Из него следует

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} a^3. \quad (8.4.26)$$

Квадрат периода обращения частицы по эллиптической траектории в кулоновском поле притяжения пропорционален кубу большой полуоси. Это и есть третий закон Кеплера.

Подчеркнем, что формулировка (26) выполняется точно для центрального поля притяжения вида: $U = -\alpha/r$.

Исторический третий закон Кеплера был сформулирован для частного случая - движения планет солнечной системы - в следующем виде:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \text{ одна и та же величина для всех планет.}$$

Но именно такая формулировка третьего закона Кеплера выполняется приблизительно (хотя и с большой точностью): - отношение $\frac{T^2}{a^3}$ зависит от массы планеты. Это связано со следующими обстоятельствами.

Движение планет вокруг Солнца - это задача двух тел. Центральное поле является гравитационным, поэтому $\alpha = \gamma m_n m_c$, где m_c - масса Солнца, m_n - масса планеты. Значит, в соответствии с выводами §8.1, надо рассмотреть движение тела с приведенной массой

$\mu = \frac{m_n m_c}{m_n + m_c}$ вокруг неподвижного центра гравитационного поля, помещенного в центр

масс. Именно эта задача нами и решена.

Ясно, что период движения не зависит от выбора системы отсчета. Входящая в (26) большая полуось a соответствует эллипсу, по которому движется приведенная масса (изображающая точка). В экспериментальном законе Кеплера используется полуось эллипса (орбиты) планеты a'_n . Поэтому в формуле (26) надо перейти к характеристикам действительной траектории планеты. Так как в системе центра масс законы движения приведенной массы r и планеты r'_n связаны соотношением (8.1.13) $r'_n = \frac{m_c}{m_n + m_c} r$ и они дают подобные траектории (в этом случае подобные эллипсы), то, следовательно,

$$a'_n = \frac{m_c}{m_n + m_c} a.$$

В таком случае для сравнения с данными по движению планет вокруг центра масс системы “ планета+Солнце ” мы должны взять (26) в следующем виде

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{1}{\gamma m_n m_c} \left(\frac{m_n m_c}{m_n + m_c} \right) \left(\frac{m_n + m_c}{m_c} a' \right)^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{(m_n + m_c)^2}{m_c^3} (a')^3.$$

Представим это выражение в следующем виде

$$\frac{T^2}{(a')^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_c} \left(\frac{m_n}{m_c} + 1 \right)^2 \approx \frac{4\pi^2}{\gamma m_c} \left(1 + 2 \frac{m_n}{m_c} + \dots \right)^2.$$

Действительно, это выражение зависит от массы планет m_n . Но поскольку масса любой из планет весьма мала по сравнению с массой Солнца ($m_n \ll m_c$), то на эксперименте отношение $\frac{T^2}{(a')^3}$ для любых двух планет одинаково с большой точностью.

Инфинитное движение в задаче Кеплера. Рассеяние частиц. Рассмотрим теперь инфинитное движение частицы в задаче Кеплера (поле $U = -\alpha/r$). Уже отмечалось, что такое движение возможно как в поле притяжения, так и в поле отталкивания. Полная энергия частицы определяется начальными данными в соответствии с формулой (14).

Если поле является полем притяжения ($\alpha > 0$), то инфинитное движение возможно для частицы с полной энергией $E \geq 0$. При вычислении траектории движения надо помнить, что $p > 0$ и его значение определяется формулой (11). В случае $E = 0$ из (10) имеем $\varepsilon = 1$ и траектория частицы будет параболическая (рис.5) и опишется уравнением, получаемым из (12),

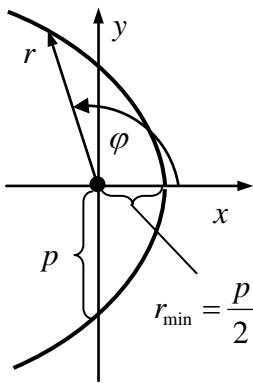


Рис. 5

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}. \quad (8.4.27)$$

При $\varphi = 0$ получим расстояние r_{\min} от фокуса до перигея

$$r_{\min} = \frac{p}{2} = \frac{M^2}{2\alpha\mu}.$$

Если $\varphi = \pi/2$, то $r = p$. При $\varphi \rightarrow \pm\pi$ частица уходит на бесконечность ($r \rightarrow \infty$), при этом $v \rightarrow 0$ (это следует из (16)).

Если же в поле притяжения попала частица с $E > 0$, то формула (10) дает $\varepsilon > 1$ и траектория движения частицы будет гиперболической (рис.6)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (8.4.28)$$

При $\varphi = 0$ из формулы (28), подставив значения ε (10) и p (11), получим расстояние до перигея

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{p(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2-1} = \frac{M^2}{\alpha\mu} \frac{1}{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1-1} \left(\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1}-1 \right) = \frac{\alpha}{2E} \left(\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1}-1 \right). \quad (8.4.29)$$

Так как, в рассматриваемом случае, $\varepsilon > 1$ и $p > 0$, а $\cos \varphi$ может быть как положительным, так и отрицательным, то возможные значения угла φ ограничены. Это связано с тем, что в (28) левая часть существенно положительная величина. Тогда обязательным требованием будет

$$1 + \varepsilon \cos \varphi \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \cos \varphi \geq -1/\varepsilon.$$

Значит угол φ меняется в пределах

$$-\arccos(-1/\varepsilon) \leq \varphi \leq \arccos(-1/\varepsilon).$$

При граничных значениях угла

$$\varphi_0 = \pm \arccos(-1/\varepsilon)$$

частица уходит на бесконечность. Этот угол больше $\pi/2$.

Отсюда можно заключить, что траекторией будет та ветвь гиперболы, которая охватывает центр поля. На рис.6 это левая, ближняя ветвь гиперболы.

В таком случае, полный угол отклонения ϕ составит

$$\phi = 2\varphi_0 = 2\arccos(-1/\varepsilon) = 2\arccos\left(-1/\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1}\right). \quad (8.4.30)$$

Осталось рассмотреть инфинитное движение частиц в отталкивающем поле, т.е. при $\alpha < 0$. Уже мы знаем, что такое движение возможно только с положительной полной энергией $E > 0$.

В этом случае $p < 0$. Тогда в определении эксцентриситета (10)

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1}$$

перед корнем надо взять знак минус. Иначе уравнение траектории (12) потеряет физический смысл. Теперь уравнение траектории (12) надо записать в виде

$$r = \frac{-|p|}{1-\varepsilon \cos \varphi} \quad \text{или} \quad r = \frac{|p|}{\varepsilon \cos \varphi - 1}. \quad (8.4.31)$$

Так как в данном случае $\varepsilon > 1$, то это уравнение гиперболы. Причем оно описывает дальнюю от фокуса ветвь гиперболы (на рис.7 это правая ветвь).

Точка перигентра обладает координатами

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad r_{\min} = \frac{|p|}{\varepsilon-1} = \frac{|p|(\varepsilon+1)}{\varepsilon^2-1} = \frac{\alpha}{2E} \left(\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2\mu}+1}+1 \right). \quad (8.4.32)$$

Если частица уходит на бесконечность ($r \rightarrow \infty$), то из уравнения траектории (31) получим $\cos \varphi \rightarrow 1/\varepsilon$ и $\varphi \rightarrow \arccos 1/\varepsilon$. Как и в случае притягивающего поля, здесь возникает условие положительности правой части равенства (31). Угол φ может меняться только в пределах, не нарушающих условия

$$\varepsilon \cos \varphi - 1 \geq 0 \quad \text{или} \quad \cos \varphi \geq 1/\varepsilon.$$

Это дает

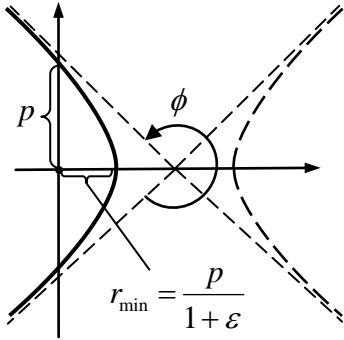


Рис. 6

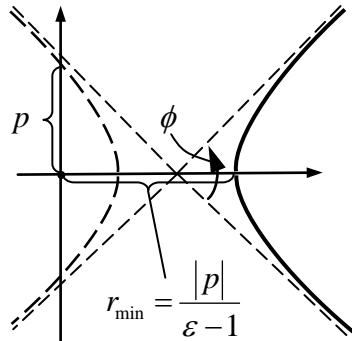


Рис. 7

$$-\arccos \frac{1}{\varepsilon} \leq \varphi \leq \arccos \frac{1}{\varepsilon},$$

как и должно быть для траектории, описываемой дальней ветвью гиперболы.

В таком случае для полного угла отклонения ϕ получим

$$\phi = 2 \arccos \frac{1}{\varepsilon} = 2 \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu} + 1}} \right). \quad (8.4.33)$$

Физически безразлично, отсчитываем ли мы полный угол отклонения ϕ по или против часовой стрелки. Значит углы отклонения ϕ и $(2\pi - \phi)$ физически эквивалентны. В таком случае формулы (31) и (33) дают один и тот же угол, т.е. угол отклонения в поле $U = -\alpha/r$ не зависит от знака потенциала.

Для полного угла отклонения можно получить удобную форму. Из (30) или (33) имеем

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu} + 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} - 1 = \frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu}$$

В левой части проведем тригонометрическое преобразование

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} - \cos^2 \frac{\phi}{2} \right) = \tan^2 \frac{\phi}{2}.$$

Получили

$$\frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu} = \tan^2 \frac{\phi}{2}. \quad (8.4.34)$$

Следовательно, угол отклонения предстанет в виде

$$\phi = 2 \arctg \sqrt{\frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu}} = 2 \arctg \left(\frac{M}{\alpha} \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \right). \quad (8.4.35)$$

С учетом сказанного выше, эта формула годна и в поле притяжения, и в поле отталкивания. Она определяет угол между асимптотами к траектории.

В рассматриваемом нами случае инфинитного движения, частица из бесконечности сближается с центром поля и, после взаимодействия, уходит на бесконечность, т.е. произошло рассеяние. На практике при изучении этого движения интересуются не полным углом отклонения ϕ , а тем, насколько частица отклонилась от первоначального направления движения, т.е. как изменилось направление скорости частицы (рис. 8).

Пусть частица движется с право налево. Изменение направления движения характеризуется углом, называемым углом рассеяния. Это угол между асимптотами направлений скоростей. Обозначим его χ . Из рисунка не сложно установить соотношение между

углами ϕ и χ :

$$\chi = \pi - \phi.$$

Тогда

$$\tan \frac{\phi}{2} = \tan \frac{\pi - \chi}{2} = \cotg \frac{\chi}{2}.$$

Теперь формула (34) примет вид

$$\cotg^2 \frac{\chi}{2} = \frac{2EM^2}{\alpha^2 \mu}. \quad (8.4.36)$$

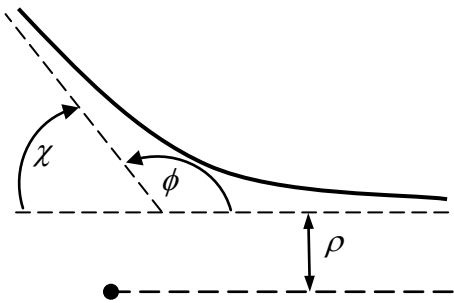


Рис. 8

Таким образом, угол рассеяния частицы является функцией ее полной энергии E и момента M . Так как

и E , и \vec{M} сохраняются, то их можно вычислить на асимптотической части траектории, когда частица находится на бесконечности и на нее поле еще не оказывает влияния.

Обозначим скорость частицы на бесконечности \vec{v}_∞ . Если бы поле не действовало, то частица пролетела бы на каком-то расстоянии ρ от центра поля. Величину ρ называют прицельным параметром. Тогда

$$M = |\vec{M}| = \rho \mu v_\infty.$$

Кроме того

$$E = E_0 = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \text{ так как } U(r \rightarrow \infty) = 0.$$

Подставим эти значения энергии E и момента M в (36) и получим

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} = \frac{2}{\alpha^2 m} \frac{m v_\infty^2}{2} \rho^2 \mu^2 v_\infty^2 = \frac{\mu^2 v_\infty^4}{\alpha^2} \rho^2. \quad (8.4.37)$$

Выразим ρ через χ :

$$\rho = \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}. \quad (8.4.38)$$

Итак, получено соотношение (37), устанавливающее зависимость угла рассеяния от прицельного параметра. Можно решить и обратную задачу: формула (38) позволяет по известному углу рассеяния найти прицельный параметр. Причем, формулы (37) и (38) справедливы как для поля притяжения, так и для поля отталкивания.

§ 8.5. Сечение рассеяния на кулоновском поле

Практическое, непосредственное использование полученных соотношений между углом рассеяния χ и прицельным параметром ρ связано с некоторыми (иногда непреодолимыми) трудностями. Например, не во всех случаях можно измерить прицельный параметр частицы, а для микроскопических частиц это и не возможно. Кроме того, с точки зрения экспериментальных возможностей весьма затруднительно направить на рассеивающий центр одну единственную частицу (особенно, опять же, для случая микрочастиц).

Реально всегда иметь дело с пучком (совокупностью) частиц, каждый из которых имеет свой прицельный параметр и, соответственно, каждый из них рассеивается под различными углами. С энергиями или со скоростями этих частиц несколько проще - пучок частиц всегда можно сделать с достаточной точностью монохроматичным и однородным, т.е. скорости всех частиц будут одинаковы по величине и по направлению и плотность частиц будет постоянна в пространстве и времени.

Для такого случая в физике имеется остроумный и адекватный эксперименту прием, позволяющий перейти от изучения индивидуального акта рассеяния к статистическим описаниям вероятностных свойств целого семейства таких индивидуальных процессов.

Пусть монохроматический и однородный пучок частиц падает на рассеивающий центр. Взаимодействием частиц данного пучка между собой пренебрегаем. Допустим, что мы знаем или можем измерить плотность падающих частиц n , т.е. число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка. Также можем определить число частиц dN , рассеянных в определенном направлении в единицу времени.

Эффективным сечением называется отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}. \quad (8.5.1)$$

Таким образом, для экспериментального исследования процессов рассеяния потока частиц достаточно измерить плотность частиц до рассеяния n и количество частиц dN ,

рассеиваемых под различными углами. Тогда по формуле (1) мы получим экспериментальную зависимость эффективного сечения рассеяния $d\sigma$ от угла рассеяния χ .

Теперь надо величину $d\sigma$ научиться рассчитывать и теоретически. Необходимо установить ее связь с характеристиками частицы.

Мы предположили, что пучок частиц монохроматичен и однороден. Полагаем, что частицы с разными прицельными параметрами ρ рассеются на различные углы χ . Пусть связь между величинами ρ и χ однозначная.

Тогда частицы, прицельные параметры которых лежат в определенном интервале между $\rho(\chi)$ и $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ рассеются на некоторые углы в пределах от χ до $\chi + d\chi$ (рис.1).

Но число частиц, рассеянных под углами от χ до $\chi + d\chi$ в единицу времени, - это и есть измеренное на эксперименте число dN . Подсчитаем число таких частиц.

Так как известна плотность падающих частиц n , то это число будет равно

$$dN = n \cdot S,$$

где S - площадь кольца, ограниченного окружностями с радиусами $\rho(\chi)$ и $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Для малых $d\rho$ с большой точностью можем записать

$$S = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Значит, искомое число частиц рассеянных на углы от χ до $\chi + d\chi$ будет равно

$$dN = 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot n.$$

Тогда из (1) следует, что

$$d\sigma = 2\pi\rho \cdot d\rho. \quad (8.5.2)$$

Так как считаем, что связь между ρ и χ однозначная, то $d\sigma$ можно представить в следующем виде

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi. \quad (8.5.3)$$

Знак модуля в (3) связан с тем, что производная $\frac{d\rho}{d\chi}$ может быть и отрицательной, а

$d\sigma$ по определению является положительной величиной. Отрицательная производная означает, что обычно ρ падает с ростом χ . Это вполне объяснимо: рассеяние на большой угол требует более тесного приближения частицы к рассеивающему центру, малых ρ .

Обычно $d\sigma$ относят не к элементу плоского угла $d\chi$, а к элементу телесного угла $d\Omega$ между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$. Такой элемент телесного угла имеет величину

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi \cdot d\chi, \quad \text{т.е.} \quad d\chi = \frac{d\Omega}{2\pi \sin \chi}.$$

Значит формулу (3) можем переписать так

$$d\sigma = \rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \frac{d\Omega}{\sin \chi}. \quad (8.5.4)$$

Теперь для теоретического расчета эффективного сечения рассеяния $d\sigma$ достаточно знать зависимость ρ от χ . Такую зависимость для рассеяния в кулоновском поле $U = -\alpha/r$ мы знаем. Это формула (8.4.38). Выпишем ее

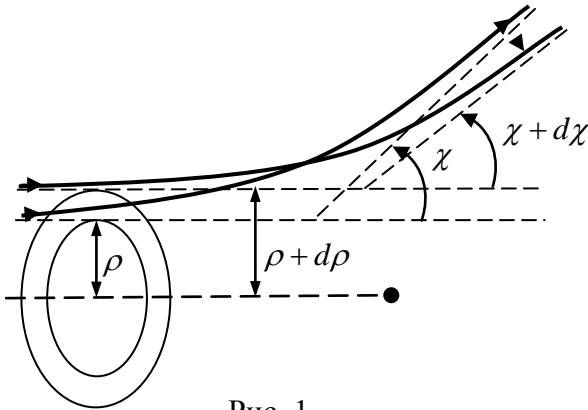


Рис. 1

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}.$$

Вычислим производную

$$\frac{d\rho}{d\chi} = \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}.$$

Подставим в (4) эти два выражения:

$$d\sigma \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \cdot \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} \cdot \frac{d\Omega}{\sin \chi} = \left(\frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} \frac{d\Omega}{\sin \chi}.$$

Используя тригонометрическое тождество $\sin \chi = 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}$, получим

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (8.5.5)$$

Эта формула эффективного сечения кулоновского рассеяния частиц на неподвижном рассеивающем центре называется формулой Резерфорда. Она справедлива как для случая притягивающего, так и для случая отталкивающего поля

Важность этой формулы объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, кулоновский потенциал, который использовался при ее выводе, является главным при изучении взаимодействия заряженных частиц. Во-вторых, получен аналитический результат в элементарных функциях. В-третьих, как окажется, эта формула справедлива и при квантовомеханическом описании, если только рассеиваемая и рассеивающая частицы не тождественны.

Обратите внимание! Сложив эффективные сечения, полученные для всех углов рассеяния, или, что тоже самое, проинтегрировав (1), получим величину

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{N}{n}, \quad (8.5.6)$$

называемую полным сечением рассеяния. Здесь N - это число всех как бы то ни было рассеянных частиц в единицу времени.

Для получения аналитического выражения полного сечения σ , воспользуемся формулой (2). Интеграл выражения (2) дает

$$\sigma = \int d\sigma = 2\pi \int \rho d\rho. \quad (8.5.7)$$

Интегрирование распространяется на все прицельные расстояния, при которых происходит хоть какое-либо рассеяние. И если ρ не обращается в нуль, начиная с некоторого расстояния от центра, то интегрировать придется до бесконечности и, конечно же, получим бесконечный результат. Интеграл (7) будет иметь конечное значение, если рассеивающий центр и частица начинают взаимодействовать только с какого-то расстояния. Значит, полное сечение в классической механике расходится, если потенциал рассеяния не обращается в строгий нуль, начиная с некоторого расстояния от центра.

Только в квантовой механике удастся объяснить этот результат и показать, что для любого потенциала $U(r)$ (не слишком медленно убывающего с ростом r) вычисление полного сечения приводит к конечному результату.

§ 8.6. Малые колебания с одной степенью свободы

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы. Функцию Лагранжа

такой системы можно получить из (2.4.12), положив $S = 1$,

$$L = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 - U(q) = T - U(q), \quad (8.6.1)$$

где q - обобщенная координата, \dot{q} - обобщенная скорость, $U(q)$ - внутренняя потенциальная энергия системы,

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 \quad (8.6.2)$$

- кинетическая энергия системы. Величина $A(q)$ - коэффициент инерции (2.4.11). Она, а значит и кинетическая энергия, зависят от координаты q .

Пусть потенциальная энергия обладает минимумом. Начало координат совместим с этим минимумом, как, например, на рис.1. Такому выбору системы координат соответствует нормировка потенциальной энергии

$$U(0) = 0. \quad (8.6.3)$$

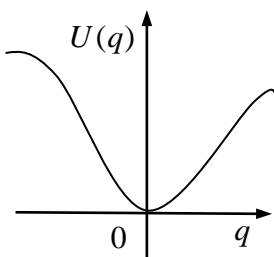


Рис. 1

Условия существования минимума выглядят так

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_0 = 0, \quad (8.6.4)$$

$$k \equiv \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0 > 0. \quad (8.6.5)$$

(производные вычисляются в точке $q = 0$ и это показано значком “нуль”; для функции одной переменной частная и полная производная совпадают)

Будем рассматривать случай финитного движения, когда полная энергия

$$E = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 + U(q) > 0 \quad (8.6.6)$$

не позволяет системе покинуть потенциальную яму.

Если система в состоянии, где ее потенциальная энергия минимальная, то говорят: система в устойчивом равновесии или в положении устойчивого равновесия. В нашем случае начало координат выбрано в положении равновесия, тогда обобщенная координата является смещением (отклонением) системы от положения равновесия.

В принципе, если известна потенциальная энергия, с помощью функции Лагранжа (1) можно взяться за исследование любой системы. Мы же рассмотрим специальный случай, когда удастся заранее упростить функцию Лагранжа.

Пусть отклонения системы q от положения устойчивого равновесия будут малыми величинами. Возникающее при этом движение называют малыми колебаниями. Разложим в ряд потенциальную энергию по степеням малого смещения q в окрестности точки $q = 0$:

$$U(q) = U(0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_0 q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0 q^2 + \dots \quad (8.6.7)$$

В соответствии с условиями (3) и (4) первые две слагаемые в (7) равны нулю. Тогда, с учетом обозначения (5), получим

$$U(q) = \frac{1}{2} k q^2. \quad (8.6.8)$$

Постоянную величину $k > 0$ называют динамическим параметром или силовым коэффициентом, или коэффициентом упругости системы.

Таким образом, малые колебания являются движениями системы, потенциальная энергия которой квадратично зависит от смещения.

В общем случае, надо разложить в ряд и величину $A(q)$, которая зависит от сме-

щения q и входит в кинетическую энергию (и в функцию Лагранжа):

$$A(q) = A(0) + \left. \frac{\partial A}{\partial q} \right|_0 q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right|_0 q^2 + \dots$$

Тогда кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{A(0)}{2} \dot{q}^2 + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q} \right|_0 q \dot{q}^2 + \left. \frac{1}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right|_0 q^2 \dot{q}^2 + \dots \quad (8.6.9)$$

В момент, когда наша система находится в положении максимально возможного смещения от положения равновесия (в точке остановки или поворота), ее кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальная и равна полной энергии системы. Значит полная энергия и максимальная потенциальная энергия малых колебаний – это величины одного порядка. Но при прохождении точки равновесия потенциальная энергия равна нулю (3), а кинетическая энергия не равна нулю. Она равна полной энергии системы. Тогда надо согласиться, что кинетическая и потенциальная энергии должны иметь один и тот же порядок малости.

Потенциальная энергия записана в приближении до величин второго порядка малости (8). Наша система совершает малые колебания и для того, чтобы она не ушла далеко от положения равновесия, ее скорость \dot{q} должна быть малой величиной.

Из выражения (9) замечаем, что первое слагаемое в разложении кинетической энергии имеет тот же порядок малости, что и потенциальная энергия (8). Следовательно, остальными слагаемыми (кроме первого) в формуле (9) можно пренебречь и записать кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{A(0)}{2} \dot{q}^2. \quad (8.6.10)$$

Величина $m = A(0)$ является коэффициентом инерции системы в положении равновесия и она, а значит и кинетическая энергия (10), не зависят от обобщенной координаты.

Таким образом, функцию Лагранжа одномерной механической системы, совершающей малые колебания вблизи положения устойчивого равновесия, с точностью до величин второго порядка малости по \dot{q} и q (гармоническое приближение) можно представить в виде

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2. \quad (8.6.11)$$

Механическую систему с такой функцией Лагранжа называют линейным гармоническим осциллятором.

Зная вид функции Лагранжа, надо написать уравнение Лагранжа (2.2.8). Входящие в него производные находятся просто:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -mq.$$

Тогда уравнение Лагранжа для механической системы с одной степенью свободы совершающей малые колебания примет вид

$$m\ddot{q} + kq = 0. \quad (8.6.12)$$

Обозначая

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_0, \quad (8.6.13)$$

приводим (12) к обычному виду уравнения малых колебаний

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (8.6.14)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Сами колебания механической системы, описываемые линейными уравнениями, называются линейными. Колебания системы, описываемые однородными уравнениями, называются собственными или свободными колебаниями. Величину ω называют собственной частотой системы.

В приложении Г приведены различные способы записи решения уравнения (14). Наглядное и удобное представление закона малого колебания $q(t)$ имеет вид

$$q = \rho \cos(\omega t + \alpha). \quad (8.6.15)$$

Величины ρ называется амплитудой колебания, α - начальной фазой.

Значения постоянных ρ и α определяются начальными условиями. Если интересуется только собственная частота малых колебаний ω , а не фаза и амплитуда, то достаточно воспользоваться формулой (13).

§ 8.7. Малые колебания со многими степенями свободы

Рассмотрим систему с S степенями свободы, где все взаимодействия потенциальные. Обобщенные координаты системы обозначим q_i ($i=1,2,...,S$).

Пусть потенциальная энергия системы $U(q_1,...,q_S)$ имеет минимум и обращается в нуль вместе со своими производными первого порядка при

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \dots, \quad q_S = 0.$$

Значит

$$U(0) \equiv U(q_1 = 0, \dots, q_S = 0) = 0, \quad (8.7.1)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_1} \right|_{q=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial q_2} \right|_{q=0} = 0, \quad \dots, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial q_S} \right|_{q=0} = 0, \quad (8.7.2)$$

где значок $q=0$ показывает, что производные взяты в точке $q_1 = 0, \dots, q_S = 0$.

В минимуме потенциальной энергии система находится в равновесия. Начало отсчета обобщенных координат выбрана так, что нулевые значения обобщенных координат соответствуют положению равновесия системы. Тогда обобщенные координаты q_i - это смещения системы от положения равновесия.

Будем рассматривать случай, когда эти смещения являются малыми величинами. Такое движение системы вблизи положения равновесия называются малыми колебаниями системы со многими степенями свободы.

Наша задача: установить зависимость обобщенных координат q_i от времени t . Для этого надо получить уравнение движения системы, совершающей малые колебания около положения равновесия, и исследовать его решение. Общий вид функции Лагранжа замкнутой системы со многими степенями свободы нам известен. Это формула (2.4.12)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - U(q_1, \dots, q_S), \quad (8.7.3)$$

где первое слагаемое - это кинетическая энергия системы, коэффициенты инерции A_{kl} определены формулой (2.4.11), \dot{q}_i - обобщенная скорость, $U(q_1, \dots, q_S)$ - потенциальная энергия системы. Вблизи положения равновесия функция Лагранжа упрощается.

Разложим в ряд функцию $U(q_1, \dots, q_S)$ по степеням малых смещений q_i в окрестности точки равновесия $q_1 = 0, \dots, q_S = 0$:

$$U \equiv U(q_1, \dots, q_S) = U(0) + \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial U}{\partial q_l} \right)_{q=0} q_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k} \right)_{q=0} q_k q_l + \dots \quad (8.7.4)$$

Первое слагаемое равно нулю согласно условию (1). Второе слагаемое также равно нулю, т.к. оно вычисляется в положении равновесия, где потенциальная энергия имеет минимум, а значит, выполняется условие (2).

Таким образом, разложение функции U начинается членом второго порядка малости (гармоническое приближение)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k} \right)_{q=0} q_k q_l. \quad (8.7.5)$$

Введем обозначение

$$b_{lk} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k} \right)_{q=0}. \quad (8.7.6)$$

Эти величины называются динамическими параметрами или коэффициентами упругости, или силовыми коэффициентами (как и в случае системы с одной степенью свободы). Они, во-первых, положительные

$$b_{lk} > 0, \quad (8.7.7)$$

так как вычисляются в точке минимума и функция $U(q_1, \dots, q_S)$ должна возрастать по обе стороны от точки минимума $q_1 = 0, \dots, q_S = 0$. Во-вторых, из (6) видно, что величины b_{lk} симметричны относительно индексов l и k

$$b_{lk} = b_{kl}. \quad (8.7.8)$$

В-третьих, все b_{lk} постоянные величины.

Итак, потенциальная энергия системы, совершающей малые колебания, квадратично зависит от обобщенных координат и имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} q_k q_l. \quad (8.7.9)$$

Рассмотрим теперь выражение для кинетической энергии системы. Это первое слагаемое в функции Лагранжа (1)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (8.7.10)$$

Коэффициенты инерции $A_{kl}(q_1, \dots, q_S)$ определяются массами частиц системы и ее обобщенными координатами q_i (2.4.11), но не зависят от обобщенных скоростей \dot{q}_i .

Значит, в общем случае, кинетическая энергия системы зависит и от обобщенных скоростей частиц системы, и от их обобщенных координат.

Разложим в ряд и функции $A_{kl}(q_1, \dots, q_S)$ по степеням малых смещений q_i в окрестности точки равновесия $q_1 = 0, \dots, q_S = 0$:

$$A_{kl}(q_1, \dots, q_S) = A_{kl}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial A_{kl}}{\partial q_i} \right)_{q=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial q_j \partial q_i} \right)_{q=0} q_j q_i. \quad (8.7.11)$$

Обозначим нулевые члены разложения $A_{kl}(0, \dots, 0)$:

$$a_{kl} = A_{kl}(0, \dots, 0). \quad (8.7.12)$$

Они являются постоянными величинами. Отметим и их симметричность

$$a_{kl} = a_{lk}. \quad (8.7.13)$$

Теперь кинетическая энергия вблизи точки равновесия $q_1 = 0, \dots, q_S = 0$ примет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial A_{kl}}{\partial q_i} \right)_{q=0} q_i \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial q_j \partial q_i} \right)_{q=0} q_j q_i \dot{q}_k \dot{q}_l + \dots \quad (8.7.14)$$

Мы рассматриваем движение системы в окрестности точки равновесия и, чтобы частицы системы не могли отойти далеко от точки минимума потенциальной энергии, их скорости должны быть малыми величинами. В таком случае, сравнивая выражения (14) и (9) заключаем, что уже нулевой член разложения кинетической энергии $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$ имеет тот же порядок малости, что и потенциальной энергии в гармоническом приближении (9).

Следовательно, в разложении кинетической энергии достаточно сохранить только нулевой член разложения и записать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (8.7.15)$$

В этом приближении кинетическая энергия уже не зависит от обобщенных координат (в отличие от (10)).

Приведенные рассуждения показывают, что для изучения малых колебаний системы вблизи положения устойчивого равновесия достаточно представить функцию Лагранжа системы (3) в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} q_k q_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S (a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - b_{kl} q_k q_l). \quad (8.7.16)$$

Зная функцию Лагранжа надо составить уравнение движения системы – уравнения Лагранжа (2.2.8). Для определения входящих в них производных, начнем с записи полного дифференциала функции Лагранжа (16)

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S (a_{kl} \dot{q}_k d\dot{q}_l + a_{kl} \dot{q}_l d\dot{q}_k - b_{kl} q_k dq_l - b_{kl} q_l dq_k). \quad (8.7.17)$$

Рассмотрим первую сумму в правой части выражения (17):

$$\sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k d\dot{q}_l.$$

Индексы суммирования l и k являются немymi, каждый из них можно обозначить любой буквой. Они пробегают одни и те же значения и поэтому их можно поменять местами

$$\sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k d\dot{q}_l = \sum_{l=1}^S \sum_{k=1}^S a_{lk} \dot{q}_l d\dot{q}_k.$$

С учетом свойства симметрии коэффициентов инерции (13) можно записать

$$\sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k d\dot{q}_l = \sum_{l=1}^S \sum_{k=1}^S a_{kl} \dot{q}_l d\dot{q}_k.$$

Поменяв местами порядок суммирования, получим

$$\sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k d\dot{q}_l = \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_l d\dot{q}_k.$$

Таким образом, в выражении (17) первая и вторая суммы равны друг другу.

Ясно, что, повторив эти же рассуждения, можем получить равенство третьей и четвертой сумм, входящих в (17),

$$\sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} q_k dq_l = \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} q_l dq_k.$$

В таком случае, полный дифференциал (17) предстанет в виде

$$dL = \sum_{k=1}^S \left(\sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_l \right) d\dot{q}_k - \sum_{k=1}^S \left(\sum_{l=1}^S b_{kl} q_l \right) dq_k. \quad (8.7.18)$$

По определению полного дифференциала функции нескольких переменных L , множитель при дифференциале $d\dot{q}_k$ равен частной производной функции L по переменной \dot{q}_k , т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_l.$$

Аналогично, множитель при dq_k дает частную производную L по q_k :

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = - \sum_{l=1}^S b_{kl} q_l.$$

Значит уравнения Лагранжа (2.2.8), для системы, совершающей малые колебания, можно представить в виде

$$\sum_{l=1}^S (a_{kl} \ddot{q}_l + b_{kl} q_l) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.19)$$

Это система S линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными и действительными коэффициентами. Они не являются уравнениями гармонических колебаний и при их решении могут встретиться затруднения. Остановимся на решении этой системы уравнений.

Согласно общим правилам, ее частные решения q_l^a будем искать в виде

$$q_l^a = C_l e^{i\omega t}, \quad (l = 1, 2, \dots, S), \quad (8.7.20)$$

где C_l - некоторые неизвестные постоянные, которые требуется определить.

В общем случае, решения (20) являются комплексными функциями. Обобщенная координата - это реальная физическая величина и должна быть действительной. Но в силу того, что уравнения (19) являются линейными, то и действительная и мнимая части комплексного решения в отдельности будут решениями этих уравнений (см. приложение Г). Значит, найдя комплексное решение, для окончательного результата нужно взять его действительную часть $\text{Re}\{C_l e^{i\omega t}\}$. Так мы и поступим в конце.

Но для этого еще надо найти величины C_l и ω , входящие в (20). Этим и займемся. Подставляя решения (20) в уравнения (19), получаем

$$\sum_{l=1}^S (a_{kl}(-\omega^2) C_l e^{i\omega t} + b_{kl} C_l e^{i\omega t}) = 0,$$

Сократим все уравнения на общий множитель $e^{i\omega t}$. Это дает

$$\sum_{l=1}^S (b_{kl} - \omega^2 a_{kl}) C_l = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.21)$$

Мы пришли к системе S линейных однородных алгебраических уравнений с S неизвестными коэффициентами C_l . Для того, чтобы эта система имела решения, отличные от тривиального (когда все $C_l = 0$), необходимо и достаточно равенство нулю определителя системы уравнений

$$\left| b_{kl} - \omega^2 a_{kl} \right| = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} b_{11} - \omega^2 a_{11} & b_{12} - \omega^2 a_{12} & \dots & b_{1S} - \omega^2 a_{1S} \\ b_{21} - \omega^2 a_{21} & b_{22} - \omega^2 a_{22} & \dots & b_{2S} - \omega^2 a_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{S1} - \omega^2 a_{S1} & b_{S2} - \omega^2 a_{S2} & \dots & b_{SS} - \omega^2 a_{SS} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.22)$$

В раскрытом виде данный определитель тождествен алгебраическому уравнению S -ой степени относительно переменной ω^2 . Это уравнение в общем случае имеет S вещественных положительных корней ω_α^2 ($\alpha = 1, 2, \dots, S$).

Уравнение (22) называется характеристическим или вековым или уравнением частот, а получаемые из него величины ω_α называют собственными частотами системы. В частных случаях некоторые из этих частот могут совпадать. Совпадающие собственные частоты называют вырожденными (кратными). Далее рассмотрим случай, когда совпадающих корней и равных нулю корней нет.

Вещественность корней ω_α векового уравнения (22) очевидна из физических соображений (хотя это можно доказать и точно). Если бы собственные частоты замкнутой системы ω_α содержали мнимую часть, например в виде $\omega_\alpha = \beta + i\lambda$, то выражение (20) приобрело бы вид

$$q_l = C_l e^{i\omega t} = C_l e^{i(\beta + i\lambda)t} = C_l e^{i\beta t} e^{-\lambda t}.$$

Множитель $e^{-\lambda t}$ останется и при вычислении скорости \dot{q}_l . Следовательно, скорости и смещения начнут экспоненциально убывать или возрастать (в зависимости от знака λ). От этих величин зависит полная энергия системы, значит и она начнет меняться с течением времени. Но это уже противоречит закону сохранения энергии в замкнутой системе, поэтому ω_α - вещественная величина.

Итак, решив вековое уравнение (22) найдем допустимые значения ω^2 - собственные частоты системы $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_S^2$, при которых функции (20) могут быть решениями дифференциальных уравнений (19). Подставляя поочередно значения ω_α^2 в систему алгебраических уравнений (21) получим

$$\sum_{l=1}^S (b_{kl} - \omega_\alpha^2 a_{kl}) C_l^\alpha = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.23)$$

Решая эту систему, найдем значения коэффициентов C_l^α (амплитуд), отвечающие различным ω_α .

Согласно правилам, решения систем алгебраических уравнений вида (23) пропорциональны соответствующим алгебраическим дополнениям (минорам) определителя (22), в котором положено $\omega = \omega_\alpha$. Обозначая эти миноры Δ_l^α , можно записать

$$C_l^\alpha = D_\alpha \Delta_l^\alpha \quad (l = 1, 2, \dots, S), \quad (8.7.24)$$

где D_α - произвольная комплексная постоянная и ее всегда можно взять в следующем виде

$$D_\alpha = d_\alpha e^{i\beta_\alpha}. \quad (8.7.25)$$

Итак, частные решения исходной системы дифференциальных уравнений (19) можно окончательно представить в виде

$$q_l^\alpha = D_\alpha \Delta_l^\alpha e^{i\omega_\alpha t} = d_\alpha e^{i\beta_\alpha} \Delta_l^\alpha e^{i\omega_\alpha t} = \Delta_l^\alpha d_\alpha e^{i(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)}, \quad (l = 1, 2, \dots, S) \quad (8.7.26)$$

Общее решение системы уравнений (19) получим, сложив все частные решения (26), т.е. просуммировав по α :

$$\sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha d_\alpha e^{i(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)}.$$

Теперь выделим физически реальную, действительную часть этого решения

$$q_l = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha d_\alpha e^{i(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)} \right\} = \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha d_\alpha \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)} \right\} = \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha d_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha). \quad (l = 1, 2, \dots, S) \quad (8.7.27)$$

Совокупность функций (27) дает зависимость обобщенных координат q_l от времени t , содержит $2S$ произвольных постоянных d_α и β_α , определяемых из начальных условий, и является общим интегралом системы уравнений Лагранжа (19) или общим решением задачи о малых колебаниях системы с S степенями свободы вблизи устойчивого равновесия.

Обозначив

$$\Theta_\alpha = d_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S), \quad (8.7.28)$$

полученное общее решение (27) можно представить в следующем виде

$$q_l = \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha \Theta_\alpha \quad (l = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.29)$$

Функция Θ_α является строго периодической функцией времени (28), т.е. описывает гармоническое колебание с определенной частотой ω_α с произвольной амплитудой d_α и фазой β_α (из начальных условий).

В свою очередь, изменение каждой из обобщенных координат системы q_l со временем (29) представляет собой наложение, суперпозицию простых, независимых друг от друга гармонических колебаний Θ_α со всеми возможными собственными частотами системы (28). Причем полученные собственные колебания системы уже не являются периодическими функциями времени.

Следует отметить и то, что нельзя отождествлять какую либо собственную частоту системы ω_α с частотой колебания какой-либо определенной частицы, входящей в систему. Такое представление верно лишь в предельном случае, если каждая из них обладает одной степенью свободы.

Вообще говоря, собственные частоты характеризуют движение системы в целом: всегда можно задать начальные условия так, чтобы все координаты изменялись со временем с одной из собственных частот системы.

Пусть начальные условия таковы (или выбраны такими), что все амплитуды d_α кроме одной равны нулю. Обозначим не равную нулю амплитуду d'_α , а соответствующую частоту и фазу обозначим: ω'_α и β'_α . Тогда сумма в (29) будет состоять из одного слагаемого

$$q_l = \Delta_l^\alpha d'_\alpha \cos(\omega'_\alpha t + \beta'_\alpha). \quad (8.7.30)$$

Получили, что в этом случае все обобщенные координаты (смещения) системы гармонически изменяются с одной собственной частотой ω'_α , в фазе или противофазе в зависимости от знака Δ_l^α . Но ни при каких начальных условиях в системе не может быть реализовано гармоническое колебание, частота которого не являлась бы одной из собственных частот.

В целом поставленная задача о малых колебаниях системы с S степенями свободы решена. Имеем уравнения движения такой системы (19), получены их решения (29), знаем как меняется со временем каждая из обобщенных координат системы.

Вид формул (28) и (29) подсказывает, что на полученное решение задачи можно взглянуть и по-другому.

Если бы мы могли взять величины Θ_α за обобщенные координаты рассматриваемой системы, то тогда каждая из этих координат совершала бы одно простое колебание по гармоническому закону (28). Это можно сделать.

Действительно, S соотношений (29) можно представить как систему линейных уравнений с S неизвестными величинами Θ_α . Разрешив эту систему, можем выразить

Θ_α через смещения (старые обобщенные координаты) системы q_l . Получим некоторое преобразование от координат q_l к координатам Θ_α :

$$\Theta_\alpha = \sum_{l=1}^S R_l^\alpha q_l \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.31)$$

Поэтому величины Θ_α можно рассматривать как новые обобщенные координаты системы. Эти координаты называют нормальными или главными координатами, а совершаемые ими гармонические колебания (28) с собственными частотами системы - нормальными (главными) колебаниями системы.

Из вида функции (28) очевидно, что нормальные координаты удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S). \quad (8.7.32)$$

Эта система представляет собой уравнения Лагранжа в нормальных координатах. Они имеют такой же вид, как уравнения гармонических колебаний (8.6.14). Каждое из этих уравнений не содержит других координат системы, и его можно исследовать независимо. Для полного определения временной зависимости какой-либо нормальной координаты достаточно знать начальные значения только ее же самой и соответствующие ей скорости. Это означает, что нормальные колебания системы полностью независимые.

Теперь обратим внимание на то, что существует строгое преобразование от уравнения движения (19) в произвольных координатах q_l к уравнению движения (32) в главных координатах Θ_α .

Для этого найдем кинетическую и потенциальную энергии системы в нормальных координатах. Подставляя (29) в (9) и (15), получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha \Theta_\alpha \sum_{\beta=1}^S \Delta_k^\beta \Theta_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta \right) \Theta_\alpha \Theta_\beta, \quad (8.7.33)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \sum_{\alpha=1}^S \Delta_l^\alpha \dot{\Theta}_\alpha \sum_{\beta=1}^S \Delta_k^\beta \dot{\Theta}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta \right) \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\beta. \quad (8.7.34)$$

Оказывается, что эти выражения значительно упрощаются, так как коэффициенты при произведениях $\Theta_k \Theta_l$ и $\dot{\Theta}_k \dot{\Theta}_l$ равны нулю при $\alpha \neq \beta$, т.е.

$$\sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = \sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0, \quad \text{если } \alpha \neq \beta. \quad (8.7.35)$$

Покажем это. Возьмем два уравнения (23), соответствующие двум собственным частотам ω_α и ω_β .

$$\begin{aligned} \sum_l (b_{kl} - \omega_\alpha^2 a_{kl}) C_l^\alpha &= 0, \\ \sum_l (b_{kl} - \omega_\beta^2 a_{kl}) C_l^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих равенств на C_k^β и просуммируем по k , а второе - на C_k^α и тоже просуммируем по k

$$\sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\alpha^2 a_{kl}) C_l^\alpha C_k^\beta = 0, \quad (8.7.36)$$

$$\sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\beta^2 a_{kl}) C_l^\beta C_k^\alpha = 0. \quad (8.7.37)$$

Так как коэффициенты b_{lk} и a_{lk} симметричны относительно индексов l и k , то и произведение $C_l^\beta C_k^\alpha$ симметрично относительно этих индексов, т.е.

$$C_l^\beta C_k^\alpha = C_k^\beta C_l^\alpha. \quad (8.7.38)$$

Кроме того, из (24) можем записать

$$C_l^\alpha = D_\alpha \Delta_l^\alpha \quad \text{и} \quad C_k^\beta = D_\beta \Delta_k^\beta. \quad (8.7.39)$$

Подставляя (39) в (36) и, (с учетом (38)) в (37), получим

$$D_\alpha D_\beta \sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\alpha^2 a_{kl}) \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0,$$

$$D_\alpha D_\beta \sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\beta^2 a_{kl}) \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0.$$

Здесь $D_\alpha \neq 0$ и $D_\beta \neq 0$, тогда должно быть

$$\sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\alpha^2 a_{kl}) \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0, \quad (8.7.40)$$

$$\sum_k \sum_l (b_{kl} - \omega_\beta^2 a_{kl}) \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0. \quad (8.7.41)$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\sum_k \sum_l (\omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2) a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0.$$

Выражение в скобке не зависит от индексов суммирования, поэтому:

$$(\omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2) \sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0.$$

В таком случае, если $\alpha \neq \beta$, то должно быть

$$\sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0. \quad (8.7.42)$$

Теперь представим (40) в следующем виде

$$\sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta - \omega_\alpha^2 \sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0,$$

тогда с учетом (42) получаем, что при $\alpha \neq \beta$ и

$$\sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\beta = 0.$$

Таким образом, мы доказали справедливость (35). Значит в (33) и (34) от суммы по β останутся только слагаемые с $\beta = \alpha$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\alpha \right) \Theta_\alpha \Theta_\alpha,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\alpha \right) \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\alpha.$$

Обозначив

$$K_\alpha = \sum_k \sum_l b_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\alpha, \quad (8.7.43)$$

$$M_\alpha = \sum_k \sum_l a_{kl} \Delta_l^\alpha \Delta_k^\alpha, \quad (8.7.44)$$

получим потенциальную энергию в нормальных координатах

$$U = \frac{1}{2} \sum_\alpha K_\alpha \Theta_\alpha^2, \quad (8.7.45)$$

и кинетическую энергию в нормальных координатах

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha M_\alpha \dot{\Theta}_\alpha^2. \quad (8.7.46)$$

Тогда функция Лагранжа в нормальных координатах (16) предстанет в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (M_{\alpha} \dot{\Theta}_{\alpha}^2 - K_{\alpha} \Theta_{\alpha}^2). \quad (8.7.47)$$

Если теперь ввести обозначение

$$\omega_{\alpha}^2 = \frac{K_{\alpha}}{M_{\alpha}} \quad \text{или} \quad K_{\alpha} = \omega_{\alpha}^2 M_{\alpha}, \quad (8.7.48)$$

то получим функцию Лагранжа в нормальных координатах в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} M_{\alpha} (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2). \quad (8.7.49)$$

Видно, что, составленное из этой функции Лагранжа, уравнение Лагранжа совпадает с уравнением (32).

Из формулы (49) следует, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты Θ_{α} , распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию с одной из частот ω_{α} . Причем колебания Θ_{α} и $\Theta_{\beta \neq \alpha}$ ни как не влияют друг на друга, по крайней мере, до тех пор, пока можно ограничиваться квадратичными членами в потенциальной энергии.

Вспомним выражения для кинетической и потенциальной энергии системы в обобщенных координатах q_l . Это соотношения (15) и (9)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad (8.7.50)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S b_{kl} q_k q_l. \quad (8.7.51)$$

Коэффициенты a_{kl} и b_{kl} в определениях (50) и (51) образуют симметричные матрицы

$$(a_{kl}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1S} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{S1} & a_{S2} & \dots & a_{SS} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (b_{kl}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1S} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{S1} & b_{S2} & \dots & b_{SS} \end{pmatrix}$$

С математической точки зрения, соотношения (50) и (51) - это однородные квадратичные формы переменных q_l и \dot{q}_l , соответственно. Подчеркнем, что они содержат не только квадраты, но и произведения координат и произведения скоростей. Как известно из высшей алгебры, в этом случае существуют новые переменные, являющиеся линейными функциями переменных q_1, q_2, \dots, q_S , такие, что в новых переменных квадратичные формы T и U приобретают канонический вид (содержащие только квадраты координат и квадраты скоростей).

В таком случае, введение нормальных координат Θ_{α} , линейно связанных с q_l выражением (31), равносильно одновременному приведению двух квадратичных форм (50) и (51) к каноническому виду (46) и (45).

При этом линейное преобразование (31) (переход от q_l к Θ_{α}) соответствует преобразованию матриц (a_{kl}) и (b_{kl}) к диагональному виду

$$(M_{\alpha}) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_S \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (K_{\alpha}) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_S \end{pmatrix}$$

Нормальные координаты выбираются не однозначно. Из (49) ясно, что, умножая Θ_α на постоянный множитель (путем изменения на общий множитель выбранного набора коэффициентов Δ_l^α в (29)), мы получим функцию Лагранжа, приводящую к старому уравнению движения. Это позволяет выбрать нормальные координаты такими, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа (в кинетической энергии) были одинаковы и равны $\frac{1}{2}$. Для этого достаточно определить новые нормальные координаты Q_α через Θ_α равенствами

$$Q_\alpha = \sqrt{M_\alpha} \Theta_\alpha. \quad (8.7.52)$$

Введенные таким образом координаты Q_α называют еще нормированными нормальными координатами.

Нормированные нормальные координаты (52) связаны со смещениями q_l линейными преобразованиями, которые следуют из (31),

$$Q_\alpha = \sum_{l=1}^S \sqrt{M_\alpha} R_l^\alpha q_l = \sum_{l=1}^S \tilde{R}_l^\alpha q_l. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S)$$

Совокупность коэффициентов \tilde{R}_l^α , указывающих относительную долю участия в нормальном колебании Q_α каждой из обобщенных координат q_l , называют формой (или модой) данного нормального колебания.

Итак, функция Лагранжа системы в нормированных нормальных координатах теперь примет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2). \quad (8.7.53)$$

Полная энергия в нормированных нормальных координатах запишется так

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S (\dot{Q}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2). \quad (8.7.54)$$

Для сравнения запишем полную энергию системы в координатах q_l , соответствующую функции Лагранжа (16),

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^S (a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + b_{kl} q_k q_l). \quad (8.7.55)$$

Сравнивая разные соотношения (54) и (55) для одной и той же полной энергии системы E , можно заключить, что при переходе к нормированным нормальным координатам Q_α , энергия связанных колебаний, совершаемых координатами q_l , заменяется энергиями отдельных гармонических осцилляторов, представляемых координатами Q_α .

Благодаря нормальным координатам рассмотрение задач о колебаниях значительно упрощается, так как линейный гармонический осциллятор является во многих отношениях одной из простейших систем. Приведение к нормальным координатам полезно при изучении колебаний многоатомных молекул, кристаллов и в теории поля. Кроме того, этот прием помогает и в техническом применении теории колебаний.

До сих пор рассматривалась система с невырожденными и не равными нулю собственными частотами. Когда имеются вырожденные частоты, т.е. есть кратные корни характеристического уравнения (22), общее решение берут в виде (29), но коэффициенты Δ_l^α , соответствующие кратному корню, не являются минором определителя и должны находиться из уравнения (23). Надо иметь в виду, что кратным корням соответствуют одинаковые по частоте, но различные в общем случае по амплитуде и фазе гармонические

функции Δ_l^α (28).

Если же какая-нибудь собственная частота равна нулю $\omega_\alpha = 0$, то из (32) для соответствующей нормальной координаты получим

$$\ddot{\Theta}_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \Theta_\alpha = \dot{\Theta}_{\alpha 0} t + \Theta_{\alpha 0} \quad (8.7.56)$$

Такой случай (нулевые частоты) возникает, например, когда потенциальная энергия системы достигает минимума не в одной точке, а в некоторой области (нет изолированного минимума).