

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО  
Радиофизический факультет

---

Отчет по лабораторной работе №2

**Фазовая плоскость лампового генератора**

Выполнили студенты 430 группы  
Войтович Д.А., Понур К.А.

Нижний Новгород, 2018

# Содержание

<b>1 Теоретическая часть . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1 Метод Ван-дер-Поля . . . . .	2
1.2 Исходные и укороченные уравнения . . . . .	5
1.3 Стационарные режимы работы генератора . . . . .	7
<b>2 Практическая часть . . . . .</b>	<b>12</b>
2.1 Мягкий режим генератора . . . . .	12
2.2 Жесткий режим генератора . . . . .	15
2.3 Сложно-жесткий режим генератора . . . . .	16
<b>3 Вывод . . . . .</b>	<b>17</b>

# 1. Теоретическая часть

## Цель работы

Изучение различных режимов возбуждения лампового генератора и установление зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы.

Аппаратом теоретического рассмотрения является метод Ван-дер-Поля. Полученные с его помощью результаты сравниваются с результатами экспериментального исследования фазовой плоскости изучаемой системы.

### 1.1. Метод Ван-дер-Поля

Слабонелинейные квазиконсервативные системы могут совершать периодические движения с постоянной амплитудой, определяемой свойствами системы. Таким периодическим движениям на фазовой плоскости соответствуют изолированные замкнутые фазовые траектории, называемые *пределыми циклами*.

Пределный цикл будет устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в малой окрестности предельного цикла, будут асимптотически приближаться при  $t \rightarrow \infty$ .

Динамические системы, а фазовом портрете которых имеется, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, называются автоколебательными.

Будем считать, что система описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где  $f(x, \dot{x})$  - нелинейная ограниченная функция

$\mu$  - малый безразмерный параметр.

Нас интересуют периодические решения. Метод Ван-дер-Поля позволяет задачу отыскания периодических решений уравнения (1) свести к несравненно более простой - задаче нахождения состояний равновесия так называемых укороченных уравнений. Перейдем к их составлению.

При  $\mu = 0$  уравнение (1) описывает обычный гармонический осциллятор, и его решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta, \\ \dot{x} &= y = -A \sin(t + \varphi) = -A \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  и  $\varphi$  - произвольные постоянные, имеющие физический смысл амплитуды и фазы колебаний.

Решение можно представить и в комплексной форме в виде:

$$\begin{aligned} x &= ze^{jt} + z^* e^{-jt}, \\ \dot{x} = y &= j(ze^{jt} - z^* e^{-jt}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z$  и  $z^*$  - произвольные постоянные, являющиеся комплексной и комплексно сопряженной амплитудами.

Решение вида (3) легко сводится к виду (2), если положить

$$z = \rho e^{j\varphi}, z^* = \rho e^{-j\varphi}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} x &= \rho(e^{j(t+\varphi)} + e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \cos(t + \varphi), \\ \dot{x} = y &= j\rho(e^{j(t+\varphi)} - e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \sin(t + \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |z| = |z^*| &= \rho = \frac{A}{2}, \\ \arg z = -\arg z^* &= \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $\mu \neq 0$ , но сколь угодно малом, решение уравнения (1) не должно существенно отличаться от решения для линейного осциллятора, поэтому будем его искать в виде (2), считая теперь  $A$  и  $\varphi$  не постоянными величинами, а некоторыми неизвестными функциями времени:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \theta - A(1 + \dot{\varphi}) \sin \theta = -A \sin \theta, \quad \theta = t + \varphi$$

Откуда следует

$$\dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta = 0.$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\dot{A} \sin \theta + a \dot{\varphi} \cos \theta = -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta).$$

Разрешая два последних уравнения относительно  $\dot{A}$  и  $\dot{\varphi}$ , получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta, \\ A \dot{\varphi} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

адекватную уравнению (1), но записанную в других переменных, называемых переменными Ван-дер-Поля. Полученная система не является более простой по сравнению с уравнением (1). Однако, если учесть, что  $\mu \ll 1$ , то из нее можно получить приближенную, значительно более простую систему.

Правая часть системы (5) является периодической функцией явно входящего времени  $\theta = t + \varphi$  и зависит от  $A$  и  $\varphi$ . Поскольку  $A$  и  $\varphi$  являются медленно меняющимися функциями времени, то можно их считать постоянными на периоде быстрых осцилляций. Воспользуемся этим и, проинтегрировав уравнения, определим средние значения за период  $T = 2\pi$ . Заметим, что интегрирование можно проводить не по времени, а по  $\theta = t + \varphi$ . В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta d\theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi A} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем ее в виде

$$\frac{dA}{dt} = \mu \Phi(A), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu \phi(A), \quad (7)$$

где  $\Phi(A)$  и  $\phi(A)$  - средние за период значения периодических функций, зависящие только от  $A$ :

$$-\int f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad \int f(-\frac{1}{A} \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta d\theta.$$

Полученные уравнения (7) называются системой укороченных или усредненных уравнений. Эта система определяет амплитуду и фазу квазигармонических колебаний исходной системы, описываемой уравнением (1). Если мы найдем решения укороченных уравнений, то с помощью соотношений (2) получим приближенные решения исходной системы.

Нас интересует частный пример, когда  $\phi(A) = 0$

Этот случай довольно часто встречается на практике, например, при рассмотрении режимов работы ламповых генераторов без учета сеточных токов. Тогда система укороченных уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = \mu \Phi(A), \quad \varphi = \varphi_0 = Const \quad (8)$$

Первое уравнение может исследоваться независимо от второго, т.к. оно зависит только от  $A$ . Координаты состояния равновесия  $A_0$  на фазовой прямой  $A$  есть корни уравнения  $\Phi(A_0) = 0$

При этом характеристическое уравнение имеет вид  $p - \mu\Phi'_A(A_0) = 0$  и состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\frac{d\Phi}{dA} = \Phi'_A(A_0) < 0$$

и неустойчивым при выполнении обратного неравенства.

Картина фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля для системы с тремя состояниями равновесия (8) (где  $A$  и  $\phi$  полярные координаты), выглядит следующим образом (рис.1):

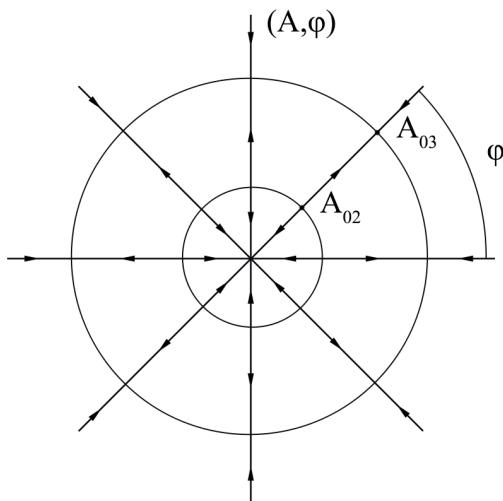


Рис. 1

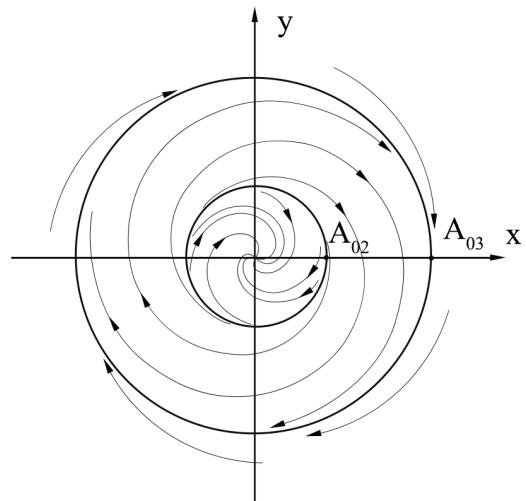


Рис. 2

Переход к переменным  $xy$  осуществляется с помощью формул преобразования (2). Фазовый портрет на плоскости  $xy$  может быть получен, если вращать плоскость Ван-дер-Поля по часовой стрелке с круговой частотой  $\omega = 1$  вокруг начала координат. Тогда окружности, состоящие из состояний равновесия, перейдут в круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы  $A_{0i}$ . Предельные циклы будут устойчивы, если устойчивы состояния равновесия укороченных уравнений, и наоборот. Остальные траектории, представляющие собой отрезки прямых на плоскости переменных Ван-дер-Поля, преобразуются на плоскости  $xy$  в спирали (рис.2).

## 1.2. Исходные и укороченные уравнения

В работе исследуется LC-генератор с контуром в цепи сетки (рис.3), относящийся к разряду квазисинусоидальных автоколебательных систем.

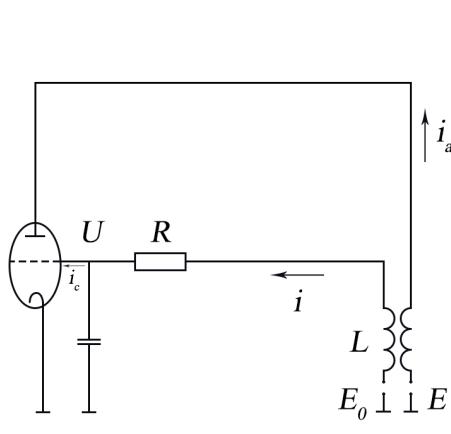


Рис. 3

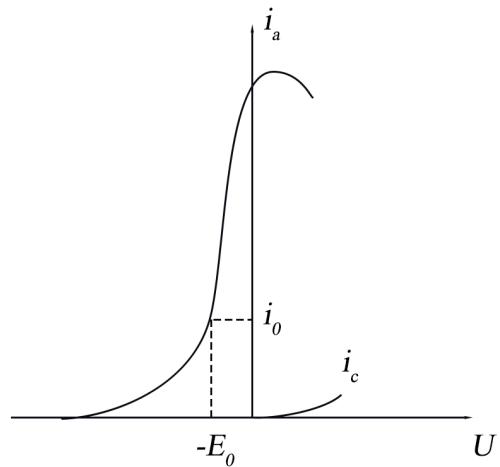


Рис. 4

Отправной точкой теоретического исследования этой системы являются уравнения Кирхгофа, которые, с учетом обозначений, принятых на рис.3, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri + U &= M \frac{di_a}{dt} - E_0, \\ i &= C \frac{dU}{dt} + i_c, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $i_a$  и  $i_c$  - анодные и сеточные токи лампы, зависящие в общем случае от анодного и сеточного напряжений. В дальнейшем будем учитывать их зависимость только от сеточных напряжений, то есть пренебрежем реакцией анода. Качественный вид анодно-сеточной и сеточной характеристик приведен на рис.4. В проводимом рассмотрении эти нелинейные функции будут аппроксимированы полиномами.

Исключив из системы (9) ток и введя новые переменные

$$x = U + E_0, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (10)$$

запишем исходную систему (9) в виде одного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + x = \frac{d}{d\tau} [-\delta x + \sigma f_1(x)] - f_2(x) \quad (11)$$

Здесь  $\sigma = \frac{M}{\sqrt{LC}} > 0$ ,  $\alpha = \frac{L}{M}$ ,  $\delta = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ ,  $f_1 = (i_a - \alpha i_c)$ ,  $f_2 = Ri_c$ . Заметим, что функция  $f_1(x)$  включает в себя разность анодного и сеточного токов, но т.к. сеточный ток меньше анодного, то не будет большой ошибкой считать  $f_1 = i_a$ .

Укороченные уравнения для данной системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{2}(\delta - \sigma \bar{f}_1(\rho^2))\rho, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{2}\bar{f}_2(\rho^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\bar{f}_1(\rho^2)$  определяется анодно-сеточной характеристикой лампы и влияет на условия возбуждения генератора и амплитуду установившихся колебаний;  $\bar{f}_2(\rho^2)$  определяется сеточной характеристикой и влияет на поправку к частоте. Для отыскания установившихся (стационарных) значений амплитуды автоколебаний достаточно найти устойчивые состояния равновесия  $\bar{\rho}$  первого из уравнений системы (12). При этом из второго уравнения системы найдем поправку к частоте автоколебаний:

$$\Delta\omega = \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho}^2)}{2} \quad (13)$$

задающую величину, на которую частота колебаний генератора будет отличаться от частоты колебаний контура. Тем самым, в режиме установившихся автоколебаний будем иметь:

$$\varphi = \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho}^2)}{2}\tau + \varphi_0 \quad (14)$$

$$x = 2\bar{\rho} \cos(\tau + \varphi) = 2\bar{\rho} \cos[(1 + \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho})}{2})\tau + \varphi_0]. \quad (15)$$

### 1.3. Стационарные режимы работы генератора

Прежде чем переходить к изучению различных режимов работы лампового генератора, выясним, при каких условиях справедлива та или иная аппроксимация нелинейной характеристики лампы. На динамику генератора и стационарные режимы его работы влияют только нечетные члены степенного ряда нелинейной характеристики  $f_1(x)$ . Выделим из нелинейной функции нечетную ее часть с помощью соотношения

$$f_H(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (16)$$

Вид нечетной части характеристики, а, следовательно, и возможная её аппроксимация зависят от выбора рабочей точки, положение которой определяется постоянным смещением  $E_0$  на сетке лампы. Рассмотрим возможные аппроксимации нелинейной функции  $f_1$  и, как следствие, различные режимы работы генератора.

1. Напряжение смещения  $E_0$  на управляющей сетке лампы (рабочая точка) выбрано так, что нечетная часть анодно-сеточной характеристики имеет вид, приведенный на рис.5. Это возможно в том случае, когда напряжение смещения задано в точке максимальной крутизны характеристики. При этом функцию  $f_1$  достаточно точно можно представить в виде полинома третьей степени, причем аппроксимация будет справедлива для части криевой, обозначенной сплошной линией на рис.5:

$$f_1(x) = a_1 + \frac{a_2}{2}x^2 - \frac{a_3}{6}x^3 \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем все коэффициенты аппроксимирующего полинома будем считать положительным. Для аппроксимации (17) средняя крутизна анодно-сеточной характеристики, т.е. функция  $\bar{f}_1$  примет вид:

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 - \frac{a_3}{2}\rho^2. \quad (18)$$

В этом случае закон изменения амплитуды колебаний, согласно системе (12) будет определяться следующим уравнением:

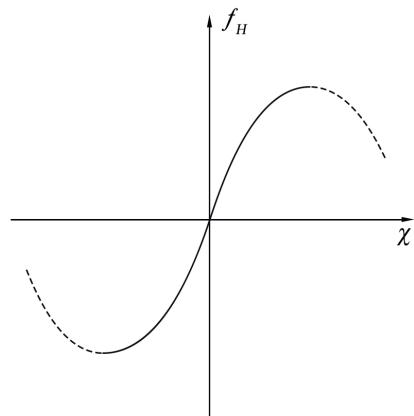


Рис. 5

$$\dot{\rho} = -\rho \bar{F}(\rho), \quad (19)$$

где  $\bar{F}(\rho) = \frac{[\delta - \sigma(a_1 - \frac{a_3}{2}\rho^2)]}{2}$ . Приравнивая правую часть этого уравнения нулю, получим стационарные значения амплитуд колебаний:

$$\bar{\rho}_1 = 0, \quad \bar{\rho}_2 = \sqrt{\frac{2(-\delta + \sigma a_1)}{\sigma a_3}}. \quad (20)$$

Их устойчивость определяется корнями следующего характеристического уравнения:

$$\rho = \frac{d}{d\rho}[-\rho \bar{F}(\rho)] \Big|_{\rho=\bar{\rho}} = -\bar{F}(\bar{\rho}) - \bar{\rho} \bar{F}'(\bar{\rho}) \quad (21)$$

Состояние системы с нулевым значением  $\bar{\rho}$  (невозбужденный генератор) будет устойчивым при  $\bar{F}(0) > 0$ , т.е. при  $\sigma = \frac{\delta}{a_1}$  и неустойчивым в противном случае. Второе стационарное состояние устойчиво, если  $\bar{F}'(\bar{\rho}) = \sigma a_3 \bar{\rho}_2 > 0$ , что выполняется при выбранных знаках коэффициентов. Выражение (21) определяет зависимость амплитуды колебаний от линейного декремента  $\delta = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$ , коэффициента связи  $\sigma = \frac{M}{\sqrt{LC}} > 0$ , и коэффициентов аппроксимации анодно-сеточной характеристики  $a_1$  и  $a_3$ . Можно построить бифуркационные диаграммы, выражающие зависимость  $\bar{\rho}_2$  от любого из перечисленных параметров. Зависимость  $\bar{\rho}_2$  от параметра  $\sigma$  (величина обратной связи) приведена на рис.6, где точками обозначены устойчивые состояния, а крестиками - неустойчивые. Из приведенной диаграммы видно, что схема возбуждается при условии  $\sigma > \frac{\delta}{a_1}$ , или, если перейти к параметрам схемы, при  $M > \frac{RC}{a_1}$ . В этом неравенстве величина  $a_1$  - крутизна анодно-сеточной характеристики в рабочей точке. Точка  $\sigma = \frac{\delta}{a_1}$  на бифуркационной диаграмме называется *точкой бифуркации* - здесь качественно меняется поведение системы.

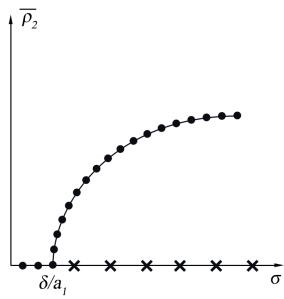
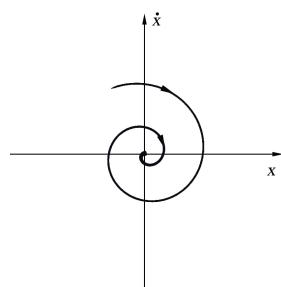
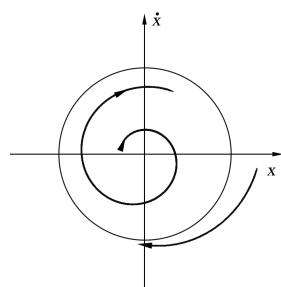


Рис. 6



а



б

Рис. 7

Фазовые портреты системы при  $\sigma < \frac{\delta}{a_1}$  и  $\sigma > \frac{\delta}{a_1}$  приведены на рис.7 а и б. Как видно из рис.6 и рис.7 б, предельный цикл устанавливается при сколь угодно малых начальных условиях, то есть генератор обладает *мягким режимом* возбуждения по отношению к начальным условиям. Термин "мягкий" может употребляться в другом смысле - в качестве характеристики типа генератора, отличающегося плавным нарастанием установившегося значения амплитуды колебаний при медленном и непрерывном изменении параметра обратной связи. Приведенная на рис.6 бифуркационная диаграмма соответствует именно такому типу генератора.

**2.** Рабочая точка выбрана так, что нечетная часть характеристики имеет вид, приведенный на рис.8. Этому случаю чаще всего отвечают напряжения смещения, близкие к напряжению осечки лампы. При этом характеристику лампы необходимо аппроксимировать полиномом не ниже пятой степени. Такой аппроксимации соответствует средняя крутизна

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4. \quad (22)$$

и, следовательно, уравнение, определяющее стационарные значения амплитуды автоколебаний принимает вид

$$\rho[\delta - \sigma(a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4)] = 0. \quad (23)$$

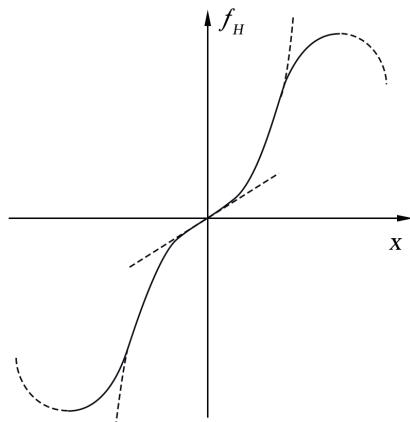


Рис. 8

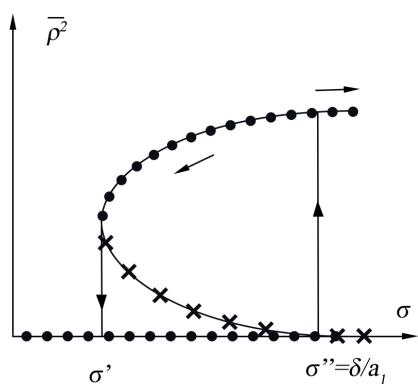


Рис. 9

Бифуркационная диаграмма для этого случая приведена на рис.9. Из него следует, что при значениях параметра  $\sigma$ , лежащих в интервале  $\sigma' < \sigma < \sigma''$ , возникновение автоколебаний возможно лишь, если начальное значение  $\rho$  превышает соответствующее пороговое значение. В этом случае говорят о *жёстком режиме* возбуждения генератора. Бифуркационная диаграмма, изображенная на рис.9 характеризуется гистерезисным эффектом установления срыва автоколебаний при непрерывном изменении параметра  $\sigma$ . Системы с таким видом бифуркационной диаграммы относят к жёсткому типу генераторов. Для них, согласно рис.9, мягкое возбуждение возможно лишь при  $\sigma > \sigma''$ , т.е. за пределами области гистерезиса.

На рис.10 а,б и с приведены фазовые портреты такого генератора для различных значений параметра  $\sigma$ .

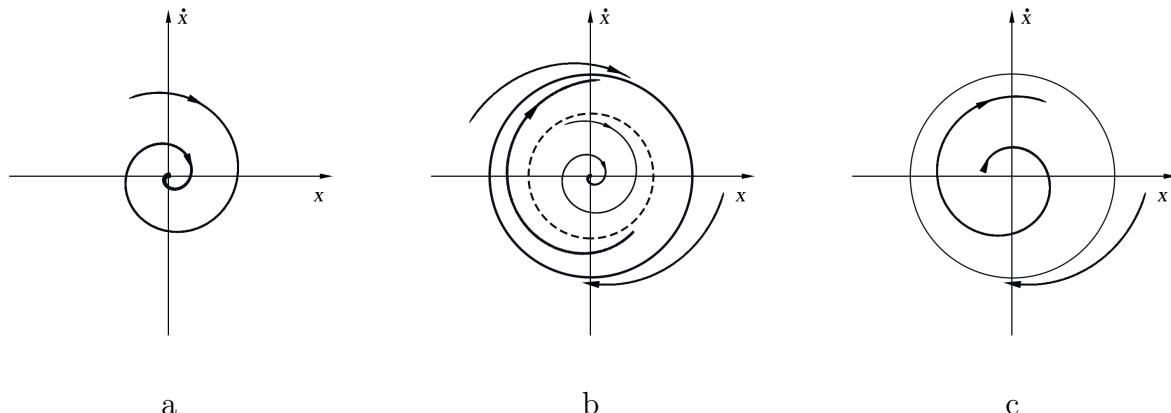


Рис. 10

**3.** Если рабочая точка выбрана при положительных напряжениях на сетке лампы, то график нечетной части нелинейной характеристики имеет вид, приведенный на рис.11.

Здесь для аппроксимации анодно-сеточной характеристики лампы необходимо использовать полином седьмой степени. В этом случае функция  $\bar{f}_1(\rho^2)$  и уравнение для определения ненулевых состояний равновесия запишутся в виде

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4 - \frac{a_7}{144}\rho^6,$$

$$\delta - \sigma(a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4 - \frac{a_7}{144}\rho^6) = 0.$$

При этом возможны два варианта бифуркационной диаграммы  $\bar{\rho}^2(\sigma)$ , изображенные на рис.12.

В варианте а при уменьшении параметра  $\sigma$  происходит скачкообразный переход с большего предельного цикла на меньший и при дальнейшем уменьшении  $\sigma$  предельный цикл плавно исчезает. В варианте б при уменьшении параметра  $\sigma$  до  $\sigma_0$  колебания срываются до нуля.

Описанная разновидность автоколебательных систем относится к генераторам *сложнно-жесткого типа*.

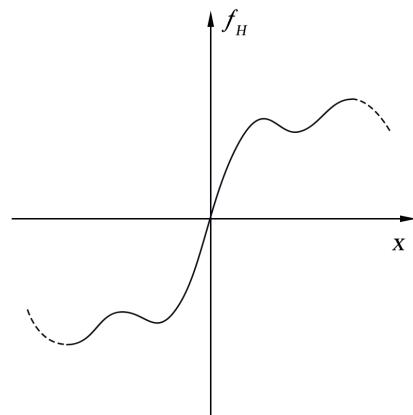


Рис. 11

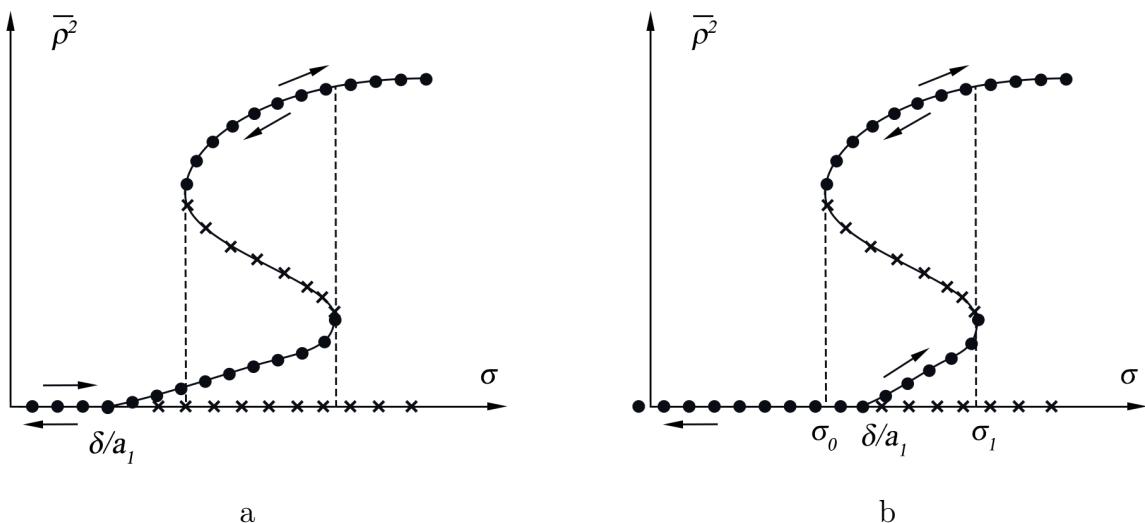


Рис. 12

## 2. Практическая часть

На рис.13 приведена схема лабораторной установки.

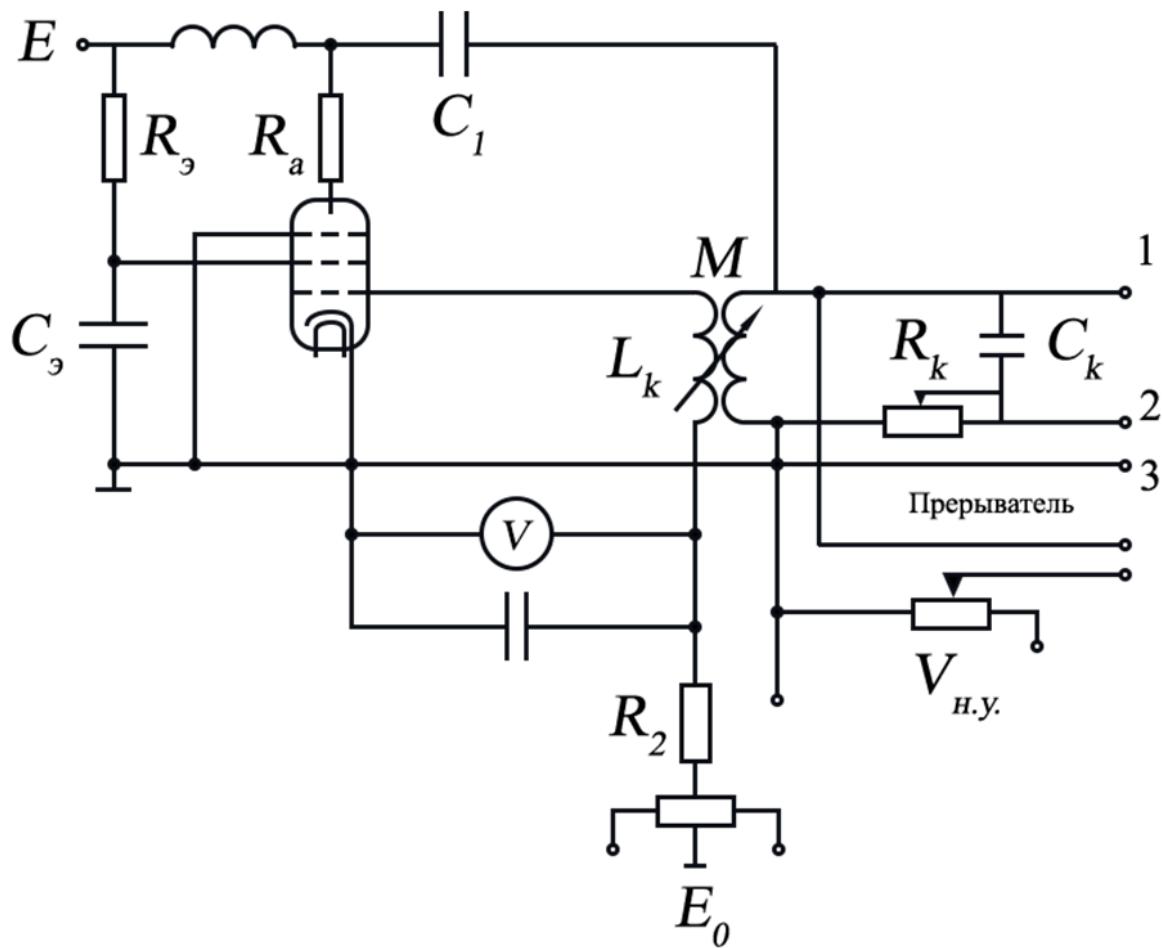


Рис. 13

### 2.1. Мягкий режим генератора

В данной части работы будет сниматься бифуркационная диаграмма - зависимость амплитуды от параметров системы. В этой работе будет изменяться коэффициент взаимной индукции  $M$ .

Для достижения мягкого режима работы генератора, менялось напряжение смещения  $E_0$  до тех пор, пока при плавном изменении параметра  $M$ , не наблюдалось плавное изменение амплитуды.

Снятая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 14:

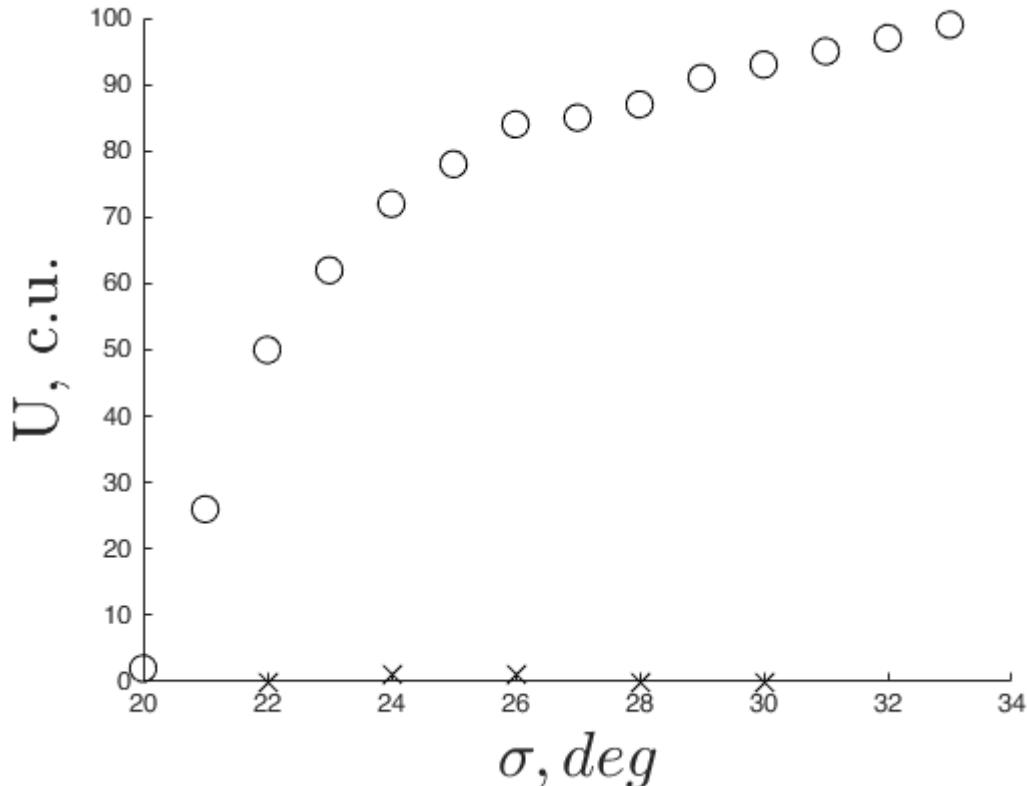


Рис. 14: Бифуркационная диаграмма для мягкого режима генератора

По бифуркационной диаграмме было определено значение  $M'$  в у.е. для точки бифуркации:

$$M' = 20 \pm 1 \text{y.e}$$

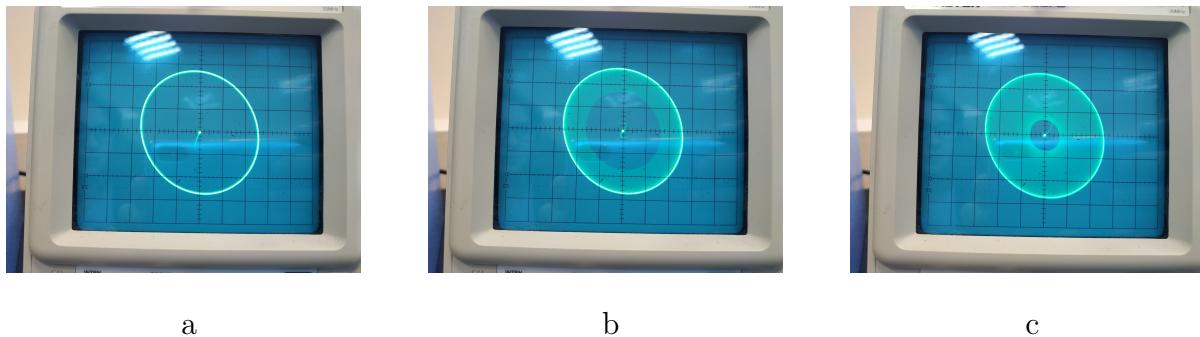
Также были сняты фазовые траектории для разных начальных условий левее и правее точки бифуркации (рис.15 и рис.16). Для наблюдения фазовых траекторий в системе включался прерыватель, позволяющий наблюдать процесс раскачки заново.



а

б

Рис. 15: Фазовая траектория левее точки бифуркации



а

б

с

Рис. 16: Фазовая траектория правее точки бифуркации

Как видно из фазовых траекторий, при значениях  $M < M'$ , при любых начальных условиях колебания не устанавливались, а при  $M > M'$  амплитуда колебаний приходила к одному значению независимо от начальных условий.

Для получения квазипериодического затухающего процесса уменьшалась обратная связь  $M$ , при этом из развертки и фазовой траектории, приведенной на рис. 17, был получен декремент затухания для двух значений  $M$ , лежащих левее точки бифуркации.

$M, y.e$	-10	-25
$\delta$	0.63	0.56

Апериодического процесса достичь не удалось, в связи со слишком маленьким максимальным сопротивлением установки. Достигнутый процесс приведен на рис. 18

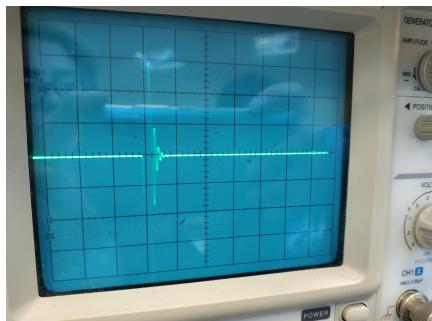


Рис. 17



Рис. 18

## 2.2. Жесткий режим генератора

Для определения жесткого режима при выставленном  $E_0$  менялось значение  $M$ . Признаком жесткого режима было резкое увеличение амплитуды после преодоления некоторого значения  $M''$ . Снятая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 19.

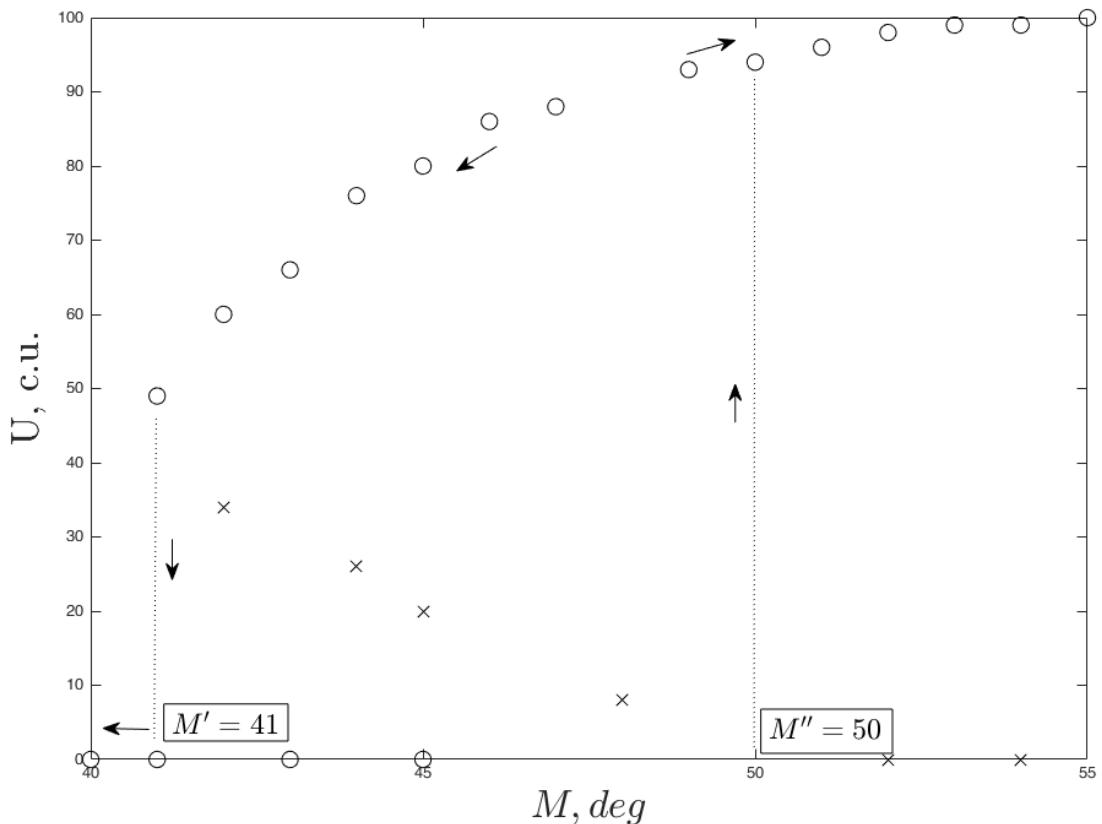


Рис. 19: Бифуркационная диаграмма для жесткого режима генератора

Для нахождения неустойчивых значений амплитуды включался прерыватель, и по фазовой траектории определялась устойчивость точки. Признаком попадания на неустойчивую точку было наблюдение двух картин одновременно, т.е. колебания как устанавливались, так и затухали. Пример такой фазовой траектории приведен на рис. 21а.

Из бифуркационной диаграммы были получены значения для  $M'$ ,  $M''$ , соответствующие параметрам  $\sigma'$  и  $\sigma''$ .

$$M' = 41 \pm 1y.e.$$

$$M'' = 50 \pm 1y.e.$$

Фазовые траектории для жесткого режима приведены на рис. 20 - рис. 22.

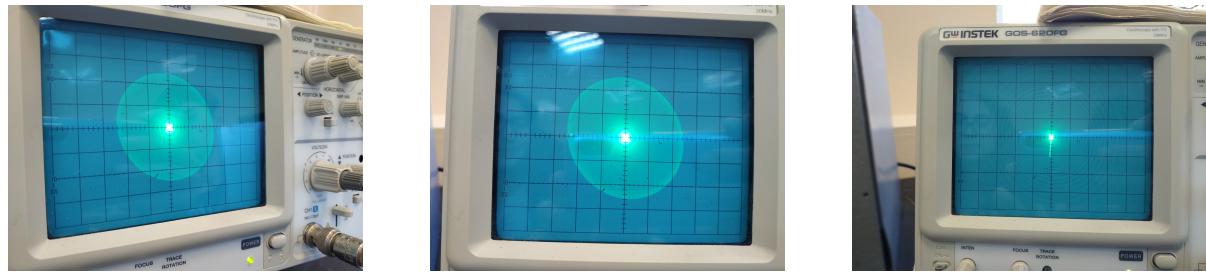


Рис. 20: Фазовая траектория для  $M < M'$

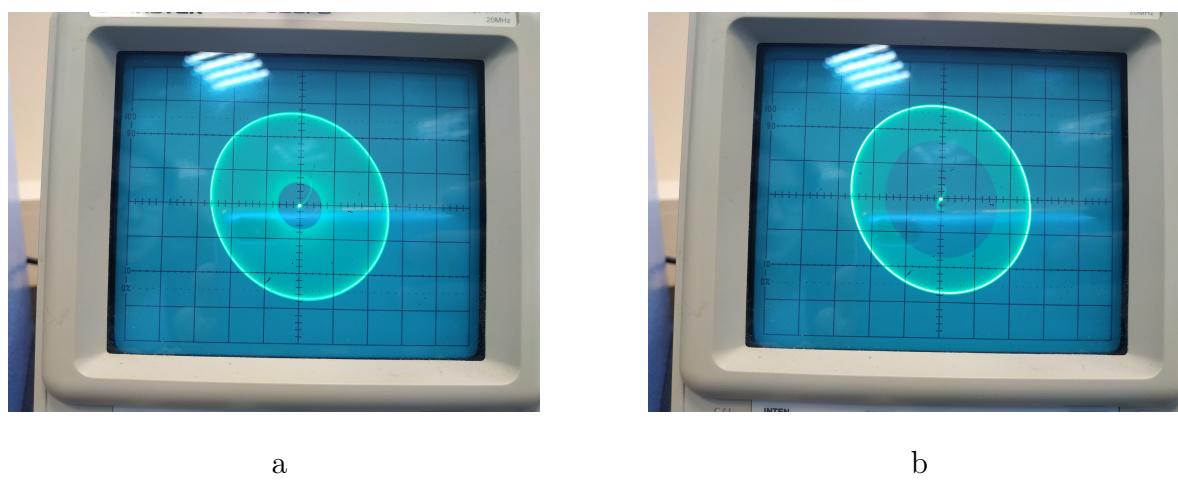


Рис. 21: Фазовая траектория для  $M' < M < M''$

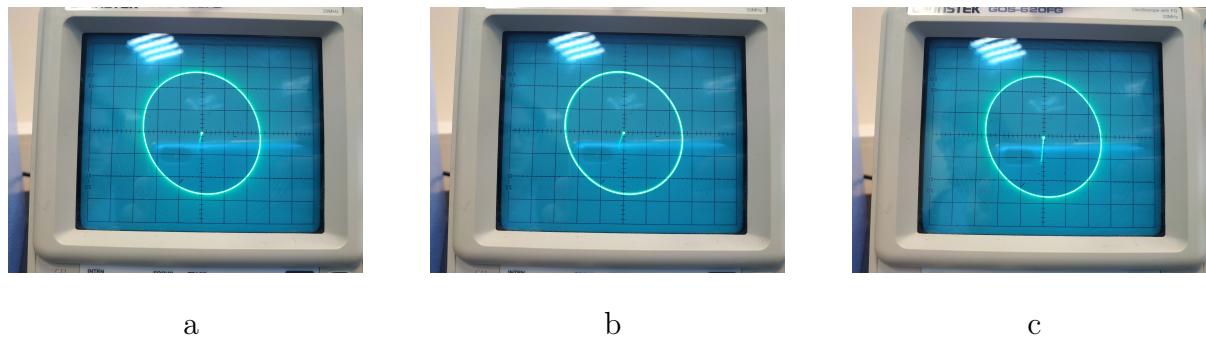


Рис. 22: Фазовая траектория для  $M'' > M$

### 2.3. Сложно-жесткий режим генератора

Полученная бифуркационная диаграмма приведена на рис.23

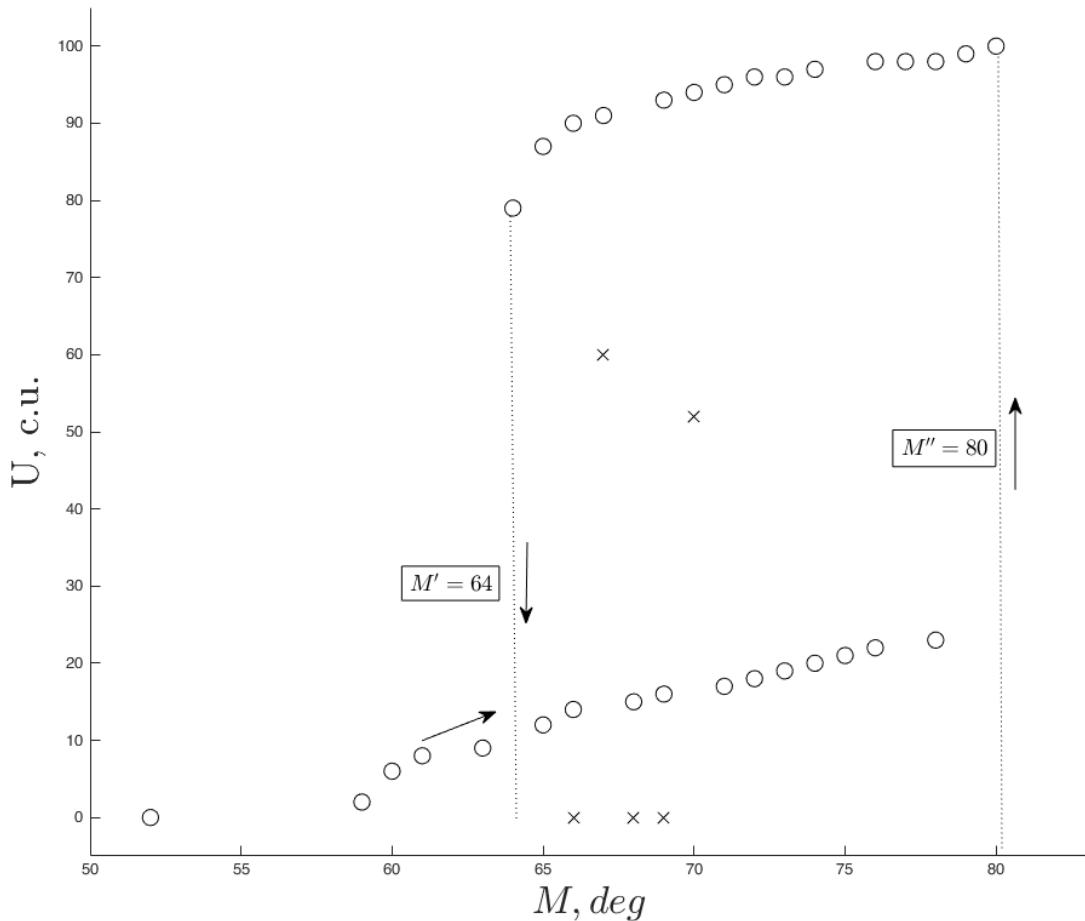


Рис. 23: Бифуркационная диаграмма для сложно-жесткого режима генератора

$$M' = 64 \pm 1 \text{y.e.}$$

$$M'' = 80 \pm 1 \text{y.e.}$$

### 3. Вывод

В ходе работы были изучены три различных режима возбуждения лампового генератора, установлена зависимость амплитуды автоколебаний от параметров системы. Для каждого из режимов удалось получить бифуркационные диаграммы, которые по характеру поведения совпадают с теоретическими, а также фазовые траектории при различных начальных условиях для разных параметров системы. Апериодический процесс для мягкого типа наблюдать не удалось.