

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО  
Радиофизический факультет

---

Отчет по лабораторной работе №1

**Многозвенные LC-фильтры**

Выполнили студенты 430 группы  
Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В.

Нижний Новгород, 2018

# Содержание

<b>1 Теоретическая часть . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1 Цель работы . . . . .	2
1.2 Уравнения многозвенного электрического фильтра . . . . .	2
1.3 Дисперсионное уравнение . . . . .	4
1.4 Собственные колебания . . . . .	6
1.5 Вынужденные колебания . . . . .	7
<b>2 Конкретные виды фильтров . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ) . . . . .	10
2.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ) . . . . .	12
2.3 Полосовой фильтр . . . . .	13
<b>3 Практическая часть . . . . .</b>	<b>15</b>
3.1 Фильтр низких частот . . . . .	15
3.2 Фильтр высоких частот . . . . .	17
3.3 Полосовой фильтр . . . . .	19
3.4 Заключение . . . . .	21

## 1. Теоретическая часть

### 1.1. Цель работы

Целью настоящей работы является изучение свойств линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере электрических фильтров. Обычно в качестве фильтров используются цепочки из последовательно соединенных друг с другом идентичных звеньев (четырехполюсников). Такие системы удобно описывать на языке теории волн, интерпретируя их, как направляющие (волноводные) системы. При этом количественное и качественное описание колебательных процессов в фильтрах существенно упрощается и делается более наглядным благодаря использованию таких волновых понятий, как дисперсия, фазовая и групповая скорости волн, коэффициенты отражения плоской волны от границ системы.

### 1.2. Уравнения многозвездного электрического фильтра

Система, состоящая из цепочки идентичных звеньев, будучи системой с пространственной дисперсией, обладает селективными свойствами в определенной области частот. В зависимости от того, какова область частот, в которой колебания пропускаются практически без искажений, фильтры подразделяются на фильтры низких и высоких частот, полосовые и задерживающие фильтры.

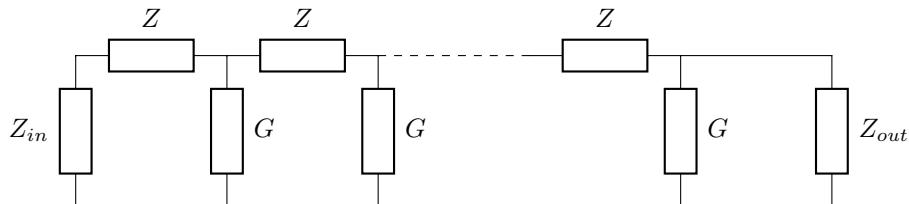


Рис. 1: Общая схема фильтра

Четырехполюсники, образующие звенья рассматриваемых в работе электрических фильтров, состоят из пассивных элементов: индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений. Для большей методической простоты мы будем изучать только консервативные фильтры, состоящие из чисто реактивных элементов – индуктивностей и ёмкостей, так называемые LC - фильтры. Общая схема фильтра приведена на рис. 1, где введены следующие обозначения:  $Z(p)$  – операторный импеданс,  $G(p)$  – операторная проводимость, и  $Z_{in}(p)$  и  $Z_{out}(p)$  – операторные импедансы на входе и выходе фильтра, соответственно, где  $\omega$  – частота колебаний. При расчетах фильтры могут быть разбиты на так называемые Г-образные, Т-

образные и П-образные звенья. Заметим, что такое деление – чисто условное и не влияет на коэффициент передачи рассчитываемого фильтра.

Рассмотрим для примера фильтр, разбитый на Т-образные звенья (см. рис. 2), и запишем для него операторные уравнения квазистатики.

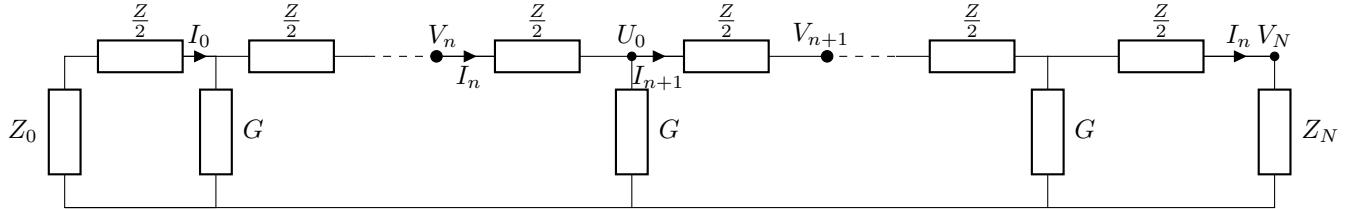


Рис. 2: Фильтр из Т-образных звеньев

При этом на основании законов Кирхгофа для комплексных амплитуд напряжений  $V_n$  и токов  $I_n$ , где  $n$  номер звена, будем иметь:

$$V_n - U_0 = \frac{Z}{2} I_n, \quad (1)$$

$$U_0 - V_{n+1} = \frac{Z}{2} I_{n+1}, \quad (2)$$

$$G U_0 = I_n - I_{n+1} \quad (3)$$

Исключая из этих уравнений  $U_0$  и разрешая их относительно переменных  $V_{n+1}$  и  $I_{n+1}$ , получим:

$$V_{n+1} = a_{11}(p)V_n - a_{12}(p)I_n, \quad (4)$$

$$I_{n+1} = -a_{21}V_n + a_{22}(p)I_n, \quad (5)$$

где

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right), \quad (6)$$

$$a_{21} = G, a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \quad (7)$$

Отметим следующее важное свойство четырёхполюсников. Четырёхполюсники, для которых выполняются условия

$$a_{11} = a_{22}, a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1, \quad (8)$$

называются взаимными. Для них выполняется теорема взаимности, согласно которой свойства четырёхполюсника не изменяются, если его вход и выход поменять местами. Нетрудно видеть, что Т-образное звено представляет собой взаимный четырёхполюсник. В случае

П-образного разбиения на звенья в уравнениях (4) следует положить

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z, \quad (9)$$

$$a_{21} = G\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right), a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \quad (10)$$

Отсюда следует, что П-образное звено также удовлетворяет теореме взаимности. Система (4) должна быть дополнена граничными условиями

$$V_0 = -I_0 Z_0, V_N = Z_n I_n \quad (11)$$

Исследование явлений, описываемых уравнениями (4) при условии (11) включает в себя задачи:

1. описание собственных колебаний
2. описание вынужденных колебаний

Прежде чем переходить к решению первой задачи, исследуем собственные колебания (4) в безграничной цепочке, положим  $N \rightarrow \infty$ .

### 1.3. Дисперсионное уравнение

Важнейшей особенностью рассматриваемой цепочной структуры является её периодичность, являющаяся следствием идентичности звеньев и проявляющаяся при  $N \rightarrow \infty$  в виде свойства так называемой *трансляционной симметрии*. Это свойство равнозначно свойству инвариантности уравнений (1) относительно преобразования трансляции  $n \Rightarrow n'$  вида  $n' = n + m$ , где  $m$  – любое целое число. Трансляционная симметрия (1) в сочетании с линейностью этих уравнений позволяет искать их решение в виде

$$V_n = Ae^{-in\theta}, I_n = Be^{-in\theta}, \quad (12)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $\theta$  – некоторая величина, подлежащая определению. Она находится из условия существования нетривиального решения алгебраической системы

$$A(e^{-i\theta} - a_{11}) + Ba_{12} = 0, \quad (13)$$

$$Aa_{21} + B(e^{-i\theta} - a_{22}) = 0, \quad (14)$$

получаемой подстановкой (12) в (4). Этим условием является равенство нулю детерминанта (13), что, с учётом (8), даёт

$$(e^{-i\theta} - a_{11})^2 - a_{11}^2 + 1 = 0 \quad (15)$$

или

$$\cos \theta = a_{11} \quad (16)$$

Величина  $\theta$ , определяемая из (16) называется *постоянной распространения* и принимает в общем случае комплексные значения ( $\theta = \theta' + i\theta''$ ). Мнимая часть  $\theta$  представляет собой декремент (или инкремент) волны, а действительная часть – набег фазы волны на одно звено. При этом  $\theta'$  связана с длиной волны  $\lambda$  очевидным соотношением

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\theta'}, \quad (17)$$

в котором

$$\lambda = \min|n_1 - n_2| \quad (18)$$

где и  $n_1$  и  $n_2$ - номера ячеек, отвечающих синфазным колебаниям. Поскольку параметр является функцией частоты  $\omega$ , уравнение (16) связывает постоянную распространения с частотой и называется дисперсионным уравнением системы. Дисперсионное уравнение исчерпывающе характеризует безграничную систему. В случае, когда отсутствует временное и пространственное затухание ( $\text{Im } \omega = \text{Im } \theta = 0$ ), оно позволяет определить фазовую ( $V_\Phi$ ) и групповую ( $V_{\text{гр}}$ ) скорости волн:

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\theta}, V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\theta} \quad (19)$$

$$(-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Дисперсионное уравнение (16) описывает два типа волн – прямую ( $\theta = \theta^+$ ) и обратную ( $\theta = \theta^-$ ) волну. При этом для фиксированного  $\omega$  значения  $\theta^+$  и  $\theta^-$  будут отличаться только знаком:

$$\theta^- = -\theta^+. \quad (20)$$

Подставляя  $\theta^-$  и  $\theta^+$  в одно из уравнений системы (13), можно найти связь между амплитудами напряжения и тока для прямой и обратной волн

$$B^+ = G_x A^+, B^- = -G_x A^-, \quad (21)$$

где

$$G_x = \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}} \quad (22)$$

–характеристическая проводимость фильтра. Наряду с  $G_x$ , вводят также и обратную ей величину

$$Z_x = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}, \quad (23)$$

именуемую *характеристическим импедансом* фильтра.

Пространственная дисперсия фильтра (описываемая (16)) обуславливает его селективные свойства. Для характеристики этих свойств вводят понятие *полосы прозрачности*, а именно полосы частот, в которой (отсутствует затухание по переменной  $n$ ).

Найдём связь ширины полосы прозрачности с параметрами фильтра. С этой целью заметим, что поскольку

$$\sin \theta = \operatorname{ch} \theta'' \sin \theta' + i \operatorname{sh} \theta'' \cos \theta', \quad (24)$$

то в полосе прозрачности

$$\sin \theta = \sin \theta'. \quad (25)$$

Отсюда, в силу (15), заключаем, что

$$1 - a_{11}^2 \geq 0, \quad (26)$$

или, с учётом (6), –

$$GZ\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right) \leq 0 \quad (27)$$

Из этого условия и находится полоса прозрачности фильтра. Из него, в частности следует, что в полосе прозрачности фильтра характеристический импеданс (23) будет действительной величиной.

Вне полосы прозрачности  $\sin \theta' = 0$  и, следовательно,  $\sin \theta = i \operatorname{sh} \theta''$ . С учётом (16), будем иметь

$$\operatorname{sh} \theta'' = \pm \sqrt{a_{11}^2 - 1} \quad (28)$$

#### 1.4. Собственные колебания

Найдём собственные колебания в цепочке, состоящей из  $N$  одинаковых Т-образных звеньев, описываемой системой уравнений (4) при граничных условиях (11). Общее решение такой системы будет представлять собой суперпозицию прямой и обратной волн вида

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \quad (29)$$

$$I_n = B_1 e^{-i\theta} + B_2 e^{i\theta}. \quad (30)$$

Для внутренних звеньев прямая и обратная волны распространяются независимо и для них, в силу (21), общее решение запишется в виде

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \quad (31)$$

$$I_n = G_x(A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}). \quad (32)$$

Подставляя это решение в граничные условия (11), получим следующую однородную систему уравнений для нахождения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ :

$$(1 + Z_0G_x)A_1 + (1 - Z_0G_x)A_2 = 0, (1 - Z_NG_x)e^{-iN\theta}A_1 + (1 + Z_NG_x)e^{iN\theta}A_2 = 0. \quad (33)$$

Отсюда, расписав условие существования ненулевых решений для  $A_1$  и  $A_2$ , найдём *характеристическое уравнение* рассматриваемой системы

$$1 - \Gamma_0\Gamma_N e^{-2iN\theta} = 0, \quad (34)$$

где

$$\Gamma_0 \frac{A_1}{A_2} = -\frac{1 - Z_0G_x}{1 + Z_0G_x} \quad (35)$$

—коэффициент отражения от левой границы фильтра, а

$$\Gamma_N \frac{A_2 e^{iN\theta}}{A_1 e^{-iN\theta}} = -\frac{1 - Z_NG_x}{1 + Z_NG_x} \quad (36)$$

—коэффициент отражения от правой границы фильтра.

Решая совместно дисперсионное уравнение (16) и характеристическое уравнение (40), найдём спектр собственных (нормальных) частот фильтра и соответствующий ему спектр значений постоянной распространения  $\theta$ . Очевидно, что этот спектр будет зависеть не только от параметров звена фильтра, но и от условий на его концах. Отметим также, что число нормальных частот всегда совпадает с числом степеней свободы системы.

## 1.5. Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания в фильтре, составленном из Т-образных звеньев, при условии, что на входе фильтра действует источник синусоидальной ЭДС  $E = E_0 \cos(\omega t)$  с внутренним сопротивлением  $r_0$  (см. 37). Решение в такой системе можно искать в виде синусоидальных колебаний на частоте внешней силы  $\omega$ . При этом остаются справедливыми уравнения (4), а граничные условия принимают вид:

$$V_0 = E_0 - r_0Z_0, \quad V_N = Z_NI_N. \quad (37)$$

Подставляя (13) в (??), получим

$$\begin{aligned} (1 + r_0G_x)A_1 + (1 - r_0G_x)A_2 &= E_0 \\ (1 - Z_NG_x)e^{-iN\theta}A_1 + (1 + Z_NG_x)e^{iN\theta}A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда для  $A_1$  и  $A_2$  будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0}{1 - \Gamma_0\Gamma_N e^{-2iN\theta}}, \\ A_2 &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0\Gamma_N e^{-2iN\theta}}{1 - \Gamma_0\Gamma_N e^{-2iN\theta}}, \end{aligned} \quad (39)$$

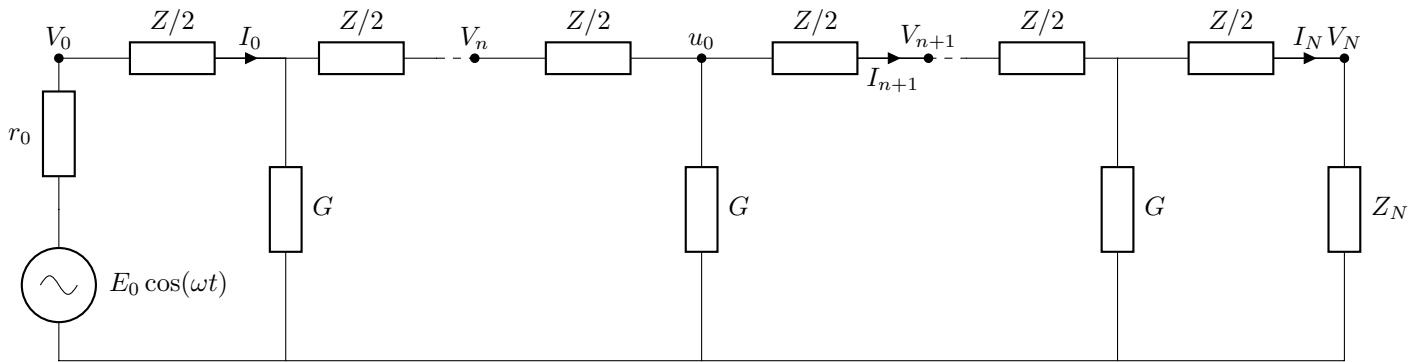


Рис. 3

Подставляя (39) в (13), получим следующие выражения для комплексных амплитуд напряжения  $V_n$  и  $I_n$  тока в  $n$ -ой ячейке:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0 e^{-in\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}} [1 + \Gamma_N e^{-2i(N-n)\theta}], \\ I_n &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0 e^{-in\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}} G_x [1 - \Gamma_N e^{-2i(N-n)\theta}], \end{aligned} \quad (40)$$

Из (40) следует, что если частота внешней ЭДС совпадает с одной из собственных частот фильтра, то амплитуды напряжений и токов во всех звеньях фильтра принимают бесконечно большие значения (явление резонанса). Очевидно, что это возможно лишь в отсутствии затухания, т. е. при условии  $\text{Im } \omega_m = 0$ . В реальных системах всегда существуют потери ( $\omega_m = \omega'_m + i\omega''_m$ ) и знаменатель в (40) не обращается в ноль. При этом в случае произвольных потерь картина резонанса достаточно сложна и далека от той, какую мы имеем в одиночном резонанском контуре. Однако, при  $\omega''_m / \omega'_m \ll 1$  эта картина существенно упрощается, и влияние потерь можно описать на привычном языке добротности, вводя её для каждой моды отношением

$$Q_m = \omega'_m / \omega''_m \quad (41)$$

Таким образом, для системы со многими степенями свободы не имеет смысла говорить о добротности системы вообще, необходимо оговаривать, о добротности какой моды идёт речь.

При изучении вынужденных колебаний важную роль играют два семейства статических характеристик: семейство амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и семейство фазо-частотных характеристик (ФЧХ). Эти семейства находятся из выражения для коэффициента передачи, представляющего собой отношение комплексной амплитуды напряжения на выходе фильтра к амплитуде ЭДС на входе, т.е.

$$W(\omega) = \frac{V_N(\omega)}{E_0(\omega)} = \frac{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_N)e^{-iN\theta}}{2(1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta})} \quad (42)$$

По определению АЧХ – это функция

$$A(\omega) = |W(\omega)| \quad (43)$$

а ФЧХ – функция

$$\Phi(\omega) = -\arg W(\omega) \quad (44)$$

Очевидно, что вид того и другого семейства характеристик зависит от условий на концах фильтра.

Рассмотрим влияние этих условий на  $A(\omega)$  и  $W(\omega)$  в полосе прозрачности фильтра, полагая для простоты, что нагрузка фильтра чисто активная (т. е.  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_N$  – действительные функции). При этом

$$A(\omega) = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{1 + \Gamma_N}{\sqrt{1 - \Gamma_0 \Gamma_N \cos 2N\theta + \Gamma_0^2 \Gamma_N^2}} \quad (45)$$

Из полученного выражения следует, что если фильтр согласован на обоих концах ( $\Gamma_0 = \Gamma_N = 0$ ), то  $A(\omega) = 1/2$ , т.е. напряжение источника ЭДС делится поровну между фильтром и внутренним сопротивлением источника. Если фильтр согласован только на входе ( $\Gamma_0 = 0$ ), или только на выходе( $\Gamma_N = 0$ ), то  $A(\omega) = (1+\Gamma_N)/2$  и  $A(\omega) = (1-\Gamma_0)/2$ , соответственно. Во всех трёх случаях АЧХ не зависит от числа звеньев фильтра.

Если фильтр согласован хотя бы на одном из своих концов, а нагрузка на другом конце – чисто активная, то существенно упрощается и  $\Phi(\omega)$ :

$$\Phi(\omega) = N\theta(\omega) \quad (46)$$

Т.е. ФЧХ с точностью до множителя  $N$  сводится к дисперсионной характеристике фильтра.

Многозвенные фильтры представляют собой разновидность длинных линий и используются в радиотехнических устройствах в качестве *линий задержки*. Время запаздывания сигнала при прохождении его через фильтр легко оценить для случая узкополосного сигнала при условии, что спектр его лежит в полосе прозрачности фильтра и укладывается в диапазон частот, в котором фазо-частотную характеристику фильтра можно считать линейной. Спектральную плотность такого сигнала на выходе фильтра для прямой волны можно записать в виде

$$u_N(\eta) = A_1(\xi) e^{i[(\Omega + \eta)t - N\theta(\Omega + \eta)t]} \quad (47)$$

Учитывая, что  $|\eta| \leq \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  – полуширина спектра, и принимая во внимание условие узкополосности  $\Delta\omega \ll \Omega$ , разложим в этом выражении нелинейную функцию  $\theta(\Omega + \eta)$  в ряд по степеням  $\eta$ , ограничившись двумя первыми членами:

$$\theta(\Omega + \eta) \approx \theta(\Omega) + \left. \frac{d\theta}{d\omega} \right|_{\Omega} \eta \quad (48)$$

При этом выражение (47) примет вид

$$u_N(\eta) \approx A_1(\xi) e^{i[\Omega t - N\theta\Omega]} e^{i(t - N \frac{d\theta}{d\omega} \eta)} \quad (49)$$

Отсюда следует, что время задержки сигнала при прохождении через  $N$ -звеный фильтр равно  $\tau_N = N \frac{d\omega}{d\theta} \Omega$ . Т.е. групповая скорость ( $d\omega / d\theta$ ) имеет смысл времени запаздывания, приходящегося на одно звено.

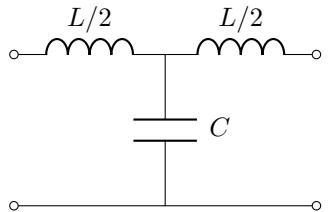
## 2. Конкретные виды фильтров

### 2.1. Фильтр низкой частоты (ФНЧ)

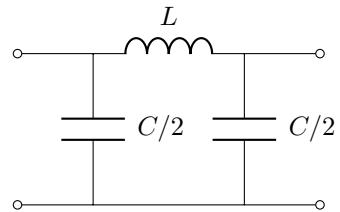
Вид отдельного звена ФНЧ изображен на рис 4. ФНЧ служит для пропускания колебаний низкой частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega_{cp}$  (частота "среза"). Для ФНЧ

$$Z = i\omega L, \quad G = i\omega C. \quad (50)$$

При этом **дисперсионное уравнение** имеет вид



Т-образное звено



П-образное звено

Рис. 4

$$\omega^2 = \frac{2}{LC} (1 - \cos \theta) \quad (51)$$

Из периодического характера этого уравнения следует, что физический смысл имеет лишь та часть дисперсионных ветвей, которая лежит в области  $|\theta| \leq \pi$ . Т.е. набег фазы на одно звено не может превышать  $\pi$ . Поскольку постоянная распространения  $\theta$  связана с длиной волны  $\lambda$  соотношением  $\lambda = 2\pi/\theta$ , то из существования  $\theta_{max} = \pi$  вытекает существование  $\lambda_{min}$ . Иными словами, волны с длиной в одну ячейку существовать не могут. Этот результат порождён дискретным характером структуры фильтра и может быть предсказан заранее.

**Полоса прозрачности** ФНЧ, в силу (27), задаётся условием

$$\omega^2 \leq \frac{4}{LC} \left( \xi^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} \leq 1 \right) \quad (52)$$

**Характеристический импеданс** фильтра, состоящего из Т- и П-образных звеньев задаётся соотношениями

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \xi^2}, \quad Z_x^\Pi = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (\rho = \sqrt{L/C}) \quad (53)$$

Соответствующие им частотные зависимости изображены на рис. 5.

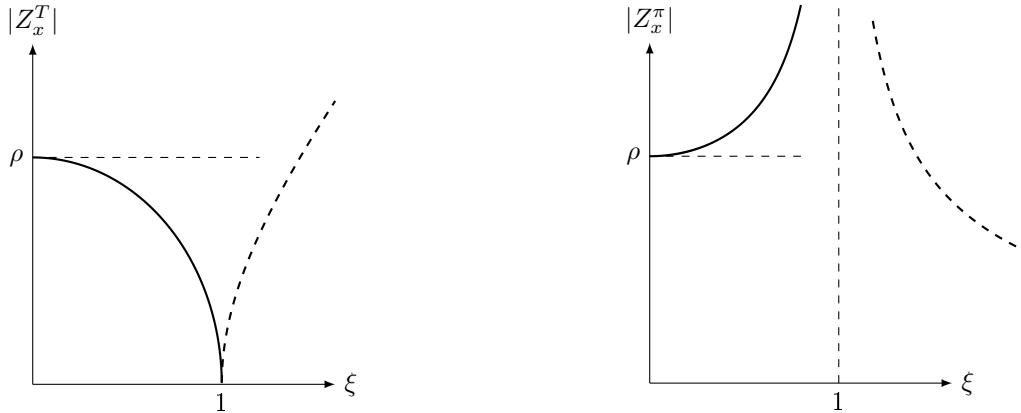


Рис. 5

**Параметры звеньев фильтра** рассчитываются по формулам

$$L = \frac{2\rho}{\omega_{cp}}, \quad C = \frac{2}{\rho\omega_{cp}} \quad (54)$$

Время задержки на одно звено даётся выражением

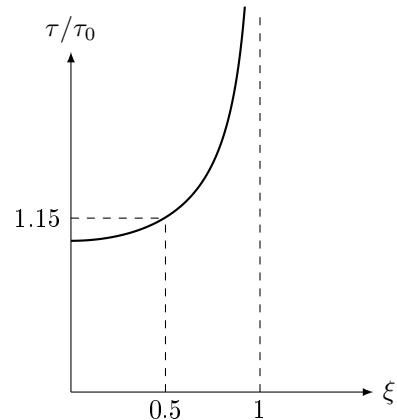


Рис. 6

$$\tau = \frac{2}{\omega_{cp} \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (55)$$

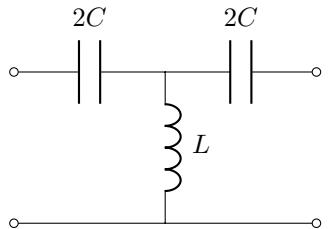
Графическая зависимость времени задержки от частоты изображена на рис. 6

## 2.2. Фильтр высокой частоты (ФВЧ)

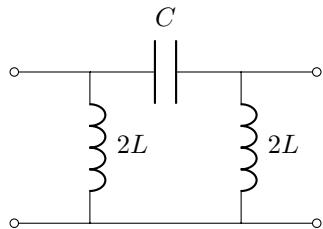
Вид отдельного звена ФВЧ изображен на рис 7. ФВЧ служит для пропускания колебаний с частотами  $\omega \geq$ . Для ФНЧ

$$Z = \frac{i}{\omega C}, \quad G = \frac{i}{\omega L}. \quad (56)$$

При этом **дисперсионное уравнение** имеет вид



Т-образное звено



Π-образное звено

Рис. 7

$$\omega^2 = \frac{1}{2LC(1 - \cos \theta)} \quad (57)$$

**Полоса прозрачности** ФНЧ, определяется из условия

$$1 - \frac{1}{4\omega^2 LC} \geq 0 \quad (\xi^2 \geq 1) \quad (58)$$

**Характеристический импеданс** фильтра, состоящего из Т- и Π-образных звеньев задаётся соотношениями

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}, \quad Z_x^\Pi = \frac{\rho \xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (\rho = \sqrt{L/C}) \quad (59)$$

Соответствующие им частотные зависимости изображены на рис. 8.

**Параметры звеньев фильтра** рассчитываются по формулам

$$L = \frac{\rho}{2\omega_{cp}}, \quad C = \frac{1}{2\rho\omega_{cp}} \quad (60)$$

Время задержки на одно звено даётся выражением

$$\tau = \frac{1}{\omega_{cp}\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (61)$$

Графическая зависимость времени задержки от частоты изображена на рис.9

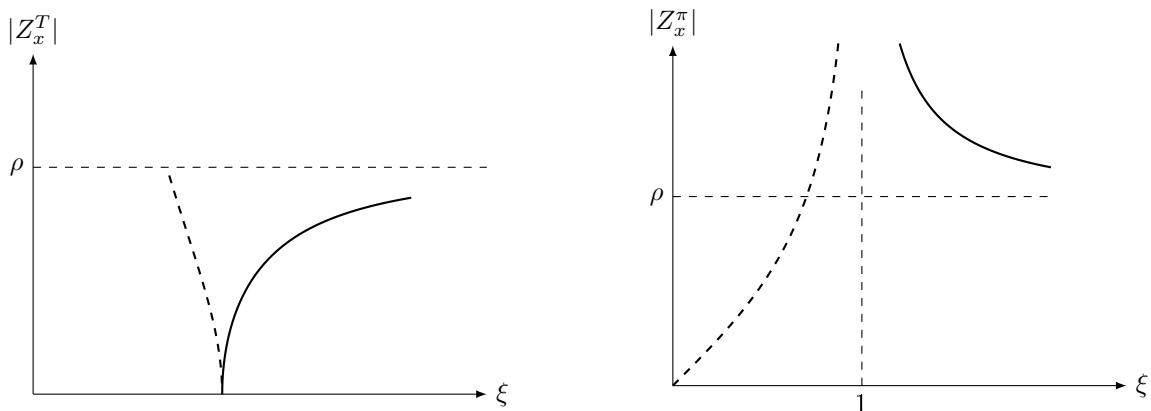


Рис. 8

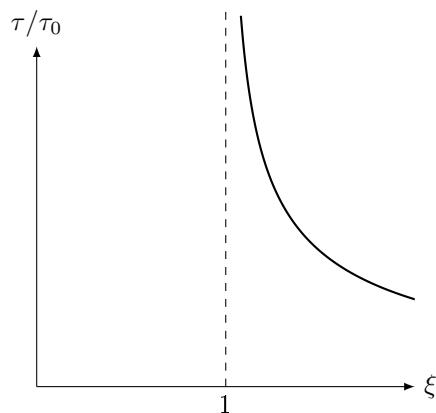


Рис. 9

### 2.3. Полосовой фильтр

Вид отдельного звена полосового фильтра изображен на рис.10. Полосовой фильтр служит для пропускания колебаний в полосе частот  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .

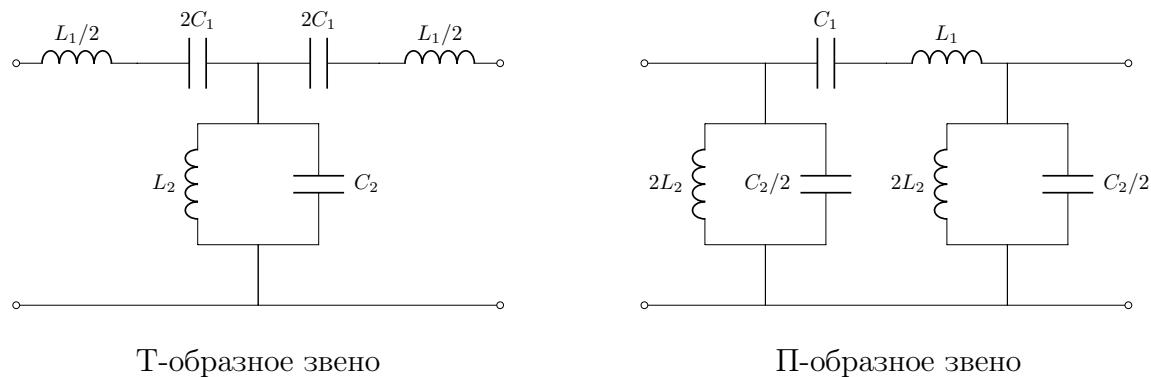


Рис. 10

Для полосового фильтра

$$Z = i\omega L_1 + i/\omega C_1, \quad G = i\omega C_2 + i/\omega L_2. \quad (62)$$

**Дисперсионное уравнение** полосового фильтра определяется следующей зависимостью

$$f(\omega^2) = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (63)$$

где

$$f(\omega^2) = \frac{(L_1 C_1 \omega^2 - 1)(L_2 C_2 \omega^2 - 1)}{4\omega^2 L_2 C_1} \quad (64)$$

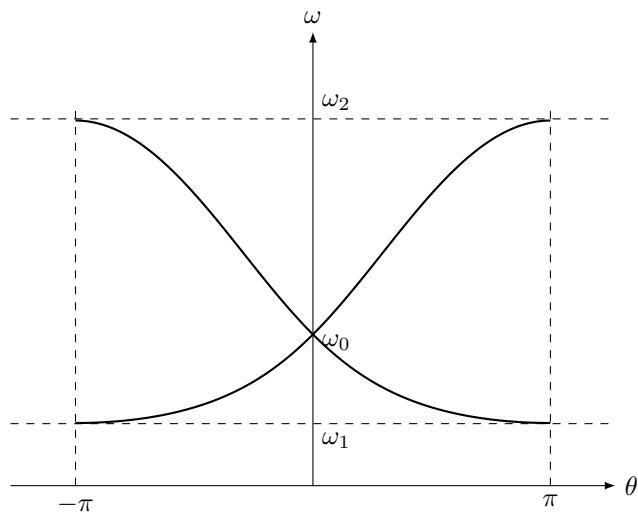


Рис. 11

Так как  $0 \leq \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$ , то система будет пропускать частоты  $\omega_1 \leq \omega \leq \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \leq \omega \leq \omega_2$ . На практике интересен случай, когда  $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0$ ,  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_1}{C_2} = \alpha$ . При этом дисперсионное уравнение принимает вид

$$\left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \frac{\omega_0}{2\omega} \sqrt{\alpha} = \pm \sin \frac{\theta}{2} \quad (65)$$

Соответствующие ему дисперсионные кривые изображены на рис.11

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}} (\sqrt{1+\alpha} - 1), \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}} (\sqrt{1+\alpha} + 1) \quad (66)$$

**Полоса прозрачности** фильтра определяется из условия

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \alpha \leq 4. \quad (67)$$

**Характеристический импеданс фильтра**, состоящего из Т- и П- образных звеньев соотношениями

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \frac{\alpha}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}, \quad Z_x^\Pi = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (68)$$

где  $\rho = \sqrt{L_2/C_1}$ .

**Параметры фильтра** рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{\omega_0} = \frac{2\rho}{\omega_2 - \omega_1}, \quad L_2 = \frac{L_1}{\alpha} = \frac{\rho(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0^2} \\ C_1 &= \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\rho\omega_1\omega_2}, \quad C_2 = \alpha C_1 = \frac{2}{\rho(\omega_2 - \omega_1)} \\ \rho &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{\alpha C_1}} \end{aligned} \quad (69)$$

### 3. Практическая часть

#### 3.1. Фильтр низких частот

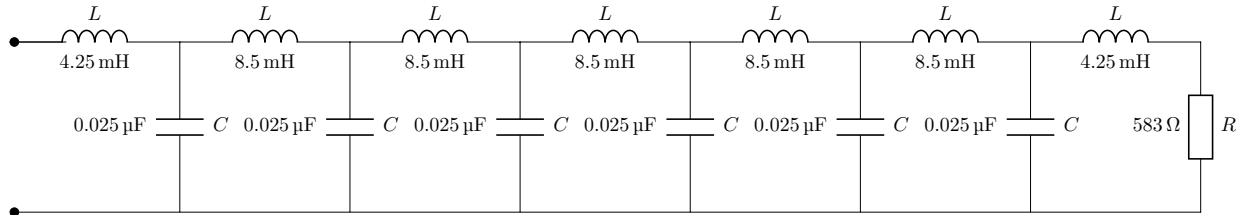


Рис. 12: Схема использованного ФНЧ из 6-ти Т-образных звеньев

Параметры используемого фильтра:  $\nu_{rp} = 21.83$  кГц,  $R = 583$  Ом, значения С и L указаны на схеме.

Амплитудно- и фазочастотные характеристики фильтра показаны на рисунках (13) и (14) соответственно.

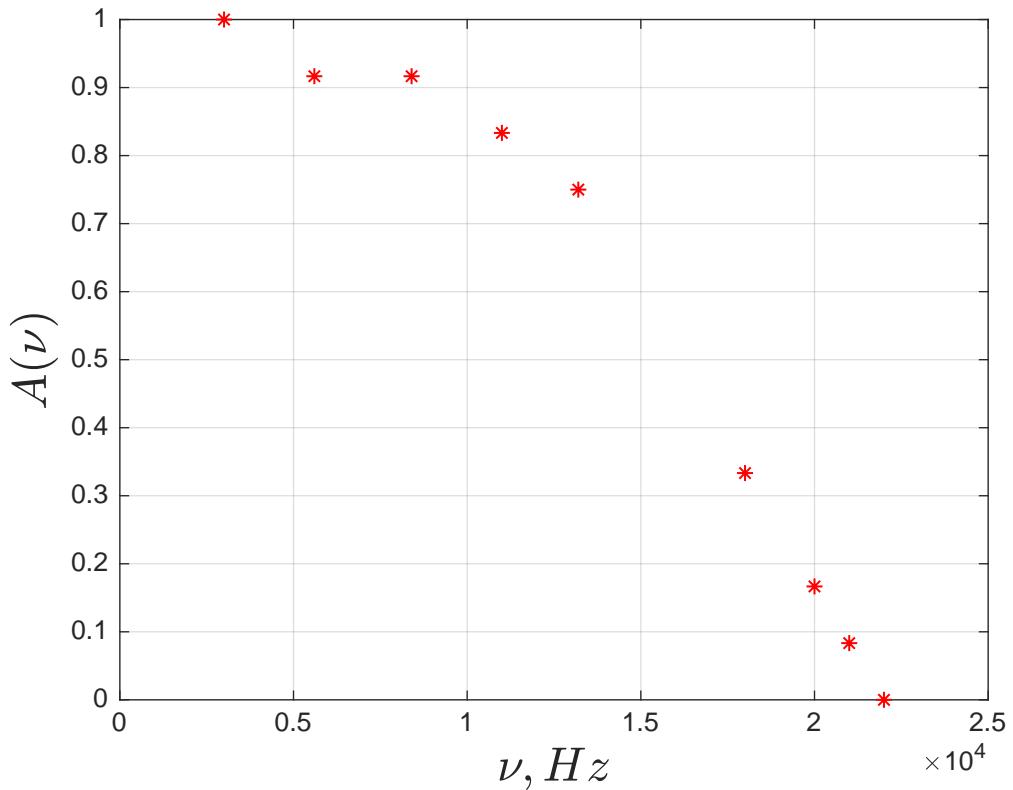


Рис. 13: АЧХ

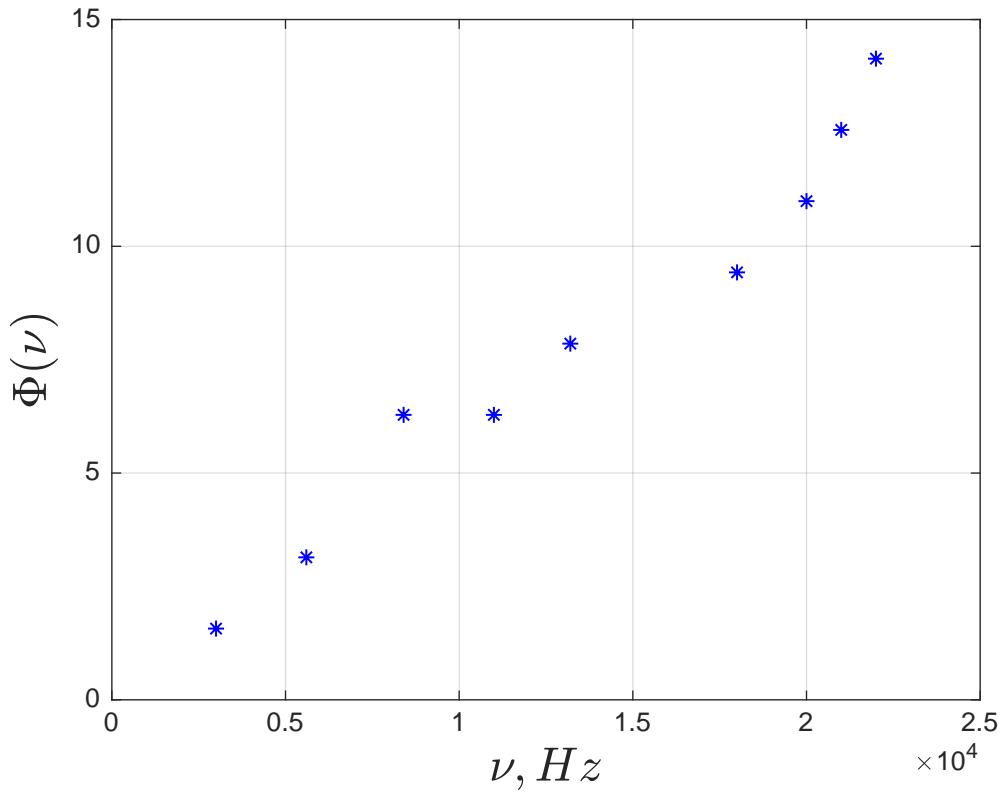
Таблица 1: Время задержки для сигнала на выходе ФНЧ

Число звеньев	Время задержки, мс
6	100
5	80
4	70
3	50
2	40
1	20
Среднее (на одно звено)	60

Расчетное время задержки (из формулы 55):

$$\tau = 25\text{мс} \quad (70)$$

Различия с практикой связаны с сопротивлением в контуре, которое мы не учитывали в

Рис. 14:  $\Phi$ ЧХ

теоретических подсчетах.

### 3.2. Фильтр высоких частот

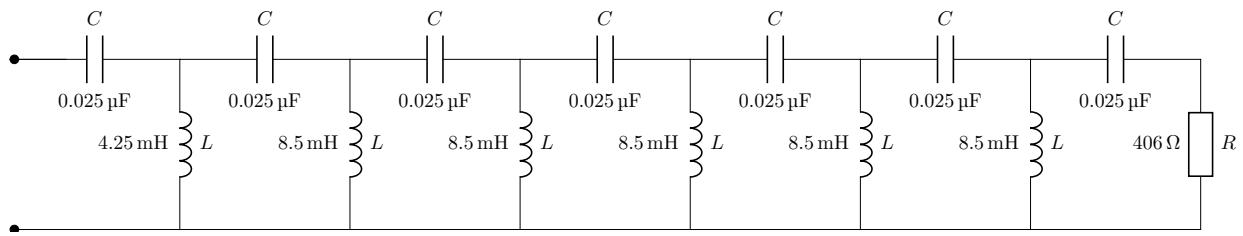


Рис. 15: Схема использованного ФВЧ из 6-ти Т-образных звеньев

Параметры используемого фильтра:  $\nu_{\text{тр}} = 7.83 \text{ кГц}$ ,  $R = 406 \text{ Ом}$ ,  $C = 0.025 \text{ мкФ}$ ,  $L = 4.25 \text{ мГн}$ .

Амплитудно- и фазочастотные характеристики фильтра показаны на рисунках (16) и (17) соответственно.

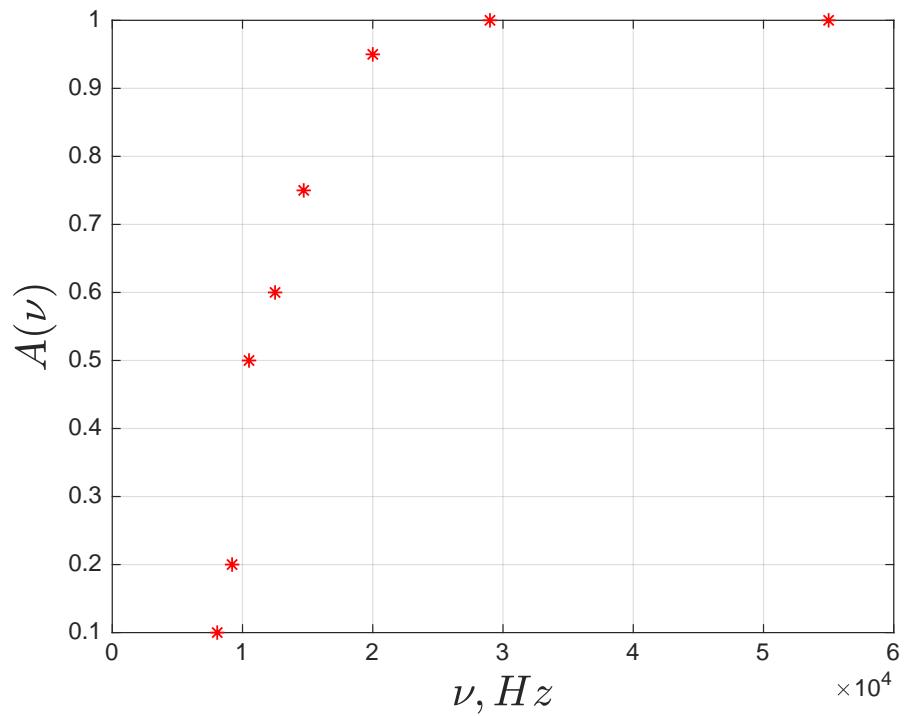


Рис. 16: АЧХ

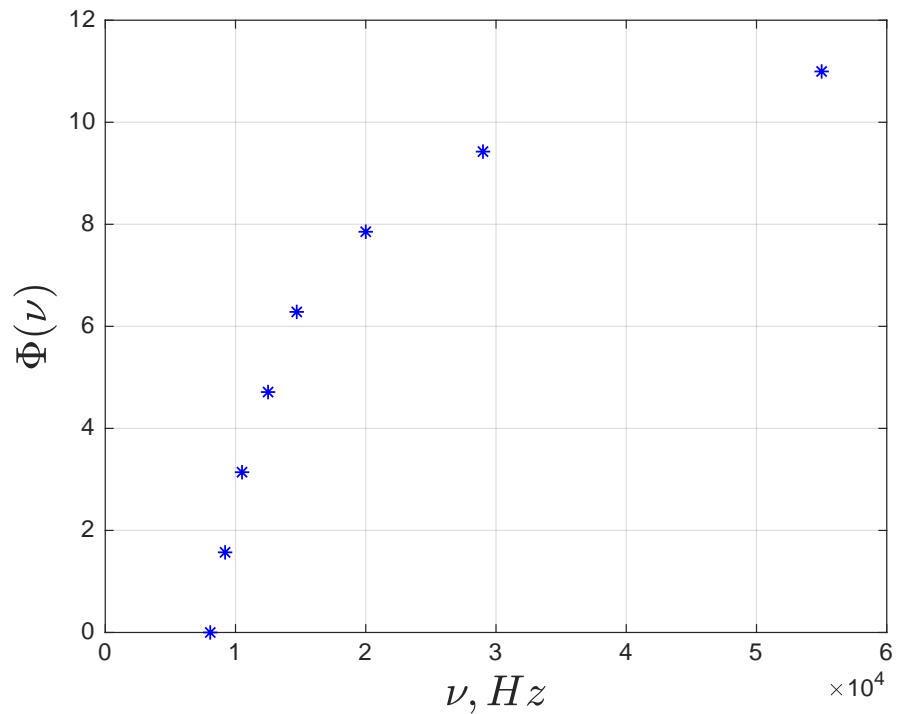


Рис. 17: ΦЧХ

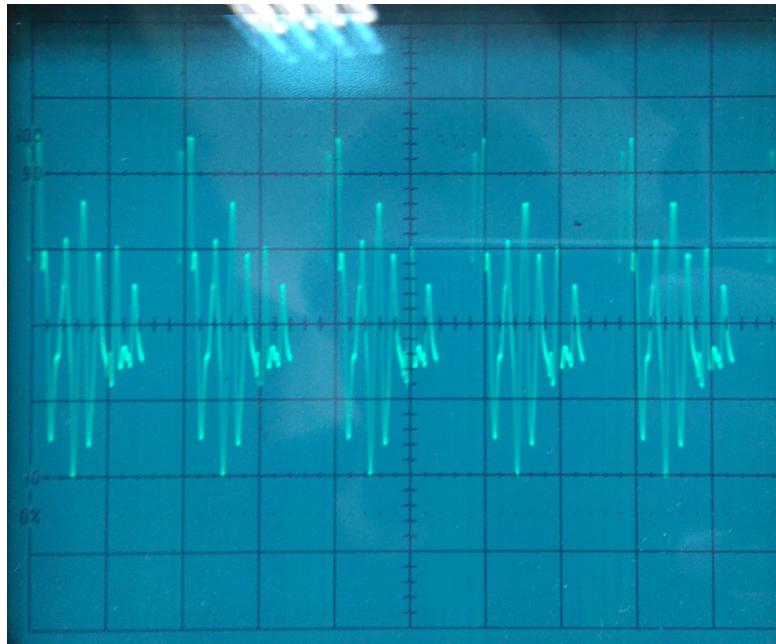


Рис. 18: Прохождение прямоугольного импульса через ВЧФ

### 3.3. Полосовой фильтр

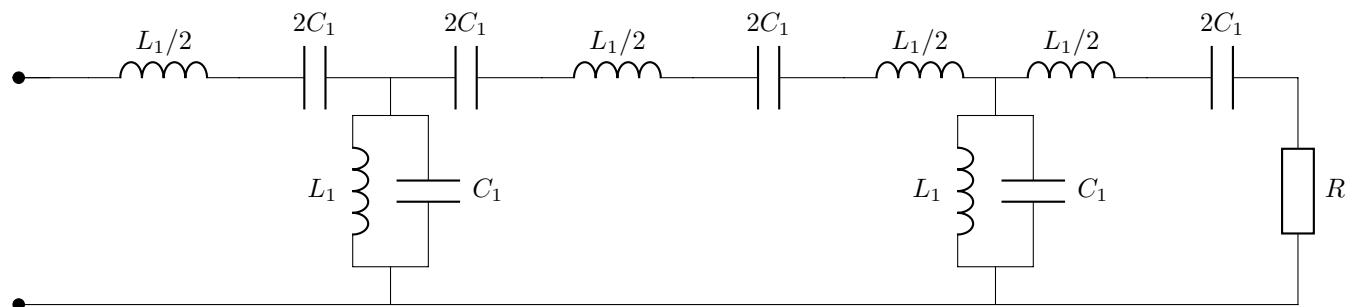


Рис. 19: Схема использованного ПФ из 2-х Т-образных звеньев

Параметры используемого фильтра:  $\nu_1 = 7.83$  кГц,  $\Delta\nu = 15.4$  кГц,  $R = 412$  Ом,  $C_1 = 0.025$  мкФ,  $C_2 = 0.025$  мкФ,  $L_1 = 8.5$  мГн,  $L_2 = 4.25$  мГн.

Амплитудно- и фазочастотные характеристики фильтра показаны на рисунках (20) и (21) соответственно.

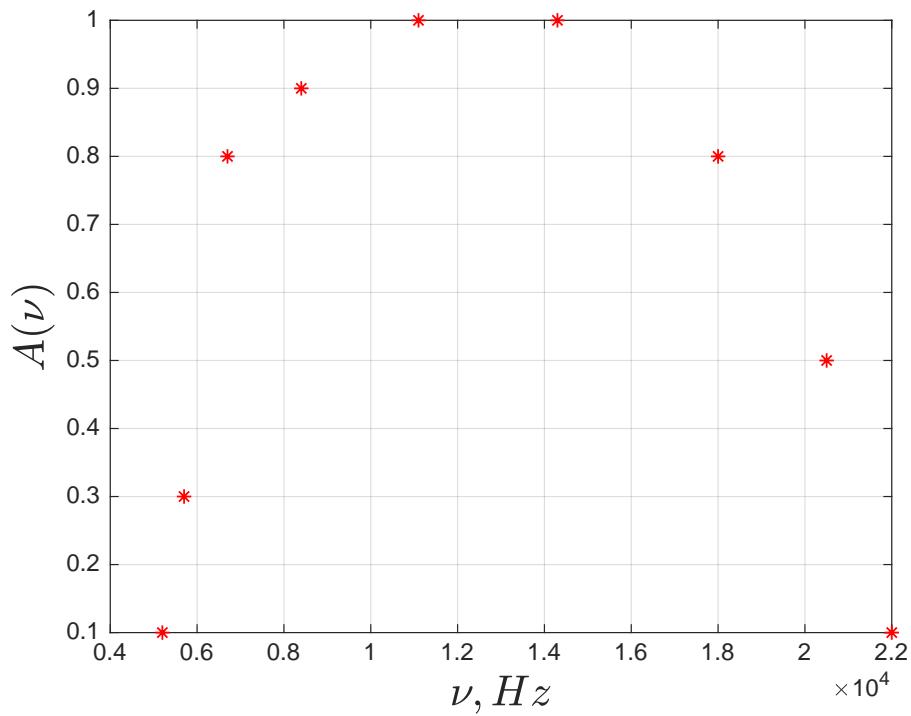


Рис. 20: АЧХ

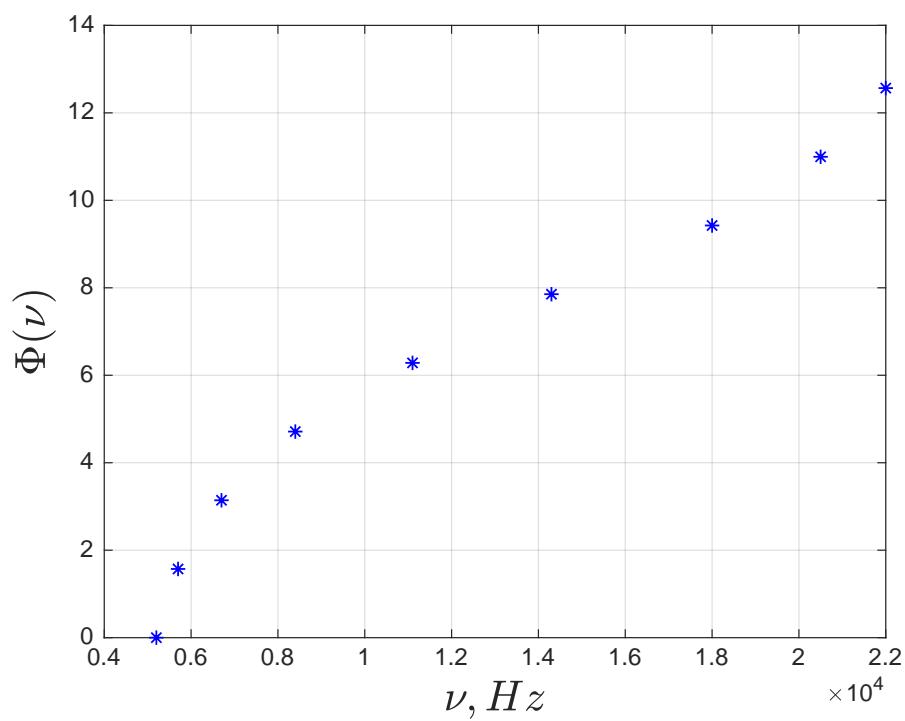


Рис. 21: ΦЧХ

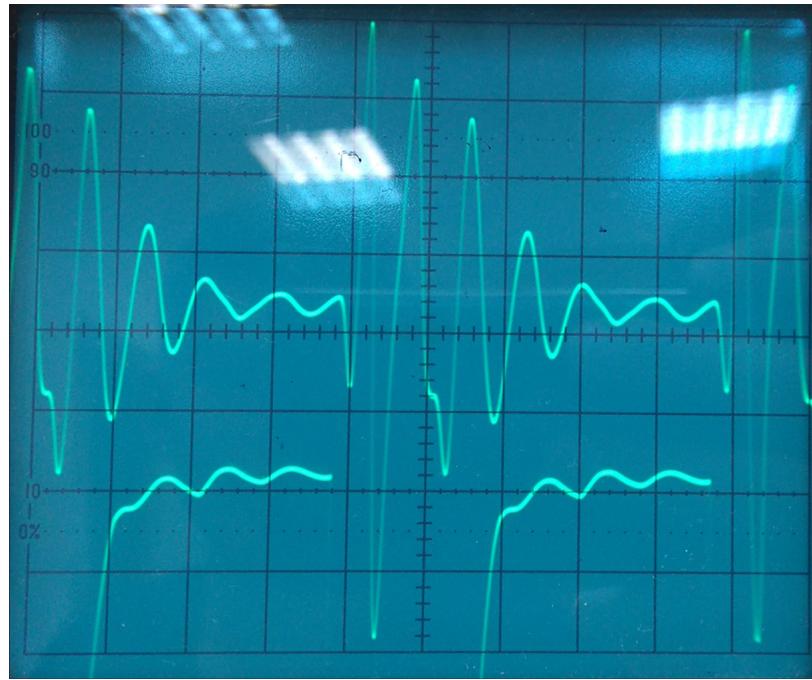


Рис. 22: Прохождение прямоугольного импульса через ПФ

### 3.4. Заключение

Были изучены свойства линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере электрических фильтров. Измерены амплитудно- и фазо-частотная характеристика многозвездных фильтров низких частот, фильтров высоких частот и полосовых фильтров.