

## 1.2. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в LC-линиях.

**Переход от дискретной к распределенной LC-линии.** Получим сначала дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в простейшей распределенной LC-линии. Принципиальная схема дискретной LC-линии в виде цепочки из емкостей и индуктивностей показана на рис. 1. Уравнения Кирхгофа для такой цепочки имеют вид

$$\bar{C} \frac{\partial u_n}{\partial t} = I_n - I_{n+1}, \quad \bar{L} \frac{\partial I_n}{\partial t} = u_{n-1} - u_n, \quad (1)$$

где  $u_n$  и  $I_n$  – напряжение на емкости и ток через индуктивность в звене с номером  $n$ . Здесь и далее мы принимаем, что ток течет от большего к меньшему потенциалу, т.е. направление тока совпадает с направлением переноса положительных зарядов. Предположим, что дискретные функции  $u_n$ ,  $I_n$  мало изменяются на одном звене цепочки, а аргумент  $n$  принимает не только целые, но и промежуточные значения, и представим  $u_n$ ,  $I_n$  в виде рядов Тейлора:

$$u_{n-1} = u_n - \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} - \dots, \quad I_{n+1} = I_n + \frac{\partial I_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_n}{\partial n^2} + \dots \quad (2)$$

Сохраняя в (1) только главные члены разложений (2), получим уравнения в частных производных

$$\bar{C} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial n}, \quad \bar{L} \frac{\partial I}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (3)$$

Уравнения (3) продолжают дискретные функции  $u_n$ ,  $I_n$  на нецелые значения аргумента, при которых они изначально не были определены (в математике это называется аналитическим продолжением). Расположим звенья равномерно вдоль оси  $x$ , задавая их пространственный размер равным  $h$ . После перехода к координате  $x = n \cdot h$ , получим хорошо известные «телефрафные» уравнения для коаксиальной линии

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial x}, \quad L \frac{\partial I}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $C = \bar{C}/h$ ,  $L = \bar{L}/h$  – удельные (погонные) емкость и индуктивность. Представим решение (4) в виде бегущих волн

$$\begin{pmatrix} u \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \exp(ikx - i\omega t), \quad (5)$$

где  $\psi_{1,2}$  – компоненты поляризационного вектора. Получим пару алгебраических уравнений для комплексных постоянных  $\psi_1, \psi_2$ :

$$i\omega C \psi_1 - ik \psi_2 = 0, \quad ik \psi_1 - i\omega L \psi_2 = 0. \quad (6)$$

Условие существования нетривиальных (отличных от нуля) решений однородной системы (6) – обращение определителя в ноль. Это дает дисперсионное уравнение

$$D(\omega, k) = \text{Det} \begin{vmatrix} i\omega C & -ik \\ ik & -i\omega L \end{vmatrix} = \frac{\omega^2}{V^2} - k^2 = 0. \quad (7)$$

где  $V = 1/\sqrt{LC}$ . Дисперсионные ветви имеют простой вид  $\omega_{1,2} = \pm V k$  и соответствуют двум волнам, распространяющимся навстречу друг другу с фиксированной фазовой скоростью  $V$ . В этом случае говорят, что в системе отсутствует дисперсия (рис.1б). Отметим, что свойства симметрии в данном случае выполняются для каждой дисперсионной ветви, т.е.  $\omega_{1,2}(k) = -\omega_{1,2}(-k)$ . Если  $\omega$  и  $k$  связаны через дисперсионное уравнение, компоненты поляризационного вектора  $\psi_{1,2}$  находятся с точностью до произвольного постоянного множителя. При этом решение (5) можно представить в виде

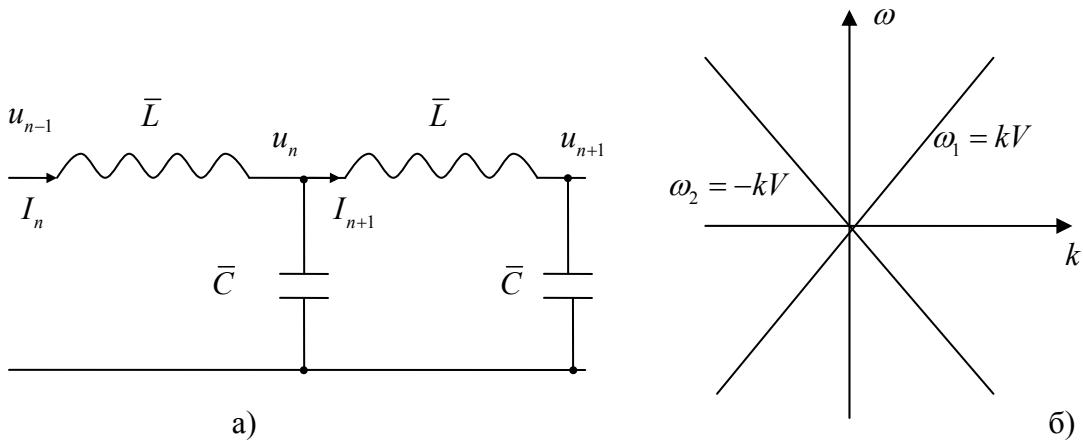


Рис. 1 Принципиальная схема звена длинной LC-линии с дискретными элементами (а) и дисперсионные ветви распределенной модели LC-линии (б).

$$\begin{pmatrix} u \\ I \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \exp(ikx - i\omega t), \quad (8)$$

где  $a$  – произвольная комплексная амплитуда, а компоненты поляризационного вектора определены однозначно с помощью условия нормировки. Фактически произвол в задании поляризационного вектора исключается и переносится на амплитудный множитель, физический смысл которого определяется условие нормировки. Например, если принять нормировку  $\psi_1 = 1$ , коэффициент  $a$  имеет смысл комплексной амплитуды напряжения. В этом случае из второго уравнения (6) и выражения для дисперсионных ветвей  $\omega_{1,2} = \pm V k$  получим  $\psi_2 = k / (\omega L) = \pm \sqrt{C/L}$ . Отношение комплексных амплитуд тока и напряжения в бегущих волнах, равное  $\pm \sqrt{C/L}$ , называется волновой проводимостью. Она совпадает с входной проводимостью «полуограниченной» линии при возбуждении волн на ее границе. Может показаться, что разные знаки проводимости вступают с противоречием с изотропией системы. Знак минус появляется только из-за того, что выбор направления токов на рис. 1 остается одним и тем же как для волны, бегущей в направлении оси  $x$ , так и для «встречной» волны.

Как отмечалось выше, условие перехода к распределенной модели (4) сводится к малому изменению напряжения и тока на одном звене LC-линии. Для конкретного процесса можно ввести масштаб  $\Lambda$ , на котором напряжение изменяется на характерное значение  $\delta u$  (см. рис. 2).

Получим условие перехода к распределенной модели с помощью оценок отброшенных членов в (2). Для этого оценим величину производных и определим условие, при котором можно пренебречь вкладом второй производной в (2) по сравнению с первой. Оценка имеет вид

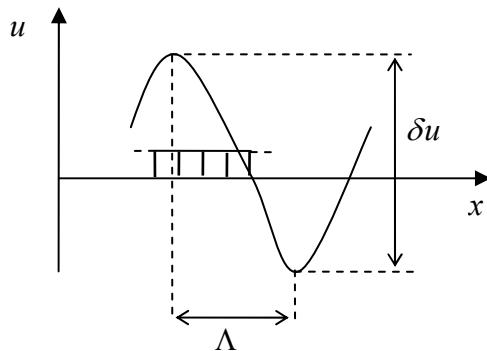


Рис. 2. К переходу от распределенной к непрерывной модели LC-линии:  $\delta u$  – характерное изменение напряжения,  $\Lambda$  – характерный масштаб этого изменения по оси  $x$ . Возле оси  $x$  схематически показаны звенья дискретной цепочки.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \gg \underbrace{\frac{1}{2} h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim h \delta u / \Lambda^2}, \text{ откуда } \frac{h}{\Lambda} \ll 1 \quad (9)$$

Для оценки первой производной в (9), полагаем  $\delta u / \partial x \sim \Delta u / \Delta x$  и подставляем вместо  $\Delta u$  и  $\Delta x$  характерные изменения величин  $\delta u$  и  $\Lambda$ . Чтобы оценить вторую производную, заметим, что характерное изменение (вариация) первой производной между точками "1" и "2", находящимися на расстоянии порядка  $\Lambda$ , есть величина порядка ее самой:  $\Delta(\delta u / \partial x) \sim |(\delta u / \partial x)_1 - (\delta u / \partial x)_2| \sim \delta u / \Lambda$  (см. рис. 2). Отсюда получим  $\partial^2 u / \partial x^2 \sim (\delta u / \Lambda) / \Lambda \sim \delta u / \Lambda^2$ . Оценка  $n$ -той производной будет  $\delta u / \Lambda^n$ . Таким образом, условие малости вторых производных имеет вид  $h / \Lambda \ll 1$ , т.е. характерный масштаб изменения напряжений и токов вдоль  $x$  должен быть большим по сравнению с размером одного звена. При этом на одном звене изменения напряжения малы по сравнению с характерным масштабом изменения напряжения  $\delta u$ .

Оценки производных легко получить для синусоидального возмущения  $u \sim \sin(k_* x + \varphi)$ , для которого условие (9) принимает вид  $k_* h \ll 1$ , т.е. размеры звена малы по сравнению с масштабом  $\Lambda = 1/k_*$ , что является более жестким условием, чем малость по сравнению с длиной волны, которая равна  $2\pi/k_*$ . Для возмущений с непрерывным или дискретным спектром по волновым числам условие перехода к распределенной модели также можно записать в виде  $k_* h \ll 1$ , если под  $k_*$  понимать ширину «энергонесущей» области спектра волновых чисел. Другими словами, волны должны быть длинными по сравнению с размером ячеек, чтобы они «не замечали» дискретной структуры цепочки.

**Упрощенный вывод уравнений распределенной LC-линии.** В дальнейшем мы будем неоднократно использовать уравнения распределенных LC-линий в учебных целях. При этом нет необходимости каждый раз повторять рассмотренный выше переход от дискретной линии к распределенной, если руководствоваться простым правилом: в уравнениях Кирхгофа для узлов вместо конечной разности вида  $u_n - u_{n-1}$  следует писать  $\delta u / \partial x$ , а вместо разности вида  $u_n - u_{n+1}$  подставить  $-\delta u / \partial x$ .

**Волны в дискретной LC-линии.** Решение уравнений в конечных разностях (1) ищем в виде

$$(u, I) = (\psi_1, \psi_2) \exp(in\varphi - i\omega t) \quad (10)$$

где  $n$  – целое,  $\varphi$  – сдвиг фазы на звено (волновое число в распределенной системе это фактически сдвиг фазы волны на единицу длины). Подстановка в (1) дает

$$\begin{aligned} i\omega \bar{C} \psi_1 + (1 - e^{i\varphi}) \psi_2 &= 0 \\ (e^{-i\varphi} - 1) \psi_1 + i\omega \bar{L} \psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{4}{\bar{L}\bar{C}} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (12)$$

Дисперсионные кривые показаны на рис. 3. Они являются периодическими функциями  $\varphi$  (рис. 3а). Периодичность дисперсионных кривых характерна для цепочек, в том числе для дискретных моделей непрерывных сред. Полный набор физически различных волн содержится на одном периоде по  $\varphi$ , равном  $2\pi$ , так как в формуле (10)  $\exp(2\pi in) = 1$ . Этот период для удобства сравнения с распределенной задачей выберем в интервале  $-\pi \leq \varphi < +\pi$ , как показано на рис. 3б (в соответствии со свойствами симметрии дисперсионных ветвей показана область  $\omega \geq 0$ ). Остальные волны, которые отличаются сдвигом фазы на  $2m\pi$  ( $m$  – целое), физически тождественны показанным на рис. 3б. Видно, что переход к распределенной модели происходит в пределе длинных волн, для которых  $\varphi \ll \pi$  (сдвиг фазы на звене мал по сравнению с его сдвигом на половине длины волны). В линейной среде периодичность дисперсионных кривых можно игнорировать. Однако в дискретных моделях нелинейных сред и средах с периодическими неоднородностями это свойство может приводить к новым эффектам. Например, возможно резонансное взаимодействие волн, когда условия резонанса для волновых чисел содержат слагаемое  $2m\pi$ , где  $m$  – целое число.

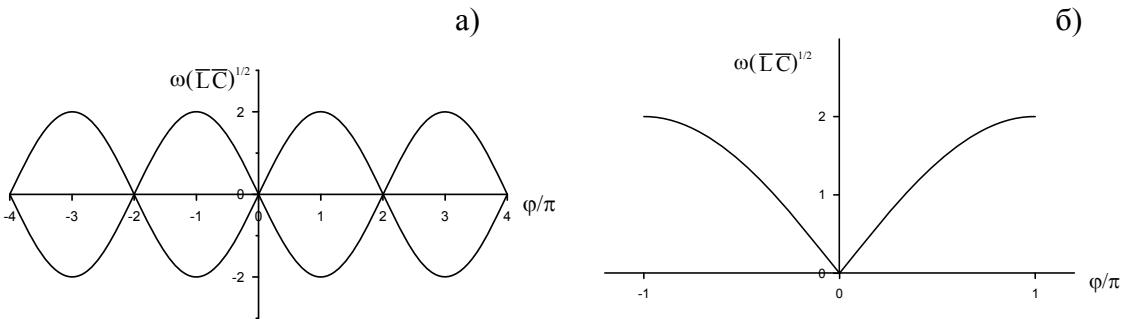


Рис. 3 Периодические дисперсионные ветви волн в дискретной LC-линии (а) и отрезки дисперсионных ветвей, содержащие полный набор физически различных волн (б)

**Распределенная LC-линия с произвольными импедансами.** В линейной задаче ограничимся гармоническими по времени процессами, которые в комплексной форме записи имеют вид

$$(u, I) = (\hat{u}, \hat{I}) \exp(-i\omega t) \quad (13)$$

Элементы в горизонтальном плече LC-линии удобно описывать импедансом  $Z(\omega)$ , а в вертикальном – проводимостью  $Y(\omega)$ . Схема звена такой линии показана на рис. 4.

Уравнения Кирхгофа для распределенной модели в данном случае принимают вид

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = -Z(\omega)\hat{I}, \quad \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} = -Y(\omega)\hat{u} \quad (14)$$

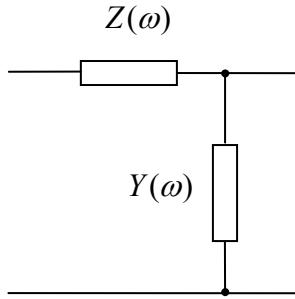


Рис. 4. Электрическая схема звена LC-линии с частотно зависимыми импедансом и проводимостью

Решение (14) ищем в такой форме, чтобы общая зависимость полей от координаты и времени имела вид бегущей волны (см. (13)):

$$\hat{u} = \psi_1 \exp(ikx), \quad \hat{I} = \psi_2 \exp(ikx). \quad (15)$$

Подстановка (15) в (16) приводит к следующему дисперсионному уравнению

$$k^2 = -Z(\omega)Y(\omega) \quad (16)$$

Подбирай частотные зависимости  $Z(\omega)$  и  $Y(\omega)$ , можно моделировать с помощью LC-линий реальные среды с различной дисперсией.

**Пример 1. Модель среды с дисперсией в области низких частот.** Принципиальная схема LC-линии с дисперсией в области низких частот показана на рис. 4а. Записывая выражения для  $Y(\omega)$ ,  $Z(\omega)$  и используя формулу (16), получим

$$Z(\omega) = -i\omega L, \quad Y(\omega) = -i\omega C - \frac{1}{i\omega L_1}, \quad D(\omega, k) = \omega^2 - V^2 k^2 - \omega_0^2 = 0, \quad (17)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C}$ ,  $V = 1/\sqrt{LC}$ . Отметим, что импеданс индуктивности и проводимость емкости отличаются знаком от принятых в радиотехнике, так как мы условились записывать временную зависимость токов и напряжений в виде  $\exp(-i\omega t)$  в отличие от принятой в радиотехнике записи  $\exp(i\omega t)$ . Дисперсионные ветви имеют вид

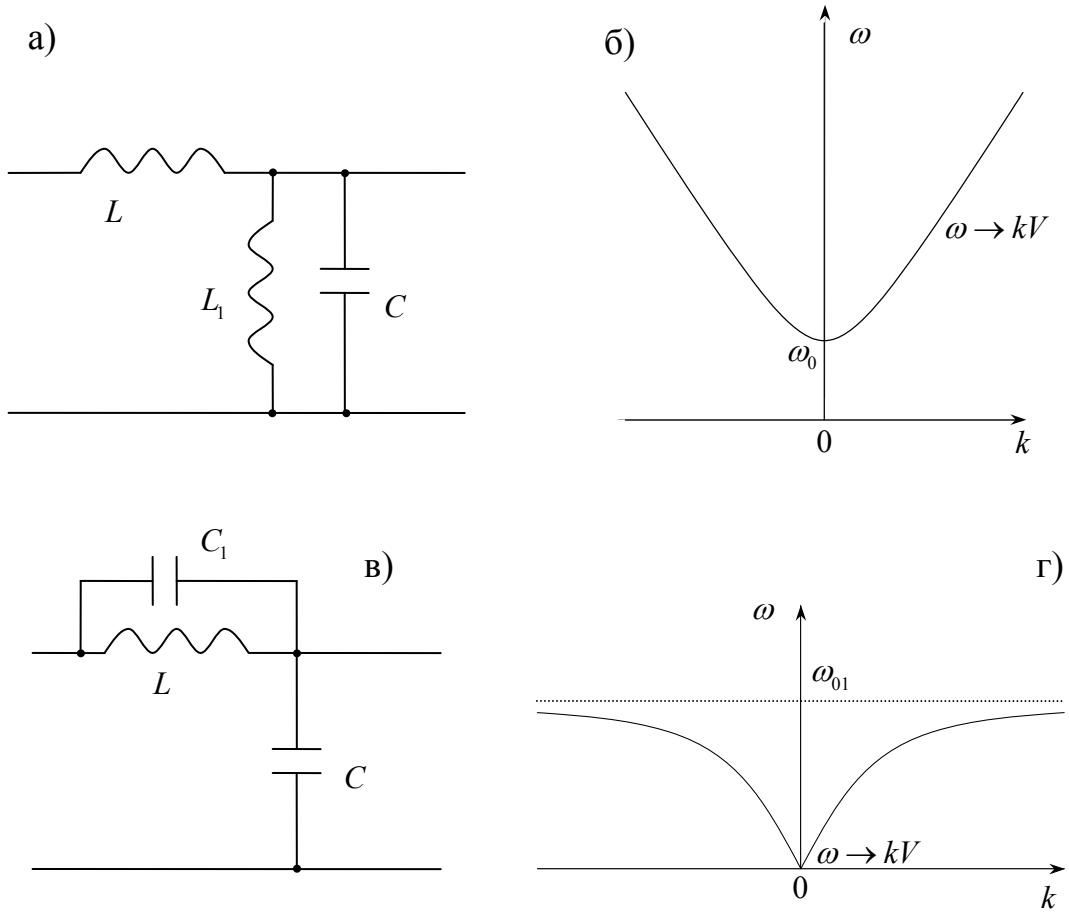


Рис. 5 Схема звена (а) и дисперсионные ветви (б) LC-линии с дисперсией в области низких частот и схема звена (в) и дисперсионные ветви (г) LC-линии с дисперсией в области высоких частот ( $\omega_{01} = k_0 V$ ).

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{V^2 k^2 + \omega_0^2}, \quad k_{1,2} = \mp \frac{1}{V} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Дисперсионные кривые  $\omega_{1,2}(k)$  показаны на рис. 5а. Видно, что дисперсия увеличивается при приближении к резонансной частоте контура  $\omega_0$ . На высоких частотах дисперсия слабая и фазовая скорость близка к скорости  $V$  распространения волн в «обычной» LC-линии. В задаче с гармоническими начальными условиями волны с любыми вещественными  $k$  распространяются без затухания или нарастания. В задаче с граничными условиями корни  $k(\omega)$  при вещественных  $\omega$  становятся чисто мнимыми на частотах  $|\omega| < \omega_0$ , так как  $k_{1,2} = \mp i(1/V) \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$ . В этом случае говорят о полосе непрозрачности или непропускания. Появление полосы непрозрачности в данном случае нетрудно понять на качественном уровне. На частотах  $\omega < \omega_0$  колебательный контур в вертикальном элементе звена линии имеет индуктивный характер. Это значит, что оба плеча оказываются индуктивными и распространение волн становится невозможным (поскольку в LL-линии волна не распространяется, а быстро спадает от границы из-за деления на индуктивных делителях).

**Пример2. Модель среды с дисперсией в области высоких частот.** Принципиальная схема звена LC-линий показана на рис. 5в. В этом случае согласно определению частотно-зависимой индуктивности

$$Z(\omega) = \frac{-i\omega L}{1 - \omega^2 LC_1}, \quad Y(\omega) = -i\omega C, \quad \omega_{1,2} = \frac{\pm kV}{\sqrt{1 + (k^2/k_0^2)}}, \quad k_{1,2} = \frac{\pm \omega}{V \sqrt{1 - (\omega/\omega_{01})^2}}, \quad (18)$$

где  $k_0 = \sqrt{C/C_1}$ ,  $V = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\omega_{01} = k_0 V = 1/\sqrt{LC_1}$ . Дисперсионные ветви показаны на рис. 5г. В данном случае область непрозрачности находится на частотах  $\omega > \omega_{01}$ , при которых горизонтальное плечо звеньев линии имеет емкостной характер (в СС-линии входной сигнал не распространяется, а непрерывно спадает от границы из-за деления на емкостных делителях).

В электродинамике принято считать, что дисперсия является временной, когда тензоры диэлектрической и/или магнитной проницаемостей являются функциями частоты (т.е. определение дается по физическому принципу – нелокальной связи токов и напряжений во времени). В общей теории волн о характере дисперсии судят по наличию характерных пространственно-временных масштабов. В данном примере с этой точки зрения дисперсию можно считать пространственно-временной, поскольку в задаче с начальными условиями имеется характерный пространственный масштаб  $k_0^{-1}$ .

**Пример 3. Модель среды с дисперсией в переходной области между высокими и низкими частотами.** LC-линия, схема звена которой показана на рис. 6, может служить примером среды со дисперсией в переходной области между низкими и высокими частотами. Для этой линии нетрудно получить явные выражения дисперсионных ветвей  $k(\omega)$ :

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{b\omega_*^2 - \omega^2}{\omega_*^2 - \omega^2}}, \text{ где } b = 1 + \frac{C_1}{C} > 1, V = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \omega_* = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (19)$$

На рис. 6 показаны дисперсионные ветви в области прозрачности (в которых вещественным  $k$  соответствуют вещественные  $\omega$  и наоборот). Фазовая скорость на асимптотах в области низких частот и малых  $k$  в  $\sqrt{b}$  раз меньше, чем на асимптоте высоких частот и больших  $k$ . Область непрозрачности лежит в интервале  $\omega_* < \omega < \omega_* \sqrt{b}$ . Дисперсионные ветви, аналогичные показанным на рис. 6б, имеют акустические и оптические фононы в кристаллах.

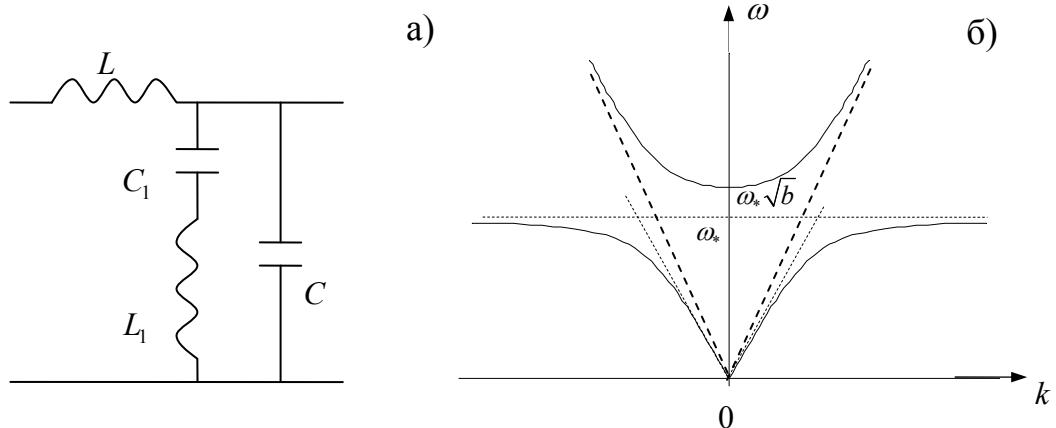


Рис. 6. Схема звена LC-линии дисперсией в переходной области между низкими и высокими частотами (а) и ее дисперсионные ветви (б).

**Пример 4. Модель среды с малыми потерями (слабодиссипативная среда).** Наличие потерь легко моделируется с помощью LC-линий, если учесть сопротивление индуктивности  $R$  и проводимость утечки емкостного элемента  $g$  (рис. 7). Из приведенных формул видно, что потери малы при  $R/(\omega L) \ll 1$  и  $g/(\omega C) \ll 1$  (физический смысл этих условий в том, что напряжение на  $R$  мало по сравнению с напряжением на индуктивности, а ток утечки через  $g$  мал с током через емкость). Среды с малыми потерями называют слабодиссипативными. В слабодиссипативной среде затухание волн мало. Учитывая условия малости потерь, дисперсионное уравнение в соответствии с общим выражением (16) можно записать в виде

$$k^2 = \omega^2 LC \left(1 + \frac{iR}{\omega L}\right) \left(1 + \frac{ig}{\omega C}\right) \quad (20)$$

Согласно приведенным выше неравенствам в слабодиссипативной системе добавки к 1 в обоих множителях малы. Для поиска решения в этом случае воспользуемся методом малого параметра. В физической литературе в таких случаях говорят о разложении решения «по малым потерям». В нелинейной теории обычно используют явно введенный малый параметр  $\varepsilon \ll 1$ . Для его ввода в уравнения есть 2 пути: 1) переход к безразмерным переменным (на этом мы остановимся позднее на других примерах) и 2) формальный ввод  $\varepsilon$ , чтобы показать явно малость тех или иных величин. Сейчас остановимся на втором подходе. Положим  $R = \varepsilon \tilde{R}$  и  $g = \varepsilon \tilde{g}$ , где  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{g}$  и другие входящие в (20) переменные рассматриваются как величины «порядка единицы» (хотя, строго говоря, величинами порядка единицы являются безразмерные величины:  $\tilde{R}/(\omega L) \sim 1$  и  $\tilde{g}/(\omega C) \sim 1$ ). Явное введение малого параметра позволяет более последовательно применять метод возмущений.

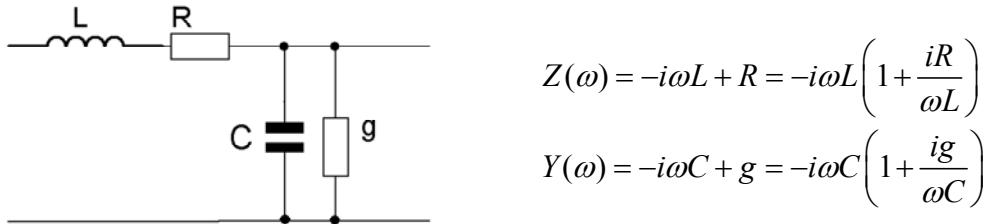


Рис. 7. Принципиальная схема звена простейшей  $LC$ -линии с потерями и выражения для комплексных импеданса и проводимости элементов схемы на рис. 4.

Представляя решение в виде ряда:  $k = k^{(0)}(\omega) + \varepsilon k^{(1)}(\omega) + \dots$  и подставляя его в (20), последовательно приравняем нулю члены при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ . В результате получим волновые числа прямой и обратной волн с точностью до поправки первого порядка по  $\varepsilon$ :

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{\varepsilon i \tilde{R}}{2\omega L} + \frac{\varepsilon i \tilde{g}}{2\omega C}\right) = \pm \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{iR}{2\omega L} + \frac{ig}{2\omega C}\right) \quad (21)$$

Найденные решения соответствуют двум волнам с малыми мнимыми добавками к волновому числу  $|\text{Im } k(\omega)| \ll |k|$ . Это значит, что они слабо затухают в направлении своего распространения. Отметим, что уравнение (20) нетрудно решить в явном виде относительно  $\omega$  и  $k$ , однако в более сложных случаях найти общее решение часто не удается и метод возмущений не имеет альтернативы.

При поиске  $\omega(k)$  решение ищем в виде  $\omega = \omega^{(0)} + \varepsilon \omega^{(1)} + \dots$  Действуя аналогично предыдущему, с точностью до поправок первого порядка малости получим

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{k}{\sqrt{LC}} - \left(i \frac{R}{2L} + i \frac{g}{2C}\right) \quad (22)$$

Вещественная часть частоты волн в (22) имеет вид  $\omega_{1,2}^{(0)} = \pm k / \sqrt{LC}$ . Обе волны слабо затухают во времени, так как условие слабого затухания ( $|\text{Im } \omega| \ll \omega^{(0)}$ ) сводится к указанным выше неравенствам:  $R/(\omega^{(0)} L) \ll 1$ ,  $g/(\omega^{(0)} C) \ll 1$ .

Таким образом, импеданс и проводимость в звеньях  $LC$ -линии, составленных из диссипативных элементов, становятся комплексными. Их вещественная часть отвечает за диссипацию и затухание волн (в отличие от чисто мнимой "реактивной" части, определяющей распространение волн). Волны затухают слабо, если вещественные части импеданса и проводимости малы.

### 1.3 Волны пространственного заряда в системе взаимопроникающих «холодных» потоков заряженных частиц.

Взаимное проникновение потоков (пучков) заряженных частиц возможно в силу их малой плотности, которая на несколько порядков меньше по сравнению с плотностью обычных газов в нормальных условиях. Подобные системы реализуются в вакуумной электронике и в плазменной электродинамике. При малой плотности зарядов частота столкновений между частицами одного потока (например, электронов с ионами) и между частицами разных потоков мала по сравнению с частотой волны. Поэтому потоки могут проходить один сквозь другой на расстояния, которые значительно больше длины волны.

Природу волн пространственного заряда нетрудно пояснить на качественном уровне. Рассмотрим неподвижный электронный газ на фоне неподвижных (тяжелых) ионов (чтобы в целом газ был нейтрален). Допустим, что плоский слой электронов  $[x, x + \Delta x]$  сместился, например, в направлении оси  $x$ . Тогда на его старом месте образовался недостаток электронов (область положительного заряда), а на новом – избыток (область отрицательного заряда). В результате возникнет электрическое поле в положительном направлении оси  $x$  (напомним, что напряженность электрического поля это сила, действующая на единичный положительный заряд). Следовательно, на отрицательно заряженные электроны действует сила, направленная против оси  $x$ , которая стремится вернуть электроны в исходное положение, т.е. появляется «возвращающая» сила. Наличие возвращающей силы, как известно, приводит к колебаниям и распространению волн.

**Плоские волны пространственного заряда (ВПЗ) в многопотоковой системе.** Запишем уравнения для плоских ВПЗ в системе взаимопроникающих холодных потоков заряженных частиц, используя следующие приближения:

- 1) Потоки нерелятивистские: скорость частиц  $V \ll c$ , где  $c$  – скорость света.
- 2) Волны квазистатические: фазовая скорость  $V_{ph} = \omega/k \ll c$ . В этом случае электрическое поле является потенциальным:  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , где  $\varphi$  – скалярный потенциал (вихревой компонентой электрического поля и колебаниями магнитной индукции можно пренебречь:  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ,  $\vec{B}_\sim = 0$ ).
- 3) Используем приближение «холодных» потоков. Это означает, что заряды в каждом элементарном «объемчике» среды имеют одинаковую скорость (тепловой разброс частиц по скоростям не играет существенной роли).
- 4) Пренебрегаем также столкновениями частиц.
- 5) Пренебрегаем влиянием статического магнитного поля, которое создается током пучка.

Рассмотрим сначала плоские ВПЗ, которые являются «чисто продольными» волнами: скорость частиц и электрическое поле направлены вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  и оси  $x$ . Отмечая частицы каждого потока индексом  $\alpha$ , получим уравнения

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial x} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha V_\alpha)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha n_\alpha = \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $e_\alpha, m_\alpha$  заряд и масса частиц потока с номером  $\alpha$ ,  $E = (\vec{E})_x$  – продольное электрическое поле,  $V_\alpha = (\vec{V}_\alpha)_x$  – продольная скорость,  $n_\alpha$  – плотность частиц. В последнее уравнение (1) добавлено определение вектора электрической индукции  $\vec{D}$  в соответствии с уравнением  $\text{div } \vec{D}$ . Первое уравнение в (1) – второй закон Ньютона. Слева в нем стоит субстанциональная производная скорости частиц  $d\vec{v}/dt$ , записанная в Эйлеровом представлении, а в правой – сила, действующая на заряд в расчете на единицу массы. Поскольку теплового разброса нет, скорость частиц в каждой точке пространства одинакова. Для этой скорости

пишется второй закон Ньютона. Второе уравнение – закон сохранения массы (уравнение непрерывности). Третье – уравнение Пуассона, известное в электростатике. Для плоских одномерных волн вводить потенциал в явном виде нет необходимости. Уравнения движения (1) можно получить строго из кинетических уравнений для функции распределения частиц по скоростям, которая в данном случае есть дельта-функция (А.Б. Михайловский. Теория плазменных неустойчивостей. Т.1).

Возможны 2 подхода к описанию данной системы. В одном из них ищется движение системы зарядов в вакууме (тогда вектор  $\vec{D}$  не нужен). В другом подходе система зарядов рассматривается как поляризуемая среда, которая характеризуется продольным (относительно оси  $x$ ) вектором электрической индукции  $D = (\vec{D})_x$ . Это вектор удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ , откуда следует его определение в (1).

Чтобы получить дисперсионное уравнение для малых возмущений, представим все переменные в виде суммы равновесных значений и малых возмущений:  $V_\alpha = V_{0\alpha} + \tilde{V}_\alpha$ ,  $n_\alpha = n_{0\alpha} + \tilde{n}_\alpha$ ,  $E = \tilde{E}$  ( $V_{0\alpha}$ ,  $n_{0\alpha}$  – равновесные скорость и плотность потока с номером  $\alpha$ ). Предполагается, что в равновесном состоянии газа заряженных частиц выполнено условие нейтральности  $\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha n_{0\alpha} = 0$ . После линеаризации относительно малых возмущений система (1) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial x} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E, \quad \frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial x} n_{0\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} - 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \tilde{n}_\alpha = \frac{\partial \tilde{D}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Решение линейной задачи (2) ищем в виде плоской бегущей волны

$$(\tilde{n}_\alpha, \tilde{v}_\alpha, \tilde{E}, \tilde{D}) = (\hat{n}_\alpha, \hat{v}_\alpha, \hat{E}, \hat{D}) \cdot \exp(i k x - i \omega t). \quad (3)$$

(шапочками обозначены комплексные амплитуды компонент волнового поля, которые здесь заменяют введенные ранее компоненты вектора  $\psi$ ). Подставляя (3) в линейный уравнения, получим систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} -i(\omega - k V_{0\alpha}) \hat{V}_\alpha &= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \hat{E}_\alpha, \quad -i(\omega - k V_{0\alpha}) \hat{n}_\alpha - ik n_{0\alpha} \hat{V}_\alpha = 0, \\ ik \hat{E} - 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \hat{n}_\alpha &\equiv ik \hat{D} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражая  $\hat{n}_\alpha, \hat{v}_\alpha$  через  $\hat{E}$  и подставляя в последнее уравнение (4), получим связь между  $\hat{D}$  и  $\hat{E}$  и одно однородное уравнение для  $E$

$$\hat{D} = \epsilon_{\parallel}(\omega, k) \hat{E}, \quad \epsilon_{\parallel}(\omega, k) \hat{E} = 0, \quad \text{где } \epsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - k V_{0\alpha})^2}. \quad (5)$$

Здесь  $\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e_\alpha^2 n_{0\alpha} / m_\alpha}$  – «плазменная частота» потока с номером  $\alpha$ . Коэффициент  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$  имеет смысл *продольной диэлектрической проницаемости* многопотоковой системы. Из условия существования нетривиального решения уравнения (5) для  $\hat{E}$  получаем дисперсионное уравнение

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - k V_{0\alpha})^2} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение волн пространственного заряда в одномерной системе потоков заряженных частиц сводится к условию обращения в ноль продольной диэлектрической проницаемости, которая, фактически, выполняет роль дисперсионной функции.

**Система пучок-плазма.** Ограничимся случаем «высокочастотных» волн в системе двух потоков, один из которых покоятся. В результате получаем модель системы, которую обычно называют «пучок-плазма». Если частота волны достаточно велика, колебаниями тяжелых ионов можно пренебречь (масса иона в 2000 раз больше массы электрона). В этом случае имеется одна неподвижная электронная компонента, которую будем называть электронной плазмой, и одна движущаяся электронная компонента – электронный пучок:  $\alpha = (1, 2)$ . Положим,  $V_{01} = 0$ ,  $n_{01} = n_p$  – плотность плазмы,  $V_{02} = V_0$  – скорость дрейфа пучка,  $n_{02} = n_b$  – плотность пучка (от английского beam-пучок),  $m_{1,2} = m_e$  – масса электрона,  $e_{1,2} = -e < 0$  – заряд электрона. Дисперсионное уравнение (6) принимает вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0, \quad (7)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_p / m_e}$ ,  $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_b / m_e}$  – плазменные частоты плазмы и пучка.

Чтобы построить дисперсионные кривые нашей системы, образованной в результате взаимодействия двух подсистем – «плазмы» и «пучка», построим сначала отдельно дисперсионные ветви неподвижной и подвижной электронных компонент как независимых сред. Плотность пучка во многих случаях мала по сравнению с плотностью плазмы, т.е. имеется малый параметр  $\alpha_* = n_b / n_p \equiv \omega_b^2 / \omega_p^2 \ll 1$ . Из (7) имеем дисперсионные уравнения для плазмы и пучка соответственно

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0. \quad (8)$$

Решая (8), находим дисперсионные ветви плазмы и пучка как независимых систем

$$\omega_{1,2} = \pm \omega_p, \quad \omega_{1,2} = kV_0 \pm \omega_b. \quad (9)$$

Они показаны на рис. 1а с учетом условия  $\alpha_* \ll 1$ . У неподвижной холодной электронной компоненты частота одинакова при любом  $k$ . Это результат идеализации – пренебрежения тепловым разбросом. Пара пучковых ветвей имеет наклон  $V_0$ , что можно объяснить доплеровским сдвигом частоты. Действительно, после перехода систему отсчета, связанную с пучком (введения координаты  $x' = x - V_0 t$ ), поле волны примет вид  $\exp(ikx' - \omega't)$ ,

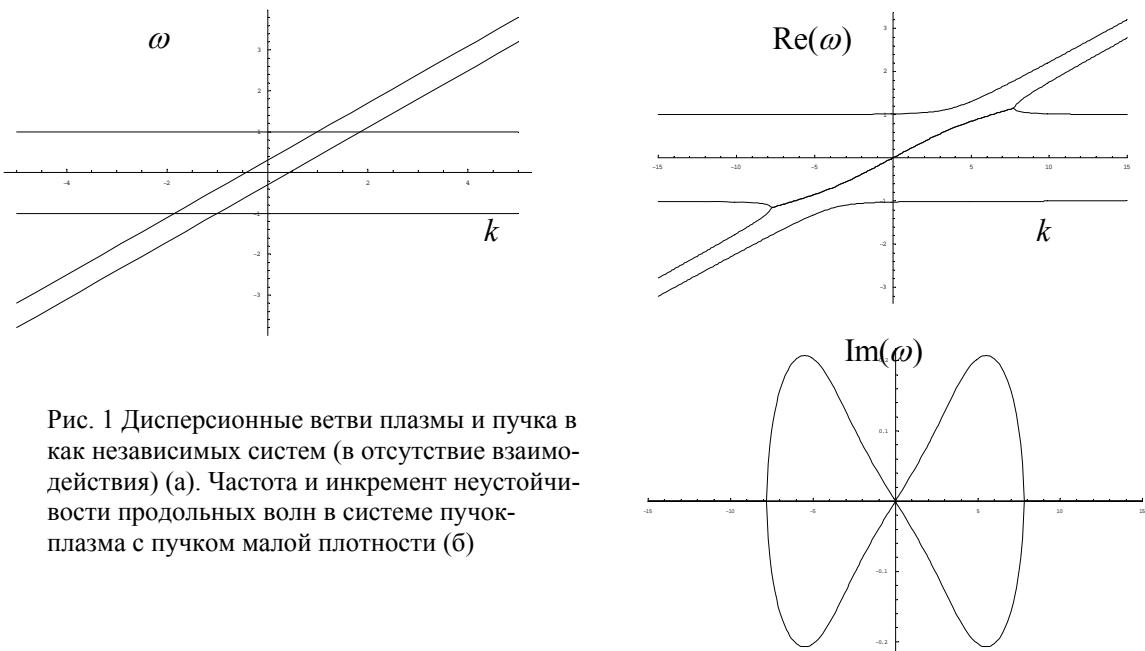


Рис. 1 Дисперсионные ветви плазмы и пучка в как независимых систем (в отсутствие взаимодействия) (а). Частота и инкремент неустойчивости продольных волн в системе пучок-плазма с пучком малой плотности (б)

где  $\omega' = \omega - kV_0$ . Выражая в дисперсионном уравнении пучка частоту  $\omega$  через частоту в движущейся системе отсчета  $\omega'$ , получаем дисперсионное уравнение для волн неподвижной плазмы в указанном выше виде.

Отметим, что корни  $\omega_{1,2}(k)$  для волн электронного потока в (9) не удовлетворяют условию симметрии, т.е.  $\omega_{1,2}(k) \neq -\omega_{1,2}(-k)$  (см. п. 1.1 лекций). Однако из рис. 1 видно, что дисперсионные кривые содержат симметричные пары волн. Покажем, что можно переопределить дисперсионные ветви так, чтобы условия симметрии выполнялись. Для этого следует задать первую ветвь как  $\omega_1(k) = kV_0 + \omega_b$  при  $k > 0$ ,  $\omega_1(k) = kV_0 - \omega_b$  при  $k < 0$ , а вторую ветвь – как  $\omega_2(k) = kV_0 - \omega_b$  при  $k > 0$ ,  $\omega_2(k) = kV_0 + \omega_b$  при  $k < 0$ .

Ветвь  $\omega_1(k)$  волн пучка называют быстрыми волнами пространственного заряда, так как их фазовая скорость больше скорости потока  $V_0$ , а ветвь  $\omega_2(k)$  – медленными волнами пространственного заряда. Полные дисперсионные ветви показаны на рис. 1б. Взаимодействие электронов плазмы и пучка через электрическое поле приводит к тому, что дисперсионные ветви деформируются в окрестности пересечения дисперсионных ветвей независимых подсистем. Там, где ветка медленной волны пересекается с плазменной, возникает точка ветвления функции  $\omega(k)$ , левее которой корни переходят в комплексную область. Слева от точки ветвления корни комплексно сопряженные, поскольку дисперсионное уравнение имеет вещественные коэффициенты (известная теорема алгебры говорит о том, что полином с вещественными коэффициентами имеет либо вещественные либо комплексно сопряженные корни). Используя разложение в ряд по малому параметру  $\alpha_*$ , можно приближенно найти комплексные корни дисперсионного уравнения (см. А.Б. Михайловский, «Теория плазменных неустойчивостей», том 1). Можно показать, что инкремент неустойчивости максимальен при  $k \approx \omega_p/V_0$  и определен выражением

$$(\text{Im } \omega)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \alpha_*^{1/3} \omega_p. \quad (10)$$

В случае пучков очень малой плотности инкремент мал по сравнению с плазменной частотой.

Возможно несколько объяснений механизма пучковой неустойчивости. В данной лекции остановимся на одном из них. Из рис. 1 видно, что часть пучковых веток оказывается в области отрицательной диэлектрической проницаемости плазмы:  $(\epsilon_{||})_{\text{plasma}} < 0$  при  $0 < \omega < \omega_p$  (см. (8)). Но в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью в соответствии с законом Кулона одноименные заряды пучка будут притягиваться, а разноименные – отталкиваться. Поэтому электрическое, вызванное разделением зарядов, будет не возвращать заряды в исходное состояние, а еще сильнее отклонять друг от друга, увеличивая при этом величину разделенных зарядов и электрическое поле. Возвращающая сила превращается в отклоняющую, в результате чего возникает неустойчивость.

**О механизме реактивной неустойчивости.** Неустойчивости, возникновение которых связано с наличием комплексно сопряженных корней дисперсионного уравнения, в физической литературе часто называются реактивными (т.к. обычно они являются реакцией друг на друга связанных подсистем). Возникает вопрос, как объяснить существование неустойчивости (т.е. нарастания волн) в консервативной системе, в которой энергия должна сохраняться? Для ответа на этот вопрос обратимся к простому аналогу из классической теории колебаний. Рассмотрим неустойчивость седлового состояния равновесия в фазовом пространстве. В качестве примера выберем одномерное движение частицы с массой  $m$  и положительным зарядом  $e > 0$  в квадратичном по координате потенциале электрического поля  $\varphi = (1/2)\alpha x^2$  ( $\alpha = \text{const}$ ,  $x$  – координата), которое подчиняется уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -e \frac{d\varphi}{dx} = -e\alpha x. \quad (11)$$

При  $\alpha > 0$  состояние равновесия  $x = 0, v = 0$  соответствует минимуму потенциала и на положительно заряженную частицу действует возвращающая сила. Поэтому решение осциллирует, и на фазовой плоскости  $(x, v)$  возникает состояние равновесия типа центр. При  $\alpha < 0$  состояние равновесия соответствует максимуму потенциала и на частицу действует отклоняющая сила. На фазовой плоскости получим состояние равновесия типа седло. Интеграл энергии находим, умножая правую и левую часть уравнений (11) на  $e\alpha x$  и  $v$  соответственно и складывая полученные уравнения. Отсюда следует интеграл энергии для седлового состояния равновесия

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}e|\alpha|x^2 = \text{Const}. \quad (12)$$

Видно, что кинетическая энергия положительна, а потенциальная – отрицательна. Решение в виде одной растущей экспоненты соответствует движению по сепаратрисе в направлении от состояния равновесия и после подстановки в (12) дает нулевую энергию:  $W = 0$  (общее решение есть сумма растущей и затухающей экспонент). Таким образом, окрестности седловой точки система неустойчива, но полная энергия сохраняется и при движении вдоль сепаратрис равна нулю. Этот пример показывает, что в консервативной системе возможна неустойчивость без нарушения закона сохранения энергии. Она возникает благодаря тому, что одна из составляющих энергии отрицательна. О физической природе этого явления мы поговорим позднее.

### Дисперсионное уравнение для направляемых волн. Редукция пространственного заряда в пучках ограниченного сечения.

В предыдущем разделе получено дисперсионное уравнение для плоских волн. Однако в реальных условиях существенную роль может играть неоднородность системы поперек направления распространения волн. Простейший пример – волновод для электромагнитных волн, в котором электромагнитное поле удерживается стенками. В этом случае говорят о направляемых волнах. Рассмотрим в качестве примера дисперсионное уравнение для направляемых волн пространственного заряда в системе пучок-плазма.

На рис. 2 показано два варианта плазменно-пучковой системы с ограниченным сечением. В первом случае пучок радиуса  $a$  пронизывает безграничную плазму. Во втором – система пучок-плазма находится в металлической трубе. Ограничимся случаем пучковой системы в трубе. Снова рассматриваем квазистатические волны пространственного заряда (ВПЗ), полагая  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  ( $\varphi$  – потенциал). Трехмерные уравнения движения системы «холодных» потоков заряженных частиц включают в себя второй закон Ньютона и уравнение непрерывности. К ним добавляется неодномерное уравнение Пуассона

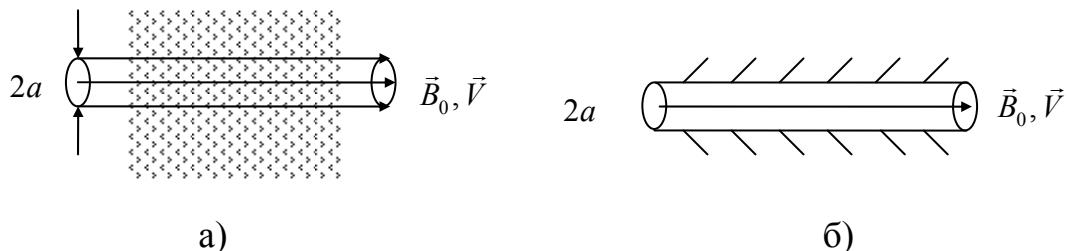


Рис. 2. Сильно «замагниченная» система пучок– плазма с пучком ограниченного сечения в безграничной плазме (а), система пучок–плазма в трубе с идеально проводящими стенками (б)

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \nabla) \vec{v}_\alpha}_{d\vec{v}_\alpha/dt} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \quad \Delta \varphi = -4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha n_\alpha. \quad (13)$$

Будем считать, что система сильно «замагничена», т. е. имеется сильное магнитное поле вдоль оси пучка. На практике это делается для стабилизации пучков. В присутствии сильного магнитного поля задача упрощается, поскольку можно считать, что частицы пучка и плазмы перемещаются только вдоль магнитного поля (всякое поперечное движение в сильном магнитном поле превращается в круговое вращение с очень малым радиусом «закрутки»). Примем, что ось трубы радиуса  $a$  направлена вдоль координатной оси  $z$ . Переайдем в (13) к цилиндрическим координатам  $(r, \vartheta, z)$ :  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ,  $z' = z$ . В общем виде преобразование первых двух уравнений (13) к цилиндрическим координатам громоздки (они аналогичны описанным для уравнений Навье-Стокса в книге Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. «Гидродинамика»). В данном случае можно поступить проще. Оставаясь в системе декартовых координат, учтем, что в сильно «замагниченной» плазме ( $B_0 \rightarrow \infty$ ) полная поперечная к оси  $z$  скорость стремится к нулю, поэтому  $(\vec{v}_\alpha)_x \rightarrow 0$ ,  $(\vec{v}_\alpha)_y \rightarrow 0$  и в (13) остается только продольная скорость  $v_\alpha \equiv (\vec{v}_\alpha)_z$ . Поэтому в уравнениях движения частиц войдут только производные по  $z$ , которые остаются без изменения при переходе к цилиндрическим координатам. Тогда после линеаризации получим систему уравнений (тильдой отмечены отклонения от равновесных значений)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial z} &= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial z} + n_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial z} = 0, \\ \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}_{\Delta \varphi} + 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \tilde{n}_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В последнем уравнении (14) лапласиан потенциала переписан в цилиндрических координатах. Границные условия на стенках идеально проводящей трубы сводятся к обращению в ноль касательной к поверхности компоненты электрического поля

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right|_{r=a} = 0. \quad (15)$$

Решение полученной краевой задачи ищем в виде

$$(\varphi, \tilde{v}_\alpha, \tilde{n}_\alpha) = [\hat{\varphi}(r), \hat{v}_\alpha(r), \hat{n}_\alpha(r)] \exp(ikz - i\omega t - im\vartheta) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (16)$$

где  $\hat{f}(r)$  – комплексный амплитудный профиль переменной  $f$ . Азимутальное волновое число  $m$  должно быть целым, чтобы удовлетворить требованию периодичности полей по азимутальному углу  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ . Подставляя (16) в (14), выражим амплитудные профили плотности и скорости через амплитудный профиль потенциала:

$$\hat{n}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{n_{0\alpha} k^2}{(\omega - kV_{0\alpha})^2} \hat{\varphi}, \quad \hat{v}_\alpha = \frac{k}{(\omega - kV_{0\alpha})} \hat{\varphi}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в последнее уравнение (14), получим уравнение для амплитудного профиля потенциала по поперечным координатам  $r$ ,  $\vartheta$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + q^2 \right] \hat{\varphi} = 0, \quad (18)$$

где  $q^2 = -k^2 \epsilon_{||}(\omega, k)$  ( $\epsilon_{||}$  – продольная диэлектрическая проницаемость системы пучок плазма для плоских волн, определенная формулой (6)). Решение уравнения Бесселя (18) имеет вид  $\varphi = C \cdot J_m(qr)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$  – порядок функции Бесселя). Параметр  $q$  иногда называют «поперечным» волновым числом. Второе фундаментальное решение (18) (функция Неймана) отброшено из условия ограниченности решения в нуле. Для решения вида

(16) оба граничные условия (15) дают  $\hat{\varphi}|_{r=a} = 0$ , откуда  $CJ_m(qa) = 0$ . Задача имеет нетривиальное решение ( $C$  отлично от нуля) при условии

$$J_m(qa) = 0 \text{ или } qa = p_{mn}, \quad (19)$$

где  $p_{mn}$  n-ый нуль функции Бесселя порядка m (нумерацию нулей по  $n$  следует вести с ненулевого корня, поскольку корень  $qa = p_{00} = 0$  дает  $q = 0$ , что приводит к тривиальному решению  $\hat{\varphi}(r) \equiv 0$ ). Учитывая выражение для  $q$ , перепишем дисперсионное уравнение (19) в явном виде (см. Р. Бриггс «Двухпотоковая неустойчивость» в книге «Достижения физики плазмы», М.: Мир, 1974, с. 157)

$$\frac{p_{mn}^2}{k^2 a^2} + \varepsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0. \quad (20)$$

По сравнению со случаем плоских волн в (20) присутствует дополнительное слагаемое, зависящее от радиуса трубы и волнового числа. В пределе коротких волн, когда  $k^2 a^2 \gg p_{mn}^2$ , (20) переходит в дисперсионное уравнение для плоских волн (7). Введем обозначение

$$R(ka) = 1 + \frac{p_{mn}^2}{k^2 a^2}. \quad (21)$$

Тогда уравнение (20) можно переписать в следующем виде

$$1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2} - \frac{\bar{\omega}_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0, \quad (22)$$

где  $\bar{\omega}_{p,b} = \sqrt{4\pi e^2 \bar{n}_{p,b} / m_e}$  и  $\bar{n}_{p,b} = n_{p,b} / R(ka)$ . Видно, что уравнение (22) совпадает с ранее полученным дисперсионным уравнением для плоских волн (7), если в последнем сделать простую замену плотностей плазмы и пучка:  $n_{p,b} \rightarrow \bar{n}_{p,b} = n_{p,b} / R(ka)$ , что означает этих плотностей уменьшение в  $R(ka)$  раз. Поэтому  $R(ka)$  называют коэффициентом редукции (ослабления) пространственного заряда для волны с волновым числом  $k$ . Отметим, что выражение (21) для коэффициента редукции справедливо и для ограниченного по радиусу пучка в безграничной плазме. Однако при этом для определения  $p_{mn}$  вместо (19) получается более сложное трансцендентное уравнение.

Эффект редукции пространственного заряда имеет простое объяснение. Например, в ограниченном пучке, помещенном в безграничную плазму, электрическое поле сгруппированных частиц, очевидно, «вылезает» за пределы пучка, что равносильно уменьшению плотности сгустков заряда, по сравнению с плоской волной. В случае проводящей трубы учет влияния границ можно свести к введению отраженных виртуальных зарядов (с помощью которых можно удовлетворить граничным условиям на стенках). Эти заряды имеют противоположный знак и ослабляют электрическое поле, созданное группировкой исходных зарядов, что также фактически означает уменьшение их плотности по сравнению с одномерной системой. Эффект редукции тем сильнее, чем больше длина волны, так как при малых длинах волн сгустки имеют малый продольный размер по  $x$  и созданное внутри них электрическое поле близко к полю, созданному плоскими сгустками зарядов.

Чтобы изучить решения дисперсионного уравнения и переход к одномерной модели, введем безразмерные переменные  $\kappa = ka$ ,  $v_0 = V/(a\omega_p)$ ,  $\Omega = \omega/\omega_p$  – безразмерные волновое число, скорость и частота. Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$R(\kappa) - \frac{1}{\Omega^2} - \frac{\alpha_*}{(\Omega - \kappa v_0)^2} = 0. \quad (23)$$

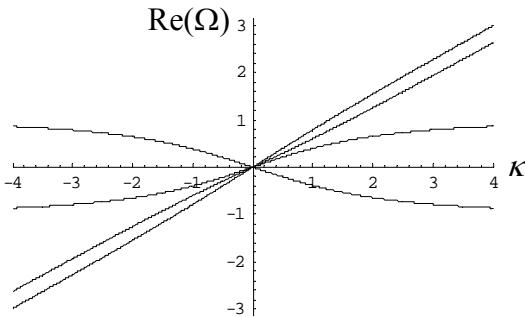


Рис. 3 Дисперсионные ветви системы поток-плазма в трубе при достаточно больших скоростях потока ( $v_0 = 0.7$ ,  $\alpha_* = 0.04$ ). Пересечение плазменной ветви с пучковой волной отсутствует. Соответственно отсутствует пучковая неустойчивость

В уравнении (23) имеются два безразмерных параметра –  $\alpha_*$  и  $v_0$ . Ограничимся рассмотрением главной моды волновода  $p_{01} = 2.4$ , которая в наименьшей степени подвержена рефракции заряда (мода – тип колебаний, характеризуемый определенной пространственной структурой и частотой). Дисперсионные ветви этой моды при достаточно больших скоростях потока показаны на рис. 3. Частоты  $\bar{\omega}_p$  и  $\bar{\omega}_b$  уменьшаются при уменьшении волнового числа (увеличении длины волны) и обращаются в ноль при  $\kappa \rightarrow 0$ . Поэтому в соответствии с (8) дисперсионные кривые стремятся в начало координат. Можно показать, что фазовые скорости  $v_{ph} = \Omega/\kappa \rightarrow \text{const}$  при  $\kappa \rightarrow 0$ , т.е. дисперсионные кривые приближаются к началу координат вдоль прямых линий.

Поскольку на рис. 3 отсутствует пересечение волн плазменной ветви и медленной пучковой волны, неустойчивость не возникает. Выход частот на значения, характерные для одномерной задачи, происходит при достаточно больших значениях волнового числа, когда  $R$  приближается к единице. Для главной моды в соответствии с (21) можно условно принять, что такой переход происходит при  $\kappa = ka > 6$ . При крупномасштабной группировке пучка (малые  $\kappa$ ) влияние стенок сильно возрастает. Если уменьшать безразмерную скорость потока, ветви пучковой и плазменной волн сливаются и начиная с некоторого значения скорости (при  $\alpha_* = 0.04$  это  $v_0 \approx 0.63$ ) в окрестности  $\kappa = 0$  возникает область неустойчивости, которая расширяется при уменьшении скорости дрейфа  $v_0$ .

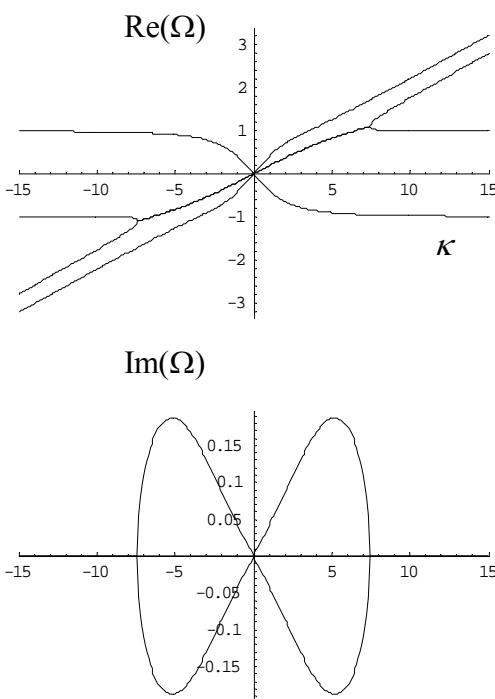


Рис. 4 Дисперсионные ветви холодной системы поток-плазма в трубе при малых скоростях потока ( $v_0 = 0.2$ ,  $\alpha_* = 0.04$ ). Видно, что имеется пучковая неустойчивость, связанная с наличием пересечения ветви плазменных волн с медленной пучковой волной. В области  $\kappa = ka \geq 6$  дисперсионные кривые переходят в дисперсионные ветви одномерной модели системы пучок-плазма

На рис. 4 показаны дисперсионные ветви в пределе достаточно малых безразмерных скоростей потока  $v_0$ . Видно, что при  $\kappa > 6$  они близки к полученным ранее для плоских волн. Соответственно редукция пространственного заряда слабо влияет на максимальную неустойчивость, если она оказывается в области  $ka > 6$ . Если учесть, что максимум неустойчивости для плоских волн находится в точке  $k = \omega_p/V$ , получим условие слабого влияния редукции пространственного заряда на инкремент плоских волн в виде  $\omega_p a/V > 6$ , или в записи через безразмерные переменные  $v_0 < 1/6$ . Это согласуется с числовыми значениями, для которых построены графики на рис. 3 и 4. Отметим, что возникновение неустойчивости и при фиксированном  $\alpha_*$  переход к «одномерной» неустойчивости фактически определяется одним параметром  $v_0$ . При этом в области достаточно длинных волн редукция заряда всегда оказывает существенное влияние на неустойчивость и частоту волн.

Картина дисперсионных ветвей, аналогичная показанной на рис. 3, получается также в том случае, когда электронный поток проходит через электродинамическую систему, которая замедляет электромагнитные волны (спираль или гребенка). Такое сходство объясняется тем, что в таких замедляющих системах основное действие на заряды оказывает продольная составляющая электрического поля, которая возникает в замедляющей структуре. На этой основе строится волновая теория лампы бегущей волны (ЛБВ) – распределенного усилителя электромагнитных волн. Таким образом, в отличие от случая плоских волн построение дисперсионного соотношения для направляемых волн связано с решением краевой задачи на собственные значения.

### ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

Уравнения для описания плоских ЭМ волн в холодной неподвижной плазме включают в себя уравнения Максвелла и уравнения движения частиц с силой Лоренца. Пусть плоская ЭМ волна с компонентами поля  $E_y$  и  $B_z$  бежит вдоль оси  $x$  (см. рис. 5а). Колебанием ионов пренебрегаем (высокочастотное приближение). Тогда после линеаризации получим систему уравнений для поля и движения электронного газа

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c}(en_p v_y) + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad m\frac{\partial v_y}{\partial t} = -eE_y, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

( $n_p$  – равновесная концентрация электронов,  $e > 0$  – абсолютное значение их заряда). Решение ищем в виде  $(E_y, B_z, v_y, n) = (\hat{E}_y, \hat{B}_z, \hat{v}_y, \hat{n}) \exp(ikx - i\omega t)$ . Обратим внимание на то, что в ЭМ волне отсутствуют колебания плотности:  $\hat{n} = 0$ . Подстановка  $\hat{v}_y$  в первое урав-

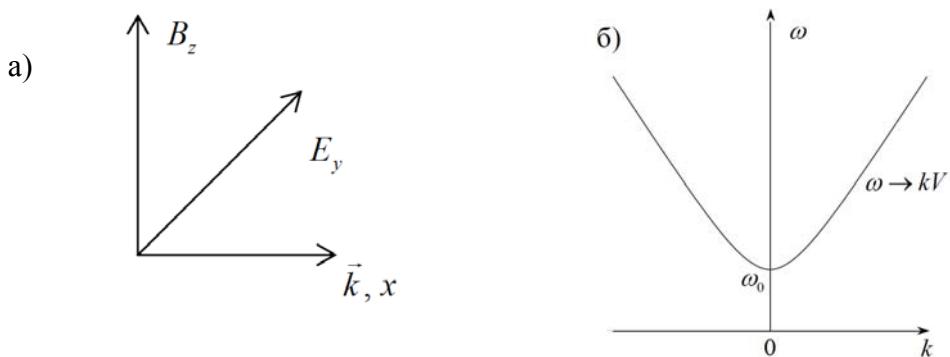


Рис.5 Дисперсионные ветви плоских ЭМ волн в электронной плазме

нение приводит к выражению для вектора индукции  $\hat{D}_y = \varepsilon_{\perp}(\omega, k)\hat{E}_y$ , где  $\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  – поперечная диэлектрическая проницаемость плазмы.

Дисперсионное уравнение имеет вид  $\omega^2 \varepsilon_{\perp}(\omega) = c^2 k^2$  или  $D(\omega, k) = \omega^2 - c^2 k^2 - \omega_p^2 = 0$ , откуда находятся дисперсионные ветви  $\omega_{1,2} = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}$ ,  $k_{1,2} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ . Дисперсионные ветви (рис. 5б) такие же, как в LC-линии с дисперсией в области низких частот (с заменой  $\omega_0$  на  $\omega_p$ ). В граничной задаче при  $|\omega| < \omega_p$  имеет место непропускание ЭМ волны в плазму, так как волновое число становится чисто мнимым.

## РЕЗЮМЕ

- Движение частиц при распространении квазистатических ВПЗ в сильно "замагниченной" системе пучок-плазма, помещенной в идеальную трубу, является одномерным при трехмерном уравнении Пуассона для потенциала электрического поля.
- Построение дисперсионного уравнения для направляемых волн сводится к решению краевой задачи на собственные значения.
- Редукция пространственного заряда в пучках с ограниченным поперечным сечением связана с выходом электрического поля за пределы электронного потока (в случае безграничной плазмы) либо с влиянием поля виртуальных зарядов (в случае трубы).
- Коэффициент редукции пространственного заряда определяет эффективное уменьшение плотности заряда в системе с ограниченным поперечным сечением и зависит от длины волны.
- При малой плотности пучка ( $n_b / n_p \ll 1$ ) пучковая неустойчивость в ограниченной системе пучок-плазма исчезает при достаточно большой скорости электронного потока. Максимальный инкремент пучковой неустойчивости стремится к его значению в одномерной задаче при уменьшении скорости потока.
- В электронной плазме плоские электромагнитные волны не создают возмущений плотности. Поперечная диэлектрическая проницаемость совпадает с продольной проницаемостью холодной плазмы.
- Дисперсия плоских электромагнитных (ЭМ) волн аналогична дисперсии в распределенной LC-линии с колебательным контуром в вертикальном плече звена. При падении ЭМ волны на границу плазменного слоя происходит запирание на частотах ниже плазменной.

## Энергия квазимохроматических волн в средах с дисперсией. Спектрально-операторный формализм.

Рассмотрим задачу определения плотности энергии квазимохроматических волн на примере плоских волн пространственного заряда в многопотоковой системе. Определим энергию волны как работу, совершающую внешним источником при ее возбуждении. Будем возбуждать плоские волны ПЗ с помощью *слабого* стороннего тока  $J_{ext}$ , направленного вдоль оси  $x$ , который имеет бегущей волны с медленно меняющейся амплитудой:

$$J_{ext} = \varepsilon \hat{J}_{ext}(\tau, \chi) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + k.c., \quad (1)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\chi = \varepsilon x$  – медленные координата и время,  $\varepsilon \hat{J}_{ext}$  – комплексная амплитуда стороннего тока,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр.  $k_0$ . Зависимость  $\hat{J}_{ext}$  от  $x$  и  $t$  позволяет локализовать источник в во времени и в пространстве, чтобы получить волну заданной амплитуды. Для того, чтобы получить резонансное возбуждение волны с частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k_0$ , они должны быть связаны дисперсионным соотношением  $\varepsilon_{\parallel}(\omega_0, k_0) = 0$ .

Сформулируем сначала основные уравнения. В данном случае удобнее использовать не уравнение Пуассона, а первое уравнение Максвелла, записанное в проекцию на ось  $x$

$$\frac{4\pi(J + J_{ext})}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \frac{4\pi(J_{ext})}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = 0, \quad J = \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} (n_{0\alpha} \tilde{v}_{\alpha} + \tilde{n}_{\alpha} V_{0\alpha}), \quad (2)$$

где  $J$  – линеаризованная плотность тока, созданного при перемещении зарядов,  $\mathcal{D}$  – электрическая индукция. Уравнение (2) следует дополнить системой линейных уравнений для  $\tilde{v}_{\alpha}$  и  $\tilde{n}_{\alpha}$  в многопотоковой системе, которая приводилась в п. 1.3:

$$\frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E, \quad \frac{\partial \tilde{n}_{\alpha}}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{n}_{\alpha}}{\partial x} + n_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

**Спектрально-операторный формализм.** Применение спектрально-операторного формализма позволяет существенно упростить выкладки и сформулировать результат в физически прозрачном виде. Он применим к линейным связям между переменными и линейным уравнениям, однако может быть полезен при решении задач с малой нелинейностью. Введем операторы  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$ , заменяющие частные производные:

$$\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (4)$$

Операторы  $\hat{\omega}, \hat{k}$  определены так, чтобы их действие на одну Фурье-гармонику  $A \exp(ikx - i\omega t)$  с постоянной амплитудой  $A$  сводится к замене  $\hat{\omega}, \hat{k}$  на частоту и волновое число этой гармоники:

$$(\hat{\omega}, \hat{k}) A e^{ikx - i\omega t} = (\omega, k) A e^{ikx - i\omega t}. \quad (5)$$

Это правило можно назвать правилом «снятия шапочек». Покажем, что оно сохраняет силу для операторных функций  $L(\hat{\omega}, \hat{k})$ :

$$L(\hat{\omega}, \hat{k}) A e^{ikx - i\omega t} = L(\omega, k) A e^{ikx - i\omega t} \quad (6)$$

Для этого перейдем в полной системе уравнений для  $\tilde{v}_{\alpha}$ ,  $\tilde{n}_{\alpha}$ ,  $E$  к операторам (4) и будем преобразовывать ее, обращаясь с операторами  $\hat{\omega}, \hat{k}$  как с числами. Нетрудно видеть, что эти преобразования будут точно такими, как в п. 3.1 при решении линейной задачи, в которой все переменные представляются в виде одной Фурье-гармоники  $\exp(ikx - i\omega t)$ .

Поэтому можно воспользоваться полученной в п. 1.3 связью между электрической индукцией и напряженностью электрического поля:  $\mathcal{D} = \epsilon_{\parallel}(\hat{\omega}, \hat{k})E$ . Кроме того, применение данной процедуры приводит к операторному уравнению

$$i\hat{\omega}D(\hat{\omega}, \hat{k})E(x, t) = J_{ext}(x, t), \quad (7)$$

где  $D(\hat{\omega}, \hat{k}) = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{\parallel}(\hat{\omega}, \hat{k})$ .

Для обоснования перехода к (7) в случае функций  $x$  и  $t$  общего вида, представим все переменные в виде интегралов Фурье, которые по существу являются суперпозицией Фурье-гармоник. Например, для электрического поля Фурье-разложение запишется так

$$E(x, t) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega k} \exp(ikx - i\omega t) dk d\omega. \quad (8)$$

После подстановки (8) в уравнение (7) в нем вместо операторов будут стоять параметры  $\omega, k$  преобразования Фурье, а вместо переменных – их Фурье-образы ( $E_{\omega k}$  и др.). Отсюда ясно, что для определения действия оператора на поле  $E(x, t)$  следует перейти к Фурье-представлению, а затем к полученному результату применить обратное преобразование Фурье. Фактически, это означает, что операторное уравнение (7) можно рассматривать как пространственно-временной аналог его записи в Фурье-представлении.

Наибольший интерес уравнение (8) представляет в том случае, когда все переменные являются гармониками с медленно меняющимися амплитудами (или суперпозицией таких гармоник). Именно в таком классе функций ищется решение (7) с током (1), а также решение ряда задач слабонелинейной теории. Если мы сумеем определить результат действия произвольной операторной функции на гармонику с медленной амплитудой, то отпадает необходимость перехода к преобразованию Фурье в явном виде, что существенно упрощает процедуру вывода амплитудных уравнений. Важный момент состоит в том, что при неявном использовании преобразования Фурье пределы применимости результата выходят за рамки применимости преобразования Фурье (не требуется абсолютной интегрируемости функций).

Найдем результат действия произвольной гладкой операторной функции  $L(\hat{\omega}, \hat{k})$  на квазимохроматическое поле с медленно меняющейся амплитудой:

$$L(\hat{\omega}, \hat{k})[a(\tau, \chi) \exp(ik_0 x - i\omega_0 t)] = ? \quad (9)$$

Как было показано выше, для ответа на этот вопрос можно воспользоваться Фурье-разложением квазимохроматической функции, спектр которой локализован в окрестности несущей  $\omega_0, k_0$  – см. рис. 1. Это позволяет разложить операторные функции в ряд Тейлора по малой ширине спектра. Еще один путь сводится к формальному

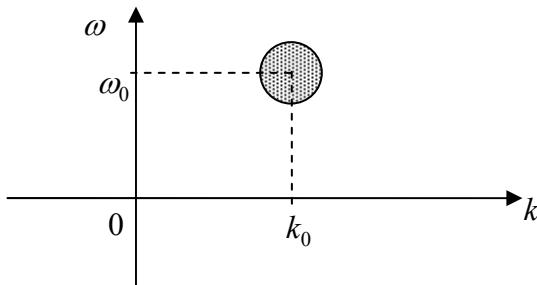


Рис. 1. Энергонесущая область спектра квазимохроматической волны:  
 $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0, |k - k_0| \ll k_0$

разложению функции-оператора по малым сдвигам аргументов относительно несущей. Ограничимся тем, что сначала запишем результат, а затем укажем как его можно обосновать. Ответ на поставленный в (9) вопрос можно представить в виде

$$L(\hat{\omega}, \hat{k})[a(\tau, \chi) e^{ik_0 x - i\omega_0 t}] = \left[ L\left(\omega_0 + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, k_0 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \chi}\right) a(\tau, \chi) \right] e^{ik_0 x - i\omega_0 t} =$$

$$= \left[ L(\omega_0, k_0) a(\tau, \chi) + \varepsilon \left( i \frac{\partial L}{\partial \omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\partial L}{\partial k_0} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) a + \dots \right] \cdot e^{ik_0x - i\omega_0t}. \quad (10)$$

После первого знака равенства в (10) стоит компактная запись результата в виде символьической функции двух аргументов, а после второго знака равенства – представление этой символьической функции в виде ряда Тейлора по малым приращениям аргументов. Введение символьической функции позволяет построить ряд по степеням  $\varepsilon$  с любой степенью точности. Для обоснования формулы (10) возьмем комплексную амплитуду (огибающую) в виде одной Фурье-гармоники:

$$a(\tau, \chi) = a_{\Omega K} \exp(iK\chi - i\Omega\tau) = a_{\Omega K} \exp(i\varepsilon Kx - i\varepsilon \Omega t), \quad (11)$$

где  $K$  и  $\Omega$  – волновое число и частота в медленных переменных, при этом  $\varepsilon K$  и  $\varepsilon \Omega$  имеют смысл малых отклонений частоты и волнового числа от несущей (см. рис. 1). Подстановка (11) в левую часть (10) с учетом правила действия оператора на поле в виде одной гармоники дает

$$L(\omega_0 + \varepsilon \Omega, k_0 + \varepsilon K) a_{\Omega K} e^{ik_0x - i\omega_0t} \quad (12)$$

Подстановка (11) в ряд Тейлора, стоящий в правой части (10), показывает, что это разложение функции (12) по приращениям аргументов  $\varepsilon \Omega$  и  $\varepsilon K$ . Поэтому в символьической функции после первого равенства в (10) следует сделать замену  $i\partial/\partial\tau \rightarrow \Omega$ ,  $-i\partial/\partial\chi \rightarrow K$ , после чего она переходит в (12). Поскольку  $a(\tau, \chi)$  можно представить в виде суперпозиции гармоник вида (11) (суммы гармоник, интегралов Фурье или интеграла Лапласа), то формула (10) применима для широкого класса огибающих  $a(\tau, \chi)$ .

**Уравнение для комплексной амплитуды (огибающей волны).** Для решения уравнения (7) применим асимптотический метод Боголюбова-Митропольского, который в дальнейшем будет использоваться нами также при решении нелинейных задач. Решение (7) ищем в виде разложения по степеням малого параметра:

$$E = a(\tau, \chi) e^{ik_0x - i\omega_0t} + \text{k.c.} + \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \dots \quad (13)$$

Главная часть решения (13) повторяет решение линейной однородной задачи, в котором произвольная константа (амплитуда) заменяется медленно меняющейся функцией времени и координаты, которую необходимо найти. Уравнение для этой функции строим в виде

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = F^{(1)}(\tau) + \varepsilon F^{(2)}(\tau) + \dots, \quad (14)$$

где  $F^{(j)}(\tau)$  – неизвестные функционалы, подлежащие определению. Идея метода в том, что функцию  $a(\tau, \chi)$  или, что то же самое, функционалы  $F^{(j)}(\tau)$  следует определить так, чтобы добавки  $E^{(j)}$  в (13) оставались малыми. Эти добавки ищем в виде гармоник с медленно меняющейся амплитудой, обозначая амплитудный фактор “шапочкой” ^ . Для первой добавки имеем

$$E^{(1)} = \hat{E}^{(1)}(\tau, \chi) e^{ik_0x - i\omega_0t} + \text{k.c.}, \quad (15)$$

Подставим (1), (13) и (15) в (7) и приравняем нуль коэффициенты при различных степенях  $\varepsilon$ . В соответствии с формулой (10) подстановка главной части разложения (13) в левую часть (7) дает

$$i\hat{\omega}D(\hat{\omega}, \hat{k}) \left[ a(\tau, \chi) e^{ik_0x - i\omega_0t} \right] = \left\{ i\omega_0 D(\omega_0, k_0) a + \varepsilon \left( -\frac{\partial \omega D}{\partial \omega_0} \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega D}{\partial k_0} \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) + \dots \right\} e^{ik_0x - i\omega_0t} + \dots$$

С учетом этой формулы в главном порядке (члены  $\sim \varepsilon^0 = 1$ ) обращение в ноль коэффициента при  $\exp(ik_0x - i\omega_0t)$  приводит к уравнению

$$D(\omega_0, k_0) a = 0, \quad (16)$$

которое удовлетворяется тождественно, поскольку  $\omega_0, k_0$  связаны дисперсионным соотношением по определению. В порядке  $\varepsilon$  с учетом (14) имеем алгебраическое уравнение для определения комплексной амплитуды первой добавки в разложении (13):

$$i\omega D(\omega_0, k_0)\hat{E}^{(1)} = \left( \frac{\partial \omega D}{\partial \omega} \Big|_0 F^{(1)} - \frac{\partial \omega D}{\partial k} \Big|_0 \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) + \hat{J}_{ext}(\tau, \chi). \quad (17)$$

Поскольку  $D(\omega_0, k_0) = 0$ , из (17) формально получим  $|\hat{E}^{(1)}| = \infty$ . Чтобы добавка  $\hat{E}^{(1)}$  оставалась малой, необходимо наложить условие разрешимости (17), которое сводится к условию ограниченности его решения  $|\hat{E}^{(1)}| \neq \infty$ . Ясно, что решение существует только при равенстве нулю правой части (17). Отсюда находим функционал  $F^{(1)}$ , подстановка которого в разложение (14) для  $\partial a / \partial \tau$  дает искомое уравнение первого приближения (с ошибкой не более  $\varepsilon$ ) для комплексной амплитуды волны

$$\left( \frac{\partial \omega D}{\partial \omega} \Big|_0 \right) \left( \frac{\partial a}{\partial t} + V_g \frac{\partial a}{\partial x} \right) = -\varepsilon \hat{J}_{ext}(\tau, \chi), \quad (18)$$

где  $V_g = -(D'_k / D'_\omega)_0$  – групповая скорость (см. п. 1.1 лекций). В уравнении (18) мы вернулись к исходным переменным  $x$  и  $t$ . Таким образом, укороченные уравнения для огибающей волны получаются из условия существования (как говорят математики, условия равномерной сходимости) двухчленного разложения (13), в котором первая добавка остается малой. Чтобы построить решение с более высокой точностью, необходимо наложить условие ограниченности добавки  $E^{(2)}$  и т.д.

**Уравнение энергетического баланса.** Средняя мощность  $P$ , которая передается волне от внешнего источника в расчете на единицу объема среды равна работе в единицу времени, совершающей полем волны по перемещению сторонних зарядов, взятой со знаком минус:

$$P = -\overline{J_{ext} E(x, t)} = -\varepsilon(a^* \hat{J}_{ext} + a \hat{J}_{ext}^*). \quad (19)$$

где черта сверху означает усреднение по периоду (которое при вычислениях сводится к отбрасыванию осциллирующих составляющих). Напомним, что ток равен  $e n V$ , где  $e$  – заряд одной частицы,  $n$  – плотность частиц,  $V$  – скорость зарядов, откуда получается выражение (19) для мощности как произведение «сила  $\times$  скорость». Теперь преобразуем (18) так, чтобы в правой части уравнения стояла мощность подкачки. Умножая обе части уравнения (18) на  $a^*$ , вычисляя комплексно сопряженное от полученного уравнения и сложим эти два уравнения. Учитывая тождество  $a^* \partial a / \partial t + a \partial a^* / \partial t = \partial |a|^2 / \partial t$ , получим уравнение баланса энергии в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = P, \quad W = \left( \frac{\partial \omega D}{\partial \omega} \Big|_0 \right) |a|^2, \quad \Pi = -\left( \omega \frac{\partial D}{\partial k} \Big|_0 \right) |a|^2 = V_g W. \quad (20)$$

Здесь учтено выражение для групповой скорости через производные  $D(\omega, k)$  по  $\omega$  и  $k$  (см. выше). Величина  $W$  является плотностью энергии, поскольку ее приращение в единицу времени при  $\partial / \partial x = 0$  равно мощности, поступающей от стороннего источника. Величина  $\Pi$ , приращение которой на единицу длины при  $\partial / \partial t = 0$  равно мощности подкачки есть поток энергии. При  $P = 0$  из первого уравнения (20) следует закон сохранения энергии, согласно которому изменение плотности энергии во времени определяется только ее перетеканием из одной части пространства в другую с групповой скоростью  $V_g$ .

Мы заранее внесли коэффициент  $1/4\pi$  в определение дисперсионной функции – чтобы в (20) не появилось «лишних» коэффициентов. Можно ли считать выражение (20) для  $W$  общим? Очевидно, что дисперсионная функция определена неоднозначно и допускает произвол, зависящий от способа ее вычисления (но не изменяющий вид

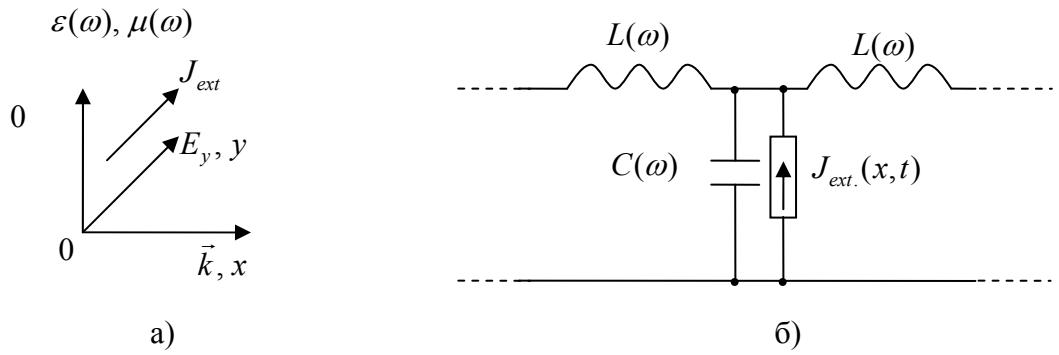


Рис. 2 Иллюстрация к задаче о возбуждении плоской электромагнитной волны сторонним источником тока (а) и схема звена распределенной LC-линии с внешним источником тока. Эффективные емкость и индуктивность определены как  $Y(\omega) = -i\omega C(\omega)$ ,  $Z(\omega) = -i\omega L(\omega)$ . Для линии без дисперсии  $L(\omega) = \text{const}$  и  $C(\omega) = \text{const}$

дисперсионных ветвей). По этой причине вычисление дисперсионной функции не всегда приводит к формуле (20). Этот произвол может проявляться в присутствии коэффициентов, которые не содержат новых дисперсионных ветвей. Объединяя  $D$  этими коэффициентами, можно привести формулу для энергии к форме (20), но уже для «исправленной» дисперсионной функцией.

Раскрывая (20), выражение для плотности энергии плоских волн пространственного заряда представим в традиционной форме

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \omega \epsilon_{||}}{\partial \omega} \right)_0 |a|^2 = \frac{1}{4\pi} \omega \left( \frac{\partial \epsilon_{||}}{\partial \omega} \right)_0 |a|^2 = \frac{1}{8\pi} \omega \left( \frac{\partial \epsilon_{||}}{\partial \omega} \right)_0 \overline{E^2} \quad (21)$$

где  $\overline{E}$  – главная часть решения (13), черта сверху означает усреднение по пространственному периоду. Последняя запись энергии в (21) удобна тем, что в ней исключена неоднозначность выражения для энергии, связанная с определением амплитуды собственной волны (например, если в формуле для энергии перейти к амплитуде продольной скорости частиц, коэффициент в первом выражении (21) станет другим).

Используя изложенный выше метод можно получить выражение для плотности энергии плоских электромагнитных волн в изотропной среде с временной дисперсией. В этом случае для возбуждения волны следует в уравнения Максвелла ввести сторонний ток соответствующего направления – см. рис. 2. Результат вычислений имеет вид

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \omega \epsilon}{\partial \omega} + \frac{\epsilon}{\mu} \frac{\partial \omega \mu}{\partial \omega} \right)_0 |a|^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{d\omega \epsilon}{d\omega} \overline{E^2} + \frac{1}{8\pi} \frac{d\omega \mu}{d\omega} \overline{H^2}, \quad (22)$$

где  $a$  – амплитуда поперечного электрического поля (определенная разложением, аналогичным (13)). Именно в виде (22) было впервые дано выражение для энергии ЭМ волн в курсе Теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица (том «Электродинамика сплошных сред»).

Наконец, приведем необходимое в дальнейшем выражение для плотности энергии электромагнитных волн в распределенной LC-линии. Для вывода амплитудного уравнения и уравнения энергетического баланса в линию вводится резонансный с волной сторонний источник тока, как показано на рис. 2б (см. аналогично (1)). В данном случае удобно перейти от импеданса  $Z(\omega)$  и проводимости  $Y(\omega)$  к эффективным частотно- зависимым индуктивности и емкости. В соответствии с определением, данным в подписи к рис. 2, эффективная емкость это такая гипотетическая (вымыселенная) емкость, проводимость которой равна  $Y(\omega)$ , а эффективная индуктивность это гипотетическая индуктивность с импедансом  $Z(\omega)$ . В простейшей  $LC$  – линии они не зависят от частоты

и совпадают с обычными емкостью и индуктивностью. Представляя напряжение в виде  $u(x, t) = a(x, t) \exp(ik_0x - i\omega_0t) + k.c.$  и повторяя схему данного выше вывода плотности энергии при возбуждении волны резонансным током, получим выражения для плотности и потока энергии ЭМ волн в диспергирующей LC-линии:

$$W = \left( \frac{d\omega C}{d\omega} + \frac{C}{L} \frac{d\omega L}{d\omega} \right)_0 |a|^2, \quad \Pi = 2\sqrt{C_0/L_0} |a|^2. \quad (23)$$

Сравнение с формулами (22) показывает, что эффективная емкость является аналогом диэлектрической проницаемости, а эффективная индуктивность – аналогом магнитной проницаемости для плоских ЭМ волн. В использовании этой аналогии и состоит смысл введения эффективных индуктивности и емкости (запись плотности энергии через мнимые части  $Z$  и  $Y$  выглядела бы довольно экзотично).

**Слабодиссипативная среда.** До сих пор мы полностью пренебрегали потерями, считая среду консервативной. Однако реальные среды всегда диссипативны, так как в соответствии со вторым началом термодинамики они стремятся вернуться в состояние термодинамического равновесия (возмущения на фоне равновесного состояния должны перейти в тепло – хаотическое движение атомов и молекул). В этом случае говорят, что происходит диссипация (рассеивание) волновой энергии. Например, в системе пучок-плазма диссипацию можно учесть путем введения электрон-ионных столкновений. Простейшая модель сводится к добавлению силы трения в правую часть уравнения для скорости в неподвижной плазме

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \tilde{E} - \nu_{eff} \tilde{v},$$

где  $\nu_{eff}$  – эффективная частота электрон-ионных столкновений. При этом продольная диэлектрическая проницаемость в системе пучок-плазма принимает вид

$$\varepsilon_{||} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{eff})} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} + \frac{i\nu_{eff}\omega_p^2}{\omega^3}. \quad (24)$$

Приближенное равенство записано с учетом разложения в ряд по малой величине  $\nu_{eff}/\omega \ll 1$ , что соответствует пределу "слабостолкновительной" плазмы. Дисперсионное уравнение принимает вид  $\varepsilon_{||} = \operatorname{Re} \varepsilon_{||} + i \operatorname{Im} \varepsilon_{||} = 0$ . Используя введенную в (7) функцию  $D(\omega, k)$ , перепишем дисперсионное уравнение в виде  $\operatorname{Re} D(\omega, k) + i \operatorname{Im} D(\omega, k) = 0$ . Поправки к дисперсионным ветвям консервативной системы можно найти методом возмущений, аналогично тому как это делалось в п. 1.2. Формула (24) иллюстрирует типичную ситуацию, когда малые потери приводят к малой мнимой добавке к дисперсионной функции ( $|D_i|$  мало по сравнению с основными составляющими  $D_r$ ). В формуле  $D = D_r + iD_i$  действительная и мнимая части  $D$  определены как функции вещественных  $\omega$  и  $k$ , однако после этого допускается подстановка в них комплексных  $\omega$  и  $k$ , что означает аналитическое продолжение  $D(\omega, k)$  в комплексную область.

Проведенный выше расчет волновой энергии легко обобщается на случай слабодиссипативной среды, так как в описанной выше процедуре малые диссипативные члены могут быть учтены в первом порядке по малому параметру. Например, в приведенном выше примере с плазмой можно принять, что  $\nu_{eff}/\omega$  также имеет порядок  $\varepsilon \ll 1$ . Чтобы показать явно малость мнимой части дисперсионной функции, положим  $D_i = \varepsilon \tilde{D}_i$ , где  $\tilde{D}_i$  – величина «порядка единицы» и перепишем дисперсионное уравнение в виде  $D(\omega, k) = D_r + i\varepsilon \tilde{D}_i = 0$ . Теперь  $\omega_0$  – вещественная частота волны, которая удовлетворяет уравнению  $D_r(\omega_0, k_0) = 0$ , а в правую часть (17) добавится слагаемое  $i\varepsilon \tilde{D}_i$ . Повторение выкладок с учетом этого члена приводит к уравнению

$$\left( \frac{\partial \omega D_r}{\partial \omega} \right)_0 \left( \frac{\partial a}{\partial t} + V_g \frac{\partial a}{\partial x} - \gamma a \right) = -\varepsilon \hat{J}_{ext}(\tau, \chi), \quad (25)$$

где  $\gamma = -\varepsilon \left( \omega \tilde{D}_i / \partial (\omega D_r) / \partial \omega \right)_0 = -\varepsilon \left( \tilde{D}_i / D'_{r\omega} \right)_0$ . Таким образом, инкремент  $\gamma$  является малым (величиной порядка  $\varepsilon$ ).

Если положить в (25)  $\partial / \partial x = 0$ ,  $\hat{J}_{ext} = 0$ , получим линейное уравнение с одной производной по времени, решение которого  $\sim \exp(\gamma t)$ . Отсюда ясно, что  $\gamma$  должно совпадать с инкрементом волны в линейной теории:  $\gamma = \text{Im } \omega(k_0)$ . Чтобы доказать это, будем искать решение полного дисперсионного уравнения  $D(\omega, k) = D_r + i\varepsilon \tilde{D}_i = 0$  в виде ряда теории возмущений по  $\varepsilon$

$$\omega = \omega^{(0)}(k) + \varepsilon \omega^{(1)}(k) + \dots \quad (26)$$

Подставляя (26) в дисперсионное уравнение, получим с точностью до членов порядка  $\varepsilon$

$$D_r(\omega^{(0)}(k), k) + \varepsilon \left[ \frac{\partial D_r}{\partial \omega_0} \omega^{(1)} + \tilde{D}_i(\omega^{(0)}(k), k) \right] + \dots = 0 \quad (27)$$

Отсюда находим  $\gamma = \varepsilon \text{Im } \omega^{(1)} \approx \text{Im } \omega(k_0)$ ,  $\text{Re } \omega^{(1)} = 0$ , т.е. коэффициент  $\gamma$  является мнимой частью частоты в линейной задаче с потерями. Можно показать, что добавка к частоте волны, связанная с малыми потерями, появляется в  $\omega^{(2)}$ , т.е. имеет второй порядок малости.

После несложных преобразований уравнение энергетического баланса (20) с учетом потерь можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2\gamma (\omega D'_{r\omega})_0 |a|^2 + P = 2\gamma W + P, \quad (28)$$

где первое слагаемое в правой части при  $\gamma < 0$  определяет потери энергии, второе – мощность подкачки от внешнего источника. В соответствии с процедурой вывода амплитудного уравнения в выражении для энергии плоских электромагнитных волн  $\varepsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  заменяются на  $\text{Re } \varepsilon$  и  $\text{Re } \mu$ .

**О границах применимости понятия волновой энергии.** Резюмируя сказанное выше, выделим основные моменты, которые необходимо иметь в виду в связи с применением понятия волновой энергии.

1) Волновая энергия в классическом понимании определена только для консервативных и слабодиссипативных (близких к консервативным) сред. Кроме того, забегая вперед, добавим, что это понятие можно ввести также для слабонелинейных сред, в которых связь между различными компонентами вектора волнового поля и близка к таковой в линейной задаче, что дает возможность записать энергию через общую амплитуду волны (см. п. 1.1). Волновая энергия является квадратичной величиной или, как часто говорят, – величиной второго порядка по малой амплитуде волны<sup>1</sup>. Слабая диссипативность среды позволяет приближенно найти малое затухание или нарастание волн и малые изменения дисперсионных ветвей по сравнению с консервативной задачей методом возмущений «по малым потерям». Фактически точность метода возмущений характеризует точность приближения слабодиссипативной среды.

2) Обратим внимание на то, что волновая энергия вычисляется на основе уравнения баланса, полученного в рамках линеаризованных уравнений для огибающей волны. Поэтому ее часто называют «квазиэнергией» (похожей на энергию). Не вдаваясь в детали, ограничимся константацией факта, что волновая энергия, вообще говоря, не тождественна полной энергии (включающей в себя кинетическую, внутреннюю и др. виды энергии), которая определена при любой диссипации и для которой действует общий закон сохранения энергии.

3) С учетом указанных выше ограничений возникает вопрос, зачем понадобилось понятие волновой энергии, которое имеет столь узкий смысл? Ответ состоит в том, что именно волновой энергией («квазиэнергией») волна обменивается с внешними источниками при ее возбуждении, а также передает ее другим волнам в процессе линейного и нелинейного взаимодействия с ними. Термо, выделяемое при поглощении волны, согласно (28), также определяется запасенной в ней квазиэнергией. Далее мы увидим также, что именно волновой энергией волны обмениваются друг с другом при их взаимодействии в средах с малой нелинейностью.

<sup>1</sup> Амплитуда мала в том смысле, что мала нелинейность в уравнениях движения среды. В действительности абсолютные значения амплитуды полей в такой волне могут быть весьма велики (как, например, в нелинейной оптике).

## Волны с отрицательной энергией в неравновесных средах.

Система потоков заряженных частиц является классическим примером неравновесной среды, которая характеризуется поступлением (изначальным или непрерывным) энергии извне. В п. 2.1 была вычислена плотность энергии волн пространственного заряда в системе потоков заряженных частиц:

$$W = \frac{1}{8\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{||}(\omega, k)}{\partial \omega} \overline{E^2} = \frac{1}{4\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{||}(\omega, k)}{\partial \omega} |a|^2, \quad (1)$$

где  $E_{\sim} = a \exp(ikx - i\omega t) + \text{к.с.}$  и  $a$  – комплексная амплитуда продольного электрического поля. Рассмотрим выражение (1) подробнее в простейшем случае плоских продольных волн в электронном потоке. В этом случае вычисления дают

$$\begin{aligned} \varepsilon_{||} &= 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0, \quad \omega_{1,2} = kV_0 \pm \omega_b, \\ \frac{\partial \varepsilon_{||}}{\partial \omega} &= \frac{2\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^3} \Big|_{1,2} = \pm \frac{2}{\omega_b}, \quad W_{1,2} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\omega_b} |a|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

На рис. 1 показаны обе ветви  $\omega_{1,2}(k)$  и знак волновой энергии на них. Видно, что «медленные» волны пространственного заряда (фазовая скорость которых меньше скорости потока) имеют отрицательную энергию, а энергия «быстрых» волн положительна. На этом же рисунке показаны дисперсионные ветви системы пучок-плазма и знаки энергии волн на них. Согласно формуле (1) знак энергии может изменяться при переходе частоты  $\omega$  через ноль либо в точке, где  $\partial \varepsilon_{||} / \partial \omega = 0$ . Поскольку дисперсионное уравнение системы есть  $\varepsilon_{||}(\omega, k) = 0$ , точки изменения знака энергии совпадают с точками ветвления дисперсионных кривых  $\omega(k)$ , в которых групповая скорость формально обращается в бесконечность (см. рис. 1).

Если среда равновесная (в термодинамическом смысле), то энергия волн в ней может быть только положительной. Это следует из термодинамических принципов. В термодинамически равновесной среде возбужденная волна является единственным отклонением от состояния термодинамического равновесия, а в соответствии с принципом

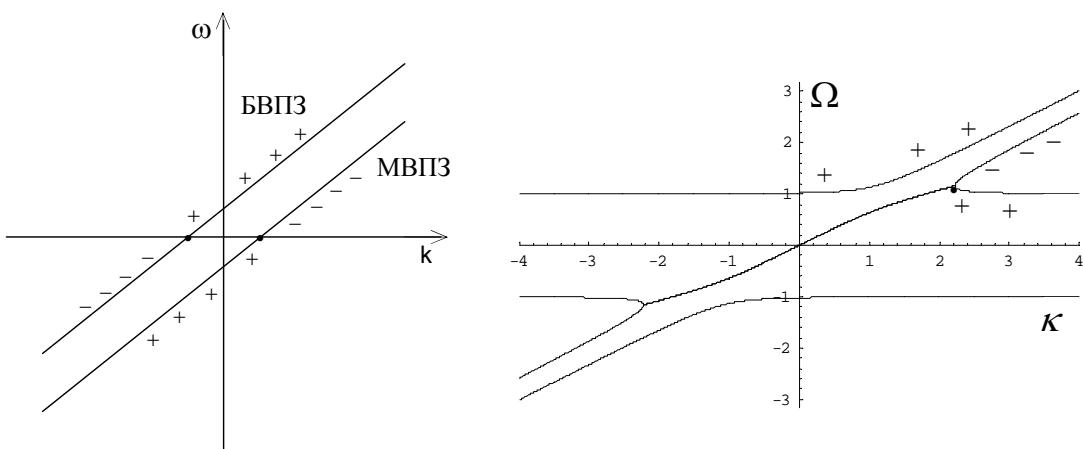


Рис. 1 Дисперсионные ветви моноскоростного электронного пучка и системы пучок-плазма (построены в нормированных переменных при  $\alpha = 0.04$ ). Символами + и – показаны знаки энергии волн, а символом • – точки смены знака энергии

возрастания энтропии (третье начало термодинамики) система всегда стремится вернуться в состояние термодинамического равновесия, т.е. волна должна затухнуть. При этом происходит выделение тепла, так как усиливается хаотическое движение молекул, а значит энтропия и внутренняя энергия после затухания волны возрастают. Отсюда следует, что энергия волны, возбужденной в равновесной среде, всегда положительна. Ситуация принципиально изменяется в случае неравновесной среды, для которой возбужденная волна не является единственной причиной отклонения от термодинамического равновесия (например, при наличии потоков в среде запасена их кинетическая энергия). В этой ситуации существование волн отрицательной энергии (ВОЭ) не противоречит принципам термодинамики.

В чем состоит физический смысл ВОЭ? Мы определили энергию волны как работу, совершаемую внешним источником при возбуждении этой волны. Поэтому отрицательная энергия волны означает, что при ее возбуждении источник совершает отрицательную работу, т.е. энергия передается от среды к источнику. Таким образом, при возбуждении ВОЭ запасенная в среде энергия уменьшается. Фактически возбуждение ВОЭ является механизмом преобразования запасенной в среде энергии «неколебательной» природы в энергию волновых движений. В случае электронного пучка происходит преобразование кинетической энергии пучка, которая поступила извне при разгоне пучка (в расчете на единицу объема она равна  $W_0 = (1/2)n_b m_e V_0^2$ ).

Из сказанного вытекают свойства процессов, протекающих с участием ВОЭ, которые иногда называют формализмом ВОЭ.

- 1) При ВОЭ возбуждении внешним источником энергия передается из среды к источнику.
- 2) В средах с потерями (диссипацией) амплитуда ВОЭ нарастает, другими словами распространение ВОЭ в среде с диссипацией приводит к неустойчивости. Формально это можно видеть, например, из выражения для продольной диэлектрической проницаемости в системе пучок-плазма в присутствии электрон-ионных столкновений (см. п. 2.1). Действительно для ветви медленных пучковых волн, имеющих отрицательную энергию  $\text{Im } \omega = -\text{Im } \epsilon_{||}/(\partial \text{Re } \epsilon_{||} / \partial \omega)$ . Например, при учете электрон-ионных столкновений  $\text{Im } \epsilon_{||} > 0$  (см. п. 2.1) и в соответствии с (1) для волны с отрицательной энергией  $\partial \text{Re } \epsilon_{||} / \partial \omega < 0$ , получим  $\text{Im } \omega > 0$ , т.е. амплитуда волны нарастает во времени. Такой же результат следует из уравнения баланса, приведенного в п. 2.1. Этому эффекту можно дать качественное объяснение. Действительно, диссипация энергии должна приводить к уменьшению энергии волны. Поскольку энергия волны отрицательна, ее уменьшение означает ее рост по абсолютной величине, что возможно только в результате нарастания амплитуды волны, так как  $W \sim |a|^2$ . Следует отметить, что в действительности дело обстоит несколько сложнее, так как в неравновесной среде возможна аномальная диссипация, когда выделение тепла сопровождается нарастанием волн с положительной энергией (такая возможность опять-таки связана с наличием запасенной в среде энергии). Примером может служить неустойчивость плазменных волн при формальном введении потерь в пучке, определяемых вязкостью электронного газа ( эта неустойчивость оказывается очень слабой и не может иметь какого-либо практического значения). Таким образом, введение потерь в движущейся компоненте может быть причиной появления аномальной диссипации. Чтобы однозначно установить, как проявляется диссипация в каждом конкретном случае, необходимо вычислить энергию волны и мнимую часть частоты собственных волн.
- 3) Линейная связь ВОЭ с волнами положительной энергии (ВПЭ) приводит к неустойчивости. Причина та же: отдавая энергию, ВОЭ растет по амплитуде. Линейное резонансное взаимодействие волн возникает при пересечении дисперсионных ветвей несвязанных подсистем, так как в точке пересечения ветвей частоты и волновые числа волн совпадают, поэтому каждая из них играет роль резонансного источника для другой. Таким образом, если при линейном взаимодействии ВОЭ отдает энергию ВПЭ, обе волны нарастают по амплитуде одновременно – возникает неустойчивость. Неустойчивость в системе пучок-плазма без потерь можно интерпретировать как неустойчивость, возникающую при линейной связи ВОЭ пучка с ВПЭ плазмы. Отсюда сразу следует, что эта неустойчивость имеет резонансный характер, поскольку условия резонанса выполняются в области пересечения дисперсионных ветвей пучка и плазмы.
- 4) Формализм ВОЭ применим для консервативных и слабо диссипативных сред, так как только в этом случае применимо понятие волновой энергии.

## Часть 2. Нелинейное взаимодействие волн в консервативных и слабодиссипативных средах.

### 1. Резонансное взаимодействие трех квазимонохроматических волн.

В качестве простой модели консервативной нелинейной среды с дисперсией воспользуемся распределенной LC-линией с нелинейной емкостью. Схема звена такой линии показана на рис. 1. В отличие от линейной задачи, рассмотренное ранее, схема дополнена нелинейным элементом – нелинейной емкостью. В радиотехническом варианте это может быть, например, стабилитрон, находящийся при запирающем напряжении, так как барьерная емкость запертого p-n-перехода зависит от напряжения. Если приращения емкости пропорциональны приращениям напряжения, получим уравнения среды с квадратичной нелинейностью, в которой возможно нелинейное резонансное взаимодействие трех электромагнитных (ЭМ) волн. Для записи исходных уравнений воспользуемся введенными в п. 2.1 понятиями эффективных индуктивности и емкости, которые являются аналогами диэлектрической и магнитной проницаемостей для плоских ЭМ волн в среде с временной дисперсией. Следуя спектрально-операторному формализму (п. 2.1), перейдем от частотно зависимых эффективной индуктивности  $L(\hat{\omega})$  и емкости  $\bar{C}(\hat{\omega})$  к функциям оператора  $\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}$ . В результате уравнения Кирхгофа для распределенной LC-линии принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i\hat{\omega}L(\hat{\omega})I, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = i\hat{\omega}\bar{C}(\hat{\omega})u - \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $Q$  – заряд на верхней обкладке нелинейной емкости,  $u(x,t)$  – осциллирующее напряжение,  $I(x,t)$  – ток (см. рис. 1 и п. 1.2). Производную  $Q$  по времени (ток через нелинейную емкость) представим в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} \frac{\partial u}{\partial t} \approx \underbrace{(C_0 + bu)}_{C_{NL}} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $dQ/dt$  по определению является емкостью конденсатора. Зависимость емкости от напряжения представим в виде  $C_{NL} = C_0 + bu$ , где  $C_0$  – постоянная составляющая,  $b$  – коэффициент. Присоединим емкость  $C_0$  к эффективной емкости  $\bar{C}$ , полагая  $\bar{C}(\hat{\omega}) + C_0 = C(\hat{\omega})$ . После подстановки (2) в (1), замены производных по  $x$  оператором  $\hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial x}$  и преобразования нелинейного члена, перепишем второе уравнение (1) в виде

$$i\hat{k}I = i\hat{\omega}C(\hat{\omega})u + ib\hat{\omega}f \quad \left( f = \frac{1}{2}u^2 \right). \quad (3)$$

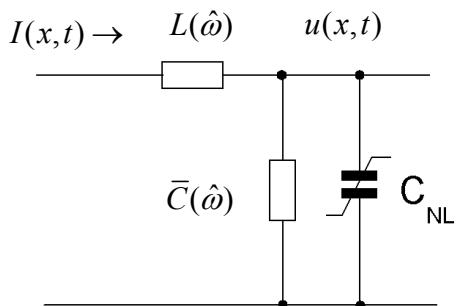


Рис. 1. Электрическая схема звена распределенной LC-линии с частотно зависимыми элементами и нелинейной емкостью.

Из первого уравнения (1) найдем ток  $I = \hat{k}[\hat{\omega}L(\hat{\omega})]^{-1}u$  и подставим его в (3). Принятая аппроксимация нелинейной емкости действует при достаточно малых напряжениях. Чтобы показать это в явном виде, введем малый параметр  $\varepsilon \ll 1$  и сделаем замену  $u = \varepsilon u_{new}$ . Отбрасывая для краткости индекс "new", получим одно нелинейное уравнение для напряжения

$$D(\hat{\omega}, \hat{k})u(x, t) = \varepsilon b\hat{\omega}^2 L(\hat{\omega})f, \quad (4)$$

где  $D = \hat{k}^2 - \hat{\omega}^2 L(\hat{\omega})C(\hat{\omega})$  – дисперсионная функция.

Уравнение (4) можно рассматривать как простейшую математическую модель нелинейной консервативной среды с дисперсией. Наличие явно выделенного малого параметра позволяет использовать для его решения асимптотический метод Боголюбова-Митропольского. В случае трехволнового резонансного взаимодействия, решение (4) строим в виде разложения

$$u = \underbrace{\sum_{j=1}^3 a_j(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t}}_{u^{(0)}} + k.c. + \varepsilon u^{(1)} + \dots, \quad (5)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\chi = \varepsilon x$  – медленные время и координата, частоты и волновые числа волн связаны дисперсионным соотношением  $D(\omega_j, k_j) = 0$ ,  $a_j$  – комплексные амплитуды волн,  $u^{(0)}$  – главная часть разложения. Предположим, что частоты и волновые числа волн, входящих в  $u^{(0)}$ , связаны условиями трехволнового резонанса

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (6)$$

Кроме того, будем считать, что каждая из волн входит только в один триплет (6). Уравнения для комплексных амплитуд волн ищем в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial \tau} = F_j^{(1)}(\tau, \chi) + \varepsilon F_j^{(2)}(\tau, \chi) + \dots, \quad (7)$$

где  $F^{(j)}(\tau, \chi)$  – неизвестные функционалы, подлежащие определению. Напомним, что суть метода состоит в том, чтобы так определить комплексную амплитуду  $a_j(\tau, \chi)$  (или, что тоже самое, функционалы  $F^{(j)}$ ), чтобы добавки в разложении (5) оставались малыми.

Подставим разложение (5) в уравнение (4), соберем члены при различных степенях  $\varepsilon$  и приравняем их нулю. В порядке  $\varepsilon^0 = 1$ , получим тождество, так как частоты и волновые числа волн связаны дисперсионным уравнением.

После подстановки (5) в (4) нелинейность также принимает форму ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \dots, \quad (8)$$

При построении уравнений главного приближения (которым мы ограничимся) понадобится только главный член разложения (8), который имеет вид суперпозиции гармоник

$$f^{(0)} \sim (u^{(0)})^2 = \left( 2a_1 a_2 e^{i(k_1+k_2)x - i(\omega_1+\omega_2)t} + 2a_1^* a_3 e^{i(k_3-k_1)x - i(\omega_3-\omega_1)t} + 2a_2^* a_3 e^{i(k_3-k_2)x - i(\omega_3-\omega_2)t} + k.c. \right) + \\ + \left( 2a_2 a_1^* e^{i(k_2-k_1)x - i(\omega_2-\omega_1)t} + k.c. + \dots \right) + \left( \sum_{j=1}^3 a_j^2 e^{2ik_j x - 2i\omega_j t} + k.c. \right) + 2 \sum_{j=1}^3 |a_j|^2, \quad (9)$$

Из (9) видно, что нелинейность складывает и вычитает показатели экспонент. При этом возникает несколько типов "комбинационных" гармоник. Из (9) следует, что при выполнении условий резонанса (6) нелинейность порождает гармоники, резонансные с собственными волнами системы, которые удовлетворяют дисперсионному уравнению  $D(\omega_j, k_j) = 0$  и входят в главную часть решения (5) (они собраны в первой скобке). Их роль в уравнении (4) аналогична резонансным источникам тока, которые вводились при выводе

амплитудных уравнений в п. 2.1. Изменения амплитуд этих гармоник могут накапливаться во времени. Кроме того, нелинейность дает нерезонансные комбинационные гармоники. В выражении (9) такими являются члены во второй и третьей скобках, для которых  $D(\omega_2 - \omega_1, k_2 - k_1) \neq 0$ ,  $D(2\omega_j, 2k_j) \neq 0$ . Эти гармоники нелинейности приводят к малым (порядка  $\varepsilon$ ) осцилляциям  $u$ . Таким образом,  $f^{(0)}$  можно представить в виде суммы резонансных и нерезонансных гармоник

$$f^{(0)} = \sum_{D(\omega_j, k_j)=0} \hat{f}_j^{(0)}(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t} + \sum_{D(\omega_m, k_m) \neq 0} \hat{f}_m^{(0)}(\tau, \chi) e^{ik_m x - i\omega_m t} + k.c. \quad (10)$$

где  $\hat{f}_j^{(0)}(\tau, \chi)$  – комплексные амплитуды. В соответствии с (4) и (10) первую добавку также следует искать в виде суммы резонансных и нерезонансных гармоник:

$$u^{(1)} = \sum_{D(\omega_j, k_j)=0} \hat{u}_j^{(1)}(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t} + \sum_{D(\omega_m, k_m) \neq 0} \hat{u}_m^{(1)}(\tau, \chi) e^{ik_m x - i\omega_m t} + k.c. \quad (11)$$

где  $\hat{u}_j^{(1)}(\tau, \chi)$  – комплексные амплитуды. При подстановке (5), (7), (10) воспользуемся правилом действия операторов на гармоническую функцию с медленной амплитудой (п. 2.1):

$$D(\hat{\omega}, \hat{k}) \left[ a(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t} \right] = \left\{ D(\omega_j, k_j) a + \varepsilon \left( i \frac{\partial D}{\partial \omega_j} \frac{\partial a}{\partial \tau} - i \frac{\partial D}{\partial k_j} \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) + \dots \right\} e^{ik_j x - i\omega_j t}.$$

В результате для резонансных гармоник первой добавки, удовлетворяющих дисперсионному соотношению  $D(\omega_j, k_j) = 0$ , получим уравнение

$$D(\omega_j, k_j) \hat{u}_j^{(1)} = b\omega_j^2 L_j \hat{f}_j^{(0)} + \left( -i \frac{\partial D}{\partial \omega_j} \Big|_j F_j^{(1)} + i \frac{\partial D}{\partial k_j} \Big|_j \frac{\partial a_j}{\partial \chi} \right). \quad (12)$$

Для нерезонансных гармоник находим

$$D(\omega_m, k_m) \hat{u}_m^{(1)} = b\omega_m^2 L_m \hat{f}_m^{(0)}, \text{ откуда } \hat{u}_m^{(1)} = b\omega_m^2 L_m \hat{f}_m^{(0)} / D(\omega_m, k_m) = O(1). \quad (13)$$

Таким образом, амплитуды нерезонансных гармоник находятся в явном виде и дают малые вклады в разложение (5). В то же время, для резонансных гармоник из (12) формально получаются бесконечно большие добавки  $\hat{u}_j^{(1)}$ . Выберем функцию  $F_j^{(1)}$  так, чтобы все первые добавки были ограничены ( $\hat{u}_j^{(1)} \neq \infty$ ). Очевидно, что это условие выполнено только при равенстве нулю правой части уравнения (12). Отсюда находим функции  $F_j^{(1)}$ , подставляя которые в (7) получим уравнения первого приближения для комплексных амплитуд трех резонансно связанных волн

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + v_1 a'_1 &= \sigma_1 a_2^* a_3, \\ \dot{a}_2 + v_2 a'_2 &= \sigma_2 a_1^* a_3, \\ \dot{a}_3 + v_3 a'_3 &= \sigma_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\sigma_j = -ib\omega_j^2 L_j / (D'_\omega)_j$  – коэффициенты взаимодействия волн (в данном случае они чисто мнимые),  $v_j = -D'_k / D'_\omega \Big|_j$  – групповые скорости (см. п.1.1). Это и есть классические уравнения резонансного взаимодействия трех волн в нелинейной среде. Когда комплексные амплитуды волн удовлетворяют (14), двухчленное разложение (5) является корректным, или, как говорят в математике, равномерно пригодным (по меньшей мере на временах порядка  $1/\varepsilon$ ). Слева в (14) стоят операторы группового распространения, а в правой части – вклады резонансных комбинационных гармоник: волны 1 и 2 при «сложении» на нелинейности возбуждают волну 3 и т.д. Разворнутая запись нелинейных членов (9) приведена в учебных целях. На практике необходимо в соответствии с (6) оставить только те комбинационные гармоники, которые дают вклад в уравнение для соответствующей амплитуды.

В процедуре вывода амплитудных уравнений в (9) не были рассмотрены нелинейные члены  $\sim |a_j|^2$ , которые являются медленно меняющимися функциями. Эти члены (иногда их называют нулевыми гармониками), не могут быть учтены в рамках операторного формализма, который применим только к осциллирующим полям. Нулевые гармоники приводят к появлению средних составляющих полей, которые в большинстве случаев являются величинами второго порядка малости (входят в  $u^{(2)}$ ). Их определение возможно только из исходных уравнений в частных производных. Поскольку эффект резонансного взаимодействия описывают уравнения первого приближения, в которые средние поля не дают вклада, об их существовании можно забыть (что обычно и делается). Заметим, что при наличии осциллирующих и средних составляющих полей операторный формализм также может быть полезен для преобразования осциллирующих составляющих. Этот вопрос будет обсуждаться на следующих лекциях.

Применение операторного формализма дает важные преимущества, когда исходная система уравнений включает в себя большое число линейных уравнений либо эти уравнения «сворачиваются» при переходе к частотному представлению (как это было для LC-линии). Операторный формализм не только упрощает преобразования технически, но и позволяет выразить результат с через частотные характеристики линейной системы (диэлектрическую и магнитную проницаемость, импеданс и т.п.).

### Графическое определение трехволновых резонансов.

Ранее мы предполагали, что три волны удовлетворяют условиям резонанса, не касаясь того, как найти резонансные тройки волн. В одномерной задаче есть простой способ графического определения резонансных троек волн. На плоскости  $(k, \omega)$  каждую волну отобразим радиус-вектором  $\vec{l}_n = (k_n, \omega_n)$ , один конец которого находится в начале координат, а другой лежит на дисперсионной кривой. Тогда условия резонанса можно записать в виде:  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$  и в соответствии с правилом сложения векторов резонансные волны должны находиться в вершинах образованного ими параллелограмма. В качестве примера можно привести взаимодействие волн в LC-линии, схема звена которой представлена на рис. 1б (см. п. 2.2). Дисперсионные ветви, аналогичные показанным на рис. 1б, имеют акустические и оптические фононы в кристаллах. Определение резонансной тройки при задании частоты одной волны (например, с частотой  $\omega_1$ ) связано с отысканием двух других волн «методом подбора». Однако можно предложить геометрическое построение, позволяющее однозначно

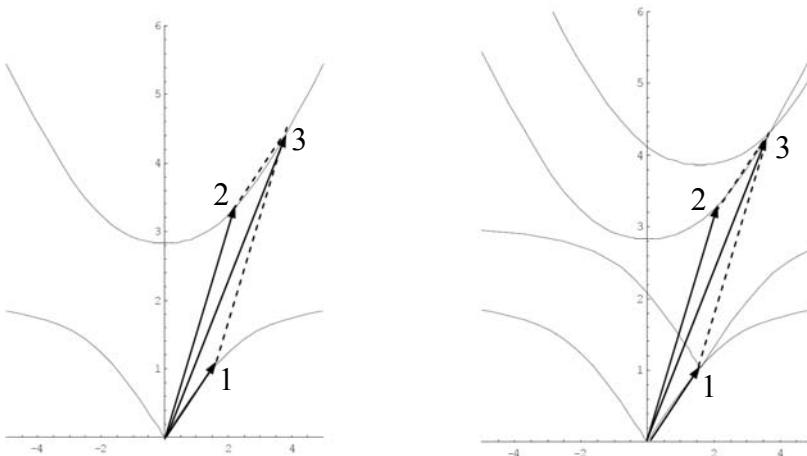


Рис. 2. Пример определения резонансной тройки волн с помощью правила параллелограмма. Дисперсионные кривые соответствуют модели среды в виде распределенной LC-линии с дисперсией в области промежуточных частот.

найти резонансные тройки волн. Выберем какую-либо волну на дисперсионных кривых рис. 2б (например,  $\omega_1$ ) и сделаем параллельный перенос системы координат с дисперсионными кривыми так, чтобы начало координат совпало с этой волной. Нетрудно понять, что волны искомых резонансных триплетов находятся в точках пересечения дисперсионных ветвей на исходной и смещенной плоскости. Может оказаться, что выбранной волне соответствует два связанных резонансных триплета. Резонансные триплеты можно найти путем численного решения уравнений (6) при заданном волновом числе (или заданной частоте) одной из волн.

Для одномерной задачи типична ситуация, когда в резонансе с выбранной волной оказывается один или несколько триплетов. Для двумерных волновых систем (например, для волн на воде), дисперсионные ветви отображаются поверхностями  $\omega(k_x, k_y)$  и соответственно следует рассматривать пересечение основной и смещенной дисперсионных поверхностей в трехмерном пространстве. При этом одна волна находится в резонансе с континуумом волн, лежащих на линии пересечения дисперсионных поверхностей (подробнее см. литературу). Если пересечение поверхностей отсутствует, то говорят о «нераспадных» спектрах волн (т.к. в этом случае невозможна распадная неустойчивость, возникающая при трехволновых взаимодействиях).

### Волны и квазичастицы

Поскольку среда консервативна, для понимания свойств волновых взаимодействий полезно перейти к записи уравнений (14) через энергетические характеристики. Как показано в п. 3.1 выражение для плотности энергии волн в LC-линии с дисперсией имеет вид

$$W = \left( \frac{C}{L} \frac{d\omega L}{d\omega} + \frac{d\omega C}{d\omega} \right) |a|^2. \quad (15)$$

Введем понятие числа квазичастиц в волне по аналогии с формулой квантовой механики для энергии поля в многоуровневой системе  $W = \hbar\omega N$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $N$  – число заполнения энергетического уровня или число квазичастиц поля (формула приводится в случае больших чисел заполнения:  $N \gg 1$ ). Сделаем замену  $\hbar \rightarrow 1$  и формально определим число квазичастиц для каждой волны выражением

$$N = \left| \frac{W}{\omega} \right| \equiv q |a|^2 > 0. \quad (16)$$

где  $q > 0$  – положительный коэффициент пропорциональности. Используя выражение для

энергии (15) находим  $q_j = \left| \left( \frac{C}{L} \frac{d\omega L}{d\omega} + \frac{d\omega C}{d\omega} \right)_j \frac{1}{\omega_j} \right|$ . Заметим, что коэффициенты  $\sigma_j$  уравнений

(14) содержат  $D'_\omega = -(\omega^2 LC)'_\omega = -\omega C(\omega L)'_\omega - \omega L(\omega C)'_\omega$ . Это позволяет переписать уравнения (14) в виде

$$s_{1,2} q_{1,2} (\dot{a}_{1,2} + v_{1,2} a'_{1,2}) = \sigma a_{2,1}^* a_3, \quad (17)$$

$$s_3 q_3 (\dot{a}_3 + v_3 a'_3) = -\sigma^* a_1 a_2.$$

где  $s_j = \text{sign}(W/\omega)_j$ ,  $\sigma = -ib$ . Далее без ущерба общности будем считать частоты  $\omega_j$  в главной части разложения (5) положительными (данное условие всегда можно выполнить в силу свойств симметрии решений дисперсионного уравнения, рассмотренных в п. 1.1). В этом случае получим  $s_j = \text{sign}(W_j)$ , т.е.  $s_j = \pm 1$  – знак плотности энергии  $j$ -ой волны. Сама плотность энергии принимает вид  $W_j = s_j \omega_j N_j$ . Кроме того, при положительных частотах выполнено неравенство  $\omega_3 > \omega_{1,2}$ . Волну  $(\omega_3, k_3)$ , которая имеет наибольшую частоту, далее условимся называть «высокочастотной», а две другие – «низкочастотными».

Наконец, отметим, что в третьем уравнении коэффициент вместо одного общего коэффициента  $\sigma$ , записано  $-\sigma^*$ . Нетрудно показать, что такое представление является более общим. Сделаем в (17) замену  $a_j \rightarrow p\tilde{a}_j$ , где  $p$  – комплексный коэффициент (что

равносильно к переходу к новой нормировке «поляризационного» вектора). В первое и второе уравнения (17) для новых амплитуд  $\tilde{a}_j$  войдут коэффициенты:  $\tilde{\sigma} = \sigma p^*$  и  $\tilde{\sigma}^* = \sigma^* p$  соответственно. Таким образом, конфигурация коэффициентов в (17) не изменилась.

**Резонансное взаимодействие трех пространственно-однородных волн во времени. Соотношения Мэнли-Роу.** Рассмотрим взаимодействие во времени пространственно однородных волн ( $\partial a / \partial x = 0$ ). В этом случае система (17) сводится к уравнениям в обыкновенных производных по времени:

$$s_{1,2}q_{1,2} \frac{da_{1,2}}{dt} = \sigma a_{2,1}^* a_3, \quad s_3 q_3 \frac{da_3}{dt} = -\sigma^* a_1 a_2. \quad (18)$$

Какие процессы можно описать уравнениями (18)? Во-первых, это элементарный трехволновый процесс – взаимодействие трех пространственных гармоник, из которых строятся реальные возмущения (волновые пакеты). Во-вторых, это уравнения взаимодействия мод в кольцевом резонаторе либо в резонаторе с отражением от стенок при условии, что их частотный спектр достаточно разрежен. В-третьих, если рассмотреть стационарное (установившееся) взаимодействие волн в пространстве ( $\partial / \partial t = 0$ ), то при одинаковых знаках групповых скоростей уравнения (14) будут точно такими же как для взаимодействия однородных волн во времени (такую взаимозаменяемость уравнений называют пространственно-временной аналогией).

Умножим каждое из уравнений (18) на  $a_j^*$  и сложим результат с комплексно сопряженным выражением. Учитывая тождество  $a^*(da/dt) + a(da^*/dt) = d|a|^2/dt$  и определение (16) для «числа квазичастиц» в волне, получим

$$s_{1,2} \frac{dN_{1,2}}{dt} = \sigma a_2^* a_1^* a_3 + k.c., \quad s_3 \frac{dN_3}{dt} = -(\sigma^* a_2 a_1 a_3^* + k.c.). \quad (19)$$

Правые части этих уравнений отличаются знаком. Складывая и вычитая эти уравнения друг с другом "почленно", получим интегралы движения которые обычно называют соотношениями Мэнли-Роу:

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = Const_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = Const_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = Const_3 \quad (20)$$

Независимыми являются любые два из приведенных интегралов. Кроме того, с учетом условий резонанса (6) из (20) нетрудно получить интегралы

$$\begin{aligned} s_1 \omega_1 N_1 + s_2 \omega_2 N_2 + s_3 \omega_3 N_3 &= Const_4, \\ s_1 k_1 N_1 + s_2 k_2 N_2 + s_3 k_3 N_3 &= Const_5, \end{aligned} \quad (21)$$

которые являются законами сохранения энергии и импульса при резонанском взаимодействии трех волн. Отметим, что соотношения Мэнли-Роу можно вывести и для волновых пакетов, если считать поля волн локализованными в пространстве (или периодическими с произвольным периодом). Перепишем (19) с учетом производных по  $x$  и проинтегрируем полученные уравнения по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Если  $|a_j|^2 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , производные по  $x$  исчезают и после преобразований, аналогичных описанным выше, приходим к формулам (20), (21) для интегрального (суммарного) числа квазичастиц в волновых пакетах  $N_j^{(s)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N_j dx = \int_{-\infty}^{\infty} q_j |a_j|^2 dx$ . Таким образом, соотношения Мэнли–Роу остаются в силе для полного числа квазичастиц в волновых пакетах.

## Обобщение уравнений трехволнового взаимодействия.

**1. Операторный формализм для системы нелинейных уравнений.** Остановимся на выводе амплитудных уравнений для плоских волн из системы нелинейных уравнений вида

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = \varepsilon f(u, u_x, u_t), \quad (1)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $u$  – вектор-столбец  $(N, 1)$ . Предполагается, что  $f$  является квадратичной формой компонент вектора  $u$  и его производных ( $f = u M u^T + u N u^T + \dots$ , где  $M, N, \dots$  – матрицы,  $T$  – знак транспонирования). Система (1) является обобщением системы линейных уравнений, рассмотренной в п. 1.1. Следуя операторному формализму, перейдем в (1) к операторам, заменяющим частные производные  $\hat{\omega} = i\partial/\partial t$  и  $\hat{k} = -i\partial/\partial x$ . Обращаясь с операторами  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  как с числами, а с компонентами вектора нелинейности  $f_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) – как с известными функциями  $x$  и  $t$ , получим неоднородную линейную систему алгебраических уравнений. Выделим в ней какое-нибудь одно уравнение, которое обозначим Eq1. Разрешая оставшуюся систему  $N-1$  уравнений относительно компонент  $u_m$  с номерами  $m \geq 2$  (например, методом исключения), выразим  $u_m$  через  $u_1$  и  $f_l$ :

$$u_m = \psi_m(\hat{\omega}, \hat{k}) u_1 + \sum_{l=1}^{N-1} \varepsilon S_{ml}(\hat{\omega}, \hat{k}) f_l, \quad (2)$$

где  $m = 2, \dots, N$ ,  $\psi_m(\hat{\omega}, \hat{k})$ ,  $S_{ml}(\hat{\omega}, \hat{k})$  – коэффициенты. Подставляя (2) в уравнение Eq1, получим связь переменной  $u_1$  с компонентами вектора  $f_l$ :

$$D(\hat{\omega}, \hat{k}) u_1 = \sum_{l=1}^N \varepsilon K_l(\hat{\omega}, \hat{k}) f_l, \quad (3)$$

где  $D(\hat{\omega}, \hat{k})$ ,  $K_l(\hat{\omega}, \hat{k})$  – коэффициенты. Очевидно, что  $D(\omega, k) = 0$  является дисперсионным уравнением линейной задачи. Заметим, что выбор в качестве «особой» переменной  $u_1$  не является ограничением общности, так как через  $u_1$  можно обозначить любую физическую переменную. В электродинамике плазмы в качестве  $u_1$  обычно выбирается электрическое поле, а в качестве Eq1 – уравнение Пуассона или первое уравнение Максвела.

Решение системы уравнений (3) + (2), эквивалентной исходной системе (1), ищем методом Боголюбова-Митропольского с главной частью в виде суперпозиции трех взаимодействующих волн:

$$u_1 = \sum_{j=1}^3 a_j(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t} + k.c. + \varepsilon u_1^{(1)} + \dots \quad (4)$$

$$u_m = \sum_{j=1}^3 a_j(\tau, \chi) \psi_{mj} e^{ik_j x - i\omega_j t} + k.c. + \varepsilon u_m^{(1)} + \dots \quad (m = 2, 3, \dots, n) \quad (5)$$

где  $D(\omega_j, k_j) = 0$ ,  $\psi_{mj} = \psi_m(k_j, \omega_j)$  –  $m$ -ая компонента собственного вектора линейной задачи, порождаемой системой (3) + (2). Предполагается, что частоты  $\omega_j$  и волновые числа  $k_j$  связаны условиями трехволнового резонанса (см. п. 3.1). Запись решения для  $u_1$  в форме (4) соответствует нормировке  $\psi_1 = 1$ . Дальнейшие действия принципиально не отличаются от производившихся в п. 3.1 при решении одного уравнения. После подстановки (4), (5) в (3) и (2) в основном порядке по  $\varepsilon$  получим тождества, так как  $\psi_{mj}$  есть решение линейной задачи для собственных волн с волновым числом  $k_j$  и частотой  $\omega_j$ . Используя правило действия операторной функции на квазимохроматическое поле (п. 2.1), в пер-

вом порядке по  $\varepsilon$  из уравнения (3) получим уравнение для комплексных амплитуд резонансных гармоник добавки  $u_1^{(1)}$ :

$$D(\omega_j, k_j) \left( u_1^{(1)} \right)_j = \sum_{l=1}^N K_l(\omega_j, k_j) \left( f_l^{(0)} \right)_j - i D'_{\omega_j} \frac{\partial a_j}{\partial \tau} + i D'_{k_j} \frac{\partial a_j}{\partial \chi}, \quad (6)$$

где  $D(\omega_j, k_j) = 0$ . В комплексные амплитуды  $\left( f_l^{(0)} \right)_j$  войдут компоненты вектора  $u$  из главных частей разложений (4), (5). При этом в  $\left( f_l^{(0)} \right)_j$  дадут вклад только комбинационные гармоники, удовлетворяющие условиям трехволнового резонанса (например, при  $j=1$ , это гармоника с частотой  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$  и волновым числом  $k_1 = k_3 - k_2$ , амплитуда которой  $\left( f_l^{(0)} \right)_1 \sim a_2^* a_3$ ). Отметим, что при наложении условия ограниченности для одной первой добавки нет необходимости заменять  $\partial a_j / \partial \tau$  функцией  $F_j^{(1)}$ . Условие разрешимости для уравнения (6) сводится к обращению его правой части в ноль, что приводит к уравнениям для комплексных амплитуд волн в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial \tau} + v_{gj} \frac{\partial a_j}{\partial \chi} = \left( i D'_{\omega_j} \right)^{-1} \sum_{l=1}^n K_l(\omega_j, k_j) \left( f_l^{(0)} \right)_j \quad (7)$$

где  $v_{gj} = -\left( D'_k / D'_{\omega_j} \right)_j$  – групповая скорость  $j$ -ой волны.

После наложения условия ограниченности  $\left( u_1^{(1)} \right)_j$  решение уравнения (6) принимает вид  $\left( u_1^{(1)} \right)_j = C(\tau, \chi)$ , где  $C$  – произвольная функция  $\tau, \chi$ , которую без ущерба общности можно принять равной нулю (последнее означает, что  $a_j(\tau, \chi)$  есть полная амплитуда  $j$ -ой гармоники переменной  $u_1$ ). Нерезонансные гармоники  $u_1^{(1)}$ , для которых дисперсионная функция  $D(\omega_j, k_j) \neq 0$ , остаются величинами «порядка единицы». Они находятся в явном виде и дают вклад в (4) порядка  $\varepsilon$ . Условие ограниченности на компоненты добавки  $u_m^{(1)}$  с номерами  $m \geq 2$  налагать не надо, так как в соответствии с (2) они в первом порядке по  $\varepsilon$  выражаются через  $u_1^{(1)}$  и нелинейные члены. Добавки в разложениях (4), (5), как правило, не вычисляют, так как основной целью является вывод амплитудных уравнений (7).

**2. Учет слабого поглощения (усиления) волн и расстройки частот волн от резонанса.** Остановимся на обобщении уравнений резонансного взаимодействия волн, полученных в п. 3.1, на случай неконсервативной среды. Допустим, что в линейном приближении имеется слабое затухание или усиление волн, а условия трехволнового резонанса частот выполнены неточно:

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \quad (8)$$

где  $\Delta\omega$  – малая расстройка частот волн от резонанса. Тогда уравнения резонансного трехволнового взаимодействия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_{g1} \frac{\partial a_1}{\partial \chi} &= \sigma_1 a_2^* a_3 e^{i\Delta\omega t} - \gamma_1 a_1, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_{g2} \frac{\partial a_2}{\partial \chi} &= \sigma_2 a_1^* a_3 e^{i\Delta\omega t} - \gamma_2 a_2, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_{g3} \frac{\partial a_3}{\partial \chi} &= \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} - \gamma_3 a_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\sigma_j$  – коэффициенты взаимодействия. Если описание диссипации сводится к добавлению в уравнения движения среды малых линейных членов, коэффициенты  $\sigma_j$  будут таки-

ми же, как консервативной среде. В этом случае их можно выразить через параметры  $q_j$  и  $\sigma$ , введенные в п. 3.1:  $\sigma_{1,2} = s_{1,2}\sigma/q_{1,2}$ ,  $\sigma_3 = -s_3\sigma^*/q_3$ , что налагает ограничения на связи между  $\sigma_j$ .

В уравнения (9) вошли экспоненты  $\sim \exp(i\Delta\omega t)$ , которые при малом  $\Delta\omega$  являются медленно меняющимися осциллирующим функциями и не нарушают процедуру вывода амплитудных уравнений. Расстройки от резонанса уменьшают эффективность нелинейной связи волн. Чтобы проверить, правильно ли записаны показатели экспонент  $\exp(i\Delta\omega t)$ , достаточно восстановить при амплитудах в уравнениях (9) экспоненциальные множители  $\exp(ik_jx - i\omega_jt)$ , которые «выпали» при выводе укороченных уравнений. Например, в правой части первого уравнения после этого появится  $\exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t] = \exp(i\Delta\omega t)$ .

**Учет малого «линейного» затухания и нарастания волн.** Можно предложить несколько способов определения малого затухания или нарастания взаимодействующих волн в уравнениях (9).

1) Допустим, что амплитуды очень малы ( $a_j \rightarrow 0$ ) и нелинейными членами в (9) можно пренебречь (переход к линейной задаче). Тогда, предполагая поля волн в (9) однородными ( $\partial a_j / \partial x = 0$ ), получим уравнение  $da_j / dt = -\gamma_j a_j$ . Его решение имеет вид  $a_j = Const \cdot \exp(-\gamma_j t)$  и должно совпадать с решением линейной задачи с гармоническими начальными условиями, рассмотренным в п. 1.1. Отсюда имеем  $\gamma_j = -\text{Im } \omega(k_j)$ , т.е. декремент затухания  $\gamma_j$  есть мнимая часть частоты собственных волн со знаком минус. Ее можно найти, решая дисперсионное уравнение методом возмущений по малым потерям как это делалось в п. 1.2, 2.1.

2) Систему уравнений (9) можно вывести напрямую, обобщая процедуру, изложенную выше для консервативной задачи, на случай среды с малыми потерями. Допустим, что диссипативные члены (например, электрон-ионные столкновения в плазме) приводят к комплексному дисперсионному уравнению с малой мнимой частью. Тогда им также можно «присвоить» порядок  $\varepsilon$ , полагая  $D(\omega, k) = D_r + iD_i \equiv D_r + i\varepsilon\bar{D}_i = 0$  и учитывая член  $\varepsilon\bar{D}_i$  при выводе (9) в порядке  $\varepsilon$ . Главную часть решения (4) представим в виде  $u = \sum_j a_j(\tau, \chi) \exp(ik_jx - i\omega_j^{(0)}t) + \text{к.с.}$ , где  $\omega_j^{(0)}$  – вещественные частоты волн в отсутствие потерь, которые удовлетворяют уравнению  $D_r(\omega_j^{(0)}, k_j) = 0$ . В «нулевом порядке» по  $\varepsilon$  из первого уравнения (3) получаем тождество  $D_r(\omega_j^{(0)}, k_j)a_j = 0$ . В порядке  $\varepsilon$  приходим к уравнениям (7) и (9), в которых появляется декремент затухания  $\gamma_j = \varepsilon \text{Im } \bar{D}(\omega_j, k_j) / (D'_\omega)_j \approx -\text{Im } \omega_j$  (вывод этого соотношения см. в п. 2.1).

3) В некоторых задачах бывает невозможно выделить в отдельную группу члены, ответственные за линейную неустойчивость или потери, хотя численно  $\text{Im } \omega(k)$  мало. В этой ситуации можно предложить формальный прием. Главную часть решения (4) представим в виде  $u = \sum_j a_j(\tau, \chi) \exp(ik_jx - i\omega_{rj}t) + \text{к.с.}$ , где  $\omega_{rj}$  – вещественная часть частоты  $j$ -ой волны в линейной неконсервативной задаче, в которой  $D(\text{Re } \omega_j + i \text{Im } \omega_j, k_j) = 0$ . При разделении порядков величин в первом уравнении (3) порядке «единица» общего разложения получим слагаемое  $D(\omega_{rj}, k_j)a_j$ , которое не является строго равным нулю. Чтобы перейти к стандартной процедуре, добавим и вычтем функцию  $D$  с полными (комплексными) частотами:

$$D(\omega_{rj}, k_j) a_j \equiv \underbrace{D(\omega_{rj} + i \operatorname{Im} \omega_j, k_j) a_j}_{=0} + \underbrace{[D(\omega_{rj}, k_j) - D(\omega_{rj} + i \operatorname{Im} \omega_j, k_j)] a_j}_{=\phi \sim \varepsilon} \quad (10)$$

Теперь первый член в (10) строго равен нулю. Его учтем в порядке «единица». Поскольку мнимая часть частоты мала ( $\operatorname{Im} \omega \sim \varepsilon$ ), разность  $\phi$  в квадратных скобках тоже мала и может быть учтена в порядке  $\varepsilon$ . Производя разложение функции  $\phi$  в ряд по малому  $\operatorname{Im} \omega$  и ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$ , получим

$$\phi \approx -(\partial D / \partial \omega)_j (\operatorname{Im} \omega_j) a_j \sim \varepsilon. \quad (11)$$

Повторяя процедуру вывода амплитудных уравнений с этим членом в порядке  $\varepsilon$ , приходим к уравнениям (9), в которых  $\gamma_j = -\operatorname{Im} \omega_j$ .

4) Наконец, остановимся еще на одном, наиболее «старом», способе учета поглощения или усиления волн в укороченных уравнениях. Запишем главную часть решения в виде суммы волн с полными комплексными частотами  $u = \sum_j \tilde{a}_j(\tau, \chi) \exp(ik_j x - i\omega_j t) + \text{к.с.}$ , где

«полные» комплексные частоты  $\omega_j = \omega_{rj} + i \operatorname{Im} \omega_j$  находятся из решения линейной задачи.

При малых  $\operatorname{Im} \omega_j \sim \varepsilon$  экспоненты в этом решении являются медленно меняющимися функциями, т.е. процедура вывода амплитудных уравнений при таком поиске решения не Повторяя эту процедуру сенной формой главной части решения, получим для комплексных амплитуд  $\tilde{a}_j(\tau, \chi)$  систему (9), в которой не будет членов  $-\gamma_j a_j$ . Однако после возвращения к «обычным» амплитудам путем замены  $a_j = \tilde{a}_j(\tau, \chi) \exp(\operatorname{Im} \omega_j t)$  (после чего в главной части решения остаются только вещественные частоты) получим для  $a_j$  уравнения (9).

**3. Матричная форма вывода укороченных уравнений.** Остановимся на варианте вывода амплитудных уравнений, который не связан с применением операторного формализма. Снова будем исходить из матричной записи исходных уравнений

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = \varepsilon f(u, u_x, u_t), \quad (12)$$

Решение ищем в виде разложения по малому параметру с главной частью в виде суперпозиции трех волн с медленно меняющимися амплитудами:

$$u = \sum_{j=1}^3 a_j(\tau, \chi) \psi_j e^{ik_j x - i\omega_j t} + \text{k.с.} + \varepsilon u^{(1)} + \dots, \quad (13)$$

где  $\psi_j$  поляризационный вектор для волны  $(\omega_j, k_j)$ . Предполагается, что волны удовлетворяют условиям резонанса  $k_1 + k_2 = k_3$ ,  $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  – малая расстройка от резонанса. Разделим дифференцирование по быстрому и медленному времени с помощью формулы

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (14)$$

где производная по  $t$  в (14), взятая в скобки, берется только по явно входящему времени, которое стоит в показателях экспонент и описывает быстрые изменения  $u$ . Считая  $\omega(k_j)$  вещественными, подставим (13) в (12). В нулевом порядке разложения по  $\varepsilon$  имеем тождество

$$(-i\omega_j A + ik_j B + C) \psi_j a_j = 0 \quad (15)$$

( $j = 1 \div 3$  – номер волны). В первом приближении получим неоднородную задачу для комплексной амплитуды первой добавки

$$(-i\omega_j A + ik_j B + C)\hat{u}_j^{(1)} = Q_j. \quad (16)$$

Для резонансных гармоник добавки ( $D(\omega_j, k_j) = 0$ ) вектор  $Q_j$  имеет вид

$$Q_j = -A\psi_j \frac{\partial a_j}{\partial \tau} - B\psi_j \frac{\partial a_j}{\partial x} + \hat{f}_j^{(0)}, \quad (17)$$

где  $\hat{f}_j^{(0)} = \langle f^{(0)} \exp(-ik_j x + i\omega_j t) \rangle$  – амплитуда  $j$ -ой гармоники разложения Фурье вектора нелинейных членов, скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по  $x$  и  $t$ , которое сводится к изъятию быстро осциллирующих членов из суммы гармоник в скобках. При этом в рамках в главного приближения в  $f$  следует подставить главную часть решения (13), а входящие в  $f$  производные берутся только по быстрому времени. Определитель системы (16) равен нулю и ее решение не существует (бесконечно велико). Можно показать, что для существования ограниченного решения необходимо и достаточно, чтобы правая часть системы (16) удовлетворяла условию ортогональности  $(\zeta_j, Q_j) = 0$ , где  $\zeta_j$  – собственные вектора сопряженной задачи, которые удовлетворяют системе уравнений  $(-i\omega_j A + ik_j B + C)^T \zeta_j = 0$  (верхний индекс "T" означает транспонирование матрицы). Очевидно, что определитель транспонированной матрицы тоже равен нулю. Чтобы показать достаточность данного условия, умножим обе части (16) на  $\zeta_j$  слева. Тогда в силу свойств произведения матриц (проверяется в индексной записи), получим

$$\zeta_j (-i\omega_j A + ik_j B + C) \hat{u}_j^{(1)} = \left[ (-i\omega_j A + ik_j B + C)^T \zeta_j \right] \hat{u}_j^{(1)} = 0. \quad (18)$$

Равенство нулю в (18) достигается при условии, что решение  $|u_k^{(1)}|$  ограничено ( $|u_k^{(1)}| < \infty$ ), так как в этом случае вектор в квадратных скобках равен нулю в соответствии с уравнением для  $\zeta_j$ . В результате получаем записанное выше условие ортогональности, из которого следуют уравнения первого приближения для комплексных амплитуд

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_{gi} \frac{\partial a_j}{\partial x} = \frac{\varepsilon(\zeta_j, \hat{f}_j)}{(\zeta_j, A\psi_j)}. \quad (19)$$

Выражение для  $\hat{f}_j$  в случае квадратичной нелинейности раскрываются так же, как это делалось в п. 3.1 и сказано в пояснениях к (7). Система укороченных уравнений для огибающих волн принимает вид (9). В данном случае сомножители типа производных  $\partial \varepsilon_{||} / \partial \omega$  не возникают в явном виде и их наличие требует специального подтверждения.

**4. Нелинейное взаимодействие волновых пакетов произвольной ширины.** Уравнения (9) описывают взаимодействие плоских модулированных волн, которые на спектральном языке являются узкими волновыми пакетами по волновым числам и частотам. Получим теперь уравнения резонансного взаимодействия без ограничения на ширину волновых пакетов. Снова ограничимся рассмотрением одномерных плоских волны в однородной стационарной среде. Обобщение на неодномерные плоские волны в данном случае не вызывает затруднений. Процедура вывода укороченных уравнений строится как обобщение любой из приведенных выше схем вывода уравнений для амплитуд узких волновых пакетов. Для краткости будем рассмотрим уравнение с одной неизвестной, как это делалось в п. 3.1. Решение ищем в виде разложения по малому параметру с главной частью в виде широкого волнового пакета, в котором амплитуды собственных волн являются медленно меняющимися функциями времени:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(\tau) e^{ikx-i\omega(k)t} dk + \varepsilon u^{(1)}(x, t, \tau) + \dots, \quad (20)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  – медленное время,  $a_k$  – спектральная плотность амплитуды собственных волн. Для определенности будем считать нелинейность *квадратичной*. Предполагается, что все волны в главной части решения (20) находятся в полосе прозрачности среды, т.е.  $\omega(k)$  – вещественное. В (20) используется форма записи решения линейной задачи, в которой для частот выполняются условия  $\omega(k) = -\omega(-k)$  и  $a_k = a_{-k}^*$  (в этом случае решение вещественное – см. п. 1.1). Для простоты записи взята одномерная волновая система. Отметим, что в (20) отсутствует зависимость амплитуд от медленной координаты, так как пространственная зависимость поля  $u$ , вообще говоря, не является медленной функцией и представлена в виде разложения Фурье по гармоникам  $\exp(ikx)$  с широким спектром волновых чисел. Поскольку интеграл является аналогом суммы, маркер  $k$  возле  $a_k$  можно рассматривать как аналог номера гармоники. Снова будем считать «быстрым» время, входящее в быстро осциллирующие экспоненты, и «медленным» – время, входящее в медленно меняющиеся комплексные амплитуды гармоник. Подставляя в уравнение (20) в уравнение (4) из п. 3.1, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega_k, k') \hat{u}_k^{(1)}(\tau) e^{ik'x-i\omega(k')t} dk' &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} iD'_\omega(k') \frac{\partial a_{k'}}{\partial \tau} e^{ik'x-i\omega(k')t} dk' + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} P_{k', k''} a_{k'} a_{k''} e^{i(k'+k'')\bar{x}-i[\omega(k')+ \omega(k'')]t} dk' dk'', \end{aligned} \quad (21)$$

где  $P_{k', k''}$  – коэффициент. При переходе к (21) добавка  $u^{(1)}(x, t, \tau)$  в разложении (20) представлена в виде, аналогичном главной части разложения (20), т.е в виде суперпозиции собственных волн. Чтобы выделить амплитудный фактор в левой части (21), умножим правую и левую части уравнения (21) на  $\exp(-ikx+i\omega_k t)$  и проинтегрируем результат по  $x$  в бесконечных пределах. Вычисляя интегралы с помощью известного представления для дельта-функции Дирака  $\delta(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dx$ , получим

$$D(\omega_k, k) \hat{u}_k^{(1)}(\tau) = -iD'_\omega(k) \frac{\partial a_k}{\partial \tau} + \int_{-\infty}^{\infty} P_{k', k''} a_{k'} a_{k''} e^{-i[\omega(k')+\omega(k'')-\omega(k)]t} \delta(k'+k''-k) d\vec{k}' d\vec{k}'' \equiv Q(k) \quad (22)$$

Из (22) можно видеть, что интеграл имеет медленно меняющуюся составляющую, которую дают гармоники пакета, удовлетворяющие условиям пространственно-временного резонанса

$$k = k' + k'', \quad \omega(k') + \omega(k'') - \omega(k) \approx 0. \quad (23)$$

Первое из условий (23) выполняется благодаря присутствию под интегралом  $\delta$ -функции и задает связь волновых чисел гармоник  $k'$  и  $k''$ , порождающих гармонику с волновым числом  $k$ , для которой ищется добавка и будет получено амплитудное уравнение (фактически дельта-функция производит отбор гармоник по волновым числам). Второе условие означает, что расстройка частот волн от резонанса мала:  $|\omega(k') + \omega(k'') - \omega(k)| \ll |\omega(k)|$ . В этом случае экспонента в (22) медленно зависит от времени. Возможность выполнения второго условия одновременно с первым зависит от вида дисперсии. Если сохранить только вклад гармоник, дающих медленную составляющую интеграла в (22), то  $\hat{u}_k^{(1)}$  будет медленной функцией времени. Поскольку в левой части (22)  $D = 0$ , условие ограниченности  $\hat{u}_k^{(1)}$  принимает вид  $Q = 0$ . Отсюда получается уравнение для амплитуд гармоник волнового пакета:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_{k,k',k''} a_{k'} a_{k''} e^{-i[\omega(k') + \omega(k'') - \omega(k)]t} \delta(k' + k'' - k) dk' dk'', \quad (24)$$

где  $V_{k,k',k''} = -i\varepsilon P_{kk''} / D'_\omega(k)$  – так называемый матричный коэффициент взаимодействия волн (в (24) мы перешли к общему времени). Уравнение (24) определяет закон изменения  $a_k$ , при котором первая добавка в (20) остается малой (двуухчленное разложение (20) является равномерно пригодным). Заметим, что уравнений для широких волновых пакетов (24) как частный случай выводятся уравнения для медленно меняющихся амплитуд (узких волновых пакетов).

Строго говоря, в соответствии с изложенной выше процедурой в (24) должно стоять интегрирование по области волновых чисел, дающих малые расстройки частот от резонанса. Однако в (24) сохранено интегрирование по всем волновым числам. Какие для этого имеются основания? В интеграле (22) кроме медленно меняющейся части присутствует быстро осциллирующая составляющая, которую дают гармоник с частотами, далекими от резонанса:  $|\omega(k') + \omega(k'') - \omega(k)| \sim \omega(k)$ . Поэтому к (22) следовало бы добавить уравнение для быстро осциллирующей части амплитуды добавки  $(\hat{u}_{k'}^{(1)}(t))_{osc}$ , которая остается малой, так как ее частоты не обнуляют функцию  $D(\hat{\omega}, \hat{k})$ . Однако разделение быстрой и медленной составляющих интеграла (24) на практике маловероятно, так как очень сложно найти границу области резонансных и нерезонансных гармоник в пространстве  $k', k''$ . Поэтому в уравнении (24) оставляют интегрирование по всем  $k', k''$ , включая те, для которых условия резонанса не выполнены. Сохранение осциллирующей во времени части интеграла приводит к тому, что решение  $a_k(t)$  уравнения (24) наряду с медленным изменением (с характерным временем  $\sim 1/\varepsilon$ ) будет содержать быстроменяющуюся компоненту  $(a_k(t))_{osc}$ . Можно предположить, что эта быстро осциллирующая часть решения будет мала по сравнению с «медленной», так как производная от нее по времени в левой части (24) сводится к делению на большую частоту. Фактически на фоне медленных больших изменений амплитуд появляется мелкомасштабное «дрожание». Ввиду малой величины этого «дрожания» его влияние на медленную составляющую интеграла в (24), скорее всего, будет незначительным.

Полученное уравнение легко обобщить на произвольное число дисперсионных ветвей (появится двойная сумма по дисперсионным ветвям) и на неодномерные волны (необходимо ввести волновые вектора и учесть множитель  $(2\pi)^d$  там, где он нужен). Используя присутствие дельта-функции, в интеграле (24) можно выполнить одно интегрирование, например, по  $k''$ . Это приводит к новой форме уравнения (24), в которой явно учтены условия резонанса по волновым числам:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_{k,k'} a_{k'} a_{k-k'} e^{-i[\omega(k') + \omega(k-k') - \omega(k)]t} dk' \quad (25)$$

Представление (25) предпочтительно, например, при численном решении задачи.

Отметим еще одну форму уравнения для волновых пакетов, которая также встречается в литературе. Перейдем в (20) от амплитуд собственных волн к амплитудам пространственных гармоник

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(\tau) e^{ikx - i\omega(k)t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(\tau, t) e^{ikx} dk. \quad (26)$$

где  $u_k(\tau, t) = a_k(\tau) e^{-i\omega(k)t}$  – комплексные амплитуды пространственных гармоник. Соответственно уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\omega_k u_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_{k,k',k''} u_{k'} u_{k''} \delta(k' + k'' - k) dk' dk' \quad (27)$$

Видно, что в линейном приближении каждая пространственная гармоника имеет собственную частоту  $\omega_k$ . Нелинейный член в (27) дает малую добавку к этой частоте, что соответствует классу решений с медленно меняющимися амплитудами гармоник во времени. Представление (27) наиболее полезно, когда частота  $\omega_k$  сама является малой величиной (порядка нелинейности).

### **Что такое волновая турбулентность?**

Уравнения для широких волновых пакетов в средах с малой нелинейностью лежат в основе теории волновой турбулентности, наглядным примером которой являются гравитационно-капиллярные волны, наблюдаемые на поверхности воды. Описание волновой турбулентности основывается на предположении, что в широких волновых пакетах из-за участия каждой волны в большом числе взаимодействий распределение фаз волн становится случайным (гипотеза хаотических фаз). В приближении хаотических фаз волн из уравнений для широких волновых пакетов можно получить кинетические уравнения для волн, которые описывают эволюцию их спектральной интенсивности во времени. Важную роль играют стационарные (установившиеся) распределения спектральной интенсивности волн. В случае волновых систем со степенным законом дисперсии, не имеющих собственного масштаба длины (УК которым относятся гравитационные волны на воде) получены точные решения в виде стационарных степенных спектров по волновым числам. Степенные спектры порождают поток энергии по спектру волновых чисел из области «подкачки» в область поглощения (диссиляции энергии). Например, в случае волн на воде подкачка определяется ветровой неустойчивостью, а поглощение – силами трения, которые резко возрастают при больших значениях волнового числа (малых длин волн). Степенные спектры турбулентности используются для расчета усредненных параметров взволнованной поверхности воды и ее влияния на климатические процессы.

## ТРЕХВОЛНОВОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОНСЕРВАТИВНЫХ РАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

Исследование резонансных трехволновых взаимодействий в равновесных средах имеет фундаментальное значение. Напомним, что мы условились считать частоты волн положительными и в соответствии с условием резонанса частот  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  называть волны  $\omega_{1,2}$  низкочастотными, а волну  $\omega_3$  – высокочастотной. С учетом того, что в равновесной среде энергия волн положительна ( $s_j = +1 > 0$ ), общие соотношения Мэнли-Роу (см. п.4.1) принимают следующий вид

$$N_1 + N_3 = Const_1, \quad N_2 + N_3 = Const_2, \quad N_1 - N_2 = Const_3. \quad (1)$$

( $N_j = q_j |a_j|^2 > 0$  – число квазичастиц в волне – см. п. 3.1). Допустим, что в процессе взаимодействия за время  $\Delta t$  число квантов одной из низкочастотных (НЧ) волн, например,  $a_1$  увеличилось на  $\Delta N$ . Тогда из (1) следует, что число квантов другой НЧ волны  $a_2$  тоже увеличилось на  $\Delta N$ , а число квантов высокочастотной волны уменьшилось на  $\Delta N$ . Другими словами, процесс протекает так, как будто произошло  $\Delta N$  элементарных актов распада квазичастиц  $\omega_3$  с рождением квазичастиц  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в каждом из которых выполнен закон сохранения энергии и импульса. Роль законов сохранения в элементарных актах взаимодействия выполняют условия резонанса для частот и волновых чисел (п. 3.1). Возможен и обратный процесс – слияние квазичастиц  $\omega_{1,2}$  с рождением  $\omega_3$ . Оба процесса иллюстрируются диаграммами на рис. 1. Любые другие преобразования волн запрещены законами сохранения (1).

Уравнения трехволнового резонансного взаимодействия в квадратичной среде имеют вид (см. п. 3.1)

$$\dot{a}_{1,2} + v_{1,2} a'_{1,2} = \sigma_{1,2} a_{2,1}^* a_3, \quad \dot{a}_3 + v_3 a' = \sigma_3 a_1 a_2. \quad (2)$$

где коэффициенты взаимодействия волн  $\sigma_{1,2} = \sigma / q_{1,2}$ ,  $\sigma_3 = -\sigma^* / q_3$  (п. 3.1). Эти выражения для коэффициентов  $\sigma_j$  означают, что связь между ними не произвольна. В случае пространственно – однородных волн ( $a'_j = 0$ ) уравнения (2) принимают вид

$$\dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad (3)$$

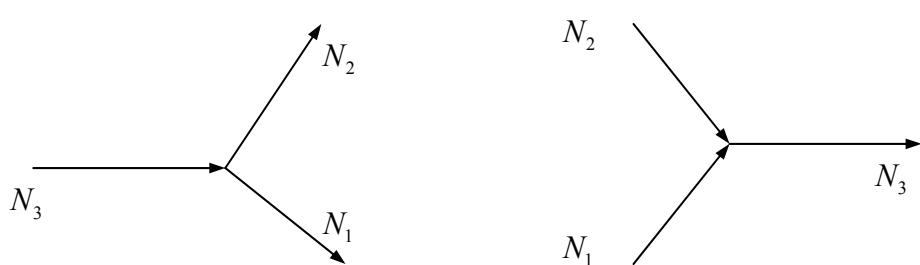


Рис. 2 Диаграммы трехволнового взаимодействия в равновесных средах

**Распадная неустойчивость высокочастотной волны.** Допустим, что в начальный момент имеется интенсивная высокочастотная волна и слабые низкочастотные:  $N_3(0) \gg N_{1,2}(0)$ . Найдем решение (3), считая амплитуду сильной волны постоянной (иногда это называют приближением заданного поля):

$$\dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_{30}, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad a_3 = a_{30} = \text{const}. \quad (4)$$

Система уравнений (4) является линейной и сводится к одному уравнению второго порядка:

$$a_2 = \frac{da_1^*/dt}{\sigma_1 a_{30}}, \quad \frac{d^2 a_1}{dt^2} - \Gamma_0^2 a_1 = 0, \quad \Gamma_0^2 = \sigma_1 \sigma_2^* |a_{30}|^2 = |\sigma|^2 / (q_1 q_2) > 0. \quad (5)$$

Подстановка указанных выше выражений для коэффициентов  $\sigma_j$  в формулу для  $\Gamma_0^2$  показывает, что  $\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2^*} |a_{30}|$  – вещественная величина (для определенности положим  $\Gamma_0 > 0$ ). Тогда решение (5) с начальными условиями  $a_1(0) \neq 0, a_2(0) = 0$  принимает вид

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(0) \operatorname{ch}(\Gamma_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} a_1(0) \exp(\Gamma_0 t), \\ a_2^* &= a_1(0) \frac{\Gamma_0}{\sigma_1 a_{30}} \operatorname{sh}(\Gamma_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} a_1(0) \frac{\Gamma_0}{\sigma_1 a_{30}} \exp(\Gamma_0 t). \end{aligned} \quad (6)$$

На временах  $t > \Gamma_0^{-1}$  происходит экспоненциальное нарастание двух слабых волн, из-за чего процесс был назван *распадной неустойчивостью*. Действуя в духе метода возмущений после подстановки (6) в правую часть первого уравнения (3), можно найти поправку к амплитуде сильной волны

$$a_3 = a_{30} + \int_0^t \sigma_3 a_1 a_2 dt = a_{30} \left[ 1 + \frac{\Gamma_0 \sigma_3}{2 \sigma_1^* |a_{30}|^2} |a_1(0)|^2 \operatorname{sh}^2(t) \right]. \quad (7)$$

Коэффициент при  $\operatorname{sh}^2(t)$  в формуле (7) отрицателен, так как  $\sigma_3 / \sigma_1^* = -q_3 / q_1 < 0$ . Таким образом,  $|a_3|$  убывает, что согласуется с соотношениями Мэнли-Роу. Поскольку распространение сильной волны приводит к волновым возмущениям параметров среды (электронной плотности, скорости, давления и т.п.), эту неустойчивость можно назвать также параметрической (заметим, что понятие параметрической неустойчивости имеет более широкий смысл, так как изменение параметров среды может быть связано, например, с присутствием однородных внешних полей, которые не являются собственными волнами).

**«Нераспадность» низкочастотных волн.** Пусть теперь в начальный момент имеется интенсивная НЧ-волну, например,  $N_2(0) \gg N_{1,3}(0)$ . В приближении заданного поля  $a_2 = a_{20} = \text{const}$  получим из (4) пару линейных уравнений

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_{20}^* a_3, \quad \dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_{20}. \quad (8)$$

Решение (8) с начальными условиями  $a_1(0) \neq 0, a_3(0) = 0$  принимает вид

$$a_1 = a_1(0) \cos(\Omega_0 t), \quad a_3 = -\frac{\Omega_0 a_1(0)}{\sigma_1 a_{20}^*} \sin(\Omega_0 t), \quad (9)$$

где  $\Omega_0^2 = -\sigma_1 \sigma_3$ . В соответствии с указанными выше представлениями коэффициентов  $\sigma_j$  в консервативной среде  $\Omega_0^2 > 0$ , т.е.  $\Omega_0$  – вещественная величина. Таким образом, волны  $a_{1,3}$  остаются слабыми и осциллируют во времени. Действуя в духе метода возмущений, можно найти поправку к амплитуде сильной волны  $a_2$ :

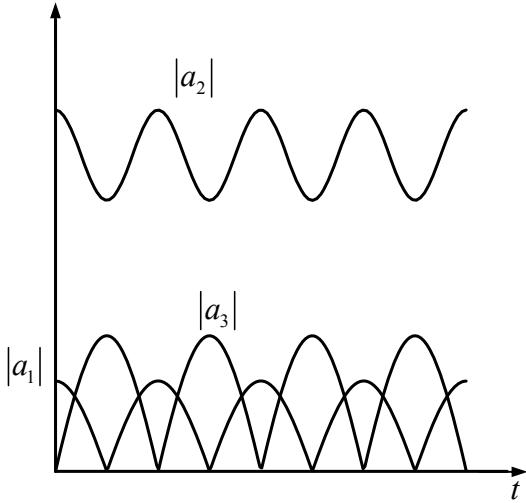


Рис. 2 «Нераспадность» низкочастотной волны в равновесной среде без потерь. Направление изменения амплитуд волн на каждой полуволне их биений соответствует диаграммам на рис. 1. Большая амплитуда  $|a_2|$  претерпевает малые осцилляции, вызванные малыми колебаниями  $|a_1|$  и  $|a_3|$ . Рост  $|a_1|$  прекращается на малом уровне, поскольку после обращения  $|a_3|$  в ноль интегралы (1) допускают только рост  $|a_3|$  и уменьшение  $|a_1|$ .

$$a_2 = a_{20} + \int_0^t \sigma_2 a_1^* a_3 dt = a_{20} \left[ 1 - \frac{\sigma_2 |a_1(0)|^2}{2\sigma_1 |a_{20}|^2} \sin^2(\Omega_0 t) \right]. \quad (10)$$

Поскольку в силу свойств коэффициентов взаимодействия в консервативной равновесной среде  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$ , коэффициент при  $\sin^2(\Omega_0 t)$  в (10) отрицателен. Поведение амплитуд всех волн показано на рис. 2. Полученный результат легко понять на «языке квазичастиц», т.е. используя соотношения Мэнли-Роу. На рис. 2 сначала происходит рождение квантов ВЧ-волны за счет уменьшения числа «квантов» НЧ-волн  $a_{1,2}$ . Но, поскольку квантов НЧ-волны  $N_1$  мало, этот процесс быстро прекращается и начинается обратный процесс распада высокочастотной волны с рождением квазичастиц  $N_1$ , который тоже быстро заканчивается в силу малого числа «квантов» волны  $a_3$ . В результате амплитуды волн  $a_{1,3}$  слабо осциллируют (на уровне начальных условий), т.е. в процессе взаимодействия волн не происходит их существенных изменений. Таким образом, распадная неустойчивость НЧ-волн в равновесной среде невозможна или, что то же самое, невозможна параметрическая неустойчивость с низкочастотной накачкой.

**Исследование уравнений трехвольнового взаимодействия в фазовом пространстве.** Уберем сначала коэффициенты взаимодействия из уравнений (3) путем масштабного преобразования амплитуд. Положим в системе (3)  $a_j = \alpha_j b_j$  и выберем коэффициенты  $\alpha_j$  так, чтобы все коэффициенты взаимодействия стали равны единице. Оказывается, что для равновесной среды это всегда можно сделать. Для этого необходимо учесть указанные выше представления коэффициентов  $\sigma_j$  через  $\sigma, q_j$ . Фазы комплексных (в общем случае) коэффициентов удовлетворяют соотношениям

$$\arg(\sigma_1) = \arg(\sigma_2) = -\arg(\sigma_3) + \pi \equiv \psi \quad (11)$$

(добавка  $\pi$  связана с наличием знака минус при  $\sigma^*$ ). Нетрудно убедиться, что масштабирующие коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_2 \sigma_3|}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_3|}}, \quad \alpha_3 = \frac{e^{-i\psi}}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_2|}} \quad (12)$$

приводят уравнения (3) к следующему виду

$$\dot{b}_3 = -b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = b_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = b_2^* b_3, \quad (13)$$

В (13) все коэффициенты вещественны и по абсолютной величине равны единице. Ясно, что вид уравнений (13) определен неоднозначно. Для удобства сравнения с литературой приведем другой вариант нормировки, в котором все коэффициенты – чисто мнимые. К этому можно прийти, если перейти в (13) к «новым» амплитудам, полагая  $b_j = -ib_j^{new}$ .

Отбрасывая в уравнениях для  $b_j^{new}$  индекс «new», получим вместо (13) уравнения:

$$\dot{b}_2 = ib_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = ib_2^* b_3, \quad \dot{b}_3 = ib_1 b_2. \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что в отличие от (13) знаки всех коэффициентов в системе (14) одинаковы. В практических задачах обычно получается система типа (13) с вещественными коэффициентами, либо (14) – с мнимыми. И в том и в другом случае свойства коэффициентов отражают специфику равновесной среды.

Перейдем к вещественной форме уравнений (14) путем введения вещественных амплитуд и фаз волн:  $b_j = B_j \exp(i\varphi_j)$ . Подстановка этого представления в (14) дает

$$\dot{B}_{1,2} + iB_{1,2}\dot{\varphi}_{1,2} = iB_{2,1}B_3 e^{i(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \dot{B}_3 + iB_3\dot{\varphi}_3 = iB_1B_2 e^{-i(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)} \quad (15)$$

Разделяя вещественные и мнимые части в уравнениях (15), получим систему

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_2B_3 \sin \phi, & \dot{B}_2 &= -B_1B_3 \sin \phi, & \dot{B}_3 &= B_1B_2 \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \left( \frac{B_1B_2}{B_3} - \frac{B_1B_3}{B_2} - \frac{B_2B_3}{B_1} \right) \cos \phi \quad (\phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Это классические уравнения трехволнового взаимодействия в записи через амплитуды и фазы волн. Отметим, что в них вошла только разность фаз волн  $\phi$ , что связано с отсутствием зависимости решений от выбора начала отсчета времени (трансляционная симметрия уравнений по времени). Система (16) имеет интегралы движения

$$B_1^2 + B_3^2 = C_1, \quad B_2^2 + B_3^2 = C_1, \quad B_2^2 - B_1^2 = C_3, \quad (17)$$

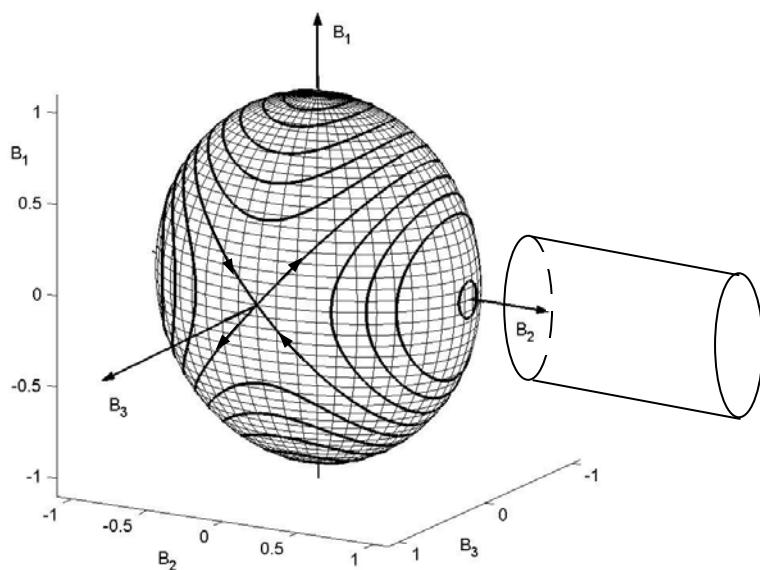


Рис. 3 К построению фазовых траекторий системы (18) на поверхности эллипсоида. Начало координат  $B_{1,2,3} = 0$  находится в центре эллипсоида.

которые есть ни что иное, как видоизмененная форма записи соотношений Мэнли-Роу ( $B_j^2$  пропорциональны  $N_j$ ). С учетом интегралов (17) общее решение (16) можно записать через специальные функции. Здесь мы не будем рассматривать эти решения, поскольку они хорошо представлены в литературе.

Ограничимся качественным исследование ограниченного класса решений (16), для которых  $\phi = \text{const} = \pi/2$ . Подстановка  $\phi = \pi/2$  в (16) показывает, что такой класс решений существует. При этом амплитуды остаются вещественными и уравнения (16) принимают вид

$$\dot{B}_{1,2} = -B_{2,1}B_3, \quad \dot{B}_3 = B_1B_2. \quad (18)$$

Уравнения (18) можно проанализировать в фазовом пространстве  $(B_1, B_2, B_3)$ . Фазовые

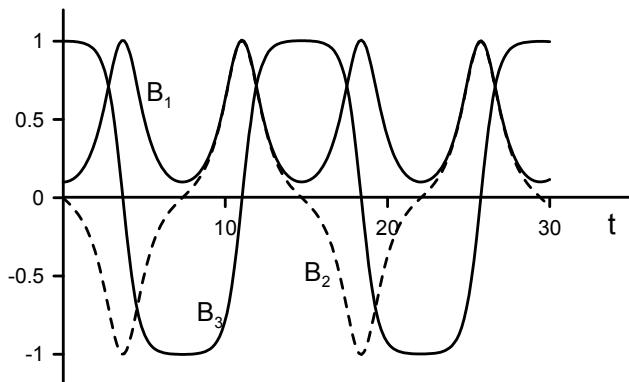


Рис. 4 Зависимость амплитуд волн от времени при распадной неустойчивости интенсивной высокочастотной волны:  $B_1(0) = 0.1$ ,  $B_2(0) = 0$ ,  $B_3(0) = 1$

траектории этой системы находятся на интегральных поверхностях. Независимыми являются только два из интегралов (17). Перейдем от (17) к другой форме записи двух независимых интегралов

$$\bar{B}_1^2 + \bar{B}_2^2 + 2\bar{B}_3^2 = 1, \quad \bar{B}_1^2 + \bar{B}_3^2 = C_0, \quad (19)$$

где  $\bar{B}_j = B_j / C_0$ ,  $C_0 = C_2 / C_1$ . В уравнениях (19) после введения нормированных амплитуд остается только одна произвольная постоянная  $C_0$ . Первый интеграл в (19) есть поверхность эллипсоида с полуосами  $(1, 1, \sqrt{1/2})$ . Интегральные кривые, совпадающие с фазовыми кривыми, получаются в результате пересечения этого эллипсоида с цилиндрической поверхностью, которую определяет второй интеграл (19). Эта цилиндрическая поверхность схематически показана на рис. 3 справа от эллипсоида. Варьируя постоянную  $C_0 > 0$  (квадрат радиуса цилиндрической поверхности), можно построить все множество интегральных кривых на поверхности эллипсоида – рис. 3. Поскольку размер полуоси эллипсоида вдоль координатной оси  $B_3$  меньше, чем по осям  $B_{1,2}$ , на эллипсоиде присутствуют седловые точки, которые возникают при касании цилиндрической поверхности краев эллипсоида по направлению оси  $B_3$ . Состояния равновесия типа центр получаются при касании цилиндрической поверхности с «макушкой» эллипсоида и при малых  $C_0$ . Направление движения по фазовым траекториям находятся с помощью (18).

Используя рис. 3, нетрудно качественно определить ход зависимости амплитуд волн от времени. 1) Если фазовая траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по осям  $B_1$  или  $B_2$  (где  $|B_2(0)| >> |B_{1,3}(0)|$ ), она все время остается в окрестности состояния равновесия типа центр. В этом случае имеем малые осцилляции  $B_{1,2,3}$ , рассмотренные

ранее в приближении заданного поля (см. рис. 2). Эти траектории описывают режим отсутствия распада НЧ-волн. 2) Если траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по оси  $B_3$  ( $|B_3(0)| \gg |B_{1,2}(0)|$ ), она попадает в окрестность седлового состояния равновесия и начинает медленно смещаться вдоль сепаратрисы. В этом случае происходит полный (с переходом через ноль) распад  $B_3$  и возникают протяженные пологие участки зависимости  $B_3(t)$ , связанные с прохождением траектории возле седловой точки. Такое поведение фазовых траекторий соответствует режиму распада ВЧ-волны. Этот качественный анализ в случае распадной неустойчивости подтверждается численно найденными зависимостями амплитуд волн от времени, показанными на рис. 4. Видно, что энергообмен между волнами имеет обратимый характер, т.е. возникают биения амплитуд во времени. Сепаратрисе в фазовом пространстве на рис. 3 соответствует решение с одиночным перепадом  $B_3$ , проходящим через ноль, и колоколообразными изменениями  $B_{1,2}$ . Отметим, что «обменный» характер взаимодействия волн подразумевает наличие динамики их фаз, так как смена знака  $B_j$  равнозначна скачку фазы на  $\pi$ , если  $B_j$  является положительным.

**Вырожденное трехвольновое взаимодействие.** Этот термин основывается на аналогии с квазичастицами и соответствует процессу, в котором сливаются два одинаковых кванта одной волны с образованием второй волны. Условия резонанса в данном случае принимают вид

$$2k_1 = k_2, \quad 2\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega \quad (20)$$

где  $\omega_1 = \omega(k_1)$ ,  $\omega_2 = \omega(k_2)$ ,  $\Delta\omega$  – расстройка частот волн от резонанса, которая предполагается малой. Этот процесс лишь формально называется трехвольновым, так как фактически в нем участвуют две волны, частоты и волновые числа которых различаются в два раза. Уравнения для развития комплексных амплитуд во времени записываются в виде

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_1^* a_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^2 e^{-i\Delta\omega t} \quad (21)$$

Используя свойства коэффициентов взаимодействия в консервативной среде, после введения нормировок уравнения (21) можно преобразовать к виду

$$\dot{b}_1 = i b_1^* b_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{b}_2 = i b_1^2 e^{-i\Delta\omega t} \quad (22)$$

После перехода к вещественной форме записи вместо (22) получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_1 B_2 \sin \phi, \quad \dot{B}_2 = B_1^2 \sin \phi \quad (\phi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \Delta\omega t) \\ \dot{\phi} &= \left( \frac{B_1^2}{B_2} - 2B_2 \right) \cos \phi + \Delta\omega \end{aligned} \quad (23)$$

Система (22) имеет один интеграл (соотношение Мэнли–Рой)

$$B_1^2 + B_2^2 = C^2 \quad (24)$$

Из (24) следует, что амплитуды волн всегда изменяются в противоположных направлениях: если  $B_1$  растет, то  $B_2$  убывает, либо наоборот. На языке квазичастиц два кванта волны  $B_1$  сливаясь дают квант второй гармоники  $B_2$ . Этот процесс развивается без «затравки» на удвоенной частоте ( $B_2(0) = 0$ ) называется генерацией второй гармоники. Другой вариант – квант  $B_2$  распадается на два кванта волны  $B_1$ . В этом случае получаем параметрическую (распадную) неустойчивость волны с частотой, равной половине частоты «накачки». Система (23) с интегралом (24) допускает исследование на фазовой плоскости при произвольной разности фаз  $\phi = 2\omega_1 - \omega_2 + \Delta\omega$  и произвольной расстройке от резонанса  $\Delta\omega$  (см. Литературу).

## СТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Для установившегося во времени (стационарного) резонансного взаимодействия волн ( $\partial / \partial t \rightarrow 0$ ) из общих уравнений взаимодействия модулированных волн, пренебрегая потерями, получим

$$v_{1,2}a'_{1,2} = \sigma_{1,2}a_{2,1}^*a_3, \quad v_3a'_3 = \sigma_3a_1a_2, \quad (1)$$

где штрихи означают производные по  $x$ ,  $v_j$  – групповые скорости волн. При одинаковых знаках групповых скоростей, когда волны вводятся в среду с одной границы, задача об изменении амплитуд волн в пространстве формально полностью совпадает с рассмотренной ранее задачей об эволюции во времени (задачей Коши). В этом можно убедиться с помощью замены  $\bar{\sigma}_j = \sigma_j/v_j$ ,  $x \rightarrow t$ . В консервативных равновесных средах для коэффициентов  $\bar{\sigma}_j$  сохраняются свойства, отмеченные в п. 3.1, 3.3. Такая взаимозаменяемость пространственной и временной задач называется *пространственно–временной аналогией*.

Существенные отличия от взаимодействия волн во времени возникают при разных знаках групповых скоростей. Рассмотрим в качестве примера вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна света на звуке в газе (ВРМБ). Дисперсионные ветви электромагнитных (ЭМ) и акустических (АК) волн и резонансный волновой триплет показаны на рис. 1а (наклоны дисперсионных ветвей показаны без соблюдения масштаба). В данном случае групповые скорости волн имеют различные знаки:  $v_{1,3} > 0$  и  $v_2 < 0$ . На границу нелинейной среды  $x = 0$  падает интенсивная электромагнитная волна на частоте  $\omega_3$ , а на границу  $x = l$  – слабая (сигнальная) электромагнитная волна на частоте  $\omega_2$ . В силу условий резонанса эти волны рождают акустическую волну на частоте  $\omega_1$ , которая нарастает «из нуля» в направлении оси  $x$  от границы  $x = 0$  (см. рис. 1б). Таким образом, на границах нелинейного слоя заданы  $a_3(0)$  - накачка,  $a_2(l)$ -сигнал и  $a_1(0) = 0$  -буферная волна.

Нелинейное взаимодействие между АК и ЭМ волнами возникает благодаря электрострикционному эффекту. Диэлектрическая проницаемость среды зависит от

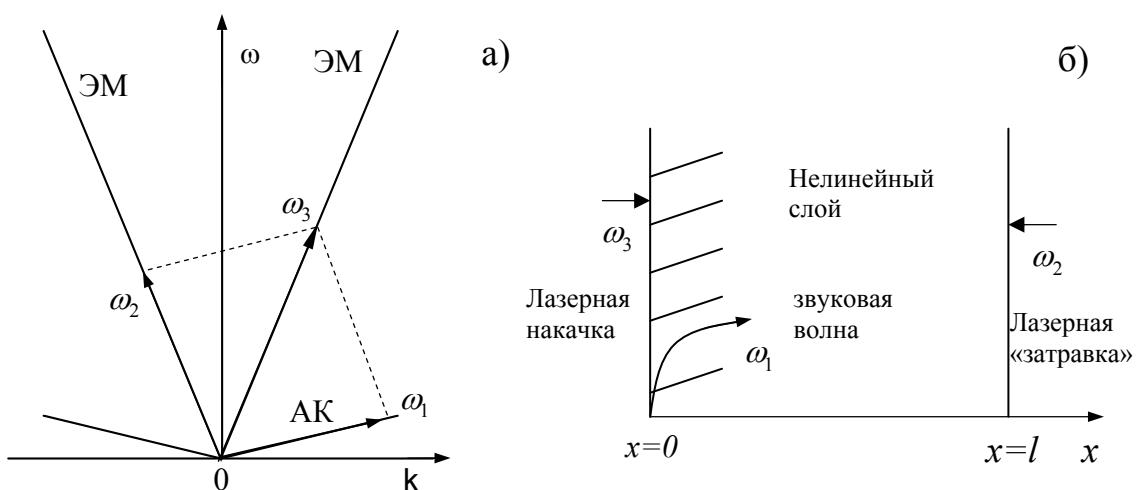


Рис. 1 Графическое изображение условий резонанса (а) и постановки граничных условий (б) для вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна.

плотности вещества. При малых возмущениях плотности изоэнтропийного процесса имеем

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho_0) + \underbrace{\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_S}_{\gamma_0} \tilde{\rho} + \dots, \quad (2)$$

где  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_0)$  – возмущения плотности; производная по  $\rho$  берется в точке  $\rho_0$  при постоянной энтропии (индекс «S»). Термодинамическое соотношение сводится к зависимости давления  $p$  от плотности газа при постоянной энтропии и от интенсивности электрического поля

$$p \approx p_0 + \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S}_{c_s^2} (\rho - \rho_0) - \frac{1}{8\pi} \gamma_0 |\vec{E}|^2. \quad (3)$$

Далее будет ясно, что  $c_s$  – адиабатическая скорость звука. Запишем уравнения Максвелла для плоских волн совместно с уравнениями газодинамики. Феноменологические зависимости (2), (3) в случае плоских ЭМ волн с компонентами полей  $E = E_y$ ,  $H = H_z$  приводят к уравнениям движения с квадратичной нелинейностью. Будем пренебречь вязкостью газа, сосредоточив все внимание на нелинейных эффектах. С учетом малости возмущений плотности ( $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ ) сделаем замену  $1/(\rho_0 + \tilde{\rho}) \approx (1/\rho_0)(1 - \tilde{\rho}/\rho_0)$ . Введем малый параметр  $\mu \ll 1$ , чтобы показать в явном виде малость колебаний всех полей:  $E = \mu E_{new}$ ,  $H = \mu H_{new}$ ,  $u = \mu u_{new}$ ,  $\tilde{\rho} = \mu \tilde{\rho}_{new}$ . Опуская индекс «new» и производя очевидные преобразования в исходной системе, получим два уравнения с явно выделенным малым параметром при «квадратичных» нелинейностях

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right), \quad (4)$$

где  $f_1 = -\frac{\gamma_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} E)$ ,  $f_2 = -\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\rho} u)$ ,  $f_3 = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{\gamma_0}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial x}$ ;  $c$  – скорость света в вакууме,  $\varepsilon_0 = \varepsilon(\rho_0)$ ,  $u = (\vec{v})_x$  – возмущения продольной скорости в газе. Система (4) дополняется выражением для возмущений плотности через  $u$  и нелинейность

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu f_2, \quad (5)$$

В линейном приближении система (4) описывает распространение независимых друг от друга ЭМ и АК волн. Представляя решение линеаризованных уравнений (4)–(5) в виде  $\sim \exp(ikx - i\omega t)$ , получим дисперсионные уравнения:

$$\omega^2 - k^2 v_0^2 = 0, \quad \omega^2 - k^2 c_s^2 = 0 \quad (v_0 = c / \sqrt{\varepsilon_0}). \quad (6)$$

Видно, что  $c_s$  действительно есть скорость звука, а  $v_0$  – скорость электромагнитных волн в газе. Соответственно, решение уравнений с малой нелинейностью (4)–(5) ищется в виде

$$\begin{aligned} u &= a_1 e^{i\vartheta_1} + k.c. + \mu u^{(1)} + \dots, \\ \tilde{\rho} &= a_1 \frac{\rho_0}{c_s} e^{i\vartheta_1} + k.c. + \mu \tilde{\rho}^{(1)} + \dots, \\ E &= a_2 e^{i\vartheta_2} + a_3 e^{i\vartheta_3} + k.c. + \mu E^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a_j = a_j(\tau, \chi)$  – медленно меняющиеся амплитуды волн,  $\vartheta_j = k_j x - \omega_j t$ ,  $k_j = k(\omega_j)$ . Подставляем (7) в (4)–(5) и применяем асимптотический метод, изложенный на предыдущих лекциях. В данном случае нет необходимости вводить операторы вместо производных по  $x$  и  $t$ . Разделим дифференцирование по быстрому и медленному времени с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (8)$$

где круглые скобки показывают, что дифференцирование производится по «быстрому» времени. В данном случае необходимо по отдельности записать условие существования решений уравнений для резонансных гармоник  $u^{(1)}$  и  $E^{(1)}$ . Это приводит к следующим уравнениям для амплитуд волн:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + c_s a'_{1,2} &= i \tilde{\sigma}_1 a_2^* a_3, \\ \dot{a}_2 - v_0 a'_2 &= i \tilde{\sigma}_2 a_1^* a_3, \\ \dot{a}_3 + v_0 a'_3 &= i \tilde{\sigma}_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tilde{\sigma}_1 = \frac{\gamma_0 \omega_1}{8\pi c_s}$ ,  $\tilde{\sigma}_2 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_2}{2\varepsilon_0 c_s}$ ,  $\tilde{\sigma}_3 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_3}{2\varepsilon_0 c_s}$ . В системе (9) сделана замена  $\mu = 1$ , что равносильно возвращению к исходным (физическим) переменным. В этом случае нелинейность мала благодаря малой величине самих амплитуд  $|a_j|$ . Можно показать, что плотность энергии электромагнитных и акустической волн в данном случае имеет вид

$$W_{EM} = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} |a_{2,3}|^2, \quad W_{AC} = 2\rho_0 |a_1|^2. \quad (10)$$

Используя (10) можно вычислить коэффициенты  $q_j$  и ввести число квазичастиц в волнах, как это делалось в п. 3.1. Это позволяет убедиться, что коэффициенты  $\tilde{\sigma}_j$  представляются в общей для консервативных сред форме. При  $\partial/\partial x = 0$  получаем соотношения Мэнли-Роу, приведенные в п. 3.3 для волн положительной энергии.

**Приближение заданного поля интенсивной световой волны.** Сохраним общую запись уравнений (1), задавая знаки групповых скоростей волн такими, как в системе (9). Фиксируя поле сильной волны ( $a_3 = \text{const} = a_{30}$ ), получим из (1) уравнения

$$v_1 a'_1 = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad -|v_2| a'_2 = \sigma_2 a_1^* a_{30}, \quad (11)$$

Решение для «сигнальной» электромагнитной волны при граничном условии для АК волны  $a_1(0) = 0$  принимает вид

$$a_2 = a_2(l) \frac{\cos(\kappa_0 x)}{\cos(\kappa_0 l)} \quad \left( \kappa_0^2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2^*}{v_1 |v_2|} |a_{30}|^2 > 0 \right). \quad (12)$$

На рис. 2 показано поведение интенсивностей всех волн, когда длина нелинейного слоя  $l$  удовлетворяет условию  $\kappa_0 l = 9\pi/4$ . Видно, что зависимость интенсивностей волн  $|a_j|^2$  от  $x$  подобна рассмотренной в п. 3.1 при «нераспадном» процессе во временем, т. волны 1 и 2 осциллируют в поле сильной волны 3.

Для прояснения ситуации заметим, что в стационарной задаче интегралы записываются не для чисел квантов, а потоков квантов (это общая закономерность – в стационарных задачах сохраняются потоки величин, а не сами величины). Тогда после

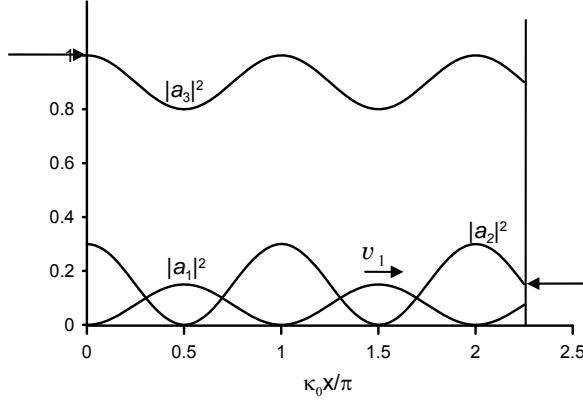


Рис. 2 Поведение интенсивностей волн в слое нелинейной среды при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна (длина слоя  $l = (9\pi/4)/\kappa_0$ ).

введения потоков энергии волн (проекций векторных потоков на ось  $x$ )  $\Pi_j = v_j \omega_j N_j$ , соотношения Мэнли-Роу для уравнений (1) примут вид

$$\frac{\Pi_2}{\omega_2} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_2, \quad \frac{\Pi_1}{\omega_1} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_1, \quad \frac{\Pi_1}{\omega_1} - \frac{\Pi_2}{\omega_2} = C_3. \quad (13)$$

На рис. 3 показаны диаграммы, отображающие изменение потоков энергии волн в соответствии с интегралами (13). Видно, что "распадной" в смысле направления передачи энергии является высокочастотная волна  $\omega_3$  (напомним, что при записи уравнений для

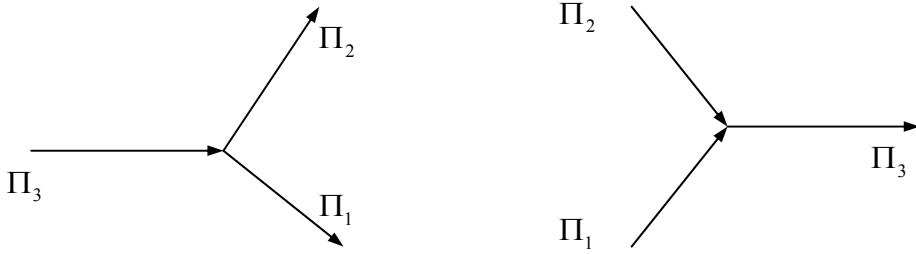


Рис. 3 Диаграммы для потоков энергии волн при стационарном вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна

комплексных амплитуд было принято условие  $\omega_j > 0$ ). Диаграммы на рис. 3 показывают два возможных направления преобразования энергии волн. Поведение амплитуд на рис. 2 можно объяснить с учетом того, что  $v_2 < 0$ , а приращения потоков энергии  $\Pi_j$  на малом интервале  $\Delta x = x_2 - x_1$  пропорциональны приращениям  $|a_j|^2$  на этом интервале, взятым в направлении групповых скоростей волн. Поэтому изменение интенсивностей волн  $|a_j|^2$  на рис. 2 происходит в полном соответствии с (13) и диаграммами на рис. 3. Таким образом, преобразование энергии волн по-прежнему происходит в соответствии с соотношениями Мэнли-Роу и усиление слабой ЭМ волны возможно только при высокочастотной накачке.

Заметим, что при длине слоя, удовлетворяющей условию  $\kappa_0 l = n\pi + (\pi/2)$ , где  $n = 1, 2, \dots$  – целое, знаменатель в (12) равен нулю. Это значит, что приближение заданного поля уже неприменимо, так как осцилляции амплитуд становятся большими. В этом случае возможно большое усиление сигнальной волны за счет накачки.

## ОСОБЕННОСТИ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ ЭНЕРГИИ

Как уже отмечалось, в средах, далеких от состояния термодинамического равновесия (неравновесных средах) волны могут иметь отрицательную энергию. Соотношения Мэнли-Роу для взаимодействия трех пространственно-однородных волн с учетом знаков их энергии были получены на предыдущих лекциях:

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = C_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = C_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = C_3, \quad (1)$$

где  $s_j$  – знак энергии  $j$ -ой волны,  $N_j$  – число квазичастиц в  $j$ -ой волне. Ранее были изучены взаимодействия в равновесных средах, когда все волны имеют положительную энергию. Теперь зададимся вопросом, какие качественные особенности появляются при наличии волн с отрицательной энергией (ВОЭ).

**Распадность НЧ волн или преобразование частоты вверх.** Пусть при трехволновом взаимодействии отрицательную энергию имеет одна из НЧ-волн:  $s_{2,3} \cdot s_1 < 0$  или  $s_{1,3} \cdot s_2 < 0$ . Возьмем для определенности  $s_1 = -1 < 0$ ,  $s_{2,3} = +1 > 0$ . Тогда соотношения Мэнли-Роу примут вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 + N_3 = C_2, \quad N_1 + N_2 = C_3 \quad (2)$$

Рассуждая так же, как при рассмотрении трехволновых процессов в равновесной среде, нетрудно видеть, что распадаться будет НЧ волна с частотой  $\omega_2$ . Это иллюстрируют диаграммы изменения числа квазичастиц, показанные на рис. 1. В данном случае возможны параметрическое усиление и параметрическая генерация волн при низкочастотной накачке. Наибольший выигрыш можно получить, когда частота сигнальной волны мала по сравнению с частотой накачки:  $\omega_2 \gg \omega_1$ , так как это позволяет продвинуться при усилении или генерации вверх по диапазону. Такая возможность существует, например, в релятивистском электронном пучке, скорость которого близка к скорости света. На рис. 2 показаны условия резонанса для взаимодействия двух электромагнитных волн и волны пространственного заряда в таком пучке (для простоты показана только ветка медленной волны пучка, имеющей отрицательную энергию). Дополнительная энергия для размноже-

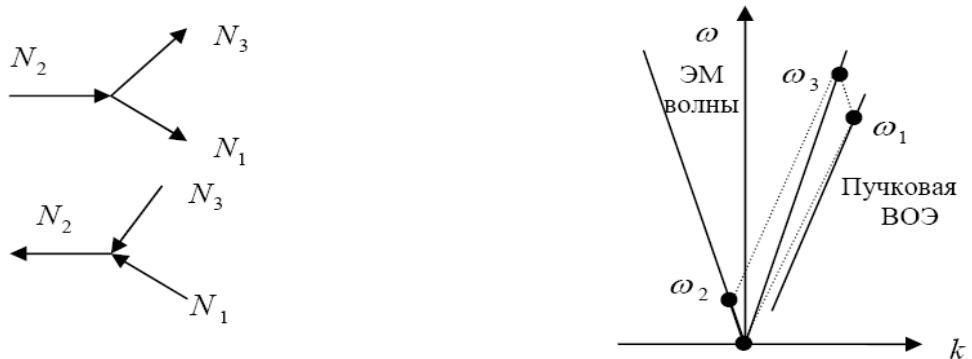


Рис. 1 Диаграммы изменения числа квазичастиц при  $s_1 s_{2,3} < 0$ . Верхняя диаграмма соответствует распаду НЧ-волны  $\omega_2$

Рис. 2. Параметрическое усиление высокочастотной ЭМ волны  $\omega_3$  при низкочастотной накачке  $\omega_2 \ll \omega_3$  в релятивистском электронном потоке

ния энергичных (высокочастотных) квантов при этом черпается из кинетической энергии пучка, в котором возбуждается волна отрицательной энергии.

Заметим, что в данном случае не следует заново решать уравнения для амплитуд волн. Формально решение данной задачи сводится к решению задачи о распаде волны в равновесной среде с помощью простой замены переменных (фактически, – к изменению нумерации волн).

**Взрывная неустойчивость волн.** Наиболее нетривиальная ситуация возникает, когда высокочастотная волна имеет знак энергии, противоположный знакам энергии низкочастотных волн, например,  $s_3 = -1 < 0$ ,  $s_{1,2} = +1 > 0$ . В этом случае соотношения Мэнли-Роу принимают вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 - N_3 = C_2, \quad N_1 - N_2 = C_3 \quad (3)$$

Диаграммы изменения числа квазичастиц показаны на рис. 3. Все волны одновременно растут, либо одновременно исчезают. На квантовом языке это процесс рождения трех квантов из ничего. Однако полная энергия волнового поля при этом сохраняется так как кванты  $\omega_3$  имеют отрицательную энергию.

Используя нормировки коэффициентов взаимодействия на единицу, получим уравнения для комплексных амплитуд вида

$$\frac{db_1}{dt} = b_2^* b_3, \quad \frac{db_2}{dt} = b_1^* b_3, \quad \frac{db_3}{dt} = b_2 b_1, \quad (4)$$

Ограничимся частным решением, когда все амплитуды действительны (фазы равны нулю) и одинаковы  $B_1(t) = B_2(t) = B_3(t) \equiv B(t)$ . Такое решение существует, поскольку в этом случае все три уравнения принимают один и тот же вид

$$\frac{dB}{dt} = B^2, \quad (5)$$

Решение уравнения первого порядка (5) легко находится и имеет вид

$$B = \frac{B(0)}{1 - \frac{t}{t_\infty}}, \quad t_\infty = \frac{1}{B(0)} \quad (6)$$

Амплитуды всех волн обращаются в бесконечность за конечное время  $t_\infty$  (рис. 3). Поэтому

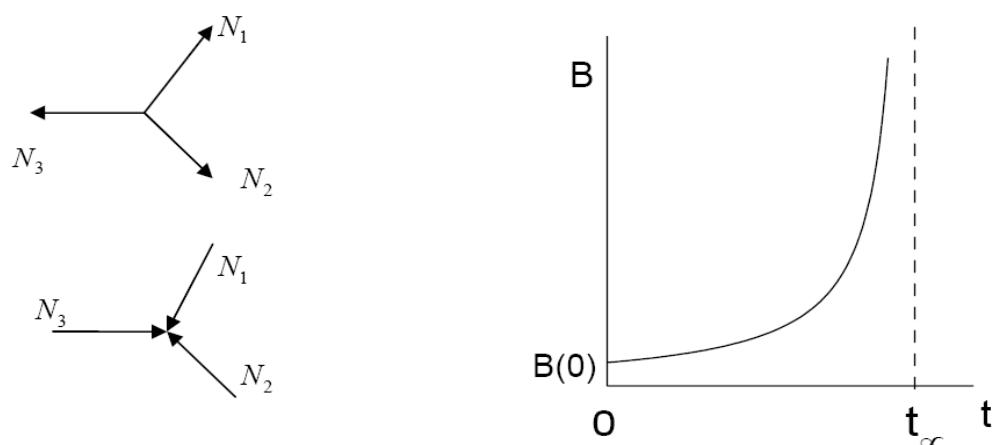


Рис. 3. Диаграммы изменения числа квазичастиц (а) и взрывной рост амплитуд волн во времени при  $s_3 \cdot s_{1,2} < 0$  (б).

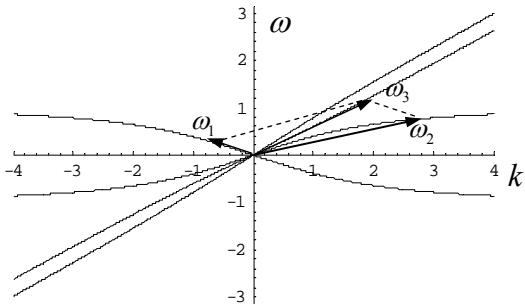


Рис. 4. Взрывная неустойчивость в плазменно–пучковой системе с редукцией пространственного заряда. Плазменные волны положительной энергии  $\omega_{1,2}$  резонансно связаны с медленной волной электронного пучка  $\omega_3$ , имеющей отрицательную энергию. Благодаря большой скорости пучка исключается линейный резонанс плазменной и пучковых волн

му  $t_\infty$  называется «временем взрыва», а сам процесс – взрывной неустойчивостью. Каков механизм взрывного роста волн? Запишем выражения для относительной скорости роста при обычной экспоненциальной неустойчивости и при взрывной неустойчивости:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \gamma = \text{const}, \quad \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \gamma(B) = B, \quad (7)$$

В первом случае относительная скорость роста (инкремент) – постоянная величина, тогда как во втором – она растет по мере увеличения амплитуды. Именно это ускорение скорости роста при нарастании амплитуды и дает «взрыв».

В качестве примера трехволнового взаимодействия, приводящего к взрывной неустойчивости, на рис. 4 показано взаимодействие двух плазменных волн с волной отрицательной энергии в электронном потоке. Наиболее интересен случай, когда в ограниченном по сечению пучке скорость потока достаточно велика, поскольку при этом отсутствует линейная резонансная неустойчивость. Однако система остается неравновесной и нет ничего удивительного в том, что возникает новый тип неустойчивости – взрывная. Таким образом, взрывная неустойчивость как бы принимает эстафету от линейной резонансной неустойчивости при увеличении скорости потока. Именно через нее теперь реализуется способность неравновесной среды стремиться к равновесному состоянию через нарастание возмущений и последующей их диссипацией в тепло.

#### Замечания.

- 1) С точки зрения теории колебаний взрывная неустойчивость есть неустойчивость по нелинейному приближению. После линеаризации относительно стационарного состояния  $B = 0$  уравнение (5) принимает вид  $dB/dt = 0$ . Его решение  $B = \text{const}$  соответствует нейтральной устойчивости. Из курса теории колебаний известно, что в этом особом случае следует переходить к исследованию устойчивости по нелинейному приближению. Таким образом, взрывная неустойчивость при резонансном взаимодействии волн является одним из механизмов *нелинейной неустойчивости*.
- 2) В действительности, конечно, амплитуды не могут вырасти до бесконечности. В лучшем случае взрывной закон может проявится на начальной стадии роста амплитуд, пока не начинают нарушаться приближения, при которых получены амплитудные уравнения. Это может произойти при выходе за пределы теории малой нелинейности либо ограничение может наступить при учете каких-либо факторов уже в рамках приближения малой нелинейности. Таким образом, скорость роста  $\gamma(B)$  при взрывной неустойчивости в реальной среде ограничена. Поэтому при наличии в среде линейной (экспоненциальной) неустойчивости с достаточным инкрементом, именно она может оказаться основным механизмом возбуждения волн.
- 3) Как и всякая нелинейная неустойчивость, взрывная неустойчивость может быть причиной жесткого режима генерации волн.

## РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ДИССИПАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

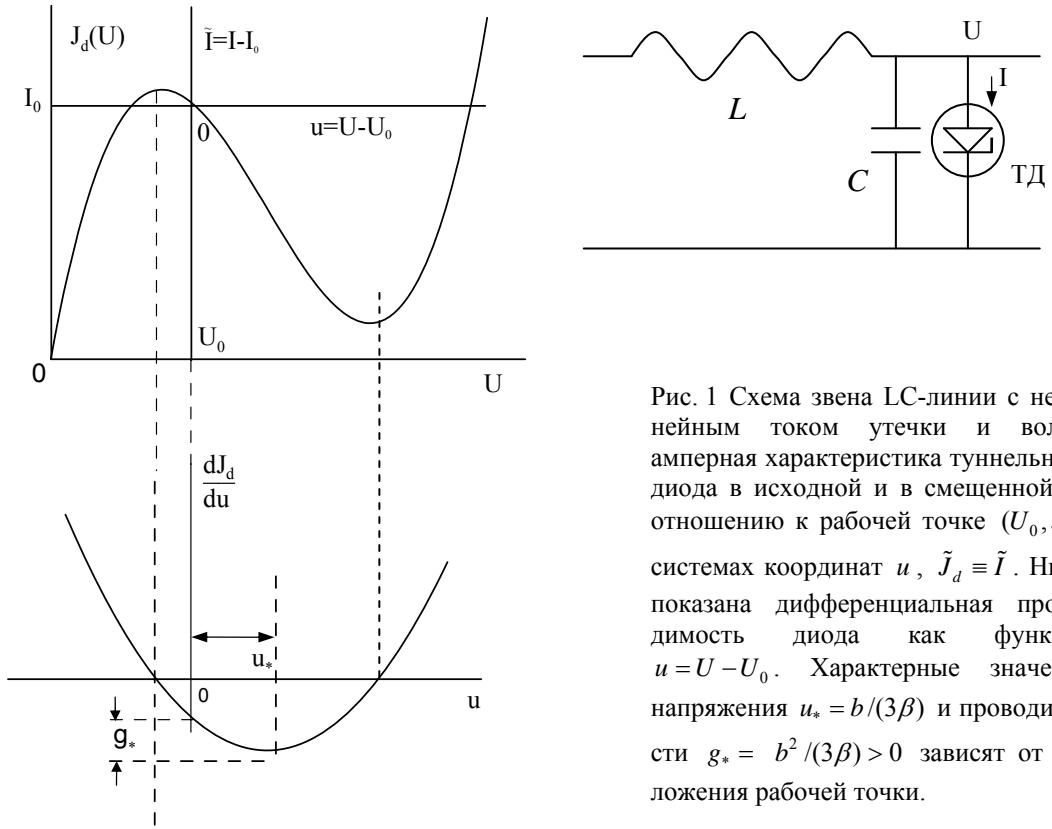


Рис. 1 Схема звена LC-линии с нелинейным током утечки и вольт-амперная характеристика туннельного диода в исходной и в смещенной по отношению к рабочей точке ( $U_0, J_0$ ) системах координат  $u$ ,  $\tilde{J}_d \equiv \tilde{I}$ . Ниже показана дифференциальная проводимость диода как функция  $u = U - U_0$ . Характерные значения напряжения  $u_* = b/(3\beta)$  и проводимости  $g_* = b^2/(3\beta) > 0$  зависят от положения рабочей точки.

$$\begin{aligned} u &= U - U_0 \text{ и } \tilde{J}_d(u) = J_d(U_0 + u) - J_d(U_0) = \\ &= gu - bu^2 + \beta u^3 \quad (b, \beta > 0) - \text{отклонения напряжения и тока} \end{aligned}$$

от их значений в рабочей точке

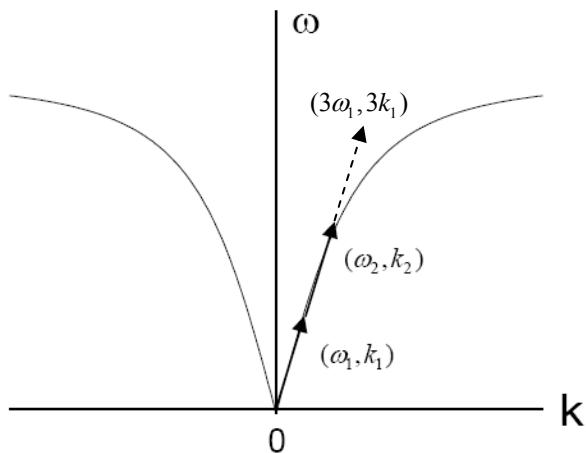


Рис. 2 Условия резонанса основной волны  $(\omega_1, k_1)$  с ее второй гармоникой  $(\omega_2, k_2)$  в отсутствие резонанса с третьей гармоникой  $(\omega_3, k_3)$  в распределенной LC-линии с дисперсией в области высоких частот.

Главная часть решения содержит суперпозицию волн  $(\omega_1, k_1)$  и  $(\omega_2, k_2)$ , где  $\omega_j = k_j V$ :

$$u^{(0)} = a_1(x, t) e^{ik_1(x-Vt)} + a_2(x, t) e^{2ik_1(x-Vt)} + \text{к.с.}$$

Уравнение для возмущений напряжения ( $V_0 = 1/\sqrt{LC}$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} (gu - bu^2 + \beta u^3)$$

Уравнение для возмущений напряжения в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} \left( -\nu \tilde{u} + \tilde{u}^2 - \frac{1}{3} \tilde{u}^3 \right)$$

$\varepsilon = g_* / \omega_1 C \ll 1$  – малый параметр,  $\tilde{u} = u / u_*$ ,  $\nu = -3\beta g / b^2$ ,  $t_1 = \omega_1 t$ ,  $x_1 = k_1 x$

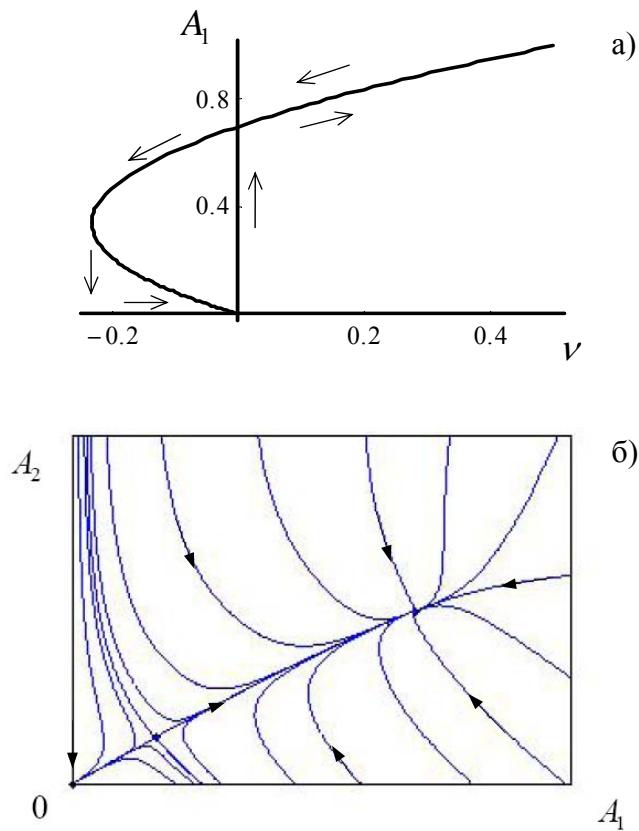


Рис. 3. (а) – Равновесные значения амплитуды  $A_1$  при резонансном взаимодействии волны с ее второй гармоникой в  $LC$ -линии с нелинейной утечкой. Стрелками показано направление изменения равновесной амплитуды при увеличении и уменьшении параметра  $\nu$  (петля гистерезиса);  
 (б) – Фазовая плоскость в случае жесткого (докритического) возбуждения волн (параметр  $\nu$  находится в интервале  $-0.232 < \nu < 0$ ). Видны области подавления, развития и насыщения «взрывной» неустойчивости волн положительной энергии.

Уравнения для амплитуд первой и второй гармоники при нулевых значениях их фаз

$$\frac{dA_1}{d\tau'} = 2A_1 A_2 - (A_1^2 + 2A_2^2)A_1 + \nu A_1,$$

$$\frac{dA_2}{d\tau'} = A_1^2 - (A_2^2 + 2A_1^2)A_2 + \nu A_2 .$$

## КОНКУРЕНЦИЯ ВОЛН В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

**Конкуренция однородных волн во времени и «попутных» волн в пространстве.** Рассмотрим нерезонансное (энергетическое) взаимодействие двух модулированных волн в активной среде с кубичной нелинейностью диссипативного типа (нелинейным затуханием). В этом случае равнения для комплексных амплитуд волн принимают вид (см. п. 3.6)

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \gamma_1 a_1 - (T_{11}|a_1|^2 + T_{12}|a_2|^2)a_1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \gamma_2 a_2 - (T_{21}|a_1|^2 + T_{22}|a_2|^2)a_2 \quad (1)$$

Будем считать, что обе волны находятся в полосе неустойчивости активной среды:  $\gamma_{1,2} = \operatorname{Im} \omega_{1,2} > 0$ . В среде с нелинейной диссипацией коэффициенты взаимодействия  $T_{ij}$  комплексны. Если  $\operatorname{Re}(T_{ij}) > 0$  (нелинейная диссипация подавляет неустойчивость) говорят о мягком (надкритическом) возбуждении волн. От системы (1) можно перейти к уравнениям для интенсивностей волн (квадратов модулей амплитуд). Для этого следует умножить первое и второе уравнения (1) на  $a_{1,2}^*$  соответственно и сложить результат с комплексно сопряженным. После подходящего нормирования получим два вещественных уравнения для  $m_{1,2} \sim |a_{1,2}|^2$ :

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} = h_1 [1 - (m_1 + \rho_1 m_2)] m_1, \quad \frac{\partial m_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} = h_2 [1 - (m_2 + \rho_2 m_1)] m_2, \quad (2)$$

где  $V_{1,2}$  – групповые скорости волн,  $\rho_1, \rho_2 > 0$  – коэффициенты связи,  $h_{1,2} > 0$  – инкременты линейной неустойчивости. Уравнения (2) можно вывести для волн в LC-линии с туннельными диодами, если рабочая точка находится в середине падающего участка ВАХ (с максимальной отрицательной проводимостью), когда в исходных уравнениях остается только кубичная нелинейность. Уравнения (1) получены для взаимодействия волн в лазерах, в электронных волновых приборах. Кроме того, при  $\partial / \partial x = 0$  они описывают динамику популяций в системе "хищники-жертвы" и реагентов в химических реакциях.

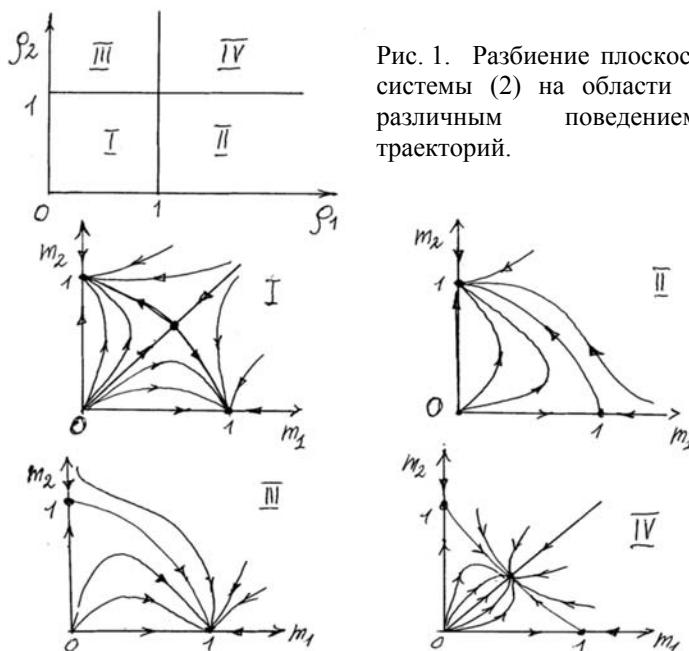


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров системы (2) на области с качественно различным поведением фазовых траекторий.

Рис. 2. Фазовые портреты системы (2) для различных областей параметров, показанных на рис. 1.

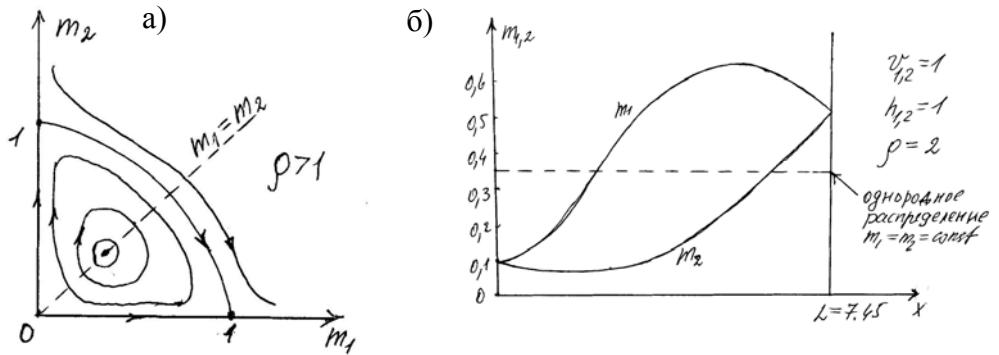


Рис. 3 Фазовые портреты при конкуренции встречных волн в случае сильной связи между ними (а) и установление режима бегущей волны в резонаторе с идеальным отражением на границах (б).

При одинаковых знаках групповых скоростей волн (попутные волны) задачи об эволюции  $m_{1,2}$  во времени и их развитии в пространстве математически идентичны. Рассмотрим для определенности эволюцию пространственно однородных волн во времени (например, две моды в резонаторе, когда в полосе неустойчивости сдвиг между частотами  $\Delta\omega_n \gg |a^{-1}\partial a / \partial t|$ ). В этом случае в (2) следует положить  $\partial / \partial x \rightarrow 0$ . Проведем качественное исследование решений (2) на фазовой плоскости. На плоскости параметров  $(\rho_1, \rho_2)$  можно выделить четыре области с качественно различным поведением фазовых траекторий (рис. 1). Видно, что в области (I) со слабым влиянием волн на затухание друг друга ( $\rho_{1,2} < 1$ ) «выживает» в зависимости от начальных условий та из них – которая «сильнее» в начальный момент. В области (II), где воздействие второй волны на затухание первой велико ( $\rho_1 > 1$ ), а обратное влияние первой на затухание второй мало ( $\rho_2 < 1$ ), то при любых начальных условиях выживает вторая волна, которая сильно демпфирует первую. Аналогично можно объяснить фазовые портреты для областей (III) и (IV). Существование в динамической системе нескольких равновесных состояний (или установившихся динамических режимов) называется мультистабильностью. Процесс нерезонансного (энергетического) взаимодействия волн, который приводит к отбору (селекции) одного из возможных равновесных состояний называется *конкуренцией* волн.

**Конкуренция встречных волн в резонаторе.** Конкуренцию встречных волн описывают уравнения (2) с разными знаками групповых скоростей. Рассмотрим установившиеся (стационарные) режимы, полагая в (2)  $\partial / \partial t \rightarrow 0$ . Для определенности положим  $V_1 > 0, V_2 < 0$  и ограничимся случаем взаимной связи при одинаковых по абсолютной величине групповых скоростях:

$$\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho, \quad V_1 = V > 0, \quad V_2 = -|V_2| = V < 0 \quad (3)$$

(например, в распределенной LC-линии с нелинейной утечкой через туннельные диоды  $\rho = 2$ ). В этом случае уравнения (1) имеют одно состояние равновесия, в котором обе амплитуды не равны нулю:  $m_{1,2} = 1/(1 + \rho)$ .

Чтобы использовать фазовый портрет для описания волн в резонаторе, необходимо найти траектории, которые позволяют удовлетворить граничным условиям. Допустим, что на границах реализуется идеальное отражение, т.е.  $m_1 = m_2$  при  $x = 0$  и при  $x = L$ , где  $L$  – длина резонатора. Поэтому следует выбрать те фазовые траектории, которые начинаются и заканчиваются на биссектрисе  $m_1 = m_2$ , а изменение  $x$  на них равно  $L$ . Можно показать, что при слабой связи  $\rho < 1$  этим условиям удовлетворяет только однородное распределение интенсивности волн, при котором изображающая точка находится в

седловом состоянии равновесия  $m_{1,2} = 1/(1+\rho)$ . При сильной связи ( $\rho > 1$ ) появляется другая возможность, связанная с наличием замкнутых траекторий, охватывающих состояние равновесия типа центр (рис. 3а).

Линеаризуем систему (2) относительно отклонений от состояния равновесия. Отыскание решений вида  $\sim \exp(px)$  приводит к квадратному характеристическому уравнению для  $p$ , решение которого при  $h_1 = h_2 = h$  есть  $p = \pm(h/V)\sqrt{(1-\rho)/(1+\rho)}$ . При  $\rho > 1$  показатель  $p$  чисто мнимый и период изменения  $x$  на фазовой траектории в малой окрестности центра  $2\pi/|p|$ . Период возрастает при удалении от центра и стремится к бесконечности при приближении замкнутой траектории к сепаратрисам. Поэтому перемещение изображающей точки вокруг центра с возвращением на биссектрису возможен только при  $L$  больше половины минимального периода изменения  $x$  на траектории вблизи центра:

$$L > \frac{\pi V}{h} \sqrt{\frac{1+\rho}{|1-\rho|}}. \quad (4)$$

Таким образом, мы пришли к нетривиальному результату: неоднородные распределения интенсивности волн вдоль резонатора при  $\rho > 1$  возможны только в *достаточно длинном резонаторе*. Чем длиннее резонатор, тем более сильная неоднородность волнового поля может быть в нем реализована. Это иллюстрируется численным решением уравнений (2), показанным на рис. 3б. При указанных параметрах ограничение (4) на  $L$  имеет вид  $L > 5.44$ . Интегрирование системы (2) с «начальными» условиями  $m_1(0) = m_2(0) = 0.1$  при  $x = 0$  показало, что при длине резонатора  $L = 7.45$  на границе справа  $x = L$  выполняется второе граничное условие:  $m_1 = m_2 = 0.48$ . Видно, что в данном примере распределение интенсивностей волн существенно отличается от однородного. Еще один нетривиальный результат состоит в том, что в центральной части резонатора фактически реализуется режим бегущей волны ( $m_1 \gg m_2$ ). При увеличении длины резонатора возможны осциллирующие по  $x$  распределения поля, которым соответствует полное или многократное обращения фазовой траектории вокруг центра. Отметим, что описанный метод применим также в случае частичного отражения волн от границ резонатора, когда граничные условия имеют вид  $m_1 = r_1 m_2$  при  $x = 0$  и  $m_2 = r_2 m_1$  при  $x = L$ , где  $r_{1,2} < 1$  – коэффициенты отражения. В этом случае перемещение по фазовой траектории должно начинаться и заканчиваться на прямых, определенных этими граничными условиями.

### Захват резонансно связанных волн импульсами и пучками накачки

До сих пор мы ограничивались рассмотрением элементарных нелинейных взаимодействий с участием трех пространственно однородных волн (мод свободного пространства или кольцевого резонатора) либо аналогичных процессов стационарного взаимодействия трех волн в пространстве. Теперь перейдем к рассмотрению более сложной задачи о взаимодействии пространственно локализованных волн. На спектральном языке это волновые пакеты пространственных гармоник с узким спектром по волновому числу.

Рассмотрим эффект захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, который имеет важное значение для понимания особенностей резонансного взаимодействия локализованных волн. Будем для определенности считать, что среда равновесная и распадной является волна с наибольшей частотой. Тогда в одномерной задаче в приближении заданного поля волны накачки имеем уравнения

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + V_{1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \sigma_{1,2} a_{2,1}^* a_3. \quad (1)$$

Для равновесной среды выполнено условие  $\sigma_1 \sigma_2^* > 0$  (см. предыдущие лекции). Перейдем в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью импульса накачки  $V_3$ . Для этого перейдем к переменным  $x' = x - V_3 t$ ,  $t' = t$  (см. предыдущие лекции). После несложных преобразований получим

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (2)$$

где  $u_1 = V_1 - V_3$ ,  $u_2 = V_3 - V_2$ . Для координаты и времени сохраним исходные обозначения (отбросим штрихи у  $x', t'$ ). Необходимое условие захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, состоит в том, что по отношению к импульсу накачки слабые волны распространяются в разные стороны. Для системы (2) оно записывается как  $u_1 u_2 > 0$ . Для определенности будем считать, что  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . В сопутствующей накачке системе отсчета, в которой записаны уравнения (2), имеется решение в виде стационарного профиля накачки:  $a_3 = a_{30}(x)$ . Далее будем примем, что этот профиль прямоугольный. Он формально удовлетворяет гиперболическому уравнению для  $a_3$  несмотря на наличие скачков, так как в уравнениях отсутствует дисперсия для огибающей.

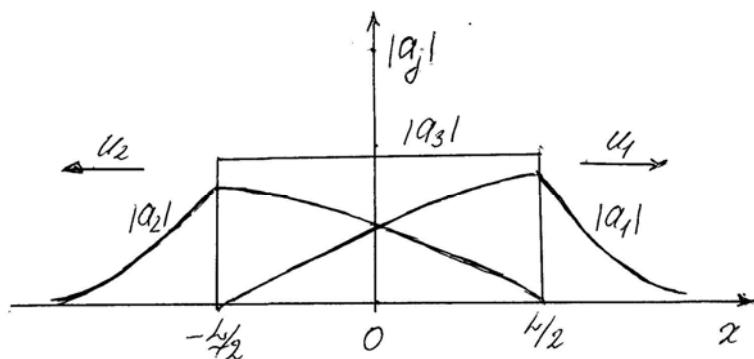


Рис. 1 Иллюстрация к эффекту захвата слабых волн импульсом накачки (конфигурация поля в системе отсчета, сопровождающей импульс накачки при нарастании амплитуд слабых волн)

Предполагаемое распределение амплитуд нарастающих во времени волн  $a_{1,2}$  внутри импульса накачки показано на рис. 1. При указанных направлениях скоростей  $u_{1,2}$  поле  $a_2$  несмотря на его перенос против оси  $x$  всегда присутствует на границе импульса накачки  $x = L/2$ , так как рождается при «сложении» накачки с волной  $a_1$ . То же самое относится к волне  $a_1$  вблизи границы  $x = -L/2$ . В результате возникает самоподдерживающееся перекрытие полей всех волн. Поскольку внутри импульса накачки поля  $a_{1,2} \neq 0$ , можно предположить, что при достаточно большом  $a_{30}$  этой области возникнет параметрическая неустойчивость неустойчивость, приводящая к росту  $a_{1,2}$  за счет энергии накачки. Эти качественные соображения необходимо подтвердить отысканием соответствующего решения задачи..

**Границные условия.** За пределами импульса накачки с каждой стороны от него остается только одна волна, уносящая энергию из области взаимодействия. Если внутри импульса накачки поле нарастает, то поля уходящих волн в соответствии с принципом причинности (согласно которому происходит запаздывание роста поля при увеличении  $|x|$ ) должны спадать при удалении от импульса накачки, т. е. «на бесконечности» следует поставить нулевые граничные условия:  $a_1 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $a_2 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Поскольку за пределами импульса накачки отсутствуют источники волн  $a_{1,2}$ , которые распространяются независимо (уравнения для них однородны), на границах импульса накачки ставятся условия:  $a_1(t, -L/2) = 0$ ,  $a_2(t, +L/2) = 0$ .

Используя метод разделения переменных, будем строить решение в каждой из областей  $a_3 = \text{const}$  в виде

$$a_1 = \exp(\Gamma t) f_1(x), \quad a_2 = \exp(\Gamma t) f_2(x), \quad (3)$$

где  $f_{1,2}$  – неизвестные функции. Будем искать только неустойчивые решения с вещественными инкрементом нарастания  $\Gamma > 0$ . На каждом отрезке с постоянной амплитудой накачки имеем обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для  $f_1$ , а  $f_2$  алгебраически выражается через  $f_1$ . Поскольку при  $|x| > L/2$  накачка отсутствует ( $a_3 = 0$ ), получим два уравнения первого порядка  $u_1 f'_1 + \Gamma f_1 = 0$  и  $u_2 f'_2 - \Gamma f_2 = 0$ , которые имеют решения  $f_1 = C_1 \exp(-\Gamma x / u_1)$  при  $x > L/2$  и  $f_2 = C_2 \exp(\Gamma x / u_2)$  при  $x < -L/2$ , где  $C_{1,2}$  – комплексные постоянные. При  $\Gamma > 0$  они дают распределения амплитуд за пределами импульса накачки, показанные на рис. 1. В области  $-L/2 < x < L/2$  с постоянной амплитудой накачки  $a_{30}$  имеем ОДУ второго порядка

$$f''_1 - \frac{\Gamma(u_1 - u_2)}{u_1 u_2} f'_1 + \frac{\Gamma_0^2 - \Gamma^2}{u_1 u_2} f_1 = 0, \quad (4)$$

где  $\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2^*} |a_{30}|$  – инкремент параметрической неустойчивости в поле однородной по всему пространству накачки (см. п. 3.3). Решение (4) также содержит две произвольные постоянные. Налагая условия сшивки для полей на границах импульса накачки и учитывая граничные условия, получим систему четырех однородных уравнений для этих постоянных. Условие их разрешимости (существования ненулевого решения) дает трансцендентное уравнение для определения инкремента  $\Gamma$ . Не останавливаясь на его исследовании, приведем условие, при выполнении которого значение  $\Gamma$  становится положительным:

$$m = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{u_1 u_2}} = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{(V_1 - V_3)(V_3 - V_2)}} > \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что в отличие от параметрической неустойчивости однородных волн даже в среде без потерь нарастание волн возникает только при превышении амплитудой импульса накачки (входящей в  $\Gamma_0$ ) порогового значения. Объяснение состоит в том, что поступление энергии от накачки внутри импульса  $a_3(x)$  должно скомпенсировать потери энергии, которая выносится волнами за пределы импульса накачки («радиационные» потери). Радиационные потери растут при увеличении скорости выноса волн за пределы импульса накачки. Поэтому в соответствии с (5) увеличение  $u_{1,2}$  увеличивает амплитуду накачки, необходимую для возникновения неустойчивости. При уменьшении длины импульса также увеличивается порог начала генерации по амплитуде накачки. В случае нарастания слабых волн говорят о захвате сигнальных волн импульсом накачки. Подчеркнем, что захват возможен только при распространении сигнальных волн в разные стороны относительно импульса накачки:  $u_1 u_2 > 0$ .

Можно показать, что при  $t > 3\pi/2$ , появляется второй неустойчивый корень, которому соответствует распределение поля внутри накачки с одной осцилляцией по  $x$ . Существует последовательность пороговых значений  $t$  для возбуждения неустойчивых мод с возрастающим числом осцилляций по  $x$  внутри ракачки. Если  $t$  достаточно большое, асимптотическое (на больших временах) решение с произвольными начальными условиями представляет собой суперпозицию неустойчивых мод. Аналогичные многомодовые решения были получены и для гладких импульсов накачки. В частности, для импульса накачки вида  $a_3 = a_m / \text{ch}(x/L)$  изменяется только константа в правой части критерия неустойчивости (5) (замена  $\pi/2 \rightarrow 1/2$ ).

Если среда равновесна (энергия волн положительна), генерация волн внутри импульса накачки ведет к ослаблению (распаду) самой накачки, после чего волны разбегаются в разные стороны от ослабленного импульса накачки, который уже не в состоянии их удержать. При взрывном взаимодействии волн (например, когда волна накачки имеет отрицательную энергию), развитие параметрической неустойчивости сопровождается нарастанием волны накачки, которая «не отпускает» две другие волны. В конечном счете возникает взрывной рост всех трех волн. По сути это механизм взрывной неустойчивости локализованных в пространстве волн, когда в начальный момент доминирует одна из них.

### *Стационарные волновые пучки и пространственно-временная аналогия.*

Решенная в предыдущем разделе задача о захвате слабых волн импульсом накачки во времени позволяет без труда получить решение другой задачи – о стационарном параметрическом усилении волновых пучков, ограниченных в пространстве. Для этого воспользуемся пространственно–временной аналогией. Уравнения для взаимодействия плоских модулированных волн в случае неодномерной модуляции в заданном поле накачки имеют вид

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + (\vec{V}_3 \cdot \vec{\nabla}) a_3 = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) a_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}) a_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (6)$$

где  $\vec{V}_j$  – групповые скорости волн. Линейный оператор в левых частях уравнений в Фурье-представлении соответствует главному члену разложения закона дисперсии  $\omega(\vec{k})$  по ширине волнового пакета  $\delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_j$  в окрестности  $k_j$  и  $\omega_j$ . Отметим, что в этом случае условия резонанса имеют вид  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$ ,  $\omega(\vec{k}) + \omega(\vec{k}_2) = \omega(\vec{k}_3)$ , а направления волновых векторов и групповых скоростей волн в анизотропной среде могут не совпадать.

Теперь можно поставить задачу о стационарном параметрическом усилении слабых волн в пространстве при наличии пучка накачки с конечной шириной (апertureй). Для простоты ограничимся случаем двумерных волновых пучков, поля которых на границе промодулированы по одной поперечной координате  $y$  и развиваются вдоль оси  $x$ . До-

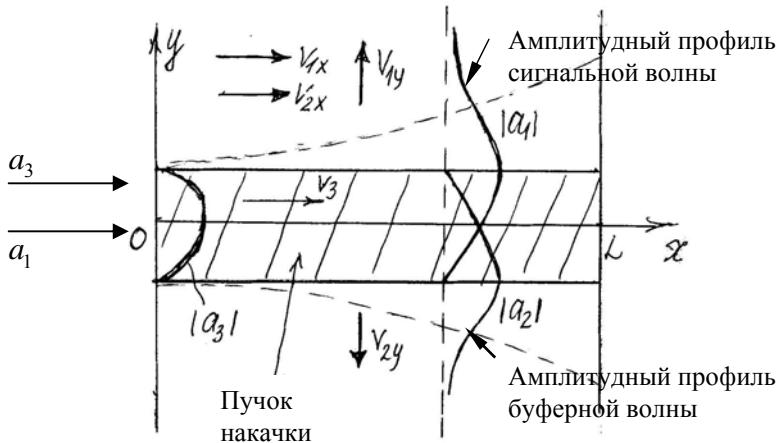


Рис. 2 Иллюстрация к эффекту пространственного захвата слабых волн пучком накачки. Пунктиром показана область локализации захваченных волн. Заштрихована область локализации пучка накачки

пустим (это важное условие!), что направление оси  $x$  совпадает с направлением групповой скорости волны накачки:  $|\vec{V}_3| = V_{3x} > 0$ . Тогда из (6) получим уравнения стационарного взаимодействия двумерных пучков виде

$$V_{3x} \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad V_{1x} \frac{\partial a_1}{\partial x} + V_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad V_{2x} \frac{\partial a_2}{\partial x} - |V_{2y}| \frac{\partial a_2}{\partial y} = \sigma_2 a_1^* a_3. \quad (7)$$

Чтобы аналогия с временной задачей была полной, в (7) принято, что слабые волны распространяются вглубь среды в одном направлении с накачкой ( $V_{1x}, V_{2x} > 0$ ) и имеют различные направления групповых скоростей поперек пучка накачки:  $V_{1y} > 0, V_{2y} = -|V_{2y}| < 0$ .

Как видно из первого уравнения (7), амплитудный профиль по  $y$  (апертура) пучка накачки не изменяется вдоль оси  $x$ , т.е.  $a_3 = a_3(y)$ . Область пучка накачки, возбуждаемого с границы  $x = 0$ , заштрихована на рис. 2. Теперь после деления первого и второго уравнений на  $V_{1x}$  и  $V_{2x}$  и замены  $x \rightarrow t, y \rightarrow x$  уравнения задачи в точности сводятся к рассмотренным выше для параметрической неустойчивости во времени. Ранее уже говорилось о том, что сведение временной задачи к пространственной и обратно называется методом пространственно-временной аналогии. Приведенное выше решение временной задачи в данном случае соответствует пространственному захвату пучков слабых сигнальных волн пучком накачки, когда поля слабых волн локализуются внутри пучка накачки и выносят энергию в разных направлениях поперек пучка накачки за его пределами. На рис. 2 показаны профили волн. Поле в сечении  $x = \text{const}$  полностью аналогично показанному на рис. 1 вдоль координаты  $x$  в фиксированный момент времени. Поскольку поле усиливаемых волн локализуется и нарастает внутри пучка накачки, эффект захвата пучков сигнальных волн в области накачки важен для реализации распределенного параметрического усилителя. Он дает возможность усиливать волну сигнала, локализованную внутри пучка накачки, даже если она имеет поперечную к нему составляющую групповой скорости. Параметрическое усиление возникает при превышении амплитуды импульса накачки над пороговым значением. Критерий усиления можно вывести из критерия (5), полученного выше в задаче о захвате волн импульсом накачки.

**Длинные нелинейные волны в средах со слабой дисперсией**  
**Уравнение Кортевега-де-Вриза**

Рассмотрим в качестве модели консервативной нелинейной среды распределенную LC-линию, в которой дисперсия становится слабой в области малых волновых чисел (длинных волн), а нелинейность определяется зависимостью емкости от напряжения. Нелинейную емкость имеет р-п-переход, на который подано запирающее напряжение. Принципиальная схема звена в такой линии показана на рис. 1а. Уравнения Кирхгофа для распределенной LC-линии с учетом обозначений на рис. 1а имеют вид

$$\begin{aligned} L \frac{\partial I}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + I = I_1, \quad \frac{\partial I_1}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \equiv -\frac{dQ}{du} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{dQ}{du} &\equiv C_{NL} = C_0 + \underbrace{bu^p}_{\delta C_{NL}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p = 1, 2, \dots$  – степень в аппроксимации нелинейной добавки к емкости,  $Q$  – заряд на верхней обкладке конденсатора,  $\partial Q / \partial t$  – ток через емкость,  $C_{NL}$  – нелинейная емкость,  $\delta C_{NL}$  – нелинейная добавка к емкости,  $p = 1, 2$ ;  $b$  – постоянная. Переменная  $u$  в (1) есть отклонение полного напряжения на запертом р-п-переходе от постоянного запирающего напряжения  $U_0$ , при котором емкость равна  $C_0$ . После несложных преобразований получим одно уравнение для напряжения  $u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{C_1}{C_0} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = -\frac{b}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( u^p \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где  $V = 1/\sqrt{LC_0}$  – Фазовая скорость волн в линейной среде при  $k \rightarrow 0$ . Отыскивая решение линеаризованного уравнения (2) ( $\alpha = 0$ ) в виде  $u \sim \exp(ikx - i\omega t)$  получим дисперсионные ветви волн в линейной задаче:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{kV}{\sqrt{1 + (k^2/k_0^2)}}, \quad (3)$$

где  $k_0 = \sqrt{C_0/C_1}$  – характерный масштаб дисперсии по волновым числам (см. рис. 2). От-

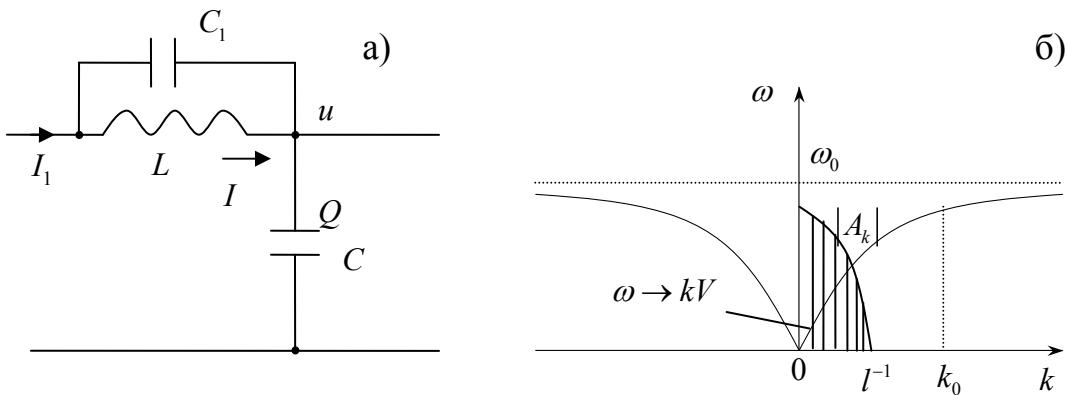


Рис. 1 Схема звена (а) и дисперсионные ветви (б) LC-линии с дисперсией в области высоких частот. Вертикальными сплошными линиями показан спектр нелинейной волны по волновым числам  $|A_k|$  ( $l$  – пространственный масштаб волны,  $k_0$  – масштаб дисперсии ветви по волновому числу  $k$ ,  $\omega_0 = k_0 V$ ).

метим, что в распределенной линии размерности  $C_0$  и  $C_1$  не совпадают. Допустим, что волна имеет характерный пространственный масштаб  $l$  и энергонесущая часть спектра волны лежит в области малых волновых чисел (слабой дисперсии):  $|k| \lesssim l^{-1} \ll k_0$ . Тогда дисперсионные ветви (3) можно разложить в ряд по этому малому параметру  $k^2 / k_0^2 \ll 1$ . С точностью до первой поправки имеем

$$\omega_{1,2} \approx \pm V k \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_0^2} \right). \quad (4)$$

Из (4) видно, что в главном приближении дисперсия отсутствует, а дисперсионная добавка к частоте в пределах локализации спектра волны мала и пропорциональна  $k^3$ . Введем безразмерные переменные

$$u_{new} = \frac{u}{u_*}, \quad x_{new} = \frac{x}{l}, \quad t_{new} = \frac{Vt}{l} \quad (5)$$

где  $u_*$  – характерное напряжение,  $l$  – пространственный масштаб волны (например,  $u_*$  может быть амплитудой солитона, а  $l$  – его шириной). Отбрасывая для краткости индекс «new» получаем безразмерную форму уравнения (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( u^p \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (6)$$

где  $\varepsilon = bu_*^p / C_0 \sim \delta C_{NL} / C_0 \ll 1$  – параметр нелинейности,  $\beta = 1/(k_0 l) = V / (\omega_0 l) \ll 1$  – параметр дисперсии. Оба эти параметра предполагаются малыми.

Можно выделить два предельных случая.

1. Эффекты нелинейности значительно сильнее дисперсии:  $\beta^2 \ll \varepsilon \ll 1$ . В первом приближении на временах  $\sim 1/\varepsilon$  членом дисперсии в (6) можно пренебречь. Получаем уравнение бегущей волны с консервативной нелинейностью. Можно показать, что в этой задаче возможны простые волны (в этом случае удобнее вернуться к паре уравнений первого порядка для тока и напряжения). Известно, что в простой волне происходит укручение профиля и образование на нем разрыва. При укручении профиля пространственный спектр волны расширяется, поэтому дисперсией через некоторое время нельзя пренебречь. Дисперсия (различие фазовых скоростей гармоник) приводит к «разбеганию» гармоник и размыванию крутого участка на профиле волны. Таким образом, даже если на начальном этапе дисперсия была несущественна, в процессе эволюции волны возникает режим, в котором дисперсией нельзя пренебречь.
2. Эффекты дисперсии и нелинейности малы и сравнимы по величине:  $\varepsilon \sim \beta^2 \ll 1$ . Этот наиболее интересная ситуация, так как нелинейность и дисперсия имеют противоположное действие на волну (нелинейность приводит к укручению профиля, а дисперсия – к сглаживанию)

### Вывод уравнения КdВ с помощью асимптотического метода

Для решения уравнения (6) при  $\varepsilon, \beta^2 \ll 1$  воспользуемся методом Боголюбова-Митропольского. Проведем сначала скейлинг (масштабирование) малых параметров, чтобы получить задачу с одним малым параметром. Выбор скейлинга определяет класс изучаемых процессов. В нашей задаче наибольший интерес представляет исследование волн, которые характеризуются балансом между эффектами дисперсии и нелинейности. Для этого класса процессов подходит скейлинг

$$\beta^2 = \varepsilon. \quad (7)$$

Учитывая определение  $\varepsilon$  и  $\beta$ , можно видеть, что этот скейлинг фактически сводится к заданию связи между характерным масштабом возмущения и его амплитудой.

При  $\varepsilon = 0$  с учетом (7) уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Общее решение (8) есть суперпозиция двух бегущих волн в противоположных направлениях:  $u = f_1(x-t) + f_2(x+t)$ . Решение (6) ищем в виде разложения по степеням  $\varepsilon$ , в главной части которого стоит медленно меняющийся профиль волны, бегущей в положительном направлении оси  $x$  (одноволновое приближение):

$$u = f(\underbrace{x-t}_{\xi}, \tau) + \varepsilon u^{(1)}(x, t, \tau) + \dots, \quad (9)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  – медленное время. Быстрое время отвечает за быстрое изменение профиля волны при ее прохождении через фиксированную точку  $x$ . Переменная  $\tau$  описывает медленные изменения профиля волны в сопровождающей системе отсчета (при фиксированном  $\xi$ ). Разложение (9) является обобщением метода Боголюбова-Митропольского, который использовался на предыдущих лекциях для квазимонохроматических волн (п. 2.1, 3.1, 3.6). Дифференцирование по времени в уравнении (6) выполняем в соответствии с правилом

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (10)$$

где производная по  $t$  в скобках берется по быстрому времени. В безразмерных переменных профиль волны имеет пространственный масштаб, равный единице, которому в размерностных переменных (5) соответствует масштаб  $l$ . В данном случае нет необходимости в использовании медленной координаты, так как решение (9) допускает произвольные формы изменения профиля волны во времени. Функцию  $f$  будем искать как решение уравнения

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_\xi = \Phi^{(1)} + \varepsilon \Phi^{(2)} + \dots, \quad (11)$$

где  $\Phi^{(j)}$  – неизвестные функционалы, которые находятся из условия ограниченности добавок  $u^{(j)}$  в разложении (9). Подстановка (9) в (6) приводит к разложению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial t} - \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( f^p \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] = O(\varepsilon^2). \quad (12)$$

(здесь  $\partial / \partial t$  – производные по быстрому времени). Приравнивание нулю членов порядка  $\varepsilon^0 = 1$  дает уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

которое выполняется тождественно, так как дифференцирование по  $t$  в (12), (13) производится по явно входящему времени. В порядке  $\varepsilon$  из (12) получим уравнение для первой добавки

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-t}, \quad (14)$$

$$F(\xi, \tau) = 2 \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} - f^p \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (15)$$

Для наших целей будет частного решения (14), которое легко проверяется прямой подстановкой:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{2} t F(x-t). \quad (16)$$

(общее решение линейного неоднородного уравнения (14) можно найти, переходя к характеристическим переменным). Формула (16) показывает, что первая добавка в разложении (9) секулярно (линейно) растет во времени и на временах  $t \sim 1/\varepsilon$  становится сравнимой с главной частью решения. Чтобы разложение (9) оставалось применимым на временах  $t \sim 1/\varepsilon$ , необходимо наложить условие отсутствия секулярного роста, которое имеет вид  $F = 0$ . Оно однозначно определяет вид функции  $f$  в главной части разложения (9), для которой получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \gamma_1 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \sigma_1 f^p \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad (17)$$

где  $\gamma_1 = 1/2$ ,  $\sigma_1 = -1/2$ . Подстановку (11) в (12) можно опустить, так как в этом приближении  $\partial f / \partial \tau$  полностью совпадает с  $\Phi^{(1)}$ . Уравнение (17) при  $p \geq 2$  называется обобщенным уравнением КдВ. Классическое уравнение КдВ это уравнение с квадратичной нелинейностью, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \gamma_1 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \sigma_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

Оно было впервые получено Кортевегом де Бризом еще в XIX веке для волн на «мелкой» воде (тогда  $f$  имеет смысл подъема точек поверхности воды).

Уравнение (18) фактически записано в сопутствующей системе отсчета, которая движется со скоростью распространения бесконечно длинных волн в линейной задаче (в нормированных переменных она равна единице). Для того, чтобы перейти в (18) к исходной неподвижной системе отсчета, необходимо сделать обратную замену переменных  $t = \tau / \varepsilon$ ,  $x = \xi + \tau / \varepsilon$ . Это приводит к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \sigma f \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

где  $V = 1$ ,  $\gamma = \varepsilon \gamma_1$ ,  $\sigma = \varepsilon \sigma_1$ . В уравнении (19) присутствует оператор бегущей волны (первые два слагаемых) и члены с малым параметром, которые определяют медленное изменение профиля бегущей волны. Поиск решения линеаризованного уравнения (19) в виде  $\sim \exp(ikx - i\omega t)$  дает дисперсионное уравнение  $\omega = kV - \gamma_1 k^3$ , которое совпадает с исходным разложением закона дисперсии (4).

Подводя итоги, сформулируем условия применимости уравнения КдВ:

- ✓ Среда консервативна и имеет малую квадратичную нелинейность.
- ✓ Рассматривается класс одноволновых решений.
- ✓ В области длинных волн (малых волновых чисел) дисперсия слабая, частота определена выражением  $\omega = kV - \gamma_1 k^3$  («кубический» закон дисперсии).
- ✓ КдВ описывает нелинейные волны, при распространении которых нелинейность и дисперсия являются величинами одного порядка.

Уравнение КдВ относится к эталонным (базовым) уравнениям нелинейной физики, для которых характерны следующие признаки.

- ✓ Эталонное уравнение описывает волновые процессы в определенном классе сред, обладающих общеволновыми свойствами (такими, как консервативность, вид дисперсии, вид нелинейности и т.п.);
- ✓ Эталонное уравнение описывает типичные (характерные) для данного класса сред волновые движения. В уравнении КдВ такими являются солитоны и периодические волны. В дальнейшем мы убедимся, что солитоны возможны не только в уравнении КдВ и являются фундаментальным объектом нелинейной физики.

**Стационарные волны и солитоны в уравнении КдВ** (см. п. 4.1.1)

## Спектральная интерпретация образования кноидальных волн и солитонов.

Возникновение кноидальных волн и солитонов можно интерпретировать на спектральном языке. Пусть начальное возмущение периодическое с большим периодом:  $f = f_0 \cos(k_1 x)$ , где  $k_1 \ll k_0$ . В области с малой дисперсией квадратичная нелинейность приводит к генерации «кратных» гармоник с волновыми числами  $k_n = nk_1$  и частотами  $\omega_n = k_n V$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  (на рис. 2 они показаны векторами), так как в отсутствие дисперсии выполнены условия резонанса для трехволновых взаимодействий:

$$\begin{aligned} k_1 + k_1 &= k_2, \quad \omega_1 + \omega_1 = \omega_2 \\ k_1 + k_2 &= k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \end{aligned} \quad (20)$$

Поэтому общее периодическое решение (19) можно искать в виде ряда Фурье

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n x - i\omega_n t}. \quad (21)$$

Поскольку  $f$  вещественное, на комплексные амплитуды налагается условие  $a_{-n} = a_n^*$ . Волновое число первой гармоники  $k_1$  в (21) можно выбрать сколь угодно малым (длину

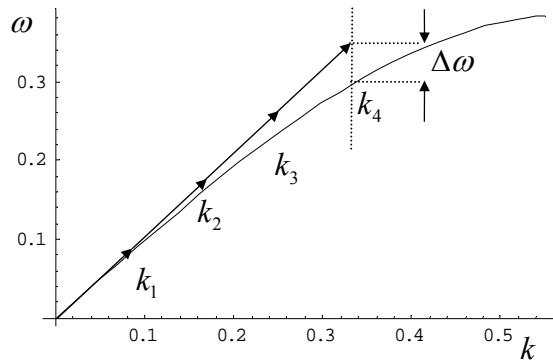


Рис. 2. Условия резонанса при возбуждении кратных гармоник в среде со слабой дисперсией и возрастание отклонения их частот от частоты собственных волн при увеличении  $k_n$

волны  $2\pi/k_1$  сколь угодно большой). Из рис. 2 видно, что при слабой дисперсии частоты  $\omega_n$  близки к частотам собственных волн  $\omega(k_n) = k_n V - \gamma k_n^3$ , в результате чего происходит эффективное расширение спектра волны, которая принимает существенно несинусоидальную форму. На рис. 2 показано отклонение частот кратных гармоник  $\omega_n$  от частот собственных волн  $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega(k_n) = \gamma k_n^3$ . Когда  $\Delta\omega_n$  превышает величину нелинейности (которая определяется амплитудой волны), трехволновые взаимодействия теряют эффективность и расширение спектра прекращается.

## О методе обратной задачи теории рассеяния (ОЗР) и теории солитонов

Уравнение КdВ относится к классу точно интегрируемых уравнений методом обратной задачи рассеяния (ОЗР), в рамках которого решение *нелинейного* дифференциального уравнения в частных производных сводится к решению *линейного* уравнения в частных производных с переменными коэффициентами (задачи о рассеянии волн). Линейная задача рассеяния тоже сложна, однако математики сумели получить информацию о ее реше-

нии и определить асимптотическое (на больших временах) поведение решения. Не существует регулярной процедуры подбора «парного» линейного уравнения. Успех решения в значительной степени определяет интуиция. Термин «обратная задача рассеяния» связан с тем, что в «парной» линейной задаче необходимо определить неоднородность по известному рассеянному полю. Отметим, что консервативность нелинейной задачи является необходимым, но не достаточным условием ее полной интегрируемости. В настоящее время методом обратной задачи решено большое число эталонных уравнений нелинейной физики.

Метод ОЗР – сложный математический метод, реализация которого не дает общего решения в виде одной или нескольких формул. Это процедура, пошаговое выполнение которой позволяет получить решение задачи Коши. Важное для приложений достоинство метода ОЗР состоит в том, что он позволяет *в явном виде* получить асимптотическое (на больших временах) решение нелинейной задачи при локализованных в пространстве начальных возмущениях (так называемые N-солитонные решения). При этом связь параметров асимптотических решений (амплитуд и числа солитонов N) с начальными условиями дается в виде простых формул.

Уравнение КдВ было первым уравнением, решенным методом ОЗР. Именно благодаря этому уравнению появился и был затем развит метод ОЗР. С помощью метода ОЗР строго доказано фундаментальное свойство точных решений уравнения КдВ, которое состоит в том, что локализованное начальное возмущение одной полярности на больших временах превращается последовательность солитонов (плюс малые добавки типа убегающих «линейных» волн). При этом метод ОЗР в явном виде определяет связь числа солитонов и их параметров с начальным возмущением. Из этого фундаментального утверждения выводятся свойства солитонов, которые позволяют провести их аналогию с частицами.

- 1) Солитоны являются устойчивыми образованиями «в малом», т.е. при наложении малых возмущений они «сбрасывают» эти отклонения и снова становятся солитонами.
- 2) При столкновениях солитоны сохраняют свою индивидуальность (на языке теории колебаний они фактически являются устойчивыми образованиями «в большом»). Различают неупругие столкновения солитонов, при которых они проходят один сквозь другой, и «упругие» столкновения, когда они «отталкиваются» друг от друга.

По существу, метод ОЗР позволил строго обосновать фундаментальную роль солитонов как объекта нелинейной физики. Солитоны обнаружены в целом ряде базовых уравнений нелинейной физики, решенных методом ОЗР. На развитие теории солитонов были направлены значительные усилия физиков и математиков. В настоящее время результаты проведенных исследований отражены монографиях по этому вопросу.

## 1. Стационарные волны в уравнении КдВ

Уравнение КдВ в "лабораторной" системе отсчета

( $V$  – скорость волн в линейной среде без дисперсии)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \sigma f \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Решение в виде стационарной волны:

$$f = f(x - V_1 t); \quad \underbrace{\gamma \frac{d^2 f}{d \xi_1^2}}_{\xi_1} = (V_1 - V)f - \frac{1}{2}\sigma f^2 \quad \left| \times \frac{df}{d \xi_1} \right.$$

$$\left( \frac{df}{d \xi_1} \right)^2 + \Pi(f) = Const, \quad \Pi = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{\gamma} f^3 - \frac{V_1 - V}{\gamma} f^2; \quad \int \frac{\pm \gamma df}{[C - \frac{1}{3} \sigma f^3 + (V_1 - V)f^2]^{1/2}} = \xi$$

Решение в виде уединенной волны (солитона) при  $C=0$

$$f = A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{A \sigma}{12 \gamma}} (x - x_0 - V_1 t) \right], \quad V_1 - V = \frac{1}{3} \sigma A$$

Скорость солитона однозначно выражается через его амплитуду  $A$ .

$$l = \sqrt{\frac{12 \gamma}{A \sigma}} \text{ – ширина солитона на уровне } f \approx 0.42 f_{\max}$$

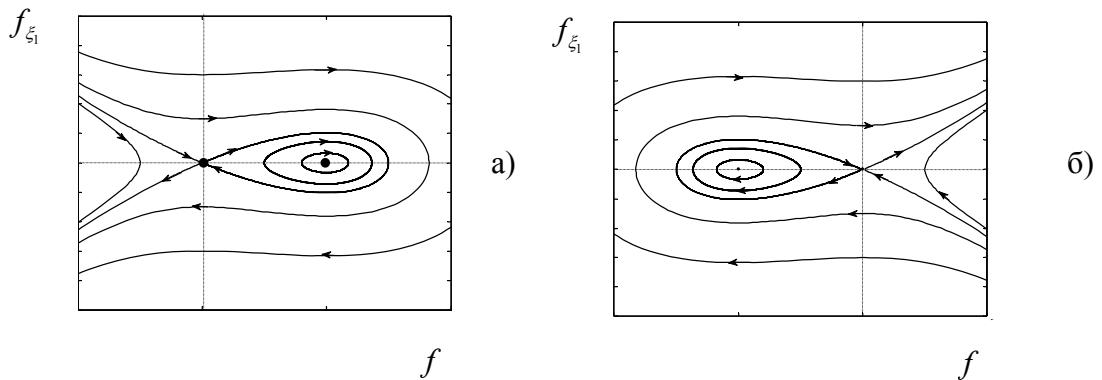


Рис. 1. (а) Фазовая плоскость нелинейного осциллятора при  $\gamma\sigma > 0$ ,  $(V_1 - V)\gamma > 0$ , которая описывает стационарные волны с положительной ( $f > 0$ ) полярностью. (б) Фазовая плоскость нелинейного осциллятора при  $\gamma\sigma < 0$ ,  $(V_1 - V)\gamma > 0$ , отображающая волны с отрицательной ( $f < 0$ ) полярностью. Солитону соответствует сепаратриса, идущая из седла в седло.

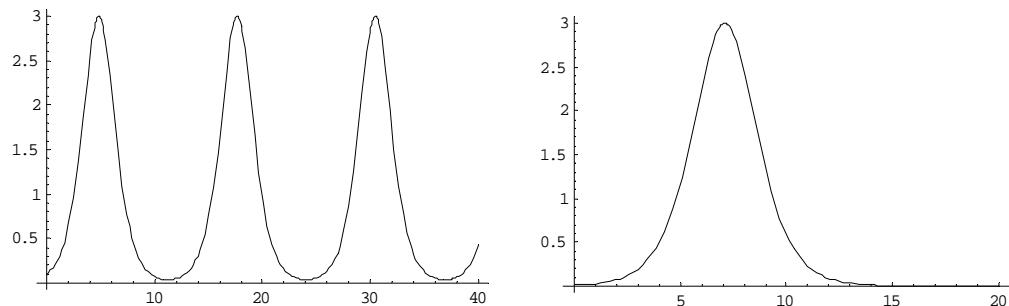


Рис.2 Кноидальные стационарные волны (а) и уединенная волна (солитон) (б), полученные численно при  $\sigma = \gamma = V_1 - V = 1$ .

## 2. Влияние потерь на форму стационарных волн

В простейшем случае при учете потерь в системе отсчета, движущейся со скоростью  $V$  после перехода к переменным  $t_1 = t$ ,  $\xi = x - Vt$  получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + \gamma \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \sigma f \frac{\partial f}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

где  $\nu$  – коэффициент потерь. Для стационарных волн  $f = f(\zeta)$  ( $\zeta = \xi - c_1 t$ ) после нормировок имеем уравнение нелинейного осциллятора с затуханием

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = c_1 f - f^2 + \nu_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta}$$

Перепад функции  $f$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  на рис. 3б,в определяется ненулевым состоянием равновесия  $f = c_1$  (в котором при  $\nu_1 < 2\sqrt{c_1}$  получаем фокус, при  $\nu_1 > 2\sqrt{c_1}$  – узел).  $c_1 > 0$  – скорость стационарной волны, совпадающая по величине с перепадом (произвольный параметр). Для волн на воде возможны специфические потери, связанные с обрушением волны, которое сопровождается развитием турбулентности (сложного движения жидкости, в котором происходит передача энергии к все более мелким масштабам и в конечном счете ее преобразование в тепло). Обрушение волны сопровождается образованием турбулентной боры (рис. 4б).

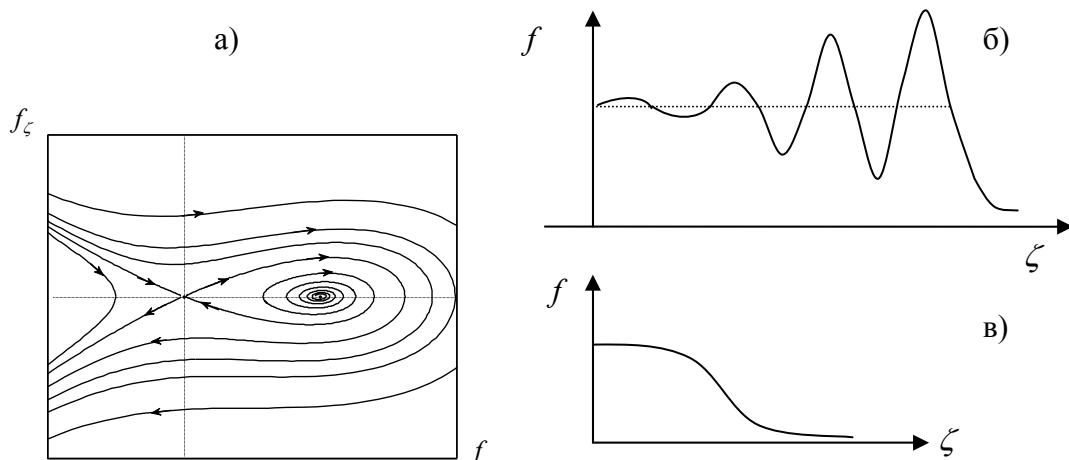


Рис. 3. Фазовая плоскость уравнения стационарных волн в случае малых потерь (а) и ударная волна с осцилляциями на фронте, соответствующая сепаратрисе, идущей из седла в фокус (б). Ударная волна с гладким фронтом в случае больших потерь (в).

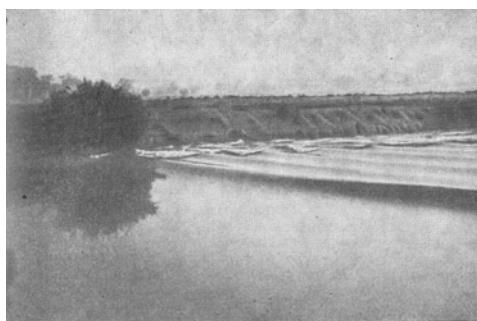


Рис. 4а Волнистая бора на реке Северн (Англия).



Рис. 4б. Турублентная бора в другой части реки Северн.

## Другие уравнения для длинных нелинейных волн

1) Дисперсионная ветвь при малых волновых числах:  $\omega = kV - \gamma |k|$   $k = kV - \gamma k^2 \text{sign}(k)$

Уравнение Бенджамена-Оно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x', t)}{x - x'} dx' + \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Алгебраические солитоны ( $\xi_1 = x - V_1 t$ )

$$u(\xi_1) = \frac{A}{1 + (\xi_1 / \delta)^2}, \quad V - V_1 = \frac{1}{4} \sigma A, \quad |\delta| = \frac{4\beta}{\sigma A}$$

2) Длинные двумерные волны в изотропной среде с «кубичной» дисперсией

Двумерное разложение Фурье:  $u^{(0)} = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\vec{k}} e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y$

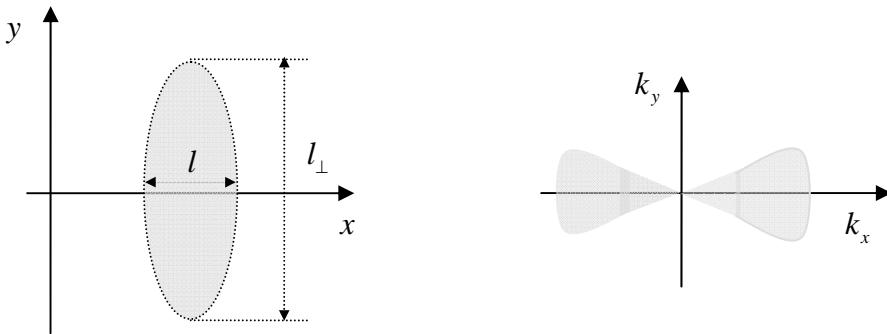


Рис. 1. Схематическое изображение областей локализации уединенной волны (а) ее пространственного спектра (б)

Основные приближения:  $\frac{l}{l_{\perp}} \ll 1, \quad \left( \frac{k_y}{k_x} \right) \ll 1$

$$\omega = \omega(|\vec{k}|) \approx \pm \left( |\vec{k}| V_0 - \gamma |\vec{k}|^3 \right) \approx V k_x + \frac{1}{2} V \frac{k_y^2}{k_x} - \gamma k_x^3 + \text{h.o.t.}$$

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t + Vu_x + \gamma u_{xxx} + \sigma uu_x) + \frac{1}{2} Vu_{yy} = 0$$

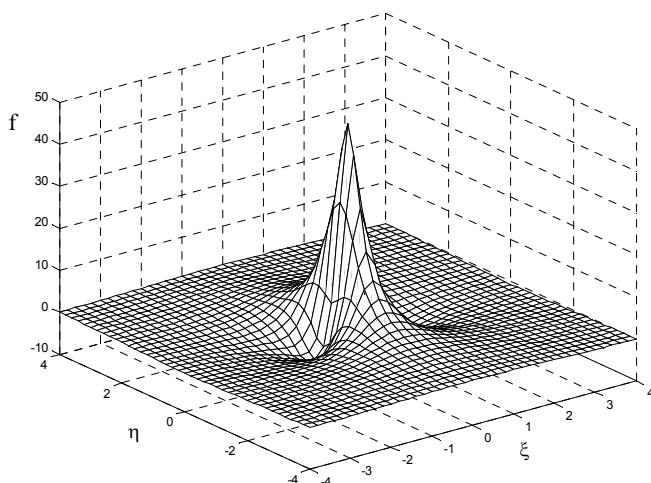


Рис. 2 Двумерный алгебраический солитон в уравнении Кадомцева-Петвиашвили (стационарная волна) при  $\gamma < 0$

$$u = \tilde{f}(x - V_1 t, y), \quad V_1 < V$$

$$\xi \sim x - V_1 t, \quad \eta \sim y$$

$$f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} - \frac{1}{12} f_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{12} (f^2)_{\xi\xi}$$

$$f = 48 \frac{1 + 4\eta^2 - 4\xi^2}{(1 + 4\eta^2 + 4\xi^2)^2}$$

## Модулированные волны в консервативных нелинейных средах.

Построение эталонных (базовых) уравнений нелинейной физики, как правило, опирается на применение методов малого параметра. В случае модулированной волны малыми являются нелинейность и спектральная ширина волнового пакета

В качестве простого примера рассмотрим LC- линию с нелинейной емкостью и дисперсией в области высоких частот, предполагая, что волновое число несущей модулированной волны  $k_0$  находится в области сильной дисперсии. Представим нелинейную емкость в виде  $C_{NL} = C_0 + bu^2$ , где  $u$  – отклонение напряжения на емкости от  $U_0$ ,  $b$  – постоянный коэффициент. Для напряжения  $u$  можно записать одно уравнение с «кубичной» нелинейностью (см. аналогично п. 3.1). Введем в это уравнение малый параметр  $\varepsilon \ll 1$  с помощью замены  $u = \varepsilon u_{new}$ . Отбрасывая для краткости индекс «new», получим одно уравнение для напряжения

$$D(\hat{\omega}, \hat{k})u(x, t) = \varepsilon^2 b \hat{\omega}^2 L(\hat{\omega}) f \quad \left( f = \frac{1}{3} u^3 \right), \quad (1)$$

Решение (1) будем строить в виде модулированной волны

$$u = a(\tau, \chi) \exp(i k_0 x - i \omega_0 t) + k.c. + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots, \quad (2)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\chi = \varepsilon x$  и  $a(\tau, \chi)$  – медленно меняющаяся амплитуда волны, которая после введения  $\varepsilon$  рассматривается как величина порядка единицы. Как обычно, амплитудное уравнение строим в виде  $\partial a / \partial \tau = F^{(1)} + \varepsilon F^{(2)} + \dots$ , где  $F^{(j)}$  – неизвестные функционалы.

Выделим из дисперсионной функции ветвь, на которой находится волна  $(\omega_0, k_0)$ , полагая

$$D(\omega, k) \equiv (\omega - \omega(k)) D_1(\omega, k), \quad (3)$$

где  $\omega_0 - \omega(k_0) = 0$ ,  $D_1(\omega_0, k_0) \neq 0$ . Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$(\hat{\omega} - \omega(\hat{k}))u = \varepsilon^2 \frac{b \hat{\omega}^2 L(\hat{\omega})}{3 D_1(\hat{\omega}, \hat{k})} u^3. \quad (4)$$

В соответствии с формулой, определяющей действие операторной функции на квазимохроматическое волновое поле (см. п. 2.1), получим

$$[\hat{\omega} - \omega(\hat{k})] \left[ a e^{ik_0 x - i \omega_0 t} \right] = \left( i \varepsilon \frac{\partial a}{\partial \tau} + \varepsilon i \omega'_k \frac{\partial a}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \omega''_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial \chi^2} + \dots \right) e^{ik_0 x - i \omega_0 t} \quad (5)$$

Учитывая (5), подставим (2) в (4) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях  $\varepsilon$ . В «нулевом порядке» по  $\varepsilon$  получаем тождество. Представляя первую добавку в виде  $u^{(1)} = \hat{u}^{(1)}(\tau, \chi) \exp(i k_0 x - i \omega_0 t) + k.c.$ , в порядке  $\varepsilon$ , получим из условия ограниченности  $\hat{u}^{(1)}$  функционал  $F^{(1)} = v_g \partial a / \partial \chi$ , где  $v_g = \omega'_k$  – групповая скорость волны  $(\omega_0, k_0)$ . В порядке  $\varepsilon^2$ , представляя вторую добавку в виде  $u^{(2)} = \hat{u}^{(2)} \exp(i k_0 x - i \omega_0 t) + k.c.$  из условия ограниченности  $\hat{u}^{(2)}$  находим  $F^{(2)}$ . В результате приходим к амплитудному уравнению второго приближения  $\varepsilon^2$ :

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial a}{\partial \chi} - \frac{1}{2} \varepsilon i \omega''_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial \chi^2} = -\varepsilon iT |a|^2 a. \quad (6)$$

В соответствии с формулой, определяющей действие операторной функции на квазимохроматическое поле, находим  $T = b \omega_0^2 L(\omega_0) / D_1(\omega_0, k_0)$ . Вычисление  $D_1(\omega_0, k_0)$  напрямую по формуле (3) приводит к неопределенности "0 на 0". Однако этого можно избежать, вычисляя производную по  $\omega$  от функции  $D$ , заданной выражением (3). Это

дает  $D'_\omega(\omega_0, k_0) = D_1(\omega_0, k_0)$ . Отсюда получаем  $T = b\omega_0^2 L(\omega_0)/D'_\omega(\omega_0, k_0)$ . После возвращения в (6) к исходным координате и времени, получим уравнение

$$\underbrace{\frac{\partial a}{\partial t}}_{\sim \varepsilon} + v_g \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}}_{\sim \varepsilon} - \frac{1}{2} i \omega''_{kk} \underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}}_{\sim \varepsilon^2} = -\varepsilon^2 iT |a|^2 a. \quad (7)$$

Напомним, что в соответствии с определением  $\varepsilon$  амплитуда  $a$  предполагается величиной «порядка единицы». В отличие от приближения группового распространения (п. 3.6) в (7) присутствует дополнительный член  $\sim \omega''_{kk}$ , который описывает дисперсию внутри узкого волнового пакета и определяет «расплывание» огибающей на временах  $\sim 1/\varepsilon^2$ . Если рассматривать (7) как выражение для скорости изменения амплитуды  $a_t$ , то член  $\sim a_x$  в (7) описывает «быстрые» изменения амплитуды в точке  $x$ , связанные с групповым распространением, а остальные члены – более медленные ее изменения из-за дисперсии и нелинейности. Поскольку ширина волнового пакета имеет порядок  $\varepsilon$ , а вклад нелинейности – порядок  $\varepsilon^2$ , члены нелинейности и дисперсии в (7) оказываются величинами одного порядка малости (производимые ими эффекты сравнимы по величине). Отметим, что при поиске решений в форме (2) задается определенное соотношение (скейлинг) между параметром нелинейности  $\varepsilon$  и спектральной шириной волнового пакета ( $|a_x/a| \sim \varepsilon$ ). Уравнение (7) описывает процессы, соответствующие этому скейлингу.

Относительно быстрые изменения амплитуды в точке  $x$ , связанные с групповым распространением, можно исключить, переходя в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, подобно тому, как это делалось в п. 3.6. После перехода к переменным  $\chi_1 = \varepsilon(x - V_g t)$  и  $\tau_1 = \varepsilon^2 t$  уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial \tau_1} - \frac{1}{2} i \omega''_{kk} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \chi_1^2} = -iT |a_1|^2 a_1. \quad (8)$$

Отметим, что в уравнении (8) отсутствует малый параметр  $\varepsilon$ . Как видно из (8), в сопутствующей системе отсчета происходят только медленные изменения огибающей, связанные с дисперсией внутри узкого волнового пакета и нелинейным сдвигом частоты. Уравнение (8) часто называют *нелинейным уравнением Шредингера (НУШ)*. Происхождение термина связано с тем, что это уравнение совпадает с уравнением Шредингера, в котором потенциал  $\Pi(x)$  заменен на  $|a_1|^2$ . Таким образом, НУШ описывает распространение модулированных волн в консервативных средах с кубичной и квадратичной нелинейностью при сравнимых по величине эффектах дисперсии и нелинейности.

Уравнение (7) можно вывести также для консервативной среды с квадратичной нелинейностью, так как во втором порядке метода возмущений в квадратичной среде возникают эффекты кубичной нелинейности. Однако, следует иметь в виду, что в квадратичной среде в (7) могут появиться средние поля второго порядка по амплитуде, которые подчиняются отдельному уравнению (см. п. 3.6).

Для анализа уравнения (7) и построения в дальнейшем его обобщений, перейдем к спектральному представлению для огибающей (комплексной амплитуды)

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_\kappa \exp(i\kappa x) d\kappa, \quad a_\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} a \exp(-i\kappa x) d\kappa, \quad (9)$$

где  $\kappa$  – волновое число спектра огибающей. Подставляя спектральное разложение (9) для  $a(x, t)$  в главную часть решения (2) и переходя к переменной  $k = k_0 + \kappa$ , нетрудно найти связь спектра полного поля модулированной волны  $\hat{u}_k$  со спектром огибающей  $\hat{a}_\kappa$

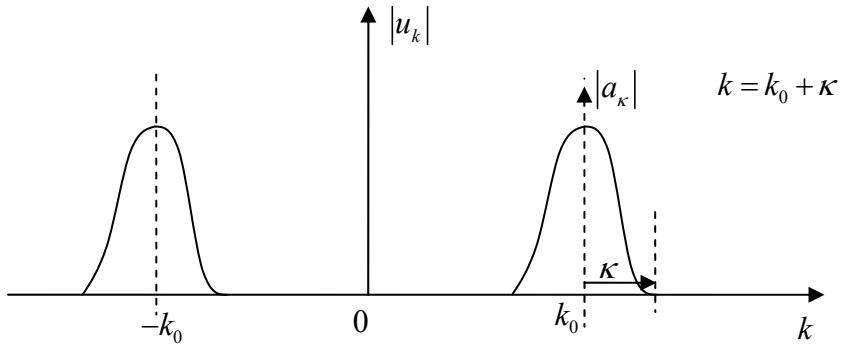


Рис.1 Связь волнового числа  $\kappa$  спектра комплексной амплитуды  $a(x,t)$  с волновым числом  $k$  спектра полного поля  $u(x,t)$ .

которая при  $k_0 > 0$  имеет вид  $\hat{u}_k = \hat{a}_{k-k_0}$  (или  $\hat{a}_\kappa = \hat{u}_{k_0+\kappa}$ ). Таким образом, спектры огибающей и полного поля отличаются только сдвигом по волновому числу – см. рис. 1. Ввиду плавной зависимости  $a$  от  $x$  их ширина мала по сравнению с волновым числом несущей  $k_0$ :  $|k - k_0| = |\kappa| \ll k_0$ . Применяя к (7) преобразование Фурье (9), получим

$$\frac{\partial a_\kappa}{\partial t} + i \underbrace{\left( \omega'_\kappa \kappa + \frac{1}{2} \omega''_{kk} \kappa^2 \right)}_{= \omega(k_0 + \kappa) - \omega(k_0)} a_\kappa = -\varepsilon^2 iT \left[ |a|^2 a \right]_\kappa. \quad (10)$$

где  $[...]_\kappa$  – преобразование Фурье от нелинейного члена (которое также можно выразить через  $a_\kappa$ ). Из (10) видно, что коэффициент в круглых скобках при  $a_\kappa$  содержит первые два члена разложения сдвига частоты гармоники  $k = k_0 + \kappa$  спектра полного поля  $\hat{u}_k$  относительно несущей  $k = k_0$  в ряд по степеням малого волнового числа спектра огибающей  $\kappa$ . Члены с более высокими степенями  $\kappa \sim \varepsilon$  имеют более высокий порядок по  $\varepsilon$  и по этой причине «не перешли» в (10) из формулы (5). Как видно из (10), в линейном пределе ( $a \rightarrow 0$ ) сдвиг частоты гармоник спектра  $\hat{u}_k$  совпадает с частотой гармоники  $\kappa$  спектра огибающей  $a_\kappa$ . В дальнейшем мы воспользуемся уравнением (10) для построения других эталонных уравнений нелинейной физики, формальная процедура вывода которых аналогична описанной выше.

### Нелинейное параболическое уравнение для волновых пучков

В предыдущем разделе было получено нелинейное уравнение Шредингера для одномерных плоских волн. Рассмотрим его обобщение для волновых пучков с узкими пространственными спектрами, имеющих ограниченное поперечное сечение. Модельным уравнением может служить уравнение (1), в котором вместо  $D(\hat{\omega}, \hat{k})$  запишем  $D(\hat{\omega}, \hat{k}_x, \hat{k}_y)$ , где  $\hat{k}_x = -i\partial/\partial x$ ,  $\hat{k}_y = -i\partial/\partial y$ . Нелинейный член в (8) остается неизменным, так как он находится в главном приближении разложения по малой ширине волнового пакета. Главная часть решения имеет вид

$$u^{(0)} = a(t, x, y) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + k.c. \quad (11)$$

Согласно (11), решение ищется в виде волны, которая распространяется вдоль оси  $x$ , а комплексная амплитуда плавно (по сравнению с масштабом осцилляций несущей) меняется по двум координатам. Процедура вывода амплитудного уравнения принципиально не меняется по сравнению с изложенной выше. Поэтому, чтобы получить амплитудное уравнение, перепишем (10) для двумерного спектрального разложения огибающей:

$$a = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\vec{k}} \exp(i\kappa_x x + i\kappa_y y) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (12)$$

где  $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$  – отклонение волнового вектора гармоник полного поля  $u$  от волнового вектора несущей  $\vec{k}_0 = (k_0, 0)$ . Огибающая имеет узкий спектр по волновым числам:

$$\frac{|\kappa_x|}{k_0} \ll 1, \quad \frac{|\kappa_y|}{k_0} \ll 1. \quad (13)$$

В изотропной среде частота не зависит от направления распространения волны и является функцией модуля волнового вектора. Поэтому в случае изотропной среды разложение разности частот гармоники  $\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{\kappa}$  и несущей в ряд Тейлора по малым величинам (13) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega(|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}|) - \omega(|\vec{k}_0|) &= \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 \kappa_x + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_0 \kappa_x^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2k_0} \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 \kappa_y^2 + O(\kappa_x^3, \kappa_y^3). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что  $|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| = \sqrt{(k_0 + \kappa_x)^2 + \kappa_y^2}$ . Подставим спектральное разложение (12) в двумерный аналог (10) и выполним обратное преобразование Фурье. Изменение спектра модуляции не влияет на нелинейность, так как модуляция дает малые поправки к нелинейному члену. В результате приходим к следующему уравнению для комплексной амплитуды (огибающей) двумерного пучка

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_g \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_0 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{i}{2k_0} \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = -i\varepsilon^2 T |a|^2 a. \quad (15)$$

Уравнение (15) обычно называют нелинейным параболическим уравнением. Новое слагаемое  $\sim d\omega/dk$  по сравнению с (8) связано с конечной шириной спектра пучка по  $\kappa_y$  и описывает эффекты *дифракции* волнового поля (расплывание волновых пучков пространстве из-за конечного размера его поперечного сечения). Для трехмерного волнового пучка, когда  $a = a(x, y, z, t)$  вторая производная по  $y$  заменится на двумерный (поперечный) лапласиан  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Уравнение (15) получено для наиболее важного случая, когда действие нелинейности, дисперсии и дифракции сравнимы по величине. Групповое распространение также можно исключить из (15) путем перехода в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью.

## Модуляционная неустойчивость

Воспользуемся нелинейным параболическим уравнением в исходных переменных, полагая  $\varepsilon = 1$ :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_g \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \left|_0 \right. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{i}{2k_0} \frac{d\omega}{dk} \left|_0 \right. \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = -iT |a|^2 a. \quad (1)$$

Рассмотрим устойчивость решения (1) в виде однородной бегущей волны:  $a = \bar{a}_p \exp(-i\Omega_p t)$  где  $\bar{a}_p = \text{const}$  – амплитуда волны,  $\Omega_p = T |\bar{a}_p|^2$  – нелинейный сдвиг частоты относительно несущей. Представим решение (1) в виде суперпозиции однородной волны и отклонения от нее:  $a = \bar{a}_p \exp(-i\Omega_p t) + \tilde{a}(x, t)$  и линеаризуем полученное уравнение относительно  $\tilde{a}(x, t)$ . Решение полученного линейного уравнения для  $\tilde{a}(x, t)$  ищем в виде двух сателлитов, сдвинутых относительно волнового числа несущей на  $\pm\kappa$ :

$$\tilde{a} = e^{-i\Omega_p t} \left[ a_+(t) e^{i\bar{k}\bar{r}} + a_-(t) e^{-i\bar{k}\bar{r}} \right]. \quad (2)$$

где  $|a_{\pm}| \ll |\bar{a}_p|$ . Собирая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями и приравнивая результаты сложения нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{da_+}{dt} &= -iT \bar{a}_p^2 a_-^* - \left[ iT |\bar{a}_p|^2 + (\kappa_{\parallel} v_g + \delta_{2L}) \right] a_+, \\ \frac{da_-}{dt} &= -iT \bar{a}_p^2 a_+^* - \left[ iT |\bar{a}_p|^2 + (-\kappa_{\parallel} v_g + \delta_{2L}) \right] a_-, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\delta_{2L} = \frac{1}{2} \omega''_{kk} \kappa_{\parallel}^2 + \frac{\omega'_k}{2k_1} \kappa_{\perp}^2$ ,  $\kappa_{\parallel} = \kappa_x$ ,  $\kappa_{\perp} = \sqrt{\kappa_y^2 + \kappa_z^2}$  – поперечное волновое число сателлита.

Решение (3) ищем в виде

$$a_+ = C_+ e^{-i\Omega t}, \quad a_- = C_- e^{i\Omega^* t}, \quad (4)$$

где  $C_{\pm} = \text{const}$ . Подстановка (4) в (3) дает два однородных линейных уравнения относительно  $C_{\pm}$ . Из условия обращения определителя в ноль получаем характеристическое уравнение второго порядка относительно частоты  $\Omega$ , решение которого имеет вид

$$\Omega = \kappa_{\parallel} v_g \pm \kappa_{\parallel} \sqrt{\left( 2T |\bar{a}_p|^2 + \delta_{2L} \right) \delta_{2L}}. \quad (5)$$

Рассмотрим это решение в двух предельных случаях.

1) Одномерная модуляция в направлении распространения (вдоль оси  $x$ ):  $\kappa_{\parallel} \neq 0, \kappa_{\perp} = 0$  (переход к нелинейному уравнению Шредингера). Частота модуляции (5) принимает вид

$$\Omega = \kappa_{\parallel} v_g \pm \kappa_{\parallel} \sqrt{\omega''_{kk} \left( T |\bar{a}_p|^2 + \frac{1}{4} \kappa_{\parallel}^2 \omega''_{kk} \right)}. \quad (6)$$

Под корнем появляется отрицательная величина при выполнении условия

$$T \omega''_{kk} < 0, \quad (7)$$

которое называют критерием Лайтхилла. Смысл его состоит в том, что дисперсионный и нелинейный сдвиги частоты имеют разные знаки. Зависимость мнимой части частоты от волнового числа сателлитов показана на рис. 2. При выполнении (7) в области  $0 < \kappa < \kappa_* = 2 |\bar{a}_p| \sqrt{T / \omega''_{kk}}$  имеется корень с  $(\text{Im } \Omega > 0)$ , т.е. возникает неустойчивость – нарастание глубины модуляции. Этот результат можно объяснить на языке резонансного взаимодействия волн. Уравнения (3) соответствуют четырехволновому взаимодействию в "кубической" среде с условиями резонанса

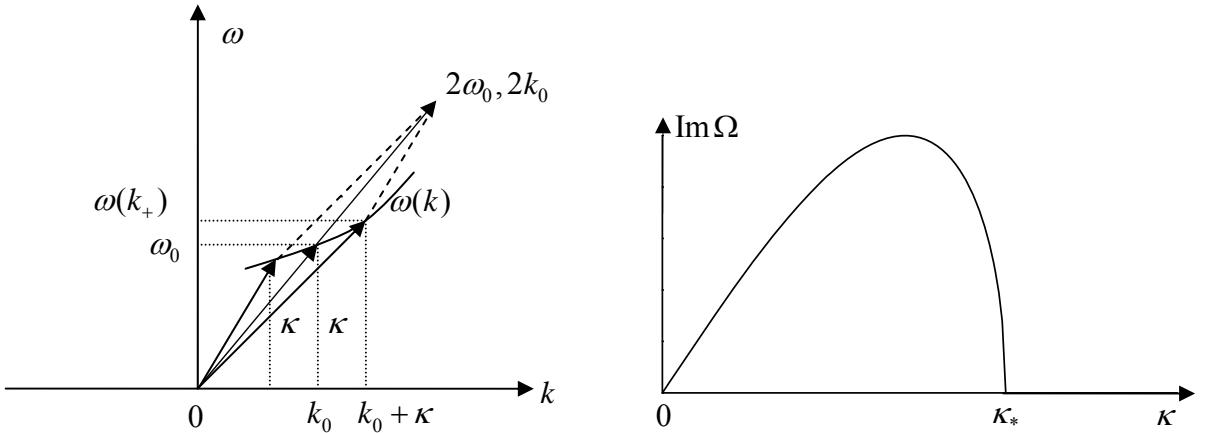


Рис. 1 Условия резонанса при четырехволновом взаимодействии, приводящем к модуляционной неустойчивости

Рис. 2 Инкремент модуляционной неустойчивости как функция волнового числа сателлитов

$$\begin{aligned} k_0 + k_0 &= k_+ + k_-, \\ \omega(k_0) + \omega(k_0) &\approx \omega(k_+) + \omega(k_-). \end{aligned} \quad (8)$$

где  $k_{\pm} = k_0 \pm \kappa$ . Первое условие (8) выполнено тождественно в силу симметричного задания сателлитов в (2), а второе (резонанс частот) – приближенно. Условия резонанса (8) иллюстрируются векторной диаграммой на рис. 1. Условия резонанса для частот нарушаются из-за дисперсии  $\omega''_{kk} \neq 0$  и нелинейных сдвигов частот волн. При выполнении критерия Лайтхилла (7) вклады этих величины взаимно компенсируются и возникает неустойчивость.

### Одномерные солитоны огибающей

Допустим, что волновое число сателлитов  $\kappa_1$  выбрано малым по сравнению с верхней границей модуляционной неустойчивости на рис. 2 ( $\kappa_1 \ll \kappa_*$ ). Поскольку полные (нелинеаризованные) уравнения для  $\tilde{a}(x, t)$  содержат квадратичную нелинейность, рождается модуляция с удвоенным волновым числом  $\kappa_2 = \kappa_1 + \kappa_1 = 2\kappa_1$ , затем с утроенным волновым числом  $\kappa_3 = \kappa_2 + \kappa_1 = 3\kappa_1$  и т.д. На пространственно-временном языке означает образование волн существенно несинусоидального вида. В этом случае возможно формирование уединенных волн модуляции (солитонов огибающей).

Будем искать решение НУШ в виде

$$a(x, t) = \bar{a}(\xi) e^{-i\Delta\omega t}, \quad (9)$$

где  $\xi = x - (v_g + V)t$  ( $v_g + V$  – скорость стационарной волны, в которой выделена групповая скорость и малая добавка к ней  $V$ ). Решение (9), строго говоря, не является стационарной волной ввиду наличия сомножителя, зависящего от времени, который описывает частотный сдвиг «несущей». Однако солитонные решения без такого частотного сдвига не существуют.

Подставим (9) в НУШ (уравнение (1) с заменой  $\partial/\partial y \rightarrow 0$ ) и выделим амплитуду и фазу волны, полагая  $\bar{a}(\xi) = f(\xi) \exp[i\psi(\xi)]$ . Перепишем полученное уравнение в виде двух уравнений для действительной и мнимой частей. Решение для фазы  $\psi$  можно представить в виде  $\psi = (V\xi / \omega''_{kk}) + \psi_0$  ( $\psi_0$  – произвольный сдвиг по фазе). Тогда для

амплитудной функции получим уравнение осциллятора, которое имеет решение в виде уединенной волны – солитона:

$$a = \frac{A \exp \left\{ -i\Delta\omega t + \frac{iV}{\omega''_{kk}} \xi + i\psi_0 \right\}}{\operatorname{ch} \left\{ A \sqrt{-\frac{T}{\omega''_{kk}}} \xi \right\}}, \quad (10)$$

где  $A$  – произвольная амплитуда солитона,  $\Delta\omega = \frac{1}{2}T \left( A^2 - \frac{V^2}{\omega''_{kk} T} \right)$ . Солитон модуляции (10)

локализован в пространстве и имеет экспоненциально спадающие хвосты. На языке радиотехники он является «радиоимпульсом» огибающей. В случае световых волн его можно назвать солитоном яркости. Сравнение (10) с (9) показывает, что частотный сдвиг  $\Delta\omega$ , т.е. зависит от амплитуды солитона и скорости  $V$ . Солитон существует, если выполнен критерий Лайтхилла  $\omega''_{kk} T < 0$  (тогда под корнем в (10) стоит положительная величина). При этом из формулы для  $\Delta\omega$  следует, что при  $A \neq 0$  частотный сдвиг  $\Delta\omega > 0$ . Таким образом, солитонное решение характеризуется наличием частотного сдвига заполнения солитона относительно несущей. В отличие от КдВ-солитонов, у которых скорость однозначно выражалась через амплитуду, скорость и амплитуда солитонов огибающей являются независимыми произвольными параметрами.

Уравнение (1) относится к классу точно интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗР) и в настоящее время оно решено этим методом. Это значит, что произвольное начальное возмущение в асимптотике по времени распадается на солитоны, причем амплитуда  $A$  и скорость  $V$  каждого солитона однозначно определяются по известным начальным условиям.

### Самофокусировка плоской волны и волновых пучков

Рассмотрим другой предельный случай, когда амплитуда волны модулирована поперек направления распространения – по фронту:  $\kappa_{||} = 0, \kappa_{\perp} \neq 0$ . Тогда выражение (5) для частоты такой модуляции принимает вид

$$\Omega = \pm \kappa \sqrt{\frac{\omega'_k}{k_0} T |\bar{a}_p|^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\omega'_k}{k_0} \right)^2 \kappa_{\perp}^2}. \quad (11)$$

Неустойчивость возникает, когда под корнем стоит отрицательная величина, т.е. выполнено условие

$$\omega'_k T < 0 \quad (12)$$

Обычно направление групповой скорости совпадает с направлением фазовой скорости, т.е.  $\omega'_k > 0$  (например, для электромагнитных волн оптического диапазона). Поэтому для электромагнитных волн в нелинейной среде условие нарастания модуляции сводится к условию  $T < 0$ . Фронтальная модуляция схематически показана на рис. 1. Нарастание фронтальной модуляции означает, что малые неоднородности на однородном по пространству фронте волны нарастают. В результате плоская волна разбивается на каналы – структурируется. Если изначально волновое поле локализовано по поперечному направлению (т.е. имеется волновой пучок) механизм нарастания фронтальной модуляции выражается в том, что область локализации поля в пучке сужается – пучок «схлопывается». Этот эффект называют самофокусировкой пучка. В результате самофокусировки энергия пучка может концентрироваться в узком канале, в котором достигается высокая плотность энергии. В практической реализации пучок с конечным поперечным сечением (конечной апертурой) падает на границу нелинейной среды, а его

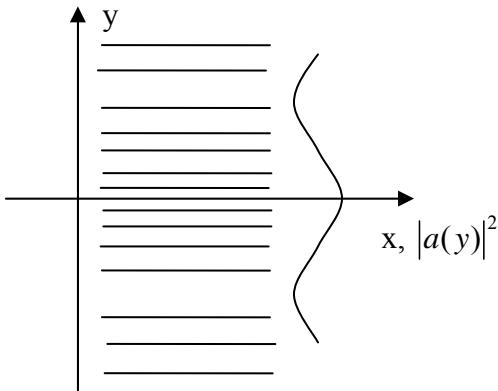


Рис. 1. Фронтальная модуляция плоской волны. Густота линий пропорциональна интенсивности волны

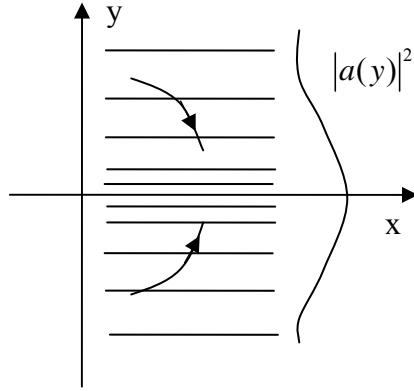


Рис. 2. Загиб лучей в область с более высоким показателем преломления (к центру пучка), приводящий к самофокусировке пучка

самофокусировка происходит в пространстве (по мере увеличения продольной координаты  $x$ ).

Механизм самофокусировки пучка можно интерпретировать на языке лучевой теории. Пусть пучок имеет локализованное распределение с максимумом поля в центре. Можно показать, что при отрицательном нелинейном сдвиге частоты ( $T < 0$ ) показатель преломления среды максимальен в серединной части пучка. Из лучевой теории распространения волн в неоднородных средах известно, что лучи (линии, перпендикулярные к фронту волны) загибаются в сторону увеличения показателя преломления. В данном случае они поворачиваются к центру пучка. В результате поле в центре нарастает, что усиливает эффект загиба лучей и в конечном счете приводит к самофокусировке пучка (рис. 2).

Кроме лучевой интерпретации эффекта самофокусировки возможна также ее интерпретация на языке четырехволновых взаимодействий. Плоские волны с модулем волнового числа  $k_0$  отображаются на плоскости  $k_x, k_y$  окружностью  $|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_0^2$ . Спектр модуляции находится в окрестности  $\vec{k} = (k_0, 0)$ . При «чисто фронтальной» модуляции два сателлита лежат в плоскости  $k_x, k_y$  на прямой  $k_x = k_0$ , а не на самой окружности. Это порождает расстройку их частот от четырехволнового резонанса, которая компенсируется нелинейным сдвигом частоты при выполнении условия (12).

## СТРУКТУРЫ, САМООРГАНИЗАЦИЯ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ДИССИПАТИВНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

В курсе теории колебаний подробно изучались автоколебания в системах с сосредоточенными параметрами. С физической точки зрения автоколебания характеризуются двумя признаками: 1) Наличие баланса между поступлением энергии и ее потерями. 2) Независимость параметров установившегося режима от начальных условий (в определенных пределах). С математической точки зрения образом автоколебаний в фазовом пространстве системы являются притягивающие многообразия (аттракторы). Это могут быть предельные циклы разной степени сложности и хаотические аттракторы.

Поступление энергии к колебаниям от источников «неколебательной» природы возможно и в диссипативных неравновесных средах. Хотя непрерывные среды характеризуются бесконечным числом степеней свободы, в их возможны автоколебательные процессы, описание динамики которых возможно с помощью динамической системы невысокого порядка. Нами будут рассмотрены следующие автоколебательные явления в активных средах.

Диссипативные структуры, как особый вид упорядоченных долгоживущих образований, которые могут быть локализованными в пространстве или пространственно периодическими. Наглядным примером являются ячейки Бенара в термической конвекции.

Самоорганизация – возникновение упорядоченных структур из шумовых начальных условий. Самоорганизация также может рассматриваться как автоколебательный процесс, поскольку также связана с выходом на притягивающее многообразие (аттрактор) в фазовом пространстве.

Возникновение нарушений порядка (дефектов) на фоне упорядоченной пространственно периодической структуры и переход к турбулентности дефектов.

Будут рассмотрены также примеры динамического хаоса (сложных колебаний, неотличимых от случайных) в активных средах.

### **Комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау (КУГЛ).**

Комплексное уравнение Гинзбурга Ландау (КУГЛ) – одна из базовых моделей структурообразования и возникновения динамического хаоса в диссипативных неравновесных средах.

#### **1. Одномерное комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау**

Рассмотрим диссипативную неравновесную среду, дисперсионное уравнение которой имеет ветвь с комплексной частотой собственных волн

$$\omega = \omega(k; R) \equiv \omega_r(k; R) + i\omega_i(k; R) \quad (1)$$

где  $R$  – диссипативный параметр (например, в гидродинамике это может быть число Рейнольдса). Будем считать, что диссипация уменьшается при увеличении  $R$ . Ограничения на величину диссипации отсутствуют, т.е. среда может быть сильно диссипативной. На рис. 1 показана типичная форма границы области неустойчивости  $R(k)$  на плоскости  $k, R$ , которая определена уравнением  $\omega_i = 0$  и имеет минимум в точке  $k = k_c$  при  $R = R_c$  (в гидродинамике она называется нейтральной кривой). При  $R = const < R_c$  возмущения с любыми  $k$  на рис. 1 устойчивы, а при  $R = const > R_c$  появляется полоса неустойчивости, ограниченная по краям нейтральной кривой. Значение  $R = R_c$ , определяющее возникновение неустойчивости называется – критическим

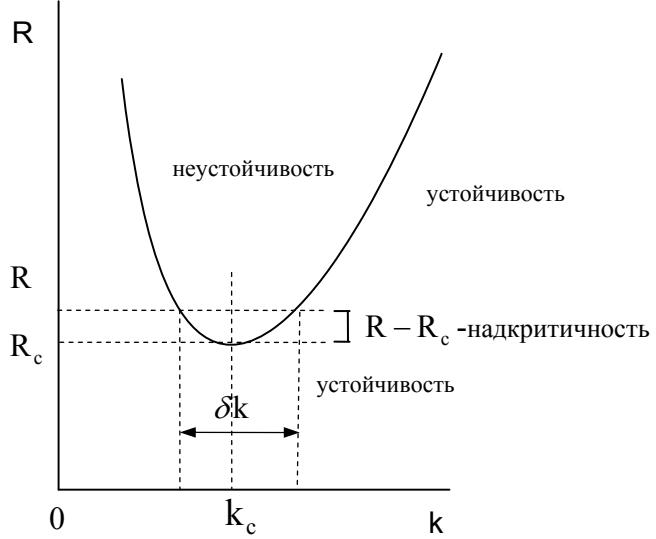


Рис.1 Граница области неустойчивости (нейтральная кривая) на плоскости  $(R, k)$ , достигающая минимума в точке  $k = k_c$ .

значением параметра  $R$ , а  $k_c$  – критическим волновым числом. В окрестности минимума нейтральной кривой

$$R - R_c \approx \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 R}{dk^2} \right)_c (k - k_c)^2, \text{ откуда } \frac{\delta k}{k_c} \sim \sqrt{\frac{(R - R_c)}{R_c}} \ll 1. \quad (2)$$

где  $\delta k = (k - k_c)_{\max}$  – ширина полосы неустойчивости при выбранном значении параметра  $R$ ,  $(R - R_c)/R_c$  – надкритичность. Поскольку инкремент  $\omega_i(k; R)$  как функция  $k$  имеет максимум внутри полосы неустойчивости и равен нулю в точке  $k = k_c$ , получим  $(\partial \omega_i / \partial k)_c = 0$ .

Возьмем в качестве исходного модельное уравнение, которое позволяет понять основные принципы построения уравнения Г-Л:

$$D(\hat{\omega}, \hat{k}; R)u = \varepsilon^2 u^3, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий порядок амплитуды волны (параметр нелинейности),  $D(\hat{\omega}, \hat{k}; R)$  – в диссипативной среде комплексная дисперсионная функция, содержащая дисперсионную ветвь (1). Для упрощения преобразование в модельное уравнение (3) включена простейшая «кубическая» нелинейность. Главную часть решения при малой надкритичности представим в виде  $u = a(t, x) e^{ik_c x - i\omega_c t} + k.c.$ , где  $\omega_c = \omega_r(k_c; R_c)$  – частота в критической точке,  $a(t, x)$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда.

Поскольку процедура вывода уравнения для  $a(t, x)$  с математической точки зрения полностью аналогична изложенной в п. 5.1 для консервативной системы, воспользуемся для записи результата спектральной формой записи амплитудного уравнения, предложенной в п. 5.1. С учетом (1) она принимает вид

$$\frac{\partial a_\kappa}{\partial t} + i(\omega(k_c + \kappa; R) - \omega(k_c; R_c))a_\kappa = -\varepsilon^2 T \left[ |a|^2 a \right]_\kappa. \quad (4)$$

где  $T = -3i(D'_\omega)_c^{-1} = T_1 + iT_2$  – комплексный коэффициент. Для перехода от (4) к дифференциальному уравнению, произведем разложение разности частот, входящей в (4), в ряд по малым  $\kappa$  и  $(R - R_c)$ :

$$\begin{aligned} \omega(k_c + \kappa; R) - \omega(k_c; R_c) = & \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial k} + i \underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial k}}_{=0} \right)_c \kappa + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} \right)_c \kappa^2 + \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial R} + i \frac{\partial \omega_i}{\partial R} \right)_c (R - R_c) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V_g = (d\omega_r / dk)_c$  – вещественная групповая скорость. Поскольку в соответствии с (2)  $|R - R_c| \sim \kappa^2$ , отброшенные в (5) члены имеют более высокий порядок малости по сравнению учтеными. После подстановки (5) в (4) применения обратного преобразования Фурье, получим уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -v_g \frac{\partial a}{\partial x} + (i\beta_1 + \beta_2) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \varepsilon^2 (\gamma_1 - i\gamma_2) a - \varepsilon^2 (T_1 + iT_2) |a|^2 a, \quad (6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} v_g = & \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial k} \right)_c, \quad \gamma_1 = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial R} \right)_c \frac{(R - R_c)}{\varepsilon^2} = O(1), \quad \gamma_2 = \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial R} \right)_c \frac{(R - R_c)}{\varepsilon^2} = O(1), \\ \beta_1 = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} \right)_c, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} \right)_c. \end{aligned}$$

Чтобы нарастание волнового поля ограничивалось нелинейными потерями, члены надкритичности и нелинейности в (6) должны быть одного порядка:  $(R - R_c)/R_c \sim \varepsilon^2$ . Тогда, согласно (2), ширина спектра  $\delta k \sim \varepsilon$ , а масштаб изменения во времени  $\Delta t \sim 1/(\delta k \cdot v_g) \sim \varepsilon^{-1}$ . Этот скейлинг учтен в выражениях для коэффициентов  $\gamma_{1,2}$ . Кроме того, этот скейлинг показывает, как должно разложение решения (3) при его отыскании с помощью асимптотического метода:

$$u = a(\tau, \chi) e^{ik_c x - i\omega_c t} + \text{c.c.} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} \dots, \quad (7)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\chi = \varepsilon x$  – медленные координата и время. Поиск решения (3) в форме (7) во втором приближении приводит к уравнению (6) (см. аналогично п. 5.1). Отметим, что уравнение (6) можно получить для среды с квадратичной нелинейностью, в которой во втором порядке по  $\varepsilon$  возникают эффекты кубической нелинейности (аналогично см. п. 3.6). Смысл коэффициентов в (6) следующий:  $\beta_1$  – характеризует дисперсию огибающей,  $\beta_2 > 0$  – диффузию огибающей (об условии  $\beta_2 > 0$  см. ниже),  $T_1 > 0$  – нелинейное затухание ( $T_1 > 0$  означает, что в среде реализуется мягкое возбуждение волн),  $T_2$  – нелинейный сдвиг частоты,  $\gamma_1 > 0$  – инкремент линейной неустойчивости ( $\gamma_1 > 0$  соответствует  $R > R_c$ ),  $\gamma_2$  – линейный сдвиг частоты.

Уравнение Г-Л описывает автоколебания в диссипативной неравновесной среде, возникающие вблизи порога потери устойчивости (критической точки) при мягком режиме возбуждения волн (когда  $T_1 > 0$  и в главном порядке по амплитуде появляется нелинейная диссипация). В отличие от модуляции в консервативных средах амплитуда колебаний не произвольна и определяется надкритичностью.

*Предельные случаи.* Рассмотрим линейное уравнение, которое следует из (6) при  $T = 0$  (или  $a \rightarrow 0$ ). Подставляя  $a \sim \exp(i\kappa x - i\Omega t)$  получим связь частоты волны огибающей  $\Omega$  (частоты модуляции) с волновым числом несущей  $\kappa$  в виде

$$\Omega = v_g \kappa + \beta_1 \kappa^2 + \gamma_2 + i(\gamma_1 - \beta_2 \kappa^2). \quad (8)$$

Условие  $\beta_2 > 0$  обеспечивает расширение области неустойчивости от нуля с ростом надкритичности, которое соответствует нейтральной кривой на рис. 1.

В случае однородного по пространству волнового поля ( $a = \text{const}$ ) уравнение (6) переходит в уравнение Ландау-Стьюарта

$$\frac{da}{dt} = (\gamma_1 - i\gamma_2)a - (T_1 + iT_2)|a|^2 a. \quad (9)$$

После замены  $a = A \exp(i\varphi)$  получим уравнение для вещественной амплитуды

$$\frac{dA}{dt} = \gamma_1 A - T_1 A^3. \quad (10)$$

При  $T_1 > 0$  нелинейные потери ограничивают линейную неустойчивость, которая возникает при  $\gamma_1 > 0$ . Зависимость равновесной амплитуды  $A_{st} = \sqrt{\gamma_1/T_1}$  от надкритичности показана на рис. 2б. Она характерна для мягкого (надкритического) режима возбуждения волн.

Постоянный сдвиг частоты  $\gamma_2$  можно исключить с помощью замены

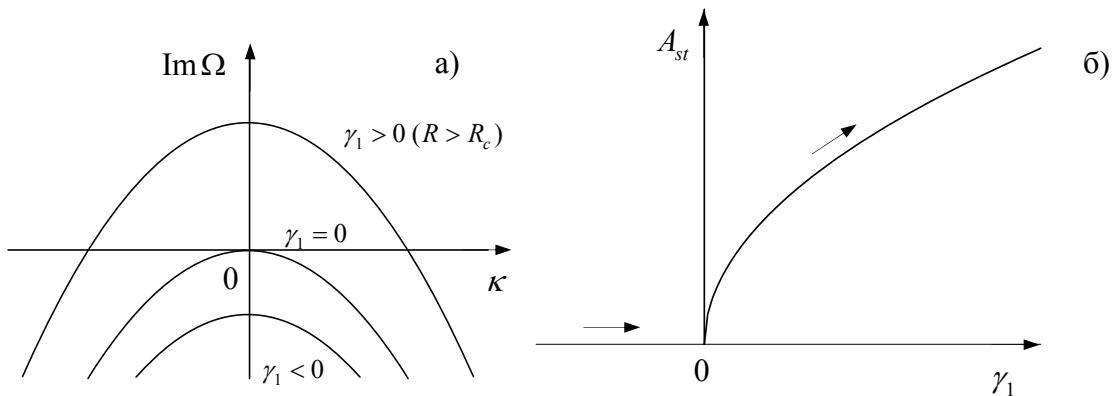


Рис.2 Зависимости инкремента неустойчивости от волнового числа (а) и однородной стационарной амплитуды волны от надкритичности (б) в рамках комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау (6)

$a = a_{new} \exp(-i\gamma_2 t)$ . После перехода в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью (см. аналогично п. 5.1), а затем – к нормированным переменным, (6) сводится к уравнению с двумя параметрами  $b$  и  $c$ :

$$\frac{\partial a}{\partial t} - (1+ib)\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = a - (1+ic)|a|^2 a, \quad (11)$$

### Двумерное комплексное уравнение Гизбурга-Ландау

Уравнение (11) можно обобщить на случай двумерных волновых пакетов. Формально обобщение строится по той же схеме, которая была изложена в п. 5.1 для модулированных волн в консервативной системе. Отличие состоит в том, что границей области неустойчивости в пространстве  $R = R(k_x, k_y)$  будет поверхность в форме параболоида, который получается при вращении «параболы», показанной на рис. 1, вокруг оси  $k_x = k_c$ .

Такая граница возможна только в сильно анизотропной среде, в которой ось  $x$  выделенное направление (в гидродинамике это может быть направление потока жидкости, например, струи). Если ограничиться двумерной задачей, решение ищется в виде

$$u = a(\tau, \chi, \eta) e^{ik_c x - i\omega_c t} + k.c. + \varepsilon u^{(1)} + \dots,$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\chi = \varepsilon x$ ,  $\eta = \varepsilon y$ . Наиболее изучены решения изотропного двумерного уравнения Г-Л, которое является обобщением (11):

$$\frac{\partial a}{\partial t} - (1+ib)\Delta a = a - (1+ic)|a|^2 a, \quad (12)$$

где  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – двумерный оператор Лапласа. Изотропное уравнение Г-Л предполагает изотропность свойств среды внутри узкого волнового пакета в окрестности критической точки, хотя сама среда является анизотропной.

### Когерентные структуры в виде бегущих волн и их устойчивость

Уравнение (12) имеет решение в виде установившихся пространственно однородных бегущих волн

$$a = \sqrt{1-\kappa^2} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\Omega_p t + \phi_0), \quad (13)$$

где  $\kappa$  – нормированное отклонение волнового числа огибающей от критического,  $\Omega_p = c(1-\kappa^2) + b\kappa^2$ ,  $\kappa = |\vec{k}| \leq 1$ ,  $\phi_0 = \text{const}$ . Решение (13) существует при  $|\vec{k}| \leq 1$  и описывает стационарные волны с волновыми числами в узкой полосе неустойчивости вблизи несущей (см. рис. 2а). Их называют когерентными структурами поля  $a$ . В отличие от НУШ – амплитуда и частота этих волн не произвольны, а выражаются однозначно через волновое число  $\kappa$ .

Задача об устойчивости таких структур по отношению к слабой модуляции ставится по аналогии с задачей о модуляционной неустойчивости (п. 5.2). Решение ищется в виде

$$a = \left( \sqrt{1-\kappa^2} + a_+ e^{\lambda t + i\vec{k}\vec{r}} + a_- e^{\lambda t - i\vec{k}\vec{r}} \right) \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\Omega_p t + i\phi_0), \quad (14)$$

где  $\lambda$  – скорость роста (в общем случае комплексная),  $\pm\vec{k}$  – волновые вектора сателлитов  $a_{\pm}$  – комплексные амплитуды сателлитов,  $\phi_0$  – произвольная фаза. Результат решения системы уравнений для слабых сателлитов сводится к тому, что все когерентные структуры в виде бегущих волн неустойчивы при  $b \cdot c < -1$  (критерий Бенджамена–Фейра–Ньюэла). Таким образом, при  $b \cdot c < -1$  никакая из этих когерентных структур существовать не может и система приходит к новому состоянию. При  $b \cdot c > -1$  имеются как неустойчивые, так и устойчивые когерентные структуры. Область устойчивости определена неравенством

$$\kappa^2 < \kappa_{\max}^2 = \frac{1+bc}{1+bc+2c^2} < 1. \quad (15)$$

Согласно (15), стационарные волны с достаточно малыми волновыми числами могут быть реализованы. При  $\kappa_{\max}^2 < \kappa^2 < 1$  – стационарные волны неустойчивы и саморазрушаются в присутствии малых возмущений.

## Диссипативный предел двумерного уравнения Г-Л

Диссипативный предел уравнения Г-Л ( $b = 0, c = 0$ )

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a + \Delta a - |a|^2 a. \quad (1)$$

Это *градиентное* уравнение, так как

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta a^*}, \text{ где } F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -|a|^2 + \frac{1}{2}|a|^4 + |\nabla a|^2 \right) dx dy \quad (2)$$

– функционал Ляпунова. Определение вариационной производной  $\delta F / \delta a^*$  имеет вид (вариация функционала производится с нулями  $a$  при  $|x|, |y| \rightarrow \infty$ ):

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[(-a + a|a|^2 - \Delta a) \delta a^* + k.c.]}_{=\delta F / \delta a^*} dx dy \quad (3)$$

При вычислении  $\delta F$  находим  $\delta(aa^*) = a^* \delta a + a \delta a^*, \delta|\nabla a|^2 = \delta(\nabla a \nabla a^*) = (\nabla \delta a) \nabla a^* + (\nabla a \delta a^*) \nabla a = \nabla(\nabla a \delta a^*) - (\nabla^2 a) \delta a^* + k.c.$  и т.п. ( $\delta a$  – вариация функции  $a(x, y, t)$ ). Производная функционала Ляпунова

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq 0. \quad (4)$$

Таким образом, градиентная система имеет простую динамику – всегда происходит переход в стационарное решение, в котором функционал  $F$  достигает минимального значения.

### Решение в виде стационарного «вихря»

Положим  $a = R \cdot e^{i\Phi}$ , где  $R, \Phi$  – амплитуда и фаза (модуль и аргумент) комплексной функции  $a$ . Переход к цилиндрическим координатам:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ . Рассмотрим решения вида

$$\Phi = n\varphi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad R = R_0(r). \quad (5)$$

( $n$  должно быть целым, так как  $\exp(in\varphi)$  – периодическая функция с периодом  $2\pi$ ). Для определения  $R_0(r)$  имеем нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} + \left( 1 - \frac{n^2}{r^2} - R_0^2 \right) R_0 = 0. \quad (6)$$

Ищем решение с граничными условиями  $R(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $R(r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ . Решение  $R_0(r)$  при  $n = \pm 1$  показано на рис. 1. Распределение амплитуды в вихре показано на рис. 2 в градациях серого (черный цвет соответствует минимальному значению, белый – максимальному). Концентрические окружности – линии постоянной амплитуды на плоскости  $x, y$ , а радиальные прямые – линии постоянной фазы  $\Phi = \pm\varphi = const$ . В начале координат  $\Phi$  не определено. Набег фазы при обходе по произвольному замкнутому контуру

$$\oint_L \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi = 2n\pi. \quad (7)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  – топологический заряд вихря. Доказано, что устойчивы только вихри с топологическим зарядом  $n = \pm 1$ .

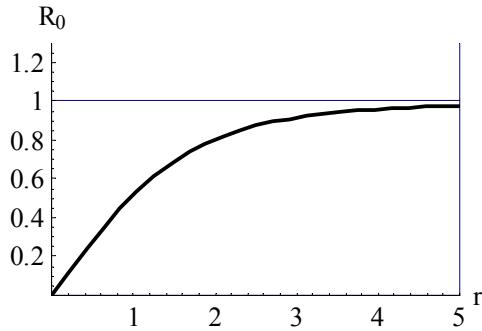


Рис. 1 Поведения модуля комплексной амплитуды при удалении от центра вихря  $r = 0$  при  $n=1$

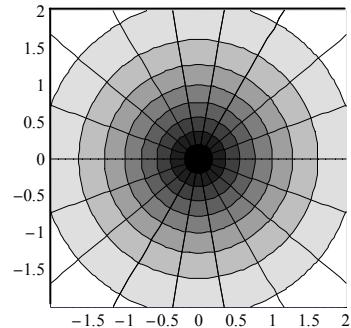


Рис. 2 Линии постоянной амплитуды  $R_0(r) = \text{const}$  и постоянной фазы  $\Phi = \varphi = \text{const}$  на плоскости  $x, y$  для вихря с  $n=1$ . Черный цвет – минимальное значение, белый – максимальное. В центре вихря поле  $a$  равно нулю.

### Вихри и топологические дефекты

Выясним, какая картина линий уровня поля  $u$  соответствует решению в виде вихря. Рассмотрим волновое поле, в котором частота несущей равна нулю:  $\omega_c = 0$  (валиковая структура). Тогда в присутствии вихря с  $n=1$  получим

$$\begin{aligned} u &= a e^{ik_0 x} + k.c. = R_0(r) e^{i\varphi} e^{ik_0 x} + k.c. = 2R_0(r) \cos(k_0 x + \varphi) = \\ &= R_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{x \cos(kx) - y \sin(kx)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учтено, что  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . На рис. 3 показаны линии с

постоянным значением поля  $u = 0$ . В центре вихря  $x = y = 0$  возникает разветвление линий постоянного поля – топологический дефект. Из (8) следует, что на линиях уровня  $u = 0$  полная фаза  $\psi = k_0 x + \varphi = (\pi/2) + m\pi$  ( $m$ -целое), т.е. сдвиг фазы между соседними линиями в направлении оси  $x$  равен  $\pi$ . Обход вокруг центра вихря по замкнутому контуру, показанному на рис. 3, дает набег фазы, равный  $2\pi$ . Таким образом, при  $n=1$  между двумя линиями решетки поля  $u = 0$  в полу平面  $y > 0$ , сдвинутыми по фазе на период  $2\pi$ , при переходе в полу平面  $y < 0$  «вклинивается» один лишний период решетки. Это очень похоже на объединение двух решеток с разным периодом в твердотельных кристаллах, которое приводит к образованию дислокаций. Из выражения

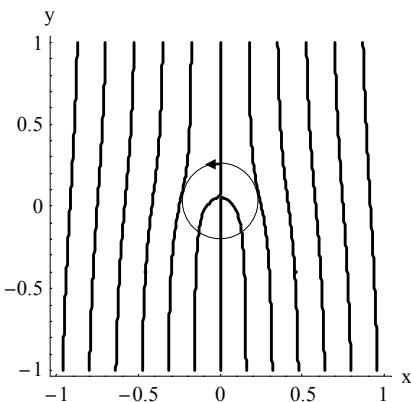


Рис. 3 Линии нулевых значений полного поля  $u=0$ , между которыми сдвиг фазы  $\psi$  равен  $\pi$ . При обходе по замкнутому контуру против часовой стрелки набег фазы полного поля равен  $2\pi$ , поэтому топологический заряд дефекта равен  $+1$ . Вблизи дефекта в нижней полу平面, например на уровне  $y=-0.1$ , имеется «лишний» период решетки полного волнового поля по сравнению с уровнем  $y=0.1$  в верхней полу平面. Такой дефект роликовой системы называется дислокацией.

(8) следует, что  $u = \mp \sin(kx)$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Фактически возникновение топологического дефекта в данном случае связано с объединением двух решеток, которые на бесконечности имеют одинаковые периоды и отличаются сдвигом по фазе на  $\pi$  (максимумы  $u$  при  $y \rightarrow +\infty$  занимают места минимумов при  $y \rightarrow -\infty$  и наоборот). Таким образом вихревому решению в уравнении Г-Л соответствует топологический дефект на линиях уровня полного поля. Топологический заряд этого дефекта совпадает с топологическим зарядом вихря и равен +1.

*Вихревые решения комплексного уравнения Г-Л.* Вихревые решения получены также для комплексного уравнения Г-Л. Однако они отличаются от рассмотренных выше. Коэффициенты  $b$  и  $c$  в комплексном уравнении Г-Л дают вещественные частоты, приводящие к нарастанию фазы  $\Phi$ , из-за чего лучи на рис. 2 закручиваются и превращаются в спирали, рукава которых расходятся от центра.

## ДВУМЕРНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ (галерея феноменов)

Рассмотрим наиболее нетривиальные установившиеся режимы, полученные в результате численного решения КУГЛ. Они доказывают, что комплексное уравнение ГЛ позволяет моделировать такие явления, как формирование структур, самоорганизация и турбулентность в диссипативных неравновесных средах.

Двумерное изотропное КУГЛ имеет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (1+ib) \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) + a - (1+ic)|a|^2 a. \quad (1)$$

Без ущерба общности можно принять  $c > 0$ . Действительно, если  $c < 0$ , возьмем от (1) комплексно сопряженное и введем  $a_{new} = a^*$ . Тогда для  $a_{new}$  снова получим уравнение (1), в котором  $c \rightarrow c_{new} = -c$  и  $b \rightarrow b_{new} = -b$ , что позволяет один из коэффициентов ( $b$  или  $c$ ) считать положительным. Для сопоставления с представленными в литературе численными решениями удобнее принять, что  $c > 0$ . Далее показаны изображения решений КУГЛ в черно-белом коде (минимальному значению соответствует черный цвет, максимальному – белый, помежуточные значения – оттенки серого).

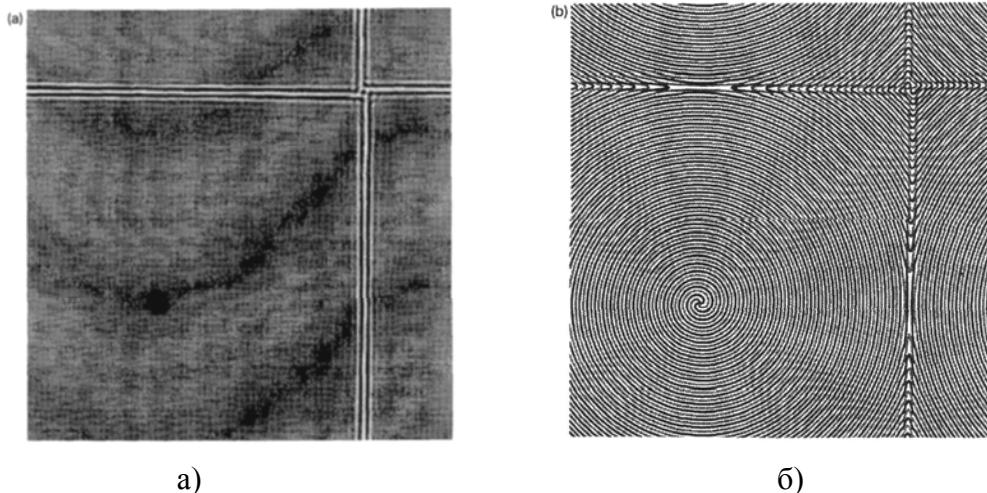
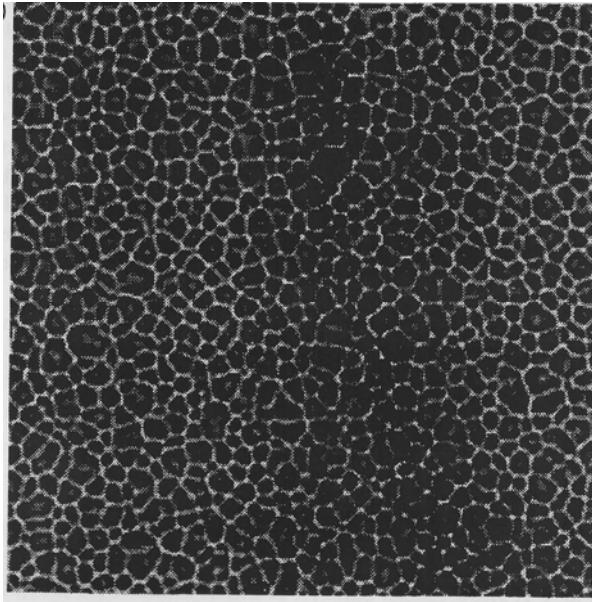
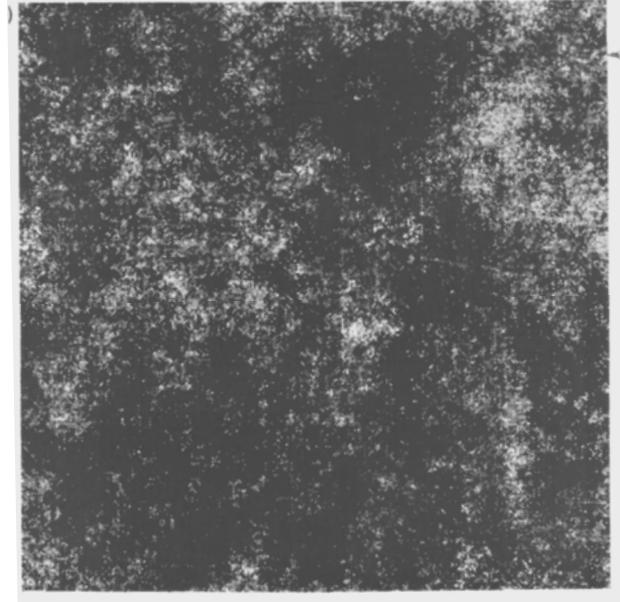


Рис. 1. Мгновенный снимок периодической «замороженной» конфигурации с одним спиральным дефектом ( $b = -2$ ,  $c = 0.6$ ). Периодические граничные условия. Линейный размер области  $L = 512$ . (а) – изображение  $|a(x,y,t)|$  в черно-белом коде, когда черный цвет показывает минимальное значение поля, серый – максимальное; (б) – линии постоянной фазы  $\phi = \arg a = 0$  и  $\phi = \pi$  (показаны светло серым и темно серым цветом соответственно). Структуры в виде прямых светлых линий иногда рассматриваются как особый вид дефектов – «гребни скачков».



a)



б)

Рис. 2. Мгновенный снимок «фазовой турбулентности» ( $b = -2$ ,  $c = 0.752$ ). Линейный размер области  $L = 5120$ . (а) – изображение  $|a|$  в диапазоне изменения  $|a|$  от 0.87 (черный цвет) до 1.12 (белый цвет). Показан фрагмент исходной области с размером  $L = 640$ . Видна ячеистая структура поля амплитуды; (б) поле фазы  $\phi = \arg a$  в черно-белом коде. Полное изменение фазы  $\Delta\phi = 4.27$  – величина порядка  $\pi$ . Приведенные данные показывают, что фаза изменяется хаотически с большим размахом при относительно малых осцилляциях амплитуды вблизи  $|a|=1$ .

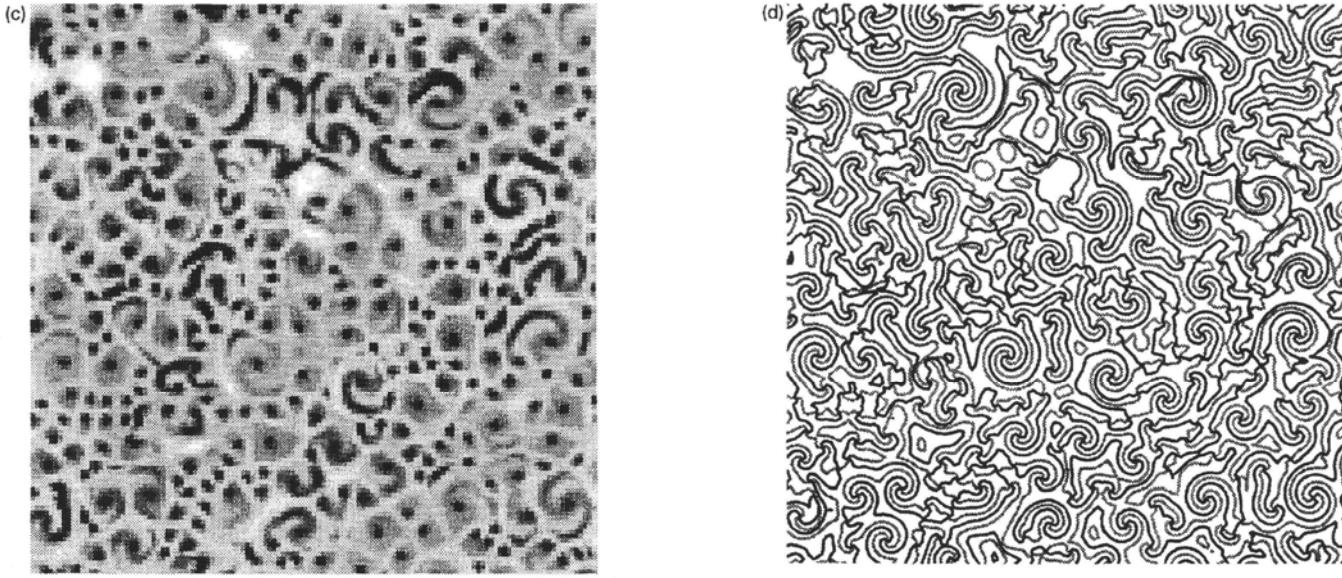


Рис. 3. Мгновенный снимок турбулентности дефектов ( $b = 0$ ,  $c = 1.786$ ). Линейный размер области  $L = 256$ . (c) – изображение  $|a|$  в диапазоне изменения  $|a|$  от 0 (черный цвет) до 1 (белый цвет), (d) линии постоянной фазы  $\phi = \arg a = 0$  (светло серый цвет) и  $\phi = \pi$  (темно серый цвет). На рис. (c) центры вихрей (дефекты) отображаются черными точками; рис. (d) демонстрирует спиральную структуру поля фазы в окрестности отдельных дефектов. Турбулентность дефектов характеризуется экспоненциальным спаданием пространственной корреляции и ее малым масштабом.

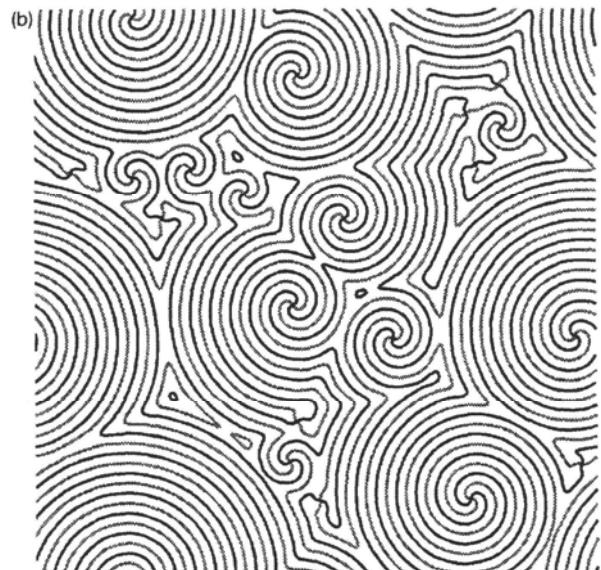
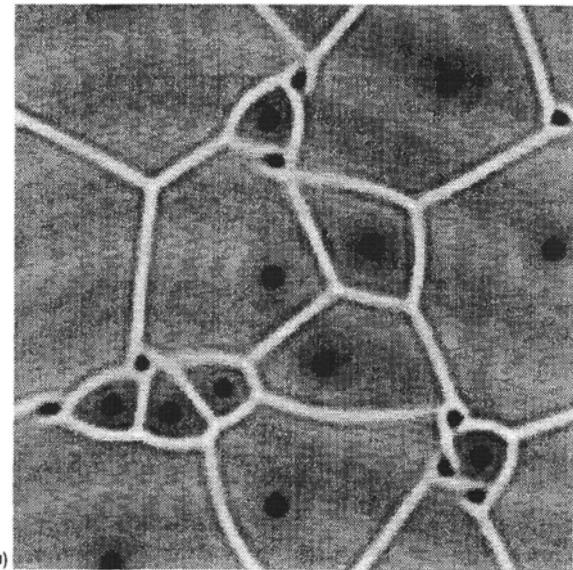


Рис. 4. Пример "квазизамороженной" конфигурации поля «вихревое стекло» ( $b = -2$ ,  $c = 0.2$ ). Линейный размер области  $L = 256$ . (а) – изображение  $|a|$  в диапазоне  $0 < |a| < 1.17$ , (б) линии постоянной фазы  $\phi = \arg a = 0$  (светло серый цвет) и  $\phi = \pi$  (темно серый цвет). Спиральные вихри находятся внутри многоугольников, на границах которых интенсивность поля имеет максимальное значение. Пространственный масштаб многоугольников монотонно возрастает при общем замедлении развития картины во времени

## ГРАВИТАЦИОННАЯ ТЕРМИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

**Исходные уравнения и основные приближения.** При термической конвекции возникает большое разнообразие диссипативных структур, имеющих много общего со структурами в других неравновесных средах. Кроме того, структуры в термической конвекции относительно легко наблюдаются. Поэтому термическая конвекция традиционно является важным объектом для построения теории процессов формирования структур, самоорганизации и перехода к турбулентности.

Классическая постановка задачи о гравитационной термической конвекции в жидком слое иллюстрируется на рис. 1а. Однородная жидкость заполняет пространство между двумя пластинами, расстояние между которыми равно  $H$ . Нижняя плита имеет температуру  $T_0$ , которая больше температуры верхней пластины  $T_1$  (подогрев снизу). Система уравнений термической гравитационной конвекции включают в себя уравнение Навье-Стокса, записанное с учетом силы тяжести, условие несжимаемости и уравнение теплопроводности

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho_0 \nu \Delta \vec{v} - g \rho \vec{z}_0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T. \quad (1)$$

Кроме того, записывается линеаризованное уравнение состояния, определяющее зависимость плотности от температуры:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)], \quad \beta = -\left. \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right|_{T=T_0} > 0, \quad (2)$$

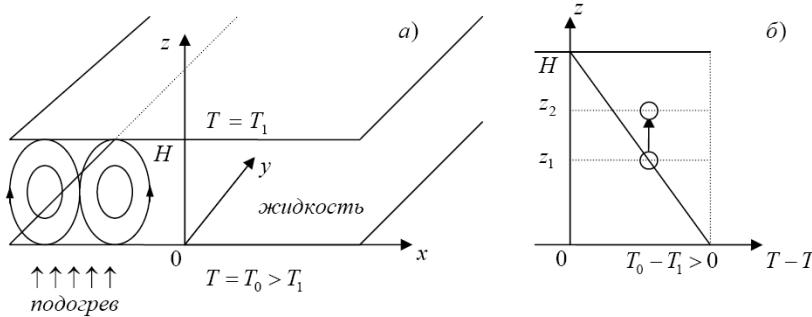


Рис. 1 Конвекция в слое жидкости между пластинами с подогревом снизу (а) и перемещение жидкого элемента на профиле температуры внутри этого слоя (б).

где  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – поле скорости,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\vec{z}_0$  – единичный орт оси  $z$  (направленный вертикально вверх, против силы тяжести),  $\rho$  – плотность жидкости,  $T$  – абсолютная температура;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения;  $T_0$  – «отсчетная» температура (в данном случае это температура на нижней границе слоя);  $\rho_0 = \rho(T_0)$  – значение плотности при  $T = T_0$ . Поля  $\vec{v}, p, T, \rho$

зависят от декартовых координат  $x, y, z$  и времени  $t$ . Решение задачи существенно упрощается, если на границах слоя задать постоянные значения температуры, а для компонент скорости наложить условия непротекания и свободных границ (нулевых касательных напряжений):

$$T = T_0|_{z=0}, \quad T = T_1|_{z=H}, \quad v_3 = 0|_{z=0,H}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \Bigg|_{z=0,H}. \quad (3)$$

В теории конвекции задачу с этими граничными условиями называют задачей Рэлея. В действительности вместо последних двух условий на поверхности жестких пластин следует записать условия прилипания. Однако это не приводит к качественным изменениям решения. Из-за малой величины коэффициента расширения изменения плотности в конвективном течении малы. Поэтому их достаточно учесть только там, где они наиболее важны – в силе тяжести  $g\rho\vec{z}_0$ , зависимость которой от температуры играет главную роль в развитии конвекции (см. ниже). В инерционных слагаемых уравнения Навье-Стокса плотность можно принять постоянной. Такое упрощение уравнений называется *приближением Буссинеска*.

Определяя с помощью (1) стационарное однородное вдоль слоя распределение температуры, с учетом граничных условий (3) получим

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0, \quad T = T_0 + \frac{z}{H}(T_1 - T_0) \quad (4)$$

Температура меняется по линейному закону от значения  $T_0$  на нижней границе слоя до значения  $T_1$  на верхней границе. Механизм конвективной неустойчивости нетрудно понять на качественном уровне (см. рис. 1). При  $T_0 > T_1$  более легкая (теплая) жидкость оказывается расположенной ниже более тяжелой (холодной) жидкости. Допустим, что элемент жидкости переместился на более высокий уровень (см. рис. 1б). На этом уровне он оказывается окруженным более холодной и, следовательно, более тяжелой жидкостью. Это значит на данный элемент будет действовать выталкивающая архимедова сила, и он продолжит свое всплытие. Всплывающие элементы жидкости будут вытеснять жидкость из верхних слоев, которая в силу непрерывности среды начнет двигаться вниз. Отсюда ясно, что внутри слоя может возникнуть замкнутое конвективное течение, связанное с действием силы тяжести.

Перейдем к безразмерным переменным. Давление представим в виде суммы гидростатической составляющей и отклонения от нее:  $p = p_1 - \rho_0 g(z - H) + \tilde{p}$ , где  $p_1 = \text{const}$ , а выражение для плотности (2) подставим в уравнение (1). Используя подходящие масштабы длины, времени и температуры, введем безразмерные переменные:

$$(x_{\text{new}}, y_{\text{new}}, z_{\text{new}}) = \frac{1}{H}(x, y, z), \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0 - T_1}, \quad t_{\text{new}} = \frac{t\chi}{H^2}, \quad \bar{v}_{\text{new}} = \frac{\bar{v}H}{\chi}, \quad \tilde{p}_{\text{new}} = \frac{\tilde{p}H^2}{\rho_0 v \chi}. \quad (5)$$

Уравнения в безразмерных переменных принимают вид

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla \tilde{p} + \Delta \vec{v} + R \vartheta \vec{z}_0, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vartheta = \Delta \vartheta. \quad (6)$$

Граничные условия для скорости на границах слоя  $z=0$  и  $z=1$  фактически остаются в виде (3), тогда как для температуры имеем  $\vartheta=0$  при  $z=0$  и  $\vartheta=-1$  при  $z=1$ . В системе (6) присутствуют только два безразмерных параметра

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad R = \frac{g \beta H^3 (T_0 - T_1)}{\nu \chi}. \quad (7)$$

Число Прандтля  $\text{Pr}$  характеризует физические свойства жидкости. Число Релея  $R$  показывает соотношение сил плавучести жидких элементов (их параметры стоят в числителе) и эффектов вязкости и теплопроводности (их параметры находятся в знаменателе).

**Решение линейной задачи.** Для исследования стационарного режима на устойчивость ищем решение в виде суперпозиции стационарного решения (6) и малых отклонений от него  $\vartheta = -z + \vartheta_{\sim}$ ,  $\tilde{p} = -R(z^2 - 1)/2 + \tilde{p}_{\sim}$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_{\sim}$ . Полученные уравнения линеаризуем относительно малых возмущений. Ограничимся двумерной задачей, в которой все поля являются функциями  $x$  и вертикальной координаты  $z$  (от  $y$  не зависят). При этом течение имеет только две компоненты скорости  $v_{3\sim} \equiv w$  и  $v_{1\sim} \equiv u$ , а  $y$ -компоненты скорости  $v_{2\sim} = 0$ . Давление исключаем, дифференцируя уравнения для  $u$  и  $w$  по  $z$  и  $x$  соответственно и вычитая полученные уравнения одно из другого. Решение ищем в виде

$$(u, w, \vartheta) = [\hat{u}(z), \hat{w}(z), \hat{\vartheta}(z)] \exp(ikx + \lambda t), \quad (8)$$

где  $k$  – волновое число,  $\lambda$  – комплексный инкремент. Символом  $\hat{\phantom{x}}$  отмечены комплексные амплитудные профили переменных. С помощью несложных преобразований можно исключить  $\hat{u}(z)$  и  $\hat{\vartheta}(z)$  и перейти к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для комплексного профиля вертикальной скорости  $\hat{w}(z)$

$$\left[ \hat{q}(\lambda + \hat{q}) \left( \hat{q} + \frac{\lambda}{\text{Pr}} \right) - k^2 R \right] \hat{w} = 0, \quad \left( \hat{q} = -\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\hat{w} = 0 \Big|_{z=0,1}, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} = 0 \Big|_{z=0,1}, \quad \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial z^4} = 0 \Big|_{z=0,1} \quad (10)$$

Будем искать решение (9) в виде

$$\hat{w} = A \sin(n\pi z), \quad (11)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  – целое,  $A = \text{const}$ . Решение (11) удовлетворяет всем граничным условиям (10). В то же время, при подстановке (11) в (9) выносится общий множитель  $A \cos(n\pi z)$ . При этом из условия существования нетривиального решения ( $A \neq 0$ ) получается квадратное уравнение для показателя  $\lambda(k)$ , которое имеет вещественные решения. Таким образом, при любом  $n$  функции (11) являются решением краевой задачи Релея. Граница области неустойчивости находится из условия  $\lambda = 0$  и имеет простой вид

$$R = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}. \quad (12)$$

Формула (12) дает границы области неустойчивости  $R(k)$  для возмущений с различными  $n$  (мод с различной вертикальной

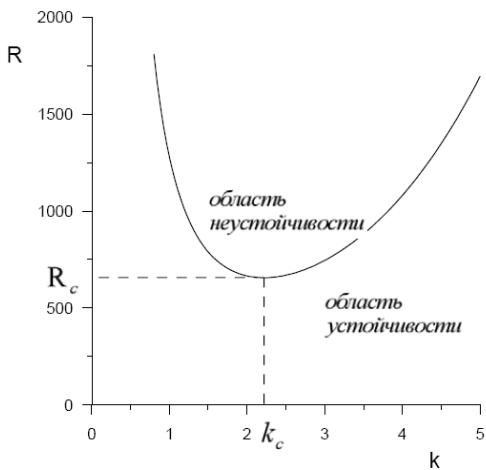


Рис. 2. Нейтральная кивая конвективных валов (роликов) подогреваемом слое жидкости с граничными условиями Рэлея (главная мода).

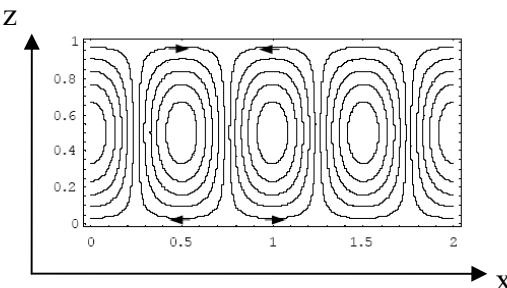


Рис. 3. Линии тока конвективных валов с критическим волновым числом в задаче Релея. По определению к линии тока направление касательной к ней в каждой точке совпадает с вектором скорости течения. В стационарном течении жидкие частицы движутся по линиям тока. Эта картина линий тока остается одной и той же в каждом сечении  $y = \text{const}$ .

структурой поля). В гидродинамике их принято называть нейтральными кривыми. На рис. 2 показана нейтральная кривая для главной (первой) моды  $n = 1$ . Совокупность функций  $\sin(n\pi z)$  образует полную ортогональную систему на интервале  $0 < z < 1$ , по которой можно разложить в ряд любую гладкую функцию  $z$ , удовлетворяющую краевым условиям (10). Поэтому эту систему функций можно использовать также для решения нелинейных задач.

Число Релея  $R_c$  на нижней границе области устойчивости называется критическим. Согласно (12), в подогреваемом слое с граничными условиями Рэлея  $R_c = 27\pi^4/4 \approx 657,5$ . Данному  $R_c$  соответствует критическое волновое число  $k = k_c = \pi/\sqrt{2} \approx 2,22$ . При  $R < R_c$  возмущения с любыми  $k$  устойчивы. Интервал неустойчивости по  $k$  появляется при значениях  $R > R_c$  (см. рис. 2). В этом интервале амплитуды валов нарастают во времени. Неустойчивость на высших модах появляется при значительно более высоких числах Релея, чем на главной моде. Например, при  $n = 2$  получим  $R_c = 10520$ ,  $k_c = 2\pi/\sqrt{2} \approx 4,44$ . Поскольку система изотропна в горизонтальном направлении, результат не зависит от выбора направления оси  $x$ . Другими словами, волновой вектор  $\vec{k}$  валов может иметь произвольную ориентацию в плоскости  $(x, y)$ . Соответственно произвольную ориентацию могут иметь оси периодической системы валов, которые перпендикулярны волновому вектору  $\vec{k}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА ПО КОНВЕКЦИИ И СТРУКТУРАМ В КОНВЕКЦИИ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
2. Гершун Г.З., Жуховицкий Е.М.. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
4. Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования. М.: Янус–К, 1998. 192 с.