

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Введение

Название "Теория относительности" или "Релятивистская теория" – может показаться неудачным. Из него на первый взгляд можно заключить, что главное в теории – это относительность различных величин, их зависимость от выбора системы отсчета. Но суть СТО иная. СТО показывает, что законы природы не зависят от системы отсчета (СО), от положения и движения наблюдателя, а результаты измерений в различных СО могут быть сопоставимы. СТО подчеркивает объективный характер законов природы, а не относительность знания. СТО позволяет установить однозначное соответствие между результатами измерений физических величин, произведенными в разных СО.

Пункт 1. Уточнение понятий пространства и времени: однородность пространства и времени, инерциальные СО, принцип относительности Галилея в механике

1а). Однородность пространства и времени.

Все **явления** природы, изучением которых занимается физика, происходят в пространстве и во времени. Каждое **явление** можно представить **в виде совокупности отдельных элементов**, называемых **событиями**. Каждое **событие**, "состоящее в том, что случилось что-то", "наступает" в определенный момент времени в "определенной" точке пространства. Поэтому основная задача – уметь правильно описывать **событие**.

Для описания **события** необходимо иметь **систему отсчета (СО)**. Под **СО** надо понимать **систему координат (СК)**, служащую для указания положения частиц в пространстве, и связанные с этой системой **часы в соответствующей точке пространства**, служащие для указания времени ($\text{СО} = \text{СК} + \text{ЧАСЫ}$).

В различных **СО** законы природы (например, законы движения материальной точки) имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже самых простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно.

Введём в качестве идеализации **изолированное пространство**, в котором на материальную точку (тело) не действуют никакие внешние силы. В произвольной СК **тело**, находящееся в **изолированном** пространстве (не взаимодействующее с другими телами) в начальный момент t_0 в состоянии покоя, с течением времени начнет двигаться. Причем скорость и характер движения будут зависеть от того, в какой точке пространства это тело находилось в момент времени t_0 . Поэтому по отношению к **произвольной СК** даже **изолированное пространство** является **неоднородным** и **неизотропным**. Примером такого **неоднородного** пространства является пространство, связанное с вращающейся системой координат или в общем случае с ускоренно движущейся системой координат.

Время в произвольной СО будет **неоднородным** в том смысле, что его различные моменты будут неэквивалентны для **изолированного тела**, которое первоначально покоялось (или равномерно двигалось).

1б). Инерциальные системы отсчёта (ИСО)

Система отсчёта, в которой тело в **изолированном пространстве** остается в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения неограниченно долго (двигается или покоятся по инерции) называется инерциальной (**ИСО**). В такой СО пространство является **однородным и изотропным**, а время – **однородным**. Утверждение о существовании **ИСО** является содержанием закона инерции (первого закона Ньютона).¹⁾

Велико ли число ИСО? Легко догадаться, что не одна. Ведь в СО входит составной частью система координат, с помощью которой измеряется положение точки в пространстве. Изменяя СК, мы меняем формально СО, но при этом свойства СО как инерциальной СО остаются неизменными. Итак, все **неподвижные СО в изолированном пространстве являются инерциальными**.

Исключим из рассмотрения возможность различной ориентации осей СК и рассмотрим одну из неподвижных ИСО, оси координат которой связаны с Солнцем и далекими звездами. Будет ли ИСО с такой ориентацией осей единственной? Оказывается, нет. **Инерциальными** будут все СО, оси которых в данный момент времени совпадают с осями выбранной ИСО и которые движутся равномерно и прямолинейно в произвольном направлении и с произвольной скоростью по отношению к выбранной ИСО. Т.о., в изолированном пространстве имеется бесчисленное множество ИСО, движущихся друг относительно друга равномерно поступательно.

1в). Принцип относительности Галилея

Опыт человечества, накопленный в результате изучения механического

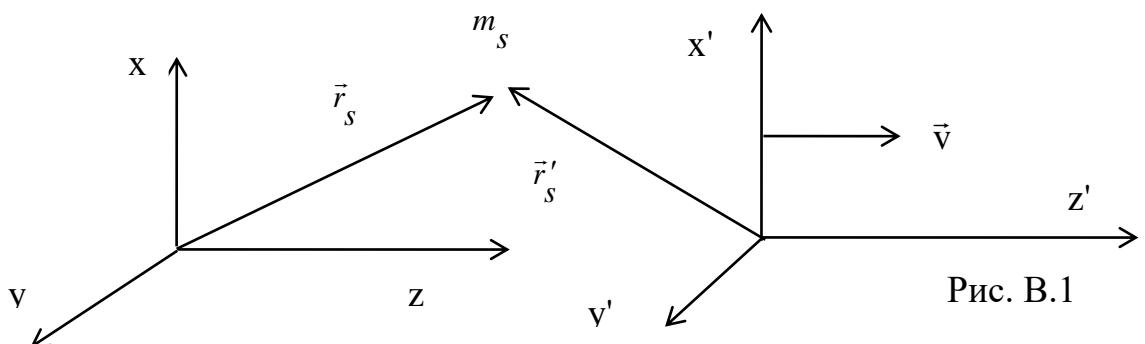


Рис. В.1

движения, показывает, что "движение с постоянной скоростью нельзя отличить

¹⁾ Справедливость закона инерции (который представляет собой частный случай закона сохранения импульса) вытекает из общих свойств (однородности) пространства (из равноправия всех его точек).

от состояния покоя и что законы движения в равной степени справедливы во всех ИСО" (Рис. В.1.). Математически это означает, что замена переменных

$$t' = t ; \quad x' = x ; \quad y' = y ; \quad z' = z - vt \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t , \quad (1)$$

соответствующая переходу от СК (x, y, z) к СК (x', y', z'), движущейся относительно первой со скоростью v по направлению \vec{z}_0 (при $t_0 = 0$ начала координат этих СК совпадают), не изменяет уравнений движения любого материального тела. В неизменности уравнений движения легко убедиться подстановкой (1), например, в уравнения движения материальных точек, взаимодействия которых зависят лишь от взаимных расстояний между ними.

Напишем уравнение движения s -той частицы

$$m_s \ddot{\vec{r}}_s = \sum_{k=1}^N \nabla_s V \left(\left| \vec{r}_s - \vec{r}_k \right| \right) \quad (2)$$

и, опираясь на связь штрихованных и нештрихованных координат (1), в результате расчётов

$$\left(d^2 \vec{r}'_s / dt'^2 \right) = \left(d^2 \vec{r}_s / dt^2 \right) , \quad \left| \vec{r}_s - \vec{r}_k \right| = \left| \vec{r}'_s - \vec{r}'_k \right| , \quad \nabla = \nabla' \quad (3)$$

получим уравнение движения s -той частицы в штрихованной СО

$$m_s \ddot{\vec{r}}'_s = \sum_{k=1}^N \nabla'_s V \left(\left| \vec{r}'_s - \vec{r}'_k \right| \right) . \quad (3)$$

Уравнения (3), справедливость которых обусловлена установленными связями координат (1), совпадают по форме записи с уравнениями (2). Фактически уравнения (2) являются неизменными по форме записи при замене x, y, z, t штрихованными координатами по правилу (1). Говорят, что уравнения (2) **ковариантны (инвариантны) по отношению к преобразованию** (1), называемому **преобразованием Галилея**. В этом суть утверждения об эквивалентности всех ИСО в *классической механике*, называемого *принципом относительности Галилея*.

Отметим, что в *классической механике* даже не возникал вопрос о законности такого преобразования, о его физической реализуемости. Вопрос о том, одинаковы ли времена t' и t в разных инерциальных системах отсчета, возник только после появления электродинамики. А в *классической механике* гипотеза Ньютона о существовании "*универсального равномерно текущего*" времени казалась незыблевой. Эта гипотеза означала, что движение СО не должно влиять на протекающие в ней явления.

С появлением уравнений Максвелла возник вопрос, почему не существует полного равноправия всех ИСО по отношению ко всем физическим явлениям, почему **принцип относительности** в форме преобразования Галилея должен распространяться только на механические явления? Дело в том, что форма уравнений Максвелла не сохраняется при преобразованиях (1), и они не удовлетворяют требованию **инвариантности** по отношению к преобразованию Галилея:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2 - v^2} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial z' \partial t'} \right] \right\} E' = 0 . \quad (4)$$

Следовательно, можно предполагать, что электромагнитные процессы будут по-разному протекать в разных СО, движущихся равномерно поступательно. В частности, скорость плоских волн в вакууме не должна сохранять свою величину c .

Пункт 2. Электродинамика и принцип относительности

2а) Экспериментальные предпосылки СТО

Физики того времени считали, что должна существовать некоторая **преимущественная СО**, в которой свет распространяется со скоростью c , и что такая система отсчета связана с "эфиром". То обстоятельство, что принцип относительности (ПО) Галилея применим к механике и не применим к электродинамике, требовал сделать выбор между следующими возможностями.

1. "ПО" применим в механике и не применим в электродинамике, где должна существовать **абсолютная (преимущественная) СО** (связанная с эфиром).

2. "ПО" применим и в механике, и в электродинамике. При этом электродинамика в форме уравнений Максвелла неверна.

3. "ПО" применим в механике и в электродинамике, но **законы механики требуют изменения (?!?)**.

Соответственно были проведены многочисленные эксперименты, которые можно условно распределить на три класса.

2б) Поиски абсолютной СО, связанной с «эфиром»

1). Опыт Майкельсона и Морли (1887 г.)
С помощью полупрозрачной пластиинки P свет

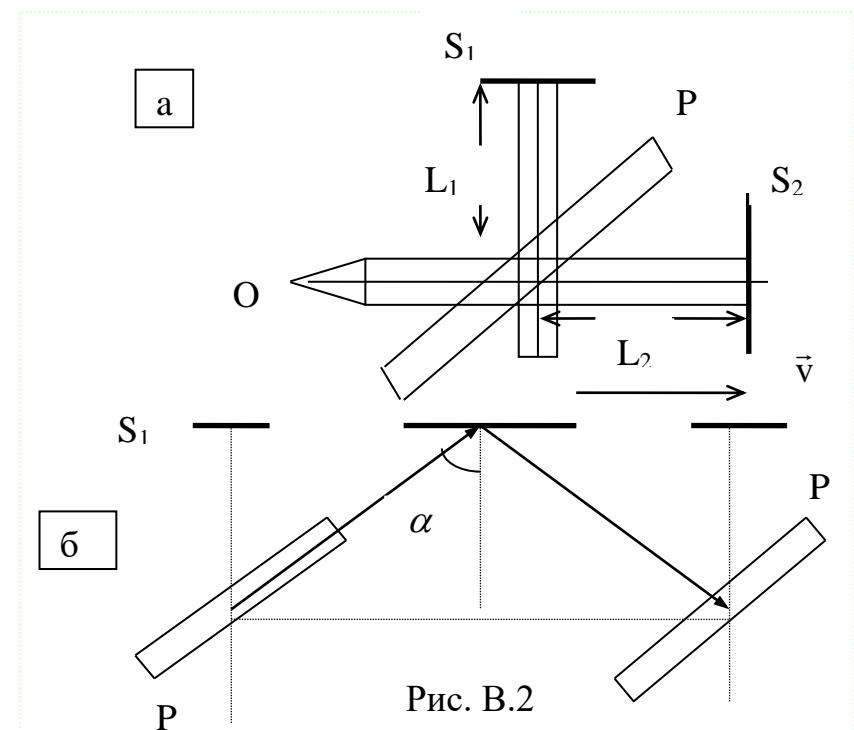


Рис. В.2

от источника O разделяется на два луча (Рис. В.2а.). Одно из направлений распространения луча выбирается по направлению движения Земли. Поскольку абсолютная СО не должна быть связана с Землей, то должен дуть "эфирный ветер", сдувающий свет (как в акустике ветер сдувает звук). При этом скорости света по эфирному ветру и против эфирного ветра должны быть соответственно равны

$$c_{\pm} = c \pm v \quad . \quad (5)$$

В этом случае путь PS_2P луч пройдет за время

$$\Delta t_2 = \frac{L_2}{c + v} + \frac{L_2}{c - v} = c \frac{2L_2}{c^2 - v^2} \equiv \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)} , \quad (6)$$

где отношение скорости штрихованной системы отсчёта к скорости света обозначено буквой

$$\beta = (v/c) . \quad (7)$$

Движение света от P к S_1 и обратно удобно рассмотреть в СК, связанной с эфиром. Вследствие движения зеркала через эфир длина пути фотонов по направлению *луча* (рис. В.2б) больше расстояния PS_1 . Из рис. В.2б видно, что

$$\sin \alpha = (v/c) \equiv \beta , \quad (8)$$

откуда вытекает

$$PS_1P = \frac{2L_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и время

$$\Delta t_1 = \frac{(2L_1/c)}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (9)$$

Поскольку β мало, то знаменатели (6) и (9) можно разложить в ряд. Тогда получим время запаздывания одних фотонов по сравнению с другими

$$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 \approx \frac{2}{c} (L_2 + \beta^2 L_2 - L_1 - \frac{1}{2} \beta^2 L_1) , \quad (10)$$

которое ответственно за интерференцию поля на поверхности пластиинки P . Кроме членов, пропорциональных β^2 , в это соотношение входят и постоянные члены, которые не ответственны за эффект эфирного ветра. Их влияние можно исключить, повернув установку на 90° . Тогда будем иметь

$$\Delta \hat{t} = \Delta \hat{t}_2 - \Delta \hat{t}_1 \approx \frac{2}{c} \left[L_2 + \frac{1}{2} \beta^2 L_2 - L_1 - \beta^2 L_1 \right] . \quad (10^*)$$

Поскольку Δt и $\Delta \hat{t}$ неодинаковы, то при повороте прибора должен возникнуть сдвиг интерференционных полос, пропорциональный разности

$$\Delta t - \Delta \hat{t} = \frac{1}{c} (L_2 + L_1) \beta^2 . \quad (11)$$

Такого сдвига обнаружить не удалось, несмотря на старательные попытки его найти. Выходило, что выделенной СО нет, т.е. нет эфира.

2). Лоренц и Фитцджеральд пытались спасти эфир,

выдвинув гипотезу, что все тела при движении испытывают сокращение в направлении своего движения в $(\sqrt{1-\beta^2})^{-1}$ раз. В этом случае вместо Δt_2 в формуле (6) мы имеем

$$(\Delta t_2)_{LF} = \frac{2L_2}{c} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)} , \quad (12)$$

и, просматривая последовательно весь вывод дальше, можно получить объяснение **нулевого результата** в опыте Майкельсона.

Но тогда оказывается, что можно попытаться найти релятивистскую поправку к разности оптических путей по-другому. В этом случае вместо формулы (10) будем иметь

$$(\Delta t)_{LF} = (\Delta t_2)_{LF} - (\Delta t_1)_{LF} = \frac{2}{c} \cdot (L_2 - L_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong \frac{2}{c} \cdot (L_2 - L_1) \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \quad (13)$$

Если выбрать интерферометр с сильно различающимися плечами, то, учитывая изменение скорости Земли²⁾ и, следовательно, интерферометра относительно эфира (см. Рис. В.3), можно обнаружить смещение интерференционных полос на величину

$$n\lambda = (L_2 - L_1) (\beta_{\max}^2 - \beta_{\min}^2). \quad (14)$$

Однако вопреки гипотезе Лоренца смещения не наблюдалось.

3). Гипотеза увлечения эфира

Землей и aberrация света звезд.

Чтобы спасти представление об *эфире* и объяснить опыт Майкельсона-Морли, возникла гипотеза, что эфир увлекается движущимися телами. Тогда на Земле скорость света должна быть c , и с опытом Майкельсона-Морли все согласуется. Но в этом случае оказывались необъяснимыми наблюдения *абберрации света неподвижных звезд*.

Земля движется вокруг Солнца по орбите со скоростью \vec{V} (см. Рис. В.3). Из-за этого движения при наблюдении звезды приходится смещать ось телескопа относительно истинного направления (суть *абберрации*). Проще всего это понять на примере звезды, расположенной вертикально над наблюдателем в зените (см. Рис. В.4). Из схемы, приведенной на рисунке В.4, видно, что

$$\tan \alpha = (\vec{V}/c) = \beta. \quad (15)$$

При подстановке $V = 3 \cdot 10^6$ см/сек и

$c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек получим $\alpha \approx \beta = 10^{-4}$. Именно это значение и было получено в результате эксперимента по наблюдению Полярной звезды. За полгода угол наклона трубы наблюдателя изменился на $41'' = 2 \cdot 10^{-4}$. Такой результат мог получиться только в том случае, если скорость света c была присуща гелиоцен-

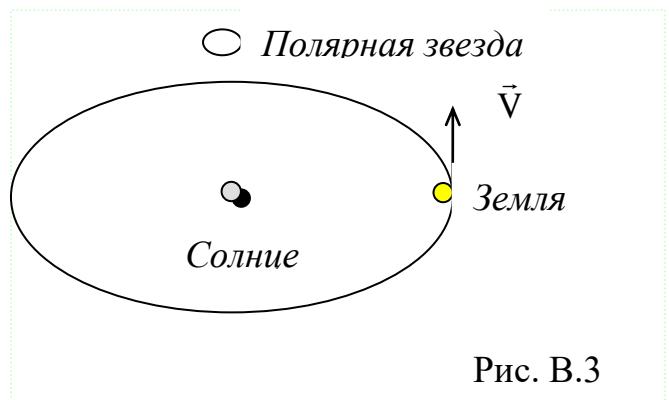


Рис. В.3

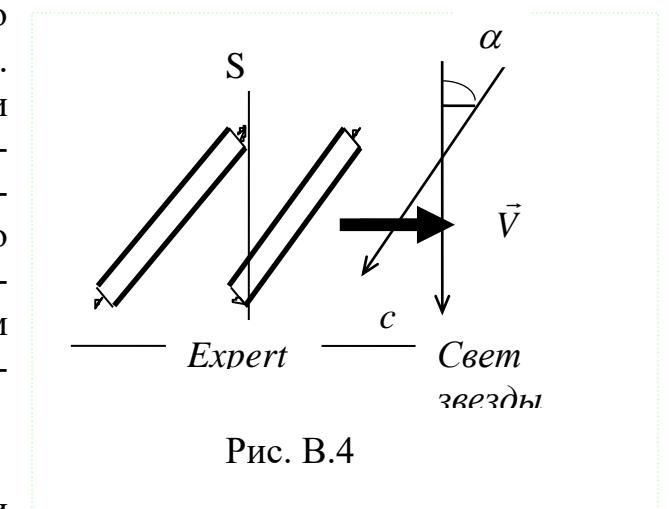


Рис. В.4

²⁾ Скорость движения земной поверхности $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_R$, где $\vec{V}_R = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$ - скорость точки поверхности из-за вращения Земли с угловой скоростью $\vec{\omega}$, а \vec{V}_0 - скорость полета Земли в космосе.

трической системе отсчёта, связанной с Солнцем и неподвижными звездами. Если же допустить *увлечение эфира*, то падение света SE будет иным и *аберрации* как таковой не получится.

4). Эмиссионные теории (попытки исправить уравнения Максвелла).

Модификация электродинамики базировалась на предположениях, что скорость света связана с движением источника S , а не с ИСО. Во всех трёх новых теориях скорость света относительно S считается равной (c / n) , где n - показатель преломления среды³⁾. Между собой они различаются по тому, как изменяется скорость света при отражении от зеркала:

- 1) скорость света относительно S остается (c / n) ;
- 2) скорость света относительно зеркала становится (c / n) ;
- 3) скорость света относительно изображения S в зеркале становится (c / n) .

Однако имеются явления космического масштаба, которые противоречат эмиссионной теории в любой форме. Одно из них связано с динамикой двойных звезд и было детально проанализировано. Если бы скорость света линейно зависела от скорости источника, то свет приближающейся звезды достигал бы Земли скорее, чем свет удаляющейся. Это привело бы к кажущемуся вытягиванию орбиты по сравнению с рассчитанной по законам механики. В действительности такого эффекта не наблюдается.

2в). Выводы из рассмотренных опытов и постулаты.

1. Невозможно обнаружить существование *эфира* (преимущественной ИСО) неподвижного или *увлекаемого*.

2. **Модификации законов электродинамики**, подобные эмиссионным теориям, **оказываются несостоятельными**.

Таким образом, следует вывод, что *требуются изменения в основных законах механики* и что *преобразования Галилея некорректны*. Это казалось невероятным, но на это решился Эйнштейн. Он сформулировал этот вывод в виде двух постулатов.

1. Постулат относительности.

Законы природы одинаковы во всех ИСО. Другими словами, законы природы *ковариантны* по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной СО к другой. Это значит, что уравнения, описывающие некоторый закон природы и выраженные через координаты и время различных ИСО, имеют один и тот же вид.

2. Постулат постоянства скорости света.

Скорость света не зависит от движения источника и равна c во всех ИСО и по всем направлениям.

Из постулатов вытекают совместимые с ними преобразования координат и времени при переходе от одной ИСО к другой. Эти преобразования поставили под удар гипотезу Ньютона об универсальном равномерно текущем времени.

³⁾ В дальнейшем речь будет идти только о вакууме ($n = 1$)

§ 2. Основы кинематики СТО

Интервал является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это значит, что два события, разделенные пространственно-подобным интервалом в одной ИСО, разделены пространственно-подобным интервалом **такой же величины** и в любой другой ИСО. Аналогично два события, разделённые времени-подобным интервалом в одной СО, разделены таким же времени-подобным интервалом в любой иной ИСО.

Пункт 1. Световой конус и мировые линии в 4-пространстве

Два события, происходящие в одной точке (с одним телом) в какой-либо ИСО, всегда связаны времени-подобным интервалом, поскольку согласно(1) справедливо условие $S_{12}^2 < 0$. Такие события в общем случае **связаны причинно-следственной связью:** второе событие наступает после первого и потому может быть следствием совершения первого.

Если события, связанные времени-подобным интервалом ($S_{12}^2 < 0$), происходят в разных точках пространства, то согласно **альтернативному следствию** всегда имеется ИСО, где эти события будут одноместны. Т.е. можем найти преобразование Лоренца, согласно которому

$$S_{01}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - c^2(t_1 - t_0)^2 = -c^2(t_1' - t_0')^2 < 0 \quad (1)$$

и события будут одноместны (т.е. могут быть связаны причинно-следственными связями). Все события такого рода лежат в 4-мерном пространстве внутри так называемо

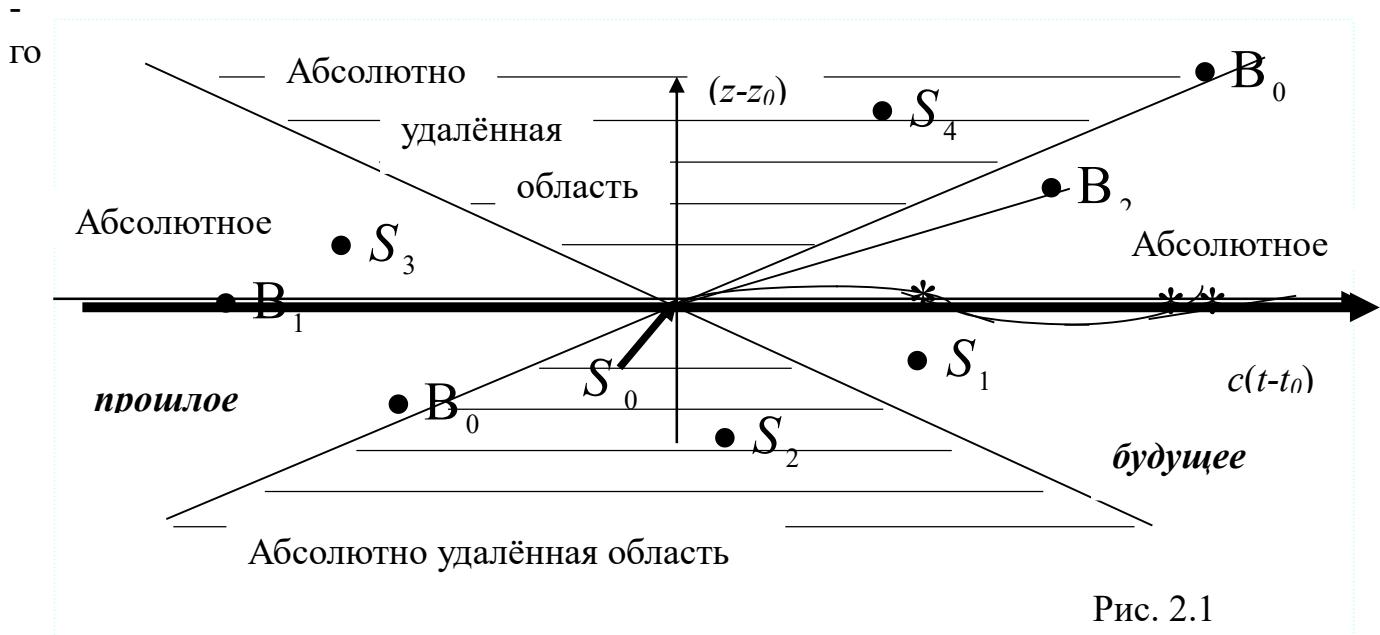


Рис. 2.1

"светового конуса", поверхность которого определяется уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0 \quad (2)$$

Сечение этого конуса поверхностью $x = x_0$, $y = y_0$ показано на Рис. 2.1.

Пусть в момент времени $t = t_0$ некоторая частица (физическая система) находится в начале координат (в точке пространства $z = z_0$). Поскольку c является верхней границей скорости, то световой сигнал будет распространяться вдоль линий **OB₀** под углом в 45° к оси $c(t - t_0)$. Относительная скорость самой частицы определяет угол наклона линии **OB₂** к оси абсцисс:

$$\operatorname{tg} \vartheta = (z - z_0) / c(t - t_0) = (v / c) = \beta < 1. \quad (3)$$

Следовательно, с течением времени частица будет перемещаться вдоль пути **OB₂**, который называется ее *мировой линией*. Этот путь расположен внутри правого полуконуса (в области $t > t_0$). Упомянутая область называется *областью абсолютного будущего*. Все *интервалы внутри этой области времени-подобные*, и все *события связаны причинно-следственными связями с событием S_0* . В этом конусе произошли события, которые могут зависеть от события S_0 .

Область внутри левого светлого полуконуса – область абсолютного прошлого (там тоже $S_{03}^2 < 0$). В светлых областях события S_1 и S_0 , а также S_3 и S_0 всегда можно сделать одноместными, выбрав подходящую ИСО.

Заштрихованные области называются абсолютно удаленными областями. В них интервал между событиями ($S_{02}^2 > 0$) пространственно-подобный, поэтому там посредством выбора начала координат любые два события можно сделать одновременными.

Пункт 2. Относительность понятия одновременности двух событий

Допустим, что в некоторой покоящейся системе координат **K** произошли одновременно два события $S_1(x_0, y_0, z_1, t_0)$ и $S_2(x_0, y_0, z_2, t_0)$. Эти события указаны на диаграмме (см. Рис. 2.2), оси

которой $x_3 = z$ и $x_4 = ict$. Как видно из $Z = x_3$,

рисунка, величина проекции \tilde{R}_{12} на ось $x_4 = ict$ равна нулю (т. е. события одновременные). События $S_{1,2}$ (при $\Delta t = 0$) разделены пространственно-подобным ($S_{12}^2 > 0$) интервалом. При переходе в СК, движущуюся в Z -направлении со скоростью v , получаем, что события $S_{1,2}$ происходят в разные моменты времени $t'_{1,2}$. Проекция интервала этих событий на ось $x'_4 = ict'$ согласно (1.21) определяется выражением

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \beta(\Delta z/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-\beta \Delta z}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4)$$

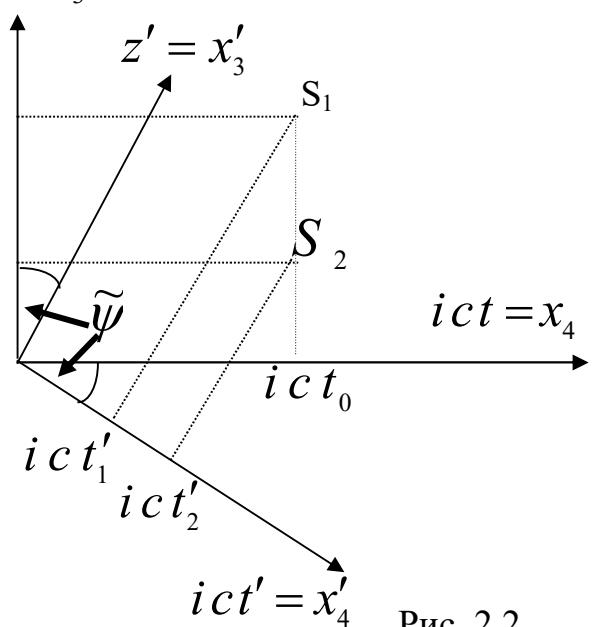


Рис. 2.2

и при $\Delta z \neq 0$ получается отличной от нуля ($\Delta t' \neq 0$). В этом и состоит **относительность одновременности событий**: события, одновременные в ИСО **K**, оказываются разновременными в ИСО **K'**. Указанному на Рис. 2.2 углу $\tilde{\psi}$ соответствует скорость v системы **K'** в $+Z$ -направлении, которая вычисляется по приведённой выше формуле для параметра $\beta = -i \operatorname{tg} \tilde{\psi}$.

Пункт 3. Собственное время объекта

Допустим, что в определенной точке (x', y', z') движущейся системы координат **K'** произошли два события

$S'_{1,2}$ в моменты времени $t'_{1,2}$. Они изображены на Рис. 2.3. Интервал между этими событиями времени-подобный. Допустим, что **K'** движется относительно **K** со скоростью v в $+Z$ -направлении, что отражено на Рис. 2.3 с помощью поворота на угол $\tilde{\psi}$ осей **K'** относительно осей **K**.

Используя (1.21) и полагая $\Delta z' = 0$, находим $\Delta z = \beta c \Delta t$ и далее

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta c \Delta t)(\beta/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что промежуток между событиями в системе координат, где события происходят в одной точке и, следовательно, отмечаются одними и теми же часами, оказывается наименьшим. Это **утверждение носит общий характер** и может быть еще глубже осознано опять же с помощью Рис. 2.3.

Мы видим, что для сравнения хода часов в двух ИСО следует иметь несколько часов в одной ИСО и одни часы в той ИСО, где события одноместны. Процесс сравнения хода часов в этом случае несимметричен по отношению к обеим СО. В результате всегда окажутся отстающими те часы, показания которых сравниваются с показаниями разных часов в другой СО.

Введем понятие **собственного времени объекта (СВО)**. *Время, которое проходит между двумя событиями на каком-то объекте, называется СВО.* Поскольку в СО, связанной с объектом, события происходят в одной точке, то **СВО отсчитывается по одним часам, движущимся вместе с объектом**, и описывается формулой (5) как время между двумя одноместными событиями. Поэтому оно всегда меньше любого времени между этими событиями, отсчитанного по двум разным часам любой другой ИСО.

СВО можно обобщить на случай объекта, который движется

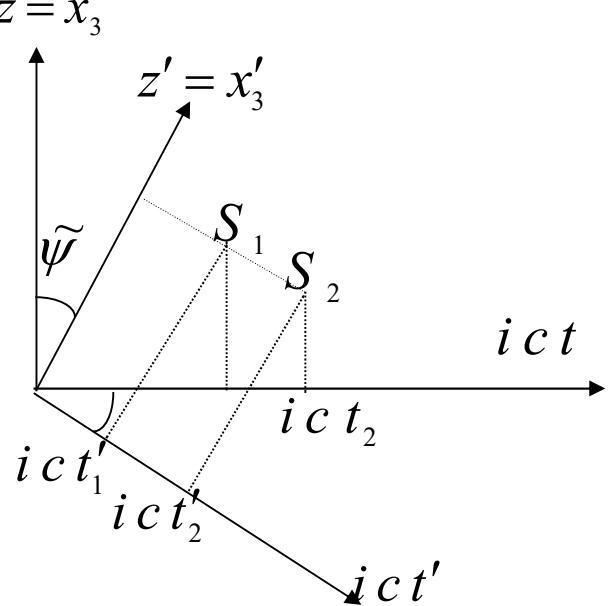


Рис. 2.3

произвольным образом. За малые промежутки времени его движение можно считать равномерным и прямолинейным. Тогда согласно (5) имеем

$$d t' = \sqrt{1 - \beta^2(t)} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} v^2(t)} dt , \quad (6)$$

где $v(t)$ – мгновенная скорость тела (скорость движущихся часов в неподвижной СО), dt' – промежуток времени между событиями, происходящими с телом, dt – промежуток времени между этим событием по

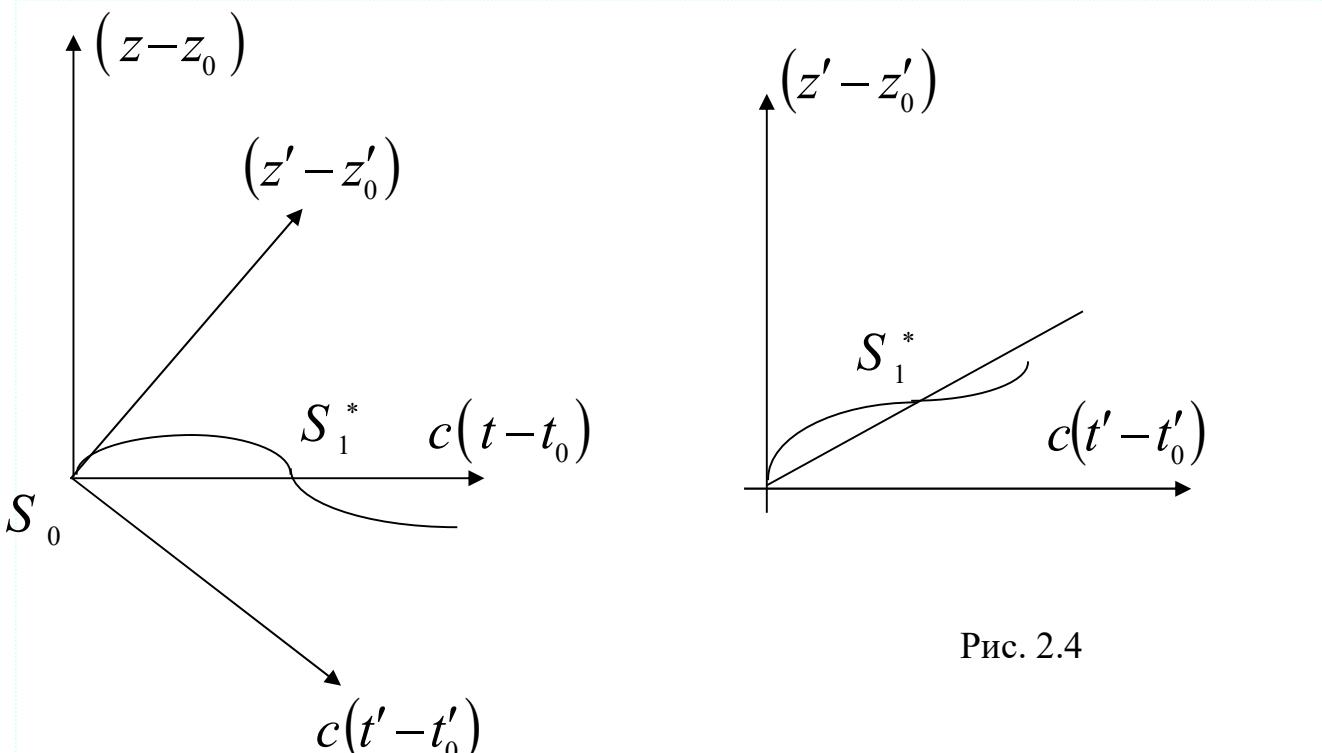


Рис. 2.4

часам неподвижной СО. Если зависимость $v(t)$ известна, то конечные промежутки времени связаны соотношением

$$\tau = t' - t'_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} v^2(t)} dt = \int_{S_0}^S \frac{dS}{ic} = \int_{S_0}^S d\tau , \quad (7)$$

где $(t' - t'_0)$ – СВО, $(t - t_0)$ – время, определённое по часам ИСО, и интеграл по

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2} = (ic dt) \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

берется вдоль мировой линии этих часов между событиями S_0 и S . Т.о., не выходя за рамки СТО, мы можем кое-что сказать о неравномерном движении материальной точки (или о покоящемся теле в неинерциальной СО).

Причиной неравноправия движущейся СО, где часы покоятся, и всех других ИСО **является** указанная выше **несимметричность сравнения хода часов**: СВО отсчитывается по одним единственным часам, а время между этими

же событиями в любой другой ИСО отсчитывается с помощью двух синхронизированных часов, расположенных в двух разных точках пространства, где эти события совершаются.

Если же одни часы описывают замкнутую траекторию от S_0 к S_1^* (см. Рис. 2.4), возвращаясь в исходное место к неподвижным часам, то окажутся **отстающими именно движущиеся часы**. Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные, некорректно, т. к. часы, описывающие замкнутую траекторию, движутся не равномерно и не прямолинейно, а поэтому связанная с ними СО не является инерциальной. Инерциальные СО и СО, связанные с неравномерно движущимися часами (неинерциальные СО), обладают разными свойствами. Поскольку законы природы одинаковы только в ИСО, то и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны отставать, неверно.

Если часы неподвижны, то их мировая линия является прямой, параллельной оси времени. Если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения (см. S_0 и S_1^* на Рис. 2.4). Поскольку покоящиеся часы всегда показывают больший промежуток времени, чем движущиеся, то интеграл, взятый между двумя мировыми точками на Рис. 2.4, имеет максимальное значение, если он берется вдоль по прямой мировой линии, соединяющей эти точки. Утверждение верно и для произвольных точек S_0 и S_1^* на Рис. 2.4.

В заключение отметим, что СВО в виде $\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \beta^2} dt$ есть

инвариант при любом преобразовании Лоренца, ибо это есть время, которое прошло между двумя событиями в одной точке (или с одним телом), движущейся (движущимся) по определённой мировой линии в четырёхмерном пространстве.²⁾

Пункт 4. Лоренцово сокращение длины движущегося стержня

Пусть стержень поконится в СО K' и пусть координатами его концов будут координаты $z'_{1,2}$, так что

$$z'_2 - z'_1 = L_0 \equiv \Delta z' . \quad (9)$$

Очевидно, что при измерении длины стержня в K' несущественны моменты времени $t'_{1,2}$, в которые мы определяли положение его концов $z'_{1,2}$ (ведь стержень поконится). На Рис. 2.5 стержень, покоящийся в K' , для определенности изображен в виде полоски шириной L_0 . Концы полоски

²) Если перейти в другую систему отсчета, в которой события S_0 и S_1^* на Рис. 2.4 будут происходить в моменты времени t'_0 и t'^*_0 , то величина τ не изменится.

параллельны осям времени $i c t'$, что отражает факт произвольности моментов времени, в которые проводятся измерения концов покоящегося стержня в K' . Собственная длина этого стержня есть проекция полоски на ось z' . Она равна L_0 согласно (9).

Иначе обстоит дело с измерением движущегося отрезка. **Неподвижный наблюдатель обязан измерять координаты концов движущегося отрезка одновременно с его точки зрения. Это – принятый способ определения длины движущегося объекта. Таким моментом времени может быть любой момент** (и, в частности, момент t_0). Следовательно, в системе K , связанной с наблюдателем, два события, состоящие в измерении **концов** движущегося со скоростью v в $+Z$ -направлении **стержня**, будут иметь координаты $S(z_1, t_1)$ и $S(z_2, t_2)$, где

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0 \quad . \quad (10)$$

Тогда, воспользовавшись формулами (1.21), получаем

$$L_0 \equiv \Delta z' = \frac{\Delta z - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad . \quad (11)$$

Измеренная неподвижным наблюдателем длина движущегося отрезка

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (12)$$

оказывается меньше **собственной длины** L_0 , измеренной в системе K' . Именно этот результат иллюстрирует и Рис. 2.5. Хотя изображенная на Рис. 2.5 длина L больше L_0 , надо иметь в виду, что в используемом псевдодействительном представлении на самом деле

$$L = (L_0 / \cos \tilde{\psi}) \equiv L_0 \sqrt{1 - \beta^2} < L_0 \quad .$$

Итак, длина физического тела относительна, т. е. различна в разных ИСО. Наибольшая длина стержня в той ИСО, где он поконится. Если стержень движется, то *его длина кажется меньше собственной*. Что означает сокращение длины стержня? Становится ли он короче "на самом деле"?

Никакого реального сокращения длины стержня не происходит и не может произойти в силу принципа равноправия всех ИСО. Во всех ИСО физическое состояние стержня одно и то же, поэтому не может быть и мысли о возникновении каких-либо напряжений или деформаций. "Укорочение" стержня происходит в силу различных способов измерения длины в двух ИСО, в силу **принятого способа определения длины**

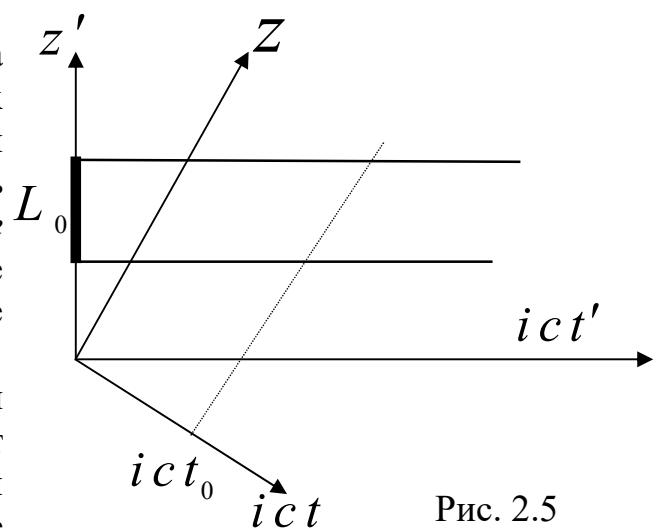


Рис. 2.5

движущегося объекта.

Чему равна длина стержня "на самом деле"? Вопрос лишен смысла. В каждой ИСО стержень имеет свою длину, это и есть длина "на самом деле". Все ИСО равноправны, и все определяемые длины законны и равноправны.

Существует избранная ИСО, где стержень покойится. В ней положения его концов можно определять в разные моменты времени. С точки зрения привычных представлений, в такой ИСО стержень имеет "настоящую" или **собственную длину**. Эта длина L_0 оказывается максимально большой в силу особого состояния покоя стержня лишь в этой системе отсчёта и обусловленной этим обстоятельством особой возможности измерять эту длину в произвольные моменты времени.

Очевидно, что два *эталонных метра* могут иметь разную длину, если они находятся в разных ИСО и движутся относительно наблюдателя с разными скоростями. В этом случае наблюдатель будет видеть *каждый движущийся метр* меньшим *эталонного метра*, находящегося у него в руках.

В какой бы СО **K** мы не измерили длину $L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ стержня, зная β , мы можем найти L_0 . Поэтому **собственную длину** L_0 , можно считать инвариантом.

Пункт 5. Закон сложения скоростей

Предположим, что материальная точка в системе отсчёта **K'** движется со скоростью, вектор которой \vec{u}' имеет углы θ' и φ' с соответствующими осями СО. Пусть система отсчёта **K'** движется относительно **K** со скоростью \mathbf{v} в $+Z$ -направлении. Определим скорость \vec{u} материальной точки в системе **K**. Для определения скорости \vec{u} (и, следовательно, закона сложения скоростей) можно использовать преобразование Лоренца.

Рассмотрим два события, происходящие с материальной точкой и разделенные вектором $d\tilde{R}'$. Будем исходить из обратного преобразования Лоренца

$$dx = dx' ; \quad dy = dy' ;$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dz' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ dt &= \frac{dt' + \beta(dz'/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда по определению получим компоненты скорости материальной точки в **K**

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta(u'_z/c)} ;$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta(u'_z/c)} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{v + u'_z}{1 + \beta(u'_z/c)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Это и есть **формулы релятивистского преобразования скорости**.

а) Выражения (14) показывают, что для малых скоростей ($c \gg v, u$) справедлив принцип относительности Галилея $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$.

б) Однако, если хотя бы одна из этих скоростей близка к скорости света, то появляются особенности. Скорость, большую скорости света, нельзя получить даже при сложении двух скоростей, каждая из которых близка к c .

Рассмотрим простейший случай двух параллельных скоростей $\vec{u}' \uparrow\uparrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{z}_0$. Тогда закон сложения скоростей имеет вид

$$u = \frac{v + u'}{1 + \beta(u'/c)}.$$

Если $u' = c$, то получим $u = c$. Этот результат является явным выражением второго постулата Эйнштейна.

По формулам (14) легко определить абсолютную величину скорости движущегося объекта

$$|\vec{u}|^2 = \frac{|\vec{u}'|^2 (1 - \beta^2) + (u'_z + v)^2}{[1 + \beta(u'_z/c)]^2}, \quad (15)$$

а также найти азимутальный угол вектора скорости

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_x}{u_y} = \frac{u'_x}{u'_y} = \operatorname{tg} \varphi' \quad (16)$$

и угол места

$$(\operatorname{tg} \theta)^2 = \frac{u_x^2 + u_y^2}{u_z^2} = \frac{(1 - \beta^2)(\sin \theta')^2 |\vec{u}'|^2}{(v + u' \cos \theta')^2}. \quad (17)$$

Обратное представление u', θ' через u, θ получается перестановкой $u \Leftrightarrow u'$; $\theta \Leftrightarrow \theta'$ и изменением знака v .

Пункт 6. Эффект Допплера

Эффект Допплера заключается в изменении частоты распространяющихся световых, звуковых и других волн, которое обусловлено движением источника колебаний относительно наблюдателя (или движением наблюдателя относительно среды, в которой распространяются волны). В качестве примеров можно привести изменение звука пролетающего мимо нас самолета, гудка проходящей мимо платформы электрички, частоты ударов волн о днище лодки при изменении скорости или направления её движения относительно направления распространения волн по водяной поверхности.

Вначале покажем, что **фаза любой плоской волны инвариантна**

относительно преобразования Лоренца, ибо ее определение может быть сведено к простому счету, не зависящему от координатной системы.

Трудно представить, как *сосчитать* разность фаз, которые имеет плоская электромагнитная волна в двух точках пространства в два разных момента времени (т.е. в двух точках четырёхмерного пространства). Но это гораздо проще представить, если вместо электромагнитной волны рассмотреть распространение по поверхности моря поверхностной гидродинамической

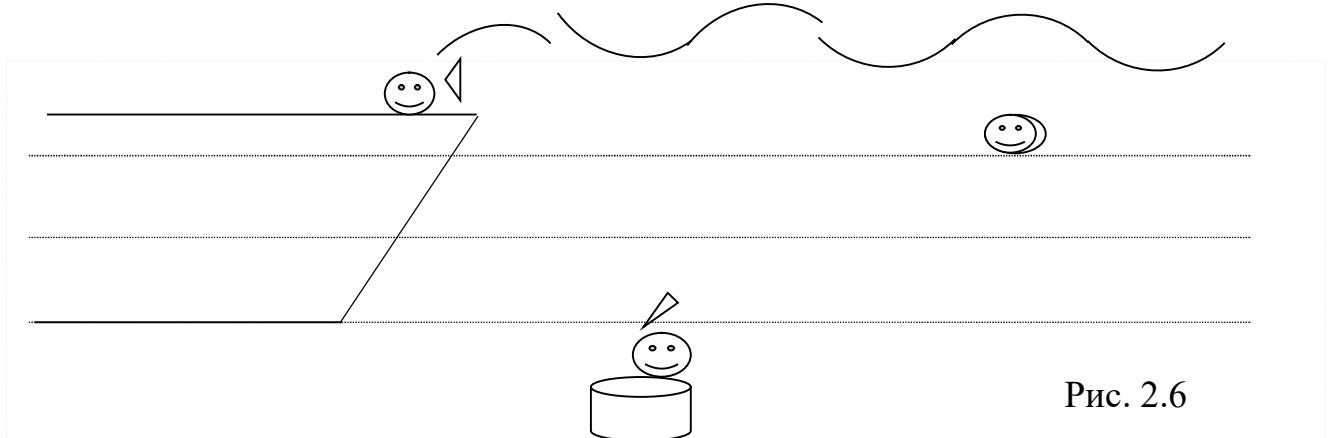


Рис. 2.6

волны.

Возьмем двух наблюдателей, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{z}_0$ и исследующих какой-то волновой процесс. Например, с маяка и с движущегося со скоростью \vec{v} судна два наблюдателя следят пловцом, который борется с морскими волнами (см. Рис. 2.6). Пусть, наблюдатели считают гребни волн, которые приподнимают пловца. Предположим, что оба наблюдателя начали счет с одного гребня (который едва не захлестнул пловца) и закончили счет гребней тоже синхронно (когда, скажем, пловца подобрала лодка). Тогда очевидно, что число гребней, которые пройдут мимо пловца в период между двумя этими событиями, по подсчетам обоих наблюдателей должно быть одним и тем же. Оно для каждого из наблюдателей определяется частотой волн f , пробегающих мимо пловца, временем наблюдения, а также длиной волн и расстоянием, на которое сместился пловец за время наблюдения

$$\Delta q = f \Delta t - \frac{\Delta z}{\lambda_z} = \frac{\omega \Delta t - k_z \Delta z}{2\pi} = \frac{\omega \Delta t - (\vec{k} \Delta \vec{r})}{2\pi} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi}. \quad (18)$$

Для наблюдателя в движущейся СО (лодке) величины $f', \lambda'_z, \Delta t', \Delta z'$ другие, но метод подсчета и ответ должны быть такие же

$$\Delta q = \frac{\omega' \Delta t' - k'_z \Delta z'}{2\pi} = \frac{\omega \Delta t' - (\vec{k}' \Delta \vec{r}')}{2\pi} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi}. \quad (18')$$

Левую часть соотношения

$$\omega \Delta t - k_x \Delta x - k_y \Delta y - k_z \Delta z = \omega' \Delta t' - k'_x \Delta x' - k'_y \Delta y' - k'_z \Delta z' \quad (19)$$

с помощью **формул преобразования Лоренца** (1.21) можно представить также в виде функции от $\Delta t', \Delta z', \Delta x', \Delta y'$ и из сопоставления с правой частью получить

$$k'_z = \frac{k_z - \beta(\omega/c)}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{k_z - \beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \frac{\omega'}{c} = \frac{\omega - v k_z}{c \sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{k - \beta k_z}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \\ k'_x = k_x ; \quad k'_y = k_y ; \quad (20)$$

(Формулы легко проверяются экспериментально. Поэтому их можно считать экспериментальным подтверждением корректности преобразования Лоренца.)

Взглянем теперь на эту проблему с четырехмерной точки зрения. Как уже отмечалось, выражение для фазы

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t - (\vec{k} \cdot \Delta \vec{r})$$

является инвариантным. По форме его можно представить в виде скалярного произведения 4-вектора $\Delta \vec{R}$ и 4-образования векторного типа

$$\vec{k} = \vec{k} \left(\vec{k}, i \frac{\omega}{c} \right) ; \quad (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (21)$$

Из формул (20) можно увидеть, что компоненты 4-образования \vec{k} при преобразовании координат преобразуются как компоненты 4-вектора. Другими словами, при повороте СК на угол $\tilde{\psi}$ в плоскости (x_3, x_4) компоненты (k_3, k_4) и (k_1, k_2) преобразуются по формулам (1.20), где $\sin \tilde{\psi}$ и $\cos \tilde{\psi}$ выражаются формулами (1.19). Т.о., на формулы (20) мы можем смотреть как на результат преобразования 4-вектора \vec{k} при переходе от неподвижной СО к движущейся. Следовательно, \vec{k} не 4-образование, а истинный 4-вектор. Тогда

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t - (\vec{k} \cdot \Delta \vec{r}) = -(\vec{k} \cdot \Delta \vec{R}) ; \quad (\vec{k} \cdot \vec{k}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \equiv 0 \quad (22)$$

есть скалярное произведение двух 4-векторов, и инвариантность фазы очевидна, ибо скалярное произведение двух 4-векторов есть инвариант лоренцевского преобразования координат в четырехмерном пространстве.

Если ввести угол θ между направлением вектора \vec{k} и направлением скорости \vec{v} перемещения одной СО относительно другой и воспользоваться справедливыми для световых волн соотношениями

$$|\vec{k}| = (\omega/c) \equiv k , \quad |\vec{k}'| = (\omega'/c) \equiv k' ,$$

то формулы (20) полезно представить в несколько ином виде

$$k'_z \equiv k' \cos \theta' = k \frac{\cos \theta - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad k' = k \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad k' \sin \theta' = k \sin \theta , \quad (23)$$

или

$$\omega' = \frac{\omega(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{(\sin \theta) \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} .$$
(24)

Обратные преобразования получаются заменой $\omega \Leftrightarrow \omega'$; $\theta \Leftrightarrow \theta'$ и $\beta \Leftrightarrow -\beta$. Тогда из первого соотношения (24) можно получить

$$\omega' = \frac{\omega \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 + \beta \cos \theta')} .$$
(25)

В заключение отметим, что в этом параграфе мы узнали о двух новых 4-векторах $\Delta \vec{R}$ и \vec{k} и нескольких важных инвариантах преобразования Лоренца: $S_{12}^2 \equiv (\Delta \vec{R} \cdot \Delta \vec{R})$; $(\vec{k} \cdot \vec{k}) = 0$; $(\vec{k} \cdot \Delta \vec{R}) = -\Delta \varphi$; τ и L_0 . Кроме того, число инвариантов можно увеличить еще на четыре за счет скалярных произведений $(\vec{k} \cdot \vec{A})$; $(\vec{k} \cdot \vec{J})$; $(\Delta \vec{R} \cdot \vec{A})$ и $(\Delta \vec{R} \cdot \vec{J})$.

§ 3. Релятивистская механика свободной материальной частицы

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем даётся так называемым "принципом наименьшего действия" (или принципом Гамильтона). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией обобщенных координат и импульсов $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)$, которая называется функцией Лагранжа данной системы. Функция Лагранжа $L = T - U$ состоит из двух частей, одна из которых (T) кинетическая энергия системы, а вторая (U) – потенциальная энергия.

Движение системы удовлетворяет следующему условию. Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат \vec{q}_1 и \vec{q}_2 . Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt = s_d$$

называемый действием, имел наименьшее возможное значение.

Рассмотрим две функции $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)$ и $\tilde{L}(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t)$, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(\vec{q}, t)$:

$$\tilde{L}(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t)$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы связаны соотношением

$$\tilde{s}_d = s_d + f(\vec{q}_2, t_2) - f(\vec{q}_1, t_1),$$

правая и левая части которого отличаются дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия. Т.о., условие $\delta(\tilde{s}_d) = 0$ совпадает с условием $\delta(s_d) = 0$, и вид уравнений остается неизменным. Это значит, что функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной по времени от любой функции координат и времени.

Другое доказательство того же утверждения можно представить в виде следующих математических выражений для уравнений движения системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right\} + \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{df}{dt} \right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q},$$

ибо $\frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \right] \equiv \frac{d}{dt} [0] + \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{df}{dt} \right).$

Пункт 1. Интеграл действия и функция Лагранжа свободной материальной частицы в ИСО

Определим функцию Лагранжа $L = T - U$ свободной материальной частицы в ИСО. Поскольку пространство однородное, то U не зависит от \vec{r} (можно считать, U отсутствует). Поскольку время однородное, то U и T не зависят от времени. Следовательно, T зависит только от \vec{v} . Поэтому L тоже зависит только от \vec{v} .

В силу изотропии пространства функция L не может зависеть также и от направления вектора \vec{v} , так что является функцией лишь его абсолютной величины (т.е. L зависит от v^2 или от $|\vec{v}|$)

$$L = L(v^2). \quad (1)$$

Обозначающий действие интеграл вдоль траектории частицы в мировом пространстве между двумя событиями

$$s_d = \int_{t_1}^{t_2} L(v^2) dt \quad (2)$$

не должен зависеть от выбора той или иной ИСО. В противном случае в какой-то ИСО он был бы наименьшим, и эта ИСО была бы особой. Т.о., действие s_d должно быть **инвариантом** относительно преобразования Лоренца (**скаляром**).

Далее из (2) ясно, что под интегралом должен стоять дифференциал от **скаляра** в первой степени. Однако *единственный такой скаляр*, который можно построить для свободной материальной частицы, движущейся по своей собственной траектории, *есть собственное время объекта* τ или пропорциональная ему величина ($a\tau$), где a – постоянная, характеризующая данную частицу.

Как отмечалось в § 2, интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{ic}$$

имеет максимум при $\beta = 0$, т. е. при "перемещении" частицы (объекта, тела) вдоль прямой мировой линии, параллельной оси $x_4 = ict$. (Объект в СО К находится в состоянии покоя в одной точке, и все события на его мировой линии одноместны.) Аналогичным образом, если события $S_{1,2}$ в СО К не находятся в одной точке пространства, то можно выбрать СО K' , в которой они одноместны. Тогда вновь интеграл $\int_{t_1}^{t_2} d\tau$ между этими двумя событиями по прямой линии в СО K' будет максимальным.

Создаваемая релятивистская теория движения материальных тел может получиться корректной только в том случае, если при движении тела по прямолинейной траектории действие s_d будет минимальным. (Именно, в соответствии с этим принципом любая свободная материальная частица движется по прямой линии.) Поэтому действие для рассмотренной свободной частицы должно иметь вид

$$s_d = -a \int_{t_1}^{t_2} d\tau = -a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt = -a \int_{S_1}^{S_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad (3')$$

где $\int_{S_1}^{S_2} d\tau$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя выбранными событиями (т. е. между заданными мировыми координатами на траектории движения в 4-пространстве) и величина a есть некоторая положительная постоянная, характеризующая данную частицу ($a > 0$). Сравнивая (2) и (3'), находим L для свободной частицы в виде

$$L = -a \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (3)$$

Величина a , характеризующая частицу, по размерности должна быть энергией. В классической механике всякая частица характеризуется ее массой m_0 . Связь величин m_0 и a находится из условия, что при предельном переходе $c \rightarrow \infty$ наше выражение для L должно перейти в классическое выражение

$L_{cl} = \frac{m_0}{2} v^2$. Для этого разложим L в ряд по $\beta = (\mathbf{v}/c)$ и, опуская члены высших порядков, получим

$$L = -a \sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2} \approx -a + \frac{a \mathbf{v}^2}{2c^2} \equiv -a + \tilde{L}(\mathbf{v}^2) .$$

Поскольку в функции Лагранжа несущественны члены, являющиеся полными производными по времени, и постоянная величина ($-a$) является именно таким членом, то при сравнении L с классическим выражением её можно не учитывать. Опуская ($-a$) и сопоставляя $\frac{a \mathbf{v}^2}{2c^2} = \tilde{L}(\mathbf{v}^2)$ с $L_{cl} = \frac{m_0}{2} v^2$, находим для постоянного коэффициента в формуле (3) явное выражение

$$a = m_0 c^2 . \quad (4)$$

По размерности величина a является энергией, что полностью отвечает физическому содержанию L . Т.о., функция Лагранжа свободной материальной частицы может быть представлена в виде

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (5)$$

Пункт 2. Импульс и энергия свободной частицы

Импульсом частицы, как известно, называется вектор \vec{p} , компоненты которого равны производным от L по компонентам (v_x, v_y, v_z) скорости \vec{v} . Символически вектор \vec{p} можно определить как градиент функции L по компонентам скорости и, используя выражение (5), найти

$$\vec{p} = \nabla_{\vec{v}} L = (\partial L / \partial \vec{v}) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (6)$$

При малых скоростях $\mathbf{v} \ll c$ (или в пределе при $c \rightarrow \infty$) выражение (6) переходит в классическое.

По определению энергии системы найдём энергию свободной частицы

$$W = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - L = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\mathbf{v}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) - L = (\vec{p} \cdot \vec{v}) - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (7)$$

Эта очень важная формула показывает, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $\mathbf{v} = 0$, а остается конечной величиной

$$W_0 = m_0 c^2 . \quad (7')$$

Ее называют **энергией покоя** частицы. Именно из-за наличия W_0 энергия W и функция Лагранжа L не совпадают друг с другом в отсутствие потенциальной энергии (т.е. в однородном пространстве $L = -(1 - \beta^2) \cdot W = -\left(m_0 c^2\right)^2 / W$).

При малых скоростях $\mathbf{v} \ll c$ (или в пределе при $c \rightarrow \infty$), разлагая (7) по степеням β , получим такое выражение

$$W \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 \equiv W_0 + T_{cl} , \quad (7'')$$

которое за вычетом энергии покоя точно совпадает с классическим выражением для кинетической энергии частицы.

Сопоставляя формулы (6) и (7), можно заметить, что они перепишутся универсально

$$\vec{p} = m \bar{\mathbf{v}} , \quad (6*)'$$

$$W = m c^2 , \quad (7*)$$

если под m понимать величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad (8)$$

которая зависит от скорости частицы в данной СО. Такая форма записи позволяет говорить об эквивалентности массы и энергии, понимая под этим возможность в разных единицах мерить одно и то же.

Т.о., **энергия, измеряемая количеством "работы, которую тело может совершить", и масса, определяемая импульсом при данной скорости, являются взаимосвязанными понятиями: если есть одно, то есть и другое**¹⁾.

И еще один вывод: **ни масса, ни энергия не инвариантны при преобразовании координат**. Каждая величина согласно (7) и (8) зависит от СО наблюдателя. **Масса покоя m_0 - минимальная масса, ибо находится в особой, выделенной СК, где тело поконится. Она скаляр и инвариант в том же смысле**, в каком являются инвариантами **СВО τ** или **длина стержня L_0** .

Из соотношений (6), (7), (8) можно получить полезные формулы, которые устанавливают связь между энергией, массой покоя и импульсом частицы. Исключая из выражений

$$W^2 = \left\{ m_0^2 c^4 / (1 - \beta^2) \right\} ; \quad \left(|\vec{p}|^2 / c^2 \right) = \left\{ m_0^2 \beta^2 / (1 - \beta^2) \right\}$$

величину β^2 , получим энергию в виде так называемой функции Гамильтона

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2} \Rightarrow H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \quad (9)$$

Соотношения (6), (7) и (8) позволяют также представить связь между \vec{p} и W в виде

$$\vec{p} = m \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} \left(W / c^2 \right) \quad (10)$$

или, опуская вектора, в виде

¹⁾ В курсе общей физики масса определена как отношение силы к ускорению.

$$p = \mathbf{v} \left(W / c^2 \right) . \quad (10')$$

Частный случай. При $\mathbf{v} = c$ (или $\beta = 1$) энергия и импульс частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что тело с отличной от нуля массой покоя m_0 не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой покоя $m_0 = 0$, которые движутся со скоростью света. Используя (10') для таких частиц имеем

$$p = \left(W / c \right) . \quad (10*)'$$

Пункт 3. Уравнение движения релятивистской частицы в трёхмерном пространстве

Рассмотрим элементарную частицу в поле силы \vec{f} . Из теоретической механики известно, что под действием силы **будет изменяться импульс частицы в соответствии с уравнением движения**

$$\left(d \vec{p} / d t \right) = \vec{f} , \quad (**)$$

называемым в классической механике вторым законом Ньютона. Дифференцируя (6) по времени, получим *релятивистский вариант уравнения движения элементарной частицы*

$$\frac{d \vec{p}}{d t} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{d \vec{v}}{d t} + \frac{m_0 \vec{v}}{c^2 \left(\sqrt{1 - \beta^2} \right)^3} \cdot \left(\vec{v} \cdot \frac{d \vec{v}}{d t} \right) = \vec{f} . \quad (11)$$

Представляют интерес два частных случая.

a) *Сила* $\vec{f} = \vec{f}_\perp \perp \vec{v}$. Поскольку скорость частицы изменяется только по направлению (но не по величине), то отсутствует составляющая ускорения, параллельная скорости. В этом случае $\left(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}_t \right) = 0$, и уравнение движения имеет вид

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left(\frac{d \vec{v}}{d t} \right)_\perp = \vec{f}_\perp . \quad (11a)$$

Отношение силы к ускорению есть то, что было определено как масса m (иногда ее называют поперечная масса $m \equiv m_\perp$).

б) *Сила* $\vec{f} = \vec{f}_\parallel \uparrow\uparrow \vec{v}$. В этом случае скорость частицы изменяется только по величине и поэтому

$$\left(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}_t \right) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}_t = 0,5 \left(d \mathbf{v}^2 / d t \right) .$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - \beta^2} \right)^3} \cdot \left(\frac{d \vec{v}}{d t} \right)_\parallel = \vec{f}_\parallel , \quad (11b)$$

и отношение силы к ускорению (продольная масса) имеет иную величину

$$m_\parallel = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - \beta^2} \right)^3} = \frac{m_\perp}{1 - \beta^2} ,$$

чем в случае а). Т.о., *если использовать в качестве определения инертной массы отношение силы к ускорению, то такое определение в СТО будет давать неоднозначные ответы на вопрос, какова масса тела.*

§ 4. Ковариантная формулировка уравнений релятивистской механики

Как уже отмечалось, уравнения Максвелла ковариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Это отличает их от уравнений классической механики, которые ковариантны по отношению к преобразованию Галилея.

В этом параграфе мы попытаемся найти уравнения релятивистской механики, ковариантные по отношению к преобразованию Лоренца. Для этого необходимо построить для четырехмерного "мира" основные физические величины, используемые в механике. Очевидно, что первые три (пространственных) компонента этих величин должны быть сходны с соответствующими трехмерными величинами и должны переходить в них в предельном случае ($c \rightarrow \infty$) малых скоростей.

Пункт 1. 4-скорость и 4-импульс

1. Вначале построим *4-скорость*. Образовать *4-скорость* – это значит задать закон преобразования этой величины при повороте СК. Учтем, что в *4-пространстве* каждая точка (событие) определяется 4-вектором с координатами x_k . Движение *материальной точки* в 4-пространстве – это последовательность событий, состоящих в том, что частица занимает какое-то место в пространстве в какой-то момент времени. Это значит, что в 4-пространстве *материальная точка* (тело) описывает некоторую *мировую линию*. *Мировую линию* можно задать как функцию одного *параметра*, определив параметрический закон изменения каждой из четырех координат. Этот *параметр должен быть скаляром и потому инвариантом* относительно преобразования Лоренца. С другой стороны, уже отмечалось, что *единственным инвариантом элементарной частицы*, характеризующим её движение по заданной траектории, *является СВО* τ . Поэтому закон движения материальной точки по *мировой линии* можно задать в виде¹⁾

$$x_k = x_k(\tau). \quad (1)$$

По размерности *4-скорость* есть отношение длины и времени τ :

$$u_k = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta \tau} = \frac{d x_k}{d \tau}. \quad (2)$$

Поскольку приращения Δx_k компонентов 4-вектора \vec{R} преобразуются как компоненты 4-вектора и поскольку u_k тоже должны быть компонентами 4-вектора, то величина $d\tau$ должна быть инвариантом преобразования Лоренца.

¹⁾ Аналогичным образом в классической механике обычно три пространственные координаты задавались как функции четвертой независимой переменной *времени*, причем *время было инвариантом преобразования Галилея*.

Зная связь собственного времени объекта τ и времени t , текущего в инерциальной неподвижной СО, можно связать компоненты 4-скорости с компонентами трёхмерной скорости объекта в классическом представлении:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. Итак, первые три компонента 4-скорости – это компоненты «классической» скорости в трёхмерном пространстве, умноженные на зависящий от модуля скорости фактор $(1/\sqrt{1-\beta^2})$. Четвёртый компонент находится по сформулированному выше правилу

$$u_4 = (dx_4/d\tau) = ic(dx/d\tau) = (ic/\sqrt{1-\beta^2}), \quad (4)$$

так что 4-скорость можно представить в виде

$$\vec{u} = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \equiv \frac{d\vec{R}}{d\tau}. \quad (5)$$

В предельном случае ($c \rightarrow \infty$ или $\beta \rightarrow 0$) первые три компонента совпадают с компонентами обычной скорости. Четвертый компонент отличен от нуля даже тогда, когда частица покоится (при $\vec{v}=0$ и $\beta=0$ имеем $u_4 = ic$). Последнее означает, что **время остановить нельзя**, что оно течёт всегда. В четырехмерном мире не может быть "покоя" в смысле $\vec{u} = 0$.

Скалярное произведение 4-скорости на 4-скорость является **инвариантом**

$$\sum_{k=1}^4 u_k^2 \equiv (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{\mathbf{v}^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2, \quad (6)$$

величина которого **постоянна и отрицательна**. Это означает, что **4-скорость** является времениподобным 4-вектором²⁾ и что **компоненты 4-скорости** произвольно движущегося объекта **не являются независимыми**.

2. 4-импульс.

Из классической механики следует, что **4-импульс** элементарной частицы должен быть параллелен 4-скорости частицы. Коэффициент пропорциональности должен быть скалярной величиной, инвариантной относительно преобразования Лоренца и имеющей размерность массы. Такой величиной является масса покоя, так что с полной очевидностью **4-импульс** представляется как

$$\vec{P} = m_0 \vec{u} = \left\{ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, i \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv i \frac{W}{c} \right\}. \quad (7)$$

В силу того, что четвёртый компонент импульса имеет непосредственное отношение к энергии частицы, **4-импульс** называют иногда **вектором энергии-импульса**.

²⁾ Разделение 4-векторов на пространственноподобные $(\vec{A} \cdot \vec{A}) > 0$ и времениподобные $(\vec{A} \cdot \vec{A}) < 0$ имеет смысл во всех случаях.

Известные законы сохранения импульса и энергии консервативной системы (коллектива частиц) теперь трансформируются в закон сохранения 4-импульса.

4-импульс – времениподобный вектор, его модуль – инвариант постоянной величины, играющий роль уравнения связи между компонентами \vec{P}

$$\sum_{k=1}^4 P_k^2 = (\vec{P} \cdot \vec{P}) = -m_0^2 c^2 . \quad (8)$$

3. Преобразование 4-импульса

При переходе от одной ИСО к другой, движущейся относительно первой со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{z}_0 \cdot \mathbf{v}_0$, компоненты 4-импульса P_k изменяются по формулам (1.20) преобразования Лоренца. Если использовать обозначения

$$\beta^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})/c^2 ; \quad \beta'^2 = (\vec{v}' \cdot \vec{v}')/c^2 ; \quad \beta_0^2 = (\mathbf{v}_0^2)/c^2 ,$$

то их можно представить в виде

$$\begin{aligned} P'_{1,2} &\equiv P'_{x,y} \equiv \frac{m_0 \mathbf{v}'_{x,y}}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{m_0 \mathbf{v}_{x,y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = P_{x,y} = P_{1,2} ; \\ P'_z &\equiv P'_z \equiv \frac{m_0 v_z'}{\sqrt{1-\beta'^2}} = P_3 \cos \tilde{\psi}_0 + P_4 \sin \tilde{\psi}_0 \equiv \frac{P_z - \beta_0 (W/c)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \equiv \frac{m_0 (v_z - v_0)}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta_0^2}} ; \\ P'_4 &\equiv i(W'/c) \equiv i \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta'^2}} = P_4 \cos \tilde{\psi}_0 - P_3 \sin \tilde{\psi}_0 = \frac{i}{c} \cdot \frac{W - v_0 P_z}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \equiv \\ &\equiv \frac{i}{c} \cdot \frac{W - (m_0 v_0 v_z / \sqrt{1-\beta^2})}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \equiv i m_0 c \frac{1 - \beta_0 (v_z/c)}{\sqrt{1-\beta_0^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2}} . \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего выражения (9) следует, что справедливо соотношение

$$\sqrt{1-\beta'^2} = \left(\sqrt{1-\beta_0^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \right) \left/ \left(1 - \beta_0 \frac{v_z}{c} \right) \right. .$$

Обратное преобразование получается из (9) заменой $\mathbf{v}_0 \rightarrow -\mathbf{v}_0$ и штрихованных обозначений на нештрихованные.

Рассмотрим частицу в СО, в которой ее импульс $\vec{p} = 0$ ($\vec{v} = 0$). Эту СО, в которой частица покоятся ($\vec{v} = 0$), можно назвать собственной СО. Энергия покоя частицы W_0 в этой СО не равна нулю, поэтому 4-импульс имеет компоненту

$$P_4 = i m_0 c = i(W_0/c) \neq 0 .$$

В системе \mathbf{K}' , движущейся относительно \mathbf{K} со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{z}_0 \cdot \mathbf{v}_0$, имеем

$$P'_z = \frac{P_z - \beta_0 (W_0/c)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{-m_0 v_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} ; \quad W' = \frac{W_0 - v_0 P_z}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} ; \quad P'_x = P'_y = P'_y = 0 = P'_y . \quad (9')$$

Из формул (9') видно, что *появление импульса связано с переносом энергии*. И наоборот, *всякий перенос энергии вызывает появление импульса*. В собственной СО частица покоялась и обладала минимальной энергией (энергией покоя). Энергия не перемещалась в пространстве, и импульс был равен нулю. В \mathbf{K}' частица

движется со скоростью $-\vec{z}_0 \mathbf{v}_0$. Это означает, что со скоростью $-\vec{z}_0 \mathbf{v}_0$ "течет" энергия. С "течением" энергии связан и импульс P'_z , который совпадает с релятивистским импульсом частицы, движущейся со скоростью $(-\vec{z}_0 \mathbf{v}_0)$. Энергия $W' > W \equiv W_0$, ибо **энергия движущегося тела больше энергии покоя.**

Итак, *агенту, переносящему энергию, необходимо присвоить импульс*. С этим утверждением придется столкнуться и при рассмотрении электромагнитного поля. Эти результаты не могли быть получены из классической механики. Только **открытие энергии покоя позволило связать импульс с переносом энергии.**

Пункт 2. Ковариантная форма уравнения движения частицы в ИСО. 4-сила Минковского

В силу равноправия всех ИСО уравнения (законы) механики должны быть ковариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Это значит, что второй закон Ньютона должен быть представлен в виде равенства двух 4-векторов, один из которых есть 4-вектор силы, а другой 4-вектор по размерности и по смыслу есть производная от 4-импульса по времени. Очевидно, что время должно быть инвариантной величиной, т.е. **собственным временем объекта**. Тогда ковариантная запись уравнения движения имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \vec{P} = \vec{F} . \quad (10)$$

Она удовлетворяет требованию перехода к классической механике при $c \rightarrow \infty$. Поскольку известны компоненты 4-импульса (7), а также связь τ и времени t , то левая часть уравнения (10) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{d\tau} P_k = \frac{d P_k}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d P_k}{dt} . \quad (11)$$

Уравнения движения релятивистской частицы (3.11) позволяют установить связь между компонентами силы и компонентами производной от импульса в трёхмерном пространстве

$$(d P_\alpha / dt) = f_\alpha . \quad (12)$$

Сравнивая (10) – (12) друг с другом, найдем

$$F_\alpha = \left(f_\alpha / \sqrt{1-\beta^2} \right) \quad (13)$$

связь трех компонентов 4-силы и компонентов вектора силы \vec{f} .

Умножим левую и правую части (10) на \vec{P} . Тогда получим соотношение

$$\left(\vec{P} \cdot \frac{d \vec{P}}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\tau} (\vec{P} \cdot \vec{P}) = 0 = (\vec{F} \cdot \vec{P}) ,$$

из которого найдем

$$F_4 = \frac{-1}{P_4} \cdot \sum_{\alpha=1}^3 (F_\alpha \cdot P_\alpha) = \frac{i}{c} \cdot \frac{(\vec{f} \cdot \vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{i}{c} \cdot \frac{f_{\uparrow} \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (14)$$

Т. о., из ковариантно записанного уравнения (10) получим выражение для 4-силы Минковского

$$\vec{F} = \left\{ \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i(\vec{f} \cdot \vec{v})}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\} \equiv \left\{ \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i(\vec{f} \cdot \vec{\beta})}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}. \quad (15)$$

Преобразование силы происходит так же, как преобразование любого 4-вектора. Перейдем в СО, которая движется со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{z}_0 v_0$ относительно неподвижной СО, и в соответствии с общими правилами преобразуем 4-вектор силы

$$\begin{aligned} F'_{1,2} &\equiv F'_{x,y} \equiv \frac{f'_{x,y}}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{f_{x,y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = F_{x,y} = F_{1,2} \quad ; \\ F'_3 &\equiv F'_z \equiv \frac{f'_z}{\sqrt{1-\beta'^2}} = F_3 \cos \tilde{\psi}_0 + F_4 \sin \tilde{\psi}_0 \equiv \frac{f_z - \beta_0 (\vec{\beta} \cdot \vec{f})}{\sqrt{1-\beta_0^2} \sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \\ F'_4 &= \frac{i(\vec{f}' \cdot \vec{v}')}{c\sqrt{1-\beta'^2}} = F_4 \cos \tilde{\psi}_0 - F_3 \sin \tilde{\psi}_0 = \frac{i}{c} \cdot \frac{(\vec{f} \cdot \vec{v}) - (\vec{f} \cdot \vec{v}_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2} \sqrt{1-\beta^2}} . \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что осуществляется преобразование в СО K' , где частица поконится ($\vec{v}' = \vec{\beta}' = 0$). Поскольку скорость СО K' относительно СО K по условиям преобразования равна $\vec{v}_0 = \vec{z}_0 v_0$, то и скорость частицы в K равна $\vec{v}_0 = \vec{z}_0 v_0$ (т.е. $\beta^2 = \beta_0^2$). Подставляя $\beta' = 0$ и $\beta = \beta_0$ в (16), найдём

$$f'_{x,y} = \left(f_{x,y} / \sqrt{1-\beta_0^2} \right), \quad f'_z = f_z, \quad F'_4 = 0 \quad . \quad (16')$$

Скалярное произведение

$$(\vec{F} \cdot \vec{F}) = \frac{(\vec{f} \cdot \vec{f}) - (\vec{f} \cdot \vec{\beta})^2}{(1-\beta^2)} \quad (17)$$

есть инвариант преобразования Лоренца. Для доказательства этого утверждения следует воспользоваться формулами (16) и, вычислив скалярное произведение ($\vec{F}' \cdot \vec{F}'$), убедиться в справедливости равенства

$$(\vec{F}' \cdot \vec{F}') = (\vec{F} \cdot \vec{F}) . \quad (18)$$

Используя формулы (15) и (16'), справедливость утверждения (18) легко проверить для СО, где частица поконится.

В случае $\vec{f} \uparrow \vec{\beta}$ инвариант ($\vec{F} \cdot \vec{F}$) приобретает вид

$$(\vec{F} \cdot \vec{F}) = (\vec{f} \cdot \vec{f}) . \quad (17')$$

§ 5. Ковариантная форма уравнений электродинамики вакуума

(*) Введение о физическом содержании и свойствах ТЕНЗОРА

При определении сути понятия ТЕНЗОР ключевую роль играют понятия **пространства**, в котором определены **два векторных поля**, и **принципа соответствия**, по которому в каждой точке пространства **одному** вектору ставится в соответствие **второй** вектор. Типичным примером могут служить однородное анизотропное **пространство двухосного кристалла** и два определённых в нём **векторных поля** \vec{D} и \vec{E} , между которыми природой установлено взаимно однозначное **соответствие**.

В системе координат, оси которой совпадают с кристаллографическими осями однородного двухосного кристалла, вектору электрического поля

$$\vec{E} = A \vec{x}_0 + B \vec{y}_0 + C \vec{z}_0 \quad (1^*)$$

соответствует вектор поля индукции

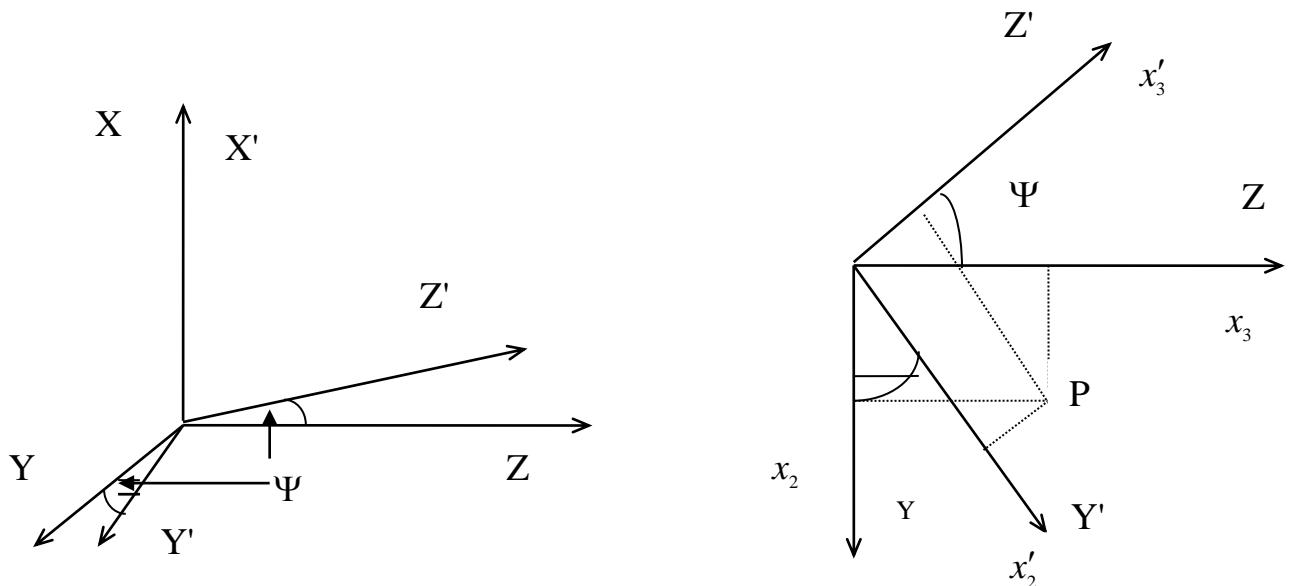
$$\vec{D} = \varepsilon_1 A \vec{x}_0 + \varepsilon_2 B \vec{y}_0 + \varepsilon_3 C \vec{z}_0 . \quad (2^*)$$

Математически это **соответствие** можно записать с помощью **матрицы-диады**

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \vec{x}_0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \vec{y}_0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \vec{z}_0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} A \vec{x}_0 \\ B \vec{y}_0 \\ C \vec{z}_0 \end{vmatrix} = \varepsilon_1 A \vec{x}_0 + \varepsilon_2 B \vec{y}_0 + \varepsilon_3 C \vec{z}_0 , \quad (3^*)$$

элементы которой имеют по два независимых орта, участвующих в скалярном произведении (называемом свёрткой) с вектором поля \vec{E} .

Произведём поворот системы координат на угол Ψ вокруг оси ОХ. Орты



новой (штрихованной) и старой систем координат (см. Рис.) связаны соотношениями

$$\vec{y}_0 = \vec{y}'_0 \cos \Psi - \vec{z}'_0 \sin \Psi ; \quad \vec{z}_0 = \vec{y}'_0 \sin \Psi + \vec{z}'_0 \cos \Psi ; \quad \vec{x}_0 = \vec{x}'_0 . \quad (4*)$$

Проекции вектора

$$d\vec{r} \equiv d\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + d\vec{y} \cdot \vec{y}_0 + d\vec{z} \cdot \vec{z}_0 = d\vec{r}' \equiv d\vec{x}' \cdot \vec{x}'_0 + d\vec{y}' \cdot \vec{y}'_0 + d\vec{z}' \cdot \vec{z}'_0 \quad (5*)$$

на оси старой и новой систем координат определяются по формулам

$$d\vec{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} d\vec{x}_\beta , \quad (6*)$$

в которых коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ ортогонального преобразования координат образуют матрицу

$$a_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{vmatrix} . \quad (7*)$$

Векторы \vec{E}' и \vec{D}' в новой штрихованной системе координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= A \vec{x}'_0 + (B \cos \Psi + C \sin \Psi) \vec{y}'_0 + (C \cos \Psi - B \sin \Psi) \vec{z}'_0 ; \\ \vec{D}' &= \varepsilon_1 A \vec{x}'_0 + (\varepsilon_2 B \cos \Psi + \varepsilon_3 C \sin \Psi) \vec{y}'_0 + (\varepsilon_3 C \cos \Psi - \varepsilon_2 B \sin \Psi) \vec{z}'_0 \end{aligned} \quad (8*)$$

Соответствие \vec{D}' и \vec{E}' в штрихованной системе координат также можно попытаться записать с помощью матрицы-диады

$$\begin{aligned} \vec{D}' &= \begin{vmatrix} \vec{x}'_0 & \vec{y}'_0 & \vec{z}'_0 \\ \vec{x}'_0 & \varepsilon'_{xx} & \varepsilon'_{xz} \\ \vec{y}'_0 & \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_{yy} \\ \vec{z}'_0 & \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} A \vec{x}'_0 \\ (B \cos \Psi + C \sin \Psi) \vec{y}'_0 \\ (C \cos \Psi - B \sin \Psi) \vec{z}'_0 \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon_1 A \vec{x}'_0 + (\varepsilon_2 B \cos \Psi + \varepsilon_3 C \sin \Psi) \vec{y}'_0 + (\varepsilon_3 C \cos \Psi - \varepsilon_2 B \sin \Psi) \vec{z}'_0 \end{aligned} \quad (9*)$$

и получить систему уравнений для определения коэффициентов $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 A &= \varepsilon'_{xx} A + \varepsilon'_{xy} (B \cos \Psi + C \sin \Psi) + \varepsilon'_{xz} (C \cos \Psi - B \sin \Psi) ; \\ \varepsilon_2 B \cos \Psi + \varepsilon_3 C \sin \Psi &= \varepsilon'_{yx} A + \varepsilon'_{yy} (B \cos \Psi + C \sin \Psi) + \varepsilon'_{yz} (C \cos \Psi - B \sin \Psi); \\ \varepsilon_3 C \cos \Psi - \varepsilon_2 B \sin \Psi &= \varepsilon'_{zx} A + \varepsilon'_{zy} (B \cos \Psi + C \sin \Psi) + \varepsilon'_{zz} (C \cos \Psi - B \sin \Psi) . \end{aligned} \quad (10*)$$

В силу произвольности амплитуд A, B, C из уравнений (10*) будем иметь следствия

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xy} &= \varepsilon'_{yx} = \varepsilon'_{xz} = \varepsilon'_{zx} = 0 ; & \varepsilon'_{xx} &= \varepsilon_1 ; \\ \varepsilon_2 \cos \Psi &= \varepsilon'_{yy} \cos \Psi - \varepsilon'_{yz} \sin \Psi ; \\ \varepsilon_3 \sin \Psi &= \varepsilon'_{yz} \cos \Psi + \varepsilon'_{yy} \sin \Psi ; \\ -\varepsilon_2 \sin \Psi &= \varepsilon'_{zy} \cos \Psi - \varepsilon'_{zz} \sin \Psi ; \\ \varepsilon_3 \cos \Psi &= \varepsilon'_{zz} \cos \Psi + \varepsilon'_{zy} \sin \Psi , \end{aligned} \quad (11*)$$

которые следует дополнить известным условием

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\beta\alpha} \quad (12^*)$$

для элементов симметричной матрицы. Разрешая (11*) относительно элементов $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ матрицы-диады (9), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{yy} &\equiv \varepsilon'_{22} = \varepsilon_2 \cos^2 \Psi + \varepsilon_3 \sin^2 \Psi ; \\ \varepsilon'_{zz} &\equiv \varepsilon'_{33} = \varepsilon_3 \cos^2 \Psi + \varepsilon_2 \sin^2 \Psi ; \\ \varepsilon'_{yz} &\equiv \varepsilon'_{23} = \varepsilon'_{zy} \equiv \varepsilon'_{32} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \sin \Psi \cdot \cos \Psi . \end{aligned} \quad (13^*)$$

Прямым расчётом легко проверить и убедиться, что элементы $\varepsilon'_{\alpha\beta}$, представленные выражениями (13*), можно получить по формулам

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} , \quad (14^*)$$

в которых использованы элементы матрицы преобразования координат (7*) и элементы тензора (3*).

При сопоставлении двух матриц-диад (3*) и (9*) естественно возникает вопрос, а изменилось ли что-нибудь в результате перехода к новой системе координат в физических свойствах того анизотропного пространства, в котором вектору поля \vec{E} соответствует неколлинеарный ему вектор \vec{D} ? Разумеется, никаких физических изменений не произошло. Физическое содержание обеих диад, описывающих это *соответствие*, одинаково и заключено оно в анизотропии двухосного кристалла, которое отражают три ненулевых элемента ε_α матрицы (3*). Именно в этих трёх разных величинах заключено основное свойство анизотропной диэлектрической среды, состоящее в том, что фазовая скорость зависит от направления распространения электромагнитной волны по отношению к кристаллографическим осям кристалла. Абсолютные значения фазовых скоростей вдоль кристаллографических осей (по трём особым направлениям) определены параметрами ε_α . Величины ε_α отражают основное физическое содержание матрицы-диады, которая называется тензором второго ранга в трёхмерном пространстве. Именно в этом смысле параметры ε_α являются **инвариантами тензора** диэлектрической проницаемости среды (двухосного кристалла). Из формул (13*) видно, что элементы $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ иной матрицы-диады (9*) выражаются именно через три **инварианта** ε_α .

Из общей теории приведения симметричных матриц к диагональному виду известно, что элементы ε_α получающейся диагональной матрицы размером 3×3 , являются корнями кубического уравнения

$$\left| \begin{array}{ccc} \varepsilon'_{xx} - \lambda & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_{yy} - \lambda & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_{zz} - \lambda \end{array} \right| \equiv \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 , \quad (15^*)$$

называемого **вековым**. Поскольку корни ε_α уравнения (15*) **инварианты**, то и коэффициенты a, b, c **векового** уравнения, однозначно определяющие ε_α , в

свою очередь, однозначно определяются через корни ε_α и потому также могут рассматриваться как **инварианты** тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Суть тензора второго ранга заключается в том, что он устанавливает в некотором пространстве взаимно однозначное соответствие между векторами, принадлежащими различным векторным полям.

2. Скалярное произведение (свёртка) тензора и вектора одного векторного поля даёт вектор, принадлежащий второму векторному полю.

3. При линейном ортогональном преобразовании координат типа (7*) компоненты $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ тензора второго ранга в новой штрихованной системе координат связаны с компонентами $\varepsilon_{\gamma\delta}$ тензора в исходной системе координат соотношениями (14*), которые могут использоваться как главный **отличительный признак тензора**, поскольку не изменяют суть и свойства тензора.

4. Каждый тензор имеет определённое количество **инвариантов**, которые, являясь коэффициентами (или корнями) **векового** уравнения, отражают его основное физическое содержание.

5. Тензор второго ранга может быть определён в пространстве любой размерности, как и вектор (являющийся тензором первого ранга).

6. Могут быть тензоры третьего и более старшего ранга.

Пункт 1. Тензор электромагнитного поля

Ковариантность уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца была установлена Лоренцем и Пуанкаре еще до того, как Эйнштейн сформулировал СТО. Это свойство уравнений Максвелла было положено в основание курса.

В этом параграфе и далее будем рассматривать уравнения Максвелла для полей \vec{E} и \vec{B} , т.е. дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных относительно полей \vec{E} и \vec{B} . В вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) эти уравнения электродинамики имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & ; & \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & ; & \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho & . \end{aligned} \quad (1)$$

Они были представлены в § 1 как уравнения (1.1). С помощью векторного \vec{A} и скалярного φ потенциалов, которые связаны с полями \vec{E} и \vec{B} соотношениями

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad (2)$$

уравнения (1) были преобразованы в дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка относительно компонентов 4-вектора \vec{A} , в правых частях которых находятся источники в виде компонентов 4-вектора \vec{J} .

В этом параграфе, используя определения (2) и определение 4-потенциала \vec{A} , введем новое **образование** и запишем уравнения (1) в **новой канонической форме**. С этой целью выразим компоненты полей \vec{E} и \vec{B} через компоненты 4-потенциала и мировые координаты. Выпишем явно, например, первые составляющие полей \vec{E} и \vec{B} :

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial A_x}{c \partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i \frac{\partial A_1}{\partial x_4} + i \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = i F_{14} \quad ,$$

$$B_x = B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = F_{23} \quad .$$

Для остальных компонентов \vec{E} и \vec{B} можно получить аналогичные формулы. Т.о., все компоненты векторов \vec{E} , \vec{B} можно выразить в виде комбинаций

$$F_{sk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_s} - \frac{\partial A_s}{\partial x_k} \quad . \quad (3)$$

Составим матрицу из этих элементов

$$\hat{F} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

и найдем, как преобразуется каждое слагаемое $\Delta F_{sk} = (\partial A_k / \partial x_s)$ при линейном ортогональном преобразовании координат типа поворота осей.

Пусть a_{sk} являются элементами матрицы такого преобразования. Тогда в соответствии с (1.12) имеем соотношения

$$d x'_f = \sum_{s=1}^4 a_{fs} d x_s \quad , \quad d A'_k = \sum_{l=1}^4 a_{lk} d A'_l \quad , \quad (1.12)'$$

используя которые, далее получим связь компонентов матрицы (4) в двух ИСО

$$\frac{\partial}{\partial x_s} A_k = \sum_{l=1}^4 a_{lk} \frac{\partial}{\partial x_s} A'_l = \sum_{l,f=1}^4 a_{lk} \frac{\partial A'_l}{\partial x'_f} \cdot \frac{\partial x'_f}{\partial x_s} = \sum_{l,f=1}^4 a_{lk} a_{fs} \frac{\partial A'_l}{\partial x'_f} \quad . \quad (5)$$

Т.о., при переходе из СО **K** в СО **K'** комбинации ΔF_{sk} преобразуются как **компоненты тензора**. Следовательно, **матрица (4) есть антисимметричный 4-тензор второго ранга**, который называется **тензором электромагнитного поля**. Это некоторая новая физическая реальность.

Обратный переход приведет к такому преобразованию элементов, которое состоит в замене штрихованных компонентов и координат на нештрихованные и в замене порядка индексов.

Пункт 2. Ковариантные формы уравнений Максвелла для полей \vec{B} и \vec{E}

Представим уравнения Максвелла для полей \vec{E} и \vec{B} в ковариантной форме, используя **тензор электромагнитного поля**.

Вначале рассмотрим два неоднородных уравнения

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad i \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{c} (ic\rho) \quad ;$$

и, переходя к отдельным проекциям типа

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x \quad ,$$

найдём, что они записываются в виде

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} J_s \quad ; \quad \text{Div } \hat{F} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (6)$$

Слева стоит 4-вектор в виде 4-дивергенции от 4-тензора \hat{F} . Справа стоит 4-вектор \vec{J} . Поэтому ковариантная форма (6) очевидна.

Далее рассмотрим два однородных уравнения

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad .$$

На примере одного уравнения

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0$$

заметим, что они сводятся к четырем уравнениям

$$\frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} + \frac{\partial F_{ls}}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad (7)$$

где s, k, l – произвольная тройка чисел из набора 1, 2, 3, 4.

Каждый член в (7) преобразуется как производная от элемента 4-тензора второго ранга. Это значит, что уравнения (7) имеют нужную ковариантную форму типа (6) и что их можно представить именно в такой форме. С этой целью можно образовать 4-тензор второго ранга

$$\hat{F}^+ (\vec{B}, -i\vec{E}) = \hat{F} (-i\vec{E}, \vec{B}) = \begin{vmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & B_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & B_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad (4^+)$$

дуальный по отношению к **тензору электромагнитного поля**. В этом случае уравнения (7) можно записать в виде

$$\text{Div } \hat{F}^+ = 0 \quad . \quad (7^+)$$

Пункт 3. Закон преобразования полей

Поскольку поля \vec{E} и \vec{B} являются элементами тензора электромагнитного поля, их трансформационные свойства определяются преобразованием

$$F'_{sk} = \sum_{f,l=1}^4 a_{sf} a_{kl} F_{fl} , \quad (8)$$

где a_{sf} – элементы матрицы преобразования координат $d x'_s = \sum_{s=1}^4 a_{sf} d x_f$.

При переходе из системы K в систему K' , движущуюся в $+Z$ -направлении со скоростью $\vec{v} = \vec{z}_0 v$, матрица преобразования координат a_{sf} имеет вид

$$a_{sf} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{vmatrix} , \quad (9)$$

где $\gamma = \cos \tilde{\psi} = (1 / \sqrt{1 - \beta^2})$. Подставляя коэффициенты (9) в соотношения (8),

получим $F'_{12} \equiv B'_z = \sum_{f,s=1}^4 a_{1f} a_{2s} F_{fs} = 1 \cdot 1 \cdot F_{12} = F_{12} = B_z$ и далее аналогичным

образом найдём

$$B'_z = B_z , \quad E'_z = E_z , \quad E'_{x,y} = \frac{E_{x,y} \mp \beta B_{y,x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad B'_{x,y} = \frac{B_{x,y} \pm \beta E_{y,x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (10)$$

Умножим каждое из полей в (10) на свой орт и скомбинируем из них векторные поля

$$\vec{E}_{\uparrow} = \vec{z}_0 E_z , \quad \vec{B}_{\uparrow} = \vec{z}_0 B_z , \quad \vec{E}_{\perp} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y , \quad \vec{B}_{\perp} = \vec{x}_0 B_x + \vec{y}_0 B_y .$$

Тогда преобразования (10) с участием вектора $\vec{\beta} = \vec{z}_0 \beta$ могут быть записаны в более компактном виде

$$\vec{E}'_{\uparrow} = \vec{E}_{\uparrow} , \quad \vec{B}'_{\uparrow} = \vec{B}_{\uparrow} , \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (11)$$

Обратные преобразования получаются взаимным обменом штрихованных и нештрихованных величин и изменением знака величины β .

Преобразования (11) показывают, что \vec{E} и \vec{B} не являются независимыми величинами. Поэтому чисто электрическое (или чисто магнитное) поле в одной СО представляется совокупностью электрического и магнитного полей в другой СО. Электрическое и магнитное поля полностью взаимосвязаны. Поэтому следует говорить как о физической реальности об электромагнитном поле F_{sk} , а не о полях \vec{E} и \vec{B} в отдельности.

2. Сила Лоренца как следствие преобразований полей

Рассмотрим элементарную частицу, имеющую заряд q и движущуюся в электромагнитном поле \vec{E} , \vec{B} . Перейдем от СО, в которой частица имеет скорость \vec{v} , к СО \mathbf{K}' , в которой она покоится. В этой СО на неё в соответствии с законом Кулона действует сила только со стороны электрического поля

$$\vec{f}'_q = q \cdot \vec{E}' . \quad (12)$$

Если поле \vec{E}' по формулам (11) выразить через поля \vec{E} и \vec{B} , которые имеются в системе \mathbf{K} , то можно представить правую часть (12) в виде функции этих полей

$$q \vec{E}' = q \vec{E}'_{\parallel} + q \vec{E}'_{\perp} = q \vec{E}_{\parallel} + q \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (13)$$

Далее воспользуемся законом (4.16) преобразования силы при переходе от одной СО к другой и выразим компоненты силы \vec{f}'_q через компоненты \vec{f}_q

$$\vec{f}'_q \equiv \vec{f}'_{\parallel} + \vec{f}'_{\perp} = \vec{f}_{\parallel} + \frac{\vec{f}_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (14)$$

Сопоставляя соответствующие компоненты правых частей (13) и (14)

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\parallel} &= \vec{f}'_{\parallel} \equiv q \cdot \vec{E}'_{\parallel} = q \cdot \vec{E}_{\parallel} , \\ f_{\perp} &= \sqrt{1 - \beta^2} \vec{f}'_{\perp} = \sqrt{1 - \beta^2} q \vec{E}'_{\perp} = q \left\{ \vec{E}_{\perp} + [\vec{\beta} \times \vec{B}] \right\} , \end{aligned} \quad (15)$$

можно получить выражение для силы \vec{f} в системе отсчёта \mathbf{K} как функции полей \vec{E} и \vec{B} . Так получается известная сила Лоренца

$$\vec{f}_q = \vec{f}_{\parallel} + \vec{f}_{\perp} = q \vec{E}_{\parallel} + q \vec{E}_{\perp} + \frac{q}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = q \left\{ \vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}] \right\} , \quad (16)$$

которая действует на заряженную движущуюся частицу в электрическом и магнитном полях в СО \mathbf{K} .

Постулировали силу (закон) Кулона. Получили силу Лоренца, что очень хорошо!

Пункт 4. Инварианты тензора электромагнитного поля

Из компонентов **тензора электромагнитного поля** можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе от одной ИСО к другой. Для нахождения этих инвариантов получим **вековое** уравнение

$$\left| F_{s k} - \lambda \delta_{s k} \right| = 0 . \quad (17)$$

Корни **векового** уравнения в случае симметричного тензора представляют собой главные значения симметричного тензора, приведённого к диагональному виду. Для антисимметричного тензора операция приведения к диагональному виду не

имеет смысла. Однако описанным способом можно воспользоваться для нахождения коэффициентов векового уравнения как инвариантов такого тензора.

Раскроем определитель (17), выбрав ось z (для простоты) вдоль B и ось y так, чтобы поле \vec{E} имело проекции только E_y и E_z . Тогда из (4) и (17) получим **вековое уравнение**

$$\lambda^4 - \left\{ (\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{E} \cdot \vec{E}) \right\} \lambda^2 - (\vec{B} \cdot \vec{E})^2 = 0 . \quad (18)$$

Коэффициентами **векового уравнения** и, следовательно, инвариантами тензора электромагнитного поля являются величины

$$\begin{aligned} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{E} \cdot \vec{E}) &= C_1 = \text{inv}_1 ; \\ (\vec{B} \cdot \vec{E}) &= C_2 = \text{inv}_2 . \end{aligned} \quad (19)$$

Приведенный вывод показывает, что эти два инварианта являются единственными независимыми. Всякий другой инвариант может быть представлен как функция этих двух.

Следствия формул (19)

1. Если в какой-нибудь СО $\vec{E} \perp \vec{B}$ (т.е. $C_2 = 0$) , то они перпендикулярны во всех ИСО.

2. Если в какой-нибудь СО абсолютные величины $|\vec{E}|^2 = |\vec{B}|^2$, то они равны в любой другой СО.

3. Если в какой-нибудь СО $|\vec{E}| > |\vec{B}|$, то в любой иной СО это тоже справедливо.

4. Если в какой-нибудь СО векторы образуют острый угол $(\vec{E} \cdot \vec{B}) > 0$, то они образуют такой же угол во всех СО.

5. Преобразованием Лоренца всегда можно достичь того, чтобы \vec{E} и \vec{B} получили любые значения, удовлетворяющие (19). В частности, можно найти такую СО, где $\vec{E} \uparrow \vec{B}$. В этой СО $(\vec{B} \cdot \vec{E}) = B \cdot E$, и из двух уравнений $B^2 - E^2 = C_1$ и $B^2 E^2 = C_2^2$ можно найти \vec{E} и \vec{B} .

6. Если $C_1 = C_2 = 0$, то во всех СО поля \vec{E} и \vec{B} равны по величине и перпендикулярны по направлению.

7. Если $(\vec{B} \cdot \vec{E}) = 0$, то можно найти такую СО, где либо $\vec{B} = 0$, либо $\vec{E} = 0$ (в зависимости от того, каков знак разности $B^2 - E^2$), т.е. поле чисто магнитное или чисто электрическое.

8. Если в какой-либо СО поле $\vec{E} = 0$ (или $\vec{B} = 0$), то они во всякой другой СО будут взаимно перпендикулярными.

§ 6. Ковариантная запись силовых и энергетических соотношений в электродинамике

Пункт 1. Четырехвектор плотности силы Лоренца

Будем считать, что движущийся относительно неподвижной СО **K** заряд q "размазан" в объеме $\Delta V'_q$ в СО, где он покоится, с равномерной плотностью

$$\rho' \equiv \rho_0 = q / \left(\Delta x'_q \cdot \Delta y'_q \cdot \Delta z'_q \right) \equiv \left(q / \Delta V'_q \right). \quad (1)$$

В неподвижной СО **K**, мимо которой пролетает этот заряд, он занимает объем

$$\Delta V_q = \Delta x_q \cdot \Delta y_q \cdot \Delta z_q = \Delta x'_q \cdot \Delta y'_q \cdot \Delta z'_q \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \equiv \Delta V'_q \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

Следовательно, плотность заряда в СО **K**

$$\rho = \frac{q}{\Delta V_q} = \frac{q}{\Delta V'_q \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

в $(1 / \sqrt{1 - \beta^2})$ раз больше, чем в системе отсчета **K'**, где он покоится.

Считая, что заряд q равномерно размазан в объеме с плотностью ρ , введем с помощью соотношения (5.16) плотность силы Лоренца

$$\left(\vec{f}_q / \Delta V_q \right) \equiv \vec{f}_L = \rho \vec{E} + \frac{\rho}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \equiv \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]. \quad (4)$$

В (4) введено и использовано понятие *плотности тока*

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \rho_0 \frac{d \vec{r}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \rho_0 \frac{d \vec{r}}{d \tau}, \quad (5)$$

являющейся пространственной частью *4-плотности тока*

$$\vec{J} = \rho_0 \frac{d \vec{R}}{d \tau}. \quad (5')$$

Используя обозначения (1.8) и (5.4), преобразуем первую составляющую плотности силы Лоренца к виду

$$\begin{aligned} f_{Lx} &= \rho E_x + \frac{1}{c} (j_y B_z - j_z B_y) = \frac{1}{c} (B_z j_y - B_y j_z + (ic\rho)(-iE_x)) = \\ &= \frac{1}{c} (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 + F_{14} J_4). \end{aligned} \quad (6)$$

Другие составляющие записываются аналогично, так что все три (пространственных) компонента плотности силы Лоренца (4) можно представить в виде

$$f_{L\alpha} = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^4 F_{\alpha q} J_q = \frac{1}{c} (\hat{F} \bullet \vec{J})_{\alpha}, \quad (7)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. Правые части (7) представляют собой пространственные части *4-вектора*. Следовательно, плотность силы Лоренца \vec{f}_L должна быть пространственной частью некоторого нового *4-вектора* \vec{f}_L .

Закон преобразования компонентов \vec{f}_L задан. Поэтому легко найти

$$f_{L4} = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^4 F_{4q} J_q = \frac{i}{c} (\vec{E} \cdot \vec{j}) \equiv \frac{i}{c} (\rho \vec{E} \cdot \vec{v}) \equiv \frac{i}{c} (\vec{f}_L \cdot \vec{v}) \equiv i (\vec{f}_L \cdot \vec{\beta}) \quad (8)$$

и, таким образом, определить **4-вектор плотности силы Лоренца** как

$$\vec{f}_L = \frac{1}{c} (\hat{F} \cdot \vec{J}) . \quad (9)$$

В этой формуле тензор \hat{F} устанавливает соответствие в 4-пространстве между векторными полями \vec{f}_L и \vec{J} .

Скалярное произведение $(\vec{E} \cdot \vec{j})$ в формуле (8) есть *работа, совершаемая полем над зарядами в единичном объеме в единицу времени*, т.е. плотность мощности механических сил. Следовательно, в записанном в инвариантной форме выражении (9) **пространственная часть 4-плотности силы Лоренца определяет скорость изменения количества движения единицы объема, а временная часть – скорость изменения механической энергии единицы объема**. Иными словами, составляющие 4-плотности силы Лоренца определяют пространственные и временные производные некоторой величины с размерностью плотности энергии.

Пункт 2. Электромагнитный тензор энергии-импульса

Исключим из выражения (9) с помощью уравнений (5.6) составляющие 4-плотности тока \vec{J} и получим выражение для 4-плотности силы Лоренца в виде

$$\vec{f}_L = \frac{1}{c} (\hat{F} \cdot \vec{J}) = \frac{1}{4\pi} (\hat{F} \cdot \text{Div} \hat{F}) \equiv \text{Div} \hat{T} . \quad (10)$$

Правая часть (10) представляется в виде 4-дивергенции симметричного 4-тензора второго ранга \hat{T} (см. Приложение к § 6), называемого **электромагнитным тензором энергии-импульса**. Компоненты этого тензора \hat{T} имеют вид

$$T_{s k} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^4 F_{s l} F_{l k} + \frac{1}{4} \delta_{s k} \left(\sum_{m, n=1}^4 F_{n m}^2 \right) \right\} . \quad (11)$$

Используя определения (5.4), компоненты **электромагнитного тензора энергии-импульса** (11) можно явно выразить через поля и представить \hat{T} в виде

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -i(S_1/c) \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -i(S_2/c) \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -i(S_3/c) \\ -i(S_1/c) & -i(S_2/c) & -i(S_3/c) & w_{em} \end{vmatrix} , \quad (11)$$

где представлены компоненты симметричного тензора максвелловских натяжений

$$T_{\alpha \beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha \beta} (E^2 + B^2) \right\} , \quad (12)$$

компоненты вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \quad (13)$$

и плотность энергии электромагнитного поля

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (14)$$

Одним из инвариантов электромагнитного тензора энергии-импульса является сумма его диагональных элементов (след)

$$\sum_{s=1}^4 T_{ss} = T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} = 0 \quad . \quad (15)$$

Как отмечалось выше, в СТО происходит объединение величин, которые в трехмерных представлениях были независимыми. У свободной частицы энергия и импульс объединились в один 4-вектор. Энергия и импульс электромагнитного поля также входят в одно единое образование 4-тензор второго ранга, в который, кроме энергии (скаляра в трехмерном случае) и импульса (вектор в трехмерном случае), входит еще и трехмерный тензор напряжений Максвелла.

В формуле (10) тензор \hat{T} устанавливает соответствие в 4-пространстве между векторными полями \vec{f}_L и оператора дифференцирования.

Законы сохранения импульса и энергии являются просто интегралами по трехмерному объему от правой и левой частей соотношения (10), определяющего связь компонент 4-плотности силы Лоренца и компонент тензора энергии-импульса.

Пункт 3. Закон сохранения энергии

Рассмотрим вначале четвертую составляющую 4-плотности силы Лоренца и четвертую компоненту правой части выражения (10) в виде

$$f_{L4} \equiv \frac{i}{c} (\vec{E} \cdot \vec{j}) = (Div \hat{T})_4 \equiv -\frac{i}{c} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} S_\alpha + \frac{\partial}{ic \partial t} w_{em} \equiv -\frac{i}{c} \left[div \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} w_{em} \right].$$

Образуем из этого соотношения дифференциальную форму теоремы Пойнтинга

$$(\vec{E} \cdot \vec{j}) + div \vec{S} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = 0 \quad . \quad (16)$$

Интегрируя выражение (16) по объему и отмечая, что $(\vec{E} \cdot \vec{j})$ характеризует изменение механической энергии заряженных частиц, получим закон сохранения энергии в виде

$$\iiint (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV + \frac{d}{dt} \iiint w_{em} dV \equiv \frac{d}{dt} (W_k + W_{em}) = - \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}) \quad , \quad (17)$$

где $\iiint_V div \vec{S} dV = \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma})$ и W_{em} – полная электромагнитная энергия в объеме V . Если система замкнутая или при $V \rightarrow \infty$, $\Sigma \rightarrow \infty$ и $\oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}) \rightarrow 0$

система заряженных частиц становится замкнутой, то энергия сохраняется:

$$W_k + W_{e m} = \text{const} . \quad (17)'$$

Пункт 4. Закон сохранения импульса

Получим аналогичным образом выражение для закона сохранения импульса.

Рассмотрим пространственную компоненту 4-плотности силы Лоренца

$$f_{Lx} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial S_x}{\partial t} = (\operatorname{div} \hat{T})_x - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} S_x .$$

Каждую из пространственных компонент умножим на свой орт и, сложив, получим

$$\vec{f}_L = \operatorname{div} \hat{T} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} . \quad (18)'$$

Проинтегрируем (18') по объему V

$$\iiint_V \vec{f}_L dV = \iiint_V \left(\operatorname{div} \hat{T} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} \right) dV \quad (18)$$

и учтем, что

$$\iiint_V \operatorname{div} \hat{T} dV = \iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) .$$

1) Плотность силы Лоренца \vec{f}_L равна изменению плотности механического импульса $\vec{f}_L = (d \vec{p}_{\text{mex}} / dt)$, поэтому $\iiint_V \vec{f}_L dV$ можно заменить на

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \vec{p}_{\text{mex}} dV = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mex}} .$$

2) Введём величину

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \equiv \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{B}] ,$$

которая имеет размерность плотности импульса и называется **плотностью электромагнитного импульса**, а также интегральную величину

$$\vec{G}_{e m} = \frac{1}{c^2} \iiint_V \vec{S} dV ,$$

называемую **импульсом электромагнитного поля в объеме** V ¹⁾. Подставляя все в (18), получим **закон сохранения импульса** в виде

¹⁾ Вектор Пойнтинга должен удовлетворять лишь уравнению (16), поэтому его определение в виде $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{B}]$ не является однозначным. Однако оно не ведет ни к каким противоречиям и является наиболее плодотворным. Поскольку $f_{\alpha} = \sum_{\beta} (\partial T_{\alpha\beta} / \partial x_{\beta})$, то тензор $T_{\alpha\beta}$ определен неоднозначно. К его компонентам можно добавить $A_{\alpha\beta}$ такие, чтобы $\sum_{\beta} (\partial A_{\alpha\beta} / \partial x_{\beta}) = 0$. Однако эта неоднозначность устраивается в теории поля требованием, чтобы натяжения давали не только правильную равнодействующую силу, но и правильный вращательный момент. Аналогичным образом можно решить вопрос с однозначностью в 4-

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{mex} + \vec{G}_{em} \right) = \iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) . \quad (19)$$

Если система замкнутая (или $V \rightarrow \infty$, $\Sigma \rightarrow \infty$), то $\iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = 0$ и тогда имеет место закон сохранения полного импульса

$$\vec{P}_{mex} + \vec{G}_{em} \xrightarrow{\longrightarrow} const . \quad (19)'$$

Другая интерпретация закона (19') – в отсутствие натяжений импульс сохраняется.

Приложение

Приведем доказательство того, что при учете однородных уравнений Максвелла (5.7) выражение (9) можно представить в форме (10). Используя суммирование по повторяющемуся индексу, преобразуем левую часть (10) к виду

$4\pi f_{Lk} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ks} \frac{\partial F_{sl}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \left(F_{ks} F_{sl} \right) - F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} \right]$. В силу полной анти-симметричности матрицы $\{ F_{ks} \}$ справедливо соотношение $F_{sl} \cdot F_{ks} = F_{ls} \cdot F_{sk}$, которое позволяет представить второе слагаемое как

$\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l}$. Далее заметим,

что в последней сумме можно заменить индексы $s \leftrightarrow l$. Тогда получим вначале

$\sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_s}$, а затем в силу полной антисимметрии матрицы $\{ F_{ks} \}$

представим последнюю сумму в виде $\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_s} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s}$. Теперь примем во внимание две последние суммы, приравняем их и получим

$\sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \bullet \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \left(\frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} \right)$. Далее учтем

уравнения Максвелла в форме $\frac{\partial F_{ls}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} = 0$ и тогда получим

$\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \bullet \sum_{s,l=1}^4 \left(-F_{ls} \right) \frac{\partial F_{ls}}{\partial x_k} = \frac{-1}{4} \bullet \frac{\partial}{\partial x_k} \bullet \sum_{s,l=1}^4 F_{ls}^2$. В результате имеем формулу (10) в виде

$$4\pi f_{Lk} = \sum_{s,l=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_l} \left(F_{ks} F_{sl} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{s,l=1}^4 F_{sl}^2 = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \sum_{s=1}^4 \left(F_{ks} F_{sl} \right) + \frac{\delta_{lk}}{4} \left(\sum_{m,n=1}^4 F_{mn}^2 \right) \right\} .$$

мерном случае. По $\vec{M} = [\vec{R} \times \vec{P}]$ необходимо найти момент $M_{ik} = x_i P_k - x_k P_i$ и потребовать его однозначного определения с помощью тензора T_{ik} .

§ 6. Ковариантная запись силовых и энергетических соотношений в электродинамике

Пункт 1. Четырехвектор плотности силы Лоренца

Будем считать, что движущийся относительно неподвижной СО **K** заряд q "размазан" в объеме $\Delta V'_q$ в СО, где он покоится, с равномерной плотностью

$$\rho' \equiv \rho_0 = q / \left(\Delta x'_q \cdot \Delta y'_q \cdot \Delta z'_q \right) \equiv \left(q / \Delta V'_q \right). \quad (1)$$

В неподвижной СО **K**, мимо которой пролетает этот заряд, он занимает объем

$$\Delta V_q = \Delta x_q \cdot \Delta y_q \cdot \Delta z_q = \Delta x'_q \cdot \Delta y'_q \cdot \Delta z'_q \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \equiv \Delta V'_q \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

Следовательно, плотность заряда в СО **K**

$$\rho = \frac{q}{\Delta V_q} = \frac{q}{\Delta V'_q \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

в $(1 / \sqrt{1 - \beta^2})$ раз больше, чем в системе отсчета **K'**, где он покоится.

Считая, что заряд q равномерно размазан в объеме с плотностью ρ , введем с помощью соотношения (5.16) плотность силы Лоренца

$$\left(\vec{f}_q / \Delta V_q \right) \equiv \vec{f}_L = \rho \vec{E} + \frac{\rho}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \equiv \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]. \quad (4)$$

В (4) введено и использовано понятие *плотности тока*

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \rho_0 \frac{d \vec{r}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \rho_0 \frac{d \vec{r}}{d \tau}, \quad (5)$$

являющейся пространственной частью *4-плотности тока*

$$\vec{J} = \rho_0 \frac{d \vec{R}}{d \tau}. \quad (5')$$

Используя обозначения (1.8) и (5.4), преобразуем первую составляющую плотности силы Лоренца к виду

$$\begin{aligned} f_{Lx} &= \rho E_x + \frac{1}{c} (j_y B_z - j_z B_y) = \frac{1}{c} (B_z j_y - B_y j_z + (ic\rho)(-iE_x)) = \\ &= \frac{1}{c} (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 + F_{14} J_4). \end{aligned} \quad (6)$$

Другие составляющие записываются аналогично, так что все три (пространственных) компонента плотности силы Лоренца (4) можно представить в виде

$$f_{L\alpha} = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^4 F_{\alpha q} J_q = \frac{1}{c} (\hat{F} \bullet \vec{J})_{\alpha}, \quad (7)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. Правые части (7) представляют собой пространственные части *4-вектора*. Следовательно, плотность силы Лоренца \vec{f}_L должна быть пространственной частью некоторого нового *4-вектора* \vec{f}_L .

Закон преобразования компонентов \vec{f}_L задан. Поэтому легко найти

$$f_{L4} = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^4 F_{4q} J_q = \frac{i}{c} (\vec{E} \cdot \vec{j}) \equiv \frac{i}{c} (\rho \vec{E} \cdot \vec{v}) \equiv \frac{i}{c} (\vec{f}_L \cdot \vec{v}) \equiv i (\vec{f}_L \cdot \vec{\beta}) \quad (8)$$

и, таким образом, определить **4-вектор плотности силы Лоренца** как

$$\vec{f}_L = \frac{1}{c} (\hat{F} \cdot \vec{J}) . \quad (9)$$

В этой формуле тензор \hat{F} устанавливает соответствие в 4-пространстве между векторными полями \vec{f}_L и \vec{J} .

Скалярное произведение $(\vec{E} \cdot \vec{j})$ в формуле (8) есть *работа, совершаемая полем над зарядами в единичном объеме в единицу времени*, т.е. плотность мощности механических сил. Следовательно, в записанном в инвариантной форме выражении (9) **пространственная часть 4-плотности силы Лоренца определяет скорость изменения количества движения единицы объема, а временная часть – скорость изменения механической энергии единицы объема**. Иными словами, составляющие 4-плотности силы Лоренца определяют пространственные и временные производные некоторой величины с размерностью плотности энергии.

Пункт 2. Электромагнитный тензор энергии-импульса

Исключим из выражения (9) с помощью уравнений (5.6) составляющие 4-плотности тока \vec{J} и получим выражение для 4-плотности силы Лоренца в виде

$$\vec{f}_L = \frac{1}{c} (\hat{F} \cdot \vec{J}) = \frac{1}{4\pi} (\hat{F} \cdot \text{Div} \hat{F}) \equiv \text{Div} \hat{T} . \quad (10)$$

Правая часть (10) представляется в виде 4-дивергенции симметричного 4-тензора второго ранга \hat{T} (см. Приложение к § 6), называемого **электромагнитным тензором энергии-импульса**. Компоненты этого тензора \hat{T} имеют вид

$$T_{s k} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^4 F_{s l} F_{l k} + \frac{1}{4} \delta_{s k} \left(\sum_{m, n=1}^4 F_{n m}^2 \right) \right\} . \quad (11)$$

Используя определения (5.4), компоненты **электромагнитного тензора энергии-импульса** (11) можно явно выразить через поля и представить \hat{T} в виде

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -i(S_1/c) \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -i(S_2/c) \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -i(S_3/c) \\ -i(S_1/c) & -i(S_2/c) & -i(S_3/c) & w_{em} \end{vmatrix} , \quad (11)$$

где представлены компоненты симметричного тензора максвелловских натяжений

$$T_{\alpha \beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha \beta} (E^2 + B^2) \right\} , \quad (12)$$

компоненты вектора Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \quad (13)$$

и плотность энергии электромагнитного поля

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (14)$$

Одним из инвариантов электромагнитного тензора энергии-импульса является сумма его диагональных элементов (след)

$$\sum_{s=1}^4 T_{ss} = T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} = 0 \quad . \quad (15)$$

Как отмечалось выше, в СТО происходит объединение величин, которые в трехмерных представлениях были независимыми. У свободной частицы энергия и импульс объединились в один 4-вектор. Энергия и импульс электромагнитного поля также входят в одно единое образование 4-тензор второго ранга, в который, кроме энергии (скаляра в трехмерном случае) и импульса (вектор в трехмерном случае), входит еще и трехмерный тензор напряжений Максвелла.

В формуле (10) тензор \hat{T} устанавливает соответствие в 4-пространстве между векторными полями \vec{f}_L и оператора дифференцирования.

Законы сохранения импульса и энергии являются просто интегралами по трехмерному объему от правой и левой частей соотношения (10), определяющего связь компонент 4-плотности силы Лоренца и компонент тензора энергии-импульса.

Пункт 3. Закон сохранения энергии

Рассмотрим вначале четвертую составляющую 4-плотности силы Лоренца и четвертую компоненту правой части выражения (10) в виде

$$f_{L4} \equiv \frac{i}{c} (\vec{E} \cdot \vec{j}) = (Div \hat{T})_4 \equiv -\frac{i}{c} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} S_\alpha + \frac{\partial}{ic \partial t} w_{em} \equiv -\frac{i}{c} \left[div \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} w_{em} \right].$$

Образуем из этого соотношения дифференциальную форму теоремы Пойнтинга

$$(\vec{E} \cdot \vec{j}) + div \vec{S} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = 0 \quad . \quad (16)$$

Интегрируя выражение (16) по объему и отмечая, что $(\vec{E} \cdot \vec{j})$ характеризует изменение механической энергии заряженных частиц, получим закон сохранения энергии в виде

$$\iiint (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV + \frac{d}{dt} \iiint w_{em} dV \equiv \frac{d}{dt} (W_k + W_{em}) = - \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}) \quad , \quad (17)$$

где $\iiint_V div \vec{S} dV = \oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma})$ и W_{em} – полная электромагнитная энергия в объеме V . Если система замкнутая или при $V \rightarrow \infty$, $\Sigma \rightarrow \infty$ и $\oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}) \rightarrow 0$

система заряженных частиц становится замкнутой, то энергия сохраняется:

$$W_k + W_{e m} = \text{const} . \quad (17)'$$

Пункт 4. Закон сохранения импульса

Получим аналогичным образом выражение для закона сохранения импульса.

Рассмотрим пространственную компоненту 4-плотности силы Лоренца

$$f_{Lx} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial S_x}{\partial t} = (\operatorname{div} \hat{T})_x - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} S_x .$$

Каждую из пространственных компонент умножим на свой орт и, сложив, получим

$$\vec{f}_L = \operatorname{div} \hat{T} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} . \quad (18)'$$

Проинтегрируем (18') по объему V

$$\iiint_V \vec{f}_L dV = \iiint_V \left(\operatorname{div} \hat{T} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} \right) dV \quad (18)$$

и учтем, что

$$\iiint_V \operatorname{div} \hat{T} dV = \iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) .$$

1) Плотность силы Лоренца \vec{f}_L равна изменению плотности механического импульса $\vec{f}_L = (d \vec{p}_{\text{mex}} / dt)$, поэтому $\iiint_V \vec{f}_L dV$ можно заменить на

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \vec{p}_{\text{mex}} dV = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mex}} .$$

2) Введём величину

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \equiv \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{B}] ,$$

которая имеет размерность плотности импульса и называется **плотностью электромагнитного импульса**, а также интегральную величину

$$\vec{G}_{e m} = \frac{1}{c^2} \iiint_V \vec{S} dV ,$$

называемую **импульсом электромагнитного поля в объеме** V ¹⁾. Подставляя все в (18), получим **закон сохранения импульса** в виде

¹⁾ Вектор Пойнтинга должен удовлетворять лишь уравнению (16), поэтому его определение в виде $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{B}]$ не является однозначным. Однако оно не ведет ни к каким противоречиям и является наиболее плодотворным. Поскольку $f_{\alpha} = \sum_{\beta} (\partial T_{\alpha\beta} / \partial x_{\beta})$, то тензор $T_{\alpha\beta}$ определен неоднозначно. К его компонентам можно добавить $A_{\alpha\beta}$ такие, чтобы $\sum_{\beta} (\partial A_{\alpha\beta} / \partial x_{\beta}) = 0$. Однако эта неоднозначность устраивается в теории поля требованием, чтобы натяжения давали не только правильную равнодействующую силу, но и правильный вращательный момент. Аналогичным образом можно решить вопрос с однозначностью в 4-

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{mex} + \vec{G}_{em} \right) = \iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) . \quad (19)$$

Если система замкнутая (или $V \rightarrow \infty$, $\Sigma \rightarrow \infty$), то $\iint_{\Sigma} \left(\hat{T} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = 0$ и тогда имеет место закон сохранения полного импульса

$$\vec{P}_{mex} + \vec{G}_{em} \xrightarrow{\longrightarrow} const . \quad (19)'$$

Другая интерпретация закона (19') – в отсутствие натяжений импульс сохраняется.

Приложение

Приведем доказательство того, что при учете однородных уравнений Максвелла (5.7) выражение (9) можно представить в форме (10). Используя суммирование по повторяющемуся индексу, преобразуем левую часть (10) к виду

$4\pi f_{Lk} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ks} \frac{\partial F_{sl}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \left(F_{ks} F_{sl} \right) - F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} \right]$. В силу полной анти-симметричности матрицы $\{ F_{ks} \}$ справедливо соотношение $F_{sl} \cdot F_{ks} = F_{ls} \cdot F_{sk}$, которое позволяет представить второе слагаемое как

$\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l}$. Далее заметим,

что в последней сумме можно заменить индексы $s \leftrightarrow l$. Тогда получим вначале

$\sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_s}$, а затем в силу полной антисимметрии матрицы $\{ F_{ks} \}$

представим последнюю сумму в виде $\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_s} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s}$. Теперь примем во внимание две последние суммы, приравняем их и получим

$\sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} = \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \bullet \sum_{s,l=1}^4 F_{ls} \left(\frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} \right)$. Далее учтем

уравнения Максвелла в форме $\frac{\partial F_{ls}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_s} = 0$ и тогда получим

$\sum_{s,l=1}^4 F_{sl} \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \bullet \sum_{s,l=1}^4 \left(-F_{ls} \right) \frac{\partial F_{ls}}{\partial x_k} = \frac{-1}{4} \bullet \frac{\partial}{\partial x_k} \bullet \sum_{s,l=1}^4 F_{ls}^2$. В результате имеем формулу (10) в виде

$$4\pi f_{Lk} = \sum_{s,l=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_l} \left(F_{ks} F_{sl} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{s,l=1}^4 F_{sl}^2 = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \sum_{s=1}^4 \left(F_{ks} F_{sl} \right) + \frac{\delta_{lk}}{4} \left(\sum_{m,n=1}^4 F_{mn}^2 \right) \right\} .$$

мерном случае. По $\vec{M} = [\vec{R} \times \vec{P}]$ необходимо найти момент $M_{ik} = x_i P_k - x_k P_i$ и потребовать его однозначного определения с помощью тензора T_{ik} .

§7. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

Пункт 1. Элементарные частицы в теории относительности

Изучению *взаимодействий элементарных частиц* с электромагнитным полем предпошли некоторые общие соображения, относящиеся к понятию “частицы” в релятивистской механике.

На каждую заряженную частицу действует сила со стороны электромагнитного поля (на инертную частицу – сила гравитационного поля). Каждая заряженная частица создает вокруг себя электромагнитное поле (инертная масса – гравитационное поле). На всякую другую частицу, находящуюся в поле первой частицы, действует сила (электромагнитная или гравитационная). *Взаимодействие частиц* друг с другом описывается (и описывалось) с помощью понятия силового поля.

В классической механике поле являлось лишь способом описания физического явления взаимодействия частиц. Положение вещей существенным образом меняется в теории относительности из-за конечной скорости распространения поля. Силы, действующие на частицу в данный момент, определяются расположением частиц, создающих силовое поле, в предшествующее время. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Поле становится *физической реальностью, через посредство которой осуществляется взаимодействие частиц.* Нельзя говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент между частицей и полем в соседней точке пространства (близкодействие). *Можно говорить о взаимодействии частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.*

В классической механике можно использовать понятие абсолютно твердого тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. Однако в невозможности его существования легко убедиться с помощью следующего рассуждения, основанного на теории относительности.

Пусть твердое тело внешним воздействием в какой-то одной его точке приводится в движение. Если бы тело было *абсолютно твердым*, то все его точки должны начать двигаться одновременно с той, которая подверглась воздействию. (В противном случае тело должно деформироваться). Теория относительности, однако, делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается к остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать движение. Поэтому понятие *абсолютно твердого тела* можно применить только к телу, размеры которого остаются неизменными в системе отсчета, где оно покоится.

Из сказанного выше вытекают определенные выводы, относящиеся к рассмотрению *элементарных частиц*. Очевидно, что в релятивистской механике частицам, которые мы рассматриваем как *элементарные*, нельзя приписывать конечных размеров. Другими словами, в пределах строгой специальной теории относительности *элементарные частицы* не должны иметь конечных размеров и, следовательно, должны рассматриваться как точечные. Поэтому вводится понятие *элементарной частицы* как объекта, механическое состояние которого полностью описывается заданием трех координат и трех компонентов скорости его движения как целого.

Пункт 2. Действие для элементарной частицы в заданном электромагнитном поле

Действие для частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, складывается из действия (3.3) свободной частицы и из члена, описывающего взаимодействие частицы с полем:

$$ds_d = -m_0 c^2 d\tau + ds_{d2} .$$

Второй член **действия** должен содержать величины, характеризующие частицу и поле. Его вид определяется не только на основании общих соображений типа требования релятивистской инвариантности¹⁾, но и в результате опытных данных. Свойства частицы в *отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем* определяются только (одним параметром) зарядом частицы q , который может быть положительной или отрицательной величиной. Свойства же поля характеризуются **4-потенциалом**, компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины должны входить в действие в виде члена (инвариантного по отношению к преобразованию Лоренца)

$$\int_a^b ds_{d2} = \frac{q}{c} \int_a^b (\vec{A} \bullet d\vec{R}) \equiv \frac{q}{c} \int_a^b \sum_{k=1}^4 A_k dx_k ,$$

где функции A_k берутся в точках мировой линии частицы. Множитель c^{-1} существует из соображений размерности. Таким образом, **действие** для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$s_d = \int_a^b \left\{ -m_0 c^2 d\tau + \frac{q}{c} (\vec{A} \bullet d\vec{R}) \right\} \equiv \int_a^b \left\{ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{q}{c} (\vec{A} \bullet \vec{v}) - q\varphi \right\} dt . \quad (1)$$

При переходе от первой части формулы (1) ко второй были использованы выражения (1.8)_A для **4-потенциала** \vec{A} и координаты (1.4) для **4-вектора** \vec{R} , а также скорость частицы \vec{v} . Подынтегральное выражение есть не что иное, как функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле

$$L_q = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{q}{c} (\vec{A} \bullet \vec{v}) - q\varphi . \quad (2)$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа (3.5) для свободной частицы двумя последними членами, которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Обобщенный импульс частицы находим по определению в виде

$$\vec{P}_q = \left(\partial L_q / \partial \vec{v} \right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} \equiv \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \quad (3)$$

и замечаем, что его часть \vec{p} является обычным импульсом материальной частицы, который мы будем называть просто импульсом. Из функции Лагранжа по известной формуле (3.7) получаем также энергию заряженной частицы в э.-м. поле в виде

¹⁾ Требования релятивистской инвариантности допускают наличие в (1) члена вида $\int F d\tau$, где F – скалярная функция. Поскольку речь идет о классической (не квантовой) теории, то не рассматриваются эффекты, связанные со спином частицы.

$$W_q = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + q \varphi \equiv W + q \varphi \quad . \quad (4)$$

Функция Гамильтона в общепринятом представлении должна быть выражена не через скорость, а через *обобщенный импульс* частицы. Используя (3) и (4), по аналогии с (3.6) – (3.9) находим функцию Гамильтона в виде

$$W_q = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P}_q - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} + q \varphi \Rightarrow H(\vec{r}, \vec{P}_q, t) \quad . \quad (5)$$

Для малых скоростей ($\beta^2 \ll 1$) функция Лагранжа (2) переходит в

$$L_q \cong \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{q}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \varphi \quad . \quad (2')$$

В этом приближении импульс частицы имеет вид

$$\vec{p} = \vec{P}_q - \frac{q}{c} \vec{A} \cong m_0 \vec{v} \quad , \quad (3')$$

а выражение для функции Гамильтона –

$$W_q = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{P}_q - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \varphi \quad . \quad (5')$$

Пункт 3. Уравнения движения заряда в заданном поле

Заряд не только подвергается воздействию со стороны поля, но, в свою очередь, сам влияет на поле, изменяя его. Однако его влиянием на поле во многих случаях можно пренебречь. В этом *приближении*, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять такой заряд, можно установить. Ниже мы будем считать эти условия выполненными.

1) Уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле, как и всякие уравнения Лагранжа, получаются варьированием действия и имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\partial L_q / \partial \vec{v} \right) = \left(\partial L_q / \partial \vec{r} \right) \equiv \nabla L_q \quad , \quad (6)$$

где L_q определяется формулой (2) и где $\left(\partial L_q / \partial \vec{v} \right)$ есть обобщенный импульс частицы (3). Правая часть (6) определяется из (2) как

$$\left(\partial L_q / \partial \vec{r} \right) \equiv \nabla L_q = \frac{q}{c} \text{grad} (\vec{A} \bullet \vec{v}) - q \cdot \text{grad} \varphi$$

и преобразуется по известной формуле векторного анализа

$$\text{grad} (\vec{A} \bullet \vec{v}) = (\vec{A} \bullet \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{A} + [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] + [\vec{A} \times \text{rot} \vec{v}]$$

для двух произвольных векторов \vec{A} и \vec{v} (с учётом $\vec{v} = \text{const}$) к виду

$$\nabla L_q = \frac{q}{c} (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{A} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] - q \cdot \text{grad} \varphi \quad .$$

Подставляя это выражение в (6), получим уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \right) = \frac{q}{c} (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{A} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] - q \cdot \text{grad} \varphi .$$

Подставляя в последнее уравнение полную производную по t от векторного потенциала

$$\frac{d \vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{A} ,$$

получим уравнение движения частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \text{grad} \varphi + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] . \quad (7)$$

В левой части (7) стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (7) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Используя представления электрического и магнитного полей (5.2), преобразуем уравнение (7) к виду

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = q \vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] . \quad (8)$$

Стоящее справа выражение нам хорошо знакомо. Первая часть силы (8) не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению электрического поля \vec{E} . Вторая часть силы (8) пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно скорости и магнитному полю \vec{B} . Это – сила Лоренца, которую мы получили в §5 из закона Кулона. Два разных пути привели к одному и тому же результату. Но в одном случае приходилось постулировать действие (или \vec{A}), в другом – силу Кулона.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс \vec{p} приближенно равен своему классическому выражению. Уравнение движения (8) переходит в этом случае в уравнение

$$m_0 \frac{d \vec{v}}{dt} = q \vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] . \quad (8')$$

2) Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем. Поскольку **кинетическая энергия** $W_k \equiv T$ и **энергия покоя** $m_0 c^2$ совместно образуют энергию свободной движущейся частицы, то

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ T + m_0 c^2 \right\} \equiv \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\} = \left(\vec{v} \cdot \vec{f} \right) \equiv \left(\vec{v} \cdot \frac{d \vec{p}}{dt} \right) . \quad (9')$$

При выводе уравнения (9') использованы такие соотношения:

$$dT = (\vec{f} \bullet d \vec{r}) = \left(\frac{d \vec{p}}{dt} \bullet \vec{v} dt \right) = (\vec{v} \bullet d \vec{p}) \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} \equiv \left(\vec{v} \bullet \frac{d \vec{p}}{dt} \right) . \quad (9'')$$

Подставляя в правую часть уравнения (9') выражение $(d \vec{p} / dt)$ из (8) и замечая, что $([\vec{v} \times \vec{B}] \bullet \vec{v}) = 0$, получим окончательный вариант уравнения изменения кинетической (механической) энергии заряженной частицы во внешнем поле

$$\frac{dT}{dt} \equiv \frac{dW}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\} = \left(\vec{v} \cdot \vec{f} \right) = q (\vec{E} \bullet \vec{v}) . \quad (9)$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей в единицу времени. Из (9) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля при перемещении заряда на расстояние $d\vec{r}$ за время dt равна, очевидно, ($q\vec{E} \bullet d\vec{r}$). Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле. **Магнитное поле не производит работы над движущимся зарядом и не изменяет его кинетическую энергию**, поскольку сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости²⁾.

Пункт 4. Движение заряда в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда q в однородном постоянном электрическом поле $\vec{E} = E\vec{z}_0$, направленном вдоль оси OZ. Из (8) следует, что движение будет происходить в одной плоскости, в качестве которой выберем плоскость XOZ. Тогда уравнения движения (8) примут вид

$$(dp_z/dt) = qE, \quad (dp_x/dt) = 0 \quad . \quad (10')$$

Проинтегрируем эти уравнения, используя в качестве начальных условий (при $t=0$) значения

$$z(0) = z_0 = 0; \quad x(0) = x_0 = 0; \quad p_z(0) = 0; \quad p_x(0) = p_0 \quad . \quad (10'')$$

В результате интегрирования получим

$$p_z = qEt, \quad p_x = p_0 \quad . \quad \vec{p} = qEt\vec{z}_0 + p_0\vec{x}_0 \quad (10)$$

Кинетическая энергия частицы вместе с энергией покоя согласно (3.9) равна $W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$. Подставляя в эту часть функции Гамильтона импульс движущейся частицы (10), находим в нашем случае

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (cqEt)^2} \equiv \sqrt{W_0^2 + (cqEt)^2}, \quad (11)$$

где W_0 – энергия частицы в начальный момент времени $t=0$.

Согласно (3.6') и (3.7') скорость частицы выражается формулой

$$\vec{v} = \vec{p} c^2/W; \quad \vec{p} = \frac{W \vec{v}}{c^2} \quad . \quad (12)$$

Для изменения координаты частицы по направлению поля имеем уравнение

²⁾ Уравнения механики инвариантны по отношению к изменению знака времени. Согласно уравнениям при изменении знака времени возможно обратное движение частиц, при котором система проходит все состояния в обратном порядке. Оба направления течения времени равноправны (эквивалентны), уравнения механики инвариантны по отношению к замене будущего прошедшим.

Аналогичная инвариантность согласно (8) имеет место и при движении заряженных частиц в электромагнитном поле. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Если произвести замены $t \rightarrow -t$, $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$, то уравнения движения (8) не меняются. При этом согласно (5.2) скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак: $\varphi \rightarrow \varphi$, $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$. Таким образом, если в электромагнитном поле осуществляется какое-то движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением \vec{B} .

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z c^2}{W} = \frac{c^2 q Et}{\sqrt{W_0^2 + (cqEt)^2}} , \quad (12)_z$$

а для изменения координаты по направлению оси x получим уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{W} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{W_0^2 + (cqEt)^2}} . \quad (12)_x$$

Интегрируя уравнение $(12)_z$ с учётом начального условия $(10'')$, находим выражение для координаты частицы по направлению оси z в виде функции времени

$$z = \frac{1}{qE} \sqrt{W_0^2 + (cqEt)^2} . \quad (13)_z$$

В результате интегрирования уравнения $(12)_x$ найдем проекцию положения частицы на ось x -ов в виде функции времени

$$x = \frac{p_0 c}{qE} \ln \left\{ \left(\frac{cqEt}{W_0} \right) + \sqrt{\left(\frac{cqEt}{W_0} \right)^2 + 1} \right\} \equiv \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{Arsh} \frac{cqEt}{W_0} . \quad (13)_x$$

Выражая из $(13)_x$ время t как явную функцию

$$\frac{cqEt}{W_0} = sh \left(\frac{x qE}{p_0 c} \right) \quad (13')_x$$

координаты x и подставляя $(13')_x$ в $(13)_z$, получим уравнение

$$z = \frac{W_0}{qE} ch \frac{qEx}{p_0 c} \quad (14)$$

траектории заряженной частицы в плоскости XOZ , которая называется *цепной линией*. Таким образом, с учётом релятивистских поправок заряженная элементарная частица движется в однородном электрическом поле *по цепной линии*.

Если скорость частицы $v \ll c$, то (14) можно разложить в ряд по степеням β и получить с точностью до членов высшего порядка малости уравнение траектории в виде параболы

$$z = \frac{qE}{2m_0 v_0^2} x^2 + const . \quad (14')$$

Именно такое уравнение траектории движения заряженной частицы в однородном поле было бы получено с помощью уравнений классической механики.

Пункт 5. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим движение заряда q в однородном статическом магнитном поле \vec{B} . Выберем ось z по направлению магнитного поля. Используя согласно (3.10) в качестве импульса выражение (12) и принимая во внимание, что энергия частицы W в соответствии с (9) в магнитном поле постоянна, представим векторное уравнение движения в виде

$$\frac{d \vec{p}}{dt} \equiv \frac{W}{c^2} \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] . \quad (15)$$

Проектируя векторное уравнение (15) на оси координат, получим три скалярных уравнения

$$\dot{v}_x = \omega_B v_y ; \quad \dot{v}_y = -\omega_B v_x ; \quad \dot{v}_z = 0 , \quad (16)$$

где использовано обозначение

$$\omega_B = (qcB/W) . \quad (17)$$

Умножим второе из уравнений (16) на i и, сложив с первым, получим уравнение

$$\left[d \left(v_x + i v_y \right) / dt \right] \equiv (d \tilde{v}_\perp / dt) = -i \omega_B \tilde{v}_\perp \equiv -i \omega_B v_\perp \exp(i\alpha) , \quad (16')$$

в котором введены скорость частицы v_\perp в плоскости XOY и параметр α .

Интегрируя (16'), находим

$$\tilde{v}_\perp(t) = \tilde{v}_{\perp 0} \exp(-i\omega_B t) \equiv v_{\perp 0} \exp[i(-\omega_B t + \alpha_0)] = v_{\perp 0} [\cos(\omega_B t - \alpha_0) - i \sin(\omega_B t - \alpha_0)] , \quad (18')$$

где параметры

$$v_{\perp 0} = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)} ; \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg} \left[v_y(0) / v_x(0) \right] \quad (16'')$$

определяются начальными условиями для компонентов скорости.

Отделяя в (18') действительную и мнимую части и сопоставляя их с (16'), находим проекции скорости заряженной частицы на оси координат

$$v_x = v_{\perp 0} \cos(\omega_B t - \alpha_0) , \quad v_y = -v_{\perp 0} \sin(\omega_B t - \alpha_0) , \quad (18)$$

и векторную величину поперечного компонента \vec{v}_\perp скорости заряженной частицы

$$\vec{v}_\perp = v_{\perp 0} \operatorname{Re} \{ (\vec{x}_0 + i \vec{y}_0) \exp[i(\omega_B t - \alpha_0)] \} \equiv (c^2/W) \vec{p}_\perp . \quad (18)$$

Из (18) видно, что частица вращается с частотой ω_B в плоскости, перпендикулярной к полю \vec{B} . (Если скорость частицы мала и можно положить $W \approx m_0 c^2$, то ω_B превращается в так называемую *гироскопию* $\omega_B \approx (qB/m_0 c)$). **Частица вращается против часовой стрелки, если смотреть в направлении поля \vec{B} ,** имея постоянную скорость $v_{\perp 0} \equiv v_\perp$ в плоскости XOY .

Интегрируя (18), находим координаты частицы в виде

$$x = x_0 + r_0 \sin(\omega_B t - \alpha_0) , \quad y = y_0 + r_0 \cos(\omega_B t - \alpha_0) , \quad (19)$$

где использованы обозначения радиуса вращения частицы в плоскости XOY

$$r_0 = (v_\perp / \omega_B) \equiv (v_\perp W / qcB) \equiv (c p_\perp / qB) \quad (20)$$

вокруг оси OZ , проходящей через точку с координатами x_0, y_0 , и проекции импульса $p_{\perp 0} \equiv p_\perp$ на плоскость XOY .

Из третьего уравнения (16) находим компонент скорости вдоль магнитного поля и координату частицы на оси OZ :

$$v_z = v_{\uparrow\uparrow} ; \quad \Rightarrow \quad z = z_0 + v_{\uparrow\uparrow} t . \quad (21)$$

Из (19) и (21) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r_0 , определяемым по формуле (20). Скорость частицы при этом постоянна по величине. В частном случае, когда

заряд не имеет скорости вдоль поля ($v_{\parallel} = 0$), он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Пункт 6. Адиабатические инварианты. Дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле

1) Пусть магнитное поле \vec{B} , сохраняя направление и оставаясь однородным, медленно изменяется **во времени** по величине. Выясним, как изменяется при этом движение заряженной частицы. Известно, что при медленном изменении условий движения остаются постоянными *интегралы* $\oint p_{\xi} d\xi$, *взятые по периоду изменения циклической координаты* ξ , называемые *адиабатическими инвариантами*. В нашем случае все координаты являются *циклическим*, ибо гамильтониан частицы не зависит от координат. Однако только угол $\psi = \omega_B t - \alpha_0$ в цилиндрической системе координат является той *циклической координатой*, по которой *движение периодично*. Поэтому *адиабатическим инвариантом* является интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_l (\vec{P}_q \bullet d\vec{l}) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_l (\vec{P}_{q\perp} \bullet d\vec{l}) \equiv \frac{r_0}{2\pi} \int_{2\pi} (\vec{P}_{q\perp} \bullet \vec{\psi}_0) d\psi \quad (22)$$

от обобщенного импульса \vec{P}_q по контуру \vec{l} , который является проекцией на произвольную плоскость $z = \text{const}$ винтовой траектории частицы.

Подставляя $\vec{P}_{q\perp} = \vec{p}_{\perp} + (q/c)\vec{A}_{\perp}$ в выражение для инварианта I , получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_l (\vec{p}_{\perp} \bullet d\vec{l}) + \frac{q}{2\pi c} \oint_l (\vec{A}_{\perp} \bullet d\vec{l}) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_l (\vec{p}_{\perp} \bullet d\vec{l}) + \frac{q}{2\pi c} \oint_l (\vec{A} \bullet d\vec{l}), \quad (23)$$

поскольку в этом случае интеграл берется по окружности радиуса r_0 в направлении, перпендикулярном \vec{B} . Выберем направление движения $d\vec{l}$ по контуру интегрирования l так, чтобы оно совпадало с направлением вращения заряженной частицы. Тогда линейный элемент $d\vec{l}$ будет направлен против вращения часовой стрелки, если смотреть в направлении поля \vec{B} . Применим ко второму члену (23) теорему Стокса и, производя замену $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$, преобразуем его к виду

$$\oint_l (\vec{A} \bullet d\vec{l}) = \iint_{\Sigma} (\vec{B} \bullet \vec{n}) d\Sigma .$$

В этой формуле единичный вектор $\vec{n} = -\vec{z}_0$ направлен навстречу вектору \vec{B} . Следовательно, второй член в (23) вычитается из первого, так что выражение для адиабатического инварианта I приобретает вид

$$I = r_0 p_{\perp} - (q/2c) B r_0^2 ,$$

в котором r_0 – радиус орбиты. Подставляя в это равенство выражение (20), находим два окончательных выражения для *адиабатического инварианта*

$$I = \frac{c p_{\perp}^2}{2qB} = \frac{q B r_0^2}{2c} . \quad (24)$$

Величина $B\pi r_0^2$ представляет собой поток магнитного поля сквозь орбиту частицы. Из (24) видно, что при медленном изменении \vec{B} во времени тангенциальный компонент импульса $|\vec{p}_\perp|$ меняется пропорционально \sqrt{B} .

2) Этот результат можно применить приближенно и к другому случаю, когда частица движется в постоянном, но не вполне однородном поле (мало изменяющемся на расстояниях, сравнимых с радиусом орбиты частицы). При движении в таком квазиоднородном поле круговая орбита с течением времени смещается, и по отношению к ней поле \vec{B} как бы меняется со временем, оставаясь однородным. При этом поперечный (по отношению к направлению поля \vec{B}) компонент импульса меняется по закону $p_\perp = \sqrt{CB}$, где C – постоянная, а B – заданная функция координат. Так как при движении в статическом магнитном поле энергия частицы и квадрат ее импульса p^2 остаются постоянными, то для продольного компонента импульса имеем

$$p_{\parallel}^2 = p^2 - p_\perp^2 = p^2 - CB(x, y, z) . \quad (25)$$

Из условия $p_{\parallel}^2 \geq 0$ видно, что проникновение частицы в некоторые участки пространства, в которых $CB > p^2$, оказывается невозможным.

Рассмотрим простой случай, когда статическое магнитное поле \vec{B} направлено в основном вдоль оси z и медленно растёт вдоль этого направления. На Рис. 7.1 показано поведение силовых линий такого поля. Наряду с основной составляющей, направленной вдоль оси z , поле имеет малую радиальную составляющую, обусловленную искривлением силовых линий.

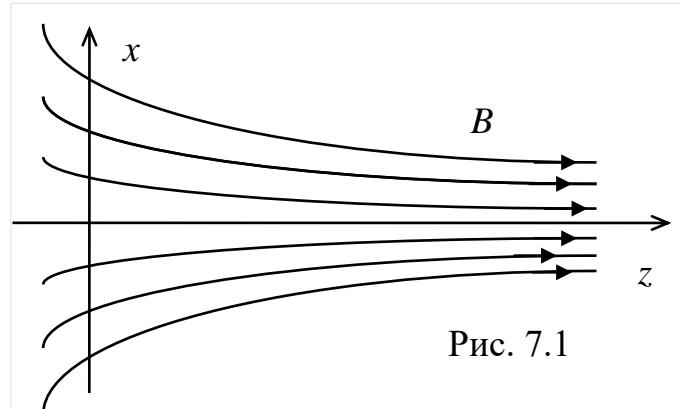


Рис. 7.1

Ограничимся для простоты случаем аксиальной симметрии. Предположим, что частица вращается вокруг оси z с поперечной скоростью $v_{\perp 0} \equiv v_\perp$ по окружности малого радиуса и имеет в плоскости $z = 0$, где напряженность продольного поля есть B_0 , скорость $v_{\parallel 0}$, параллельную \vec{B} . Полная скорость частицы в любой точке вдоль оси z остается неизменной

$$\mathbf{v}_{\parallel}^2 + \mathbf{v}_\perp^2 = \mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}_{\parallel 0}^2 + \mathbf{v}_{\perp 0}^2 , \quad (26)$$

где $\mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}_{\parallel 0}^2 + \mathbf{v}_{\perp 0}^2$ – квадрат скорости в плоскости $z = 0$. Используя инвариантность потока, мы можем согласно (24) записать

$$\frac{\mathbf{v}_\perp^2}{B} = \frac{\mathbf{v}_{\perp 0}^2}{B_0} ,$$

где B – напряженность магнитного поля на оси системы. Отсюда следует, что продольная скорость частицы в каждой плоскости $z = const$ дается выражением

$$\mathbf{v}_{\parallel}^2 = \mathbf{v}_0^2 - \mathbf{v}_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B_0}. \quad (27)$$

При достаточно большом поле $B(z)$ правая часть (27) обратится в нуль в некоторой плоскости $z = z_{cr}$. Это означает, что при движении вдоль поля частица будет вращаться по спирали со всё более уменьшающимся расстоянием между витками, а энергия ее продольного движения будет переходить в энергию вращения, пока продольная скорость не обратится в нуль. Тогда частица повернет обратно и, продолжая вращаться в том же направлении, начнет двигаться в отрицательном направлении оси z .

Такое отражение частицы от области сильного магнитного поля, вытекающее из условия адиабатической инвариантности величины (p_{\perp}^2 / B), играет большую роль при рассмотрении движения частиц в любых пространственно неоднородных магнитных полях. Описанный выше простой пример иллюстрирует принцип "магнитных зеркал": заряженные частицы отражаются от областей сильного магнитного поля. "Магнитные зеркала" могут быть применены также для удержания горячей плазмы в термоядерных реакторах.

Магнитную ловушку можно создать с помощью продольного магнитного поля, образуемого соленоидом с добавочными катушками на обоих его концах, которые служат для усиления магнитного поля на краях. Частицы, создаваемые или инжектируемые в центральной области, будут вращаться вокруг силовых линий магнитного поля и отражаться от магнитных зеркал, расположенных на обоих концах установки. Через торцы смогут уйти только частицы, имеющие очень большую составляющую скорости, параллельную оси.

Другой областью применения изложенных выше принципов и, в частности, понятия адиабатического инварианта являются движения заряженных частиц в дипольном магнитном поле Земли, магнитных полях Солнца и других звезд.

3) Для частицы, движущейся в области, где напряженность поля медленно изменяется как в пространстве, так и во времени, адиабатическая инвариантность I означает, что магнитный поток, пронизывающий орбиту частицы, остается постоянным. При возрастании B радиус орбиты r уменьшается таким образом, что величина $B \pi r^2$ сохраняется. Условие постоянства магнитного потока можно различными способами выразить через радиус орбиты частицы, ее поперечный импульс и магнитный момент. Приведем эти адиабатические инварианты:

$$I_1 = B r^2; \quad I_2 = \frac{p_{\perp}^2}{B}; \quad \vec{I}_3 = \frac{q^2 B r^2}{2 m_0 c^2} \cdot \frac{\vec{B}}{B} \equiv \frac{q \omega_B r^2}{2 c \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{\vec{B}}{B} \equiv \frac{I \pi r^2}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{\vec{B}}{B} \equiv \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (28)$$

Здесь $\bar{\mu} = (q \omega_B r^2 / 2c) \cdot \vec{z}_0$ – магнитный момент кругового тока $I = (q \omega_B / 2\pi)$, создаваемого движущейся по орбите частицей, \vec{z}_0 – орт по направлению \vec{B} .

В статическом магнитном поле скорость частицы постоянна, и ее полная энергия не меняется. В этом случае магнитный момент $\bar{\mu}$ является адиабатическим инвариантом. В изменяющихся во времени полях, а также при наличии статического электрического поля $\bar{\mu}$ является адиабатическим инвариантом только в нерелятивистском приближении.

§8. Поля, создаваемые движущимися зарядами

Пункт 1. Поле равномерно движущегося электрона

На Рис. 8.1. схематично изображено движение электрона со скоростью $\vec{v} = \vec{z}_0 v$ вдоль оси z . Будем измерять поле, которое создает этот электрон в момент времени t в некоторой точке пространства P . Электрон в момент времени t находится в точке O_e , координаты которой (x_e, y_e, z_e) . Т.о., имеется два одновременных события: измерение положения электрона в пространстве S_1 и измерение величины поля S_2 . Событие S_2 , заключающееся в измерении поля в точке P , будет иметь координаты $(x_p, y_p, z_p, t_2=t)$. Координатами события S_1 будут координаты $(x_e, y_e, z_e, t_1=t)$.

В СО K' , которая движется вместе с электроном, точка P , где измеряется поле, имеет координаты $x'_2 = x'_p$, $y'_2 = y'_p$, $z'_2 = z'_p$. Измеряется поле в точке P в момент t'_2 . Событие S'_1 в K' имеет координаты $x'_1 = x'_e$, $y'_1 = y'_e$, $z'_1 = z'_e$, t'_1 . Их без уменьшения общности можно считать равными нулю ($x'_e = y'_e = z'_e = t'_1 = 0$).

Проекции интервала между этими событиями связаны преобразованиями Лоренца (1.21) и в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta z'_{21} &\equiv z'_p = \left[(\Delta z_{21} - \mathbf{v} \Delta t_{21}) / \sqrt{1 - \beta^2} \right] = (\Delta z_{21} / \sqrt{1 - \beta^2}) ; \\ \Delta x'_{21} &\equiv x'_p = \Delta x_{21} \equiv x_p - x_e ; \\ \Delta y'_{21} &\equiv y'_p = \Delta y_{21} \equiv y_p - y_e ; \\ t'_2 &\equiv \Delta t'_{21} = \left[\Delta t_{21} - \left(v / c^2 \right) \Delta z_{21} \right] / \sqrt{1 - \beta^2} \equiv \left(-\beta \Delta z_{21} / c \sqrt{1 - \beta^2} \right) .\end{aligned}\quad (*1.21)$$

Способ 1. Так как в системе K' электрон поконится, то поле в точке (x'_p, y'_p, z'_p) имеет электростатический характер и одинаково во все моменты времени. Это просто поле точечного заряда

$$\vec{E}' = -\nabla \left(-|e| / r'_p \right) = -\left[|e| / (r'_p)^3 \right] \cdot \vec{r}'_p . \quad (1)$$

Расстояние r' от электрона до точки P в собственной СО K' можно выразить через координаты неподвижной системы отсчёта

$$r' = \sqrt{x'^2_p + y'^2_p + z'^2_p} \equiv r'_p = \sqrt{(\Delta x_{21})^2 + (\Delta y_{21})^2 + \{(\Delta z_{21})^2 / (1 - \beta^2)\}} \equiv s . \quad (2)$$

Расстояние $r'_p \equiv s$ больше расстояния

$$r_{pe} = \sqrt{(\Delta x_{21})^2 + (\Delta y_{21})^2 + (\Delta z_{21})^2} < s , \quad (2')$$

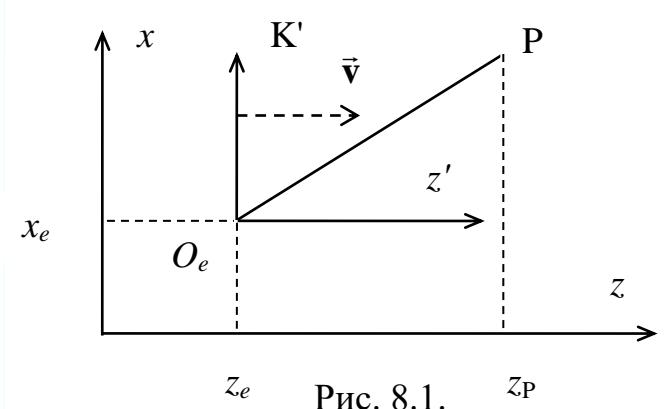


Рис. 8.1.

от электрона $O_e(x_e, y_e, z_e)$ до точки $P(x_p, y_p, z_p)$ в неподвижной СО. В СО K' , связанной с электроном, связанная с нашей доской СО K движется со скоростью $-\vec{v} = -\vec{z}_0 v$. Поэтому в ней из-за способа измерения движущихся объектов происходит Лоренцево сокращение длины

$$\Delta z_{21} = (\Delta z'_{21}) \sqrt{1 - \beta^2} \equiv z'_p \sqrt{1 - \beta^2} , \quad (*)$$

имеющей смысл проекции интервала между двумя одновременными событиями.

Перейдем в СО K и преобразуем поля по формулам (5.11). Заменим в них β на $-\bar{\beta}$ и, поменяв местами штрихи, получим

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel} = \frac{-|e|}{(r'_p)^3} z'_p \vec{z}_0 ; & \vec{E}_{\perp} &= \frac{\vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-|e| [x'_p \cdot \vec{x}_0 + y'_p \cdot \vec{y}_0]}{(r'_p)^3 \sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel} = 0 ; & \vec{B}_{\perp} &= \frac{[\vec{\beta} \times \vec{E}'_{\perp}]}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-|e| \beta (x'_p \vec{y}_0 - y'_p \vec{x}_0)}{(r'_p)^3 \sqrt{1 - \beta^2}} . \end{aligned} \quad (3')$$

Эти формулы имеют промежуточный характер, ибо в них поля в неподвижной СО выражены через координаты системы K' . Поэтому целесообразно перейти в (3') от штрихованных координат к нештрихованным. При таком переходе r'_p следует заменить на s согласно (2). Учитывая (2) и преобразование координат отрезка (*1.21), найдём поля равномерно движущегося электрона в виде формул

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \frac{-|e| \Delta Z_{21}}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} \vec{z}_0 ; & \vec{E}_{\perp} &= \frac{-|e|}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} [\vec{x}_0 \cdot \Delta x_{21} + \vec{y}_0 \cdot \Delta y_{21}] ; \\ \vec{B}_{\parallel} &= 0 ; & \vec{B}_{\perp} &= \frac{-|e| \beta}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} [-\vec{x}_0 \cdot \Delta y_{21} + \vec{y}_0 \cdot \Delta x_{21}] . \end{aligned} \quad (3)$$

Выходы.

1. Неподвижный наблюдатель в отличие от наблюдателя в движущейся СО устанавливает наряду с полем \vec{E} наличие магнитного поля \vec{B} . Согласно (3) си-

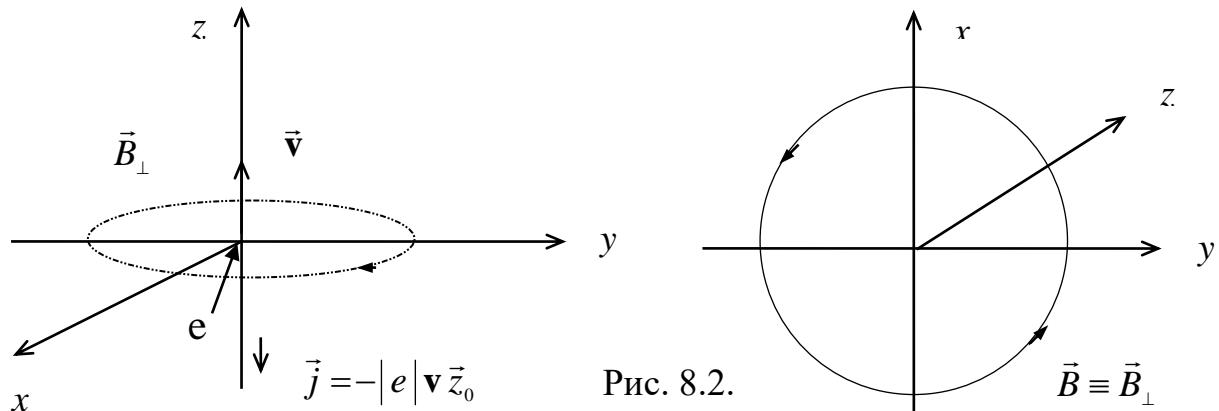


Рис. 8.2.

ловые линии \vec{B} представляют собой описанные вокруг направления движения электрона окружности (Рис. 8.2). Формула для \vec{B}_{\perp} может быть сопоставлена с

формулой для магнитного поля, которое получилось бы в этом случае по закону Био-Савара для тока $\vec{j} \cdot dV = I \cdot d\vec{l} = -|e| \cdot \vec{v}$. Легко обнаружить, что они будут отличаться лишь релятивистскими поправками второго порядка по β , ибо

$$d\vec{B} \equiv d\vec{H} = \frac{-|e| \cdot [\mathbf{v} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{R}]}{c R^3} = \frac{-|e| \cdot \beta (-\Delta y_{21} \vec{x}_0 + \Delta x_{21} \vec{y}_0)}{R^3} \equiv \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j} \times \vec{R}]}{R^3} dV,$$

где $R = |\vec{R}| = r_{pe}$, $\vec{j} \cdot dV = -|e| \vec{v} \equiv -|e| \mathbf{v} \cdot \vec{z}_0$.

2. Силовые линии электрического поля в неподвижной СО представляют собой прямые линии, выходящие из точки расположения электрона (Рис. 8.3). Однако они не распределены с равномерной плотностью по всем направлениям, как это имеет место в связанной с электроном СО, а концентрируются, в основном, в меридиональной плоскости $\Delta z_{21} = 0$. Поскольку при $\beta \rightarrow 1$ согласно (2) величина $s \rightarrow \infty$, то, следовательно, $E \rightarrow 0$, если только не выполнено условие $\Delta z_{21} \rightarrow 0$. Т. о., в предельном случае электрическое поле полностью сосредоточено в плоскости $z = z_e$ (т.е. сжимается в диск).

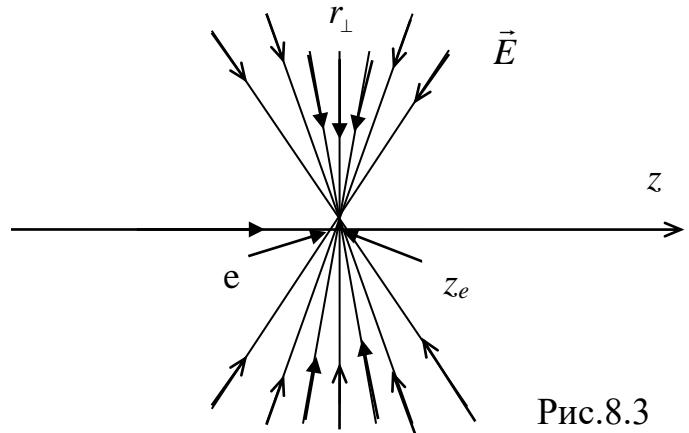


Рис.8.3

Отметим, что в СТО задача определения поля при равномерном движении заряда сводится к проведению чисто алгебраических преобразований компонентов тензора, в то время как в прежней электродинамике она требовала обязательного выполнения интегрирований.

Способ 2. Задача определения поля равномерно движущегося заряда в СТО может быть сведена к задаче преобразования 4-вектора \tilde{A} с последующим дифференцированием. Рассмотрим этот второй способ расчета полей \vec{B} и \vec{E} .

Введем в штрихованной СО К' 4-потенциал неподвижного электрона

$$\tilde{A}' = (0, 0, 0, -i|e|/r') \quad (4')$$

и перейдём одновременно к координатам $\Delta x_{21}, \Delta y_{21}, \Delta z_{21}$ и s . По 4-потенциалу (4') определим вектор-потенциал этого распределения источников

$$\tilde{A} = \left(0, 0, A_3 = -A'_4 \sin \tilde{\psi} = \frac{-|e| \cdot \beta}{s \sqrt{1 - \beta^2}}, A_4 = A'_4 \cos \tilde{\psi} = -\frac{i|e|}{s \sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (4)$$

в СО К, которая движется относительно электрона со скоростью $-\mathbf{v} \cdot \vec{z}_0$. Далее по формулам (5.3) определим компоненты полей \vec{B} и \vec{E} как компоненты тензора электромагнитного поля \tilde{F} и заметим, что они зависят от координат исключительно через посредство функции s .

Чтобы корректно вычислить все производные от компонентов 4-потенциала по координатам и по времени, необходимо рассмотреть небольшое изменение s ,

обусловленное малым смещением в мировом пространстве события, обозначающего измерение поля. Наряду с событием $S_2(x_p, y_p, z_p, t)$ необходимо рассмотреть еще одно событие $\hat{S}_2(x_p + dx, y_p + dy, z_p + dz, t + dt)$, состоящее в измерении компонентов 4-потенциала \vec{A} в соседний момент времени $\hat{t} = t + dt$ в близлежащей точке $\hat{P}(x_p + dx, y_p + dy, z_p + dz)$. Разумеется, при этом необходимо также рассмотреть событие $\hat{S}_1(x_e, y_e, z_e + vdt, \hat{t} = t + dt)$, состоящее в измерении в момент времени $\hat{t} = t + dt$ положения электрона в пространства. Далее по определению (2) следует ввести модуль вектора

$$\hat{r}' = \sqrt{(\Delta\hat{x}')^2 + (\Delta\hat{y}')^2 + (\Delta\hat{z}')^2} = \sqrt{(\Delta x_{21} + dx)^2 + (\Delta y_{21} + dy)^2 + \frac{(\Delta z_{21} + dz - vdt)^2}{1 - \beta^2}} \equiv \hat{s} \quad (2')$$

и вычислить производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 &= -\frac{\Delta x_{21}}{s^3} ; \quad \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = -\frac{\Delta y_{21}}{s^3} ; \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 &= -\frac{\Delta z_{21}}{s^3(1 - \beta^2)} ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = \frac{v \cdot \Delta z_{21}}{s^3(1 - \beta^2)} , \end{aligned}$$

применяя при дифференцировании следующие обозначения: $\hat{x} \equiv (\Delta x_{21} + dx)$, $\hat{y} \equiv (\Delta y_{21} + dy)$, $\hat{z} \equiv (\Delta z_{21} + dz)$. Воспользовавшись обозначениями (5.3), получим совпадающие с (3) выражения

$$\begin{aligned} B_z \equiv F_{12} &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = 0 ; \\ B_y \equiv F_{31} &\equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = \frac{|e|\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = \frac{-|e|\beta(\Delta x_{21})}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ B_x \equiv F_{23} &\equiv \frac{\partial A_3}{\partial x_2} = \frac{-|e|\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = \frac{|e|\beta(\Delta y_{21})}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ -iE_x \equiv F_{14} &\equiv \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = \frac{-i|e|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = \frac{i|e|(\Delta x_{21})}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ -iE_y \equiv F_{24} &\equiv \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = \frac{-i|e|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left\{ \frac{1}{\hat{s}} \right\} / d \vec{R} = 0 = \frac{i|e|(\Delta y_{21})}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ -iE_z \equiv F_{34} &\equiv \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} = \frac{-i|e|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left\{ \left[\frac{1}{\hat{s}} \right] + \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\hat{s}} \right] \right\} / d \vec{R} = 0 = \\ &= \frac{-i|e|(\Delta z_{21})}{s^3 (\sqrt{1 - \beta^2})^3} \left(-1 + \frac{\beta v}{c} \right) = \frac{i|e|(\Delta z_{21})}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} . \end{aligned} \quad (3')$$

Пункт 2. Неравномерное движение электрона. Потенциалы Льенара - Вихерта

Электрон – элементарная частица. Его поле всегда исследуется на расстояниях, много больших его размеров. Но у неравномерно движущегося электрона все его части движутся с разными скоростями. Поэтому к доказательству его «элементарности» необходимо вернуться ещё раз.

Поле неравномерно движущегося электрона может быть получено как результат решения четырех неоднородных волновых уравнений (1.1) в однородной безграничной среде (вакууме) для произвольного распределения плотности тока и плотности заряда. Их решение известно в форме запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(\vec{r}, t) - \varphi_{\infty}(\vec{r}, t) = \iiint_V \frac{1}{R} \cdot \rho \left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{R}{c} \right) d\xi d\eta d\zeta , \quad (5)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{A}_{\infty}(\vec{r}, t) = \iiint_V \frac{1}{R} \cdot \vec{j} \left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{R}{c} \right) d\xi d\eta d\zeta ,$$

где φ_{∞} и \vec{A}_{∞} – решения однородного волнового уравнения, \vec{r} – координаты точки наблюдения P , t – момент времени, в который исследуется поле, (ξ, η, ζ) – координаты точки источников Q и

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \equiv \sqrt{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^2} \quad (6)$$

– расстояние от точки источника $Q(\xi, \eta, \zeta)$ до точки наблюдения $P(x, y, z)$. Потенциалы φ_{∞} и \vec{A}_{∞} надо отождествить с внешним полем, которое действует на систему в отсутствие источников (ρ , \vec{j}) и удовлетворяет граничным условиям задачи. Для простоты мы будем считать $\vec{A}_{\infty} = 0$ и $\varphi_{\infty} = 0$, ибо нас интересует поле излучения свободного электрона.

Введем обозначение

$$T = t - (R/c) , \quad (7)$$

запаздывающего момента времени, в который берутся значения тока и заряда в выражениях под интегралами (5). В формуле (7) за (R/c) обозначено время, за которое электромагнитное излучение (свет) проходит расстояние от Q до P . Следовательно, в точку P в момент времени t приходит поле, которое в момент времени T было создано в точке источника Q (световой точке).

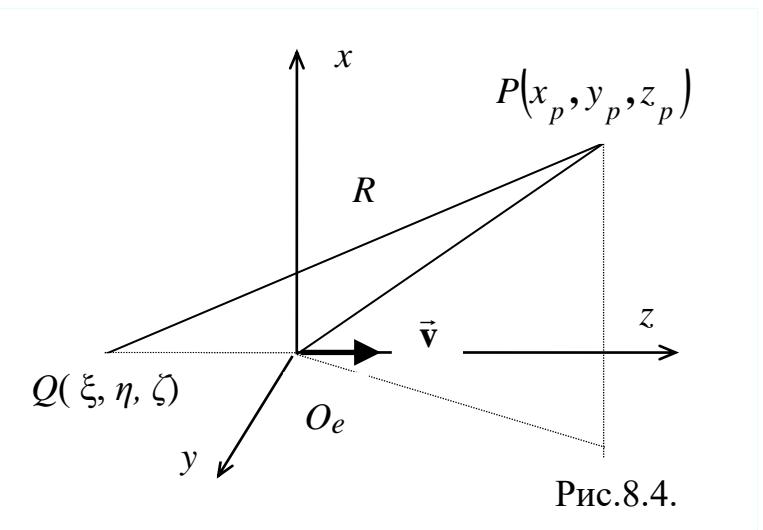


Рис.8.4.

Чтобы рассчитать потенциалы движущегося заряда по формулам (5), необходимо рассмотреть заряд e конечного размера и затем устремить его размеры к

нулю. Поскольку разным точкам области интегрирования соответствуют различные моменты времени T , то бездоказательно заменить интеграл от $\rho(\cdot)$ величиной $-|e|$ нельзя. Такую замену (интегрирование) можно осуществить в системе координат, где частица покоится. Но чтобы воспользоваться такой возможностью, нужна уверенность в том, что при неравномерном движении заряда каждая точка электрона вносит единственный вклад в поле в точке наблюдения P , т.е. является единственной *световой точкой*.

Покажем с помощью рис. 8.5, что при произвольном движении электрона в виде *распределённого в пространстве с плотностью $\rho(\cdot)$ заряда* каждая малая часть электрона даёт единственный вклад в поле в точке $P(x, y, z)$ в момент времени $t_p \equiv t$ (будет единственной *световой точкой* в интеграле (5)). Выберем точку наблюдения $P(x_p, y_p, z_p)$ в момент времени t_p в качестве начала отсчета четырехмерной СК и построим *световой конус с осью вдоль оси времени*. Поверхность полости этого конуса, охватывающая область "абсолютного прошедшего" по отношению к событию P , представляет собой геометрическое место таких точек в 4-пространстве, что *посланный из них световой сигнал приходит в P в момент времени $t_p \equiv t$* . События, в которых мировая линия каждой частички электрона пересекается с этой поверхностью, будут точками, в которых подынтегральные выражения (5) отличны от нуля.

Из рис. 8.5 следуют два вывода.

1) Каждая малая часть электрона даёт единственный вклад в поле в точке наблюдения, т.е. является единственной *световой точкой*.

2) Если задан закон движения электрона, то координаты (ξ, η, ζ) каждой световой точки в распределениях $j(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ можно считать функциями времени T . При этом момент T определяется из уравнения (7), и решение (7) всегда однозначно.

Это значит, что вклад каждой малой части электрона в поле в точке $P(x, y, z)$ можно определять путём перехода в движущуюся систему отсчёта (вторым способом). Следовательно, этот второй способ расчёта поля в точке $P(x, y, z)$ можно применить и к электрону как целому.

Рассмотрим два события: $S_q(\xi, \eta, \zeta, T)$ рождение поля в *световой точке* $Q(\xi, \eta, \zeta)$ в момент времени T и $S_p(x, y, z, t)$ его регистрацию в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t . Эти события связаны соотношением (7), означающим обращение в нуль квадрата интервала

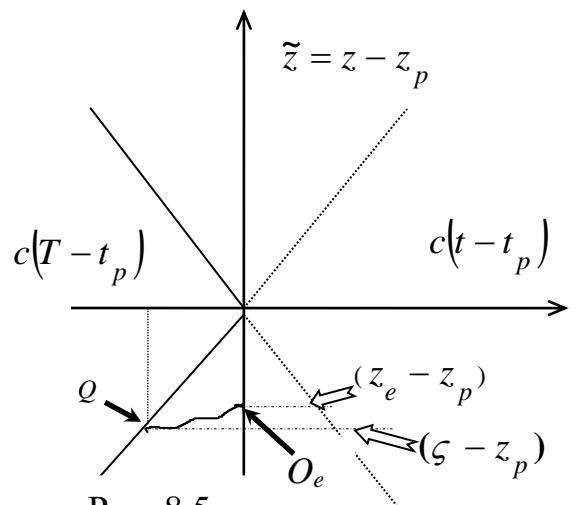


Рис. 8.5.

$$S_{PQ}^2 \equiv S_{21}^2 = \sum_{k=1}^4 R_k^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - c^2(t - T)^2 = (\vec{R} \cdot \vec{R}) = 0 \quad , \quad (7*)$$

где использованы компоненты вектора $\vec{R} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$ и 4-вектор $\vec{R} = (\vec{R}, i c [t - T])$.

Перейдем в систему отсчета \mathbf{K}' , связанную с электроном. В ней события $S'_Q(\xi', \eta', \zeta', T')$ рождения поля в световой точке и $S'_P(x', y', z', t')$ регистрации поля в точке расположения приёмного устройства происходят в моменты времени T' и t' в точках пространства $Q(\xi', \eta', \zeta')$ и $P(x', y', z')$, находящихся друг от друга на расстоянии

$$R' \equiv |\vec{R}'| = \sqrt{(\vec{R}' \cdot \vec{R}') \equiv \sqrt{(R'_1)^2 + (R'_2)^2 + (R'_3)^2} \equiv \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2}}.$$

Расстояние R' является длиной пространственной составляющей 4-вектора

$$\vec{R}' = (R'_1, R'_2, R'_3, R'_4) \equiv (x' - \xi', y' - \eta', z' - \zeta', i c [t' - T']) \equiv (x' - \xi', y' - \eta', z' - \zeta', i R'),$$

квадрат интервала которого $(\vec{R}' \cdot \vec{R}') \equiv (\vec{R} \cdot \vec{R}) = 0$.

В СО \mathbf{K}' , где электрон покоится, плотность тока $\vec{j}'(R') = 0$, потенциал ϕ' приобретает вид потенциала точечного заряда. Это позволяет представить 4-потенциал \vec{A}' в максимально упрощённой форме

$$\vec{A}' = (0, 0, 0, -i [|e| / R']) \equiv (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) . \quad (8')$$

Представим \vec{A}' в инвариантной форме по отношению к координатам различных ИСО. С этой целью обратим внимание на то, что

$$R' = c(t' - T') = (1/i) R'_4$$

с точностью до коэффициента $(1/i)$ совпадает с четвертым компонентом 4-вектора \vec{R}' . Заметим также, что

$$i c = u'_4$$

является четвертым компонентом 4-скорости частицы $\vec{u}'(0, 0, 0, i c)$ в системе \mathbf{K}' , где электрон покоится. С учётом этих замечаний получим инвариантную форму выражения единственного (четвертого) компонента

$$A'_4 = \frac{-i |e|}{R'} = \frac{-i |e| (i c)}{(i c) c (t' - T')} = \frac{|e| u'_4}{u'_4 R'_4} = \frac{|e| u'_4}{(\vec{u}' \cdot \vec{R}')} \quad (8'')$$

4-потенциала в СО \mathbf{K}' . Обобщая эту форму записи на случай 4-векторов \vec{u} и \vec{R} , получим в произвольной ИСО, в которой известны компоненты 4-скорости электрона u_k , выражение для 4-потенциала

$$A_k = \frac{|e| u_k}{(\vec{u} \cdot \vec{R})} ; \quad \vec{A} = \frac{|e| \vec{u}}{(\vec{u} \cdot \vec{R})} , \quad (8)$$

поля в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t , рожденного электроном в световой точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ в момент времени T .

Преобразуем отдельные компоненты 4-потенциала \vec{A}

$$A_\alpha = \frac{|e| \left(v_\alpha / \sqrt{1 - \beta^2} \right) \sqrt{1 - \beta^2}}{v_1(x - \xi) + v_2(y - \eta) + v_3(z - \zeta) + (ic)(iR)} = \frac{|e| v_\alpha}{(\vec{v} \cdot \vec{R}) - cR} = \frac{-|e|(v_\alpha/c)}{R \left[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right]};$$

$$A_4 = \frac{i|e|c}{(\vec{v} \cdot \vec{R}) - cR} = \frac{-i|e|}{R \left[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right]} = i\varphi \quad (9)$$

и представим их в виде

$$\vec{A} = \frac{-|e|\vec{\beta}}{R \left[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right]} \quad ; \quad i\varphi = \frac{-i|e|}{R \left[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right]} \quad . \quad (10)$$

В этих формулах \vec{R} определён как вектор, проведенный из световой точки источника $Q(\xi, \eta, \zeta)$

в точку наблюдения

$P(x, y, z)$, а вектор $\vec{n} = (\vec{R}/R)$ является ортом по направлению распространения волны из точки $Q(\xi, \eta, \zeta)$ в

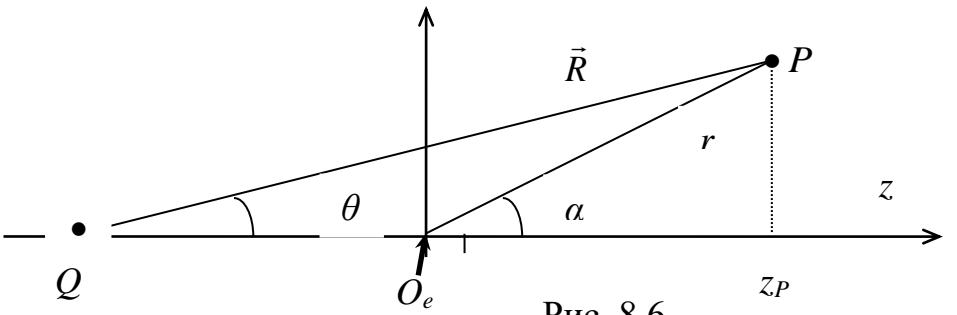


Рис. 8.6.

точку $P(x, y, z)$. Все компоненты скорости $\vec{\beta}$ в правых частях (9) должны быть взяты в момент времени T , определяющийся из соотношения (7). Потенциалы в виде (10) называются **потенциалами Льенара-Вихерта**.

По формулам (5)–(7), которые справедливы для электрона (Рис. 8.4), движущегося вдоль оси z с переменной скоростью $v(t)$, легко найти расстояние между *световой точкой* $Q(\xi, \eta, \zeta)$ и точкой $O_e(x_e, y_e, z_e)$, где он находится в момент t измерения поля в точке $P(x_p, y_p, z_p)$. Оно определяется как

$$QO_e \equiv \int_T^t v(t') dt' \quad ,$$

где $(t - T)$ – время распространения светового сигнала от точки $Q(\xi, \eta, \zeta)$ до точки $P(x_p, y_p, z_p)$. Момент времени T , когда в *световой точке* $Q(\xi, \eta, \zeta)$ рождается поле, измеряемое в точке $P(x_p, y_p, z_p)$ в момент времени $t_p \equiv t$, указан на Рис. 8.5 в виде точки $(T - t_p)$ на оси времени.

Потенциалы (10) справедливы и при $\vec{\beta} = \vec{const}$, когда скорость не зависит от времени. В этом случае они совпадают с выражением (4). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим Рис. 8.6. Из рисунка следует, что

a) $QO_e = v(t - T) = v(R/c) = \beta R \quad ;$

b) $R^2 = r^2 + \beta^2 R^2 - 2(\beta R)r \cos(\pi - \alpha) = r^2 + \beta^2 R^2 + 2\beta R(\Delta z) \quad ;$

v) $(1/c)(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \beta R \cos \theta = \beta [\beta R + (\Delta z)] \quad .$

Разрешая соотношение б) относительно

$$R = \frac{\beta(\Delta z) + \sqrt{\beta^2(\Delta z)^2 + r^2(1 - \beta^2)}}{(1 - \beta^2)} = \frac{\beta(\Delta z)}{1 - \beta^2} + \frac{s}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

и учитывая соотношение в), представим знаменатель в формулах (10) в виде

$$\begin{aligned} R - R(\vec{\beta} \cdot \vec{n}) &= R - R\beta \cos \theta = R - \beta(R\beta - \Delta z) = R(1 - \beta^2) - \beta(\Delta z) = \\ &= \beta(\Delta z) + s\sqrt{1 - \beta^2} - \beta(\Delta z) = s\sqrt{1 - \beta^2}, \end{aligned}$$

что полностью совпадает с соответствующим выражением в формулах (4). Следовательно, потенциалы φ и \vec{A} оба раза были вычислены правильно. Только в формулы (4) вошли координаты точки положения заряда $O_e(x_e, y_e, z_e)$ в момент времени t . В формулах (10), напротив, присутствуют координаты *световой точки* $Q(\xi, \eta, \zeta)$, в которой электрон находился в момент времени T и в которой в этот момент T родилось электромагнитное поле, регистрируемое в точке $P(x_p, y_p, z_p) \equiv P(x, y, z)$ в момент времени t .

Пункт 3. Поля, создаваемые ускоренно движущимся электроном

Для вычисления электрического и магнитного полей по формулам

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad , \quad (11)$$

необходимо дифференцировать φ и \vec{A} по координатам (x, y, z) и моменту времени t . Для этого помимо потенциалов φ и \vec{A} в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t (рождённых в световой точке Q), необходимо знать потенциалы также в близлежащей точке $\tilde{P}(x+dx, y+dy, z+dz)$ в момент времени $\tilde{t} = t + dt$, которые «роджены» в соответствующей световой точке $\tilde{Q}()$. Точки $\tilde{P}()$ и $\tilde{Q}()$ связаны соотношением (7) в виде $\tilde{T} = \tilde{t} - (\tilde{R}/c)$.

В формулах (10) функция R явно зависит от координат x, y, z , а также через координаты световой точки Q , зависящие от времени T , через соотношение (7) зависит от x, y, z, t неявно. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от T по t и по x, y, z .

Вначале введём орт $(\vec{R}/R) = \vec{n}$ по направлению вектора $\vec{R} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$ и найдём производные от вектора \vec{R} и от его длины R по времени T :

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial T} \equiv \dot{\vec{R}}_T = -\frac{\partial \vec{r}_Q}{\partial T} = -\vec{v}; \quad \frac{\partial R}{\partial T} \equiv \frac{\partial}{\partial T} \sqrt{(\vec{R} \cdot \vec{R})} = \frac{(\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}_T)}{R} = -(\vec{n} \cdot \vec{v}).$$

Дифференцируя соотношение (7) по времени t , получим выражение

$$1 = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial T} R \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial T} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \left\{ 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial T} \sqrt{(\vec{R} \cdot \vec{R})} \right\} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \left\{ 1 - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v})}{c R} \right\} = \frac{\partial T}{\partial t} \left[1 - \left(\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right) \right] = \frac{\partial T}{\partial t} \cdot [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})] \quad ,$$

позволяющее установить связь времён t и T . В результате достаточно простых преобразований получаем несколько важных соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})}; & \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-\vec{v}}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})}; \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-(\vec{n} \cdot \vec{v})}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дифференцируя аналогичным образом (7) по координатам и используя обозначение $\nabla R \equiv (\vec{R} / R) = \vec{n}$, означающее дифференцирование по явно входящим координатам, находим соотношение

$$0 = \nabla T + \frac{1}{c} \cdot \nabla R(T) = \nabla T + \frac{1}{c} \left\{ \nabla R + \frac{\partial R}{\partial T} \cdot \nabla T \right\} = \nabla T \cdot [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})] + \frac{\vec{n}}{c},$$

которое позволяет получить аналитические выражения для ∇T и $\nabla R(T)$:

$$\nabla T = \frac{-(\vec{n}/c)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})}; \quad \nabla R(T) = \nabla R + \frac{\partial R}{\partial T} \cdot \nabla T = \vec{n} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{n}/c)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})} = \frac{\vec{n}}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})}. \quad (13)$$

При выводе выражения для электрического поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \vec{E}_A + \vec{E}_\varphi$$

учтём, что оно имеет две составляющие

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial T} \right) = \frac{(|e|/c)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{\vec{\beta}}{R - (\vec{\beta} \cdot \vec{R})} \right\} = \\ &= \frac{(|e|/c)}{1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})} \cdot \left\{ \frac{\dot{\vec{\beta}} R - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - \vec{\beta} \left[-(\vec{n} \cdot \vec{v}) - (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}) + (\vec{\beta} \cdot \vec{v}) \right]}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^2} \right\} = \\ &= \frac{(|e|/c)}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \cdot \left\{ \dot{\vec{\beta}} R - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{R}) + \vec{\beta}(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}) - \vec{v} \cdot \vec{\beta}^2 + \vec{\beta}(\vec{n} \cdot \vec{v}) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{E}_\varphi &= -\nabla \varphi = -\nabla \left\{ \frac{|e|}{R - (\vec{R} \cdot \vec{\beta})} \right\} = \frac{-|e| \nabla [R - (\vec{R} \cdot \vec{\beta})]}{[R - (\vec{R} \cdot \vec{\beta})]^2} = \\ &= \frac{-|e|}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^2} \cdot \left\{ \vec{n} - \vec{\beta} + \frac{\partial}{\partial T} \langle R - (\vec{R} \cdot \vec{\beta}) \rangle \cdot \nabla T \right\} = \\ &= \frac{-|e|}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^2} \cdot \left\{ \vec{n} - \vec{\beta} + \frac{(-\vec{n}/c)}{1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})} \cdot \left[-(\vec{n} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\beta}) - (\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right] \right\} = \\ &= \frac{-|e|}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \cdot \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{n} \beta^2 + \frac{R}{c} \vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right\}. \end{aligned}$$

В результате объединения \vec{E}_A и \vec{E}_φ получим полное поле

$$\begin{aligned}
\vec{E} = \vec{E}_\varphi + \vec{E}_A &= \frac{-(|e|/c)R}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \left\{ -\dot{\vec{\beta}} + \dot{\vec{\beta}}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right\} + \\
&+ \frac{-|e|}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \cdot \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{n}\beta^2 + \vec{\beta}\beta^2 - \vec{\beta}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) \right\} = \quad (14) \\
&= \frac{-(|e|/c)R}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \left\{ -\dot{\vec{\beta}}[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})] + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\vec{n} - \vec{\beta}) \right\} - \frac{|e|(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} = \\
&= \frac{-|e|(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2 [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} + \frac{-(|e|/c)[\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})]}{R [1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} \equiv \vec{E}_{st} + \vec{E}_{rd} .
\end{aligned}$$

В (14) выделены члены, имеющие различную зависимость от R . Электрическое поле \vec{E} состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит от скорости частицы и не зависит от ускорения. Эта часть поля имеет фактически статический характер, убывая с расстоянием как R^{-2} . Вторая часть поля, зависящая от ускорения, является типичным полем излучения. Составляющая \vec{E}_{rd} этого поля перпендикулярна вектору $\vec{R} \uparrow \vec{n}$ и изменяется как R^{-1} . Эта составляющая обуславливает излучение неравномерно движущейся заряженной частицы. Все величины в правых частях равенств (14) берутся в момент времени T . Дифференцирование проводится по времени T . Поле определяется в точке P в момент времени t .

С помощью формул (12) и (13) можно произвести также вычисление поля \vec{B} . Опуская промежуточные расчёты, приведём окончательный результат

$$\vec{B} = [\vec{n} \times \vec{E}] \equiv [\vec{n} \times (\vec{E}_{st} + \vec{E}_{rd})] \equiv \vec{B}_{st} + \vec{B}_{rd} . \quad (14)$$

Магнитное поле оказалось перпендикулярным электрическому полю. Подобно электрическому магнитное поле также содержит две составляющие, одна из которых имеет статический характер, а вторая является полем излучения.

§ 9. Излучение неравномерно движущегося заряда

Рассмотрим **поле излучения** неравномерно движущегося электрона

$$\vec{E}_{rd} = \frac{-(|e|/c)}{R} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] ; \quad \vec{B}_{rd} = \left[\vec{n} \times \vec{E}_{rd} \right] . \quad (1)$$

Не представляет особого труда написать общие выражения для мгновенного значения вектора Пойнтинга в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}_{rd} \times \vec{B}_{rd} \right] = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_{rd} \cdot \vec{E}_{rd}) \vec{n} \quad (2)$$

и мощности

$$d\Pi = \left(\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_{rd} \cdot \vec{E}_{rd}) (\vec{n} \cdot \vec{n}) R^2 d\Omega , \quad (3)$$

проходящей через элементарную площадку $d\vec{\Sigma} = \vec{n} R^2 d\Omega$ в момент времени t вблизи точки $P(x, y, z)$ (излучаемой электроном в фиксированном направлении \vec{n} в элементарный телесный угол $d\Omega$ в момент времени $T = t - R c^{-1}$).

Угловое распределение излучения

$$(d\Pi / d\Omega) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_{rd} \cdot \vec{E}_{rd}) R^2 , \quad (4)$$

нормированное на максимальное значение, является **диаграммой направленности**. Интеграл соотношения (3) определяет **полную мгновенную мощность излучения ускоренно движущегося заряда**

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \left(\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = \frac{c}{4\pi} \iint_{4\pi} (\vec{E}_{rd} \cdot \vec{E}_{rd}) R^2 d\Omega . \quad (5)$$

Приведенные выше выражения справедливы для полей, которые произвольным образом зависят от времени. В случае гармонически меняющихся во времени полей используются (физически более оправданные) понятия величин, усредненных за период высокочастотного колебания.

Пункт 1. Дипольное приближение – излучение при малой скорости. Формула Лармора

Если заряд, движущийся ускоренно, наблюдать в СО, в которой его скорость мала по сравнению со скоростью света c , то справедливы условия

$$|\vec{\beta}| \ll 1 \equiv |\vec{n}| ; \quad \vec{\beta} \ll \vec{n} , \quad (6)$$

и поле \vec{E}_{rd} приобретает вид

$$\vec{E}_{rd} \cong \frac{-|e|}{cR} \left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] = \frac{-|e|}{cR} \left\{ \vec{n} \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) - \dot{\vec{\beta}} \right\} . \quad (7)$$

Поле поляризовано так, что вектор \vec{E}_{rd} лежит в плоскости \vec{n} и $\dot{\vec{\beta}}$. Мгновенное значение вектора Пойнтинга в этом случае описывается выражением

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_{rd} \cdot \vec{E}_{rd}) \vec{n} = \frac{e^2 \cdot \vec{n}}{4\pi c R^2} \left\{ \dot{\beta}^2 - \left(\dot{\beta} \cdot \vec{n} \right)^2 \right\} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \psi}{4\pi c R^2} \vec{n} \quad , \quad (8)$$

в котором ψ – угол между \vec{n} и $\dot{\beta}$.

Из формулы (8) следует, что излучение отсутствует в направлении $\dot{\beta}$ и максимально много излучается в направлении, перпендикулярном $\dot{\beta}$. Эти формулы позволяют вычислить диаграмму направленности излучения (Рис. 9.1а)

$$\left\{ \left(\frac{d\Pi}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\Pi}{d\Omega} \right)_{max} \right\} = \sin^2 \psi \quad (9)$$

ускоренно ($\dot{\beta} \neq 0$) движущегося заряда, имеющего относительно небольшую скорость ($|\dot{\beta}| \ll 1$). Они позволяют найти полную мгновенную мощность

$$\Pi_0 = \iint \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \sin^2 \psi \cdot d\Omega = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin^3 \psi \cdot d\psi = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{c} \quad , \quad (10)$$

излучаемую электроном в момент времени T и регистрируемую в точках сферы радиуса R в момент времени t . Эта формула называется **формулой Лармора**.

Если движение (периодическое) гармоническое $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то удобно ввести понятие средней за период высокочастотного колебания мощности

$$\bar{\Pi}_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2 \omega^2 v_0^2}{c^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega^4}{c^3} e^2 r_0^2, \quad (10')$$

где $\vec{v}_0 \equiv \omega \vec{r}_0$ – скорость заряда. Выражение (10') совпадает с выражением

$$\bar{\Pi}^{2\pi/\omega} = \frac{\omega^4 |\vec{p}_0|^2}{3c^3} = \frac{k^2 |i\omega \vec{p}_0|^2}{3c} = \frac{k^2 |i\omega q \vec{l}|^2}{3c} \equiv \frac{1}{3c} (kl)^2 |\tilde{I}|^2 \quad (10'')$$

для средней за период высокочастотного колебания мощности излучения электрического диполя в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$). В случае (10'') току $|\tilde{I}|$ соответствует величина $|\omega e|$, а дипольному моменту $|\vec{p}_0|$ эквивалентна величина

$$|\vec{p}_0| = |-|e|| \vec{v}_0 / \omega | = |e \vec{r}_0|. \quad (11)$$

Поэтому приближение носит название **дипольного**.

Пункт 2. Тормозное излучение заряда (при ускорении, параллельном скорости).

Если $\dot{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, то независимо от величины $\vec{\beta}$ поле излучения определяется выражением

$$\vec{E}_{rd} = \frac{-(|e|/c) [\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]]}{R [1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})]^3}. \quad (12)$$

От выражения (7), соответствующего случаю медленно движущегося электрона (дипольному приближению), выражение (12) отличается лишь множителем $[1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})]^{-3}$. Влияние этого фактора сводится к изменению диаграммы направленности излучения (Рис. 9.1б.). Вектор Пойнтинга в этом случае имеет вид

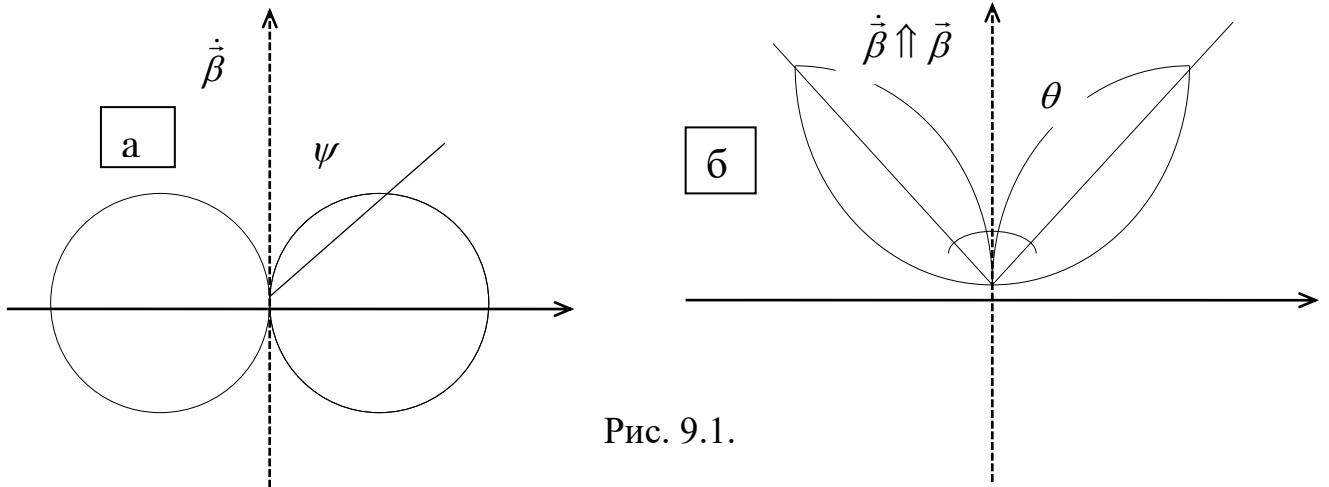


Рис. 9.1.

$$(\vec{S})_t = \frac{e^2}{4\pi c R^2} \cdot \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \vec{n}, \quad (13)$$

где θ есть угол между направлением распространения поля \vec{n} и направлением скорости частицы $\vec{\beta}$. Вектор Пойнтинга (13) определяет мощность

$$(\Delta \Pi_{\uparrow})_t = \frac{e^2}{4\pi c} \cdot \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \Delta \Omega, \quad ,$$

которая проходит за единицу времени через элементарную площадку

$$\Delta \vec{\Sigma} = R^2 \Delta \Omega \vec{n}$$

с центром в точке наблюдения $P(x, y, z)$ и регистрируется в момент времени t . Эта мощность обусловлена излучением заряда в момент времени $T = t - (R/c)$ в световой точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$. Для определения энергии, которая прошла через сечение $\Delta \vec{\Sigma} = \Delta \Omega \vec{n}$ за конечный период времени от t_1 до t_2 и была излучена ускоренно движущимся электроном в период времени от T_1 до T_2 , следует выполнить интегрирование

$$\Delta W_{\uparrow} = \int_{t_1}^{t_2} (\Delta \Pi_{\uparrow})_t dt = \int_{T_1}^{T_2} (\Delta \Pi_{\uparrow})_t \frac{dt}{dT} dT \equiv \int_{T_1}^{T_2} (\Delta \Pi_{\uparrow})_T dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \Delta \Omega}{4\pi c (1 - \beta \cos \theta)^5} dT$$

Мы определили энергию ΔW_{\uparrow} , которую излучил электрон за время dT . При больших скоростях $\beta \rightarrow 1$ время регистрации $dt = (1 - \beta \cos \theta) dT$ фотонов в точке P может быть мало по сравнению с временем dT , в течение которого они были излучены в световой точке Q . Величина

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta W_{\uparrow}}{\Delta\Omega} \right) = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dW_{\uparrow}}{dT} \right) = \frac{d}{d\Omega} (\Pi_{\uparrow}) = \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c (1 - \beta \cos \theta)^5} = \left(\frac{d\Pi_{\uparrow}}{d\Omega} \right)_T \quad (14)$$

имеет смысл мгновенной мощности, излучаемой электроном за единицу времени в единицу телесного угла в направлении, которое определяется углом θ между векторами \vec{n} и $\vec{\beta}$.

По мере приближения β к единице диаграмма углового распределения излучения все более вытягивается в направлении скорости электрона. При этом интенсивность излучения возрастает, как схематически показано на Рис. 9.1а и Рис. 9.1б. Угол, для которого интенсивность излучения максимальна, вычисляется по формуле:

$$(\cos \theta)_{\max} = \left(\frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} \right) . \quad (**)$$

При $\beta = 0.50$ угол $\theta_{\max} = 38.2^\circ$ достаточно сильно отличается от 90° . Для релятивистских частиц ($\beta \rightarrow 1$) угол θ_{\max} оказывается достаточно малым. По порядку величины он оказывается равным отношению (W_0 / W) энергии покоя частицы W_0 к ее полной энергии W . Все излучение в этом случае сосредоточено в очень узком конусе вокруг направления движения. Для таких малых углов распределение излучения можно описать приближенной (эмпирической) формулой

$$\left(\frac{d\Pi_{\uparrow}}{d\Omega} \right)_T \approx \frac{8e^2 \dot{v}^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} , \quad (14')$$

в которой использовано обозначение $\gamma = (1 / \sqrt{1 - \beta^2})$. Максимум диаграммы направленности находится под углом

$$\theta_{\max} \equiv (1 / 2\gamma) = 0.50 \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (***)$$

Примерное распределение излучаемой зарядом мощности по углам представлено на Рис. 9.2.

Основное применение формулы (14') состоит в вычислении излучения электрона при торможении, когда направление движения считается неизменным. Это излучение называется **тормозным излучением**. При

точных расчетах в эти соотношения нужно подставить точную зависимость ускорения от времени. Тормозное излучение имеет место в линейных ускорителях.

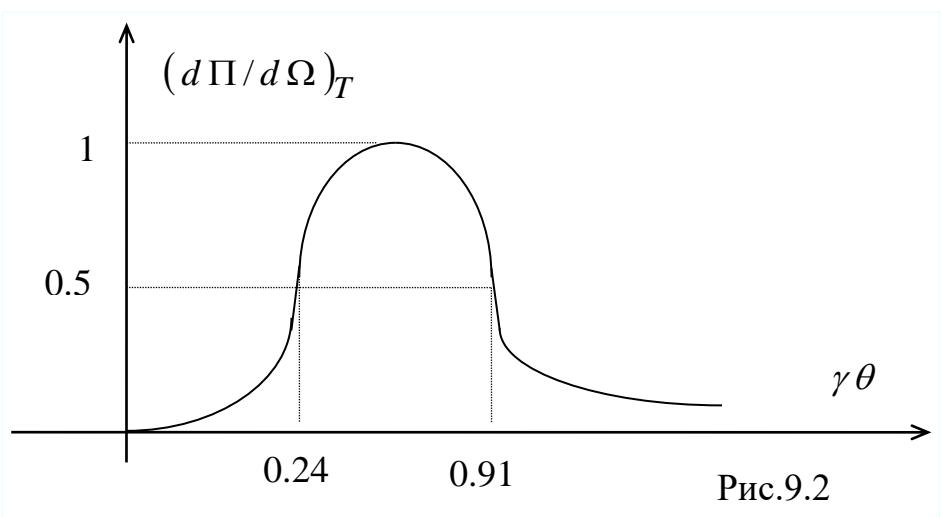


Рис.9.2

Полная излучаемая электроном мощность растёт пропорционально $(1 - \beta^2)^{-3}$ в соответствии с формулой¹⁾

$$\left(\Pi_{\uparrow} \right)_T = \iint_{4\pi} \left(\frac{d\Pi}{d\Omega} \right)_T d\Omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} . \quad (15)$$

При $\beta \ll 1$ формула (15) совпадает с *формулой Лармора*.

Каков спектр тормозного излучения? Если провести анализ для конечного времени столкновения T_0 (разгона), то спектр будет ограниченным. Типичные картинки процесса во времени и его спектра представлены на Рис. 9.3.

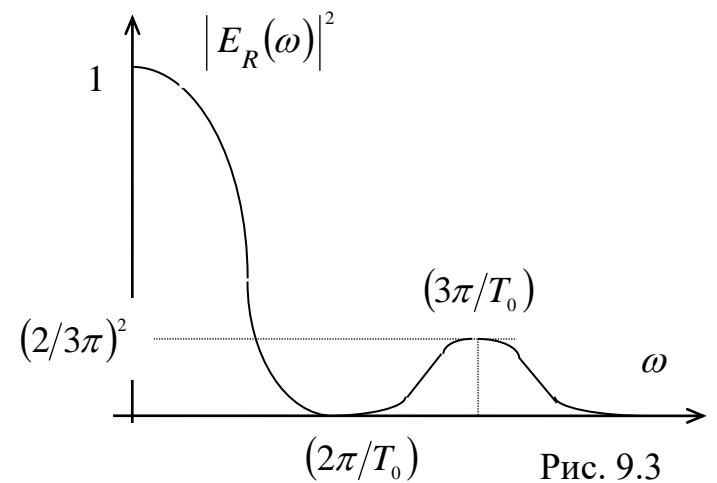
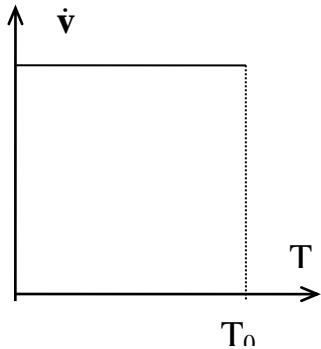


Рис. 9.3

Пункт 3. Синхротронное (магнитотормозное) излучение

¹⁾ Вывод формулы (15) состоит в следующем:

$$\begin{aligned} \left(\Pi_{\uparrow} \right)_T &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c} \int_1^{-1} \frac{(1 - \cos^2 \theta)[-d(\cos \theta)]}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \\ &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \left\{ \int_{-\beta}^{\beta} \frac{dn}{(1+n)^5} - \frac{1}{\beta^2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{n^2 dn}{(1+n)^5} \right\} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+\beta)^4} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\beta)^4} \right\} - \\ &- \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta^3} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{(1+n)^2 - 2(1+n) + 1}{(1+n)^5} dn = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \left\{ \frac{(1+\beta)^4 - (1-\beta)^4}{4(1-\beta^2)^4} \right\} - \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta^3} \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\beta)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{(1+\beta)^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{(1-\beta)^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{(1+\beta)^4} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\beta)^4} \right\} = \\ &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{\beta(2+2\beta^2)}{(1-\beta^2)^4} + \frac{(-1)\beta 2}{\beta^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2}{3\beta^2} \frac{6\beta + 2\beta^3}{(1-\beta^2)^3} \right\} = \\ &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \left\{ \frac{12\beta + 4\beta^3 - 6\beta - 6\beta^3}{3\beta^2(1-\beta^2)^3} - \frac{2\beta}{\beta^2(1-\beta^2)^2} \right\} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{2c\beta} \frac{6\beta - 2\beta^3 - 6\beta + 6\beta^3}{3\beta^2(1-\beta^2)^3} = \\ &= \frac{2}{3c} \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^3}. \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим угловое распределение излучения при мгновенном движении заряда по окружности, когда ускорение $\dot{\vec{\beta}}$ перпендикулярно скорости заряда $\vec{\beta}$. Выберем систему координат так, чтобы

направление мгновенной скорости $\vec{\beta}$ совпадало с осью z , а ускорение $\dot{\vec{\beta}}$ было направлено вдоль оси x . Воспользуемся сферическими координатами θ, α (Рис. 9.4.). Орбита движения заряда лежит в плоскости XOZ ($\alpha = 0$).

Преобразуя общие формулы для поля, интенсивности и мгновенной мощности соответственно в формулы

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{rd} &= \frac{-|e|/c}{R \cdot [1 - \beta \cos \theta]^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{n} \bullet \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} \cdot [1 - \beta \cos \theta] \right\} = \\
 &= \frac{-|e|/c}{R \cdot [1 - \beta \cos \theta]^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot \dot{\vec{\beta}} \sin \theta \cos \alpha - \dot{\vec{\beta}} \cdot [1 - \beta \cos \theta] \right\}; \\
 (\vec{E}_{rd} \bullet \vec{E}_{rd}) &= \frac{e^2 / c^2}{R^2 \cdot [1 - \beta \cos \theta]^6} \left\{ \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha \cdot (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\beta}^2 \cdot (1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta) - 2(1 - \beta \cos \theta) \cdot (\sin \theta \cos \alpha)^2 \dot{\beta}^2 \right\} = \\
 &= \frac{e^2 / c^2}{R^2 \cdot [1 - \beta \cos \theta]^6} \left\{ \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha \cdot (\beta^2 - 1) + \dot{\beta}^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 \right\} = \\
 &= \frac{\dot{\beta}^2 e^2 / c^2}{R^2 \cdot [1 - \beta \cos \theta]^4} \left\{ 1 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{[1 - \beta \cos \theta]^2} \right\}; \\
 (\Pi_{\perp})_T &= \iint_S (\vec{S} \bullet d\vec{\Sigma}) \frac{dt}{dT} = \iint_{4\pi} (\vec{S} \bullet \vec{n}) \cdot [1 - \beta \cos \theta] \cdot R^2 d\Omega = \\
 &= \frac{c}{4\pi} \iint_{4\pi} (\vec{E}_{rd} \bullet \vec{E}_{rd}) \cdot [1 - \beta \cos \theta] \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\alpha,
 \end{aligned}$$

получим выражение для мгновенной мощности

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\Omega} (\Pi_{\perp})_T &= \frac{c}{4\pi} \frac{e^2}{c^2} \frac{\dot{\beta}^2}{R^2 \cdot [1 - \beta \cos \theta]^4} \left\{ 1 - \frac{(1 - \beta^2) \cdot \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{[1 - \beta \cos \theta]^2} \right\} R^2 \cdot [1 - \beta \cos \theta] = \\
 &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c \cdot [1 - \beta \cos \theta]^3} \left\{ 1 - \frac{(1 - \beta^2) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha}{[1 - \beta \cos \theta]^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{16}$$

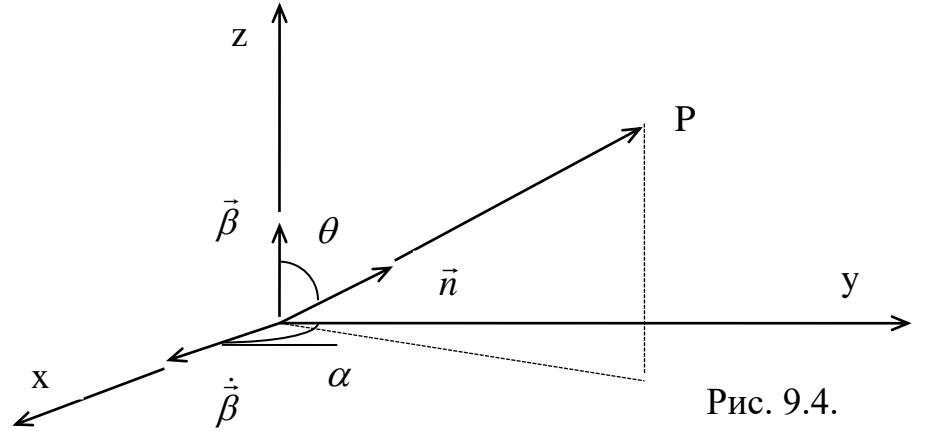


Рис. 9.4.

которую электрон излучает за единицу времени в единицу телесного угла в фиксированном направлении θ, α . При $\beta = 0$ и при учёте того, что согласно Рис. 9.4

$\cos \psi = \sin \theta \cos \alpha$, формула (16) трансформируется в формулу (9), которая описывает излучение электрона в дипольном приближении.

В случае **синхротронного излучения** (как и **тормозного**) также имеется характерная релятивистская концентрация излучения в направлении движения. Получающаяся в результате этих вычислений диаграмма направленности излучения обращается в нуль в плоскости орбиты $\alpha = 0$ при

$$\theta_0 = \arccos \beta . \quad (17)$$

При больших скоростях излучение, направленное вперед, во много раз больше, чем в других направлениях. По мере приближения величины β к единице излучение вытягивается вперед узким лучом (Рис. 9.5).

Интегрируя выражение (16) по углам²⁾, можно найти полную мощность излучения в виде

$$(\Pi_{\perp})_T = \frac{2}{3c} e^2 \dot{\beta}^2 \frac{1}{(1-\beta^2)^2} . \quad (18)$$

При одинаковых значениях ускорения и скорости мощность **тормозного излучения** (15) оказывается больше мощности (18) **магнитотормозного излучения**.

Интересно сравнить мощности **магнитотормозного** (18) и **тормозного** (15) излучений при одинаковой величине приложенной силы.

В соответствии с формулами

$$\vec{f}_{\perp} = \frac{m_0 \dot{\vec{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.11a) \quad \vec{f}_{\parallel} = \frac{m_0 \dot{\vec{v}}}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad (3.11b)$$

выразим

$$(\Pi_{\parallel})_T = \frac{2}{3c} \bullet \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^3} = \frac{2}{3} \bullet \frac{e^2}{m_0^2 c^3} f_{\parallel}^2; \quad (\Pi_{\perp})_T = \frac{2}{3c} \bullet \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{2}{3} \bullet \frac{e^2}{m_0^2 c^3} \bullet \frac{f_{\perp}^2}{(1-\beta^2)} . \quad (19)$$

²⁾ Вывод формулы (18):

$$\begin{aligned} (\Pi_{\perp})_T &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{(1-\beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{(\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha) \cdot (1-\beta^2)}{(1-\beta \cos \theta)^2} \right] d\theta d\alpha = [a) + b)] \equiv c) . \\ a) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\beta \cos \theta)^3} &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1+\beta z)^3} = \frac{2\pi}{\beta} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(1-\beta)^2} \right] = \\ &= \left(\frac{2\pi}{2\beta} \right) \frac{1+2\beta+\beta^2-1+2\beta-\beta^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^2} . \\ b) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \theta d\theta d\alpha}{(1-\beta \cos \theta)^5} &= (1-\beta^2) \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin^3 \theta d\theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} = (1-\beta^2) \cdot \pi \frac{(4/3)}{(1-\beta^2)^3} . \\ c) (\Pi_{\perp})_T &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} 4\pi \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2} - (1-\beta^2) \frac{(1/3)}{(1-\beta^2)^3} \right] = \frac{2}{3c} \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^2} . \end{aligned}$$

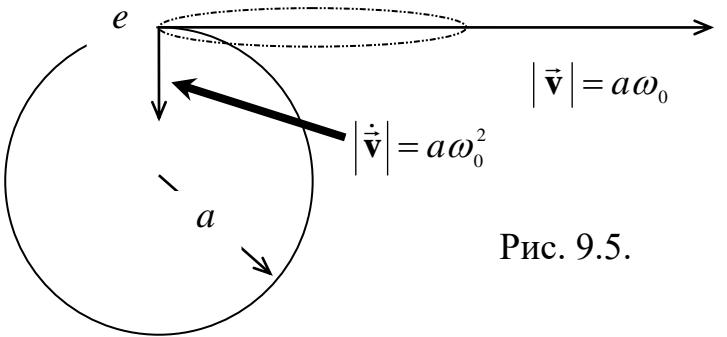


Рис. 9.5.

Если теперь положить

$$\left| \vec{f}_{\perp} \right| = \left| \vec{f}_{\parallel} \right| = f = \left| \frac{d \vec{p}}{dt} \right| \quad ,$$

где \vec{p} – импульс, то получим

$$(\Pi_{\perp})_t = \frac{(\Pi_{\parallel})_t}{1 - \beta^2} > (\Pi_{\parallel})_t . \quad (19')$$

Таким образом, из (19) следует, что при заданной величине приложенной силы излучение при поперечном ускорении в $\{1/(1 - \beta^2)\}$ раз превышает излучение для случая продольного ускорения.

Исследования $(d\Pi_{\perp}/d\Omega)_t$ и $(\Pi_{\perp})_t$ имеют большое значение для теории бетатрона и синхротрона, где электроны врачаются с большой скоростью ($\beta \rightarrow 1$) по кругу постоянного радиуса ($a \approx$ несколько метров) в поперечном (по отношению к скорости) магнитном поле. Поскольку при своём движении они испытывают очень большие ускорения в поперечном направлении ($\approx c^2 \cdot a^{-1}$) и излучают большую мощность, то они при этом теряют большую энергию и должны замедляться. Для осуществления вращательного движения по окружности фиксированного радиуса нужна **синхронная энергетическая подпитка** электронов. Поэтому излучение носит название **синхротронного** (а также **магнитотормозного**). При движении электрона в бетатроне необходимо также учитывать изменение скорости при различных значениях $\beta \neq 0$, и в соответствии с этим создавать необходимую \vec{f}_{\perp} .

Как уже отмечалось, **синхротронное** излучение концентрируется в узком луче (иглообразном конусе), направленном вдоль вектора мгновенной скорости заряда. Излучение наблюдается лишь в том случае, когда вектор скорости частицы направлен на наблюдателя. При произвольном движении частицы наблюдатель зарегистрирует весьма кратковременный импульс или вспышку (или последовательность таких вспышек, если движение периодическое), как показано на Рис. 9.6. Угловая ширина луча есть величина порядка

$$\Delta\theta \approx (1/2)2\theta_0 = \arccos\beta \approx \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1} \quad , \quad (20)$$

где для оценки $\Delta\theta$ использовано соотношение

$$\Delta\theta \approx \sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_0} \equiv \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1} .$$

Частица будет освещать наблюдателя в течение интервала времени

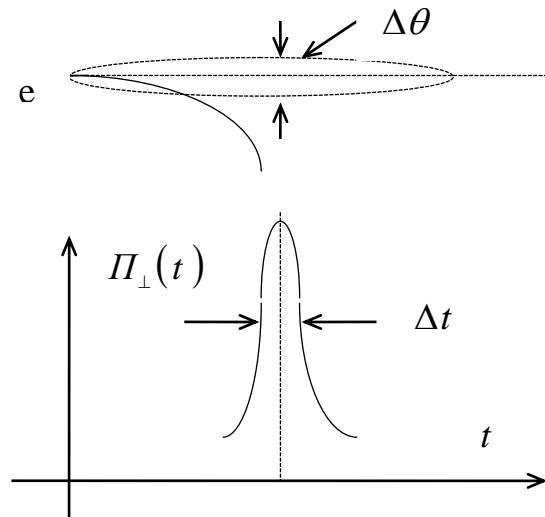


Рис. 9.6.

$$\Delta T = \frac{\Delta\theta}{\omega_0} \cong \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_0} \equiv \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi a}{v} \right) \equiv \sqrt{1-\beta^2} \cdot \left(\frac{a}{\beta c} \right) , \quad (21)$$

где a – радиус окружности, по которой вращается частица.

Для наблюдателя в инерциальной СО это будет соответствовать времени

$$\Delta t \cong \Delta T \frac{dt}{dT} \cong \frac{a}{\beta c} \sqrt{1-\beta^2} (1 - \beta \cos\theta) \cong \frac{a}{\beta c} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot (1 - \beta) = \frac{a}{\beta c} \cdot \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1+\beta)} . \quad (22)$$

Согласно общим свойствам интеграла Фурье в импульсе такой длительности заметно представлены все частоты вплоть до

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\beta c}{a} \cdot \frac{(1+\beta)}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} \cong \omega_0 \frac{1+\beta}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} = \Delta\omega_c . \quad (23)$$

При движении частицы по окружности величина $(\beta c/a) = \omega_0$ равна угловой частоте вращения. При произвольном движении она также является характерной частотой движения. Это значит, что релятивистская частица излучает широкий

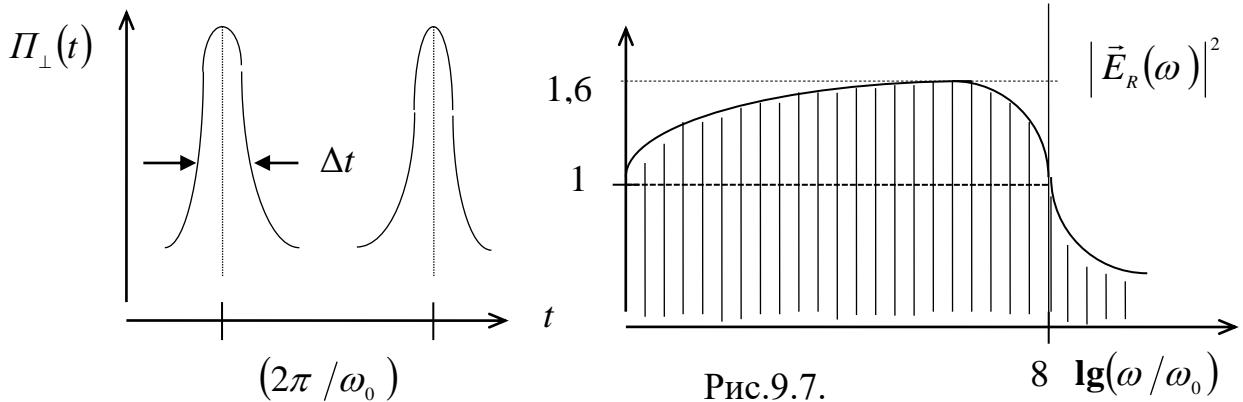


Рис.9.7.

спектр частот (Рис 9.7.), в $\left\{ 1 / (1 - \beta^2)^{3/2} \right\}$ раз превышающий основную частоту¹⁾. Так в типичном синхротроне на 200 мэв, где $a = 100$ см, величина отношения кинетической энергии к энергии покоя равна $(1 / \sqrt{1 - \beta^2}) = 400$, основная частота вращения $\omega_0 \cong (\beta c / a) \cong (c / a) = 3 \cdot 10^8$ рад/сек, ибо $\beta \cong (1 - 3.3 \cdot 10^{-6}) \cong 1$. Поэтому ширина спектра излучения $\Delta\omega_c \cong 6 \cdot 10^7 \omega_0 \cong 2 \cdot 10^{16}$ рад/сек почти на 8 порядков больше частоты вращения, так что значительная часть спектра находится в видимой области. Спектр имеет линейчатый характер.

Наверное, нет необходимости подробно объяснять, что все эти факты много-кратно проверены и что все они основаны на СТО. На этом месте можно было бы даже закончить курс СТО, если бы не было необходимости познакомить вас с ещё некоторыми разделами очень близкой к СТО науки о движении заряженных частиц, называемой **Электронной теорией**.

¹⁾ К вопросу о спектре магнитотормозного излучения см. Д. Джексон гл.14, §6, стр.530.

Пункт 4. Излучение Вавилова – Черенкова

При равномерном прямолинейном движении в вакууме частица не излучает. Однако частица, движущаяся с постоянной скоростью в материальной среде ($\epsilon \mu > 1$), может излучать, если ее скорость превышает фазовую скорость распространения электромагнитной волны в среде. Это излучение называется “излучением Вавилова-Черенкова”. Оно представляет собой колективный эффект излучения множества атомов среды, электроны которых ускоряются полем проходящей частицы. Ввиду колективного характера процесса удобно воспользоваться макроскопическим описанием среды, характеризуя ее свойства диэлектрической проницаемостью ϵ , а не исследовать детально движения отдельных атомов. Качественное объяснение эффекта можно получить, рассмотрев изменение во времени поля быстрой частицы в диэлектрической среде.

Для скорости света в среде используем обозначение ($c / \sqrt{\epsilon \mu}$) = v_f , а для скорости частицы – v . На Рис. 9.8 изобразим последовательность сферических волновых фронтов для частицы, движущейся со скоростью $v < v_f$ и со скоростью $v > v_f$. В случае $v > v_f$ отдельные сферические волновые поверхности интерферируют, обуславливая образование кильватерного волнового фронта за частицей. Нормаль к этой кильватерной волне образует с направлением вектора скорости угол

$$\theta_M = \arccos \left(v_f / v \right) \Leftrightarrow \cos \theta_M = \left(c / v \sqrt{\epsilon \mu} \right). \quad (24)$$

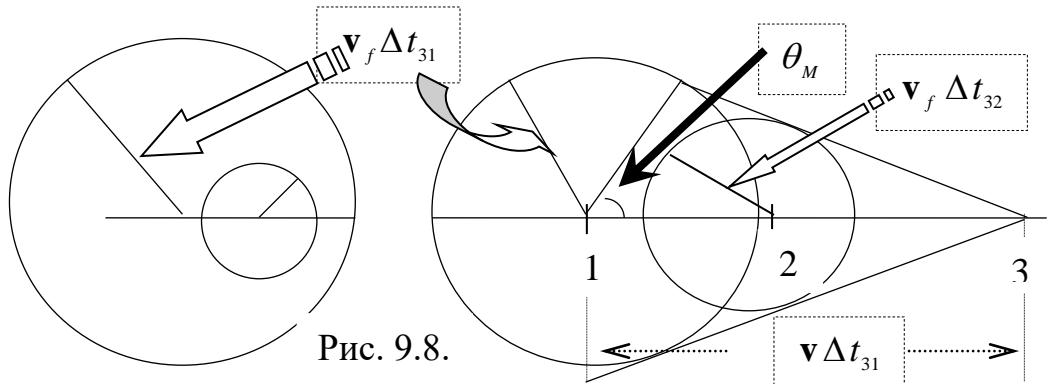


Рис. 9.8.

Нормаль определяет направление распространения **черенковского** излучения. Подобным образом при сверхзвуковом движении объекта в плотной среде формируется акустическая волна давления.

Поясним подробнее математику образования "ударной черенковской волны" для $v > v_f$. С этой целью рассмотрим решения волновых уравнений

$$\left(\Delta - \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) ; \quad \left(\Delta - \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) \quad (25)$$

для векторного и скалярного потенциалов в среде с $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, в которых источниками служат распределения плотностей заряда и тока

$$\rho(\vec{r}, t) = -|e| \delta(\vec{r} - \vec{v}t) ; \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = -|e| \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t) , \quad (26)$$

создаваемых в пространстве равномерно движущимся электроном.

Вначале найдём спектральные компоненты плотности заряда $\tilde{\rho}(\omega, \vec{k})$ и плотности тока $\tilde{j}(\omega, \vec{k}) = \vec{v} \tilde{\rho}(\omega, \vec{k})$, вычислив Фурье-образ плотности заряда

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\omega, \vec{k}) &= \frac{-|e|}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{v}t) \exp\left\{-i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})]\right\} dt d^3\vec{r} = \\ &= \frac{-|e|}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i[\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v})] \cdot t\right\} dt = \frac{-|e|}{(2\pi)^3} \delta[\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v})].\end{aligned}\quad (27)$$

Применяя спектральное преобразование к уравнениям (25), установим связь между спектральными компонентами 4-потенциала и 4-плотности тока:

$$\tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) = \frac{-4\pi|e|}{\epsilon(2\pi)^3} \cdot \frac{\delta[\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v})]}{(\vec{k} \cdot \vec{k}) - (\omega^2 \epsilon \mu / c^2)}; \quad \tilde{A}(\omega, \vec{k}) = \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{v} \cdot (\epsilon \mu / c). \quad (28)$$

Спектральные компоненты поля связаны со спектральными компонентами $\tilde{A}(\vec{k}, \omega)$ и $\phi(\vec{k}, \omega)$ через посредство соотношений

$$\tilde{\vec{E}} = i \left(\vec{k} - \frac{\omega \epsilon \mu}{c^2} \vec{v} \right) \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}); \quad \tilde{\vec{B}} = -i \left[\vec{k} \times \tilde{\vec{A}}(\omega, \vec{k}) \right] = i \frac{\epsilon \mu}{c} [\vec{v} \times \vec{k}] \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}). \quad (29)$$

В (29) комплексные амплитуды $\tilde{\vec{E}}(\omega, \vec{k})$ являются амплитудами плоских волн, которые возбуждаются током (26). Из (28) и (29) видно, что эти амплитуды отличаются от нуля только при условии

$$\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v}) = 0. \quad (30)$$

Из (28) и (29) видно, что условие (30) есть условие синхронизации тока с какой-либо волной электромагнитного поля.

Используя (30), можно найти вектор Пойнтинга в виде вектора

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \left[\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \right] = \frac{\epsilon}{8\pi} |\tilde{\phi}(\omega, \vec{k})|^2 \omega \left(\frac{\epsilon \mu}{c^2} v^2 - 1 \right) \vec{k}, \quad (31)$$

имеющего направление волнового вектора плоской волны (29).

Поскольку $|\vec{k}| = k = (\omega \sqrt{\epsilon \mu} / c)$, то (30) совпадает с (24). Преобразуем (30) с учетом дисперсионного уравнения

$$(\vec{k} \cdot \vec{k}) = (\omega^2 \epsilon \mu / c^2) = (\omega^2 / v_f^2)$$

к виду

$$\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v}) = \omega \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\vec{k}}{k} \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right) \right\} = \omega \cdot \left[1 - \left(\vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{v_f} \right) \right] = 0. \quad (32)$$

где направление распространения плоской волны $\vec{n} = (\vec{k} / k)$ по смыслу совпадает с направлением излучения заряда.

Если обратиться к полям (8.14), то легко заметить связь соотношения (32) и знаменателя $[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3$ в формулах (8.14): они совпадают друг с другом при $\sqrt{\epsilon \mu} = 1$.

§10. Электромагнитная масса электрона и трудности классической теории электрона

Пункт 1. Основные гипотезы теории электромагнитной массы электрона и их следствия

До сих пор отмечались лишь успехи СТО в теории излучения ускоренно движущихся электронов. Однако имеются определенные теоретические трудности, которые до конца не преодолены. Одна из них – ***теоретическая модель электрона***.

Известно, что электрон (как всякая элементарная частица) обладает корпускулярными и волновыми свойствами. Известно, что из электронов и протонов можно "собрать" любой атом или молекулу. Основная идея (или гипотеза) при создании ***теоретической модели электрона*** состояла в том, "что ***инертная масса электрона может быть объяснена свойствами его электромагнитного поля, описанного уравнениями Максвелла***". Тогда было бы понятно внутреннее единство его корпускулярных и волновых свойств.

Теория электромагнитной массы электрона была развита Лоренцом и Абрагамом. ***Согласно этой теории масса электрона обусловлена инерцией его поля, а импульс электрона – импульсом его поля.*** Следовательно, энергия электрона W как движущейся инертной частицы должна быть равна энергии $W_{\mathcal{E}M}$ электромагнитного поля

$$W = \frac{m_e^0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = W_{\mathcal{E}M} = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right\} dV , \quad (1)$$

которое он создает как движущаяся заряженная частица. Аналогичным образом ***импульс электрона как инертной частицы*** \vec{p} должен быть ***равен импульсу электромагнитного поля***

$$\vec{p} = \frac{m_e^0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \vec{G}_{\mathcal{E}M} , \quad (2)$$

создаваемого движущимся зарядом $q \equiv -|e|$.

СТО установила соответствие между импульсом \vec{p} и энергией инертной частицы

$$\vec{p} = \vec{\beta} (W / c) . \quad (3)$$

Поэтому для создания корректной ***теории электромагнитной массы электрона*** необходимо, чтобы выполнялось (или было справедливо) соотношение

$$\vec{G}_{\mathcal{E}M} = \vec{\beta} (W_{\mathcal{E}M} / c) . \quad (4)$$

Другими словами, $\vec{G}_{\mathcal{E}M}$ и $(W_{\mathcal{E}M} / c)$ должны для движущегося электрона образовывать ***четыре компонента 4-вектора***.

Пункт 2. Теоретическая модель распределения плотности заряда электрона

Попробуем найти энергию и импульс **электромагнитного поля движущегося электрона**. Для этого необходимо сделать конкретные предположения о структуре объёмной плотности его заряда. Выберем простейшую модель распределения заряда и оставим открытым вопрос о том, каково это распределение в действительности. Представим электрон в виде заряда $q \equiv -|e|$, равномерно распределенного по поверхности сферы радиуса a_e (радиуса электрона). Тогда вне сферы a_e поле покоящегося электрона будет иметь вид

$$\vec{E}' = \frac{-|e|}{(r')^3} \vec{r}' , \quad (5)$$

а энергия $W'_{\mathcal{M}}$ этого поля будет равна

$$W'_{\mathcal{M}} = \int_{a_e}^{\infty} \iint_{4\pi} \frac{|\vec{E}'|^2}{8\pi} \cdot dV' = \frac{e^2}{2a_e} . \quad (6)$$

При ином предположении о пространственном распределении заряда электрона выражение для энергии покоящегося электрона $W'_{\mathcal{M}}$ получилось бы таким же по порядку величины. Оно отличалось бы от (6) только числовым фактором перед фундаментальным (по своему физическому содержанию) отношением (e^2 / a_e) двух основных параметров, определяющих суть самого электрона. (При $\rho = \bar{\rho} = \text{const}$ внутри сферы радиуса a_e имели бы $W'_{\mathcal{M}} = (6/5)(e^2/2a_e)$.)

Корректность этой или иной формулы нельзя проверить, поскольку нет экспериментального способа измерить энергию $W'_{\mathcal{M}}$ покоящегося электрона, а также экспериментально измерить его радиус a_e . Поэтому нет возможности определить пространственное распределение плотности заряда электрона и, в частности, установить точное значение основного параметра a_e этого распределения. На самом деле распределение заряда электрона неизвестно, и неизвестна даже природа сил, которые формируют и удерживают это распределение заряда как единое целое.

В рассматриваемой модели распределения заряда по поверхности сферы параметр a_e имеет наиболее прозрачный физический смысл и вполне может называться радиусом электрона. Используя выбранную простую модель (распределения плотности заряда) электрона и считая корректной основную гипотезу теории электромагнитной массы электрона, получим из выражения (1) соотношение

$$W' \equiv m_e^0 c^2 = \frac{e^2}{2a_e} \equiv W'_{\mathcal{M}} . \quad (7)$$

Соотношение (7) может стать основой для оценки величины радиуса электрона

$$a_e = \frac{e^2}{2m_e^0 c^2} , \quad (*)$$

поскольку в формуле (*) экспериментально измерены масса *покоящегося* электрона $m_e^0 = 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ и его заряд $|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ кулона} = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. CGSE}$. Но исторически для этой оценки используется другое соотношение!.

Пункт 3. Проверка корректности теории электромагнитной массы электрона

Вычислим $W_{\mathcal{E}M}$ в неподвижной СО. Для этого воспользуемся формулами (5.11) и представим их для нашего частного случая ($\vec{B}' = 0$) в виде

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel, \quad \vec{B}_\perp = \frac{[\vec{\beta} \times \vec{E}'_\perp]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{B}_\parallel = \vec{B}'_\parallel = 0. \quad (8)$$

Тогда плотность электромагнитного поля в системе K будет иметь вид

$$w_{\mathcal{E}M} = \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{|\vec{E}'_\perp|^2 + \beta^2 |\vec{E}'_\perp|^2}{1 - \beta^2} + |\vec{E}'_\parallel| \right\}. \quad (9)$$

При вычислении $W_{\mathcal{E}M}$ необходимо знать выражение для элемента объёма

$$dV = d x \cdot d y \cdot d z = d x' \cdot d y' \cdot \frac{d z' + \mathbf{v} dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10')$$

Интеграл по всему бесконечному объему V в K должен вычисляться в один и тот же момент времени t , т.е. при вполне определенном положении электрона. Следовательно, поле во всех точках пространства (объема) должно рассматриваться в один и тот же момент времени t . Поэтому справедливо соотношение

$$dt = \left\{ [dt' + (\mathbf{v} / c^2) dz'] / \sqrt{1 - \beta^2} \right\} = 0, \quad (10'')$$

которое позволяет найти $d z = \sqrt{1 - \beta^2} dz'$ и далее найти элемент объема как

$$dV = d x \cdot d y \cdot d z = d x' \cdot d y' \cdot d z' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (10)$$

Энергию $W_{\mathcal{E}M}$ поля электрона в системе K удобно вычислять в переменных системы координат K' , в которой электрон покойится. В результате вычисления объёмного интеграла получим

$$W_{\mathcal{E}M} = \iiint w_{\mathcal{E}M} dV \equiv \iiint w_{\mathcal{E}M} dV' \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{e^2}{2 a_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) \geq \frac{W'_{\mathcal{E}M}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11)$$

Из сопоставления (6) и (11) видно, что ($W_{\mathcal{E}M} / c$) преобразуется не как четвертый компонент вектора $\{ \vec{G}_{\mathcal{E}M}, i(W_{\mathcal{E}M} / c) \}$. Причём это не является следствием неудачно выбранной модели электрона. Из сопоставления подынтегральных выражений в (6) и (11), представленных в координатах связанной с *покоящимся* электроном системы отсчёта K' , видно, что они не совпадут ни при каких обстоятельствах, за исключением $\beta = 0$. Поэтому вычисление объёмного интеграла (11) при любом объёмном распределении плотности заряда не даст результата, желанного для *теории электромагнитной массы* электрона.

На современном уровне науки этот вывод очевиден, поскольку $w_{\mathcal{M}}$ является компонентом электромагнитного тензора энергии-импульса $\overset{\leftrightarrow}{T}$, а не компонентом 4-вектора. Поэтому $w_{\mathcal{M}}$ должен преобразовываться как компонент $\overset{\leftrightarrow}{T}^1$, и полученный отрицательный результат свидетельствует о том, что гипотеза электромагнитной массы электрона неверна.

Пункт 4. Некоторые приложения теории электромагнитной массы электрона

Рассмотрим импульс электромагнитного поля равномерно движущегося электрона в приближении модели равномерно заряженного по поверхности шарика. По определению электромагнитного импульса и из соображений симметрии найдем, что импульс

$$\vec{G}_{\mathcal{M}} = \iiint \frac{1}{c^2} \cdot \vec{S} dV = \frac{1}{4\pi c} \iiint_V [\vec{E} \times \vec{B}] dV = G_{\mathcal{M}} \vec{z}_0 \quad (12)$$

направлен по оси OZ. Воспользуемся формулами (8) для поля \vec{E}, \vec{B} равномерно движущегося электрона и по формуле (12) получим выражение для импульса²⁾

$$\begin{aligned} (\vec{z}_0 \cdot \vec{G}_{\mathcal{M}}) &= \frac{1}{4\pi c} \iiint \left([\vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp] \cdot \vec{z}_0 \right) dV = \frac{\beta}{4\pi c} \iiint \frac{(\vec{E}'_\perp \cdot \vec{E}'_\perp)}{(1-\beta^2)} \sqrt{1-\beta^2} dV' = \\ &= \frac{\beta e^2}{4\pi c \sqrt{1-\beta^2}} \int_{a_e}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta'}{(r')^2} \cdot \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha' dr' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\beta e^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{2a_e c} . \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнивая правую часть (13) величине механического импульса электрона

$$G_{\mathcal{M}} \equiv \frac{\beta}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{2e^2}{3a_e} = \frac{m_e^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv |\vec{p}| , \quad (14)$$

полученное соотношение (14) с той же долей произвола, с какой можно использовать соотношение (7), используют для определения радиуса электрона

$$a_e^0 = (2e^2/3m_e^0 c^2) = (4/3)a_e . \quad (15)$$

Это определение радиуса электрона является общепринятым, поскольку можно измерить импульс электрона. Формулу (15) можно считать одним из фундаментальных соотношений науки, называемой электронной теорией. Она является основополагающей для различных расчётов и оценок, в которых используется характерный размер электрона $a_e^0 \cong 1,875 \cdot 10^{-13}$ см.

Пункт 5. Причина некорректности теории электромагнитной массы электрона

¹⁾ Для проверки (11) можно использовать правило преобразования компонентов тензора (5.8), матрицу преобразования (5.9) и явные выражения для компонентов в виде (6.12) - (6.15), что позволяет иным способом получить (9)

²⁾ Разумеется, (13) также можно получить с помощью (5.8), (5.9) и (6.12) - (6.15).

Сопоставляя (15) и (8), находим, что два разных способа вычисления радиуса электрона a_e по известным массе и заряду дают разные результаты. *Разница в 4/3 имела бы место при вычислении характерного размера электрона и при любой другой модели распределения плотности заряда в нем.* Это значит, что электромагнитная энергия электрона $i (W_{\text{эм}} / c)$ и импульс электрона $\vec{G}_{\text{эм}}$ не образуют 4-вектор подобно тому, как это имеет место в случае движущейся материальной частицы. Нарушена релятивистски правильная связь.

В чем дело? Дело в том, что не вся энергия электрона заключена во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, имеются еще ядерные силы (т. н. внутренние напряжения), которые удерживают электрон как единое образование. В них заключена энергия и, следовательно, существует масса *неэлектромагнитного происхождения*. Этими вопросами занимается квантовая электродинамика, незавершенная на данном этапе развития науки.

§11. Реакция излучения

Рассмотренные в курсах электродинамики и электроники задачи можно разделить на 2 класса. В одних задачах были известны источники и вычислялись результирующие электромагнитные поля. В других задавалось внешнее электромагнитное поле и определялось движение заряженных частиц в нем. При рассмотрении тормозного излучения задача носила комбинированный поэтапный характер: сначала определялась траектория движения заряженной частицы в заданном внешнем поле (без учета излучения), а затем вычислялось излучение, возникающее при ее ускоренном движении по полученной траектории.

Очевидно, что подобный подход к решению проблем электродинамики справедлив лишь приближенно. Ускоренное движение заряженных частиц во внешних силовых полях неизбежно сопровождается излучением. Возникающее излучение приводит к потере энергии, импульса и момента количества движения и поэтому влияет на последующее движение заряженных частиц. Корректная постановка задачи должна включать учёт реакции излучения на движение частицы.

Пункт 1. Сила реакции излучения или радиационного торможения

Возникает вопрос, как включить эффекты реакции излучения в уравнения движения заряженной частицы. Начнем с простых и не очень строгих рассуждений, основанных на законе сохранения энергии для нерелятивистской заряженной частицы. *Релятивистские поправки учитывать не будем.*

Если не учитывать излучение, то движение заряженной частицы с массой m_e^0 и зарядом $|e|$ под действием внешней силы \vec{F}_e описывается уравнением движения Ньютона, которое при $\beta \ll 1$ имеет вид

$$m_e^0 \dot{\vec{v}} = \vec{F}_e .$$

Т. к. частица ускоряется, то она излучает, причем мощность излучения определяется **формулой Лармора** (9.10). Чтобы учесть влияние на движение частицы потерю энергии на излучение, дополним уравнение Ньютона **феноменологически введенной силой реакции (радиационного торможения)**:

$$m_e^0 \dot{\vec{v}} = \vec{F}_e + \vec{f}_r . \quad (1)$$

Попробуем найти силу \vec{f}_r из общих соображений. Можно сформулировать требования, которым она должна удовлетворять. Сила \vec{f}_r должна

- 1) обращаться в нуль при $\dot{\vec{v}} = 0$, т.к. в этом случае излучение отсутствует;
- 2) быть пропорциональной q^2 , т.к. мощность излучения пропорциональна q^2 , и действие излучения не должно зависеть от знака заряда q .
- 3) Работа силы \vec{f}_r , совершаемая на интервале времени $t_1 < t < t_2$, должна быть равна излученной за это время энергии, взятой с обратным знаком, чтобы за интервал времени (t_1, t_2) выполнялся закон сохранения энергии. Учитывая соотношение (9.10), запишем это условие для электрона в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_r \cdot \vec{v}) dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}) dt . \quad (2)$$

Вычисляя второй интеграл по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f}_r \cdot \vec{v}) dt = -\frac{2e^2}{3c^3} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}}) dt .$$

Если движение периодическое или такое, что скалярное произведение ускорения на скорость равно нулю в начале и конце движения, то первый член справа равен нулю. В этих случаях последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\left[\vec{f}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} \right] \cdot \vec{v} \right) dt = 0 .$$

Т.о., в качестве силы радиационного торможения с учетом (9.15) получаем

$$\vec{f}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} = m_e^0 \left(\frac{a_e^0}{c} \right) \ddot{\vec{v}} = m_e^0 \tau \ddot{\vec{v}} , \quad (3)$$

где a_e^0 – радиус электрона, τ – время запаздывания при распространении электромагнитного поля от центра до края электрона.

Модифицированное уравнение движения при этом принимает вид

$$m_e^0 (\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_e . \quad (4)$$

Уравнение (4) называют иногда уравнением движения **Абрагама-Лоренца**. Оно учитывает реакцию излучения в некотором приближении в среднем во времени. Полученное уравнение (4) применимо лишь в той области, где реакция излучения является малой поправкой. В этом случае ее можно рассматривать как возмущение

ние, приводящее к медленным и малым изменениям состояния частицы¹⁾. Используя (4), приведем примеры расчётов, учитывающих радиационное затухание.

Пункт 2. Радиационное затухание собственных колебаний

Рассмотрим электрон, на который действует упругая сила $\vec{F}_e = -k_e \vec{r}$. Частота его колебаний равна $\omega_0 = \sqrt{k_e / m_e^0}$. Уравнение движения с учетом силы радиационного торможения имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \tau \dddot{\vec{r}}, \quad (5)$$

где в силу линейности уравнения *Абрагама-Лоренца* использовано $\vec{r} = \mathbf{Re} \vec{\tilde{r}}$.

Поскольку правая часть (5) мала по сравнению с левой, то решение (5) можно искать в виде осциллирующей функции

$$\vec{r}(t) \cong \vec{r}_0(t) \exp(i\omega_0 t)$$

с медленно меняющейся амплитудой $\vec{r}_0(t)$ и представить правую часть как

$$\ddot{\vec{r}}(t) \cong -\omega_0^2 \vec{r}.$$

В этом случае (5) приобретает вид уравнения осциллятора с затуханием

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma_0 \dot{\vec{r}} \cong 0, \quad (6)$$

где реакцию излучения на движение электрона учитывает коэффициент затухания

$$\gamma_0 = \omega_0^2 \tau \equiv \omega_0^2 (2e^2 / 3m_e^0 c^3). \quad (7)$$

При малых γ_0 решение (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_0 \exp\left\{-\left(\gamma_0/2\right)t + i\omega_0 t\right\}, \quad \dot{\vec{r}} \cong i\omega_0 \vec{R}_0 \exp\left\{-\left(\gamma_0/2\right)t + i\omega_0 t\right\} \equiv \vec{v}; \\ (\vec{v} \cdot \vec{v})^{2\pi/\omega_0} &= (1/2)(\vec{v} \cdot \vec{v}^*) = (1/2)\omega_0^2 \cdot \left|\vec{R}_0\right|^2 \exp(-\gamma_0 t). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку кинетическая $\overline{W_K}$ и потенциальная $\overline{W_P}$ энергии осциллятора равны, то полная энергия осциллятора

$$\overline{W}^{2\pi/\omega_0} = \overline{W_K} + \overline{W_P} = 2 \overline{W_K} = m_e^0 \left|\vec{v}\right|^2 = (1/2) \cdot m_e^0 \omega_0^2 \cdot \left|\vec{R}_0\right|^2 \exp(-\gamma_0 t) \quad (9)$$

уменьшается пропорционально $\exp(-\gamma_0 t)$. Из (9) получается уравнение

$$\left(d\overline{W}/dt\right) = -\gamma_0 \overline{W}$$

для изменения \overline{W} во времени, в котором по физическому смыслу

$$\gamma_0 \overline{W} = \overline{P}_0^{2\pi/\omega} = \frac{2e^2}{3c^3} \left|\dot{\vec{v}}\right|^{2\pi/\omega} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2 \omega_0^4}{c^3} \cdot \left|\vec{R}_0\right|^2 \cdot \exp(-\gamma_0 t). \quad (10)$$

¹⁾ Уравнение (4) не вполне корректно, ибо в нём есть зависящая от $\ddot{\vec{r}}$ сила, что противоречит теоретической механике. Это противоречие проявляется в появлении т. н. "самоускоряющихся" решений, но, правда, в области, где уравнение не имеет смысла.

Правая часть (10) есть мощность излучения, усредненная за период. Величина $(1/\gamma_0)$ равна средней продолжительности излученного импульса. Эта классическая величина соответствует времени жизни возбужденного состояния в квантовой механике, возникающего в результате взаимодействия системы с полем излучения.

Из-за радиационного затухания излучение осциллятора не монохроматично. Ширину спектральной линии можно получить из спектрального разложения поля в ряд Фурье

$$\tilde{E}_R(\omega) \sim \int \exp\left(i\omega_0 t - \frac{1}{2}\gamma_0 t - i\omega t\right) dt \sim \left\{ -i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma_0}{2} \right\}^{-1}$$

и убедиться, что она равна γ_0 .