Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №1

Многозвенные LC-фильтры

Выполнили студенты 430 группы
Понур К.А., Войтович Д.А

Нижний Новгород, 2018

Содержание

1. Теоретическая часть

1.1. Цель работы

Целью настоящей работы является изучение свойств линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере электрических фильтров. Обычно в качестве фильтров используются цепочки из последовательно соединенных друг с другом идентичных звеньев (четырехполюсников). Такие системы удобно описывать на языке теории волн, интерпретируя их, как направляющие (волноводные) системы. При этом количественное и качественное описание колебательных процессов в фильтрах существенно упрощается и делается более наглядным благодаря использованию таких волновых понятий, как дисперсия, фазовая и групповая скорости волн, коэффициенты отражения плоской волны от границ системы.

1.2. Уравнения многозвенного электрического фильтра

Система, состоящая из цепочки идентичных звеньев, будучи системой с пространственной дисперсией, обладает селективными свойствами в определенной области частот. В зависимости от того, какова область частот, в которой колебания пропускаются практически без искажений, фильтры подразделяются на фильтры низких и высоких частот, полосовые и задерживающие фильтры.

Рис. 1: Общая схема фильтра

Четырехполюсники, образующие звенья рассматриваемых в работе электрических фильтров, состоят из пассивных элементов: индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений. Для большей методической простоты мы будем изучать только консервативные фильтры, состоящие из чисто реактивных элементов – индуктивностей и ёмкостей, так называемые LC - фильтры. Общая схема фильтра приведена на рис. 1, где введены следующие обозначения: $Z(p)$ – операторный импеданс, $G(p)$– операторная проводимость, и $Z_{in}(p)$ и $Z_{out}(p)$ – операторные импедансы на входе и выходе фильтра, соответственно, где ω – частота колебаний. При расчетах фильтры могут быть разбиты на так называемые Г-образные, Т-образные и П-образные звенья. Заметим, что такое деление – чисто условное и не влияет на коэффициент передачи рассчитываемого фильтра.

Рассмотрим для примера фильтр, разбитый на Т-образные звенья (см. рис. 2), и запишем для него операторные уравнения квазистатики.

Рис. 2: Фильтр из Т-образных звеньев

При этом на основании законов Кирхгофа для комплексных амплитуд напряжений V_n и токов I_n, где n номер звена, будем иметь:

$$V_n - U_0 = \frac{Z}{2} I_n, \tag{1}$$

$$U_0 - V_{n+1} = \frac{Z}{2} I_{n+1}, \tag{2}$$

$$GU_0 = I_n - I_{n+1} \tag{3}$$

Исключая из этих уравнений U_0 и разрешая их относительно переменных V_{n+1} и I_{n+1}, получим:

$$V_{n+1} = a_{11}(p)V_n - a_{12}pI_n, \tag{4}$$

$$I_{n+1} = -a_{21}V_n + a_{22}(p)I_n, \tag{5}$$

где

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z(1 + \frac{1}{4}), \tag{6}$$

$$a_{21} = G, a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \tag{7}$$

Отметим следующее важное свойство четырёхполюсников. Четырёхполюсники, для которых выполняются условия

$$a_{11} = a_{22}, a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1, \tag{8}$$

называются взаимными.Для них выполняется теорема взаимности, согласно которой свойства четырёхполюсника не изменяются, если его вход и выход поменять ме-стами. Нетрудно видеть, что Т-образное звено представляет собой взаимный четырёхполюсник. В случае П-образного разбиения на звенья в уравнениях (4) следует положить

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z, \tag{9}$$

$$a_{21} = G(1 + \frac{1}{4}GZ), a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \tag{10}$$

Отсюда следует, что П-образное звено также удовлетворяет теореме взаимности. Система (4) должна быть дополнена граничными условиями

$$V_0 = -I_0Z_0, V_N = Z_nI_n \tag{11}$$

Исследование явлений, описываемых уравнениями (4) при условии (11) включает в себя задачи:

1. описание собственных колебаний
2. описание вынужденных колебаний

Прежде чем переходить к решению первой задачи, исследуем собственные колебания (4) в безграничной цепочке, положим $N \to \infty$.

1.3. Дисперсионное уравнение

Важнейшей особенностью рассматриваемой цепочной структуры является её периодичность, являющаяся следствием идентичности звеньев и проявляющаяся при $N \to \infty$ в виде свойства так называемой *трансляционной симметрии*. Это свойство равнозначно свойству инвариантности уравнений (1) относительно преобразования трансляции $n \Rightarrow n'$ вида $n' = n + m$, где m– любое целое число. Трансляционная симметрия (1) в сочетании с линейностью этих уравнений позволяет искать их решение в виде

$$V_n = Ae^{-in\theta}, I_n = Be^{-in\theta}, \tag{12}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$, а θ– некоторая величина, подлежащая определению. Она находится из условия существования нетривиального решения алгебраической системы

$$A(e^{-i\theta} - a_{11}) + Ba_{12} = 0, \tag{13}$$

$$Aa_{21} + B(e^{-i\theta} - a_{22}) = 0, \tag{14}$$

получаемой подстановкой (12) в (4). Этим условием является равенство нулю детерминанта (13),что, с учётом (8), даёт

$$(e^{-i\theta} - a_{11})^2 - a_{11}^2 + 1 = 0 \tag{15}$$

или

$$\cos\theta = a_{11} \tag{16}$$

Величина θ, определяемая из (16) называется *постоянной распространения* и принимает в общем случае комплексные значения ($\theta = \theta' + i\theta''$). Мнимая часть θ представляет собой декремент (или инкремент) волны, а действительная часть – набег фазы волны на одно звено. При этом θ' связана с длиной волны λ очевидным соотношением

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\theta'}, \tag{17}$$

в котором

$$\lambda = min|n_1 - n_2| \tag{18}$$

где и n_1 и n_2- номера ячеек, отвечающих синфазным колебаниям. Поскольку параметр является функцией частоты ω, уравнение (16) связывает постоянную распространения с частотой и называется дисперсионным уравнением системы. Дисперсионное уравнение исчерпывающе характеризует безграничную систему. В случае, когда отсутствует временное и пространственное затухание ($\operatorname{Im}\omega = \operatorname{Im}\theta = 0$), оно позволяет определить фазовую ($V_{\text{ф}}$) и групповую ($V_{\text{гр}}$) скорости волн:

$$V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\theta}, V_{\text{гр}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \tag{19}$$

$$(-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Дисперсионное уравнение (16) описывает два типа волн – прямую ($\theta = \theta^+$) и обратную ($\theta = \theta^-$) волну. При этом для фиксированного ω значения θ^+и θ^- будут отличаться только знаком:

$$\theta^- = -\theta^+. \tag{20}$$

Подставляя θ^- и θ^+ в одно из уравнений системы (13), можно найти связь между амплитудами напряжения и тока для прямой и обратной волн

$$B^+ = G_x A^+, B^- = -G_x A^-, \tag{21}$$

где

$$G_x = \sqrt{\frac{a_{21}}{a_1 2}} \tag{22}$$

–*характеристическая проводимость фильтра*. Наряду с G_x, вводят также и обратную ей величину

$$Z_x = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}, \tag{23}$$

именуемую *характеристическим импедансом* фильтра.

Пространственная дисперсия фильтра (описываемая (16)) обуславливает его селективные свойства. Для характеристики этих свойств вводят понятие *полосы прозрачности*, а именно полосы частот, в которой (отсутствует затухание по переменной n).

Найдём связь ширины полосы прозрачности с параметрами фильтра. С этой целью заметим, что поскольку

$$\sin\theta = \operatorname{ch}\theta'' \sin\theta' + i \operatorname{sh}\theta'' \cos\theta', \tag{24}$$

то в полосе прозрачности

$$\sin\theta = \sin\theta'. \tag{25}$$

Отсюда, в силу (15), заключаем, что

$$1 - a_{11}^2 \geq 0, \tag{26}$$

или, с учётом (6),–

$$GZ(1 + \frac{1}{4}GZ) \leq 0 \tag{27}$$

Из этого условия и находится полоса прозрачности фильтра. Из него, в частности следует, что в полосе прозрачности фильтра характеристический импеданс (23) будет действительной величиной.

Вне полосы прозрачности $\sin\theta' = 0$ и, следовательно, $\sin\theta = i \operatorname{sh}\theta''$. С учётом (16), будем иметь

$$\operatorname{sh}\theta'' = \pm\sqrt{a_{11}^2 - 1} \tag{28}$$

1.4. Собственные колебания

Найдём собственные колебания в цепочке, состоящей из N одинаковых Т-образных звеньев, описываемой системой уравнений (4) при граничных условиях (11). Общее решение такой системы будет представлять собой суперпозицию прямой и обратной волн вида

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \tag{29}$$

$$I_n = B_1 e^{-i\theta} + B_2 e^{i\theta}. \tag{30}$$

Для внутренних звеньев прямая и обратная волны распространяются независимо и для них, в силу (**??**), общее решение запишется в виде

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \tag{31}$$

$$I_n = G_x(A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}). \tag{32}$$

Подставляя это решение в граничные условия (11), получим следующую однородную систему уравнений для нахождения амплитуд A_1 и A_2:

$$(1 + Z_0 G_x)A_1 + (1 - Z_0 G_x)A_2 = 0, (1 - Z_N G_x)e^{-iN\theta}A_1 + (1 + Z_N G_x)e^{iN\theta}A_2 = 0. \tag{33}$$

Отсюда, расписав условие существования ненулевых решений для A_1 и A_2, найдём *характеристическое уравнение* рассматриваемой системы

$$1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta} = 0, \tag{34}$$

где

$$\Gamma_0 \frac{A_1}{A_2} = -\frac{1 - Z_0 G_x}{1 + Z_0 G_x} \tag{35}$$

–коэффициент отражения от левой границы фильтра,а

$$\Gamma_N \frac{A_2 e^{iN\theta}}{A_1 e^{-iN\theta}} = -\frac{1 - Z_N G_x}{1 + Z_N G_x} \tag{36}$$

–коэффициент отражения от правой границы фильтра.

Решая совместно дисперсионное уравнение (16) и характеристическое уравнение (34), найдём спектр собственных (нормальных) частот фильтра и соответствующий ему спектр значений постоянной распространения θ. Очевидно, что этот спектр будет зависеть не только от параметров звена фильтра, но и от условий на его концах. Отметим также, что число нормальных частот всегда совпадает с числом степеней свободы системы.