

Отчет по лабораторной работе №1
Многозвенные LC-фильтры

Выполнили студенты 430 группы
Понур К.А., Войтович Д.А

Нижний Новгород, 2018

Содержание

1	Теоретическая часть	2
1.1	Цель работы	2
1.2	Уравнения многозвенного электрического фильтра	2
1.3	Дисперсионное уравнение	4
1.4	Собственные колебания	6

1. Теоретическая часть

1.1. Цель работы

Целью настоящей работы является изучение свойств линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере электрических фильтров. Обычно в качестве фильтров используются цепочки из последовательно соединенных друг с другом идентичных звеньев (четырёхполюсников). Такие системы удобно описывать на языке теории волн, интерпретируя их, как направляющие (волноводные) системы. При этом количественное и качественное описание колебательных процессов в фильтрах существенно упрощается и делается более наглядным благодаря использованию таких волновых понятий, как дисперсия, фазовая и групповая скорости волн, коэффициенты отражения плоской волны от границ системы.

1.2. Уравнения многозвенного электрического фильтра

Система, состоящая из цепочки идентичных звеньев, будучи системой с пространственной дисперсией, обладает селективными свойствами в определенной области частот. В зависимости от того, какова область частот, в которой колебания пропускаются практически без искажений, фильтры подразделяются на фильтры низких и высоких частот, полосовые и задерживающие фильтры.

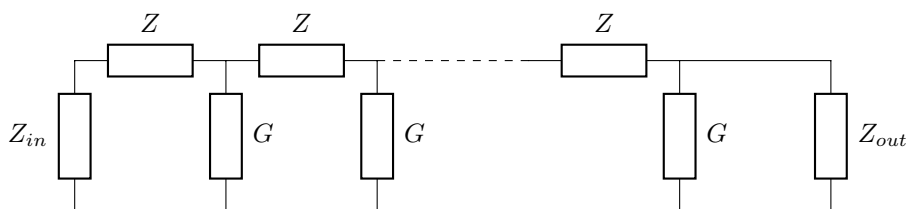


Рис. 1: Общая схема фильтра

Четырёхполюсники, образующие звенья рассматриваемых в работе электрических фильтров, состоят из пассивных элементов: индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений. Для большей методической простоты мы будем изучать только консервативные фильтры, состоящие из чисто реактивных элементов – индуктивностей и ёмкостей, так называемые LC - фильтры. Общая схема фильтра приведена на рис. 1, где введены следующие обозначения: $Z(p)$ – операторный импеданс, $G(p)$ – операторная проводимость, и $Z_{in}(p)$ и $Z_{out}(p)$ – операторные импедансы на входе и выходе фильтра, соответственно, где ω – частота колебаний. При расчетах фильтры могут быть разбиты на так называемые Г-образные, Т-

образные и П-образные звенья. Заметим, что такое деление – чисто условное и не влияет на коэффициент передачи рассчитываемого фильтра.

Рассмотрим для примера фильтр, разбитый на Т-образные звенья (см. рис. 2), и запишем для него операторные уравнения квазистатики.

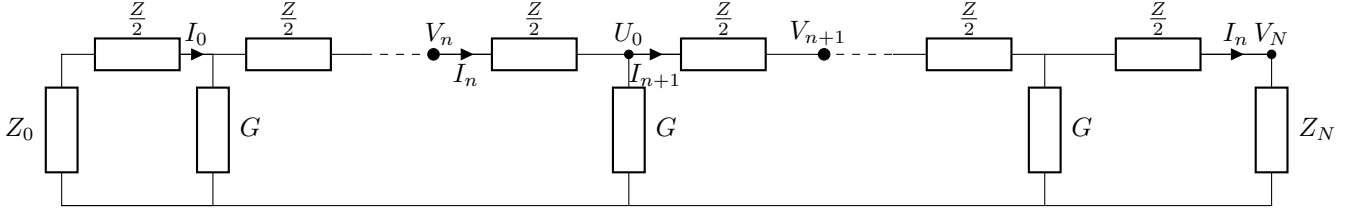


Рис. 2: Фильтр из Т-образных звеньев

При этом на основании законов Кирхгофа для комплексных амплитуд напряжений V_n и токов I_n , где n номер звена, будем иметь:

$$V_n - U_0 = \frac{Z}{2} I_n, \quad (1)$$

$$U_0 - V_{n+1} = \frac{Z}{2} I_{n+1}, \quad (2)$$

$$GU_0 = I_n - I_{n+1} \quad (3)$$

Исключая из этих уравнений U_0 и разрешая их относительно переменных V_{n+1} и I_{n+1} , получим:

$$V_{n+1} = a_{11}(p)V_n - a_{12}pI_n, \quad (4)$$

$$I_{n+1} = -a_{21}V_n + a_{22}(p)I_n, \quad (5)$$

где

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z(1 + \frac{1}{4}), \quad (6)$$

$$a_{21} = G, a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \quad (7)$$

Отметим следующее важное свойство четырёхполюсников. Четырёхполюсники, для которых выполняются условия

$$a_{11} = a_{22}, a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1, \quad (8)$$

называются взаимными. Для них выполняется теорема взаимности, согласно которой свойства четырёхполюсника не изменяются, если его вход и выход поменять местами. Нетрудно видеть, что Т-образное звено представляет собой взаимный четырёхполюсник. В случае

П-образного разбиения на звенья в уравнениях (4) следует положить

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, a_{12} = Z, \quad (9)$$

$$a_{21} = G(1 + \frac{1}{4}GZ), a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ \quad (10)$$

Отсюда следует, что П-образное звено также удовлетворяет теореме взаимности. Система (4) должна быть дополнена граничными условиями

$$V_0 = -I_0 Z_0, V_N = Z_N I_N \quad (11)$$

Исследование явлений, описываемых уравнениями (4) при условии (11) включает в себя задачи:

1. описание собственных колебаний
2. описание вынужденных колебаний

Прежде чем переходить к решению первой задачи, исследуем собственные колебания (4) в безграничной цепочке, положим $N \rightarrow \infty$.

1.3. Дисперсионное уравнение

Важнейшей особенностью рассматриваемой цепочной структуры является её периодичность, являющаяся следствием идентичности звеньев и проявляющаяся при $N \rightarrow \infty$ в виде свойства так называемой *трансляционной симметрии*. Это свойство равнозначно свойству инвариантности уравнений (1) относительно преобразования трансляции $n \Rightarrow n'$ вида $n' = n + m$, где m – любое целое число. Трансляционная симметрия (1) в сочетании с линейностью этих уравнений позволяет искать их решение в виде

$$V_n = A e^{-in\theta}, I_n = B e^{-in\theta}, \quad (12)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а θ – некоторая величина, подлежащая определению. Она находится из условия существования нетривиального решения алгебраической системы

$$A(e^{-i\theta} - a_{11}) + B a_{12} = 0, \quad (13)$$

$$A a_{21} + B(e^{-i\theta} - a_{22}) = 0, \quad (14)$$

получаемой подстановкой (12) в (4). Этим условием является равенство нулю детерминанта (13), что, с учётом (8), даёт

$$(e^{-i\theta} - a_{11})^2 - a_{11}^2 + 1 = 0 \quad (15)$$

или

$$\cos \theta = a_{11} \quad (16)$$

Величина θ , определяемая из (16) называется *постоянной распространения* и принимает в общем случае комплексные значения ($\theta = \theta' + i\theta''$). Мнимая часть θ представляет собой декремент (или инкремент) волны, а действительная часть – набег фазы волны на одно звено. При этом θ' связана с длиной волны λ очевидным соотношением

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\theta'}, \quad (17)$$

в котором

$$\lambda = \min |n_1 - n_2| \quad (18)$$

где n_1 и n_2 – номера ячеек, отвечающих синфазным колебаниям. Поскольку параметр является функцией частоты ω , уравнение (16) связывает постоянную распространения с частотой и называется дисперсионным уравнением системы. Дисперсионное уравнение исчерпывающе характеризует безграничную систему. В случае, когда отсутствует временное и пространственное затухание ($\text{Im } \omega = \text{Im } \theta = 0$), оно позволяет определить фазовую (V_Φ) и групповую ($V_{\text{гр}}$) скорости волн:

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\theta}, V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\theta} \quad (19)$$

$$(-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Дисперсионное уравнение (16) описывает два типа волн – прямую ($\theta = \theta^+$) и обратную ($\theta = \theta^-$) волну. При этом для фиксированного ω значения θ^+ и θ^- будут отличаться только знаком:

$$\theta^- = -\theta^+. \quad (20)$$

Подставляя θ^- и θ^+ в одно из уравнений системы (13), можно найти связь между амплитудами напряжения и тока для прямой и обратной волн

$$B^+ = G_x A^+, B^- = -G_x A^-, \quad (21)$$

где

$$G_x = \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}} \quad (22)$$

– *характеристическая проводимость фильтра*. Наряду с G_x , вводят также и обратную ей величину

$$Z_x = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}, \quad (23)$$

именуемую *характеристическим импедансом* фильтра.

Пространственная дисперсия фильтра (описываемая (16)) обуславливает его селективные свойства. Для характеристики этих свойств вводят понятие *полосы прозрачности*, а именно полосы частот, в которой (отсутствует затухание по переменной n).

Найдём связь ширины полосы прозрачности с параметрами фильтра. С этой целью заметим, что поскольку

$$\sin \theta = \operatorname{ch} \theta'' \sin \theta' + i \operatorname{sh} \theta'' \cos \theta', \quad (24)$$

то в полосе прозрачности

$$\sin \theta = \sin \theta'. \quad (25)$$

Отсюда, в силу (15), заключаем, что

$$1 - a_{11}^2 \geq 0, \quad (26)$$

или, с учётом (6),—

$$GZ(1 + \frac{1}{4}GZ) \leq 0 \quad (27)$$

Из этого условия и находится полоса прозрачности фильтра. Из него, в частности следует, что в полосе прозрачности фильтра характеристический импеданс (23) будет действительной величиной.

Вне полосы прозрачности $\sin \theta' = 0$ и, следовательно, $\sin \theta = i \operatorname{sh} \theta''$. С учётом (16), будем иметь

$$\operatorname{sh} \theta'' = \pm \sqrt{a_{11}^2 - 1} \quad (28)$$

1.4. Собственные колебания

Найдём собственные колебания в цепочке, состоящей из N одинаковых Т-образных звеньев, описываемой системой уравнений (4) при граничных условиях (11). Общее решение такой системы будет представлять собой суперпозицию прямой и обратной волн вида

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \quad (29)$$

$$I_n = B_1 e^{-i\theta} + B_2 e^{i\theta}. \quad (30)$$

Для внутренних звеньев прямая и обратная волны распространяются независимо и для них, в силу (??), общее решение запишется в виде

$$V_n = A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}, \quad (31)$$

$$I_n = G_x(A_1 e^{-i\theta} + A_2 e^{i\theta}). \quad (32)$$

Подставляя это решение в граничные условия (11), получим следующую однородную систему уравнений для нахождения амплитуд A_1 и A_2 :

$$(1 + Z_0 G_x) A_1 + (1 - Z_0 G_x) A_2 = 0, (1 - Z_N G_x) e^{-iN\theta} A_1 + (1 + Z_N G_x) e^{iN\theta} A_2 = 0. \quad (33)$$

Отсюда, расписав условие существования ненулевых решений для A_1 и A_2 , найдём *характеристическое уравнение* рассматриваемой системы

$$1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta} = 0, \quad (34)$$

где

$$\Gamma_0 \frac{A_1}{A_2} = -\frac{1 - Z_0 G_x}{1 + Z_0 G_x} \quad (35)$$

–коэффициент отражения от левой границы фильтра,а

$$\Gamma_N \frac{A_2 e^{iN\theta}}{A_1 e^{-iN\theta}} = -\frac{1 - Z_N G_x}{1 + Z_N G_x} \quad (36)$$

–коэффициент отражения от правой границы фильтра.

Решая совместно дисперсионное уравнение (16) и характеристическое уравнение (34), найдём спектр собственных (нормальных) частот фильтра и соответствующий ему спектр значений постоянной распространения θ . Очевидно, что этот спектр будет зависеть не только от параметров звена фильтра, но и от условий на его концах. Отметим также, что число нормальных частот всегда совпадает с числом степеней свободы системы.