Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №27

Определение отношения заряда электрона к его массе

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф. Г.

Принял:
Менсов С. Н.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

1. Описание лабораторной работы

Цель работы: изучение характера движения заряженных частиц в однородном магнитном поле и определение удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом отклонения в известных полях.

Оборудование: экспериментальная установка (ЭЛТ и блок питания), коммутатор, амперметр постоянного тока, источник питания постоянного тока

Приборные погрешности: $\Delta U = 62.6$ В, $\Delta I = 0.015$ А, $\Delta K = 0.01$ м.

2. Измерение удельного заряда электрона методом отклонения земным магнитным полем

В данном эксперименте ЭЛТ выставлялась так, чтобы её продольная ось была сонаправлена с линиями магнитного поля земли: известна горизонтальная составляющая поля $B_з = 0.186$ гаусса $= 1.86 \cdot 10^{-5}$ Тл и наклонение $\alpha = 70°$. Отсюда напряженность магнитного поля вдоль ЭЛТ составляет $B = \frac{B_з}{cos(\alpha)} = 6.36 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Выберем декартову систему координат так, чтобы начало координат лежало на конце второго анода, ось Z совпадала с продольной осью ЭЛТ.

Если на анод ЭЛТ подавать напряжение U_a, то из него электроны будут вылетать с кинетической энергией

$$\frac{mv_{0z}^2}{2} = U_a \cdot e$$

и скоростью

$$v_{0z} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_a \cdot e}{m}}$$

Обозначим удельный заряд $\frac{e}{m} = \eta$. Тогда $v_{0z} = \sqrt{2U_a\eta}$.

На заряд будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости электрона, закручивающая его по окружности радиуса R.

$$F_л = ma$$
$$eVB = \frac{mv_{0z}^2}{R}$$

Отсюда

$$\eta = \frac{v_{0z}}{RB}$$

Радиус можно найти по отклонению проецируемого на экран ЭЛТ пятна K, формула приближенно выражается для $K << L_1$:

$$\eta = \frac{8K^2U_a}{B^2L^4} \tag{1}$$

Рассчитаем погрешность формулы (1):

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta K}{K} + \frac{\Delta U}{U_a} \tag{2}$$

Проведем несколько опытов, используя противоположные направления магнитного поля и разные значения U_a.

U_a, В	α, град	K, м	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\varepsilon(\frac{e}{m})$	$\Delta(\frac{e}{m})$
1300	$+90$	0.007	$1.78 \cdot 10^{11}$	0.28	$5.10 \cdot 10^{10}$
	-90	0.006	$1.31 \cdot 10^{11}$	0.33	$4.37 \cdot 10^{10}$
1700	$+90$	0.005	$1.19 \cdot 10^{11}$	0.40	$4.76 \cdot 10^{10}$
	-90	0.0065	$2.01 \cdot 10^{11}$	0.30	$6.19 \cdot 10^{10}$

По данным измерений среднеквадратичное отклонение составляет $5.11 \cdot 10^{10}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал $\frac{e}{m}$ лежит от $1.06 \cdot 10^{11}$ до $2.08 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ с точностью до порядка.

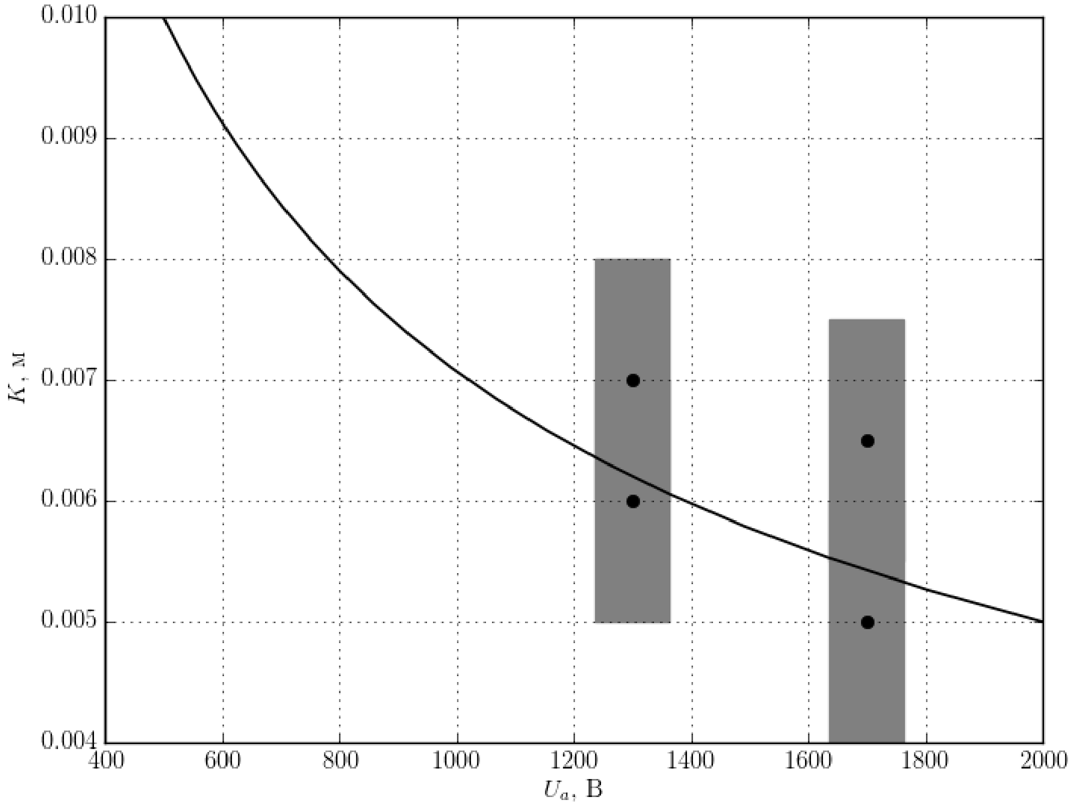


Рис. 1. Теоретическая зависимость отклонения пятна от напряжения и реальные результаты с прямоугольниками ошибок

3. Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пучка продольным магнитным полем соленоида

Если вдоль оси трубки создать постоянное магнитное поле B_z, которое можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \cdot n_0 \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8400 \cdot I \tag{3}$$

то электронный пучок, вылетевший из электронной пушки с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2 \cdot U_a \cdot \eta}$, пройдет в ЭЛТ в сонаправленном продольной оси (oZ) ЭЛТ магнитном поле напряженностью $B = \mu_0 n I$.

Для того, чтобы поле Bx действовало на электрон, необходимо, чтобы его скорость имела поперечную составляющую , перпендикулярную v_z. В этом случае в плоскости XoY электрон под действием силы будет равномерно двигаться по окружности, радиус которой определится из второго закона динамики:

$$m\frac{v_0^2}{R} = ev_0B_z \tag{4}$$

$$R = \frac{mv_0}{eB_z} \tag{5}$$

На неком начальном участке пути, меньшем на порядок относительно длины трубки, пучок проходит сквозь отклоняющие пластины с напряженностью электрического поля $E = \frac{U_{\text{откл}}}{d}$, где d — расстояние между пластинами.

Если пренебречь тем, что поля скрещенные, можно предположить, что в пластинах пучок приобретает произвольную скорость, лежащую в плоскость (XoY), перпендикулярной oZ. Ясно, что он будет закручиваться магнитным полем, а так как проекция начальной скорости v_0z не изменилась, то его траектория будет представлять собой винтовую линию, нанесенную на цилиндр радиуса R, и электроны пучка будут двигаться по спирали и через время $nT = \tau$ пересекать ось oZ.

Обозначим $\eta = \frac{e}{m}$ и $\omega = \eta B_z$ (циклотронная частота). Тогда можем переписать формулу как

$$R = \frac{v_0}{\omega} \tag{6}$$

Решив несколько систем уравнений:

$$\begin{cases} nT_1v_{0z} = l \\ (n+1)T_2v_{0z} = l \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\eta B_1} \\ T_2 = \frac{2\pi}{\eta B_2} \end{cases}$$

Число фокусировок находится как

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{B_1}{B_2 - B_1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1}$$

А удельный заряд определяется как

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{l^2(B_2 - B_1)^2}$$

через два опыта с последовательными n-й и n+1 фокусировками.

Нужно найти первое такое пересечение на экране ЭЛТ (n фокусировок) и увеличивать ток на соленоиде (увеличивать напряженность магнитного поля) до тех пор, пока не получим на экране (n+1 фокусировку).

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{(l \cdot \mu_0 \cdot n_0)^2 (I_2 - I_1)^2}$$

Рассчитаем погрешность формулы:

$$\Delta(\eta) = \frac{8\pi^2 \left(4U_a \Delta I \left(I_2 - I_1\right) + \Delta U \left(I_2 - I_1\right)^2\right)}{\mu_0^2 d^2 l^2 n_0^2 \left(I_2 - I_1\right)^4}$$

Где d — коэффициент перевода в систему СИ единиц тока.

Провели ряд экспериментов:

U_a, В	I_1, А	I_2, А	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\Delta(\frac{e}{m})$	n
1200	0.6	1.14	$1.78 \cdot 10^{11}$	$0.96 \cdot 10^{10}$	1.11
1000	0.54	1.04	$1.73 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{10}$	1.08
1000	0.5	1.08	$1.81 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{10}$	0.86
1100	0.46	1.08	$1.74 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{10}$	0.74

По данным таблицы среднеквадратичное отклонение будет составлять $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал будет составлять от $1.70 \cdot 10^{11}$ до $1.82 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ так, что известное табличное значение попадает в доверительный интервал, а экспериментальное значение лежит еще ближе к известному.

4. Определение нецелой фокусировки

4.1. Движение электрона в скрещенных полях

Рассмотрим случай движения электрона с постоянным напряжением, поданным на горизонтально отклоняющие пластины. Выберем ортогональную систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением силы, действующей со стороны электрического поля пластин на электрон, ось Z была сонаправлена магнитному полю внутри соленоида, а единичные орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ этой системы координат образовывали правую тройку (рис. 2).

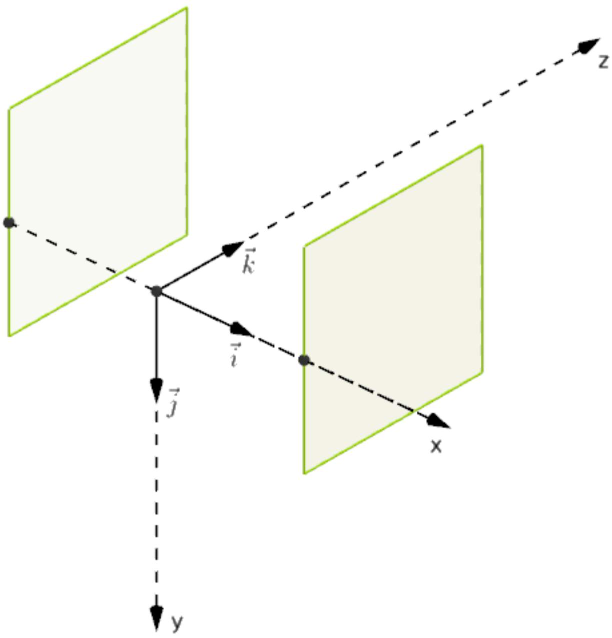


Рис. 2. Система координат, в которой рассматривается движение электрона

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{7}$$

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{8}$$

Пусть $\eta = \frac{e}{m}$. Тогда

$$\vec{a} = \eta\vec{E} + \eta(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{9}$$

Разложим $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \tag{10}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \tag{11}$$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} \tag{12}$$

$$\vec{B} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} + B_z \cdot \vec{i} \tag{13}$$

Разложим векторное произведение $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_yB_z - v_zB_y)\vec{i} + (v_zB_x - v_xB_z)\vec{j} + (v_xB_y - v_yB_x)\vec{k} \tag{14}$$

Запишем второй закон Ньютона с учетом (14) в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \eta E_x + \eta(v_yB_z - v_zB_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \eta E_y + \eta(v_zB_x - v_xB_z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \eta E_z + \eta(v_xB_y - v_yB_x) \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим $\omega = \eta B$. Учитывая, что $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $E = E_x$ и $B = B_z$, перепишем систему (15):

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Решим дифференциальные уравнения:

$$dv_y = -\omega v_x dt \tag{17}$$

$$\int dv_y = -\int \omega v_x dt \tag{18}$$

$$v_y = -\omega v_x t + C \tag{19}$$

Но по начальным условиям $v_y(t = 0) = 0, v_x(t = 0) = 0$. Тогда $C = 0$. Подставим $v_y = -\omega v_x t$ в уравнение системы (16):

$$\frac{dV_x}{dt} = \eta E - \omega^2 x \tag{20}$$

Это уравнение является уравнением гармонического осциллятора и имеет известное решение:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} \tag{21}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \tag{22}$$

Найдем A и ϕ_0 из начальных условий $v_x(t=0) = 0, x(t=0) = 0$:

$$\begin{cases} \begin{cases} A\cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} = 0 \\ -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = 0 \end{cases} \\ A \geq 0 \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi \end{cases} \tag{23}$$

Решением (23) будет $\phi_0 = \pi$ и $A = \eta\frac{E}{\omega^2}$. Тогда можем записать уравнение $x(t)$:

$$x(t) = \eta\frac{E}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) \tag{24}$$

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = \eta\frac{E}{\omega}\sin\omega t = \frac{E}{B}\sin\omega t \tag{25}$$

Так как $\frac{dy}{dt} = -\omega x$, то $dy = -\omega\eta\frac{E}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)dt$, и:

$$y(t) = \eta\frac{E}{\omega^2}(\sin\omega t - \omega t) \tag{26}$$

$$v_y(t) = \eta\frac{E}{\omega}(\cos\omega t - 1) = \frac{E}{B}(\cos\omega t - 1) \tag{27}$$

Данные уравнения координат являются параметрическим уравнением частного случая трохоиды — циклоиды: то есть в конфигурации скрещенных полей электрон движется по плоской траектории [1, 2, 3].

Обозначим длину пластин L. Из уравнения (16) ($\frac{dv_z}{dt} = 0$) следует, что скорость v_z постоянна. Тогда время τ пролета сквозь пластини будет выражаться как:

$$\tau = \frac{L}{v_z} \tag{28}$$

Запишем формулу ларморовского радиуса, по которому электрон будет обращаться по вылете из пластин:

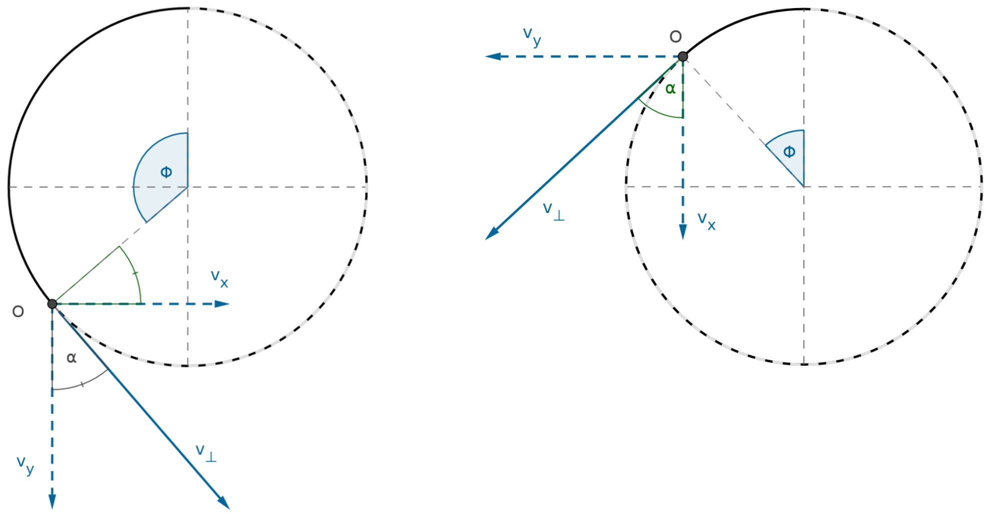
$$r = \frac{mv_\perp}{eB} = \frac{v_\perp}{\eta B} = \frac{v_\perp}{\omega} \tag{29}$$

Где

$$v_\perp = \sqrt{v_y(\tau)^2 + v_x(\tau)^2} \tag{30}$$

Итак, можем считать известными координаты и модуль скорости (в плоскости XY) электрона. Найдем направление скорости:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{v_x(\tau)}{v_y(\tau)}\right| = \left|\frac{\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau - 1}\right| \tag{31}$$



а) б)

Рис. 3. Вылет электрона из скрещенных полей в точке О. а) горизонтально отклоняющие пластины б) вертикально отклоняющие пластины

Также отметим, что электрическое поле является низкочастотным, и за время пролета частицы в нем поле можно считать постоянным. Тогда применимы формулы (24-31)

Отсюда следует что угол, под которым вылетает электрон из скрещенных полей от текущего напряжения $E(\tau)$ на пластинах не зависит.

От напряжения зависит модуль скорости, а значит, и величина ларморовского радиуса.

Вылетая из скрещенных полей в момент времени τ, электрон летит со скоростью $v_\perp$ в плоскости XY и под действием магнитного поля вращается по окружности (также в плоскости XY)

Показательно, что дрейф в скрещенных полях носит универсальный характер - скорость дрейфа не зависит ни от знака заряда частицы, хотя конечно, сам дрейф возможен только при наличии у частицы заряда [4].

Мгновенный центр окружности при $t = \tau$ будет лежать на нормали к вектору скорости.

Тогда можно найти угол Φ – начальную фазу, набранную в скрещенных полях, из геометрии траектории - это будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Мы рассмотрели случай для горизонтально отклоняющих пластин ($E = E_x$). Понятно, что для вертикально отклоняющих пластин верно все тоже самое, но оси повернутся на $\frac{\pi}{2}$ (угол Φ будет острым) и формулы скоростей v_x и v_y инвертируются.

Таким образом, для горизонтально отклоняющих пластин

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} \right| = \left| \frac{\cos \omega\tau - 1}{\sin \omega\tau} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \qquad (32)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad (33)$$

Число фокусировок можно определить как $n = \frac{\gamma}{2\pi}$, где γ – весь набранный электроном угол.

Тогда

$$n = \frac{\Phi + \omega \frac{l}{v_z}}{2\pi} \qquad (34)$$

где l – расстояние от конца пластин до экрана.

Список литературы

[1] Беллюстин С. В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. С. 81–87.

[2] Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1972. С. 102–104.

[3] Андреев В. А. Электричество, магнетизм, колебания и волны: учебное пособие для выполнения лабораторных работ. Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 87–88.

[4] Раданцев В. Ф. Электронные свойства полупроводниковых наноструктур. Екб.: УрГУ, 2008. С. 286–290.