

Отчет по лабораторной работе №27
Определение отношения заряда электрона к его
массе

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф. Г.

Принял:
Менсов С. Н.

Нижний Новгород, 2016

1. Отчёт по лабораторной работе №27

«Определение отношения заряда электрона к его массе»

Цель работы: изучение характера движения заряженных частиц в однородном магнитном поле и определение удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом отклонения в известных полях.

Оборудование: экспериментальная установка (ЭЛТ и блок питания), коммутатор, амперметр постоянного тока, источник питания постоянного тока

Приборные погрешности: $\Delta U = 62.6 \text{ В}$, $\Delta I = 0.015 \text{ А}$, $\Delta K = 0.01 \text{ м}$.

1.1. Измерение удельного заряда электрона методом отклонения земным магнитным полем

В данном эксперименте ЭЛТ выставлялась так, чтобы её продольная ось была сонаправлена с линиями магнитного поля земли: известна горизонтальная составляющая поля $B_z = 0.186 \text{ гаусса} = 1.86 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ и наклонение $\alpha = 70^\circ$. Отсюда напряженность магнитного поля вдоль ЭЛТ составляет $B = \frac{B_z}{\cos(\alpha)} = 6.36 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы начало координат лежало на конце второго анода, ось Z совпадала с продольной осью ЭЛТ.

Если на анод ЭЛТ подавать напряжение U_a , то из него электроны будут вылетать с кинетической энергией

$$\frac{mv_{0z}^2}{2} = U_a \cdot e$$

и скоростью

$$v_{0z} = \sqrt{\frac{2 \cdot U_a \cdot e}{m}}$$

Обозначим удельный заряд $\frac{e}{m} = \eta$. Тогда $v_{0z} = \sqrt{2U_a\eta}$.

На заряд будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости электрона, закручивающая его по окружности радиуса R .

$$F_{\text{л}} = ma$$

$$eVB = \frac{mv_{0z}^2}{R}$$

Отсюда

$$\eta = \frac{v_{0z}}{RB}$$

Радиус можно найти по отклонению проецируемого на экран ЭЛТ пятна K , формула приближенно упрощается для $K \ll L_1$:

$$\eta = \frac{8K^2 U_a}{B^2 L^4} \quad (1)$$

Рассчитаем погрешность формулы (1):

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta K}{K} + \frac{\Delta U}{U_a} \quad (2)$$

Проведем несколько опытов, используя противоположные направления магнитного поля и разные значения U_a .

U_a , В	α , град	K , м	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\varepsilon(\frac{e}{m})$	$\Delta(\frac{e}{m})$
1300	+90	0.007	$1.78 \cdot 10^{11}$	0.28	$5.10 \cdot 10^{10}$
	-90	0.006	$1.31 \cdot 10^{11}$	0.33	$4.37 \cdot 10^{10}$
1700	+90	0.005	$1.19 \cdot 10^{11}$	0.40	$4.76 \cdot 10^{10}$
	-90	0.0065	$2.01 \cdot 10^{11}$	0.30	$6.19 \cdot 10^{10}$

По данным таблицы среднеквадратичное отклонение будет составлять $5.11 \cdot 10^{10}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Интервал ошибок будет составлять от $1.06 \cdot 10^{11}$ до $2.08 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ с точностью до порядка.

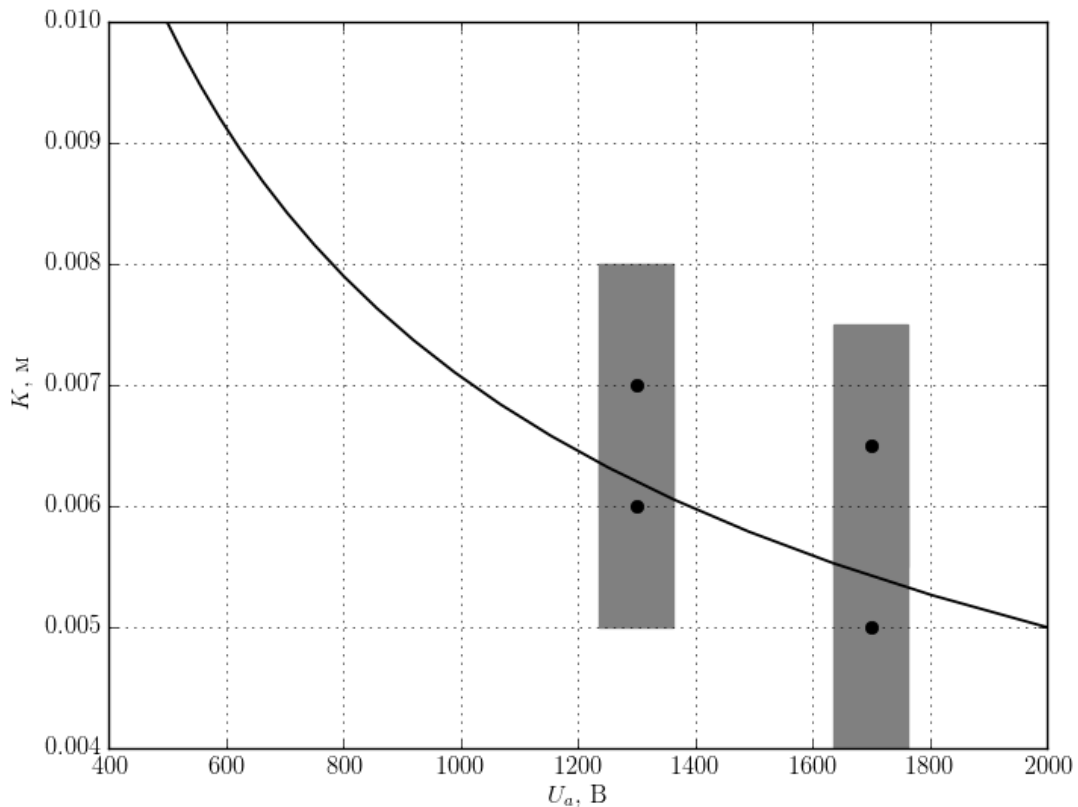


Рис. 1. Теоретическая зависимость отклонения пятна от напряжения и реальные результаты с прямоугольниками ошибок

1.2. Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пучка продольным магнитным полем селеноида

Если вдоль оси трубки создать постоянное магнитное поле B_z , которое можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \cdot n_0 \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8400 \cdot I \quad (3)$$

то электронный пучок, вылетевший из электронной пушки с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2 \cdot U_a \cdot \eta}$, пройдет в ЭЛТ в сонаправленном продольной оси (оZ) ЭЛТ магнитном поле напряженностью $B = \mu_0 n I$.

Для того, чтобы поле B_x действовало на электрон, необходимо, чтобы его скорость имела поперечную составляющую, перпендикулярную v_z . В этом случае в плоскости XoY электрон под действием силы будет равномерно двигаться по окружности, радиус которой определится из второго закона динамики:

$$m \frac{v_0^2}{R} = ev_0 B_z \quad (4)$$

$$R = \frac{mv_0}{eB_z} \quad (5)$$

На некоем начальном участке пути, меньшем на порядок относительно длины трубки, пучок проходит сквозь отклоняющие пластины с напряженностью электрического поля $E = \frac{U_{откл}}{d}$, где d — расстояние между пластинами.

Если пренебречь тем, что поля скрещенные, можно предположить, что в пластинах пучок приобретает произвольную скорость, лежащую в плоскости (XoY), перпендикулярной oZ. Ясно, что он будет закручиваться магнитным полем, а так как проекция начальной скорости v_{0z} не изменилась, то его траектория будет представлять собой винтовую линию, нанесенную на цилиндр радиуса R , и электроны пучка будут двигаться по спирали и через время $nT = \tau$ пересекать ось oZ.

Обозначим $\eta = \frac{e}{m}$ и $\omega = \eta B_z$ (циклотронная частота). Тогда можем переписать формулу как

$$R = \frac{v_0}{\omega} \quad (6)$$

Решив несколько систем уравнений:

$$\begin{cases} nT_1 v_{0z} = l \\ (n+1)T_2 v_{0z} = l \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\eta B_1} \\ T_2 = \frac{2\pi}{\eta B_2} \end{cases}$$

Число фокусировок находится как

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{B_1}{B_2 - B_1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1}$$

А удельный заряд определяется как

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{l^2 (B_2 - B_1)^2}$$

через два опыта с последовательными n -й и $n+1$ фокусировками.

Нужно найти первое такое пересечение на экране ЭЛТ (n фокусировок) и увеличивать ток на соленоиде (увеличивать напряженность магнитного поля) до тех пор, пока не получим на экране ($n+1$ фокусировку).

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{(l \cdot \mu_0 \cdot n_0)^2 (I_2 - I_1)^2}$$

Рассчитаем погрешность формулы:

$$\Delta(\eta) = \frac{8\pi^2 (4U_a \Delta I (I_2 - I_1) + \Delta U (I_2 - I_1)^2)}{\mu_0^2 d^2 l^2 n_0^2 (I_2 - I_1)^4}$$

Где d — коэффициент перевода в систему СИ единиц тока.

Провели ряд экспериментов:

U_a , В	I_1 , А	I_2 , А	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\Delta(\frac{e}{m})$	n
1200	0.6	1.14	$1.78 \cdot 10^{11}$	$0.96 \cdot 10^{10}$	1.11
1000	0.54	1.04	$1.73 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{10}$	1.08
1000	0.5	1.08	$1.81 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{10}$	0.86
1100	0.46	1.08	$1.74 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{10}$	0.74

По данным таблицы среднеквадратичное отклонение будет составлять $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал будет составлять от $1.70 \cdot 10^{11}$ до $1.82 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ так, что известное табличное значение попадает в доверительный интервал, а экспериментальное значение лежит еще ближе к известному.

1.3. Определение нецелой фокусировки

1.3.1. Движение электрона в скрещенных полях

Рассмотрим случай движения электрона с постоянным напряжением, поданным на горизонтально отклоняющие пластины. Выберем ортогональную систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением силы, действующей со стороны электрического поля пластин на электрон, ось Z была сонаправлена магнитному полю внутри соленоида, а единичные орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ этой системы координат образовывали правую тройку (рис. 2).

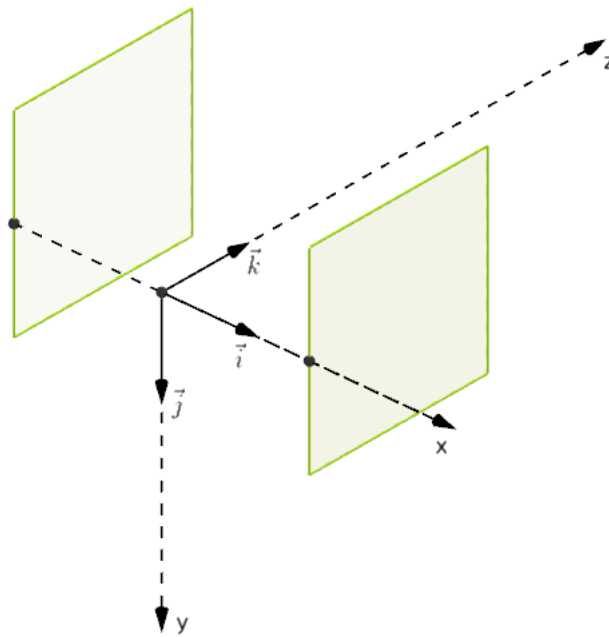


Рис. 2. Система координат, в которой рассматривается движение электрона

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (7)$$

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (8)$$

Пусть $\eta = \frac{e}{m}$. Тогда

$$\vec{a} = \eta\vec{E} + \eta(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (9)$$

Разложим \vec{a} , \vec{v} , \vec{B} и \vec{E} по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \quad (10)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \quad (11)$$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad (12)$$

$$\vec{B} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \quad (13)$$

Разложим векторное произведение $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y) \vec{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \vec{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \vec{k} \quad (14)$$

Запишем второй закон Ньютона с учетом (14) в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \eta E_x + \eta(v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \eta E_y + \eta(v_z B_x - v_x B_z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \eta E_z + \eta(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (15)$$

Обозначим $\omega = \eta B$. Учитывая, что $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $E = E_x$ и $B = B_z$, перепишем систему (15):

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Решим дифференциальные уравнения:

$$dv_y = -\omega v_x dt \quad (17)$$

$$\int dv_y = - \int \omega v_x dt \quad (18)$$

$$v_y = -\omega v_x t + C \quad (19)$$

Но по начальным условиям $v_y(t=0) = 0$, $v_x(t=0) = 0$. Тогда $C = 0$. Подставим $v_y = -\omega v_x t$ в уравнение системы (16):

$$\frac{dV_x}{dt} = \eta E - \omega^2 x \quad (20)$$

Это уравнение является уравнением гармонического осциллятора и имеет известное решение:

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} \quad (21)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (22)$$

Найдем A и ϕ_0 из начальных условий $v_x(t=0) = 0, x(t=0) = 0$:

$$\begin{cases} \begin{cases} A \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} = 0 \\ -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = 0 \end{cases} \\ A \geq 0 \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi \end{cases} \quad (23)$$

Решением (23) будет $\phi_0 = \pi$ и $A = \eta \frac{E}{\omega^2}$. Тогда можем записать уравнение $x(t)$:

$$x(t) = \eta \frac{E}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (24)$$

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = \eta \frac{E}{\omega} \sin \omega t \quad (25)$$

Так как $\frac{dy}{dt} = -\omega x$, то $dy = -\omega \eta \frac{E}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) dt$, и:

$$y(t) = \eta \frac{E}{\omega^2} (\sin \omega t - \omega t) \quad (26)$$

$$v_y(t) = \eta \frac{E}{\omega} (\cos \omega t - 1) \quad (27)$$

Данные уравнения координат являются параметрическим уравнением циклоиды: в скрещенных полях электрон движется по плоской траектории.

Обозначим длину пластин L . Из уравнения (16) ($\frac{dv_z}{dt} = 0$) следует, что скорость v_z постоянна. Тогда время τ пролета сквозь пластины будет выражаться как:

$$\tau = \frac{L}{v_z} \quad (28)$$

Запишем формулу ларморовского радиуса, по которому электрон будет обращаться по вылете из пластин:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{v_{\perp}}{\eta B} = \frac{v_{\perp}}{\omega} \quad (29)$$

Где

$$v_{\perp} = \sqrt{v_y(\tau)^2 + v_x(\tau)^2} \quad (30)$$

Итак, можем считать известными координаты и модуль скорости (в плоскости XY) электрона. Найдем направление скорости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{v_x(\tau)}{v_y(\tau)} \right| = \left| \frac{\sin \omega \tau}{\cos \omega \tau - 1} \right| \quad (31)$$

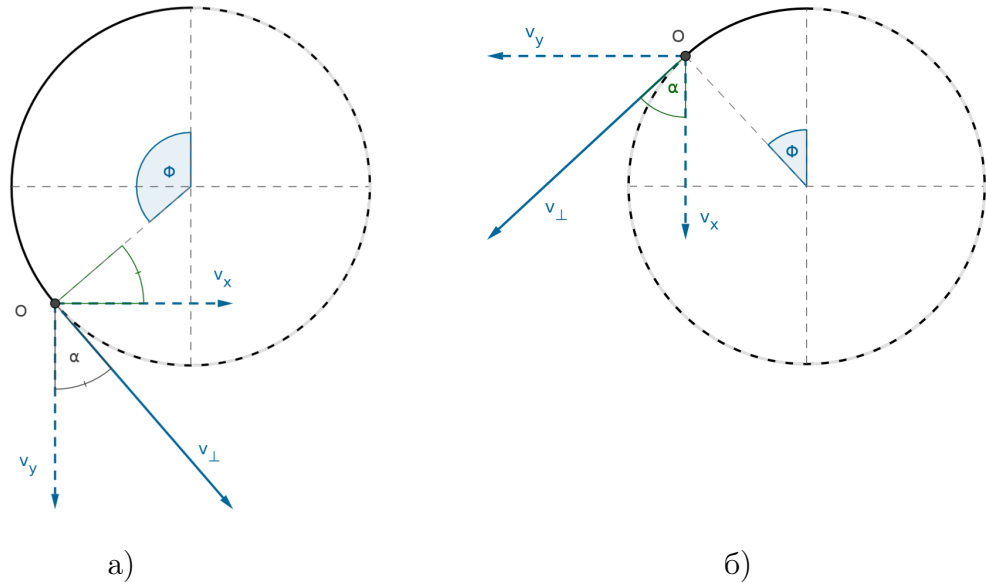


Рис. 3. Вылет электрона из скрещенных полей в точке O . а) горизонтально отклоняющие пластины б) вертикально отклоняющие пластины

Также отметим, что электрическое поле является низкочастотным, и за время пролета частицы в нем поле можно считать постоянным. Тогда применимы формулы (24-31)

Отсюда следует что угол, под которым вылетает электрон из скрещенных полей от текущего напряжения $E(\tau)$ на пластинах не зависит.

От напряжения зависит модуль скорости, а значит, и величина ларморовского радиуса.

Вылетая из скрещенных полей в момент времени τ , электрон летит со скоростью v_{\perp} в плоскости XY и под действием магнитного поля вращается по окружности (также в плоскости XY)

Мгновенный центр окружности при $t = \tau$ будет лежать на нормали к вектору скорости.

Тогда можно найти угол Φ – начальную фазу, набранную в скрещенных полях, из геометрии траектории - это будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Мы рассмотрели случай для горизонтально отклоняющих пластин ($E = E_x$). Понятно, что для вертикально отклоняющих пластин верно все тоже самое, но оси повернутся на $\frac{\pi}{2}$ (угол Φ будет острым) и формулы скоростей v_x и v_y инвертируются.

Таким образом, для горизонтально отклоняющих пластин

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} \right| = \left| \frac{\cos \omega \tau - 1}{\sin \omega \tau} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (32)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (33)$$

Число фокусировок можно определить как $n = \frac{\gamma}{2\pi}$, где γ – весь набранный электроном угол.

Тогда

$$n = \frac{\Phi + \omega \frac{l}{v_z}}{2\pi} \quad (34)$$

где l – расстояние от конца пластин до экрана.