

Отчет по лабораторной работе №27
Определение отношения заряда электрона к его
массе

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф. Г.

Принял:
Менсов С. Н.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

1	Описание лабораторной работы	2
2	Измерение удельного заряда электрона методом отклонения зем- ным магнитным полем	3
3	Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пуч- ка продольным магнитным полем соленоида	6
4	Определение нецелой фокусировки	8
4.1	Движение электрона в скрещенных полях	8

1. Описание лабораторной работы

Цель работы: изучение характера движения заряженных частиц в однородном магнитном поле и определение удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом отклонения в известных полях.

Оборудование: экспериментальная установка (ЭЛТ и блок питания), коммутатор, амперметр постоянного тока, источник питания постоянного тока

Приборные погрешности: $\Delta U = 62.6$ В, $\Delta I = 0.015$ А, $\Delta h = 0.01$ м.

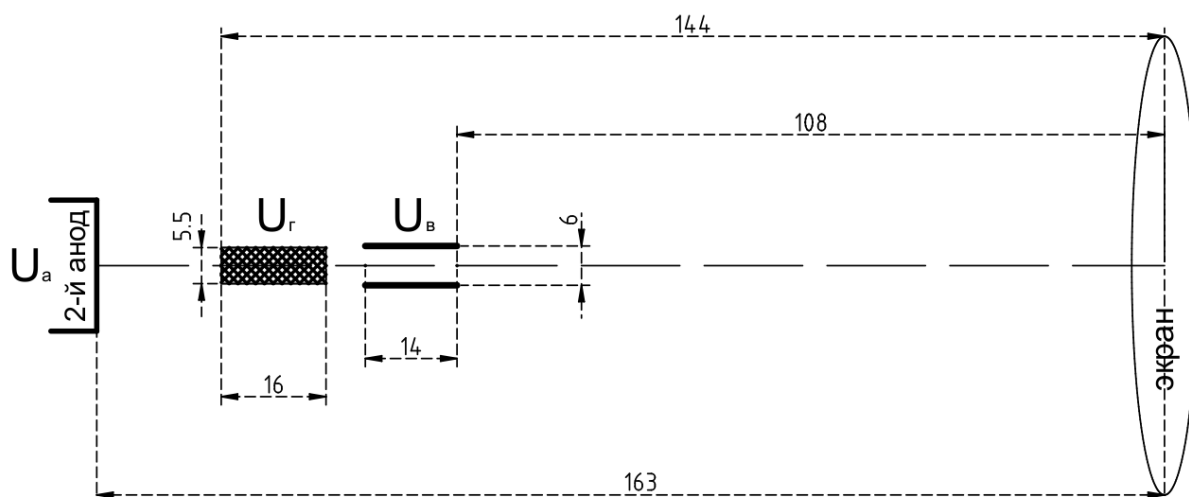


Рис. 1. Масштабный чертеж части лабораторной установки

На рисунке (1) изображена лабораторная установка, начиная с второго анода электронной пушки. Напряжение второго анода U_a регулируется в пределах $700 \div 1700$ вольт, изменяя продольную скорость электронов на вылете из пушки.

На отклоняющие пластины подается (не одновременно во время опытов) переменное напряжение U_v (U_r) с эффективным значением 75 вольт и частотой 50 Гц.

2. Измерение удельного заряда электрона методом отклонения земным магнитным полем

В данном эксперименте ЭЛТ выставлялась так, чтобы её продольная ось была перпендикулярна с линиями магнитного поля земли: известна горизонтальная составляющая поля $B_z = 0.186$ гаусса $= 1.86 \cdot 10^{-5}$ Тл и наклонение $\alpha = 70^\circ$. Отсюда напряженность магнитного поля поперек ЭЛТ составляет $B = \frac{B_z}{\cos(\alpha)} = 6.36 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Выберем систему координат так, чтобы ноль совпадал со вторым анодом, ось x была направлена в экран, а магнитное поле земли уходило в плоскость системы координат.

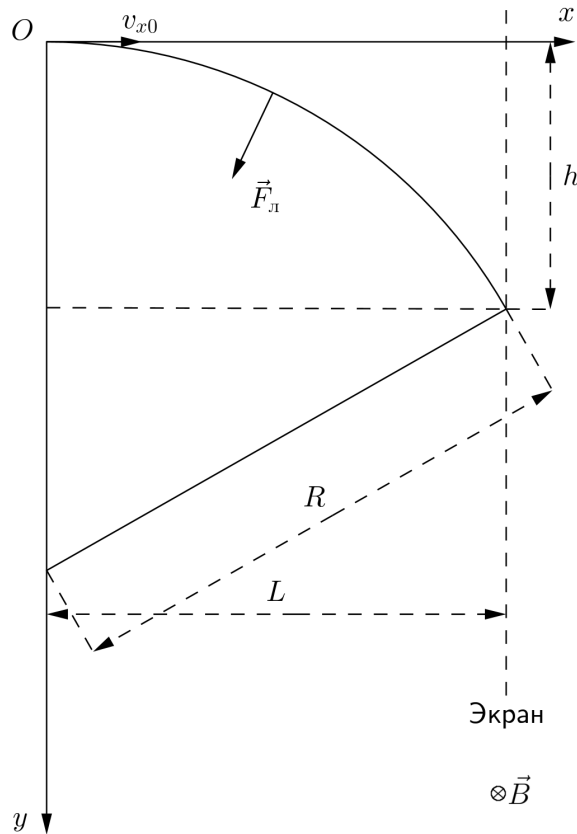


Рис. 2. Отклонение электрона магнитным полем Земли

Если на анод ЭЛТ подавать напряжение U_a , то из него электроны будут вылетать с кинетической энергией

$$\frac{mv_{x0}^2}{2} = U_a \cdot e$$

Обозначим удельный заряд $\frac{e}{m} = \eta$. Тогда

$$v_{x0} = \sqrt{2U_a\eta} \quad (1)$$

На заряд будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости электрона, закручивающая его по окружности радиуса R .

$$F_{\text{л}} = ma \quad (2)$$

$$evB_3 = \frac{mv_{x0}^2}{R} \quad (3)$$

Отсюда

$$\eta = \frac{v_{x0}}{RB_3} \quad (4)$$

Радиус можно найти по отклонению проецируемого на экран ЭЛТ пятна h .

Выразим радиус из геометрии рисунка (см. Рис. 2):

$$R^2 = (R - h)^2 + L^2 \quad (5)$$

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + L^2 \quad (6)$$

$$h = \frac{h^2 + L^2}{2R} \quad (7)$$

$$R = \frac{h^2 + L^2}{2h} \quad (8)$$

$$(9)$$

При $h \ll L$

$$R = \frac{L^2}{2h} \quad (10)$$

Подставляя в (4) радиус и скорость из (1), получаем приближенную формулу (при $h \ll L$):

$$\eta = \frac{8h^2 U_a}{B_3^2 L^4} \quad (11)$$

Рассчитаем погрешность формулы (11):

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta h}{h} + \frac{\Delta U}{U_a} \quad (12)$$

Проведем несколько опытов, используя противоположные направления магнитного поля и разные значения U_a .

По данным измерений среднеквадратичное отклонение составляет $5.11 \cdot 10^{10}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал $\frac{e}{m}$ лежит от $1.06 \cdot 10^{11}$ до $2.08 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ с точностью до порядка.

$U_a, \text{ В}$	$\alpha, \text{ град}$	$h, \text{ м}$	$\frac{e}{m} \text{ (СИ)}$	$\varepsilon(\frac{e}{m})$	$\Delta(\frac{e}{m})$
1300	+90	0.007	$1.78 \cdot 10^{11}$	0.28	$5.10 \cdot 10^{10}$
	-90	0.006	$1.31 \cdot 10^{11}$	0.33	$4.37 \cdot 10^{10}$
1700	+90	0.005	$1.19 \cdot 10^{11}$	0.40	$4.76 \cdot 10^{10}$
	-90	0.0065	$2.01 \cdot 10^{11}$	0.30	$6.19 \cdot 10^{10}$

Таблица 1. Результаты прямых, косвенных измерений и расчетов

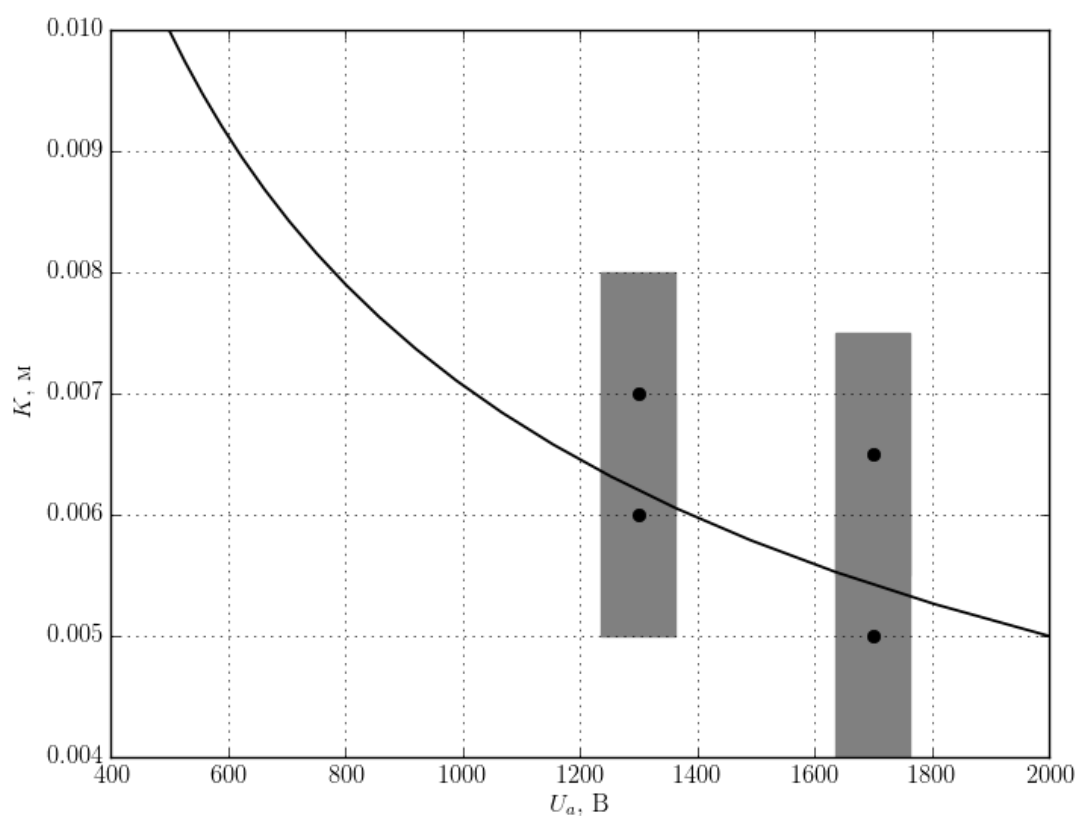


Рис. 3. Теоретическая зависимость отклонения пятна от напряжения и реальные результаты с прямоугольниками ошибок

3. Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пучка продольным магнитным полем соленоида

Если вдоль оси трубки создать постоянное магнитное поле B_z , которое можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \cdot n_0 \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8400 \cdot I \quad (13)$$

то электронный пучок, вылетевший из электронной пушки с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2 \cdot U_a \cdot \eta}$, пройдет в ЭЛТ в сонаправленном продольной оси (оZ) ЭЛТ магнитном поле напряженностью $B = \mu_0 n I$.

Для того, чтобы поле B_x действовало на электрон, необходимо, чтобы его скорость имела поперечную составляющую, перпендикулярную v_z . В этом случае в плоскости XoY электрон под действием силы будет равномерно двигаться по окружности, радиус которой определится из второго закона динамики:

$$m \frac{v_0^2}{R} = e v_0 B_z \quad (14)$$

$$R = \frac{m v_0}{e B_z} \quad (15)$$

На некоем начальном участке пути, меньшем на порядок относительно длины трубки, пучок проходит сквозь отклоняющие пластины с напряженностью электрического поля $E = \frac{U_{откл}}{d}$, где d — расстояние между пластинами.

Если пренебречь тем, что поля скрещенные, можно предположить, что в пластинах пучок приобретает произвольную скорость, лежащую в плоскость (XoY), перпендикулярной oZ . Ясно, что он будет закручиваться магнитным полем, а так как проекция начальной скорости $v_0 z$ не изменилась, то его траектория будет представлять собой винтовую линию, нанесенную на цилиндр радиуса R , и электроны пучка будут двигаться по спирали и через время $nT = \tau$ пересекать ось oZ .

Обозначим $\eta = \frac{e}{m}$ и $\omega = \eta B_z$ (циклотронная частота). Тогда можем переписать формулу как

$$R = \frac{v_0}{\omega} \quad (16)$$

Решив несколько систем уравнений:

$$\begin{cases} nT_1 v_{0z} = l \\ (n+1)T_2 v_{0z} = l \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\eta B_1} \\ T_2 = \frac{2\pi}{\eta B_2} \end{cases}$$

Число фокусировок находится как

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{B_1}{B_2 - B_1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1}$$

А удельный заряд определяется как

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{l^2 (B_2 - B_1)^2}$$

через два опыта с последовательными n -й и $n+1$ фокусировками.

Нужно найти первое такое пересечение на экране ЭЛТ (n фокусировок) и увеличивать ток на соленоиде (увеличивать напряженность магнитного поля) до тех пор, пока не получим на экране ($n+1$ фокусировку).

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{(l \cdot \mu_0 \cdot n_0)^2 (I_2 - I_1)^2}$$

Рассчитаем погрешность формулы:

$$\Delta(\eta) = \frac{8\pi^2 (4U_a \Delta I (I_2 - I_1) + \Delta U (I_2 - I_1)^2)}{\mu_0^2 d^2 l^2 n_0^2 (I_2 - I_1)^4}$$

Где d — коэффициент перевода в систему СИ единиц тока.

Провели ряд экспериментов:

U_a , В	I_1 , А	I_2 , А	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\Delta(\frac{e}{m})$	n
1200	0.6	1.14	$1.78 \cdot 10^{11}$	$0.96 \cdot 10^{10}$	1.11
1000	0.54	1.04	$1.73 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{10}$	1.08
1000	0.5	1.08	$1.81 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{10}$	0.86
1100	0.46	1.08	$1.74 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{10}$	0.74

По данным таблицы среднеквадратичное отклонение будет составлять $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал будет составлять от $1.70 \cdot 10^{11}$ до $1.82 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ так, что известное табличное значение попадает в доверительный интервал, а экспериментальное значение лежит еще ближе к известному.

4. Определение нецелой фокусировки

4.1. Движение электрона в скрещенных полях

Рассмотрим случай движения электрона с постоянным напряжением, поданным на горизонтально отклоняющие пластины. Выберем ортогональную систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением силы, действующей со стороны электрического поля пластин на электрон, ось Z была сонаправлена магнитному полю внутри соленоида, а единичные орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ этой системы координат образовывали правую тройку (рис. 4).

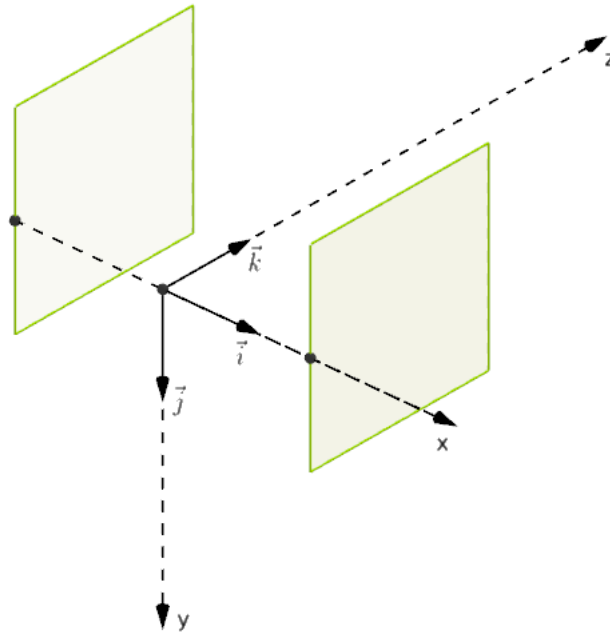


Рис. 4. Система координат, в которой рассматривается движение электрона

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (17)$$

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (18)$$

Пусть $\eta = \frac{e}{m}$. Тогда

$$\vec{a} = \eta\vec{E} + \eta(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (19)$$

Разложим \vec{a} , \vec{v} , \vec{B} и \vec{E} по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \quad (20)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \quad (21)$$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad (22)$$

$$\vec{B} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \quad (23)$$

Разложим векторное произведение $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y) \vec{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \vec{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \vec{k} \quad (24)$$

Запишем второй закон Ньютона с учетом (24) в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \eta E_x + \eta(v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \eta E_y + \eta(v_z B_x - v_x B_z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \eta E_z + \eta(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (25)$$

Обозначим $\omega = \eta B$. Учитывая, что $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $E = E_x$ и $B = B_z$, перепишем систему (25):

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Решим дифференциальные уравнения:

$$dv_y = -\omega v_x dt \quad (27)$$

$$\int dv_y = - \int \omega v_x dt \quad (28)$$

$$v_y = -\omega v_x t + C \quad (29)$$

Но по начальным условиям $v_y(t=0) = 0$, $v_x(t=0) = 0$. Тогда $C = 0$. Подставим $v_y = -\omega v_x t$ в уравнение системы (26):

$$\frac{dV_x}{dt} = \eta E - \omega^2 x \quad (30)$$

Это уравнение является уравнением гармонического осциллятора и имеет известное решение:

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} \quad (31)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (32)$$

Найдем A и ϕ_0 из начальных условий $v_x(t=0) = 0, x(t=0) = 0$:

$$\begin{cases} A \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{\eta E}{\omega^2} = 0 \\ -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = 0 \\ A \geq 0 \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi \end{cases} \quad (33)$$

Решением (33) будет $\phi_0 = \pi$ и $A = \eta \frac{E}{\omega^2}$. Тогда можем записать уравнение $x(t)$:

$$x(t) = \eta \frac{E}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (34)$$

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = \eta \frac{E}{\omega} \sin \omega t = \frac{E}{B} \sin \omega t \quad (35)$$

Так как $\frac{dy}{dt} = -\omega x$, то $dy = -\omega \eta \frac{E}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) dt$, и:

$$y(t) = \eta \frac{E}{\omega^2} (\sin \omega t - \omega t) \quad (36)$$

$$v_y(t) = \eta \frac{E}{\omega} (\cos \omega t - 1) = \frac{E}{B} (\cos \omega t - 1) \quad (37)$$

Данные уравнения координат являются параметрическим уравнением частного случая трохоиды — циклоиды: то есть в конфигурации скрещенных полей электрон движется по плоской траектории [1, 2, 3].

Обозначим длину пластин L . Из уравнения (26) ($\frac{dv_z}{dt} = 0$) следует, что скорость v_z постоянна. Тогда время τ пролета сквозь пластины будет выражаться как:

$$\tau = \frac{L}{v_z} \quad (38)$$

Запишем формулу ларморовского радиуса, по которому электрон будет обращаться по вылете из пластин:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{v_{\perp}}{\eta B} = \frac{v_{\perp}}{\omega} \quad (39)$$

Где

$$v_{\perp} = \sqrt{v_y(\tau)^2 + v_x(\tau)^2} \quad (40)$$

Итак, можем считать известными координаты и модуль скорости (в плоскости XY) электрона. Найдём направление скорости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{v_x(\tau)}{v_y(\tau)} \right| = \left| \frac{\sin \omega \tau}{\cos \omega \tau - 1} \right| \quad (41)$$

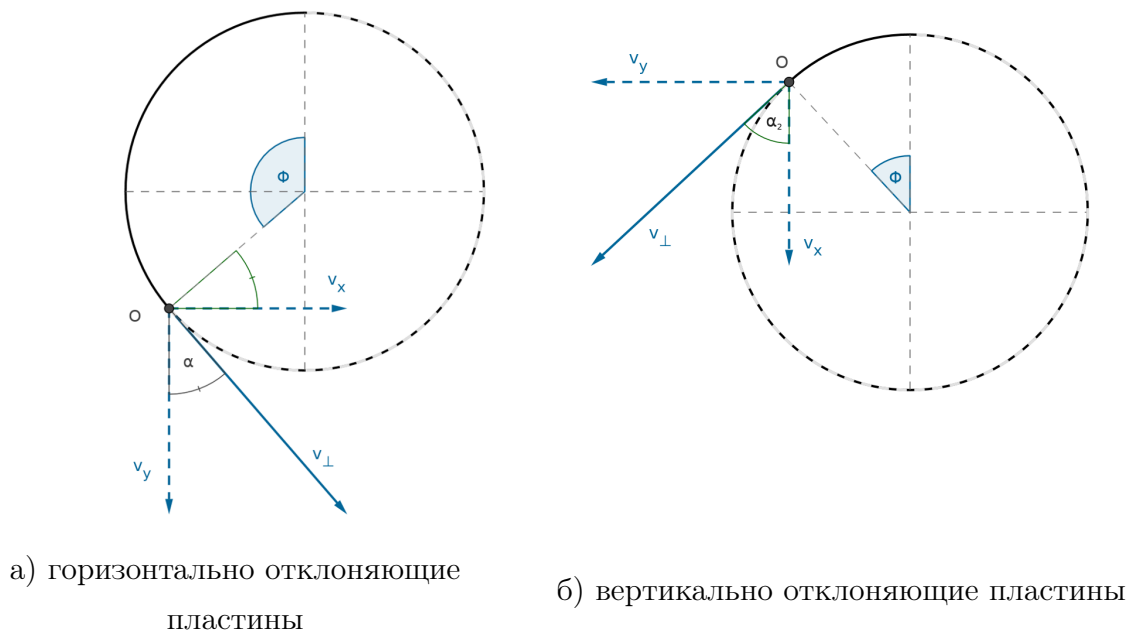


Рис. 5. Вылет электрона из скрещенных полей в точке О.

Также отметим, что электрическое поле является низкочастотным, и за время пролета частицы в нем поле можно считать постоянным. Тогда применимы формулы (34÷41).

Отсюда следует что угол, под которым вылетает электрон из скрещенных полей от текущего напряжения $E(\tau)$ на пластинах не зависит.

От напряжения зависит модуль скорости, а значит, и величина ларморовского радиуса.

Вылетая из скрещенных полей в момент времени τ , электрон летит со скоростью v_{\perp} в плоскости XY и под действием магнитного поля вращается по окружности (также в плоскости XY)

Показательно, что дрейф в скрещенных полях носит универсальный характер - скорость дрейфа не зависит ни от знака заряда частицы, хотя конечно, сам дрейф возможен только при наличии у частицы заряда [4].

Мгновенный центр окружности при $t = \tau$ будет лежать на нормали к вектору скорости.

Тогда можно найти угол Φ – начальную фазу, набранную в скрещенных полях, из геометрии траектории - это будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Мы рассмотрели случай для горизонтально отклоняющих пластин ($E = E_x$). Понятно, что для вертикально отклоняющих пластин верно все тоже самое, но оси повернутся на $\frac{\pi}{2}$ (угол Φ будет острым) и формулы скоростей v_x и v_y инвертируются.

Таким образом, для горизонтально отклоняющих пластин

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} \right| = \left| \frac{\cos \omega \tau - 1}{\sin \omega \tau} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (42)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (43)$$

Число фокусировок можно определить как $n = \frac{\gamma}{2\pi}$, где γ – весь набранный электроном угол.

Тогда

$$n = \frac{\Phi + \omega \frac{l}{v_z}}{2\pi} \quad (44)$$

где l – расстояние от конца пластин до экрана.

Список литературы

- [1] Беллюстин С. В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. С. 81–87.
- [2] Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1972. С. 102–104.
- [3] Андреев В. А. Электричество, магнетизм, колебания и волны: учебное пособие для выполнения лабораторных работ. Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 87–88.
- [4] Раданцев В. Ф. Электронные свойства полупроводниковых наноструктур. Екб.: УрГУ, 2008. С. 286–290.