

Отчет по лабораторной работе №27

**Определение отношения заряда электрона к его
массе**

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф. Г.

Принял:
Менсов С. Н.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

1	Описание лабораторной установки	2
2	Измерение удельного заряда электрона методом отклонения зем- ным магнитным полем	3
3	Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пуч- ка продольным магнитным полем соленоида	6
4	Определение нецелой фокусировки	9
4.1	Появление нецелой фокусировки	9
4.2	Движение электрона в скрещенных полях	9
4.3	Момент вылета электрона из скрещенных полей	12
	Заключение	15
	Список литературы	16

1. Описание лабораторной установки

Цель работы: изучение характера движения заряженных частиц в однородном магнитном поле и определение удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом отклонения в известных полях.

Оборудование: экспериментальная установка (ЭЛТ и блок питания), коммутатор, амперметр постоянного тока, источник питания постоянного тока

Приборные погрешности: $\Delta U = 62.6$ В, $\Delta I = 0.015$ А, $\Delta h = 0.01$ м.

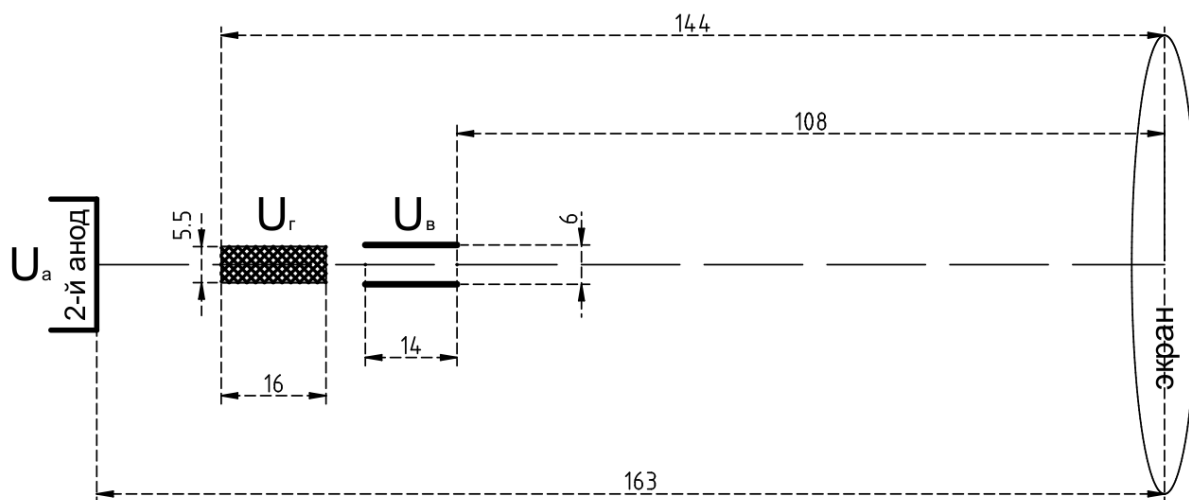


Рис. 1. Масштабный чертеж части лабораторной установки

На рисунке (1) изображена лабораторная установка, начиная с второго анода электронной пушки. Напряжение второго анода U_a регулируется в пределах $700 \div 1700$ вольт, изменяя продольную скорость электронов на вылете из пушки.

На отклоняющие пластины подается (не одновременно во время опытов) переменное напряжение U_v (U_r) с эффективным значением 75 вольт и частотой 50 Гц.

Вокруг трубки намотан соленоид с диаметром 7 см, плотность намотки $n_0 = 8400$ вит/м.

2. Измерение удельного заряда электрона методом отклонения земным магнитным полем

В данном эксперименте ЭЛТ выставлялась так, чтобы её продольная ось была перпендикулярна с линиями магнитного поля Земли: известна горизонтальная составляющая поля $B_z = 0.186$ гаусса $= 1.86 \cdot 10^{-5}$ Тл и наклонение $\alpha = 70^\circ$. Отсюда напряженность магнитного поля поперек ЭЛТ составляет $B = \frac{B_z}{\cos(\alpha)} = 6.36 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Выберем систему координат так, чтобы ноль совпадал со вторым анодом, ось x была направлена в экран, а магнитное поле Земли уходило в плоскость системы координат.

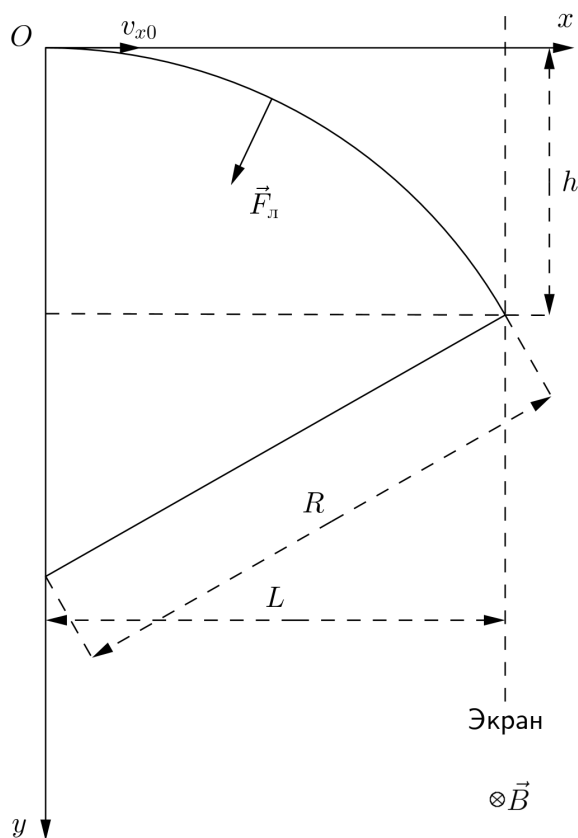


Рис. 2. Отклонение электрона магнитным полем Земли

Если на анод ЭЛТ подавать напряжение U_a , то из него электроны будут вылетать с кинетической энергией

$$\frac{mv_{x0}^2}{2} = U_a \cdot e \quad (1)$$

Обозначим удельный заряд $\frac{e}{m} = \eta$. Тогда

$$v_{x0} = \sqrt{2U_a\eta} \quad (2)$$

На заряд будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости электрона, закручивающая его по окружности радиуса R .

$$F_{\text{л}} = ma \quad (3)$$

$$ev_{x0}B_3 = \frac{mv_{x0}^2}{R} \quad (4)$$

Отсюда

$$\eta = \frac{v_{x0}}{RB_3} \quad (5)$$

Радиус можно найти по отклонению проецируемого на экран ЭЛТ пятна h .

Выразим радиус из геометрии рисунка (см. Рис. 2):

$$R^2 = (R - h)^2 + L^2 \quad (6)$$

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + L^2 \quad (7)$$

$$h = \frac{h^2 + L^2}{2R} \quad (8)$$

$$R = \frac{h^2 + L^2}{2h} \quad (9)$$

При $h \ll L$

$$R = \frac{L^2}{2h} \quad (10)$$

Подставляя в (5) радиус и скорость из (2), получаем приближенную формулу (при $h \ll L$):

$$\eta = \frac{8h^2U_a}{B_3^2L^4} \quad (11)$$

Рассчитаем погрешность формулы (11):

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta h}{h} + \frac{\Delta U}{U_a} \quad (12)$$

Проведем несколько опытов, используя противоположные направления магнитного поля и разные значения U_a .

U_a , В	α , град	h , м	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\varepsilon(\frac{e}{m})$	$\Delta(\frac{e}{m})$
1300	+90	0.007	$1.78 \cdot 10^{11}$	0.28	$5.10 \cdot 10^{10}$
	-90	0.006	$1.31 \cdot 10^{11}$	0.33	$4.37 \cdot 10^{10}$
1700	+90	0.005	$1.19 \cdot 10^{11}$	0.40	$4.76 \cdot 10^{10}$
	-90	0.0065	$2.01 \cdot 10^{11}$	0.30	$6.19 \cdot 10^{10}$

Таблица 1. Результаты прямых, косвенных измерений и расчетов

По данным измерений среднеквадратичное отклонение составляет $5.11 \cdot 10^{10}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал $\frac{e}{m}$ лежит от $1.06 \cdot 10^{11}$ до $2.08 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ с точностью до порядка.

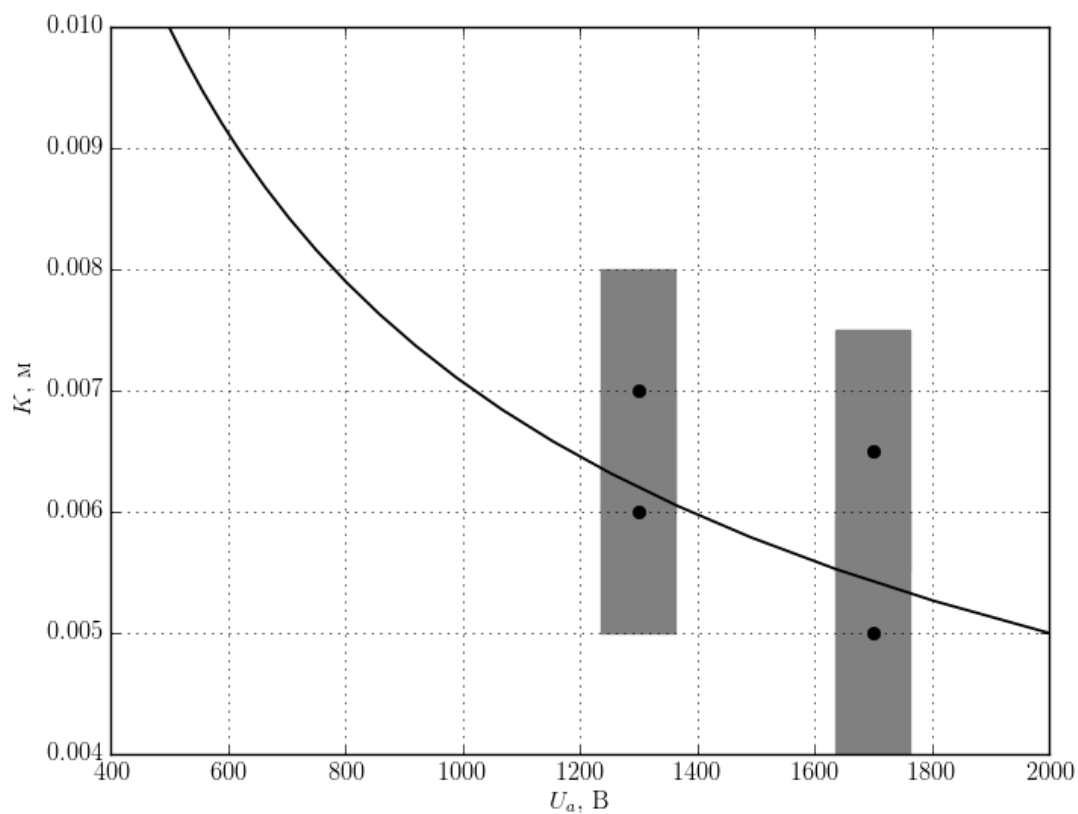


Рис. 3. Теоретическая зависимость отклонения пятна от напряжения и реальные результаты с прямоугольниками ошибок

3. Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пучка продольным магнитным полем соленоида

Если вдоль оси трубки создать постоянное магнитное поле B_z , которое можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \cdot n_0 \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8400 \cdot I \quad (13)$$

где $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, то электронный пучок, вылетевший из электронной пушки с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2 \cdot U_a \cdot \eta}$, пройдет в ЭЛТ в сонаправленном продольной оси ЭЛТ магнитном поле напряженностью $B = \mu_0 n I$.

Для того, чтобы поле B_z действовало на электрон, необходимо, чтобы его скорость имела поперечную составляющую, перпендикулярную v_z . В этом случае в плоскости XOY электрон под действием силы будет равномерно двигаться по окружности, радиус которой определится из второго закона динамики:

$$m \frac{v_0^2}{R} = e v_0 B_z \quad (14)$$

$$R = \frac{m v_0}{e B_z} \quad (15)$$

На некоем начальном участке пути, меньшем на порядок относительно длины трубки, пучок проходит сквозь отклоняющие пластины с напряженностью электрического поля $E = \frac{U_{откл}}{d}$, где d — расстояние между пластинами.

Если пренебречь тем, что поля скрещенные, можно предположить, что в пластинах пучок приобретает произвольную скорость, лежащую в плоскости (XY), перпендикулярной Z . Ясно, что он будет закручиваться магнитным полем, а так как проекция начальной скорости $v_0 z$ не изменилась, то его траектория будет представлять собой винтовую линию, нанесенную на цилиндр радиуса R , и электроны пучка будут двигаться по спирали и через время $nT = \tau$ пересекать ось Z .

Обозначим $\eta = \frac{e}{m}$ и $\omega = \eta B_z$ (циклотронная частота). Тогда можем переписать формулу как

$$R = \frac{v_0}{\omega} \quad (16)$$

Решив несколько систем уравнений:

$$\begin{cases} nT_1 v_{0z} = l \\ (n+1)T_2 v_{0z} = l \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\eta B_1} \\ T_2 = \frac{2\pi}{\eta B_2} \end{cases} \quad (18)$$

Число фокусировок находится как

$$\frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{B_1}{B_2 - B_1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1} \quad (19)$$

Рассчитаем погрешность определения фокусировки:

$$\Delta n = \frac{I_1}{I_2 - I_1} \cdot \left(\frac{\Delta I}{I_1} + \frac{2\Delta I}{I_2 - I_1} \right) \quad (20)$$

А удельный заряд определяется как

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{l^2 (B_2 - B_1)^2} \quad (21)$$

через два опыта с последовательными (n) -й и $(n+1)$ -й фокусировками.

Нужно найти первое такое пересечение на экране ЭЛТ (n фокусировок) и увеличивать ток на соленоиде (увеличивать напряженность магнитного поля) до тех пор, пока не получим на экране $(n+1)$ фокусировок).

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{(l \cdot \mu_0 \cdot n_0)^2 (I_2 - I_1)^2} \quad (22)$$

Рассчитаем погрешность формулы:

$$\Delta(\eta) = \frac{8\pi^2 (4U_a \Delta I (I_2 - I_1) + \Delta U (I_2 - I_1)^2)}{\mu_0^2 d^2 l^2 n_0^2 (I_2 - I_1)^4} \quad (23)$$

Где d — коэффициент перевода в систему СИ единиц тока.

Провели ряд экспериментов:

По данным измерений среднеквадратичное отклонение будет составлять $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$.

$U_a, \text{ В}$	$I_1, \text{ А}$	$I_2, \text{ А}$	$\frac{e}{m} \text{ (СИ)}$	$\Delta(\frac{e}{m})$	n
1200	0.6	1.14	$1.78 \cdot 10^{11}$	$0.96 \cdot 10^{10}$	1.11
1000	0.54	1.04	$1.73 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{10}$	1.08
1000	0.5	1.08	$1.81 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{10}$	0.86
1100	0.46	1.08	$1.74 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{10}$	0.74

Таблица 2. Экспериментальные данные двух фокусировок и их расчеты

Доверительный интервал будет составлять от $1.70 \cdot 10^{11}$ до $1.82 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ так, что известное табличное значение попадает в доверительный интервал, а экспериментальное значение лежит ближе к эталонному, нежели при определении методом отклонения в известных полях.

4. Определение нецелой фокусировки

4.1. Появление нецелой фокусировки

При расчете количества фокусировок по формуле (19), оказывается, что расчетное n нецелое, что не соответствует наблюдаемой картине и требует теоретического обоснования.

Объяснение этому эффекту можно найти в пренебреженном в расчетах участке траектории электрона, где на него действуют два скрещенных поля - постоянное магнитное и переменное электрическое.

4.2. Движение электрона в скрещенных полях

Рассмотрим случай движения электрона с **постоянным напряжением**, поданным на горизонтально отклоняющие пластины. Выберем ортогональную систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением силы, действующей со стороны электрического поля пластин на электрон, ось Z была сонаправлена магнитному полю внутри соленоида, а единичные орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ этой системы координат образовывали правую тройку (рис. 4).

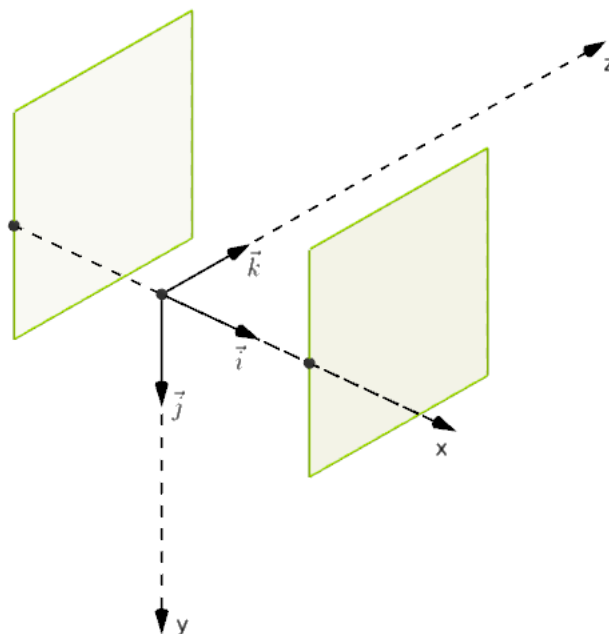


Рис. 4. Система координат, в которой рассматривается движение электрона

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (24)$$

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (25)$$

Пусть $\eta = \frac{e}{m}$. Тогда

$$\vec{a} = \eta\vec{E} + \eta(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (26)$$

Разложим \vec{a} , \vec{v} , \vec{B} и \vec{E} по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \quad (27)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \quad (28)$$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad (29)$$

$$\vec{B} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \quad (30)$$

Разложим векторное произведение $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y) \vec{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \vec{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \vec{k} \quad (31)$$

Запишем второй закон Ньютона с учетом (31) в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \eta E_x + \eta(v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \eta E_y + \eta(v_z B_x - v_x B_z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \eta E_z + \eta(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (32)$$

Обозначим $\omega = \eta B$. Учитывая, что $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $E = E_x$ и $B = B_z$, перепишем систему (32):

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Продифференцируем $\frac{dv_x}{dt}$:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega \frac{dv_y}{dt} \quad (34)$$

И подставим значение $\frac{dv_y}{dt}$ из системы (33):

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x \quad (35)$$

Полученное уравнение (35) является уравнением гармонического осциллятора и имеет известное решение:

$$v_x = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \quad (36)$$

Где A и ϕ_0 – неизвестные константы.

Решим первое уравнение системы (33):

$$\frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \quad (37)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0) \quad (38)$$

$$A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0) = \eta E + \omega v_y \quad (39)$$

$$v_y = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{E}{B} \quad (40)$$

Найдем A и ϕ_0 из начальных условий $v_x(t=0) = 0, v_y(t=0) = 0$:

$$\begin{cases} \begin{cases} A \cdot \sin \phi_0 = 0 \\ A \cdot \cos \phi_0 - \frac{E}{B} = 0 \end{cases} \\ A \geq 0 \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi \end{cases} \quad (41)$$

Решением (41) будет $\phi_0 = 0$ и $A = \frac{E}{B}$. Тогда можем записать уравнения скоростей электрона в данной конфигурации скрещенных полей:

$$v_x = \frac{E}{B} \cdot \sin \omega t \quad (42)$$

$$v_y = \frac{E}{B} \cdot (\cos \omega t - 1) \quad (43)$$

Отсюда можем найти уравнения движения, проинтегрировав скорости:

$$\int_0^{x(t)} v_x dt = \frac{E}{B} \int_0^t \sin \omega t dt \quad (44)$$

$$x = -\frac{E}{\omega B} \cos \omega t \Big|_0^t \quad (45)$$

$$x = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t) \quad (46)$$

$$\int_0^{y(t)} v_y dt = \frac{E}{B} \int_0^t (\cos \omega t - 1) dt \quad (47)$$

$$y = \frac{E}{\omega B} (\sin \omega t - \omega t) \quad (48)$$

Данные уравнения координат являются параметрическим уравнением частного случая трохоиды — циклоиды: то есть в конфигурации скрещенных полей электрон движется по плоской траектории [1, 2, 3].

4.3. Момент вылета электрона из скрещенных полей

Обозначим длину пластин L . Из уравнения (33) ($\frac{dv_z}{dt} = 0$) следует, что скорость v_z постоянна. Тогда время τ пролета сквозь пластины будет выражаться как:

$$\tau = \frac{L}{v_z} \quad (49)$$

Запишем формулу ларморовского радиуса, по которому электрон будет обращаться по вылете из пластин:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{v_{\perp}}{\eta B} = \frac{v_{\perp}}{\omega} \quad (50)$$

Где

$$v_{\perp} = \sqrt{v_y(\tau)^2 + v_x(\tau)^2} \quad (51)$$

Итак, можем считать известными координаты и модуль скорости (в плоскости XY) электрона. Найдем направление скорости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{v_x(\tau)}{v_y(\tau)} \right| = \left| \frac{\sin \omega \tau}{\cos \omega \tau - 1} \right| \quad (52)$$

Также отметим, что электрическое поле является низкочастотным, и за время пролета частицы в нем поле можно считать постоянным. Тогда применимы формулы (35÷52).

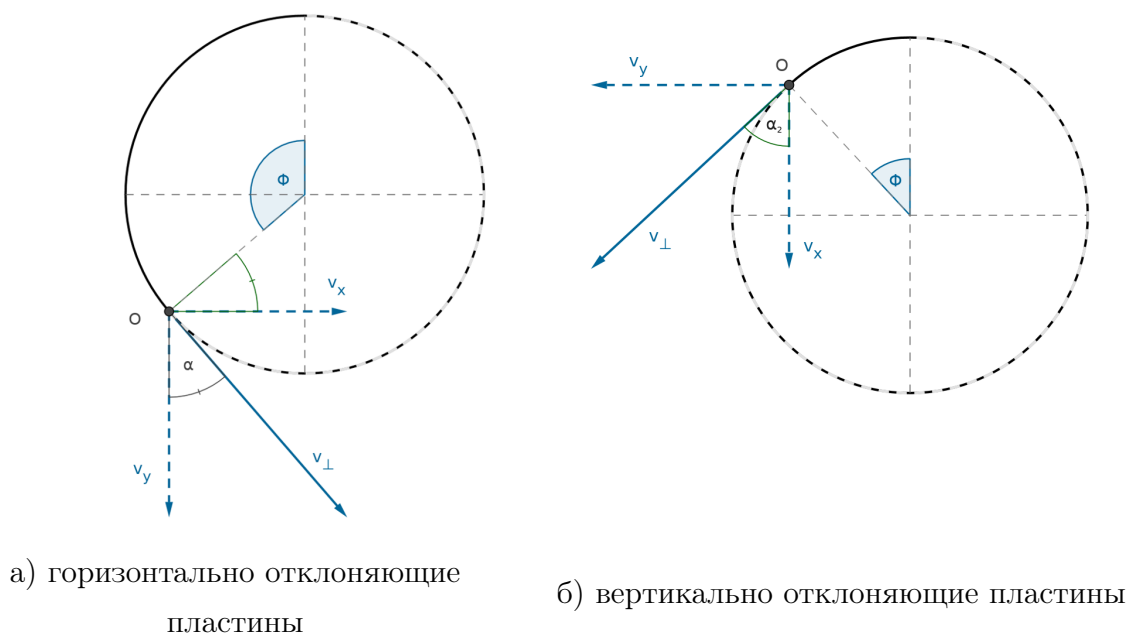


Рис. 5. Вылет электрона из скрещенных полей в точке О.

Отсюда следует что угол, под которым вылетает электрон из скрещенных полей от текущего напряжения $E(\tau)$ на пластинах не зависит.

От напряжения зависит модуль скорости, а значит, и величина ларморовского радиуса.

Вылетая из скрещенных полей в момент времени τ , электрон летит со скоростью v_{\perp} в плоскости XU и под действием магнитного поля вращается по окружности (также в плоскости XU)

Мгновенный центр окружности при $t = \tau$ будет лежать на нормали к вектору скорости.

Тогда можно найти угол Φ – угол поворота, набранный в скрещенных полях, из геометрии траектории - это будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Мы рассмотрели случай для горизонтально отклоняющих пластин ($E = E_x$). Понятно, что для вертикально отклоняющих пластин уравнения почти не изменятся: оси повернутся на $\frac{\pi}{2}$ (угол Φ будет острым), а $\tan \alpha$ поменяется на $\cotg \alpha$.

Таким образом, для горизонтально отклоняющих пластин

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left| \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} \right| = \left| \frac{\cos \omega \tau - 1}{\sin \omega \tau} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (53)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (54)$$

Число фокусировок можно определить как $n = \frac{\gamma}{2\pi}$, где γ – весь набранный электроном угол.

Тогда

$$n = \frac{\Phi + \omega \frac{l}{v_z}}{2\pi} \quad (55)$$

где l – расстояние от конца пластин до экрана.

Расчеты приведены в таблице ниже.

U_a , В	I_1 , А	I_2 , А	α , рад	n , эксперимент	Δn	n , теория
1200	0.6	1.14	1.193	1.11	0.1	1.21
1000	0.54	1.04	1.198	1.08	0.1	1.15
1000	0.5	1.08	1.176	0.86	0.07	0.94
1100	0.46	1.08	1.225	0.74	0.07	0.81

Таблица 3. Расчет фокусировок двумя методами

Заключение

При выполнении работы были изучены различные методы определения удельного заряда электрона (табличное значение — $1.74 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$), движение электрона в однородных постоянных электрическом и магнитном полях.

Проведена серия опытов на определение η при помощи известных полей. В эксперименте в качестве данного поля принималось магнитное поле Земли. Рассчитано среднеквадратичное отклонение метода $0.511 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Также проведена серия опытов на определение η методом магнитной фокусировки, в зарубежной литературе также известного как метод Буша¹.

По данным измерений среднеквадратичное отклонение η составляет $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $1.76 \cdot 10^{11}$.

Таким образом, теоретически доказали — погрешность второго метода точнее на один порядок, и соответственно экспериментальное значение η получилось точнее, согласно ожиданиям.

При анализе экспериментальных данных второго опыта обнаружили противоречие с приближенной теорией в виде нецелой фокусировки. Нашли решение эффекта в движении электрона в скрещенных полях: изучили его движение в скрещенных низкочастотном электрическом и постоянным магнитном полях.

Показательно, что дрейф в скрещенных полях носит универсальный характер - скорость дрейфа не зависит ни от знака заряда частицы, хотя конечно, сам дрейф возможен только при наличии у частицы заряда [4].

Косвенные данные о нецелой фокусировке из опытов второго метода укладываются в теорию, учитывающую влияние скрещенных полей, в пределах погрешностей измерений.

¹Буш Ханс — немецкий физик (1884—1973), основоположник электронной оптики.

Список литературы

- [1] Беллюстин С. В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. С. 81–87.
- [2] Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1972. С. 102–104.
- [3] Андреев В. А. Электричество, магнетизм, колебания и волны: учебное пособие для выполнения лабораторных работ. Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 87–88.
- [4] Раданцев В. Ф. Электронные свойства полупроводниковых наноструктур. Екб.: УрГУ, 2008. С. 286–290.