1. Отчёт по лабораторной работе №12

1.1. Физические основы лабораторной работы

Для получения ускорения свободного падения при помощи математического маятника используется установка из маятника с длиной нити, много большей радиуса груза (шарика), зеркальной шкалы, градусной шкалы отклонения груза ϕ и секундомера.

Нить предполагается невесомой и нерастяжимой, пренебрегается силами трения. Тогда можно рассмотреть движение маятника в поле консервативной силы - силы гравитации и найти g.

Маятник двигается по закону

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot sin\,\phi = 0 \tag{1}$$

Для *малых углов* можно считать $sin\,\phi = \phi$. Тогда уравнение (1) будет уравнением гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$\phi = \phi_0\, sin\,(\omega t + \alpha), \tag{2}$$

Где ϕ_0 – амплитуда колебаний, α – начальная фаза, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – частота колебаний. Из соотношения $T = \frac{2\pi}{\omega}$ следует

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

Из (3) можно выразить ускорение свободного падения (4):

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} \tag{4}$$

Но так как l напрямую замерить сложно (от точки подвеса до центра тяжести груза), необходимо проводить несколько опытов с разными высотами, чтобы избавиться от необходимости точного измерения длины нити и перейти к измерению **разности** длин, которую можно замерить гораздо более точно(5). При измерении разности можно брать любые (одинаковые относительно шарика) длины нити. Удобно взять наинизшую точку груза (шарика). Обозначим такие длины h_2 и h_1.

$$T_1^2 = 4\pi^2\frac{l_1}{g}, \quad T_2^2 = 4\pi^2\frac{l_2}{g}, \quad \Rightarrow g = 4\pi^2\frac{h_2 - h_1}{T_2^2 - T_1^2}, \text{ где } T = \frac{t}{n} \tag{5}$$

1.2. Величина малых углов

В описании физического смысла лабораторной работы была сделана оговорка о малых углах ϕ. Стоит отметить, что градусная шкала проградуирована в градусах, с ценой деления 1 градус. Таким образом, погрешность задания угла отклонения $\Delta\,\phi$ можно считать равной половине цены деления – $\Delta\,\phi \approx 0.0087$ рад.

Тогда необходимо решить уравнение

$$sin\,\phi_0 = \phi_0 - \Delta\,\phi \tag{6}$$

Решением (6) является $\phi_0 \approx 0.34$ рад $\approx 20°$. Для $\phi \leq \phi_0$ будет выполняться формула гармонического осциллятора (2), а значит и формулы периода колебаний математического маятника (3), и все выведенные из (3) формулы (4, 5, ...)

Такое утверждение можно проверить экспериментально. Найдем зависимость $T(\phi)$ для разных углов отклонения, при одинаковом количестве колебаний и высоте нити маятника.

n	ϕ, °	$5° \pm 0.5°$	$10° \pm 0.5°$	$15° \pm 0.5°$	$20° \pm 0.5°$	$40° \pm 0.5°$
20	t, с	43±0.2 с	43.4±0.2 с	44.6±0.2 с	43.8±0.2 с	48±0.2 с
	$T_1 = \frac{t}{n}$, с	8.6±0.2 с	4.3±0.2 с	2.97±0.2 с	2.19±0.2 с	2.4±0.2 с

Таблица 1. Зависимость периода математического маятника от угла отклонения, $T(\phi)$

Полученные результаты нанесем на график с учетом погрешностей измерения времени и углов (см. рис. 1). Легко заметить,что при $\phi > 5°$ значение периода сильно уменьшается — это означает, что применение формулы математического маятника (и всех из неё выведенных) на данных углах невозможно, так как предполагает период константой. График сужает утверждение $T = const$ на углы $\phi < \phi_0, \phi_0 = 5°$

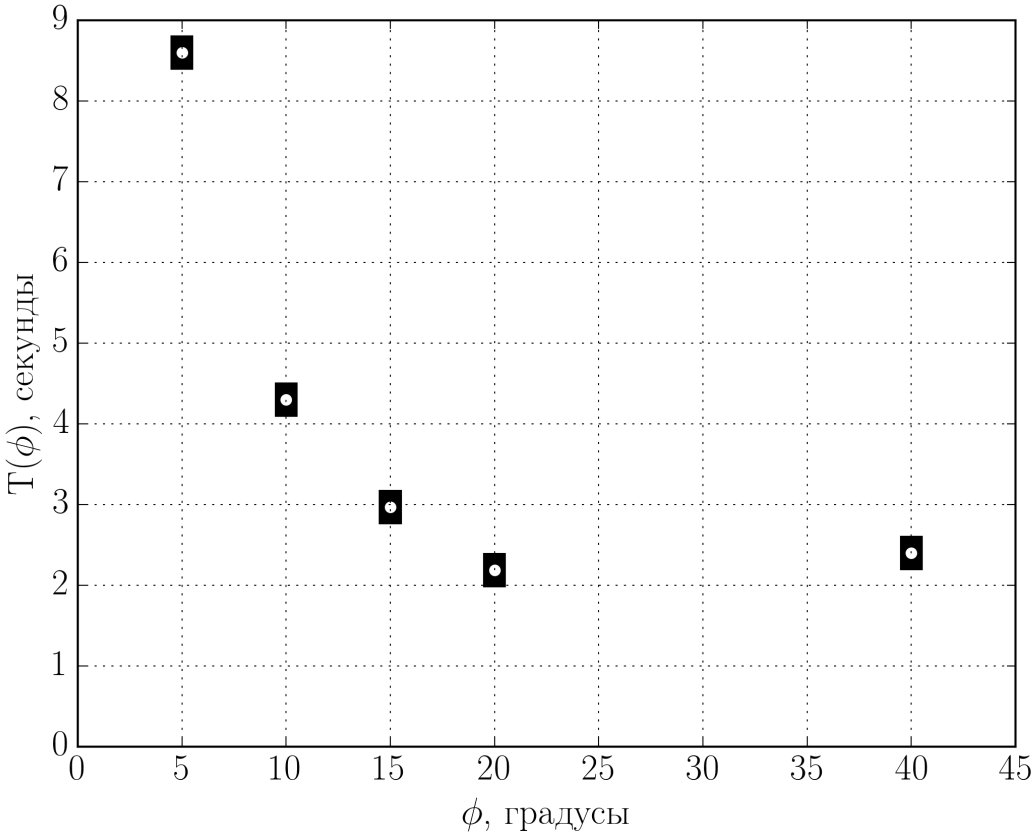

Рис. 1. График зависимости $T(\phi)$

1.3. Определение ускорения свободного падения g

Непосредственно замерить однократный период колебаний маятника точно достаточно сложно. Можно замерить n полных колебаний маятника и их время: тогда можно ввести формулу

$$T = \frac{t}{n} \tag{7}$$

Рассчитаем, для какого количества n колебаний маятника $\varepsilon\left(g\right) \leq 1\%$. Для этого выведем формулу относительной погрешности $\varepsilon\left(g\right)$, где позже выразим n из формулы (7):

$$\varepsilon\,(g) = \varepsilon(4\pi^2 \frac{h_2 - h_1}{t_2^2 - t_1^2}) = \varepsilon(\frac{h_2 - h_1}{t_2^2 - t_1^2}) = \frac{\Delta(h_2 - h_1)}{h_2 - h_1} + \frac{\Delta(t_2^2 - t_1^2)}{t_2^2 - t_1^2} = \\ = \frac{2\Delta h}{h_2 - h_1} + \frac{2\Delta t(t_2 + t_1)}{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)} = \frac{2\Delta h}{h_2 - h_1} + \frac{2\Delta t}{t_2 - t_1} \tag{8}$$

$$\varepsilon = \frac{2\Delta h}{h_2 - h_1} + \frac{2\Delta t}{n \cdot (T_2 - T_1)} \Longrightarrow \frac{(\varepsilon - \frac{2\Delta h}{h_2 - h_1}) \cdot (T_2 - T_1)}{2\Delta t} = \frac{1}{n} \tag{9}$$

$$n_{\text{расчетное}} = \frac{2\Delta t}{(T_2 - T_1)(0.01 - \frac{2\Delta H}{h_2 - h_1})} \tag{10}$$

Подставим в формулу (10) экспериментальные значения T_2, T_1 при 3 экспериментах с разными высотами h_2 и h_1.

№	n	h_1, см	t_1, с	T_1, с	h_2, см	t_2, с	T_2, с
1	20	3 ± 0.1см	6.9 ± 0.2с	0.35 ± 0.2с	95 ± 0.1см	39.2 ± 0.2с	1.9 ± 0.2с
2	20	3 ± 0.1см	8.7 ± 0.2с	0.44 ± 0.2с	115 ± 0.1см	42.3 ± 0.2с	2.2 ± 0.2с
3	20	3 ± 0.1см	10.5 ± 0.2с	0.52 ± 0.2с	125 ± 0.1см	45.0 ± 0.2с	2.3 ± 0.2с

№	Значение $n_{\text{расчетное}}$
1	$n_{\text{расчетное}} = \frac{2 \cdot 0.2}{(1.9 - 0.35)(0.01 - \frac{2 \cdot 0.1}{95 - 3})} \approx 31$
2	$n_{\text{расчетное}} = \frac{2 \cdot 0.2}{(2.2 - 0.44)(0.01 - \frac{2 \cdot 0.1}{115 - 3})} \approx 28$
3	$n_{\text{расчетное}} = \frac{2 \cdot 0.2}{(2.3 - 0.52)(0.01 - \frac{2 \cdot 0.1}{125 - 3})} \approx 27$

При вычисленных значениях необходимого числа n замеряемых колебаний математического маятника относительная погрешность g, вычисленного по формуле (11), не будет превышать 1%.

$$g = 4\pi^2 \frac{h_2 - h_1}{T_2^2 - T_1^2} \tag{11}$$

Проведем ряд опытов с учетом вышеуказанных измерений и вычислений, рассчитав погрешность измерения g по формуле (8).

№ опыта	1	2	3
n	20	25	30
h_1, см	3 ± 0.1 см	3 ± 0.1 см	3 ± 0.1 см
t_1, с	6.94 ± 0.2 с	8.65 ± 0.2 с	10.45 ± 0.2 с
$T_1 = \frac{t_1}{n}$, с	0.35 ± 0.2 с	0.35 ± 0.2 с	0.35 ± 0.2 с
h_2, см	95 ± 0.1 см	115 ± 0.1 см	125 ± 0.1 см
t_2, с	38.97 ± 0.2 с	53.86 ± 0.2 с	67.11 ± 0.2 с
$T_2 = \frac{t_1}{n}$, с	1.95 ± 0.2 с	2.15 ± 0.2 с	2.24 ± 0.2 с
$h_2 - h_1$, см	92 ± 0.1 см	112 ± 0.1 см	122 ± 0.1 см
$T_2^2 - T_1^2$, c^2	3.7 ± 0.8 с	4.5 ± 0.8 с	4.9 ± 0.8 с
g, см$/c^2$	$987.74 \pm 1.4\%$	$977.66 \pm 1.2\%$	$986.41 \pm 1\%$

Рассчитаем среднее значение $g_{\text{ср}}$, также пересчитав его погрешность.

$$\delta g_{\text{ср}} = \frac{\Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{\varepsilon g_1 \cdot g_1 + \varepsilon g_2 \cdot g_2 + \varepsilon g_3 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} =$$

$$= \frac{0.014 \cdot 987.74 + 0.012 \cdot 977.66 + 0.01 \cdot 986.41}{987.74 + 977.66 + 986.41} = 0.012000 = 1.2\%$$

$$g_{\text{ср}} = \frac{987.74 + 977.66 + 986.41}{3} \ \pm\ 1.2\% = 983.941 \ \pm\ 1.2\% \tag{12}$$

1.4. Вывод

Проведенная лабораторная работа позволила определить ускорение свободного падения - 983.941 см/с^2 с относительной погрешностью $\delta g = 1.2\%$ при измерении с помощью математического маятника.

Результат 983.941 см/с^2 отклоняется от табличного значения 980 см/с^2 на 0.33% — измерен с высокой точностью.

Также в работе была определена величина малых углов, при которых в эксперименте выполняется формула Гюйгенса – математического маятника.

В работе рассчитаны погрешности для всех косвенных измерений.

1.5. Ответы на вопросы

1.5.1. Вопрос 1

При определении периода пускать в ход и останавливать секундомер можно: а) когда маятник имеет наибольшее отклонение; б) когда он проходит положение равновесия. В каком случае измерение точнее?

Измерение будет более точным в случае пуска и остановки секундомера при наибольшем отклонении. Объяснить это можно следующим образом.

Запишем уравнение гармонического осциллятора (2, 13)

$$\phi = \phi_0 \, sin \, (\omega t + \alpha) \tag{13}$$

И продифференцируем его (14). Производная $\dot{\phi}$ есть угловая скорость по определению.

$$\dot{\phi} = \phi_0 \, \omega \, cos \, (\omega t + \alpha) \tag{14}$$

Из начальных условий ($\phi(t = 0) = 0$) найдем $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Отметим, что $|\phi_0| \ll \pi$.

Тогда ясно, что максимальная скорость будет при максимальном значении $cos \, (\omega t + \alpha) = 1 \implies \omega t + \alpha = \pi$, то есть при $t_{v_{max}} = \frac{\pi}{2\omega}$. Отметим, что подставив в (13) $t_{v_{max}}$, мы получим значение ϕ в этот момент, равное 0.

Следовательно, в положении равновесия угловая (а значит, и линейная) скорость максимальна, а в положениях максимального отклонения она равна 0.

Тогда можно сказать, что в районе максимального отклонения за время $\Delta \, t$ срабатывания секундомера маятник пройдет гораздо меньший путь, чем в положении равновесия, а значит и ошибка измерения времени полного колебания будет меньше.

1.5.2. Вопрос 2

***g* можно определить, измерив время свободного падения и измерив период колебаний маятника. Какой метод даст результат точнее, если пользоваться одним секундомером в обоих случаях?**

Изучим относительную погрешность определения g методом измерения времени падения груза. Ускорение рассчитывается по формуле

$$g = \frac{2H}{t^2} \tag{15}$$

Относительная погрешность измерения будет равна

$$\varepsilon(g) = \frac{\Delta h}{H} + \frac{2\Delta t}{t^2} \tag{16}$$

Выразим из известного значения $g = 981 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ высоту как функцию времени:

$$t^2 = \frac{2H}{g} \tag{17}$$

Тогда можно посчитать, при какой высоте относительная погрешность не превышает 1.2%

$$\varepsilon(g) \leq \frac{\Delta h}{H} + \frac{2\Delta t \cdot g}{2H} \tag{18}$$

$$0.01 \leq \frac{0.1}{H} + \frac{0.4 \cdot 981}{2H} \tag{19}$$

$$H \geq \frac{0.1 + 0.2 \cdot 981}{0.01} \tag{20}$$

$$H \geq 19630 \text{ см} \approx 196 \text{ м} \tag{21}$$

Из (18) естественно следует, что погрешность обратно пропорциональна пути свободного падения груза. При $h \leq 196$ м погрешность будет превышать 1.2%, таким образом, при сопоставимых длине нити математического маятника (в лабораторных условиях меньше 2 метров) и пути свободного падения груза (при одинаковых погрешностях измерения высоты и времени) точность метода математического маятника будет намного выше.

1.5.3. Вопрос 3

В каких точках земной поверхности g максимально, в каких минимально и почему?

Земля — эллипсоид вращения, т. е. радиус Земли на полюсе меньше радиуса Земли на экваторе. Ускорение свободного падения рассчитывается по формуле (22)

$$g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}, \tag{22}$$

где M – масса земли, R – радиус земли, h – высота над поверхностью земли.

Отсюда ускорение свободного падения на полюсе больше, чем на экваторе ($g = 983$ см/с^2 на полюсе и $g = 978$ см/с^2 на экваторе).

Кроме того, (22) верна при условии изоморфности Земли. В реальности существуют гравитационные аномалии, связанные с неоднородностью её строения, что может быть использовано для поиска полезных ископаемых (гравиразведка).

1.5.4. Вопрос 4

Чему равно g в центре Земли?

В центре земли формула (22) неприменима. Представим земной шар как сумму тонкостенных сфер (всего i сфер): так как гравитационное поле аддитивно, то ускорение свободного падения в центре тонкостенной сферы будет интегралом по объему сферы.

Попробуем эмпирически представить значение такого интеграла. Разобьем тонкостенную сферу радиуса R_i на маленькие кусочки объема ΔV (следовательно, массы ΔM). Тогда относительно центра сферы для каждого такого кусочка найдётся противоположный, лежащий на одном диаметре с данным: то есть для такого диполя можно посчитать Δg

$$\Delta g = +G \cdot \frac{\Delta M}{(R_i)^2} - G \cdot \frac{\Delta M}{(R_i)^2} = 0 \tag{23}$$

Вся сфера есть сумма всех таких диполей, то $g_i = \sum \Delta\, g = 0$. Из аддитивности гравитационного поля следует, что суммарное g есть сумма g_i каждой сферы:

$$g = \sum_1^i g_i = 0 \tag{24}$$

Нашли g в центре Земли равным нулю.

1.5.5. Вопрос 5

На какую высоту над Землей нужно подняться, чтобы с помощью приборов, которыми вы пользовались, можно было заметить изменение g?

При подъеме над поверхностью Земли можно применить формулу (22). Для того, чтобы заметить с помощью лабораторного математического маятника изменение g, необходимо, чтобы это изменение было больше погрешности измерения (которое нашли равным 1.2%)

$$\begin{aligned} g_0 - g_h &\geq \varepsilon\,(g) g_0 \\ 1 - \frac{g_h}{g_0} &\geq 0.012 \\ 1 - \frac{G \cdot \frac{M}{(R+H)^2}}{G \cdot \frac{M}{R^2}} &\geq 0.012 \\ 1 - \frac{R^2}{(R+H)^2} &\geq 0.012 \end{aligned}$$

Положительным решением данного уравнения (вспомним, что требуется найти высоту **над** Землёй) будет

$$H = 38.5 \text{ км}$$

На высоте $H = 38.5$ км замеренное с помощью лабораторного математического маятника ускорение свободного падения будет меньше, чем значение $g \pm 1.2\%$ на Земле, следовательно, можно будет сделать вывод о уменьшении ускорения свободного падения (падении напряжённости гравитационного поля).