Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №27

Определение отношения заряда электрона к его массе

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф. Г.

Принял:
Менсов С. Н.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

1. Описание лабораторной установки

Цель работы: изучение характера движения заряженных частиц в однородном магнитном поле и определение удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом отклонения в известных полях.

Оборудование: экспериментальная установка (ЭЛТ и блок питания), коммутатор, амперметр постоянного тока, источник питания постоянного тока

Приборные погрешности: $\Delta U = 62.6$ В, $\Delta I = 0.015$ А, $\Delta h = 0.01$ м.

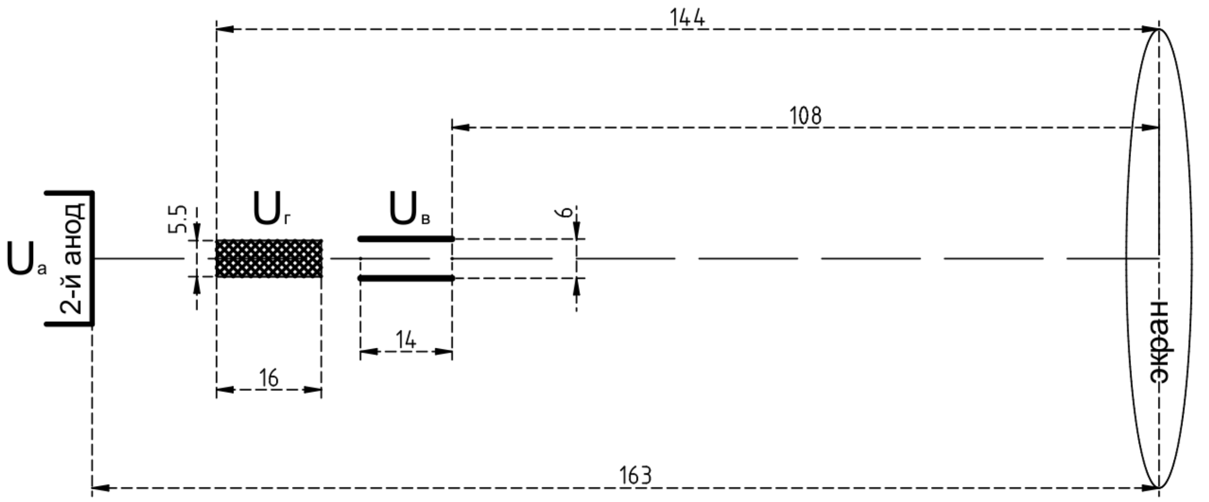

Рис. 1. Масштабный чертеж части лабораторной установки

На рисунке (1) изображена лабораторная установка, начиная с второго анода электронной пушки. Напряжение второго анода U_a регулируется в пределах $700 \div 1700$ вольт, изменяя продольную скорость электронов на вылете из пушки.

На отклоняющие пластины подается (не одновременно во время опытов) переменное напряжение $U_в$ ($U_г$) с эффективным значением 75 вольт и частотой 50 Гц.

Вокруг трубки намотан соленоид с диаметром 7 см, плотность намотки $n_0 = 8400$ $^{\text{вит}}/_{\text{м}}$.

2. Измерение удельного заряда электрона методом отклонения земным магнитным полем

В данном эксперименте ЭЛТ выставлялась так, чтобы её продольная ось была перпендикулярна с линиями магнитного поля Земли: известна горизонтальная составляющая поля $B_з = 0.186$ гаусса $= 1.86 \cdot 10^{-5}$ Тл и наклонение $\alpha = 70°$. Отсюда напряженность магнитного поля поперек ЭЛТ составляет $B = \frac{B_з}{cos(\alpha)} = 6.36 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Выберем систему координат так, чтобы ноль совпадал со вторым анодом, ось x была направлена в экран, а магнитное поле Земли уходило в плоскость системы координат.

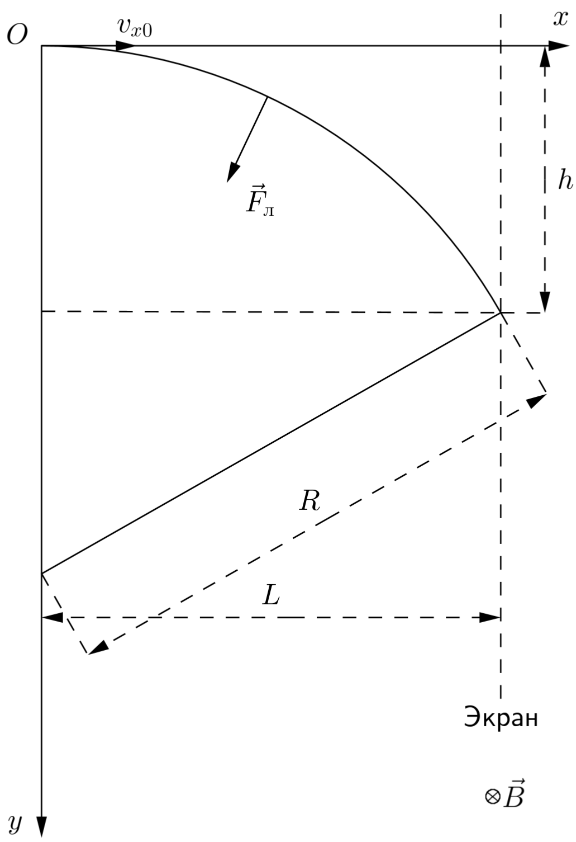

Рис. 2. Отклонение электрона магнитным полем Земли

Если на анод ЭЛТ подавать напряжение U_a, то из него электроны будут вылетать с кинетической энергией

$$\frac{mv_{x0}^2}{2} = U_a \cdot e \tag{1}$$

Обозначим удельный заряд $\frac{e}{m} = \eta$. Тогда

$$v_{x0} = \sqrt{2U_a\eta} \tag{2}$$

На заряд будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости электрона, закручивающая его по окружности радиуса R.

$$F_{\text{л}} = ma \tag{3}$$

$$ev_{x0}B_{\text{з}} = \frac{mv_{x0}^2}{R} \tag{4}$$

Отсюда

$$\eta = \frac{v_{x0}}{RB_{\text{з}}} \tag{5}$$

Радиус можно найти по отклонению проецируемого на экран ЭЛТ пятна h.

Выразим радиус из геометрии рисунка (см. Рис. 2):

$$R^2 = (R-h)^2 + L^2 \tag{6}$$

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + L^2 \tag{7}$$

$$h = \frac{h^2 + L^2}{2R} \tag{8}$$

$$R = \frac{h^2 + L^2}{2h} \tag{9}$$

При $h << L$

$$R = \frac{L^2}{2h} \tag{10}$$

Подставляя в (5) радиус и скорость из (2), получаем приближенную формулу (при $h << L$):

$$\eta = \frac{8h^2U_a}{B_{\text{з}}^2L^4} \tag{11}$$

Рассчитаем погрешность формулы (11):

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta h}{h} + \frac{\Delta U}{U_a} \tag{12}$$

Проведем несколько опытов, используя противоположные направления магнитного поля и разные значения U_a.

U_a, В	α, град	h, м	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\varepsilon(\frac{e}{m})$	$\Delta(\frac{e}{m})$
1300	$+90$	0.007	$1.78 \cdot 10^{11}$	0.28	$5.10 \cdot 10^{10}$
	-90	0.006	$1.31 \cdot 10^{11}$	0.33	$4.37 \cdot 10^{10}$
1700	$+90$	0.005	$1.19 \cdot 10^{11}$	0.40	$4.76 \cdot 10^{10}$
	-90	0.0065	$2.01 \cdot 10^{11}$	0.30	$6.19 \cdot 10^{10}$

Таблица 1. Результаты прямых, косвенных измерений и расчетов

По данным измерений отклонение составляет $6.19 \cdot 10^{10}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Доверительный интервал $\frac{e}{m}$ лежит от $1.06 \cdot 10^{11}$ до $2.08 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ с точностью до порядка.

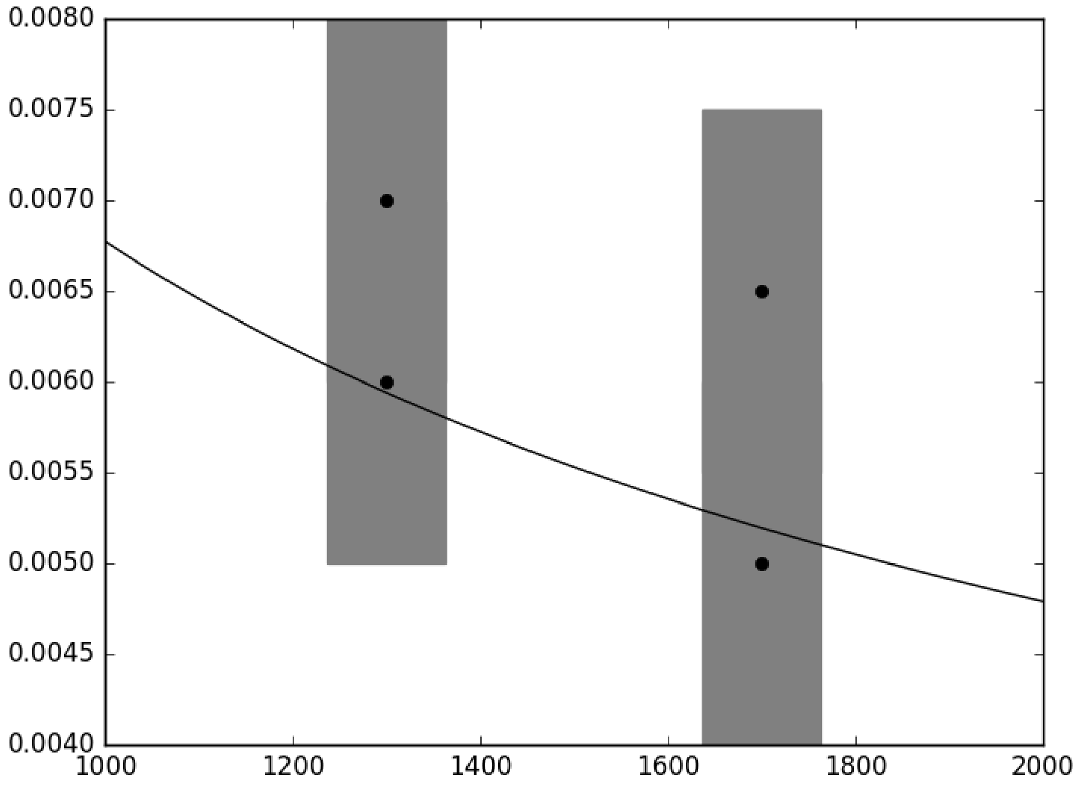

Рис. 3. Теоретическая зависимость отклонения пятна от напряжения и реальные результаты с прямоугольниками ошибок

3. Измерение удельного заряда электрона методом фокусировки пучка продольным магнитным полем соленоида

Если вдоль оси трубки создать постоянное магнитное поле B_z, которое можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \cdot n_0 \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8400 \cdot I \tag{13}$$

где $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, то электронный пучок, вылетевший из электронной пушки с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2 \cdot U_a \cdot \eta}$, пройдет в ЭЛТ в сонаправленном продольной оси ЭЛТ магнитном поле напряженностью $B = \mu_0 n I$.

Для того, чтобы поле B_z действовало на электрон, необходимо, чтобы его скорость имела поперечную составляющую , перпендикулярную v_z. В этом случае в плоскости XoY электрон под действием силы будет равномерно двигаться по окружности, радиус которой определится из второго закона динамики:

$$m\frac{v_0^2}{R} = ev_0 B_z \tag{14}$$

$$R = \frac{mv_0}{eB_z} \tag{15}$$

На неком начальном участке пути, меньшем на порядок относительно длины трубки, пучок проходит сквозь отклоняющие пластины с напряженностью электрического поля $E = \frac{U_{\text{откл}}}{d}$, где d — расстояние между пластинами.

Если пренебречь тем, что поля скрещенные, можно предположить, что в пластинах пучок приобретает произвольную скорость, лежащую в плоскости (XY), перпендикулярной Z. Ясно, что он будет закручиваться магнитным полем, а так как проекция начальной скорости $v_0 z$ не изменилась, то его траектория будет представлять собой винтовую линию, нанесенную на цилиндр радиуса R, и электроны пучка будут двигаться по спирали и через время $nT = \tau$ пересекать ось Z.

Обозначим $\eta = \frac{e}{m}$ и $\omega = \eta B_z$ (циклотронная частота). Тогда можем переписать формулу как

$$R = \frac{v_0}{\omega} \tag{16}$$

Решив несколько систем уравнений:

$$\begin{cases} nT_1 v_{0z} = l \\ (n+1)T_2 v_{0z} = l \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\eta B_1} \\ T_2 = \frac{2\pi}{\eta B_2} \end{cases} \tag{18}$$

Число фокусировок находится как

$$\frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{B_1}{B_2 - B_1} = \frac{I_1}{I_2 - I_1} \tag{19}$$

Рассчитаем погрешность определения фокусировки:

$$\Delta n = \frac{I_1}{I_2 - I_1} \cdot \left(\frac{\Delta I}{I_1} + \frac{2\Delta I}{I_2 - I_1} \right) \tag{20}$$

А удельный заряд определяется как

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{l^2 (B_2 - B_1)^2} \tag{21}$$

через два опыта с последовательными (n)-й и ($n+1$)-й фокусировками.

Нужно найти первое такое пересечение на экране ЭЛТ (n фокусировок) и увеличивать ток на соленоиде (увеличивать напряженность магнитного поля) до тех пор, пока не получим на экране ($n+1$ фокусировок).

$$\eta = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot U_a}{(l \cdot \mu_0 \cdot n_0)^2 (I_2 - I_1)^2} \tag{22}$$

Рассчитаем погрешность формулы:

$$\Delta(\eta) = \frac{8\pi^2 \left(4U_a \Delta I \left(I_2 - I_1 \right) + \Delta U \left(I_2 - I_1 \right)^2 \right)}{\mu_0^2 d^2 l^2 n_0^2 \left(I_2 - I_1 \right)^4} \tag{23}$$

Где d — коэффициент перевода в систему СИ единиц тока.

Провели ряд экспериментов:

По данным измерений отклонение будет составлять $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$.

U_a, В	I_1, А	I_2, А	$\frac{e}{m}$ (СИ)	$\Delta(\frac{e}{m})$	n
1200	0.6	1.14	$1.78 \cdot 10^{11}$	$0.96 \cdot 10^{10}$	1.11
1000	0.54	1.04	$1.73 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{10}$	1.08
1000	0.5	1.08	$1.81 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{10}$	0.86
1100	0.46	1.08	$1.74 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{10}$	0.74

Таблица 2. Экспериментальные данные двух фокусировок и их расчеты

Доверительный интервал будет составлять от $1.70 \cdot 10^{11}$ до $1.82 \cdot 10^{11}$. Этим методом нашли $\frac{e}{m}$ так, что известное табличное значение попадает в доверительный интервал, а экспериментальное значение лежит ближе к эталонному, нежели при определении методом отклонения в известных полях.

4. Определение нецелой фокусировки

4.1. Появление нецелой фокусировки

При расчете количества фокусировок по формуле (19), оказывается, что расчетное n нецелое, что не соотвествует наблюдаемой картине и требует теоретического обоснования.

Объяснение этому эффекту можно найти в пренебреженном в расчетах участке траектории электрона, где на него действуют два скрещенных поля - постоянное магнитное и переменное электрическое.

4.2. Движение электрона в скрещенных полях

Рассмотрим случай движения электрона с **постоянным напряжением**, поданным на горизонтально отклоняющие пластины. Выберем ортогональную систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением силы, действующей со стороны электрического поля пластин на электрон, ось Z была сонаправлена магнитному полю внутри соленоида, а единичные орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ этой системы координат образовывали правую тройку (рис. 4).

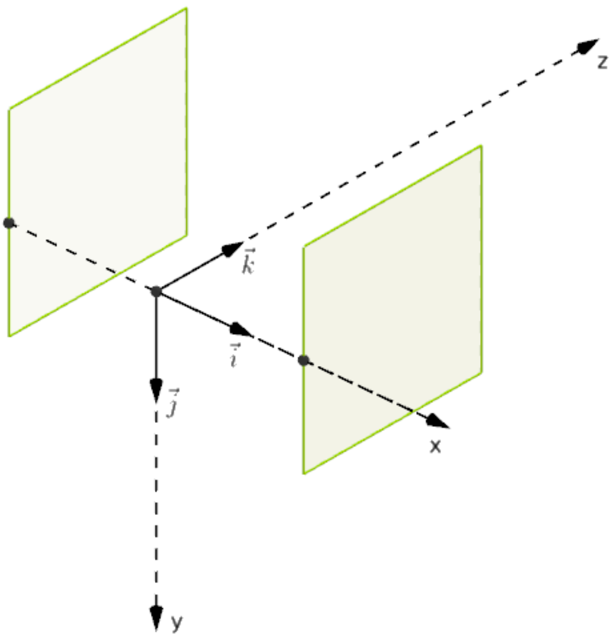

Рис. 4. Система координат, в которой рассматривается движение электрона

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{24}$$

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{25}$$

Пусть $\eta = \frac{e}{m}$. Тогда

$$\vec{a} = \eta\vec{E} + \eta(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{26}$$

Разложим $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \tag{27}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \tag{28}$$

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} \tag{29}$$

$$\vec{B} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{i} + B_z \cdot \vec{i} \tag{30}$$

Разложим векторное произведение $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_yB_z - v_zB_y)\vec{i} + (v_zB_x - v_xB_z)\vec{j} + (v_xB_y - v_yB_x)\vec{k} \tag{31}$$

Запишем второй закон Ньютона с учетом (31) в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \eta E_x + \eta(v_yB_z - v_zB_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \eta E_y + \eta(v_zB_x - v_xB_z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \eta E_z + \eta(v_xB_y - v_yB_x) \end{cases} \tag{32}$$

Обозначим $\omega = \eta B$. Учитывая, что $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $E = E_x$ и $B = B_z$, перепишем систему (32):

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Продифференцируем $\frac{dv_x}{dt}$:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega \frac{dv_y}{dt} \tag{34}$$

И подставим значение $\frac{dv_y}{dt}$ из системы (33):

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x \tag{35}$$

Полученное уравнение (35) является уравнением гармонического осциллятора и имеет известное решение:

$$v_x = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \tag{36}$$

Где A и ϕ_0 – неизвестные константы.

Решим первое уравнение системы (33):

$$\frac{dv_x}{dt} = \eta E + \omega v_y \tag{37}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0) \tag{38}$$

$$A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0) = \eta E + \omega v_y \tag{39}$$

$$v_y = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{E}{B} \tag{40}$$

Найдем A и ϕ_0 из начальных условий $v_x(\text{t=0}) = 0, v_y(\text{t=0}) = 0$:

$$\begin{cases} \begin{cases} A \cdot \sin\phi_0 = 0 \\ A \cdot \cos\phi_0 - \frac{E}{B} = 0 \end{cases} \\ A \geq 0 \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi \end{cases} \tag{41}$$

Решением (41) будет $\phi_0 = 0$ и $A = \frac{E}{B}$. Тогда можем записать уравнения скоростей электрона в данной конфигурации скрещенных полей:

$$v_x = \frac{E}{B} \cdot \sin\omega t \tag{42}$$

$$v_y = \frac{E}{B} \cdot (\cos\omega t - 1) \tag{43}$$

Отсюда можем найти уравнения движения, проинтегрировав скорости:

$$\int\limits_0^{x(t)} v_x\,dt = \frac{E}{B}\int\limits_0^{t} \sin\omega t\,dt \tag{44}$$

$$x = -\frac{E}{\omega B}\cos\omega t\Big|_0^t \tag{45}$$

$$x = \frac{E}{\omega B}(1-\cos\omega t) \tag{46}$$

$$\int\limits_0^{y(t)} v_y\,dt = \frac{E}{B}\int\limits_0^{t} (\cos\omega t - 1)\,dt \tag{47}$$

$$y = \frac{E}{\omega B}(\sin\omega t - \omega t) \tag{48}$$

Данные уравнения координат являются параметрическим уравнением частного случая трохоиды — циклоиды: то есть в конфигурации скрещенных полей электрон движется по плоской траектории [1, 2, 3].

Заключение

При выполнении работы были изучены различные методы определения удельного заряда электрона (табличное значение — $1.74 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$), движение электрона в однородных постоянных электрическом и магнитном полях.

Проведена серия опытов на определение η при помощи известных полей. В эксперименте в качестве данного поля принималось магнитное поле Земли. Рассчитана абсолютная погрешность $0.511 \cdot 10^{11}$, среднее значение $\frac{e}{m} = 1.57 \cdot 10^{11}$.

Также проведена серия опытов на определение η методом магнитной фокусировки, в зарубежной литературе также известного как метод Буша[1].

По данным измерений абсолютная погрешность η составляет $0.061 \cdot 10^{11}$, среднее значение $1.76 \cdot 10^{11}$.

Таким образом, теоретически доказали — погрешность второго метода точнее на один порядок, и соответственно экспериментальное значение η получилось точнее, согласно ожиданиям.

При анализе экспериментальных данных второго опыта обнаружили противоречие с приближенной теорией в виде нецелой фокусировки. Нашли решение эффекта в движении электрона в скрещенных полях: изучили его движение в скрещенных низкочастотном электрическом и постоянным магнитном полях.

Показательно, что дрейф в скрещенных полях носит универсальный характер - скорость дрейфа не зависит ни от знака заряда частицы, хотя конечно, сам дрейф возможен только при наличии у частицы заряда [4].

[1] Буш Ханс — немецкий физик (1884—1973), основоположник электронной оптики.

Список литературы

[1] Беллюстин С. В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. С. 81–87.

[2] Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1972. С. 102–104.

[3] Андреев В. А. Электричество, магнетизм, колебания и волны: учебное пособие для выполнения лабораторных работ. Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 87–88.

[4] Раданцев В. Ф. Электронные свойства полупроводниковых наноструктур. Екб.: УрГУ, 2008. С. 286–290.