

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ МОЛНИИ

Аннотация. Рассмотрены три различных подхода к расчету электрического поля молнии. Это классический дипольный метод (через условие калибровки Лоренца) и два разных монополярных метода (через уравнение непрерывности тока). Последние два метода основаны на двух различных формулировках уравнения непрерывности тока, одна из которых использована Тоттапиллилом, а другая Томсоном [1999]. Разница между формулировками относится к различным описаниям временного запаздывания. Все три метода включают одно и то же выражение векторного потенциала, но разные выражения скалярного потенциала. Аналитически показано, что все три различных выражения для скалярного потенциала эквивалентны и удовлетворяют условию калибровки Лоренца, а также все три решения дают одинаковые полные поля и одинаковые векторы Пойнтинга. Тем не менее, выражения для отдельных компонент электрического поля в разных зонах, традиционно разделяемых по их зависимости от расстояния как квазистатическая, индукционная и волновая, различны, что явно свидетельствует о том, что зависимость от расстояния не является адекватным идентификатором. Показано, что поле отдельных компонент электрического поля, рассчитанное через плотность заряда, полученного Тоттапиллилом [1997], эквивалентно соответствующим компонентам поля в классическом уравнении электрического поля тока на основе дипольного метода. Однако, отдельные компоненты поля в уравнении электрического поля в подходе Томсона [1999] не эквивалентны их аналогам в дипольном подходе. В подходе Тоттапиллила [1997] и в дипольном методе градиент скалярного потенциала вносит вклад во все три компоненты электрического поля, в то время как в подходе Томсона [1999] он вносит вклад только в квазистатические и индукционные компоненты. Расчеты электрических полей при разных расстояниях от канала молнии показывают, что различия между соответствующими компонентами поля, определенные по их зависимости расстояния, в разных методах велики на близких дистанциях, но становятся незначительными на дальних.

1. Введение

Рубинштейн и Уман [1989] обсуждали два эквивалентных подразряда к расчету электрических полей, создаваемых заданным источником. Первый метод, так называемый дипольный, включает в себя:

- 1) Определение плотности тока \vec{j} ,
- 2) Поиск векторного потенциала \vec{A} через \vec{j} ,
- 3) Использование \vec{A} и калибровки Лоренца для нахождения скалярного потенциала ϕ ,
- 4) Вычисление электрического поля \vec{E} через \vec{A} и ϕ ,
- 5) Вычисление магнитного поля \vec{B} через векторный потенциал.

В этом методе описан только источник с точки зрения плотности тока, и уравнения поля выражаются только с точки зрения тока. Использование Лоренцевской калибровки гарантирует выполнение уравнения непрерывности тока, которое не используется явным образом в этой методе.

Второй подход, так называемый монополярный (несколько вводящий в заблуждение термин), включает в себя:

- 1) Определение \vec{j} или линейной плотности ρ ,
- 2) Использование \vec{j} (или ρ) и уравнения непрерывности тока для поиска ρ (или \vec{j}),
- 3) Использование \vec{j} для поиска \vec{A} и ρ для поиска ϕ ,
- 4) Вычисление магнитного и электрического полей через \vec{A} и ϕ .

В этом подходе источник описывается в терминах плотности тока и линейной плотности заряда. Уравнения поля могут выражаться:

- 1) Через плотность заряда
- 2) Через плотность тока
- 3) И через то и через другое

Уравнение непрерывности тока используется для связи плотности тока и плотности заряда. При этом нет необходимости в явном использовании калибровки Лоренца, хотя было бы правильно указать, что скалярные и векторные потенциалы её удовлетворяют.

Итак, основное различие между двумя методами, заключается в том, используется ли калибровка Лоренца для связывания скалярного и векторного потенциала, или используется уравнение непрерывности, чтобы связать ток и заряд для полного описания полей.

Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на эти методы, как на метод калибровки Лоренца и метод уравнения непрерывности. Тоттаппиллил [1997] использовал уравнение непрерывности, чтобы преобразовать уравнение поля молнии, основанное на методе калибровки Лоренца и выраженное в терминах тока, к эквивалентным уравнениям в терминах линейной плотности заряда.

Томсон [1999] считал, что формулировка уравнения непрерывности, используемая Тоттаппиллилом [1997], была неверна. Томсон [1999] воспользовался другой формулировкой уравнения непрерывности и показал, что оно эквивалентно условию Лоренца.

Два формулировки уравнения непрерывности отличаются способом учета эффекта запозывания (обсуждается в разделе 2). Далее мы покажем, что и формулировка уравнения непрерывности, используемая Тоттаппиллилом [1997] и формулировка, используемая Томсоном [1999], обе удовлетворяют условию Лоренца, если выбрано подходящее выражение скалярного потенциала.

Мы также покажем, что подход, использованный Тоттаппиллилом [1997], дает электрические и магнитные поля (выраженные через линейную плотность заряда), которые идентичны полям, полученным с помощью условия Лоренца (выраженные через ток) и при выводе которых уравнение непрерывности не использовалось.

Итак, мы заключаем, что критика Томсона [1999] необоснована. Рубинштейн и Уман [1989] а также Сафаейнили и Мина [1991] продемонстрировали для волны ступенчатой функции, которая распространяется вдоль вертикальной антенны, что поля, полученные через уравнения, базирующиеся на условии Лоренца, и поля, полученные через уравнение непрерывности, хоть и эквивалентны, но очень разные по структуре.

В этой статье мы расширим их исследования на произвольную бегущую волну и покажем, что отдельные компоненты электрического поля, традиционно определяемые по их зависимости от расстояния, могут быть разными в разных подразрядах.

2. Анализ и обсуждение

2.1. Три эквивалентных выражения скалярного потенциала

Мы сравним три выражения для скалярного потенциала для вертикального разряда молнии без учета поверхности земли. Эти три выражения (случаи 1, 2 и 3) отличаются методами, используемыми для выражения скалярного потенциала в терминах тока. Случай 1 получен из условия Лоренца и используется в нашем анализе в качестве ссылки. Мы покажем, что случаи 2 и 3, которые соответствуют формулировкам уравнения непрерывности, используемое Томсоном [1999] и Тоттаппиллилом [1997], соответственно, эквивалентны 1 случаю.

Поэтому обе формулировки уравнения непрерывности, которые отличаются способом учета эффекта запаздывания, дадут решения, удовлетворяющие калибровке Лоренца.

2.1.1. Через метод калибровки Лоренца

Как показано в приложении А, скалярный потенциал на плоскости, перпендикулярной каналу молнии и содержащей основание канала, полученный из векторного потенциала с использованием калибровки Лоренца, есть

$$\begin{aligned} \phi(r, t) = & \\ = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} & \left[\frac{z'}{R^3(z')} \int_{z'/v+R(z')/c}^t i\left(z', \tau - \frac{R(z')}{c}\right) d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{z'}{cR^2(z')} i\left(z', t - \frac{R(z')}{c}\right) dz' \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Как было сказано выше, это тот самый случай, который не требует явного использования уравнения непрерывности. Плоскость Земли не учитывается в (1). Заметим, что (1) и другие уравнения для ϕ в этой статье дают изменение потенциала за счет обратного разряда, а не абсолютного потенциала.

2.1.2. Через уравнение непрерывности в форме Томсона

Как показано в приложении В, скалярный потенциал для этого случая (который эквивалентен его аналогу — случаю 1, и, следовательно, удовлетворяет условию Лоренца), есть

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) dz', \text{ где} \quad (2a)$$

$$Q(t - r/c) = - \int_{r/c}^t i(0, \tau - r/c) d\tau \quad (2b)$$

— это неподвижный точечный заряд, расположенный в точке $z' = 0$, и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = \\ & = - \left. \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \right|_{t - R(z')/c = \text{const}} \end{aligned} \quad (2c)$$

Уравнение (2с) является уравнением непрерывности, использованным Томсоном [1999]. В (2с) частная производная тока, запаздывающего относительно исходной координаты z' , берется при постоянном времени запаздывания. Эта зависимость $R(z')$ от z' игнорируется при взятии частной производной. Уравнение (2с) может быть получено из физических соображений следующим образом.

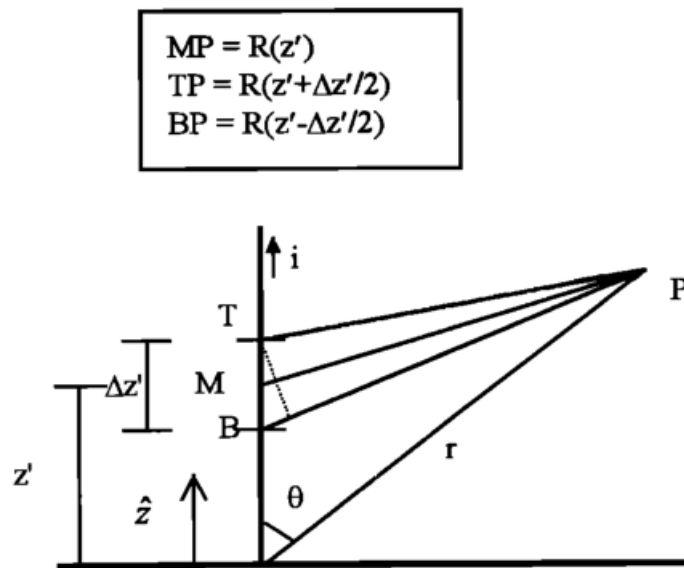


Рис. 1. Геометрия для объяснения физического смысла двух формулировок уравнения непрерывности, которые отличаются способом учета эффекта запаздывания. M — средняя точка, T — верхняя точка, B — нижняя точка.

Рассмотрим отрезок (сегмент) канала с током длины $\Delta z'$, центр (середина) M которого находится на высоте z' (рис. 1). Пусть $q^*(z', t^*)$ – заряд, содержащийся в сегменте в момент времени t^* . С зарядом $q^*(z', t^*)$ связана линейная плотность заряда, которая определяется как

$$\rho^*(z', t^*) = \lim_{\Delta z' \rightarrow 0} \frac{q^*(z', t^*)}{\Delta z'}$$

Согласно закону сохранения заряда, положительное изменение заряда в сегменте $\Delta z'$ равно отрицательному оттоку тока из сегмента.

То есть,

$$\partial q^*(z', t^*) / \partial t^* = - [i(z' + \Delta z'/2, t^*) - i(z' - \Delta z'/2, t^*)]$$

. Заметим, что токи на верхней и нижней границах (T и B) сегмента указыны в одно и то же локальное время t^* . Разделив на длину сегмента и устремив её в пределе в ноль, мы можем получить

$$\partial \rho^*(z', t^*) / \partial t^* = - \partial i(z', t^*) / \partial z',$$

где t^* берется постоянным при взятии частной производной по z' . Локальное время t^* может также быть записано в виде $t - R(z)/c$, где t – время, измеренное в точке наблюдения P на расстоянии $R(z)$, как показано на рис. 1. Затем мы можем написать уравнение непрерывности (2с). Тоттапиллил [1997] использовал аналогичное уравнение для получения распределения заряда вдоль канала при разных моделях обратного разряда (см. уравнение (A1) и таблицу 1). Однако для преобразования выражений электрического и магнитного поля в терминах тока и эквивалентных выражениях на языке плотности заряда, Тоттапиллил [1997] использует другую форму уравнения непрерывности, в которой время запаздывания уже не берется постоянным. Эта ситуация разрешается в в случае 3 (ниже). Легко видеть, что точечный заряд $Q(t - r/c)$ в точке $z' = 0$, определяемый формулой (2b), требуется для выполнения уравнения непрерывности при $z' = 0$. Он равен по величине и противоположен по знаку заряду, распределенному в обратном разряде. Он представляет собой сумму заряда, снятого с начала координат ($z' = 0$) током обратного разряда.

2.1.3. Через уравнение непрерывности в форме Тоттапиллила

Как показано в приложении С, скалярный потенциал для этого случая, который эквивалентен его аналогу в случае 1 и, следовательно, находится в соответствии с условием калибровки Лоренца, будет записан в виде

$$\begin{aligned} \phi(r, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\sigma(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\rho(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz, \end{aligned} \quad (3a)$$

где

$$Q(t - r/c) = - \int_{r/c}^t i(0, \tau - r/c) d\tau$$

то же самое, что и в (2b),

$$\sigma(z', t - R(z')/c) = - \frac{z'}{cR(z')} i(z', t - R(z')/c)$$

и

$$\frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = - \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \quad (3c)$$

Можно вывести (3a), исходя из (2a). Соотношение между плотностями $\rho^*(z', t - R(z')/c)$ в (2a) и $\rho(z', t - R(z')/c)$ в (3a) выводится позже в этом разделе. В (3a) σ и ρ — линейные плотности заряда, а Q — неподвижный точечный заряд. Уравнение (3c) — это уравнение непрерывности, использованное Тоттапиллилом [1997], чтобы преобразовать уравнения поля в терминах тока к эквивалентным уравнениям в терминах плотности заряда.

В (3c) частная производная тока, запаздывающего относительно исходной координаты z' , берется без фиксации как константы времени запаздывания. (В статье имеется в виду, что берется названная Бронштейном [1999] полная частная производная, т.е. частная производная, учитывающая также неявные зависимости)

Теперь мы предлагаем, ссылаясь на рисунок 1, физическую интерпретацию уравнения непрерывности (3c). Наблюдатель при P «видит» токи сверху (T) и снизу (B) сегмента в разное время. Ток в точке T наблюдатель видит в данный момент времени t от более раннего времени $t - R(z' + \Delta z'/2)/c$, и ток в точке B , который наблюдатель видит в момент времени t от другого более раннего времени $t - R(z' - \Delta z'/2)/c$. Поэтому скорость изменения заряда в сегменте канала, как это видит наблюдатель в точке P :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(z', t - R(z')/c)}{\partial t} &= \\ &= - \left[+i(z' + \Delta z'/2, t - R(z' + \Delta z'/2)) \right. \\ &\quad \left. - i(z' - \Delta z'/2, t - R(z' - \Delta z'/2)) \right] \end{aligned}$$

Разделив на $\Delta z'$ и устремив $\Delta z' \rightarrow 0$, мы получим уравнение (3c), связывающее плотность заряда и ток в канале, видимые наблюдателем в точке P . Линейные плотности заряда, соответствующие случаю 2 (ρ^*) и случаю 3 (ρ), разные. Для общего случая наблюдателя над землей эти две плотности заряда связаны (из уравнения (B9)):

$$\frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} + \frac{z' - r \cos \theta}{cR(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t}, \quad (3d)$$

где второе слагаемое в правой части может быть рассмотрено как поправочный член, учитывающий изменение во времени локальной плотности заряда. Интегрируя обе части уравнения (3d) по времени, получим

$$\rho(z', t - R(z')/c) = \rho^*(z', t - R(z')/c) + \frac{z' - r \cos \theta}{cR(z')} i(z', t - R(z')/c). \quad (3e)$$

Множитель $(z' - r \cos \theta) / (cR(z')) = -\partial(R/c)/\partial z'$ представляет собой отрицательную скорость изменения замедления времени по отношению к z' .

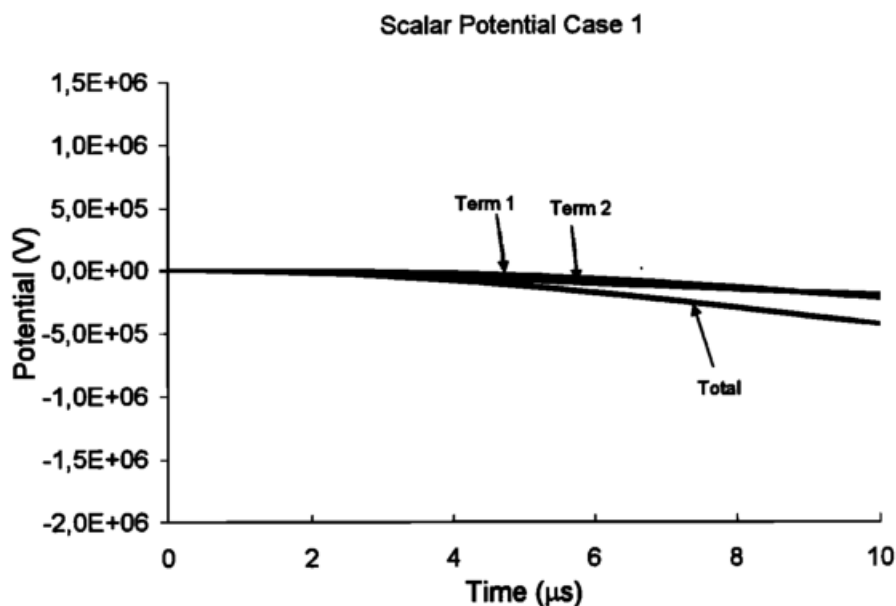


Рис. 2. Скалярный потенциал и его компоненты на уровне земли в модели линии передачи, рассчитанные на расстоянии 1км с помощью дипольного метода (калибровка Лоренца), уравнение (1)

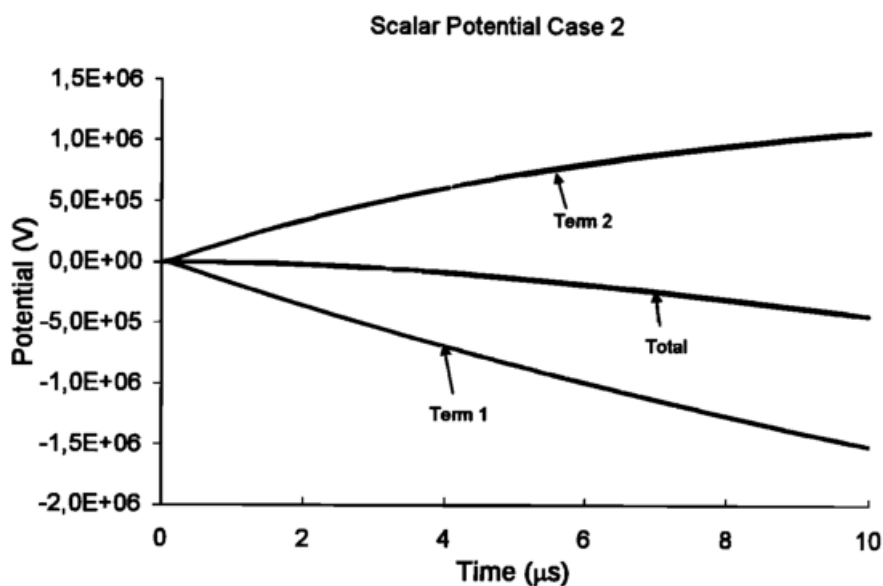


Рис. 3. То же что и на рис.2, рассчитанное для метода уравнения непрерывности в формулировке Томсона, формулы (2а)–(2с)

Хоть выражения (1), (2а) – (2с) и (3а) – (3с) скалярного потенциала и сильно отличаются по своей структуре, тем не менее они эквивалентны. Применение формулы (3е) (с $\theta = 90^\circ$) к формулам скалярного потенциала (3а) – (3с) дают выражения скалярного потенциала в виде (2а) – (2с). Таким образом, (2а) – (2с) и (3а) – (3с) аналитически эквивалентны. Кроме того, как показано аналитически в приложениях В и С, производные по времени от скалярного потенциала, определенные в (1), (2а) – (2с) и (3а) – (3с),

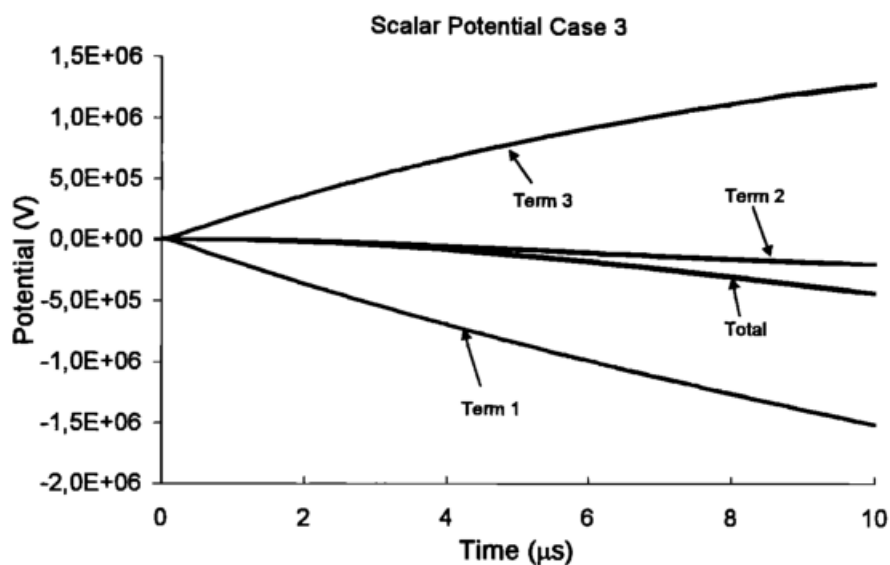


Рис. 4. То же что и на рис.2, рассчитанное для метода уравнения непрерывности в формулировке Тоттаппиллила, формулы (3а)–(3с)

идентичны (сравните уравнения (В15) и (С7)). Интегрирование по времени (В15) или (С7) и изменение порядка интегрирования (А5) дает (1). Эквивалентность подтверждается численным расчетом скалярного потенциала как функции времени на расстоянии 1 км с использованием формул (1), (2а) – (2с) и (3а) – (3с). Результаты показаны на рисунках 2, 3 и 4 соответственно. Во всех численных расчетах используется модель линии передачи обратного разряда [например, Раков и Уман, 1998]. Как отмечено выше, плоскость Земли не учитывается. Как видно из рисунков 2, 3 и 4 – суммарные потенциалы для случаев 1, 2 и 3, хоть и состоят из разных компонент, одинаковы. Оказывается, что для одного и того же \vec{A} можно указать разные, но эквивалентные выражения для ϕ , которые удовлетворяют калибровке Лоренца. Далее мы покажем, что традиционное разделение электрического поля во временной области на квазистатическую, индукционную и волновую по характеру зависимости от расстояния, может быть различным в разных методах. Отсюда следует, что явная зависимость от расстояния не является адекватным идентификатором.

2.2. Составляющие поля

2.2.1. Случай 1. Метод калибровки Лоренца

Классические выражения для электрических и магнитных полей на уровне земли с использованием дипольного метода (условие Лоренца) приведены в разных источниках [Уман 1975; Тоттаппиллил 1998; Раков и Уман 1998] и воспроизведены ниже. Геометрия задачи показана на рисунке 5.

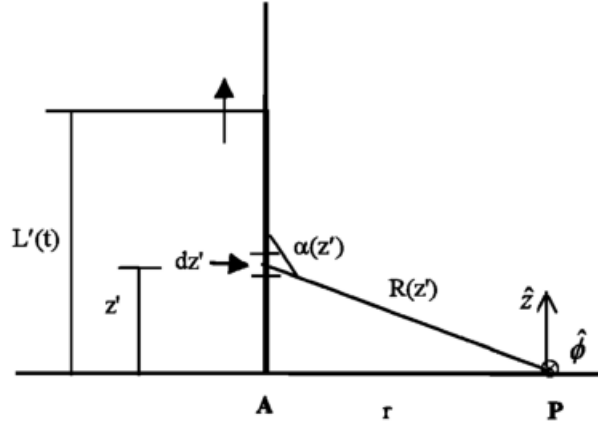


Рис. 5. Геометрия задачи, используемая при выводе уравнений поля (4), (5), (6) и (8)

$$E_V(r, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{2 - 3 \sin^2 \alpha(z')}{R^3(z')} \int_{t_b}^t [z', \tau - R(z')/c] dt dz' + \quad (4)$$

$$+ \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{2 - 3 \sin^2 \alpha(z')}{cR^2(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' -$$

$$- \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\sin^2 \alpha(z')}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' -$$

$$- \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2 \alpha(L')}{c^2 R(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt}$$

$$B_\phi(r, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{\sin \alpha(z')}{R^2(z')} i(z', t - R(z')/c) + \frac{\sin \alpha(z')}{cR(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \alpha(L')}{cR(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt}$$

В (4) и (5) E_v — электрическое поле в вертикальном (ось z) направлении на уровне земли, B_ϕ — горизонтальное (ϕ — направление) магнитное поле на уровне земли, а $L'(t)$ — высота фронта волны обратного разряда, как её видит наблюдатель. Нижний предел интеграла по времени первого слагаемого в (4) t_b — время, в которое фронт волны обратного разряда достигает высоты z' в первый раз (опять, как это видит наблюдатель из точки P). В отличие от уравнений для скалярного потенциала, приведенных выше, учтено влияние поверхности Земли как хорошо проводящей подстилающей поверхности.

Уравнения (4) и (5) верны для любой модели обратного разряда. Отдельные члены в правой части (4) разделены как квазистатические, индукционные и волновые компо-

ненты, а в правой части уравнения (5) это магнитостатические (или индукционные) и волновые компоненты.

Как это принято для идентификации, квазистатическая компонента спадает как R^{-3} , индукционные составляющие как R^{-2} и волновые составляющие как R^{-1} [например, Томсон, 1999].

Последний член в (4) и последний член в (5) зануляется, если нет скачка тока (в смысле гладкой функции) на фронте распространяющейся волны, т. е. если

$$i\left(L', t - \frac{R(L')}{c}\right) = 0.$$

Вдали от канала обратного разряда $z \ll r$, $\alpha \approx 90^\circ$ и, следовательно, $\sin \alpha \approx 1$. Поэтому в уравнении (4) исчезает последний член, а множители перед интегралом по току (квазистатическая часть), ток (индукционная или промежуточная часть) и производная по времени от тока (волновая часть) могут быть аппроксимированы как R^{-3} , R^{-2} и $c^{-2}R^{-1}$ соответственно.

Таким образом, вдали от канала молнии квазистатические, индукционные и волновые части от сегмента дифференциального канала падают как R^{-3} , R^{-2} и R^{-1} соответственно, но на более близких расстояниях даст вклад $\sin \alpha$.

2.2.2. Случай 2. Метод уравнения непрерывности в форме Томсона

Как показано в приложении D, уравнения электрического и магнитного поля также могут быть выведены с использованием уравнения непрерывности. Соответствующие случаю 2 выражения для вертикальной компоненты электрического поля на уровне земли

$$\begin{aligned} E_V(r, t) = & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{R^3(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) dz' - \\ & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{cR^2(z')} \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\ & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\ & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{L'(t)}{cR^2(L')} \rho^*(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt} - \\ & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для магнитного поля, полученное с использованием этого подразряда, идентично выражению (5), поскольку оно полностью определяется векторным потенциалом. Заметим, что плотность заряда в уравнении (6) определяется уравнением непрерывности (2с). Это использовал Томсон [1999].

Уравнение (6) содержит как ток, так и плотность заряда, в то время как (4) содержит только ток. Первые три слагаемых в уравнении (6) аналогичны соответствующим

частям выражения для производной поля \vec{E} (Ефименко, [1989, с. 516]) для распределения зарядов и токов с фиксированной в пространстве границей. По аналогии с (4) первый член (6) можно рассматривать как квазистатическое поле (зависимость R^{-3}), сумму второго и четвертого членов как индукционное поле (зависимость $c^{-1}R^{-2}$) и сумму третьего и последнего слагаемого как волновое поле (зависимость $c^{-1}R^{-2}$).

Оказывается, что квазистатическая, индукционная и волновая составляющие (за исключением последних двух членов, связанных с фронтом волны) в (6) также могут быть идентифицированы как содержащие z' кратную линейную плотность заряда (заряд), z' кратную производную по времени от линейной плотности заряда (временная производная заряда или тока) и производная тока соответственно.

Если на фронте волны нет тока или скачка плотности заряда, последние два члена аннулируются. Можно показать, что когда полные поля, определяемые уравнениями (6) и (4) идентичны, отдельные компоненты поля (квазистатические, индукционные и волновые части, различаемые по зависимости от расстояния) в этих двух уравнениях различны. Это было подтверждено путем расчета отдельных компонент поля и полного поля с помощью шести разных моделей обратного разряда (Bruce-Golde (BF), Traveling Current Source (TCS), Diendorfer-Uman (DU), Линия передачи (TL), Модифицированная ЛП с линейным спадом тока по высоте (MTLL), и Модифицированная ЛП с экспоненциальным спадом тока по высоте (MTLE) модели, описаны Раковым и Уманом [1998]). Из этих шести моделей только в BG и TCS моделях есть скачок тока на волновом фронте.

В качестве иллюстрации здесь представлены отдельные компоненты поля и полное поле на трех расстояниях для модели линии передачи (TL). В силу отсутствия скачка тока на волновом фронте в модели TL, последнее слагаемое в (4) и последние два слагаемых (6) исчезнут. Плотность заряда в (6) рассчитывается с использованием уравнения непрерывности (2с), которое для модели TL можно переписать как [Тоттапиллил, 1997]

$$\rho^*(z', t - R(z')/c) = \frac{i(0, t - z'/v - R(z')/c)}{v},$$

где v — скорость обратного разряда.

Вычисленные электрические поля на расстояниях 50 м, 1 км, 100 км показаны на рисунках 6, 7 и 8 соответственно. На рис. 6, 7 и 8 подпись LC указывает на слагаемые в (4), а подпись SE указывает на слагаемые в (6). Подписи EQ, EI, и ER показывают квазистатическую, индукционную и волновую составляющие поля.

Можно сделать следующие выводы из рисунков 6, 7, и 8 и формул (6) и (4).

- 1) Полные поля, определяемые формулами (4) и (6), равны (сравнивались с точностью до нескольких знаков после запятой)
- 2) В формуле (6) квазистатические и индукционные части полностью определяются градиентом скалярного потенциала, в то время как волновая составляющая полностью определяется производной по времени от векторного потенциала. Однако в формуле (4) и градиент скалярного потенциала, и производная по времени от векторного потенциала вносят вклад в волновую составляющую.

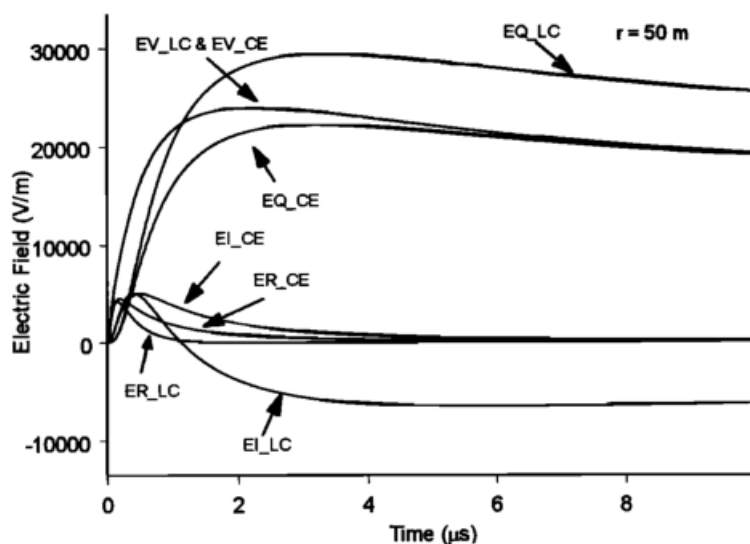


Рис. 6. Сравнение полного электрического поля и его составляющих на расстоянии 50 м из модели линии передачи (4) и (6). Метки EQ, EI и ER указывают на электростатическую, индукционную и волновую составляющие. LC метка (условие Лоренца) соответствует (4), а CE (уравнение неразрывности) соответствует (6)

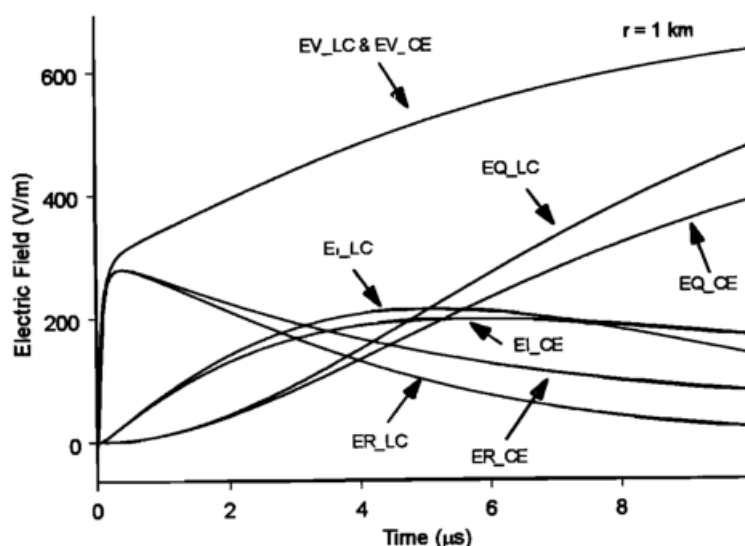


Рис. 7. То же что и на рис.6, для дистанции 1 км

- 3) квазистатические, индукционные и волновые составляющие в уравнении (4) отличаются от соответствующих составляющих в уравнении (6). Отличия велики на 50 м (очень близко к каналу молнии) и почти незначительны на расстоянии 100 км (далеко от канала).
- 4) На 50 м квазистатическая составляющая в (4) больше, чем она же в (6) (сравните кривые EQ_LC и EQ_CE на рис. 6). Однако, если мы будем считать скорость распространения поля бесконечной, то плотности заряда, полученные в (2с) и (3с) совпадут, и квазистатические составляющие в (6) и (4) будут равны. Таким образом, разница между формулировками уравнения непрерывности связаны с различным рассмотрением эффектов запаздывания.

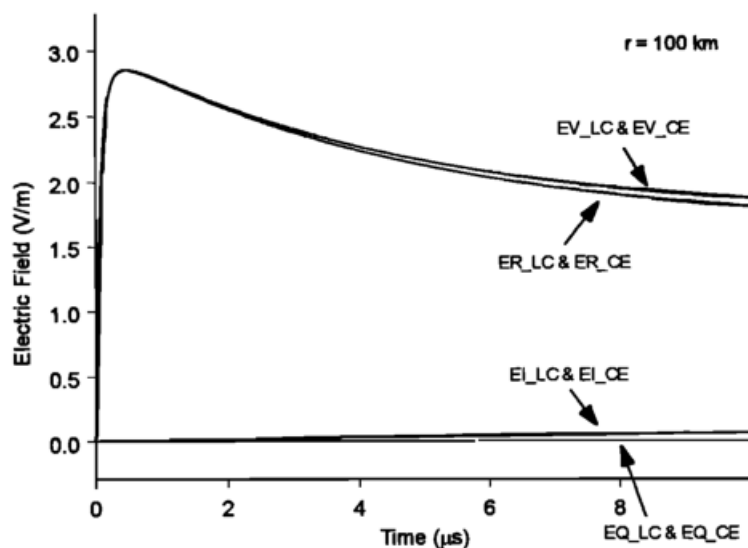


Figure 8. Same as Fig. 6, but at a distance of 100 km.

Рис. 8. То же что и на рис.6, для дистанции 100 км

Приведенный выше анализ ясно показывает, хоть полное электрическое поле от распределения тока или заряда однозначно, деление полного электрического поля во временной области на так называемую квазистатическую, индукционную и волновую компоненты уже неоднозначно.

Заметим, что в методе калибровки Лоренца все компоненты поля выраженные в через составляющие тока, а методе уравнения непрерывности в поле входит и ток, и плотность заряда.

Если принять подход, описанный в первом случае, градиент скалярного потенциала вносит вклад во все три составляющие поля, а если принять второй подход, градиент внесет вклад только в квазистатическое и индукционную сопоставляющие поля. И для первого и для второго случая выражение магнитного поля на уровне Земли одно и тоже (5), так как оно зависит только от векторного потенциала.

Мы получаем один и тот же вектор Пойнтинга, вычисляя его из уравнений (4) и (5) или из уравнений (6) и (5), так как суммарные электрические поля, заданные (4) и (6), одинаковы. Уравнение (4) может быть аналитически выведено из (6), как это сделано в приложении Е.

2.2.3. Случай 3. Метод уравнения непрерывности в форме Тоттапиллила

Можно начать с формулы скалярного потенциала, определенного для случая 3 (уравнение (3а)) и соответствующей формулировки уравнения непрерывности (3с), и тогда мы получим выражение для электрического поля с помощью процедуры, аналогичной тому как это делается в приложении D. Уравнение, соответствующее третьему случаю, легко получить с помощью подстановки уравнений (3d) и (3е), которые связывают плотности заряда во втором и третьем случаях, в выражение поля (6), как это показано на в при-

ложении Е. Результирующее выражение электрического поля на поверхности Земли:

$$\begin{aligned}
 E_V(r, t) = & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{R^3(z')} \rho(z', t - R(z')/c) dz' + \\
 & + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\cos^2 \alpha(z')}{cR^2(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' - \\
 & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{cR^2(z')} \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\
 & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\sin^2 \alpha(z')}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\
 & - - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{L'(t)}{cR^2(L')} \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt} - \\
 & - - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2 \alpha(L')}{c^2 R(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет электрическое поле в случае 3, в котором плотность заряда линейная плотность тока связаны уравнением непрерывности (3с). Первое слагаемое в (8) — квазистатическая составляющая, сумма второго, третьего и пятого слагаемых — индукционная составляющая, сумма четвертого и последнего слагаемого — волновая.

Легко видеть, что волновая составляющая (4) (сумма последних двух слагаемых) такая же, как и волновая составляющая (8) (сумма четвертого и последнего слагаемых). Уравнение (8) аналитически эквивалентно уравнению (6), поскольку первое получено из последнего. Кроме того, в приложении Е показано, что (8) аналитически эквивалентно выражению электрического поля, выведенным Тоттаппиллилом [1997], и последнее выражение запишется как (9) в разделе 2.3.

2.3. Выражение электрического поля через плотность заряда, сформулированное Тоттаппиллилом

Тоттаппиллил [1997] начал расчеты с электрического поля, данного выражением (4) (полученным с использованием условия Лоренца) применил уравнение непрерывности (3с) и получил выражение для поля полностью с точки зрения плотности заряда.

Это выражение (для электрического поля на уровне Земли) показано ниже (его

можно получить из выражений (4) и (??)).

$$\begin{aligned}
E_V(r, t) = & \quad (9) \\
= & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{R^3(z')} \rho(z', t - R(z')/c) dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2} \frac{z'}{cR^2(z')} \\ -\frac{1}{2} \frac{\tan^2\left(\frac{z'}{r}\right)}{cr} \end{array} \right] \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{c^2 R(z')} \frac{\partial^2 \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t^2} dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2} \frac{L'(t)}{cR^2(L')} \\ -\frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{L'}{r}\right)}{cr} \end{array} \right] \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{L'(t)}{c^2 R(L')} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} \right) - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2 \alpha(L')}{c^2 R(L')} \rho(L', t - R(L')/c) \left(\frac{dL'(t)}{dt} \right)^2
\end{aligned}$$

Ток и плотность заряда в (4) и (9) соответственно связаны уравнением непрерывности (3с). Первое слагаемое (9) представляет составляющую квазистатическую, сумма второго и четвертого членов представляет индукционную составляющую, (Зависимость R^{-2} ; заметим, что слагаемые, содержащие арктангенс, может быть преобразовано с использованием тригонометрических функций для получения зависимости R^{-2}) компонент поля; а сумма третьего, пятого и последнего слагаемых представляет собой волновую составляющую поля.

Заметим, что в последнем слагаемом (9) $\sin \alpha(L') = \frac{r}{R(L')}$. Последние три члена в (9) отличны от нуля, только если имеется скачок на фронте волны обратного разряда.

Квазистатическая, индукционная и волновая составляющие в (9) эквивалентны соответствующим компонентам в (4), потому что первые аналитически получены из последнего.

Это иллюстрируется числовым примером, приведенным ниже. Вертикальное электрическое поле на земле на расстоянии 1 км было рассчитано с использованием (4) и (9). Отдельные компоненты поля и общее поле показаны на рисунке 9. Как и раньше, используется модель линии передачи и предполагается постоянная скорость обратного разряда v . Плотность заряда в (9), соответствующая модели TL, определяется применением уравнения непрерывности (3с), которое может быть записано в другой форме, как это сделано в [Тоттаппиллил, 1997, формула (B6)]:

$$\rho(z', t - R(z')/c) = -\frac{d}{dz'} \int_{z'/v + R(z')/c}^t i(z', \tau - R(z')/c) d\tau \quad (10)$$

Пространственные и временные производные от запаздывающих токов в канале обратного разряда для модели TL связаны уравнением [Тоттаппиллил, 1998 (34)]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial i(0, t - z'/v - R(z')/c)}{\partial z'} = \\ & = -\frac{\partial i(0, t - z'/v - R(z')/c)}{\partial t} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(1 + \frac{v z' - r \cos \theta}{c R(z')}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Проведя дифференцирование в (10), применяя (11) и учтя, что для наблюдателя на уровне земли $\theta = 90^\circ$, получаем

$$\rho(z', t - R(z')/c) = \frac{i(0, t - z'/v - R(z')/c)}{v \cdot F_{TL}},$$

где

$$F_{TL} = \frac{1}{1 + v \frac{z'}{cR(z')}}.$$

На рисунке 9 показано полное поле и отдельные составляющие поля. На расстоянии 1 км показаны как (4), так и (9). Совпадение между двумя соответствующими кривыми в каждом случае так хорошо (до нескольких десятичных знаков), что невозможно различить их. Уравнениям (4) и (9) были дополнительно сопоставлены расчеты полей на расстоянии 50 м и 100 км, и снова в каждом случае было найдено отличное совпадение. Кроме того, сравнение (4) и (9) было также сделано расчетом электрических полей на расстоянии 50 м, 1 км и 100 км с использованием других моделей обратного разряда, таких как BG, TCS, Модель DU, MTLL и MTLE [Раков и Уман, 1998], и снова было получено отличное совпадение. Таким образом, мы заключаем, что предположение Томсона [1999], что выражения поля выведенные Тоттаппиллилом [1997] ошибочны, является неверным.

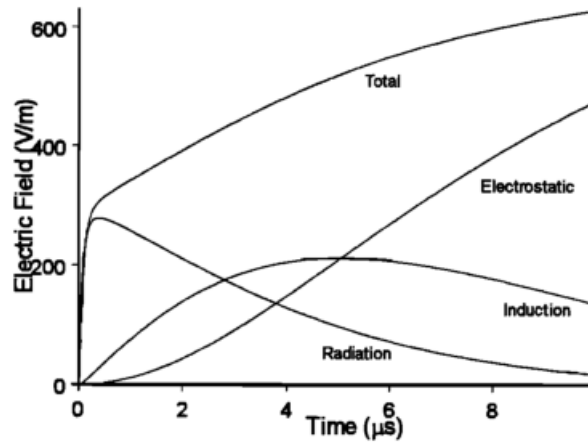


Рис. 9. Сравнение полного электрического поля и отдельных компонент поля расчетом на расстоянии 1 км с использованием модели линии передачи и выражений (4) и (9). Всего восемь кривых, четыре для (4) и четыре для (9). Поскольку совпадение между соответствующими кривыми очень точно, их нельзя разрешить на графике.

Приложение А

Цель здесь – вывести скалярный потенциал, используя векторный потенциал и условие Лоренца (случай 1). Канал обратного разряда молнии может быть смоделирован как прямая линия, закрепленная на одном конце А, а на другом конце удлиняющаяся со скоростью v [Тоттаппиллил, 1997].

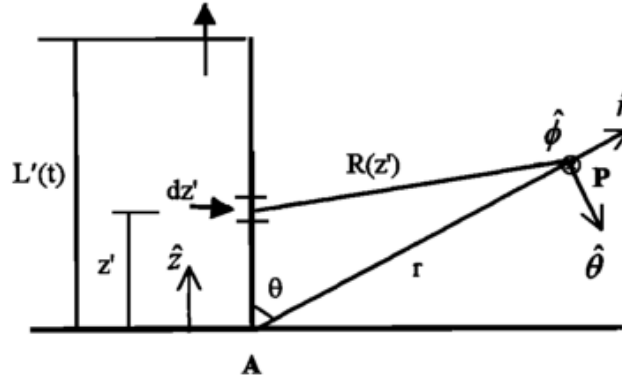


Рис. 10. Геометрия задачи

Координаты показаны на рисунке 10. В момент времени $t = 0$ обратный разряд начинает распространяться от источника А. Наблюдатель в фиксированной точке P видит обратный разряд, когда до него доходит поле спустя время запаздывания $t = r/c$, где c – скорость света. Запаздывающий ток для элементарного участка канала dz' задается как $i(z', t - R(z')/c)$, где z' меньше или равно $L'(t)$ – длины канала обратного разряда, видимого наблюдателем в момент времени t в точке наблюдения P . Если фронт волны обратного разряда движется с постоянной скоростью v , то $L'(t)$ получается из решения уравнения

$$t = \frac{z'}{v} + \frac{R(L')}{c}$$

Заметим, что предположение о постоянной скорости обратного разряда не требуется для вывода, приведенного здесь. Векторный потенциал в точке P из-за расширения канала, определенного Тоттаппиллилом [1998, уравнение (9)]:

$$\bar{A}(r, \theta, \tau) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{L'(\tau)} \frac{i(z', \tau - R(z')/c)}{R(z')} \hat{z} dz' \quad (A1)$$

где τ – время, меньшее или равное времени t . В момент времени τ , фронт волны обратного разряда виден на высоте $L'(\tau)$ наблюдателем в точке P и $L'(\tau)$ меньше или равна $L'(t)$. Заметим, что в (A1) мы не учитывали наличие Земли, которая, как правило, считается идеально проводящей и заменяется на изображение канала (метод изображений).

Полное электрическое поле может быть рассчитано с помощью соотношения

$$\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (A2)$$

где ϕ может быть получено из условия Лоренца

$$\nabla \bar{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

как

$$\phi(r, \theta, t) = -c^2 \int_{r/c}^t \nabla \cdot \bar{A} d\tau \quad (\text{A3})$$

Взяв дивергенцию (A1), можно показать, что

$$\begin{aligned} \nabla \bar{A}(r, \theta, \tau) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{L'(\tau)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', \tau - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', \tau - R(z')/c)}{\partial \tau} \right] dz' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{L'(\tau) - r \cos \theta}{cR^2(L')} i(L', \tau - R(L')/c) \frac{dL'(\tau)}{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Подставляя (A4) в (A3) и меняя порядок интегрирования, можно полностью получить выражение для скалярного потенциала с точки зрения тока. С увеличением времени от r/c до t , длина канала $L'(\tau)$ увеличивается монотонно от 0 до $L'(t)$. Поэтому порядок интегрирования может быть изменен стандартным образом:

$$\int_{r/c}^t \int_0^{L'(\tau)} \Rightarrow \int_0^{L'(t)} \int_{\tau}^t \quad (\text{A5})$$

где нижний предел $\tau = t_b$ — это время, в которое наблюдатель в точке наблюдения видит фронт волны обратного разряда на высоте z' в первый раз. Для постоянной скорости обратного разряда v ,

$$\tau = \frac{L'(\tau)}{v} + \frac{R(L'(\tau))}{c} = \frac{z'}{v} + \frac{R(z')}{c}$$

Проведя действия, описанные выше и после некоторых упрощений, мы получим выражение для скалярного потенциала как

$$\phi(r, \theta, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} \int_{\frac{z'}{v} + \frac{R(z')}{c}}^t i(z', t - R(z')/c) d\tau \right. \\ \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} i(z', t - R(z')/c) \right] dz' \quad (\text{A6})$$

Из (A6) можно легко получить выражение (??) [Уман, 1975], которое дает скалярный потенциал элементарного токового диполя. Для обратного разряда, перпендикулярной плоскости, и наблюдателя в этой же плоскости ($\theta = 90^\circ$), (A6) сводится к (1).

Приложение В

Покажем, что скалярный потенциал во втором случае удовлетворяет калибровке Лоренца, если используется связь тока и плотности заряда уравнением непрерывности в формулировке Томсона [1999]. В приложении С мы покажем, что существует другое, но эквивалентное выражение для скалярного потенциала (случай 3), удовлетворяющее условию Лоренца, когда плотность заряда и ток связаны уравнением непрерывности в формулировке Тоттапиллила [1997]. В обоих приложениях, В и С, канал обратного разряда предполагается прямым и вертикальным, а поверхность земли не учитывается. Выражение для потенциала в точке наблюдения Р (см. рисунок 10), соответствующее случаю 2, есть

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) dz' \quad (B1)$$

где

$$Q(t - r/c) = - \int_{r/c}^t i(0, \tau - r/c) d\tau$$

и

$$\frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = - \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \Big|_{t - R(z')/c = \text{const}} \quad (B3)$$

Взяв производную по времени (B1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t - r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^*(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \frac{dL'}{dt} \end{aligned} \quad (B4)$$

Применяя (B3) ко второму члену (B4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t - r/c)}{r} - \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \Big|_{t - \frac{R}{c} = \text{const}} dz' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^*(L', t - R(L)/c)}{R(L'')} \frac{dL'}{dt} \end{aligned} \quad (B5)$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} = & \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \Big|_{t - \frac{R}{c} = \text{const}} + \\ & + \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial (t - R(z')/c)} \frac{\partial (t - R(z')/c)}{\partial z'} \end{aligned} \quad (B6)$$

$$\frac{\partial (t - R(z')/c)}{\partial z'} = -\frac{z' - r \cos \theta}{cR(z')} \quad (\text{B7})$$

$$\frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial (t - R(z')/c)} = \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \quad (\text{B8})$$

Подставляя (B8) и (B7) в (B6) и переставляя слагаемые, мы получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \right|_{t-R/c=\text{const}} &= \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} + \\ &+ \frac{z' - r \cos \theta}{cR(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Подставляя (B9) в (B5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t - r/c)}{r} - \\ &- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{1}{R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^*(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \frac{dL'}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

Интегрирование по частям второго слагаемого (B10) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} dz' &= \left[\frac{1}{R(z')} i(z', t - R(z')/c) \right]_0^{L'(t)} - \\ &- \int_0^{L'(t)} \frac{-z' + r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' \end{aligned}$$

это выражение может быть упрощено до

$$\begin{aligned} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} dz' &= \\ &= \frac{i(L', t - R(L')/c)}{R(L')} - \frac{i(0, t - r/c)}{r} + \int_0^{L'(t)} \frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' \end{aligned} \quad (\text{B11b})$$

Подставляя (B11b) в (B10), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^*(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \frac{dL'(t)}{dt} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \end{aligned} \quad (B12)$$

Из (3e) для случая $z' = L'(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \rho^*(L', t - R(L')/c) = & \rho(L', t - R(L')/c) - \\ & - \frac{L' - r \cos \theta}{cR(L')} i(L', t - R(L')/c) \end{aligned} \quad (B13)$$

Кроме того, связь между током и плотностью заряда на фронте волны согласно (3c) [Тоттаппиллил, 1997]:

$$i(L', t - R(L')/c) = \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} \quad (B14)$$

Подставляя (B13) и (B14) к (B12), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' - \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{L' - r \cos \theta}{cR^2(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} \end{aligned} \quad (B15)$$

Дивергенция векторного потенциала выводится ранее в приложении А (см. (A4)). Из (B15) и (A4) в момент времени t видно, что калибровка Лоренца выполняется. То есть,

$$\nabla \cdot \vec{A}(r, \theta, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (B16)$$

Томсон [1999] также показал, что формулировка уравнение непрерывности с запаздывающим временем, берущимся равным константе, удовлетворяет условию Лоренца, но не представил явное выражение для скалярного потенциала, такого как (B1). Если мы напишем (B15) для времени τ , где τ меньше или равно t , проинтегрируем (B15) в пределах от r/c до t , а также изменим порядок интегрирования согласно (A5), то мы получим выражение для скалярного потенциала, идентичное тому, что дано уравнением (A6), соответствующим первому случаю.

Приложение С

Покажем, что уравнение непрерывности, использованное Тоттаппиллилом [1997], то есть формулировка уравнения непрерывности без принятия запаздывающего времени

константой (взятие полной частной производной (в смысле Бронштейна) по z') согласуется с калибровкой Лоренца, при условии выбора правильного скалярного потенциала. Заметим, что (С1) может быть получена из (В1) применением формул (В3), (В9) и (С4). Используемые здесь предположения такие же, как в приложении В. Рассмотрим скалярный потенциал в точке Р (рис. А1):

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - r/c)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\sigma(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{\rho(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz' \end{aligned} \quad (C1)$$

где

$$Q(t - r/c) = - \int_{r/c}^t i(0, \tau - r/c) d\tau,$$

$$\sigma(z', t - R(z')/c) = - \frac{z' - r \cos \theta}{cR(z')} i(z', t - R(z')/c)$$

и

$$\frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = - \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} \quad (C4)$$

Взяв производную по времени (С1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t - r/c)}{r} - \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{L' - r \cos \theta}{cR^2(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} + \\ & + \frac{1}{4\pi s_0} \frac{\rho(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \frac{dL'(t)}{dt} \end{aligned} \quad (C5)$$

Перепишем третий член (С5), используя (С4)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial z'} dz'$$

и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{R(z')} \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' = \\
& = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(L', t - R(L')/c)}{R(L')} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i(0, t - r/c)}{r} - \\
& - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) dz'
\end{aligned} \tag{C6}$$

Заменяв третий член (C5) на (C6), применяя (B14), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(r, \theta, t)}{\partial t} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{z' - r \cos \theta}{R^3(z')} i(z', t - R(z')/c) \right. \\
& \left. + \frac{z' - r \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' - \\
& - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{L' - r \cos \theta}{cR^2(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{C7}$$

Уравнение (C7) идентично (B15) и удовлетворяет калибровке Лоренца (B16). Если мы напишем (C7) для времени τ , где τ меньше или равно t , проинтегрируем (C7) в пределах от r/c до t и изменим порядок интегриации согласно (A5), то получим выражение для скалярного потенциала, идентичное тому, который дано уравнением (A6), соответствующим случаю 1.

Приложение D

Найдем выражение для электрического поля, соответствующее случаю 2. Рассмотрим векторный и скалярный потенциалы для расширяющегося канала молнии, как они определены в (A1) и (B1) соответственно. Электрическое поле может быть получено с помощью (A2). Использование сферической системы координат с центром в начальной точке обратного разряда на земле и игнорируя наличие земли, мы покажем, что $-\nabla\phi$ и $-\partial\vec{A}/\partial t$ можно найти, как описано ниже. Для $-\nabla\phi$ мы имеем

$$\begin{aligned}
-4\pi\epsilon_0 \nabla\phi = & -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q(t - r/c)}{r} - \\
& -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{L'(t)} \frac{\rho^*(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz' - \\
& -\hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{L'(t)} \frac{\rho^*(z', t - R(z')/c)}{R(z')} dz'
\end{aligned} \tag{D1}$$

Заметим, что первый член (B1) не зависит от угла θ . Максимальная длина канала $L'(t)$, как видно из точки поля, является функцией от r , θ и t . Расстояние до точки наблюдения до бесконечно малого кусочка канала молнии $R(z')$ является функцией от r и θ , так как определяется уравнениями (D2a) - (D2c).

$$R(z') = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta} \quad (D2a)$$

$$\frac{dR(z')}{dr} = \frac{r - z' \cos \theta}{R(z')}$$

$$\frac{dR(z')}{d\theta} = \frac{rz' \sin \theta}{R(z')} \quad (D2c)$$

Продифференцировав второй и третий члены в (D1) и используя (D2a) - (D2c), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} -4\pi\epsilon_0 \nabla \phi = & \hat{r} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{r - z' \cos \theta}{R^3(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{r - z' \cos \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' + \\ & + \hat{\theta} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{z' \sin \theta}{R^3(z')} \rho^*(z', t - R(z')/c) \right. \\ & \left. + \frac{z' \sin \theta}{cR^2(z')} \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \right] dz' - \\ & - \hat{r} \frac{\rho^*(L', t - R(L')/c)}{R(L')} \frac{\partial L'}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{\rho^*(L', t - R(L')/c)}{rR(L')} \frac{\partial L'}{\partial \theta} - \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q(t - r/c)}{r} \end{aligned} \quad (D3)$$

Производная по времени от векторного потенциала определяется как

$$-4\pi\epsilon_0 \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\hat{z} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \hat{z} \frac{i(L', t - R(L')/c)}{c^2 R(L')} \frac{dL'}{dt} \quad (D4)$$

где

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \quad (D5)$$

Общее выражение для электрического поля в точке наблюдения можно найти, используя формулы (D3), (D4) и (D5). Нас интересует поле обратного разряда на уровне земли. В этом случае $\theta = 90^\circ$, и отсюда $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$ и $\hat{\theta} = -\hat{z}$. Единичный вектор \hat{r} теперь горизонтальный, смотрящий в сторону от канала разряда.

Хорошо проводящая плоскость в точке $z' = 0$ вводится для имитации влияния Земли. С использованием теории изображений, мы можем заменить эту плоскость на изображение канала, с током, текущем в том же направлении, что и ток в настоящем канале. Записав уравнения для изображения и добавив их к (D3) и (D4) для случая $\theta = 90^\circ$, получаем выражение для электрического поля (6).

Приложение Е

В этом приложении мы получим электрическое поле, соответствующее случаю 3. Отношения между плотностями заряда, соответствующими случаю 2 и случаю 3 задается уравнениями (3d) и (3e). Для наблюдателя на уровне земли $\theta = 90^\circ$, эти уравнения будут записаны в виде

$$\frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} = \frac{\partial \rho^*(z', t - R(z')/c)}{\partial t} + \frac{z'}{cR(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} \quad (\text{E1})$$

$$\rho(z', t - R(z')/c) = \rho^*(z', t - R(z')/c) + \frac{z'}{cR(z')} i(z', t - R(z')/c) \quad (\text{E2})$$

Подставляя (E1) и (E2) в выражение для электрического поля, соответствующее случаю 2 (6), получаем

$$\begin{aligned} E_V(r, t) = & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{R^3(z')} \rho(z', t - R(z')/c) dz' + \\ & + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'^2}{cR^4(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' - \\ & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{cR^2(z')} \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' + \\ & + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'^2}{c^2 R^3(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\ & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{1}{c^2 R(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\ & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{L'(t)}{cR^2(L')} \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt} + \\ & + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{L'^2(t)}{c^2 R^3(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt} - \\ & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R(L')} i(L', t - R(L')/c) \frac{dL'}{dt} \end{aligned} \quad (\text{E3})$$

После упрощения и применения того факта, что $\sin \alpha(z') = r/R(z')$ и соответственно $\cos \alpha(z') = -z'/R(z')$, (E3) можно записать как (8). Уравнение (8) является выражением электрического поля, соответствующим случаю 3, в котором линейная плотность заряда и ток связаны уравнением непрерывности (3с). Первое слагаемое (статическое) из (8) идентично соответствующему слагаемому в (9), четвертое и шестое слагаемые (волновые) (8) идентичны третьему и четвертому слагаемым (4). Ниже будет показано, что

сумма второго, третьего и пятого слагаемых (индукционные слагаемые) из (8) аналитически эквивалентны сумме второго и четвертого слагаемых (индукционные слагаемые) в уравнении (9).

Интегрирование по частям третьего слагаемого из (8) дает

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'^2}{cR^4(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' = \\
& = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} i(z', t - R(z')/c) \left[-\frac{1}{2} \frac{z'}{cR^2(z')} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{z'}{r}\right)}{cr} \right] \Big|_0^{L'(t)} - \\
& - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[-\frac{1}{2} \frac{z'}{cR^2(z')} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{z'}{r}\right)}{cr} \right] di(z', t - R(z')/c)
\end{aligned} \tag{E4}$$

Используя следующие два отношения [см. Тоттаппилли, 1997]:

$$\begin{aligned}
di(z', t - R(z')/c) &= -\frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' \\
i(L', t - R(L')/c) &= \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{E6}$$

Уравнение (E4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'^2}{cR^4(z')} i(z', t - R(z')/c) dz' = \\
& = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \frac{L'}{cR^2(L')} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{L'}{r}\right)}{cr} \right] \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} - \\
& - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{1}{2} \frac{z'}{cR^2(z')} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{z'}{r}\right)}{cr} \right] \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz'
\end{aligned} \tag{E7}$$

Подставляя (E7) во второе слагаемое в (8), применяя (E6) к последнему слагаемому (8)

и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned}
E_V(r, t) = & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{z'}{R^3(z')} \rho(z', t - R(z')/c) dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \left[\frac{3}{2} \frac{z'}{cR^2(z')} - \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{z'}{r}\right)}{cr} \right] \frac{\partial \rho(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L'(t)} \frac{r^2}{c^2 R^3(z')} \frac{\partial i(z', t - R(z')/c)}{\partial t} dz' - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{2} \frac{L'(t)}{cR^2(L')} - \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{L'}{r}\right)}{cr} \right] \rho(L', t - R(L')/c) \frac{dL'(t)}{dt} - \\
& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{c^2 R^3(L')} \rho(L', t - R(L')/c) \left(\frac{dL'(t)}{dt} \right)^2
\end{aligned} \tag{E8}$$

Только третье слагаемое в (E8) относится к току. Это слагаемое может быть полностью записано в терминах плотности заряда с использованием уравнения непрерывности (3с), как это сделал Тоттаппиллил [1997]. Тогда выражение (E8) становится идентично выражению электрического поля (9), полученного Тоттаппиллилом [1997].

Список литературы

- [1] Brownstein, K. R., The whole-partial derivative, Am. J. Phys., 67, 639-641, 1999.
- [2] Jefimenko, O. D., Electricity and Magnetism, 2nd ed., Electret Sci., Star City, West Virginia, 1989.
- [3] Rakov, V. A., and M. A. Uman, Review and evaluation of lightning return stroke models including some aspects of their application, IEEE Trans. Electromagn. Compat., 40, 403-426, 1998.
- [4] Rubinstein, M., and M. A. Uman, Methods for calculating the electromagnetic fields from a known source distribution: Application to lightning, IEEE Trans. Electromagn. Compat., 31, 183-18, 1989.
- [5] Safaeinili, A., and M. Mina, On the analytical equivalence of electromagnetic fieldsolutions from a known source distribution, IEEE Trans. Electromagn. Compat., 33, 69-71, 1991.
- [6] Thomson, E. M., Exact expressions for electric and magnetic fields from a propagating lightning channel with arbitrary orientation, J. Geophys. Res., 104, 22,293-22,300, 1999.

- [7] Thottappillil, R., V. A. Rakov, and M. A. Uman, Distribution of charge along the lightning channel: Relation to remote electric and magnetic fields and to return-stroke models, J. Geophys. Res., 102, 6987-7006, 1997.
- [8] Thottappillil, R., M. A. Uman, and V. A. Rakov, Treatment of retardation effects in calculating the radiated electromagnetic fields from the lightning discharge, d. Geophys. Res., 103, 9003-9013, 1998.
- [9] Uman, M. A., D. K. McLain, and E. P. Krider, The electromagnetic radiation from a finite antenna, Am. d. Phys., 43, 33-38, 1975.

Содержание

1. Введение	1
2. Анализ и обсуждение	3
2.1. Три эквивалентных выражения скалярного потенциала	3
2.1.1. Через метод калибровки Лоренца	3
2.1.2. Через уравнение непрерывности в форме Томсона	4
2.1.3. Через уравнение непрерывности в форме Тоттаппиллила	5
2.2. Составляющие поля	8
2.2.1. Случай 1. Метод калибровки Лоренца	8
2.2.2. Случай 2. Метод уравнения непрерывности в форме Томсона . . .	10
2.2.3. Случай 3. Метод уравнения непрерывности в форме Тоттаппиллила	13
2.3. Выражение электрического поля через плотность заряда, сформулиро- ванное Тоттаппиллилом	14
Приложение А	16
Приложение В	18
Приложение С	21
Приложение D	23
Приложение E	24