

Рассмотрим вариант движения по окружности с постоянной скоростью. Запишем уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2 \quad (1)$$

Учитывая, что $dm_1 = -dm$ и к ракете ничего не прилипает, перепишем уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u}_1 \quad (2)$$

Спроецируем на ось y :

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{dm}{dt} u_1 \quad (3)$$

Учитывая, что $dv_y = v_0 \cdot d\alpha$, решим дифференциальное уравнение:

$$-\frac{1}{u_1} \cdot dv_y = \frac{dm}{m} \quad (4)$$

$$-\frac{v_0}{u_1} \cdot \int_0^\pi d\alpha = \int_{m_0}^{m^*} \frac{dm}{m} \quad (5)$$

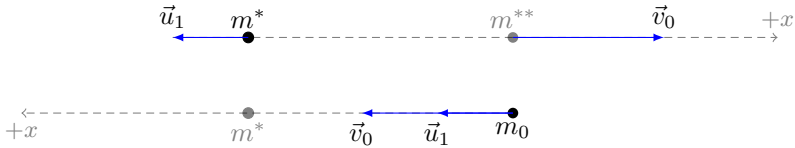
$$-\frac{\pi v_0}{u_1} = \ln \frac{m^*}{m_0} \quad (6)$$

Откуда, потенцируя, найдем массу после разворота:

$$m^* = m_0 \cdot e^{-\frac{\pi v_0}{u_1}} \quad (7)$$

Значит, расход топлива на разворот ракеты был:

$$\Delta m = m^* - m_0 = m_0(1 - e^{-\frac{\pi v_0}{u_1}}) \quad (8)$$



Поэтапно рассмотрим вариант без разворота. Отдельно решим отрезок разгона и отрезок торможения. Ось x введем так, чтобы она все время была сонаправлена с вектором скорости ракеты.

Запишем уравнение Мецгерского в проекции на x на разгоне:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{dm}{dt} u_1 \quad (9)$$

Решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{u_1} \cdot \int_{v_0}^0 dv_x = \int_{m_0}^{m^*} \frac{dm}{m} \quad (10)$$

$$m^* = m_0 \cdot e^{-\frac{v_0}{u_1}} \quad (11)$$

Запишем уравнение Мецгерского в проекции на x на торможении:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt} u_1 \quad (12)$$

Решим дифференциальное уравнение:

$$-\frac{1}{u_1} \cdot \int_0^{v_0} dv_x = \int_{m_0}^{m^*} \frac{dm}{m} \quad (13)$$

$$m^{**} = m^* \cdot e^{-\frac{v_0}{u_1}} \quad (14)$$

Отсюда

$$m^{**} = m_0 \cdot e^{-\frac{2v_0}{u_1}} \quad (15)$$

Значит, расход топлива на маневр ракеты был:

$$\Delta m = m^* - m_0 = m_0(1 - e^{-\frac{2v_0}{u_1}}) \quad (16)$$

Сравнивая расходы топлива на разворот по дуге (8) и торможением-разгоном (16), легко убедиться, что отличие заключается только в множителе степени e : $\pi \rightarrow 2$, и расход топлива при последнем способе меньше.