



Движение без сопротивления. Запишем второй закон Ньютона и последовательным интегрированием найдем зависимость координат шариков от времени, и соответственно, и $l(t)$:

$$\begin{aligned}
 ma_1 &= mg & ma_2 &= mg \\
 m dv_1 &= mg dt & m dv_2 &= mg dt \\
 \int_0^{v_1(t)} dv_1 &= \int_0^{t-\tau} g dt & \int_0^{v_2(t)} dv_2 &= \int_0^t g dt \\
 v_1(t) &= g(t - \tau) & v_2(t) &= gt \\
 \int_0^{x_1(t)} dx_1 &= \int_0^{t-\tau} gt dt & \int_0^{x_2(t)} dx_2 &= \int_0^t gt dt \\
 x_1(t) &= g \frac{(t - \tau)^2}{2} & x_2(t) &= \frac{gt^2}{2} \\
 l(t) &= g \frac{(t - \tau)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(2\tau t + t^2) = gt\left(\tau + \frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Движение с сопротивлением.

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= m\vec{g} - k\vec{v} & \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v \\
 \text{х: } ma &= mg - kv & \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} &= dt
 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $c = g - \frac{k}{m}v$ под интегралом, соответственно новые пределы будут $c[v = 0] = g$ и $c[v = v(t)] = g - \frac{k}{m}v(t)$, а дифференциал $dv = -\frac{m}{k}dc$.

Тогда можем найти $v(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= -\frac{m}{k} \int_g^{g-\frac{k}{m}v(t)} \frac{dc}{c} & 1 - \frac{kv(t)}{mg} &= e^{-\frac{k}{m}t} \\ t &= -\frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{kv(t)}{mg}\right) & v(t) &= \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \end{aligned}$$

Проинтегрировав еще раз, найдем $x(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{x(t)} dx &= \int_0^t \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) dt \\ x(t) &= \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}[e^{-\frac{k}{m}t} - 1]) \end{aligned}$$

Тогда, зная, что движения шариков подобны и отличаются только временем начала движения, найдем $l(t)$:

$$\begin{aligned} l(t) &= x(t + \tau) - x(t) = \frac{mg}{k}(\tau + \frac{m}{k}[e^{-\frac{k}{m}t} - 1] - \frac{m}{k}[e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{-\frac{k}{m}\tau} - 1]) = \\ &= \frac{mg}{k}(\tau + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} - \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{-\frac{k}{m}\tau} + \frac{m}{k}) = \\ &= \frac{mg}{k}(\tau + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}[1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}]) \end{aligned}$$