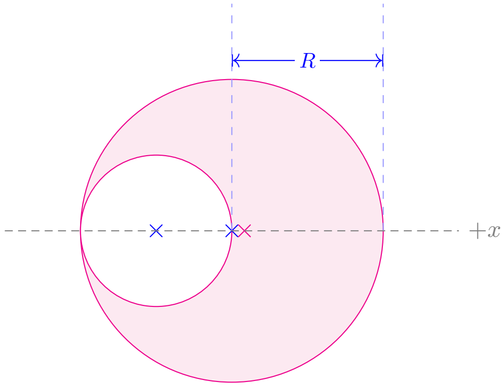

Найдем центр масс диска (масса – $\tilde{m}$) с вырезом, формально представив вырез как наложенный (в месте выреза) на основной диск с массой M малый диск с отрицательной массой «$-m$».

Массы таких дисков найдем из условия:

$$\rho(\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}) = \tilde{m} \Rightarrow \tilde{m} = \rho\frac{3}{4}\pi R^2 \tag{1}$$

Тогда

$$m = \rho\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{3}\tilde{m} \tag{2}$$

$$M = \rho\pi R^2 = \frac{4}{3}\tilde{m} \tag{3}$$

Относительно оси x диск симметричен $\Rightarrow y_c = 0$. Тогда

$$x_c = \frac{M\cdot 0 - m\cdot(-\frac{R}{2})}{\tilde{m}} = \frac{1}{6}R \tag{4}$$

Момент инерции диска относительно геометрического центра найдем как разность моментов целого диска и вырезанного, где момент вырезанного относительно O выразим через теорему Гюйгенса-Штейнера:

$$I_o = \frac{MR^2}{2} - \left(\frac{mR^2}{8} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{4}{3}\tilde{m}\frac{R^2}{2} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\tilde{m}\frac{R^2}{2} = \frac{13}{24}\tilde{m}R^2 \tag{5}$$

По той же теореме найдем момент инерции относительно ц.м.:

$$I_c = I_o - \tilde{m}\cdot\left(\frac{1}{6}R\right)^2 = \frac{13}{24}\tilde{m}R^2 - \frac{1}{36}\tilde{m}R^2 = \frac{37}{72}\tilde{m}R^2 \tag{6}$$