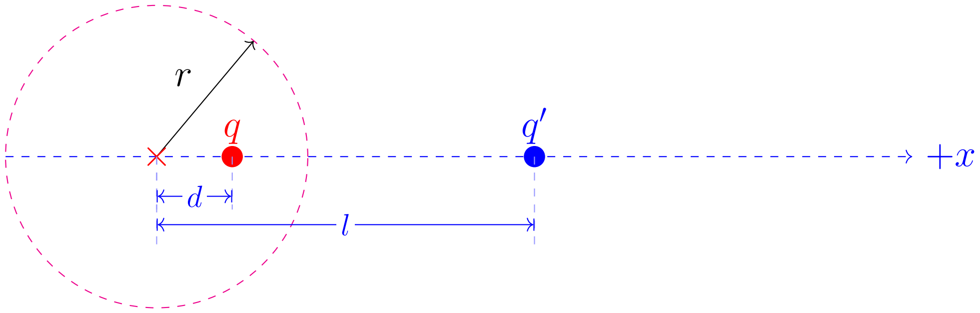
Ранее был выведен факт, что в системе двух зарядов поверхностью нулевого потенциала будет сфера.

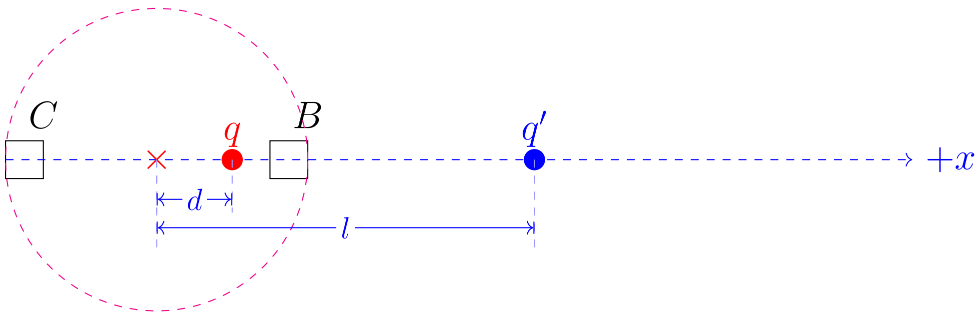
Такой системой можно заменить исходную (только при $|x| < r$, так как при $|x| \in [r; R]$ $\vec{E} = 0$), заряд q' будет изображением заряда q.



Нам известны r, q, d. Тогда решим систему, считая равным нулю в точках $x = \pm r$:

$$\begin{cases} \dfrac{kq}{l-r} + \dfrac{kq'}{r-d} = 0 \\ \dfrac{kq}{l+r} + \dfrac{kq'}{r+d} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q' = -q\dfrac{r}{d} \\ l = \dfrac{r^2}{d} \end{cases} \tag{1}$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского. Выберем поверхность - цилиндр, одним донышком лежащий на сфере в точке C, вторым внутри сферы. Цилиндр должен быть достаточно мал, чтобы поток через его боковую поверхность был равен нулю.



Тогда с левой стороны:

$$\oiint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = -\frac{kqS}{(r+d)^2} + \frac{k|q'|S}{(r+l)^2} = k4\pi q_{in} = -k4\pi\sigma_c \cdot S \tag{2}$$

Минус справа здесь, чтобы плотность была модулем (изнутри заряд индуцирован отрицательный). Откуда нетрудно показать, что

$$\sigma_c = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(r+d)^2} - \frac{r}{d(r+r^2/d)^2}\right] = \frac{q}{4\pi(r+d)^2}\left[1 - \frac{d}{r}\right] \tag{3}$$

Аналогично с правой

$$\oiint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = -\frac{kqS}{(r-d)^2} + \frac{k|q'|S}{(l-r)^2} = k4\pi q_{in2} = -k4\pi\sigma_b \cdot S \tag{4}$$

$$\sigma_b = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(r-d)^2} - \frac{r}{d(r^2/d-r)^2}\right] = \frac{q}{4\pi(r-d)^2}\left[1+\frac{d}{r}\right] \tag{5}$$

Индуцированный заряд снаружи распределен равномерно, и по модулю равен q (можно показать через т.Гаусса). Тогда

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \tag{6}$$

Потенциал вне такого сферического слоя будет таким же, как и потенциал точечного заряда q в её центре. Тогда на внешней поверхности:

$$\phi = \frac{q}{R} \tag{7}$$