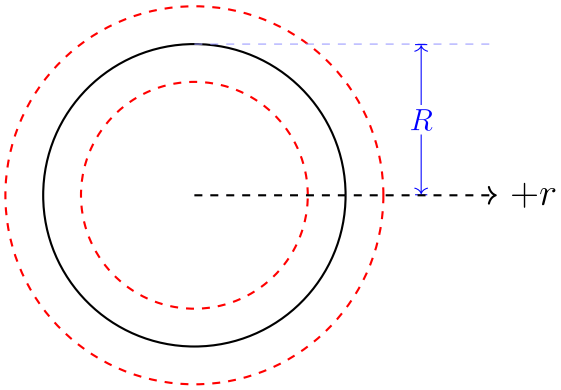

Найдем напряженность поля сферы по теореме Гаусса:

$$\oiint\limits_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi q_{in} \tag{1}$$

$$ES = E4\pi r^2 = k \cdot 4\pi \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, & r < R \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, & r \geq R \end{cases} \tag{2}$$

Откуда

$$E = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi \rho k r, & r < R \\ \frac{4}{3}\pi \rho k \frac{R^3}{r^2}, & r \geq R \end{cases} \tag{3}$$

Тогда плотность собственной энергии

$$w = \frac{E^2}{8\pi k} = \begin{cases} \frac{kq^2 r^2}{8\pi R^6}, & r < R \\ \frac{kq^2}{8\pi r^4}, & r \geq R \end{cases} \tag{4}$$

Но тогда

$$W = \iiint\limits_{(V)} w\, dV = \int\limits_0^R \frac{kq^2 r^2}{8\pi R^6} 4\pi r^2 dr + \int\limits_R^\infty \frac{kq^2}{8\pi r^4} 4\pi r^2 dr = \tag{5}$$

$$= \frac{kq^2}{2R^6} \int\limits_0^R r^4 dr + \int\limits_R^\infty \frac{kq^2}{2r^2} dr = \frac{kq^2}{10R} + \frac{kq^2}{2R} = \frac{6kq^2}{10R} = \frac{3kq^2}{5R}$$