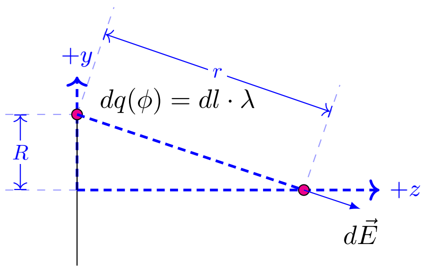

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{S} = 4\pi \tag{1}$$

Линейная плотность заряда на кольце

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} \tag{2}$$

Напряженность элементарного (точечного) заряда dq

$$dE = \frac{k \cdot \lambda dl}{r^2} \tag{3}$$

С другой стороны, если перейти в полярную систему координат, то

$$dl = Rd\phi \tag{4}$$

И тогда

$$dE = \frac{k \cdot \lambda R d\phi}{r^2} = \frac{k\lambda R}{r^2} d\phi \tag{5}$$

Запишем дифференциал напряженности в проекциях:

$$dE_x = \frac{k\lambda R}{r^2} \cos\phi \sin\Theta\ d\phi, \quad E_x = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin\Theta \int\limits_0^{2\pi} \cos\phi\ d\phi = 0 \tag{6}$$

$$dE_y = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin\phi \sin\Theta\ d\phi, \quad E_y = \frac{k\lambda R}{r^2} \sin\Theta \int\limits_0^{2\pi} \sin\phi\ d\phi = 0 \tag{7}$$

$$dE_z = \frac{k\lambda R}{r^2} \cos\Theta\ d\phi, \quad E_z = \frac{k\lambda R}{r^2} \cos\Theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{k 2\pi\lambda R x}{r^3} = \frac{kqx}{r^3} \tag{8}$$

Где

$$\sin\Theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \quad , \quad \cos\Theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{9}$$

Тогда полная напряженность в точке наблюдения

$$E = E_z = k\frac{qz}{r^3} = k\frac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{10}$$

При $z \gg R$

$$E = k\frac{q}{z^2} \tag{11}$$

Найдем на оси z точку максимума напряженности.

$$\frac{dE}{dz} = \frac{kq(R^2-2z^2)}{\dots} = 0 \tag{12}$$

На расстоянии z' (решение уравнения выше) E будет максимальным:

$$z' = \frac{R}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

$$E_{max} = E(z') = k\frac{qR}{\sqrt{2}(R^2+R^2/2)^{3/2}} = \frac{2kq}{3\sqrt{3}R^2} \tag{14}$$

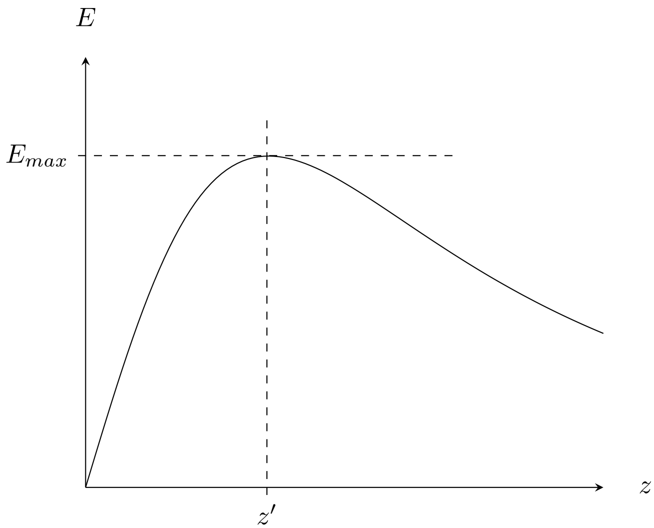

Рис. 1: График функции $E(z)$