# 1 Таблица простейших преобразований Лапласа

| Изображение | Оригинал$(t \geq 0)$ |
|---|---|
| $1$ | $\delta(t)$ |
| $\frac{1}{p}$ | $1(t)$ |
| $\frac{1}{p^2}$ | $t$ |
| $\frac{1}{p+a}$ | $e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(p+a)^2}$ | $te^{-at}$ |
| $\frac{p}{p+a}$ | $\delta(t) - ae^{-at}$ |
| $\frac{p}{(p+a)^2}$ | $(1-at)e^{-at}$ |
| $\frac{a}{p(p+a)}$ | $1 - e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ | $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$ |
| $\frac{p}{(p+a)(p+b)}$ | $\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$ |
| $\frac{b^2}{p^2(p+b)}$ | $bt - (1 - e^{-bt})$ |
| $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ | $\sin \omega t$ |
| $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ | $\cos \omega t$ |

# 2 Типовые задачи по радиоэлектронике

## 2.1 Задача №1

**Дано.** Найти спектр сигнала $S(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$. Нарисовать график $|S(\omega)|$. Что будет при разных $\tau$?

**Решение**. $\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{-i\omega t} dt = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t\right)} dt$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты:

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2\tau^2}{4}} dt$$

Сделаем замену переменных: $\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2} = x$ , $t = \tau x - \frac{i\omega\tau}{2}\tau$ , $dt = \tau dx$

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A\tau e^{\frac{-\omega^2\tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Это интеграл Пуассона, тогда:

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A\tau e^{\frac{-\omega^2\tau^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Чем медленнее изменяется U(t) (т.е. чем больше $\tau$ ), тем быстрее изменяется $|S(\omega)|$ (т.е. тем уже спектр сигнала), и наоборот. Похоже ли это на интеграл Пуассона? Наверное, не должно быть деления на 2 □

## 2.2 Задача №2

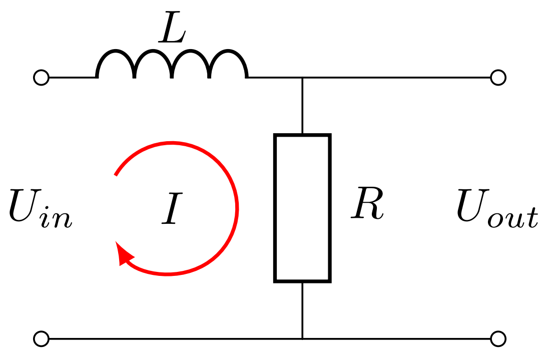


Рис. 1: $RL$–контур

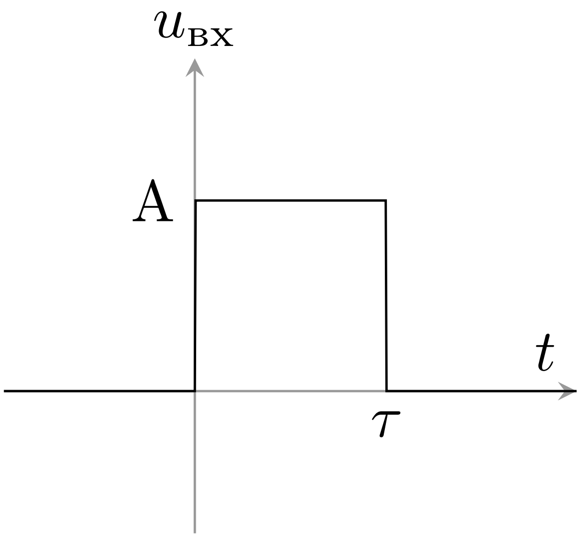


Рис. 2: Входное напряжение

**Дано.** Определить отклик выхода RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью $\tau_0$. Нарисовать график $u_{\text{вых}}(t)$. При выполнении какого условия будет осуществляться приближенное интегрирование входной цепи?

**Решение**. Эквивалентная схема (картиночка)

$$u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{A}{p} - \frac{A}{p} \cdot e^{-p\tau} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

По второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжения на всех элементах цепи равна ЭДС. В нашем случае возможное начальное напряжение на катушке мы относим к ЭДС, а сумму падений напряжения записываем как ток в контуре на суммарный импеданс контура:

$$\mathscr{E} = Z(p) \cdot I(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) + i_L(0)L = (pL + R)I(p)$$

Отсюда выражаем ток в контуре:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)}{pL + R} + \frac{i_L(0)L}{pL + R}$$

Теперь мы можем найти и выходное напряжение – напряжение на резисторе:

$$u_{\text{вых}}(p) \equiv u_R(p) = I(p)R = \frac{AR(1-e^{-p\tau})}{p(pL+R)} + \frac{i_L(0)RL}{pL+R} = \frac{\frac{AR}{L}(1-e^{-p\tau})}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)} + \frac{i_L(0)R}{p+\frac{R}{L}} =$$
$$= A\frac{\frac{R}{L}}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)} - A\frac{\frac{R}{L}}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)}e^{-p\tau} + i_L(0)R\frac{1}{p+\frac{R}{L}}$$

Используя свойства преобразования Лапласа

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1-e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Из выражения $u_{\text{вых}}(p)$ элементарно получаем оригинал $u_{\text{вых}}(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = A\Big(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\Big)\cdot\mathbb{1}(t) - A\Big(1-e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\Big)\cdot\mathbb{1}(t-\tau) + i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)$$

График построен при $i_L(0)R = \frac{A}{2}$

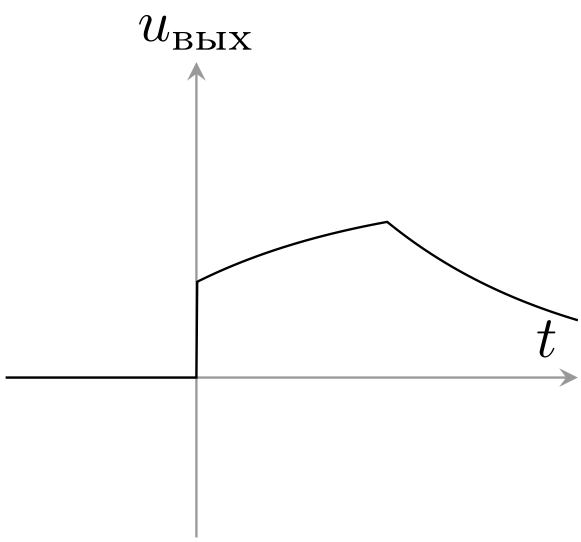


Рис. 3: $u_{\text{вых}}(t)$

**Условие интегрирования.** Рассмотрим очевидное равенство $u_{\text{вх}} = u_L + u_{\text{вых}}$. Перепишем это выражение:

$$u_{\text{вх}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{R}\underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}} + R\int I\,\mathrm{d}t$$

Если будет выполнено условие

$$\left|R\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll |LI| \quad \Rightarrow \quad \left|\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll \left|\frac{L}{R}I\right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}}\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство (2.2) можно переписать:

$$\left|I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\right| \ll \left|\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \quad \Rightarrow \quad T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот. □

## 2.3 Задача №3

**Дано.** Определите отклик $u_{\text{вых}}(t)$ $RL$-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью $\tau$. Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

**Решение**. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = \frac{E}{p}\big(1 - e^{-p\tau}\big)$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - ток $i_0$. Тогда начальное напряжение на катушке $u_L(0) = i_0 \cdot pL$, а его образ $u_L(0) \risingdotseq \frac{i_0 pL}{p} = i_0 L$. Это напряжение можно трактовать как часть ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p}\big(1 - e^{-p\tau}\big) + i_0 L = (R + pL)I(p)$$

Откуда выразим ток $I$:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}(1 - e^{-p\tau}) + i_0 L}{R + pL}$$

С другой стороны, $u_{\text{вх}} = u_C + u_R$, а $u_C \equiv u_{\text{вых}}$, тогда

$$u_{\text{вых}}(p) = u_{\text{вх}}(p) - u_R(p) = u_{\text{вх}}(p) - I(p)R =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E(1 - e^{-p\tau})R}{p(R+pL)} + \frac{i_0 LR}{R + pL} = u_{\text{вх}}(p) - \frac{ER}{p(R+pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R+pL)} - \frac{i_0 LR}{R+pL} =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E\frac{R}{L}}{p(p+\frac{R}{L})} + \frac{E\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p(p+\frac{R}{L})} - \frac{i_0 R}{p + \frac{R}{L}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Учтя, что $u_{\text{вх}}(p) \risingdotseq u_{\text{вх}}(t)$, произведем преобразование:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t-\tau) - i_0 R e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$
$$= \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t)} - \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t-\tau)} - E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t-\tau) - i_0 R e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$

$$= (E - i_0 R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{вх}}(t)$ амплитуды $E$ и длительностью $\tau$, на выходе получаем

$$u_{\text{вых}}(t) = (E - i_0 R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t-\tau)$$

**Условие дифференцирования.** Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}}_{L\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}} + \frac{R}{L}\underbrace{L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}_{u_L \equiv u_{\text{вых}}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left|L\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\right| \ll \left|\frac{R}{L}u_L\right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t}$$

□