

1 Таблица простейших преобразований Лапласа

Изображение	Оригинал($t \geq 0$)
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	$1(t)$
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{p+a}$	$\delta(t) - ae^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{b^2}{p^2(p+b)}$	$bt - (1 - e^{-bt})$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$

2 Типовые задачи по радиоэлектронике

2.1 Задача №1

Дано. Найти спектр сигнала $S(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$. Нарисовать график $|S(\omega)|$. Что будет при разных τ ?

Решение.

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) e^{-i\omega t} dt$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты. Схема выделения полного квадрата следующая. Пусть у нас есть выражение вида $a^2 + b$, тогда можно привести его к виду полного квадрата следующим образом:

$$a^2 + b = a^2 + 2 \cdot a \cdot d + d^2 - d^2 = (a + d)^2 - d^2$$

Найти d нетрудно:

$$d = \frac{b}{2a} \Rightarrow a^2 + b = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

В нашем случае

$$\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2$$

И наш интеграл переходит в следующий:

$$S(\omega) = A \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2\right) dt$$

Сделаем замену переменных: $\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2} = x$, $t = \tau x - \frac{i\omega\tau}{2}\tau$, $dt = \tau dx$

$$S(\omega) = A\tau \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\right) = \sqrt{\pi}A\tau \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right)$$

Найдем характерную временную ширину сигнала. Для экспоненциального спадаения это время, за которое функция спадет в e раз, и для нашей функции это время $\Delta t = \tau$.

Характерная ширина спектра находится аналогично:

$$\frac{\omega^2 \tau^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau}$$

Заметим отсюда характерное поведение спектра: чем уже сигнал во времени (меньше τ), тем шире его частотный спектр.

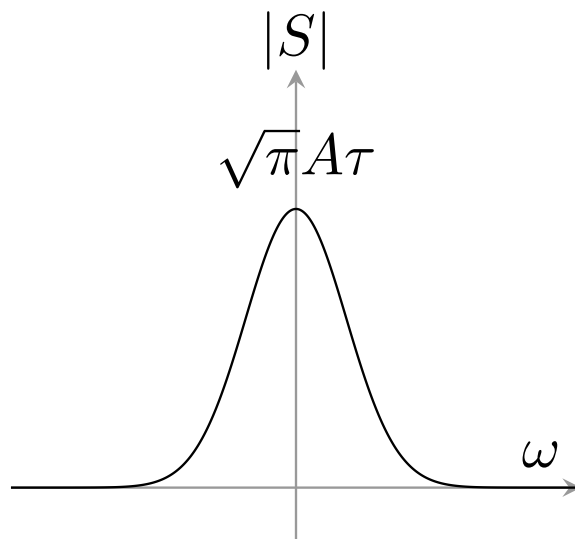


Рис. 1: Спектр сигнала

□

2.2 Задача №2

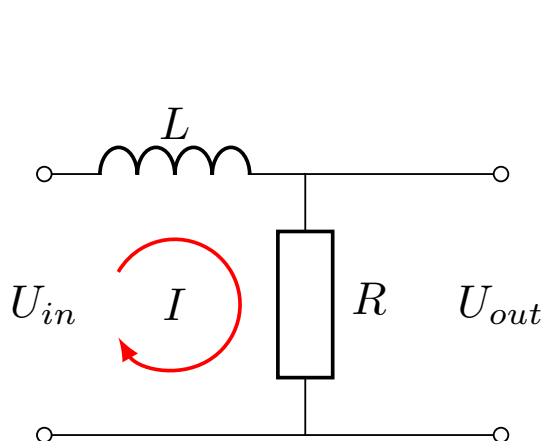
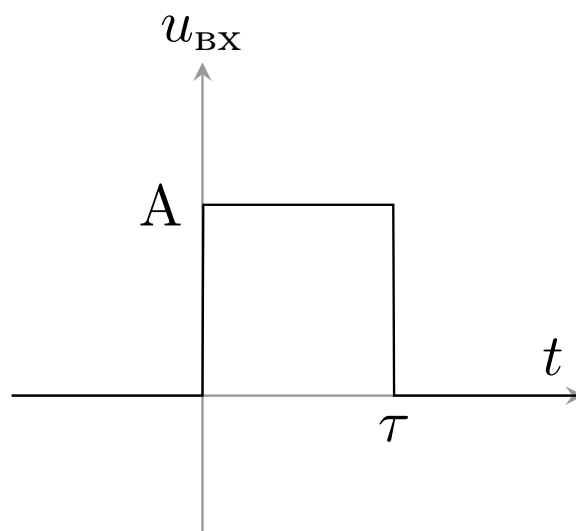
Рис. 2: RL -контур

Рис. 3: Входное напряжение

Дано. Определить отклик выхода RL -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ . Нарисовать график $u_{\text{вых}}(t)$. При выполнении какого условия будет осуществляться приближенное интегрирование входной цепи?

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = A \cdot 1(t) - A \cdot 1(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{вх}}(t) \doteq \frac{A}{p} - \frac{A}{p} e^{-p\tau} = \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

По второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжения на всех элементах цепи равна ЭДС. В нашем случае возможное начальное напряжение на катушке мы относим к ЭДС, а сумму падений напряжения записываем как ток в контуре на суммарный импеданс контура:

$$\mathcal{E} = Z(p) \cdot I(p) \Rightarrow \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_L(0)L = (pL + R)I(p)$$

Отсюда выражаем ток в контуре:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau})}{pL + R} + \frac{i_L(0)L}{pL + R}$$

Теперь мы можем найти и выходное напряжение – напряжение на резисторе:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(p) \equiv u_R(p) &= I(p)R = \frac{AR(1 - e^{-p\tau})}{p(pL + R)} + \frac{i_L(0)RL}{pL + R} = \frac{\frac{AR}{L}(1 - e^{-p\tau})}{p(p + \frac{R}{L})} + \frac{i_L(0)R}{p + \frac{R}{L}} = \\ &= A \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} - A \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} e^{-p\tau} + i_L(0)R \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Используя свойства преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} &\doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t) \\ \frac{1}{(p + \alpha)} &\doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t) \\ e^{-p\tau}F(p) &\doteq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t) \end{aligned}$$

Из выражения $u_{\text{ВЫХ}}(p)$ элементарно получаем оригинал $u_{\text{ВЫХ}}(t)$:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = A \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \cdot \mathbb{1}(t) - A \left(1 - e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\right) \cdot \mathbb{1}(t - \tau) + i_L(0)R e^{-\frac{Rt}{L}} \cdot \mathbb{1}(t)$$

График построен при $i_L(0)R = \frac{A}{2}$.

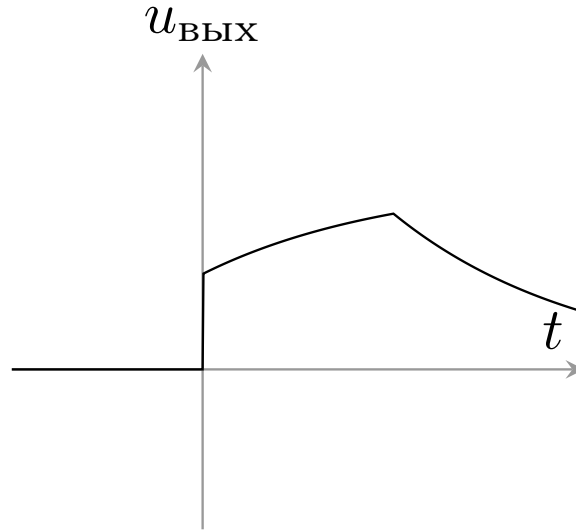


Рис. 4: $u_{\text{ВЫХ}}(t)$

Условие интегрирования. Рассмотрим очевидное равенство $u_{\text{ВХ}} = u_L + u_{\text{ВЫХ}}$. Перепишем это выражение:

$$u_{\text{ВХ}} = L \frac{dI}{dt} + \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{ВХ}} dt = \frac{L}{R} \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}} + R \int I dt$$

Если будет выполнено условие

$$\left| R \int I dt \right| \ll |LI| \quad \Rightarrow \quad \left| \int I dt \right| \ll \left| \frac{L}{R} I \right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \int u_{\text{ВХ}} dt$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{ВХ}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство (2.2) можно переписать:

$$\left| I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right| \ll |\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \quad \Rightarrow \quad T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот. \square

2.3 Задача №3

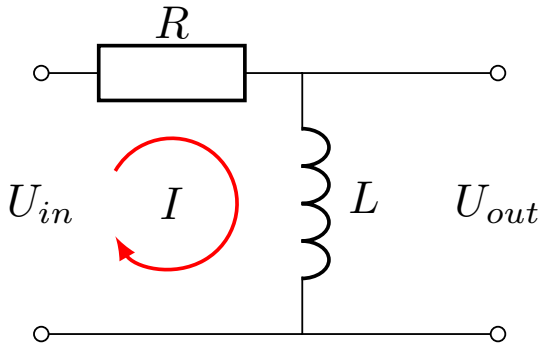
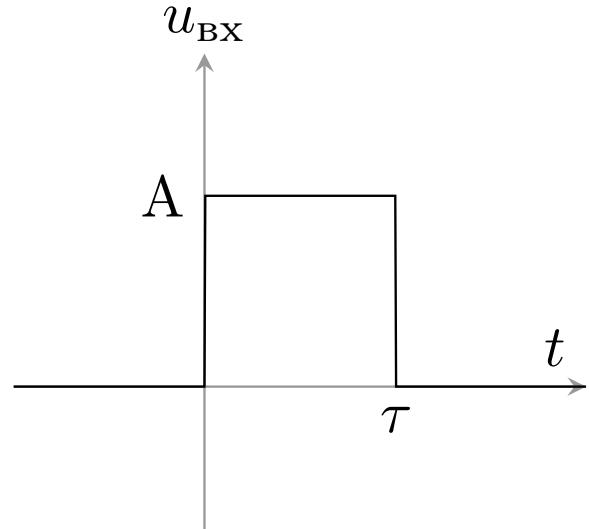
Рис. 5: RL -контур

Рис. 6: Входное напряжение

Дано. Определите отклик $u_{\text{вых}}(t)$ RL -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью τ . Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{BX}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{BX}}(t) \doteq \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-p\tau} = \frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - ток i_0 . Тогда начальное напряжение на катушке $u_L(0) = i_0 \cdot pL$, а его образ $u_L(0) \doteq \frac{i_0 pL}{p} = i_0 L$. Это напряжение можно трактовать как часть ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_0 L = (R + pL) I(p)$$

Откуда выразим ток I :

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_0 L}{R + pL}$$

С другой стороны, $u_{\text{BX}} = u_C + u_R$, а $u_C \equiv u_{\text{ВЫХ}}$, тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(p) &= u_{\text{BX}}(p) - u_R(p) = u_{\text{BX}}(p) - I(p)R = \\ &= u_{\text{BX}}(p) - \frac{E(1 - e^{-p\tau})R}{p(R + pL)} + \frac{i_0LR}{R + pL} = u_{\text{BX}}(p) - \frac{ER}{p(R + pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R + pL)} - \frac{i_0LR}{R + pL} = \\ &= u_{\text{BX}}(p) - \frac{E\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} + \frac{E\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{i_0R}{p + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} &\doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t) \\ \frac{1}{(p + \alpha)} &\doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t) \\ e^{-p\tau}F(p) &\doteq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t) \end{aligned}$$

Учтя, что $u_{\text{BX}}(p) \doteq u_{\text{BX}}(t)$, произведем преобразование:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= u_{\text{BX}}(t) - E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) = \\ &= \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t)} - \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t - \tau)} - E(\chi - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(\chi - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) = \\ &= (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t - \tau) \end{aligned}$$

Окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{BX}}(t)$ амплитуды E и длительностью τ , на выходе получаем

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t - \tau)$$

Условие дифференцирования. Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{BX}} = u_L + u_R = L \frac{dI}{dt} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{du_{\text{BX}}}{dt} = \underbrace{L \frac{d^2I}{dt^2}}_{\frac{du_L}{dt}} + \underbrace{\frac{R}{L} L \frac{dI}{dt}}_{u_L \equiv u_{\text{ВЫХ}}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left| \frac{du_L}{dt} \right| \ll \left| \frac{R}{L} u_L \right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \tau_{\text{цепи}} \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt}$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{ВХ}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство можно переписать (учтем, что $u_L = I \cdot j\omega L = I_0 j\omega L e^{j\omega t}$):

$$|I_0 \cdot j\omega L \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}| \ll \left| \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 \cdot j\omega L \cdot e^{j\omega t} \right| \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \Rightarrow T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот. \square

2.4 Задача №4

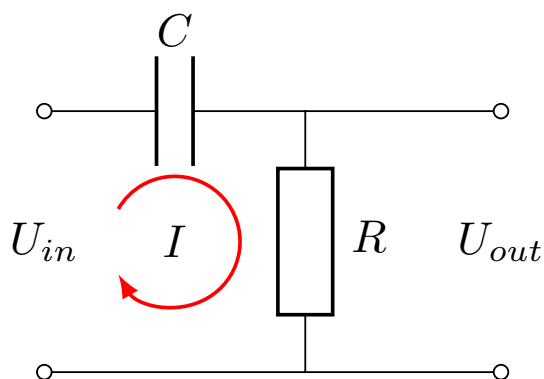
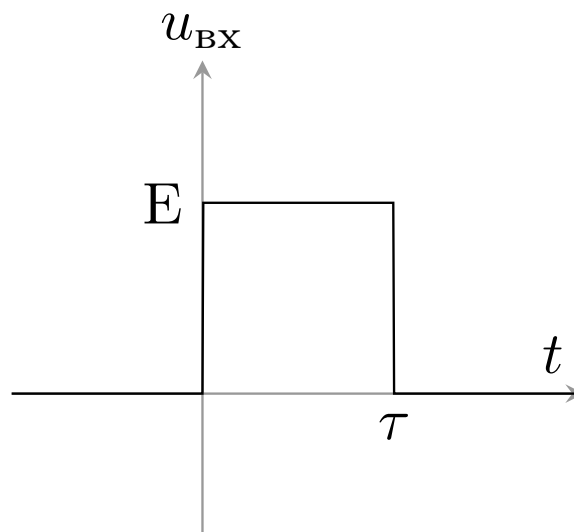
Рис. 7: RC -контур

Рис. 8: Входное напряжение

Дано. Определить отклик $u_{\text{вых}}(t)$ RC -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ . Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{BX}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{BX}}(t) \doteq \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-p\tau} = \frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - напряжение на конденсаторе $u_C(0) = u_0$. Его образ $u_C(0) \doteq \frac{u_0}{p}$

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) = (R + \frac{1}{pC}) I(p) + \frac{u_0}{p}$$

Откуда выразим ток I :

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + u_0/p}{R + \frac{1}{pC}}$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{R}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{E}{R}e^{-p\tau}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{u_0}{R}}{p + \frac{1}{RC}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$

$$\frac{1}{(p + \alpha)} \doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$

$$e^{-p\tau}F(p) \doteq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t)$$

Произведем преобразование:

$$I(t) = (E - u_0)\frac{\mathbb{1}(t)}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - \frac{E}{R} \exp\left\{-\frac{t - \tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t - \tau)$$

Воспользуемся соотношением $u_{\text{вых}} = I(t)R$ и окончательно получилим ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{вх}}(t)$ амплитуды E и длительностью τ , на выходе получаем

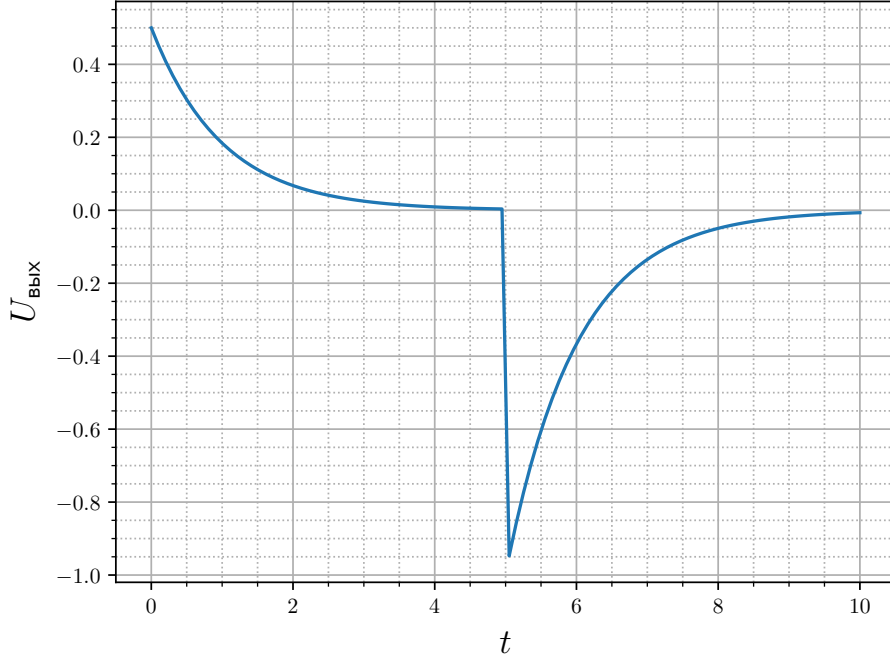


Рис. 9: Решение при $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$

$$u(t) = (E - u_0)\mathbb{1}(t) \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - E \exp\left\{-\frac{t - \tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t - \tau)$$

График решения при $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$ изображен на рис. 9

Условие дифференцирования. Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_R = \frac{q}{C} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \frac{1}{RC} \underbrace{IR}_{u_R \equiv u_{\text{вых}}} + \underbrace{\frac{dI}{dt}R}_{\frac{du_R}{dt}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left| \frac{du_R}{dt} \right| \ll \left| \frac{1}{RC} u_R \right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau_{\text{цепи}} \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$$

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{i\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{i\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{\frac{1}{i\omega C} + R}$, и неравенство можно переписать (учтем, что $u_C = \frac{I}{i\omega C} = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{i\omega C}$):

$$|I_0 R \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t}| \ll \left| \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 R \cdot e^{i\omega t} \right| \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \Rightarrow T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.

□

2.5 Задача №5

Дано. Найти спектр прямоугольного сигнала $S(t) = A(-1(t) + 1(t - t_1))$. Нарисовать график $|S(\omega)|$.

Решение. Продифференцируем $S(t)$:

$$\frac{dS}{dt} = A(-\delta(t) + \delta(t - t_1))$$

По свойству дифференцирования преобразования Фурье:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) \implies S(\omega) = \frac{S'(\omega)}{i\omega}$$

$$S'(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t - t_1) - \delta(t)) e^{-i\omega t} dt = A(-1 + e^{-i\omega t_1}) = A(e^{-i\omega t_1} - 1)$$

Получаем:

$$S(\omega) = \frac{A}{i\omega} (e^{-i\omega t_1} - 1)$$

Вынесем за скобки $e^{-\frac{i\omega t_1}{2}}$:

$$-\frac{A}{i\omega} e^{-\frac{i\omega t_1}{2}} \underbrace{(e^{\frac{i\omega t_1}{2}} - e^{-\frac{i\omega t_1}{2}})}_{2i \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)} = \frac{-2A}{\omega} e^{-\frac{i\omega t_1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) = At_1 e^{-i\left(\frac{\omega t_1}{2} - \pi\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)}$$

И окончательный ответ:

$$|S(\omega)| = At_1 \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)} \right|,$$

где t_1 – длительность прямоугольного импульса.

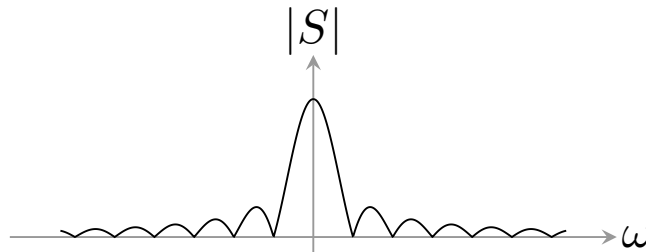


Рис. 10: Спектр прямоугольного импульса

□