

# 1 Таблица простейших преобразований Лапласа

Изображение	Оригинал( $t \geq 0$ )
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	$1(t)$
$\frac{1}{p^2}$	$t$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{p}{p+a}$	$\delta(t) - ae^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{b^2}{p^2(p+b)}$	$bt - (1 - e^{-bt})$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$

## 2 Типовые задачи по радиоэлектронике

### 2.1 Задача №1

**Дано.** Найти спектр сигнала  $S(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$ . Нарисовать график  $|S(\omega)|$ . Что будет при разных  $\tau$ ?

**Решение.**

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) e^{-i\omega t} dt$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты. Схема выделения полного квадрата следующая. Пусть у нас есть выражение вида  $a^2 + b$ , тогда можно привести его к виду полного квадрата следующим образом:

$$a^2 + b = a^2 + 2 \cdot a \cdot d + d^2 - d^2 = (a + d)^2 - d^2$$

Найти  $d$  нетрудно:

$$d = \frac{b}{2a} \Rightarrow a^2 + b = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

В нашем случае

$$\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2$$

И наш интеграл переходит в следующий:

$$S(\omega) = A \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2\right) dt$$

Сделаем замену переменных:  $\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2} = x$ ,  $t = \tau x - \frac{i\omega\tau}{2}\tau$ ,  $dt = \tau dx$

$$S(\omega) = A\tau \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\right) = \sqrt{\pi}A\tau \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right)$$

Найдем характерную временную ширину сигнала. Для экспоненциального спадаения это время, за которое функция спадет в  $e$  раз, и для нашей функции это время  $\Delta t = \tau$ .

Характерная ширина спектра находится аналогично:

$$\frac{\omega^2 \tau^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau}$$

Заметим отсюда характерное поведение спектра: чем уже сигнал во времени (меньше  $\tau$ ), тем шире его частотный спектр.

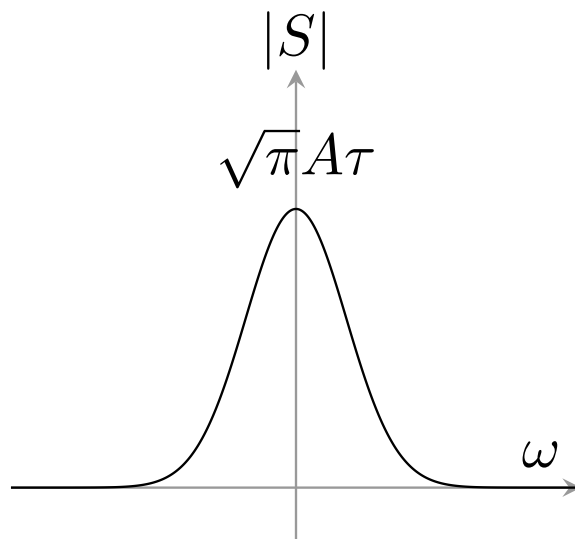


Рис. 1: Спектр сигнала

□

## 2.2 Задача №2

**Дано.** Определить отклик выхода  $RL$ -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью  $\tau$ . Нарисовать график  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ . При выполнении какого условия будет осуществляться приближенное интегрирование входной цепи?

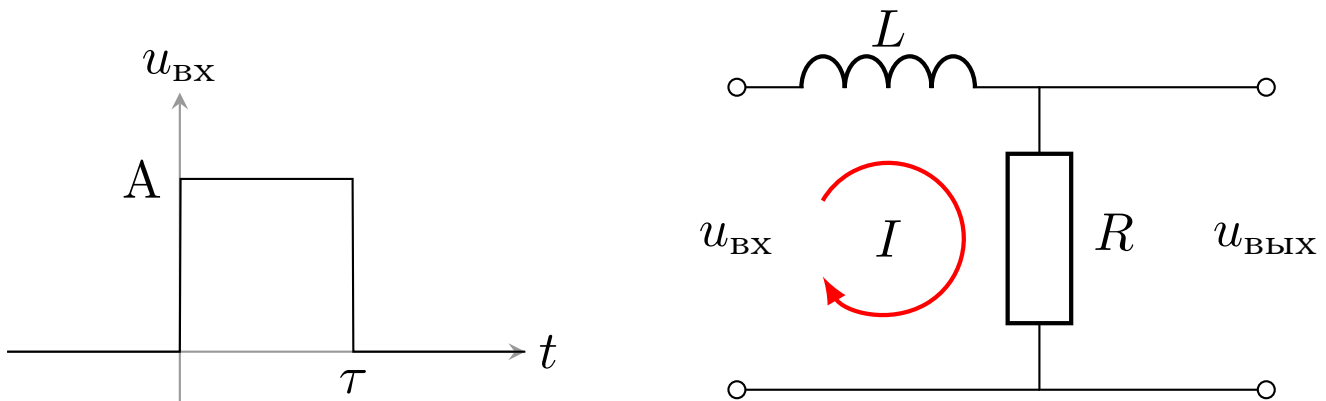


Рис. 2: Входной импульс и схема  $RL$ -цепи

**Решение.** Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = A \cdot 1(t) - A \cdot 1(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{ВХ}}(t) \doteq \frac{A}{p} - \frac{A}{p} e^{-p\tau} = \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

По второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжения на всех элементах цепи равна ЭДС. В нашем случае возможное начальное напряжение на катушке мы относим к ЭДС, а сумму падений напряжения записываем как ток в контуре на суммарный импеданс контура:

$$\mathcal{E} = Z(p) \cdot I(p) \Rightarrow \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_L(0)L = (pL + R)I(p)$$

Отсюда выражаем ток в контуре:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}(1 - e^{-p\tau})}{pL + R} + \frac{i_L(0)L}{pL + R}$$

Теперь мы можем найти и выходное напряжение – напряжение на резисторе:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(p) \equiv u_R(p) &= I(p)R = \frac{AR(1 - e^{-p\tau})}{p(pL + R)} + \frac{i_L(0)RL}{pL + R} = \frac{\frac{AR}{L}(1 - e^{-p\tau})}{p(p + \frac{R}{L})} + \frac{i_L(0)R}{p + \frac{R}{L}} = \\ &= A \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} - A \frac{\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} e^{-p\tau} + i_L(0)R \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Используя свойства преобразования Лапласа

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$

$$\frac{1}{(p+\alpha)} \doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$

$$e^{-p\tau}F(p) \doteq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t)$$

Из выражения  $u_{\text{ВЫХ}}(p)$  элементарно получаем оригинал  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ :

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = A\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \cdot \mathbb{1}(t) - A\left(1 - e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\right) \cdot \mathbb{1}(t-\tau) + i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}} \cdot \mathbb{1}(t)$$

График построен при  $i_L(0)R = \frac{A}{2}$ .

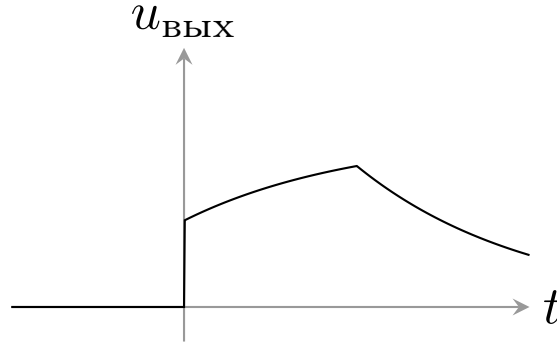


Рис. 3:  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$

**Условие интегрирования.** Рассмотрим очевидное равенство  $u_{\text{ВХ}} = u_L + u_{\text{ВЫХ}}$ . Перепишем это выражение:

$$u_{\text{ВХ}} = L \frac{dI}{dt} + \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{ВХ}} dt = \frac{L}{R} \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}} + R \int I dt$$

Если будет выполнено условие

$$\left| R \int I dt \right| \ll |LI| \quad \Rightarrow \quad \left| \int I dt \right| \ll \left| \frac{L}{R} I \right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \int u_{\text{ВХ}} dt$$

где  $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$ .

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое  $u_{\text{вх}} = u_0 e^{j\omega t}$ . Тогда ток в контуре:  $I = I_0 e^{j\omega t}$ , где  $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$ , и неравенство (2.8) можно переписать:

$$\left| I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right| \ll |\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}| \Rightarrow \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \Rightarrow T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.  $\square$

## 2.3 Задача №3

**Дано.** Определите отклик  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$   $RL$ -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью  $\tau$ . Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

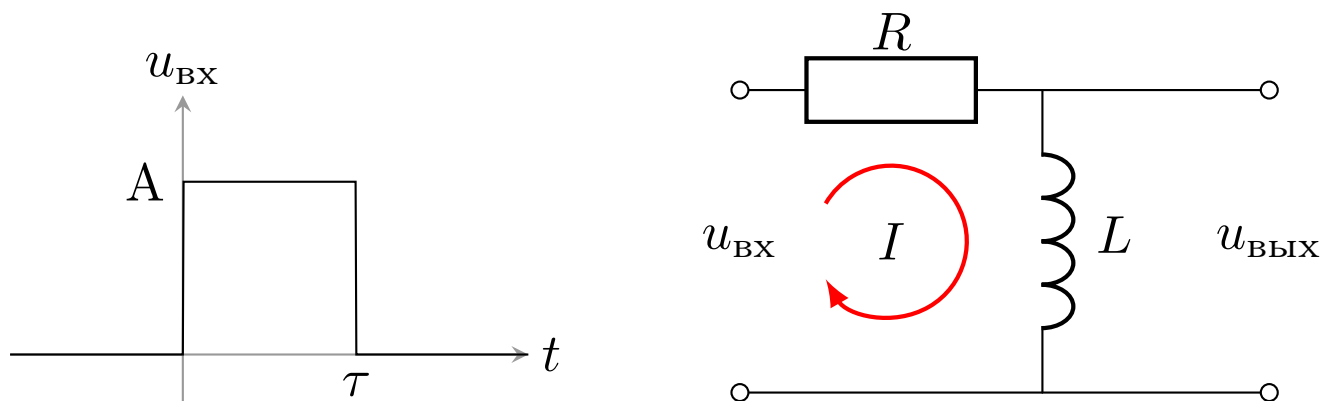


Рис. 4: Входной импульс и схема  $RL$ -цепи

**Решение.** Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{ВХ}}(t) \doteq \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-p\tau} = \frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - ток  $i_0$ . Тогда начальное напряжение на катушке  $u_L(0) = i_0 \cdot pL$ , а его образ  $u_L(0) \doteq \frac{i_0 pL}{p} = i_0 L$ . Это напряжение можно трактовать как часть ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за  $I(p)$ . Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_0 L = (R + pL) I(p)$$

Откуда выразим ток  $I$ :

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + i_0 L}{R + pL}$$

С другой стороны,  $u_{\text{BX}} = u_C + u_R$ , а  $u_C \equiv u_{\text{ВЫХ}}$ , тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(p) &= u_{\text{BX}}(p) - u_R(p) = u_{\text{BX}}(p) - I(p)R = \\ &= u_{\text{BX}}(p) - \frac{E(1 - e^{-p\tau})R}{p(R + pL)} + \frac{i_0LR}{R + pL} = u_{\text{BX}}(p) - \frac{ER}{p(R + pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R + pL)} - \frac{i_0LR}{R + pL} = \\ &= u_{\text{BX}}(p) - \frac{E\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} + \frac{E\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{i_0R}{p + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} &\doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t) \\ \frac{1}{(p + \alpha)} &\doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t) \\ e^{-p\tau}F(p) &\doteq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t) \end{aligned}$$

Учтя, что  $u_{\text{BX}}(p) \doteq u_{\text{BX}}(t)$ , произведем преобразование:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= u_{\text{BX}}(t) - E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) = \\ &= \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t)} - \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t - \tau)} - E(\chi - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(\chi - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) = \\ &= (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t - \tau) \end{aligned}$$

Окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом  $u_{\text{BX}}(t)$  амплитуды  $E$  и длительностью  $\tau$ , на выходе получаем

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t - \tau)$$

**Условие дифференцирования.** Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{BX}} = u_L + u_R = L \frac{dI}{dt} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{du_{\text{BX}}}{dt} = \underbrace{L \frac{d^2I}{dt^2}}_{\frac{du_L}{dt}} + \underbrace{\frac{R}{L} L \frac{dI}{dt}}_{u_L \equiv u_{\text{ВЫХ}}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left| \frac{du_L}{dt} \right| \ll \left| \frac{R}{L} u_L \right|$$



Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \tau_{\text{цепи}} \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt}$$

где  $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$ .

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое  $u_{\text{ВХ}} = u_0 e^{j\omega t}$ . Тогда ток в контуре:  $I = I_0 e^{j\omega t}$ , где  $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$ , и неравенство можно переписать (учтем, что  $u_L = I \cdot j\omega L = I_0 j\omega L e^{j\omega t}$ ):

$$|I_0 \cdot j\omega L \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}| \ll \left| \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 \cdot j\omega L \cdot e^{j\omega t} \right| \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \Rightarrow T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.  $\square$

## 2.4 Задача №4

**Дано.** Определить отклик  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$   $RC$ -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью  $\tau$ . Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

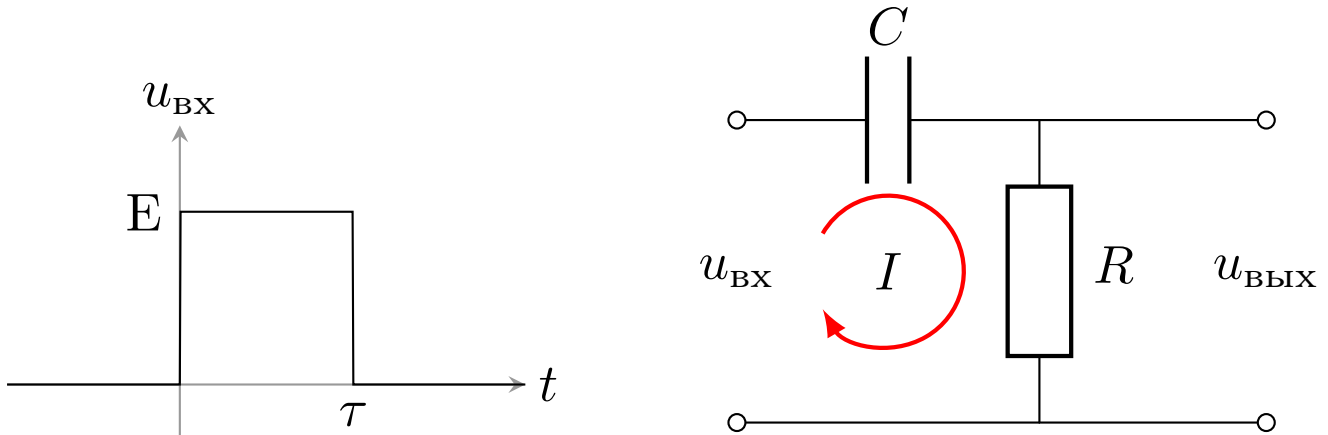


Рис. 5: Входной импульс и схема  $RL$ -цепи

**Решение.** Найдём образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t - \tau) \Rightarrow u_{\text{ВХ}}(t) \doteq \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-p\tau} = \frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - напряжение на конденсаторе  $u_C(0) = u_0$ . Его образ  $u_C(0) \doteq \frac{u_0}{p}$

Обозначим суммарный ток в контуре за  $I(p)$ . Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) = (R + \frac{1}{pC}) I(p) + \frac{u_0}{p}$$

Откуда выразим ток  $I$ :

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} (1 - e^{-p\tau}) + u_0/p}{R + \frac{1}{pC}}$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{R}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{E}{R} e^{-p\tau}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{u_0}{R}}{p + \frac{1}{RC}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$

$$\frac{1}{(p+\alpha)} \doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$

$$e^{-p\tau}F(p) \doteq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t)$$

Произведем преобразование:

$$I(t) = (E - u_0)\frac{\mathbb{1}(t)}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - \frac{E}{R} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Воспользуемся соотношением  $u_{\text{вых}} = I(t)R$  и окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом  $u_{\text{вх}}(t)$  амплитуды  $E$  и длительностью  $\tau$ , на выходе получаем

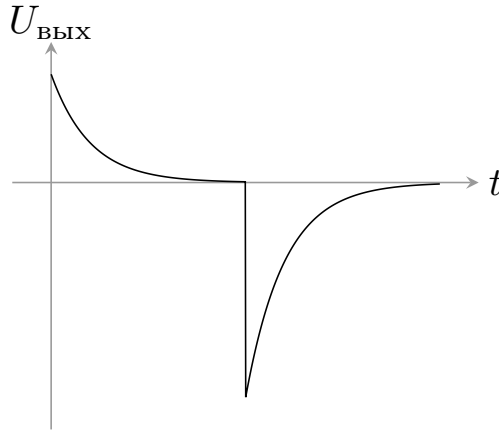


Рис. 6: Решение при  $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$

$$u(t) = (E - u_0)\mathbb{1}(t) \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - E \exp\left\{-\frac{t-\tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t-\tau)$$

График решения при  $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$  изображен на рис. 6

**Условие дифференцирования.** Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_R = \frac{q}{C} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \frac{1}{RC} \underbrace{IR}_{u_R \equiv u_{\text{вх}}} + \underbrace{\frac{dI}{dt}R}_{\frac{du_R}{dt}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left| \frac{du_R}{dt} \right| \ll \left| \frac{1}{RC} u_R \right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau_{\text{цепи}} \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$$

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое  $u_{\text{вх}} = u_0 e^{i\omega t}$ . Тогда ток в контуре:  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , где  $I_0 = \frac{u_0}{\frac{1}{i\omega C} + R}$ , и неравенство можно переписать (учтем, что  $u_C = \frac{I}{i\omega C} = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{i\omega C}$ ):

$$\left| I_0 R \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} \right| \ll \left| \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 R \cdot e^{i\omega t} \right| \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \Rightarrow T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.

□

## 2.5 Задача №5

**Дано.** Найти спектр прямоугольного сигнала  $S(t) = A(-\mathbb{1}(t) + \mathbb{1}(t - t_1))$ . Нарисовать график  $|S(\omega)|$ .

**Решение.** Продифференцируем  $S(t)$ :

$$\frac{dS}{dt} = A(-\delta(t) + \delta(t - t_1))$$

По свойству дифференцирования преобразования Фурье:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) \implies S(\omega) = \frac{S'(\omega)}{i\omega}$$

$$S'(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t - t_1) - \delta(t)) e^{-i\omega t} dt = A(-1 + e^{-i\omega t_1}) = A(e^{-i\omega t_1} - 1)$$

Получаем:

$$S(\omega) = \frac{A}{i\omega} (e^{-i\omega t_1} - 1)$$

Вынесем за скобки  $e^{-\frac{i\omega t_1}{2}}$ :

$$-\frac{A}{i\omega} e^{-\frac{i\omega t_1}{2}} \underbrace{(e^{\frac{i\omega t_1}{2}} - e^{-\frac{i\omega t_1}{2}})}_{2i \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)} = \frac{-2A}{\omega} e^{-\frac{i\omega t_1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) = At_1 e^{-i\left(\frac{\omega t_1}{2} - \pi\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)}$$

И окончательный ответ:

$$|S(\omega)| = At_1 \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)} \right|,$$

где  $t_1$  – длительность прямоугольного импульса.

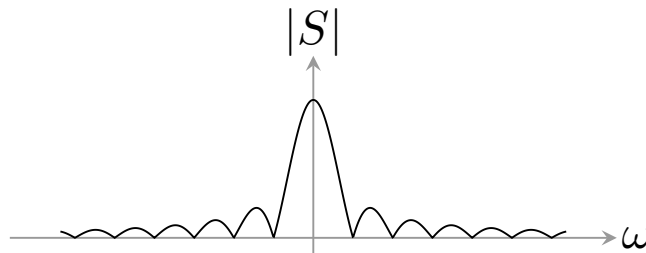


Рис. 7: Спектр прямоугольного импульса

□

## 2.6 Задача №7

**Дано.** Найти и нарисовать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) для цепи, изображённой на рисунке.

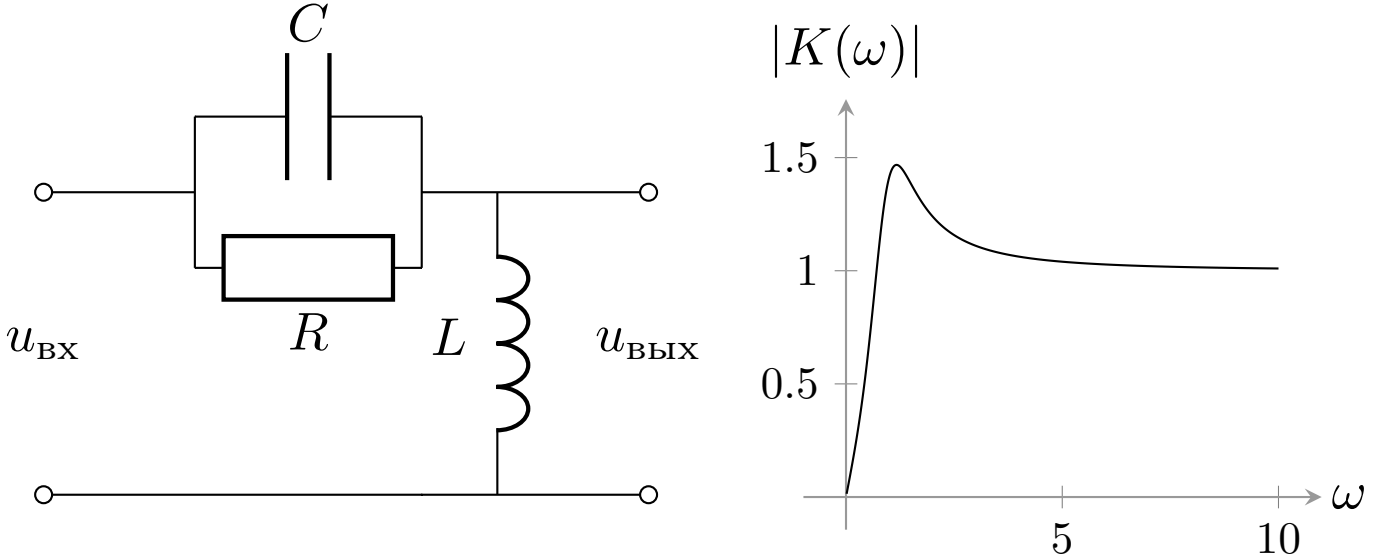


Рис. 8: Цепь и найденная её АЧХ

Последовательно найдем импеданс входной цепи  $Z$ : сначала найдем эквивалентный импеданс  $Z_{\text{ЭКВ}}$  параллельной  $RC$ -цепочки, затем суммарный импеданс  $Z = Z_{\text{ЭКВ}} + j\omega L$  последовательно соединенных  $RC$ -цепочки и катушки индуктивности  $L$ .

$$\hat{Z}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{Z}_C}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}$$

Коэффициент передачи будем искать по определению, как отношение выходного сигнала к входному, считая, что в цепи течет ток  $I$ :

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \frac{\hat{u}_{\text{ВЫХ}}}{\hat{u}_{\text{ВХ}}} = \frac{\hat{I} \cdot \hat{Z}_L}{\hat{I} \cdot (\hat{Z}_L + \hat{Z}_{\text{ЭКВ}})} = \frac{\hat{Z}_L}{(\hat{Z}_L + \hat{Z}_{\text{ЭКВ}})} = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}} = \\ &= \frac{j\omega L(1 + j\omega CR)}{R + j\omega L(1 + j\omega CR)} = \frac{j\omega L - \omega^2 LCR}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем выражение для модуля коэффициента передачи:

$$K = |\hat{K}(\omega)| = \frac{\sqrt{(\omega^2 LRC)^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R - \omega^2 LRC)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\sqrt{(RLC)^2 + \frac{L^2}{\omega^2}}}{\sqrt{(\frac{R}{\omega^2} - RLC)^2 + \frac{L^2}{\omega^2}}}$$

## 2.7 Задача №9

**Дано.** Найти спектр сигнала, изображенного на рисунке. Построить график  $|S(w)|$ .

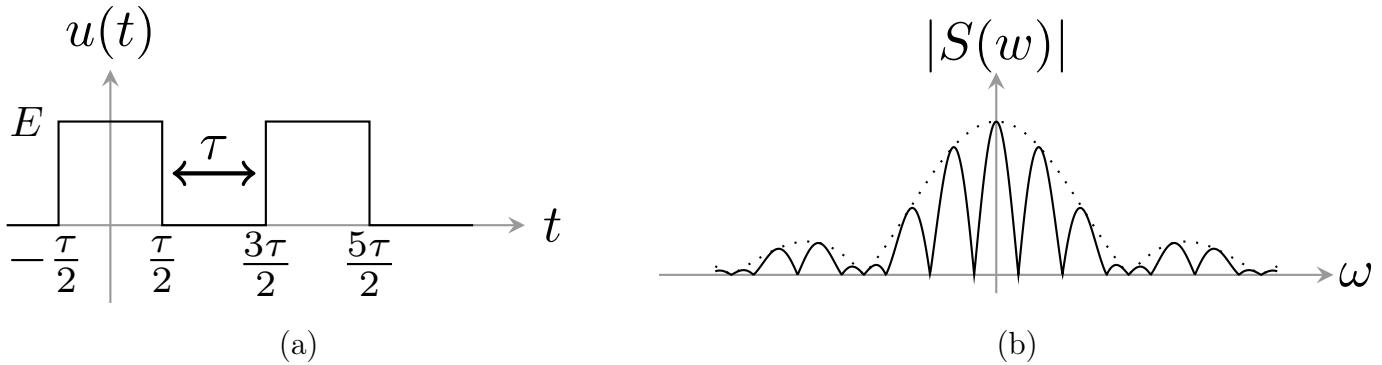


Рис. 9: Сигнал а и найденный его спектр b

**Решение.** В силу линейности преобразования Фурье, представив сигнал как сумму двух прямоугольных импульсов  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , получим:

$$S(w) = S_1(w) + S_2(w),$$

где  $S_1 \doteq u_1(t)$  и  $S_2 \doteq u_2(t)$ .

Кроме того, можно вспомнить, что спектр единичного прямоугольного импульса, симметричного относительно момента времени  $t = 0$ ,  $S(w) = A\tau \frac{\sin \frac{w\tau}{2}}{\frac{w\tau}{2}} = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{w\tau}{2}\right)$ . Очевидно,  $S_1 = S$ , а второй импульс просто сдвинут на время  $2\tau$ , и из свойств преобразования Фурье это просто дает экспоненту в образе:

$$S(w) = S_1(w) + S_2(w) = S(w)(1 + e^{-2\cdot iw\tau}),$$

Тогда, свернув сумму экспонент по формуле Эйлера, получим:

$$S(w) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{w\tau}{2}\right) \cdot e^{-iw\tau} \frac{2}{2} (e^{-iw\tau} + e^{iw\tau}) = 2A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{w\tau}{2}\right) \cdot e^{-iw\tau} \cos w\tau$$

И окончательный ответ

$$|S(w)| = 2A\tau \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{w\tau}{2}\right) \cos w\tau \right|$$

□

## 2.8 Задача №12

**Дано.** Определить отклик  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$   $RL$ -цепи, изображенной на рисунке, на воздействие двух прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$ . Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое интегрирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

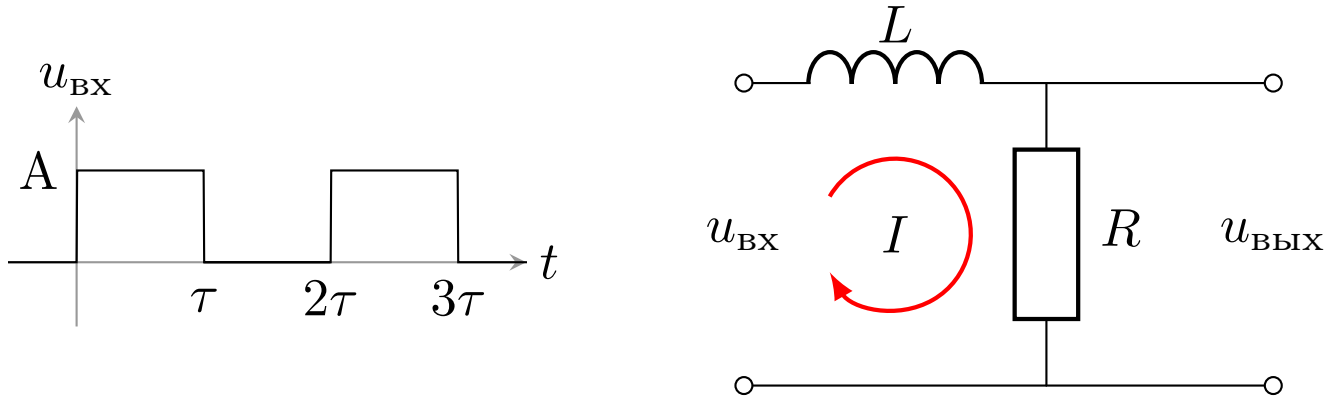


Рис. 10: Входной импульс и схема  $RL$ -цепи

**Решение.** Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = A[1(t) - 1(t - \tau)] + A[1(t - 2\tau) - 1(t - 3\tau)]$$

$$u_{\text{ВХ}}(t) \doteq \frac{A}{p}(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau})$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - напряжение на индуктивности  $u_L(0) = u_0$ . Его образ  $u_L(0) \doteq \frac{u_0}{p} = \frac{i_0 \cdot pL}{p} = i_0 L$ . Это напряжение можно учесть как ещё одну стороннюю ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за  $I(p)$ . Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$u_{\text{ВХ}} + Li_0 = (pL + R)i_0$$

Откуда выразим ток  $I$ :

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau}) + Li_0}{pL + R}$$



После простых алгебраических преобразований получим:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{L}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{\frac{A}{L}e^{-p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{\frac{A}{L}e^{-2p\tau}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{\frac{A}{L}e^{-3p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{i_0}{p + \frac{R}{L}}$$

Отсюда можем получить напряжение на выходе:

$$u_{\text{вых}}(p) = I(p) \cdot R = \frac{A\frac{R}{L}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{A\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{A\frac{R}{L}e^{-2p\tau}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{A\frac{R}{L}e^{-3p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{i_0R}{p + \frac{R}{L}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} &\doteq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t) \\ \frac{1}{(p + \alpha)} &\doteq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t) \\ e^{-p\tau}F(p) &\doteq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \doteq f(t) \end{aligned}$$

Произведем преобразование:

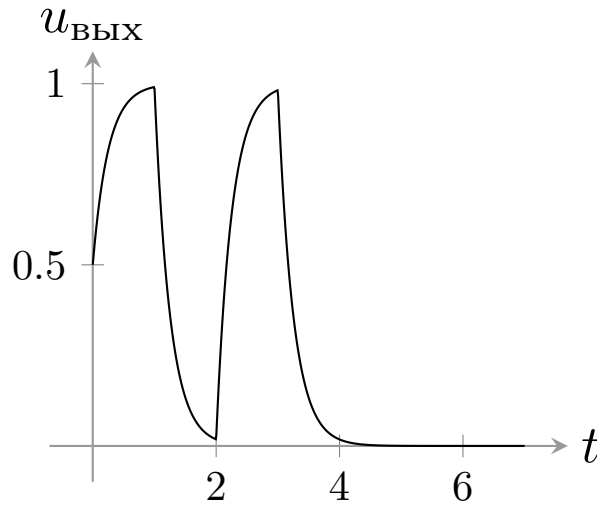


Рис. 11: Решение при  $A = 1, i_0R = 0.5, R/L = 4, \tau = 1$

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) = A \Big\{ &\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\mathbb{1}(t) - \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right)\mathbb{1}(t - \tau) + \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-2\tau)}\right)\mathbb{1}(t - 2\tau) - \\ &- \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-3\tau)}\right)\mathbb{1}(t - 3\tau) \Big\} + i_0R e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) \end{aligned}$$

$$u(t) = (E - u_0)\mathbb{1}(t) \exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\} - E \exp\left\{-\frac{t - \tau}{CR}\right\}\mathbb{1}(t - \tau)$$

График решения при  $A = 1, i_0R = 0.5, \tau = 5, R/L = 4, \tau = 1$  изображен на рис.

**Условие интегрирования.** Рассмотрим очевидное равенство  $u_{\text{BX}} = u_L + u_{\text{ВЫХ}}$ . Перепишем это выражение:

$$u_{\text{BX}} = L \frac{dI}{dt} + \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{BX}} dt = \frac{L}{R} \underbrace{IR}_{u_{\text{ВЫХ}}} + R \int I dt$$

Если будет выполнено условие

$$\left| R \int I dt \right| \ll |LI| \quad \Rightarrow \quad \left| \int I dt \right| \ll \left| \frac{L}{R} I \right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \int u_{\text{BX}} dt$$

где  $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$ .

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое  $u_{\text{BX}} = u_0 e^{j\omega t}$ . Тогда ток в контуре:  $I = I_0 e^{j\omega t}$ , где  $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$ , и неравенство (2.8) можно переписать:

$$\left| I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right| \ll |\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \quad \Rightarrow \quad T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.

□

## 2.9 Задача №15

**Дано.** Найти спектр сигнала, изображенного на рисунке. Нарисовать график  $|S(\omega)|$

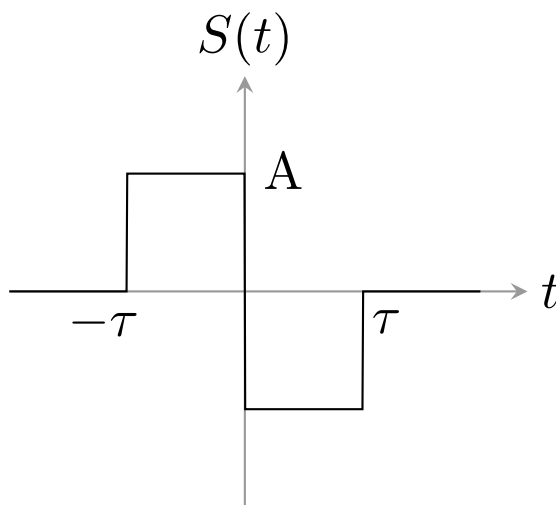


Рис. 12: Входное напряжение

**Решение.** Зададим функцию с рисунка, а затем продифференцируем её:

$$S(t) = A[1(t + \tau) - 1(t)] + A[1(t - \tau) - 1(t)]$$

$$S'(t) = A[\delta(t + \tau) - \delta(t)] + A[\delta(t - \tau) - \delta(t)]$$

По свойствам преобразования Фурье:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) \implies S(\omega) = \frac{S'(\omega)}{i\omega}$$

Запишем преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} S'(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S'(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + \tau) e^{-i\omega t} dt + A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) e^{-i\omega t} dt + \\ &A \int_{-\infty}^{+\infty} -2\delta(t) e^{-i\omega t} dt = A(e^{+i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau} - 2) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A}{i\omega} (e^{+i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau} - 2) = \frac{2A}{i\omega} (\cos \omega\tau - 1) = \\ &\frac{2iA}{\omega} (1 - \cos \omega\tau) \end{aligned}$$

$$|S(\omega)| = 2A \left| \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega} \right|$$

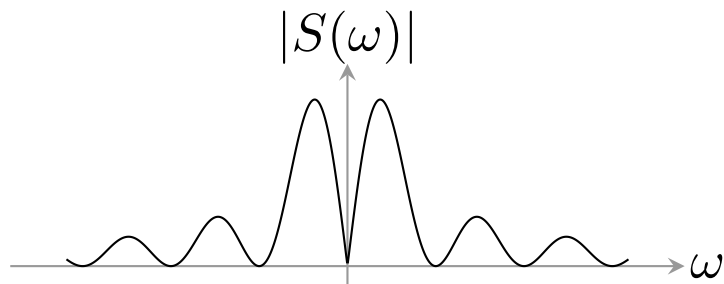


Рис. 13: Решение при  $A = 1, \tau = 1$

□