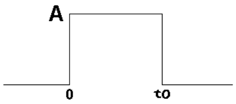
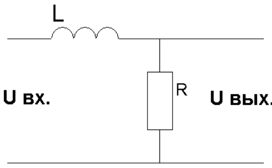
Задачи по радиоэлектронике (4 семестр) (2006 г.)

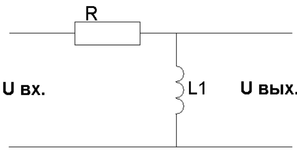
(made by Roll from 434)

1) Найти спектр сигнала $S(t)=A\exp(-t^2/\tau^2)$. Нарисовать график $|S(w)|$.
Что будет при разных τ?

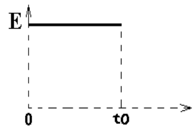




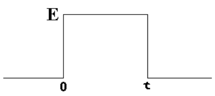
2) Определить отклик U вых. RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ_0? Нарисовать график U вых.(t).
При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое интегрирование входной цепи?

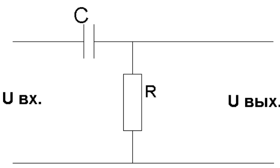


3) Определить отклик U вых. RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью τ_0? Нарисовать график U вых.(t).

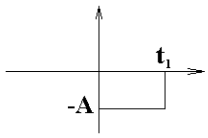


Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи?
Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.





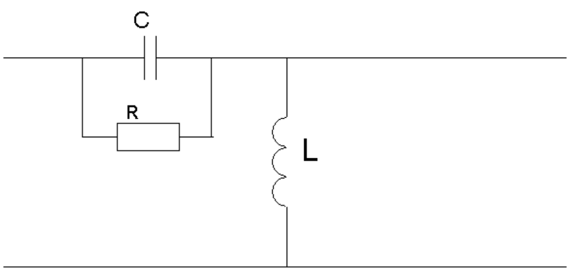
4) Определить отклик U вых. RC-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ? Нарисовать график U вых.(t).
При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи?
Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

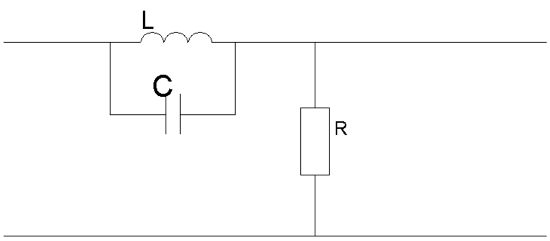


5) Найти спектр прямоугольного сигнала, изображённого на рисунке. ($S(t)=-A1(t)+A1(t-t_1)$)
Нарисовать график $|S(w)|$.

6) Найти спектр сигнала $S(t)=0$ при $t<0$ и $S(t)=Ae^{-t/\tau}$ при $t>=0$. Нарисовать график $|S(w)|$.

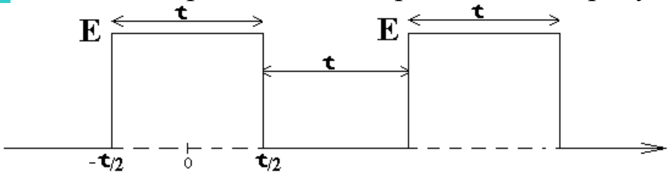
7) Найти и нарисовать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) для цепи, изображённой на рисунке 1.



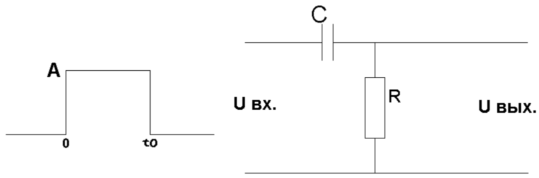


8) Найти и нарисовать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) для цепи, изображённой на рисунке 2.

9) Найти спектр сигнала, изображённого на рисунке. Нарисовать график |S(w)|.

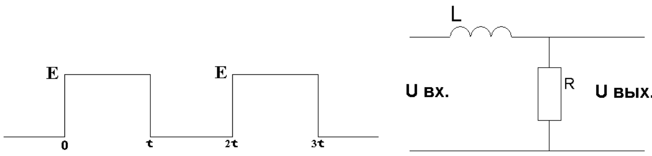


10) Определить отклик U вых. RC-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ_0? Нарисовать график U вых.(t).
При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи?

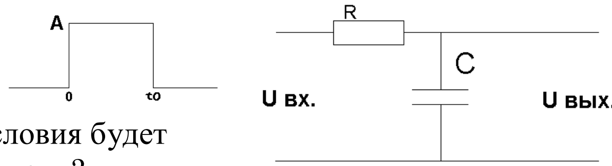


11) Найти спектр сигнала $S(t)=Ae^{-t/\tau}\cos(\omega_0 t)$. $(t>=0)$ Нарисовать график |S(w)|.

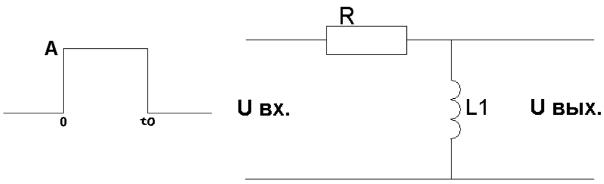
12) Определить отклик U вых. RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса, изображённого на рисунке? Нарисовать график U вых.(t).
При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи?



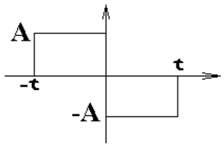
13) Определить отклик U вых. RC-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ_0? Нарисовать график U вых.(t). При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое интегрирование входной цепи?



14) Определить отклик U вых. RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ_0? Нарисовать график U вых.(t).
При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи?



15) Найти спектр сигнала, изображённого на рисунке. Нарисовать график |S(w)|.

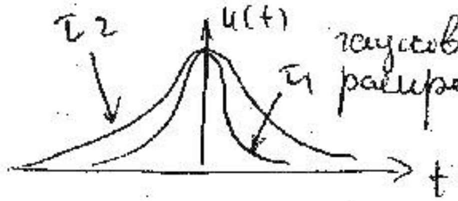


16) Найти и нарисовать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) для фильтра низких частот (ФНЧ).

Задачи по радиоэлектронике

① $u(t) = A e^{-t^2/\tau^2}$ Ф-я $|\hat{S}(\omega)| = ?$

Решение:



$$\hat{S}(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\tau^2} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2} + j\omega t\right)} dt \ominus$$

Выделим полный квадрат:

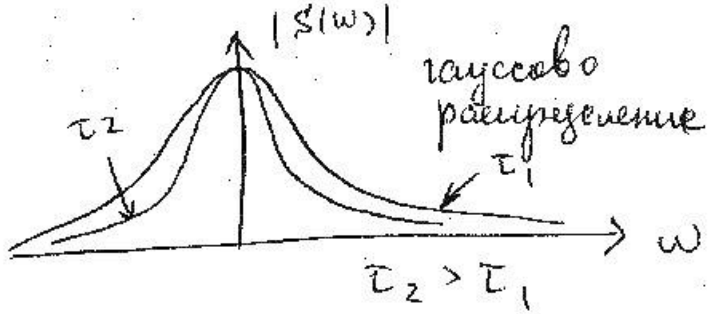
$$\frac{t^2}{\tau^2} + j\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2\tau^2}{4};$$

$$\ominus\ A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}\right)^2} dt = A\tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx =$$

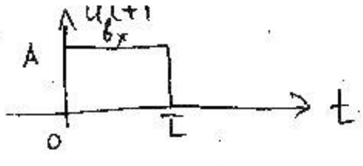
Замена: $\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2} = x$, $t = \left(x - \frac{j\omega\tau}{2}\right)\tau$, $dt = \tau dx$

$$= A\tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A\tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$ (по интегралу Пуассона)

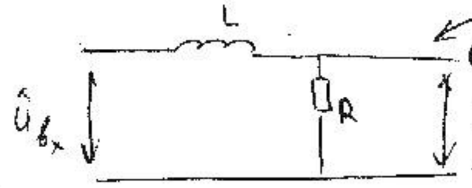
$$\Rightarrow |\hat{S}(\omega)| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A\tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$



чем медленнее изменяется $u(t)$ (т.е. чем больше τ), тем быстрее изменяется $|\hat{S}(\omega)|$, ~~и наоборот~~ (т.е. тем уже спектр сигнала), и наоборот.

② 

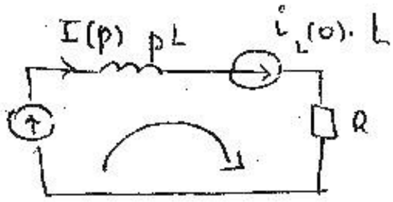
$\dot u_{вых}(t) = ?$



ФНЧ (интегратор) $i_L(0) = i_0$ — ненулев. н.у.

Решение:

Экв. схема

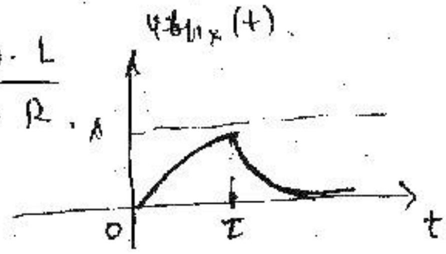


$u_{вх}(t) = A1(t) - A1(t-\tau)$

$$\dot u_{вх}(t) \doteq \frac{A}{p} - \frac{A}{p}e^{-p\tau} = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}).$$

II з. К: $\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) + i_L(0)\cdot L = I(p)(pL+R)$.

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})}{pL+R} + \frac{i_L(0)\cdot L}{pL+R}.$$



С другой стороны,

$$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) = I(p)\cdot R + U_L(p) \Rightarrow$$

$$U_L(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - I(p)\cdot R =$$

$$= \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{\frac{AR}{p}(1-e^{-p\tau})}{pL+R} - \frac{i_L(0)\cdot\frac{L}{\cancel{R}}R}{pL+R} =$$

$$= \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{AR/L}{p(p+R/L)} + \frac{AR/L}{p(p+R/L)}\cdot e^{-p\tau} - \frac{i_L(0)R}{p+R/L} \doteq$$

$$\doteq A1(t) - A\cdot 1(t-\tau) - A(1-e^{-\frac{R}{L}t})\cdot 1(t) + A(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})1(t-\tau) -$$

$$- i_L(0)\cdot R\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) - Ae^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\cdot 1(t-\tau) -$$

$$- i_L(0)\cdot R\, e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t).$$

Итак, $\boxed{u_{вых}(t) = \left(A - i_L(0)\cdot R\right)e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) - Ae^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\cdot 1(t-\tau)}$

Нам надо $U_R(p) = I(p)\cdot R = \frac{AR(1-e^{-p\tau})}{p(pL+R)} + \frac{i_L(0)RL}{pL+R} =$

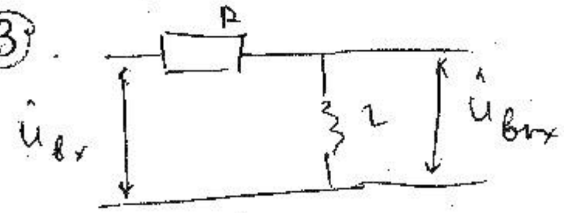
$$= \frac{AR/L\,(1-e^{-p\tau})}{p(p+R/L)} + \frac{i_L(0)\cdot R}{p+R/L} \doteq A(1-e^{-\frac{R}{L}t})1(t) - A(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})1(t-\tau) +$$

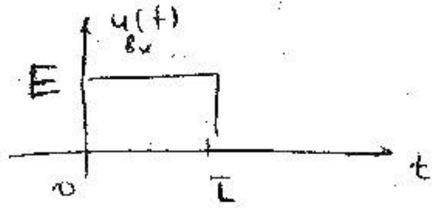
$$+ i_L(0)\,R\,e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t).$$

$$\boxed{u_{вых}(t) = A(1-e^{-\frac{R}{L}t})1(t) - A(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})1(t-\tau) + i_L(0)\cdot R e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t)}$$

$\tau_{цепи} \gg \tau_{сигнала}$; $\left|\frac{L}{R} \gg \tau_c\right|$ — условие интегр-я

③



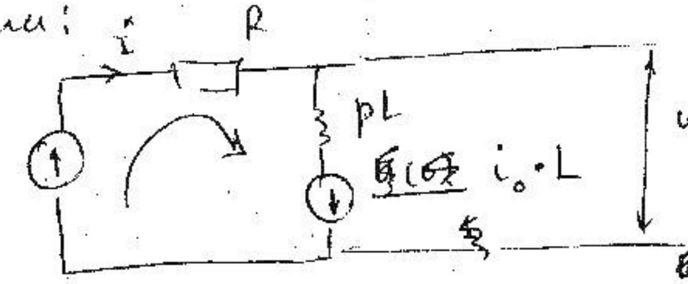


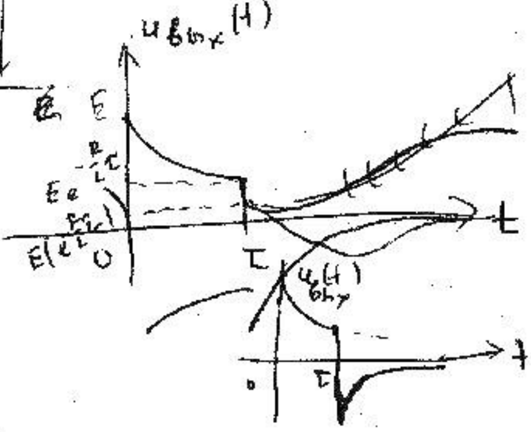
$u_{вых}(t) = ?$

Решение: $u(t) = E\cdot 1(t) - E\cdot 1(t-\tau) \overset{L}{\Longleftrightarrow} \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = u(p)$

Экв. схема:

$\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau})$





$$\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) + i_0 L = (R+pL)\, I(p)$$

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) + i_0 L}{R+pL}$$

С другой стороны: $\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) - I(p)\cdot R = u_{вых}(p) \Rightarrow$

$$u_{вых}(p) = \frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{\frac{E}{p}R(1-e^{-p\tau}) + i_0 LR}{R+pL} =$$

$$= \frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{ER}{p(R+pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R+pL)} - \frac{i_0 LR}{R+pL} =$$

$$= \frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{ER/L}{p(p+R/L)} + \frac{ER/L\cdot e^{-p\tau}}{p(p+R/L)} - \frac{i_0 R}{p+R/L} \doteqdot$$

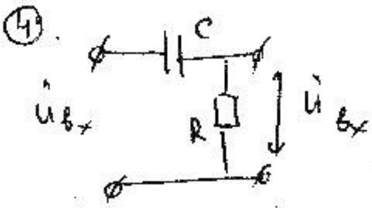
$$\doteqdot u_{вх}(t) - E(1-e^{-\frac{R}{L}t})\cdot 1(t) + E(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\, 1(t-\tau) + i_0 R\, e^{-\frac{R}{L}t}\, 1(t) =$$

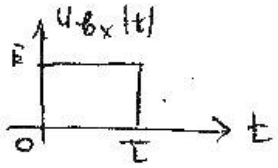
$$u_{вх}(t) - E(1-e^{-\frac{R}{L}t})\, 1(t) + E(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\, 1(t-\tau) - i_0 R e^{-\frac{R}{L}t}\, 1(t) =$$

$$E e^{-\frac{R}{L}t}\, 1(t) - E e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\, 1(t-\tau) - i_0 R e^{-\frac{R}{L}t}\, 1(t) =$$

$$\underline{(E - i_0 R)\, e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) - E\, e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\cdot 1(t-\tau)}$$

(4).





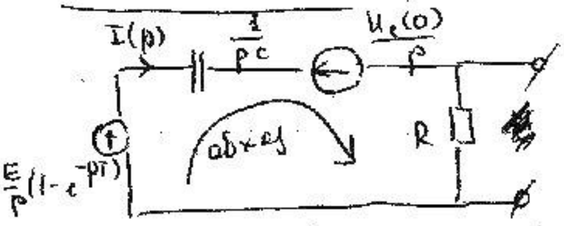
$u_{вых}(t) = ?$

$u_C(0) = u_0$

<u>Решение:</u>

$$u_{вх}(t) = E\,1(t) - E\,1(t-\tau) \doteq \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = \frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}).$$

Эквив. схема:



II з. К: $\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{u_C(0)}{p} = I(p)\left(\frac{1}{pC}+R\right)$.

С другой ст-ны,

$$\frac{E}{p}(1-e^{-p\tau}) = I(p)\cdot R + I(p)\frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$$

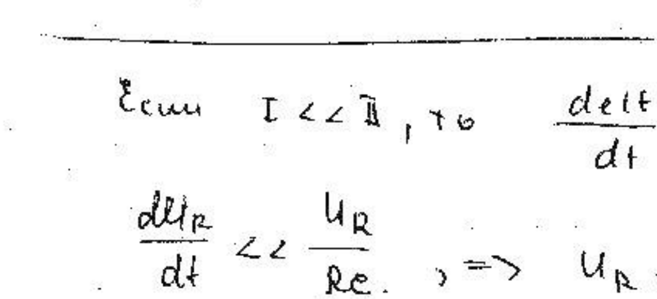
$$u_R(p) = I(p)\cdot R.$$

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)}{\frac{1}{pC}+R} - \frac{u_C(0)}{p\left(\frac{1}{pC}+R\right)} = \frac{E\left(1-e^{-p\tau}\right)}{pR+\frac{1}{C}} - \frac{u_C(0)}{pR+\frac{1}{C}} =$$

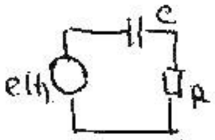
$$= \frac{E/R}{p+\frac{1}{RC}} - \frac{E/R\; e^{-p\tau}}{p+\frac{1}{RC}} - \frac{u_C(0)/R}{p+\frac{1}{RC}} \doteq \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t) - \frac{E}{R}e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\cdot 1(t-\tau)$$

$$- \frac{u_C(0)}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t).$$

$$\Rightarrow \boxed{u_R(t) = I(t)\cdot R = E e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t) - E e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} 1(t-\tau) - u_C(0)\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)}$$



Условие диф-я:



$$e(t) = U_C + U_R =$$
$$= iR + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt.$$

$$\frac{de(t)}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C} =$$

$$= \underbrace{\frac{dU_R}{dt}}_{I} + \underbrace{\frac{U_R}{RC}}_{II}$$

Если $I \ll II$, то $\frac{de(t)}{dt} = \frac{U_R}{RC}$ -> цепь дифференцирует сигнал на входе.

$\frac{dU_R}{dt} \ll \frac{U_R}{RC}$, => $U_R = RC\cdot\frac{de(t)}{dt}$ - диф-р.

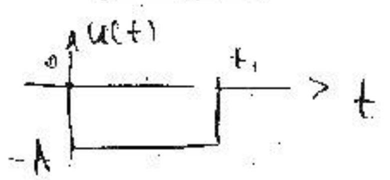
$\frac{dU_R}{U_R\,dt} \ll \frac{1}{RC}$, $\frac{1}{\tau_{сигнала}} \ll \frac{1}{\tau_{цепи}}$, $\boxed{\begin{matrix}\tau_{цепи} \ll \tau_{сигнала}\\ \tau_{цепи} = RC\end{matrix}}$

условие диф-я.

(5). $u(t) = -A\cdot 1(t) + A\cdot 1(t-t_1)$.

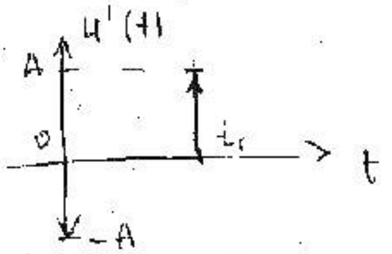
$\hat{S}(\omega) = ?$

<u>Решение:</u>



$u(t) = -A\cdot 1(t) + A\cdot 1(t-t_1)$

Продифференцируем $u(t)$: получим 2 δ-функции: $u'(t) = A(-\delta(t) + \delta(t-t_1))$



По св-ву преобразования Фурье:

$S'(\omega) = j\omega S(\omega), \to S(\omega) = \dfrac{S'(\omega)}{j\omega}$

$S'(\omega) = A(-1 + e^{-j\omega t_1}) = A(e^{-j\omega t_1} - 1)$

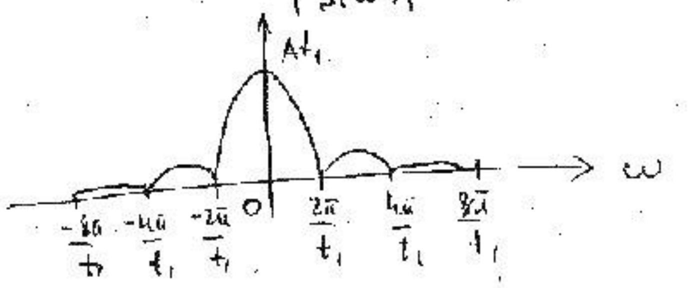
$$S(\omega) = \frac{A(e^{-j\omega t_1} - 1)}{j\omega} = \frac{A e^{-j\frac{\omega t_1}{2}}(e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} - e^{j\frac{\omega t_1}{2}})}{j\omega} =$$

$$= -\frac{2A e^{-j\frac{\omega t_1}{2}}(e^{j\frac{\omega t_1}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_1}{2}})}{2\omega j} = -\frac{2A}{\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \cdot \sin\frac{\omega t_1}{2} =$$

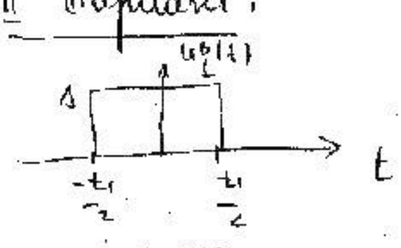
$$= e^{j\pi} \cdot \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega t_1}{2}\, e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} = \underbrace{\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega t_1}{2}}_{|\hat{S}(\omega)|} \cdot e^{-j\left(\frac{\omega t_1}{2} - \pi\right)}.$$

$$|\hat{S}(\omega)| = \frac{2A}{\omega}\left|\sin\frac{\omega t_1}{2}\right| = At_1\left|\frac{\sin\frac{\omega t_1}{2}}{\frac{\omega t_1}{2}}\right| = At_1\left|\mathrm{sinc}\left(\omega t_1/2\right)\right|$$

– спектр "обычного" прямоуг. импульса

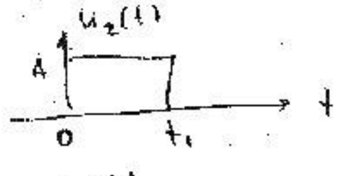


<u>II вариант:</u>



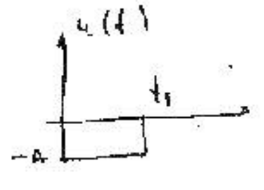
$u_1(t) = A(t + \frac{t_1}{2}) - A(t - \frac{t_1}{2})$ – прямоуг. видеоимпульс

$\hat{S}(\omega) = At_1 \cdot \dfrac{\sin\frac{\omega t_1}{2}}{\frac{\omega t_1}{2}}$ – известно, как спектр прямоуг. видеоимпульса



$u_2(t) = A(t) - A(t - t_1)$ – смещенный прямоуг. импульс на $\frac{t_1}{2}$

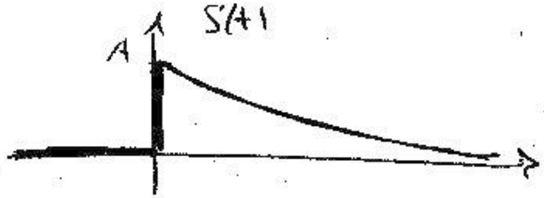
$\Rightarrow S_2(\omega) = \hat{S}(\omega)\, e^{-j\frac{\omega t_1}{2}}$.



$\Rightarrow S(\omega) = -S_2(\omega) = e^{j\pi} S_2(\omega) = \boxed{|S(\omega)|\, e^{j(\pi - \frac{\omega t_1}{2})}}$

где $|\hat{S}(\omega)| = At_1|\mathrm{sinc}(\omega t_1/2)|$.

⑥. $s(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ Ae^{-t/\tau}, & t\geq 0.\end{cases}$



$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$

$|S(\omega)| = ?$, ф-и.

Решение:

Очевидно, что $s(t) = e^{-t/\tau}\cdot 1(t)$. Тогда $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{S}_1(x)\dot{S}_2(\omega-x)dx$

(по св-ву свертки для ПФ)

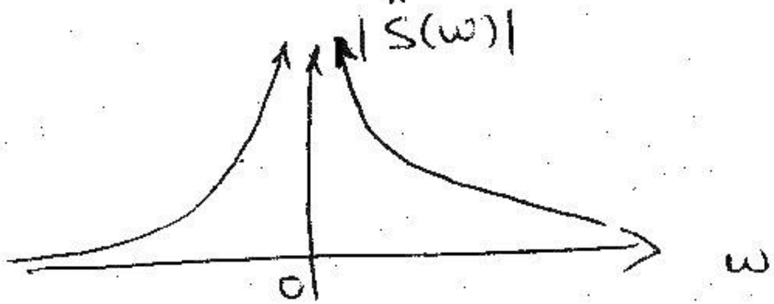
~~$\dot{S}_1(x) =$~~

Или, $\dot{S}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = A\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot e^{-j\omega t}dt =$

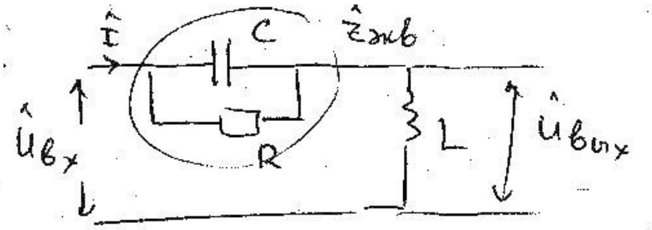
$$= A\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t}dt = -\frac{A}{\frac{1}{\tau}+j\omega}\, e^{-\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{\frac{1}{\tau}+j\omega} =$$

$$= \frac{A\tau}{1+j\omega\tau} = \frac{A\tau}{1+\omega^2\tau^2}(1-j\omega\tau) = \frac{A\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\, e^{-j\,\mathrm{arctg}\,\omega\tau}$$

$$|\dot{S}(\omega)| = \frac{A\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$



(7)



$$\hat{Z}_{экв} = \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{Z}_C}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{-j\,\mathrm{arctg}\,\omega CR}.$$

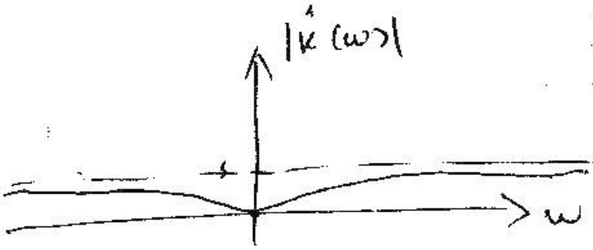
$$\hat{K}(\omega) = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{\hat{I} \cdot \hat{Z}_L}{\hat{I}(\hat{Z}_L + \hat{Z}_{экв})} = \frac{\hat{Z}_L}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_{экв}} =$$

$$= \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR}} = \frac{j\omega L(1+j\omega CR)}{R + j\omega L(1+j\omega CR)} = \frac{-\omega^2 LCR + j\omega L}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} =$$

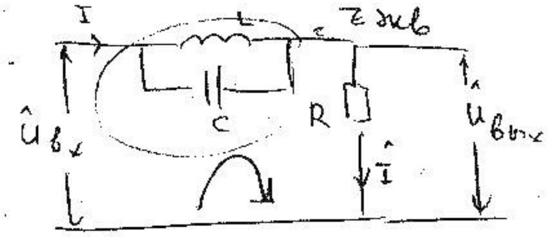
$$= \frac{\sqrt{(\omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\omega CR}}}{\sqrt{(R-\omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R-\omega^2 LCR}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2}{(R-\omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{-j\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\omega CR} + \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R-\omega^2 LCR}\right)}$$

$$|\hat{K}(\omega)| = \sqrt{\frac{\cancel{\omega^4}\left[(LCR)^2 + L^2/\omega^2\right]}{\cancel{\omega^4}\left[\left(\frac{R}{\omega^2} - LCR\right)^2 + \frac{L^2}{\omega^2}\right]}} = \sqrt{\frac{L^2C^2R^2 + L^2/\omega^2}{\left(\frac{R}{\omega^2} - LCR\right)^2 + L^2/\omega^2}}$$



⑧



АЧХ = ?

Решение:

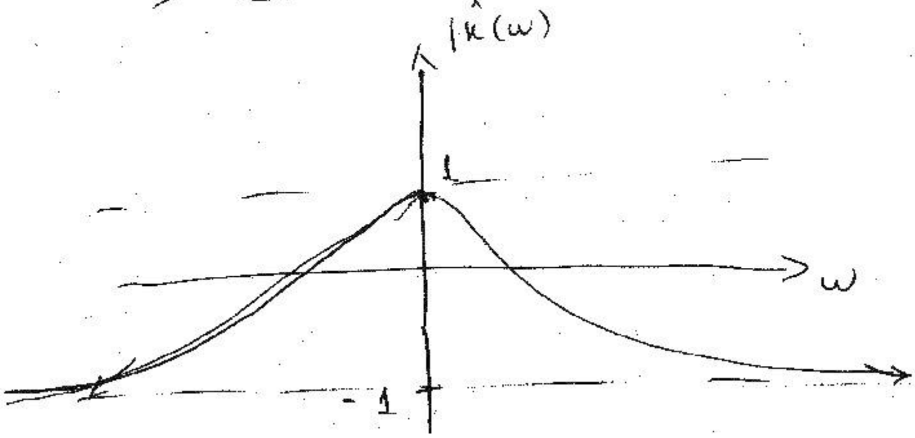
$$\hat{K}(\omega) = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{I}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_{экв})\hat{I}} = \frac{\hat{Z}_R}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_{экв}}$$

$$\hat{Z}_{экв} = \frac{\hat{Z}_L \cdot \hat{Z}_C}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_C} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L \cdot j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

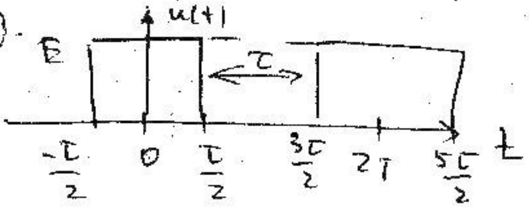
$$\hat{K}(\omega) = \frac{R}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{R(1-\omega^2 LC)}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} = \frac{R(1-\omega^2 LC)}{\sqrt{(R-\omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{-j\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R - \omega^2 LCR}} =$$

$$= \frac{R - \omega^2 LCR}{\sqrt{(R - \omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{-j\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R - \omega^2 LCR}}$$

$$|\hat{K}(\omega)| = \frac{R - \omega^2 LCR}{\sqrt{(R - \omega^2 LCR)^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{R/\omega^2 - LCR}{\sqrt{(R/\omega^2 - LCR)^2 + L^2/\omega^2}}$$



9.



$\hat S(\omega) = ?$ Гр-к.

Решение: В силу линейности ПФ, и св-ва смещения
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ – сумма двух прямоуг. импульсов,
получим: $\hat S_{tot}(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = S(\omega)(1 + e^{-j2\omega\tau})$,

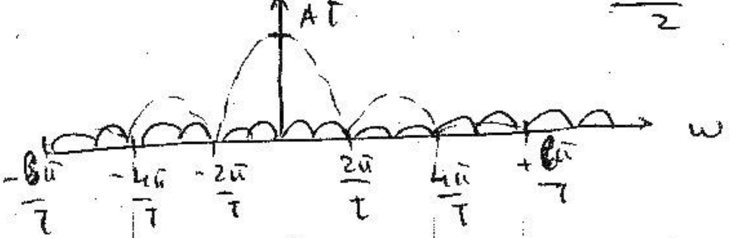
где $S(\omega) = A\tau \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$ – спектр прямоуг. импульса.

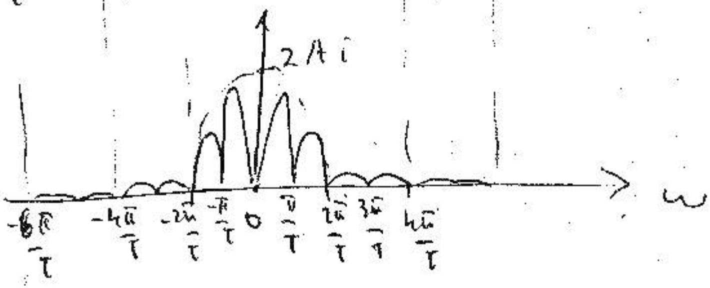
Тогда $\hat S_{tot}(\omega) = A\tau \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} \cdot \dfrac{e^{-j\omega\tau}\left(e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau}\right)2}{2} =$

$= 2\cancel{j}A\tau \,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2) \cdot e^{-j\omega\tau} \sin\omega\tau =$

$= 2A\tau \sin\omega\tau \cdot \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-j(\omega\tau \cancel{\ldots})}$

$|\hat S(\omega)| = 2A\tau \left| \sin\omega\tau \cdot \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right|$





(11). $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega_0 t), & t \geq 0. \end{cases}$ $|S(\omega)| = ?$ график.

Решение:

Очевидно, что $u(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\omega_0 t \cdot 1(t) =$

$$= A \cdot \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos\omega_0 t}_{g(t)} = A f(t) \cdot g(t).$$

Тогда по св-ву свертки $\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(x) \hat{G}(\omega - x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(x) \hat{F}(\omega - x) dx$

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega} (-1) = \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\tau(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\hat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right\} =$$

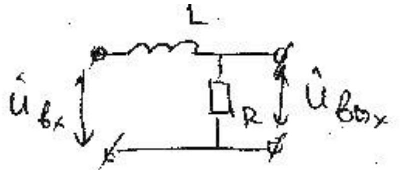
$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \right\} = \pi \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right).$$

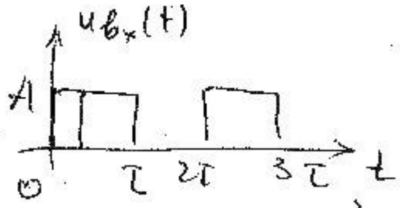
$$\Rightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \left(\delta(x - \omega_0) + \delta(x + \omega_0) \right) \cdot \frac{\tau(1 - j(\omega - x)\tau)}{1 + (\omega - x)^2 \tau^2} dx =$$

$$= \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{1 - j(\omega - \omega_0)\tau}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2} + \frac{1 - j(\omega + \omega_0)\tau}{1 + (\omega + \omega_0)^2 \tau^2} \right\} = \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)\tau} + \frac{1}{1 + j(\omega + \omega_0)\tau} \right\}$$

$$= \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + [(\omega - \omega_0)^2 \tau^2]^2}} e^{-j \operatorname{arctg}(\omega - \omega_0)\tau} + \frac{1}{\sqrt{1 + [(\omega + \omega_0)^2 \tau^2]^2}} e^{-j \operatorname{arctg}(\omega + \omega_0)\tau} \right\}$$

(12)





$u_{вых}(t) = ?$
$i_L(0) = i_0$.

Решение: $\dot{u}_{вх}(t) = A\left(1(t) - 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) - 1(t-3\tau)\right) \doteq$

$= \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau}\right)$.

Эквив. схема:

$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}-e^{-3p\tau})$

II з. К:

$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}-e^{-3p\tau}) + i_L(0)\cdot L =$

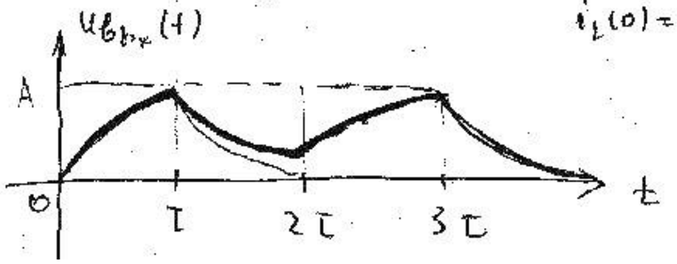
$= I(p)\left(pL + R\right)$.

$$I(p) = \frac{A(1-e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}-e^{-3p\tau})}{p\,(pL+R)} + \frac{i_L(0)\cdot L}{pL+R} =$$

$$= \frac{A^R/_L(1-e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}-e^{-3p\tau})}{R\cdot p(p+{}^R/_L)} + \frac{i_L(0)}{p+{}^R/_L} \doteq$$

$$= \frac{A}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\cdot 1(t) - \frac{A}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right)1(t-\tau) + \frac{A}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-2\tau)}\right)1(t-2\tau)$$
$$- \frac{A}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-3\tau)}\right)1(t-3\tau) + i_L(0)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t).$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_{вых}(t) = {} & A\cdot 1(t) - A1(t-\tau) + A1(t-2\tau) - A\cdot 1(t-3\tau) - \\ & - Ae^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) + Ae^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\cdot 1(t-\tau) - Ae^{-\frac{R}{L}(t-2\tau)}\cdot 1(t-2\tau) + \\ & + Ae^{-\frac{R}{L}(t-3\tau)}\cdot 1(t-3\tau) + i_L(0)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t). \end{aligned}}$$

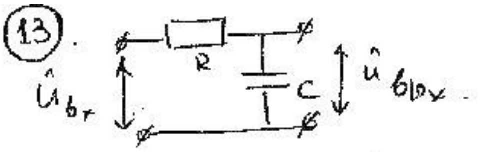


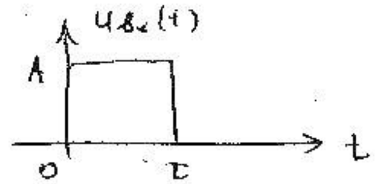
$i_L(0) = 0$.

Условие интегрирования:

$$\boxed{\begin{aligned} & \tau_{цепи} \gg T_{сигнала}, \\ & \tau_{цепи} = \frac{L}{R} \end{aligned}}$$

(13).





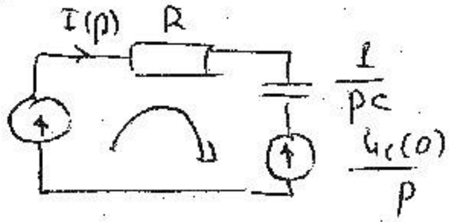
$\hat{u}_{вых}(t) = !$

$u_c(0) = u_0$ – ненул. н.у.

Решение:

$\hat{u}_{вх}(t) = A\cdot 1(t) - A\cdot 1(t-\tau) \doteq \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})$.

Эквив. схема:



$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})$

II з. К:

$$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{u_c(0)}{p} = I(p)\left(R+\frac{1}{pC}\right)$$

С другой стороны, $\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) = I(p)\cdot R + U_c(p)$, т.е.

$$U_c(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - I(p)\cdot R.$$

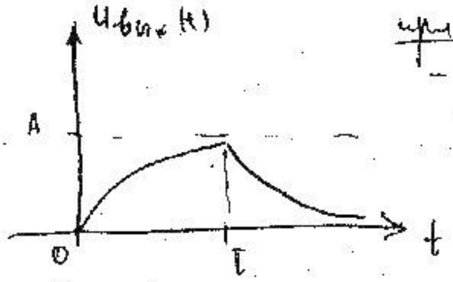
$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})}{R+\frac{1}{pC}} - \frac{u_c(0)}{p(R+\frac{1}{pC})} = \frac{A/R\,(1-e^{-p\tau})}{p+\frac{1}{RC}} - \frac{u_c(0)/R}{p+\frac{1}{RC}}$$

$\doteq$ ~~$\frac{A}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$~~

$$U_c(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{A(1-e^{-p\tau})}{p+\frac{1}{RC}} - \frac{u_c(0)}{p+\frac{1}{RC}} \doteq$$

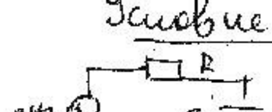
$$\doteq A\cdot 1(t) - A\,1(t-\tau) - A\,e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t) + A\,e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\cdot 1(t-\tau) - u_c(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)$$

$$\boxed{u_{вых}(t) = A\cdot 1(t) - A\cdot 1(t-\tau) - (A+u_c(0))\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t) + A\,e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\cdot 1(t-\tau)}$$



при $u_c(0)=0$
– процесс заряда / разряда конденсатора.

Условие интегрирования:



$$e(t) = u_R + u_c = iR + \frac{1}{C}\int i(t)dt = iR + u_c = \underbrace{CR\cdot\frac{du_c}{dt}}_{I} + \underbrace{u_c}_{II}$$

Если I >> II, т.е. $e(t) = CR\frac{du_c}{dt}$,

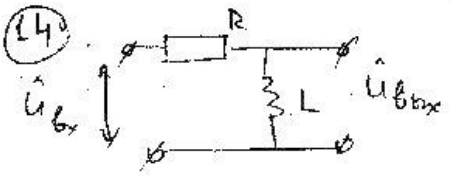
$u_c(t) \sim \int e(t)dt$ – цепь интегрирует сигнал.

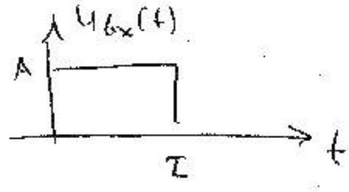
Зн-т, $CR\frac{du_c}{dt} \gg u_c$, $\frac{du_c}{u_c\,dt} \gg \frac{1}{CR} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{сигнала}} \gg \frac{1}{\tau_{цепи}}$.

$\boxed{\tau_{цепи} \gg \tau_{сигнала}}$ – условие интегр-я.

$\tau_{цепи} = CR$.

(14)





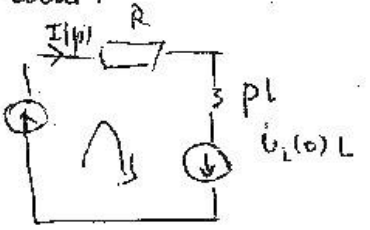
$u_{вых}(t) = ?$

Решение:

$\hat{u}_{вх}(t) = A\cdot 1(t) - A\cdot 1(t-\tau)$, $\hat{U}(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})$.

Экв. схема:

$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})$



2 з. К: $\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) + i_L(0)\cdot L = I(p)(R+pL)$.

С другой ст-ны,

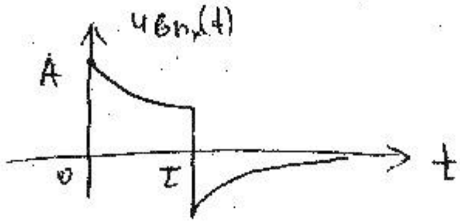
$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) = I(p)\cdot R + U_L(p)$.

$$\Rightarrow U_L(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - R\left\{\frac{\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})}{R+pL} + \frac{i_L(0)\cdot L}{R+pL}\right\} =$$

$$= \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau}) - \frac{RA(1-e^{-p\tau})/L}{p(p+R/L)} - \frac{i_L(0)\cdot R}{p+R/L} =$$

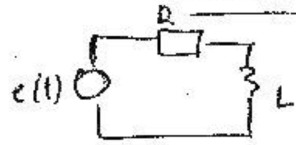
$$= \cancel{A1(t)} - \cancel{A1(t-\tau)} - A(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}t})1(t) + A(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})1(t-\tau) - i_L(0)\cdot R e^{-\frac{R}{L}t}1(t) =$$

$$= \boxed{Ae^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) - Ae^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\cdot 1(t-\tau) - i_L(0)\cdot R\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot 1(t) = u_{вых}(t)}$$



при $i_L(0)=0$

Условие дифференцирования:



$e(t) = u_R + u_L$.

$e(t) = iR + L\frac{di}{dt}$

$\frac{de(t)}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} =$

$= \underbrace{\frac{R}{L}u_L}_{I} + \underbrace{\frac{du_L}{dt}}_{II}$.

Если $I \gg II$, то $\frac{de(t)}{dt} = \frac{R}{L}u_L$, т.е.

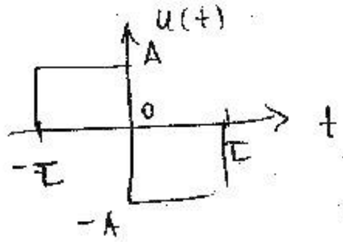
$u_L \sim \frac{de(t)}{dt}$ — цепь диф-ет сигнал.

Значит, $\frac{R}{L}u_L \gg \frac{du_L}{dt}$, $\frac{R}{L} \gg \frac{du_L}{u_L dt}$,

$\frac{1}{\tau_{цепи}} \gg \frac{1}{T_{сигнала}}$, т.е.

условие дифференцир-я $\longrightarrow$ $\boxed{\tau_{цепи} \ll T_{сигнала},\ \tau_{цепи} = \frac{L}{R}}$

(15)

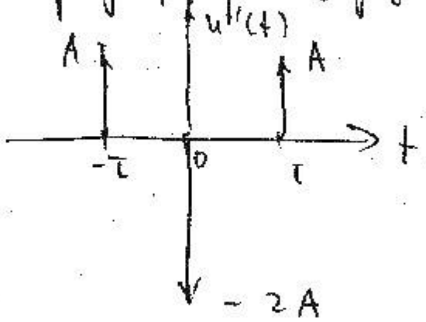


$\hat{S}(\omega) = ?$ гр-к

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau \\ A, & -\tau \le t \le 0, \\ -A, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

Решение:

Продифференцируем $u(t)$:



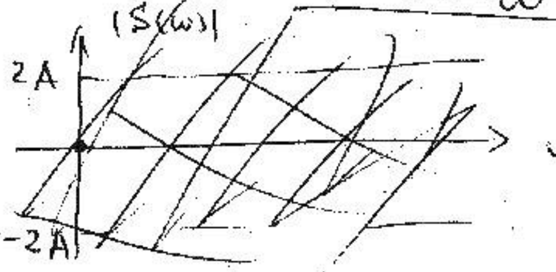
тогда $S'(\omega) = A\left(\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)\right)$

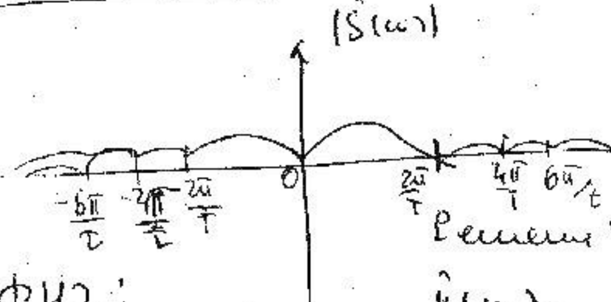
т.к. $S'(\omega) = j\omega S(\omega)$, то

$$S(\omega) = \frac{A}{j\omega}\left\{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau} - 2\right\} =$$

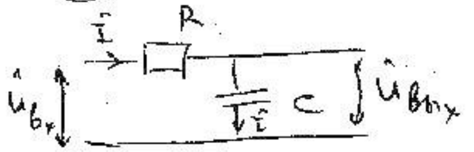
$$= \frac{A}{j\omega}\left\{2\cos\omega\tau - 2\right\} = \frac{2A}{j\omega}(\cos\omega\tau - 1) = 2jA\frac{(1-\cos\omega\tau)}{\omega}.$$

$$|\hat{S}(\omega)| = 2A\left|\frac{(1-\cos\omega\tau)}{\omega}\right|$$





(16) ФНЧ:

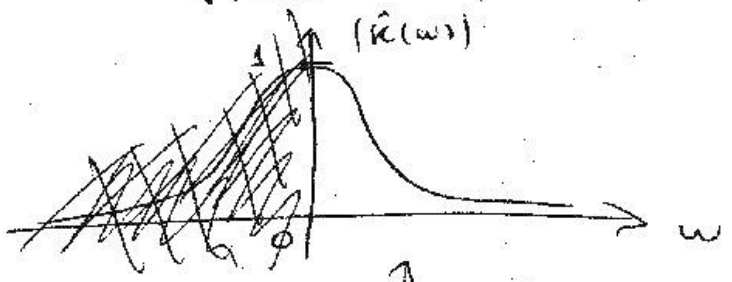


Решение:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{\hat{Z}_c}{\hat{Z}_c + \hat{Z}_R} = \frac{1}{1 + j\omega cR}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2c^2R^2}}\, e^{-j\,\mathrm{arctg}(\omega cR)}$$

$$\boxed{|\hat{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2c^2R^2}}}.$$



только для $\omega > 0$.