1 Таблица простейших преобразований Лапласа

Изображение	Оригинал$(t \geq 0)$
1	$\delta(t)$
$\dfrac{1}{p}$	$1(t)$
$\dfrac{1}{p^2}$	t
$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\dfrac{p}{p+a}$	$\delta(t) - ae^{-at}$
$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\dfrac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\dfrac{b^2}{p^2(p+b)}$	$bt - (1 - e^{-bt})$
$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$

2 Типовые задачи по радиоэлектронике

2.1 Задача №1

Дано. Найти спектр сигнала $S(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$. Нарисовать график $|S(\omega)|$. Что будет при разных τ?

Решение.

$$S(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты. Схема выделения полного квадрата следующая. Пусть у нас есть выражение вида $a^2 + b$, тогда можно привести его к виду полного квадрата следующим образом:

$$a^2 + b = a^2 + 2 \cdot a \cdot d + d^2 - d^2 = (a + d)^2 - d^2$$

Найти d нетрудно:

$$d = \frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

В нашем случае

$$\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2$$

И наш интеграл переходит в следующий:

$$S(\omega) = A \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}t$$

Сделаем замену переменных: $\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2} = x$, $t = \tau x - \frac{i\omega\tau}{2}\tau$, $dt = \tau dx$

$$S(\omega) = A\tau \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\right) = \sqrt{\pi} A\tau \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right)$$

Найдем характерную временную ширину сигнала. Для экспоненциального спадения это время, за которое функция спадет в e раз, и для нашей функции это время $\Delta t = \tau$.

Характерная ширина спектра находится анологично:

$$\frac{\omega^2\tau^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau}$$

Заметим отсюда характерное поведение спектра: чем уже сигнал во времени (меньше τ), тем шире его частотный спектр.

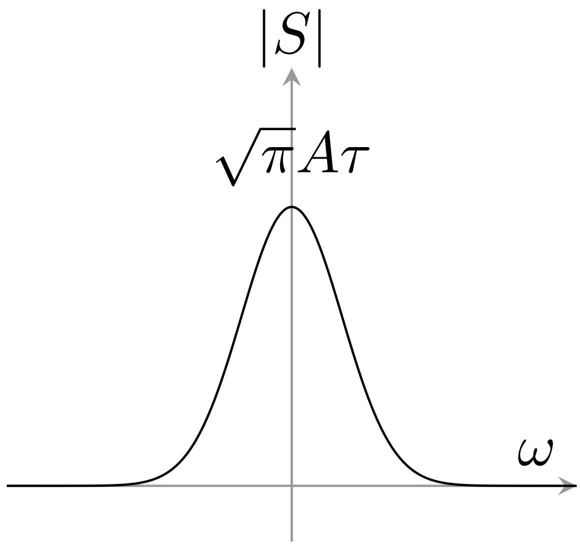

Рис. 1: Спектр сигнала

□

2.2 Задача №2

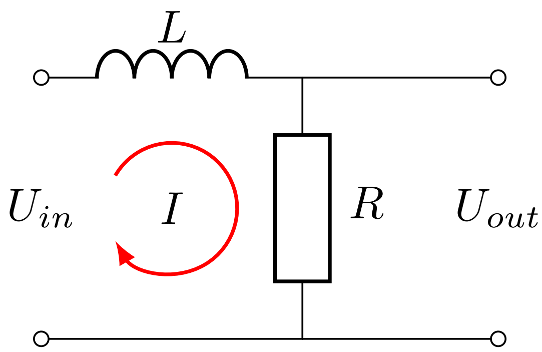

Рис. 2: RL–контур

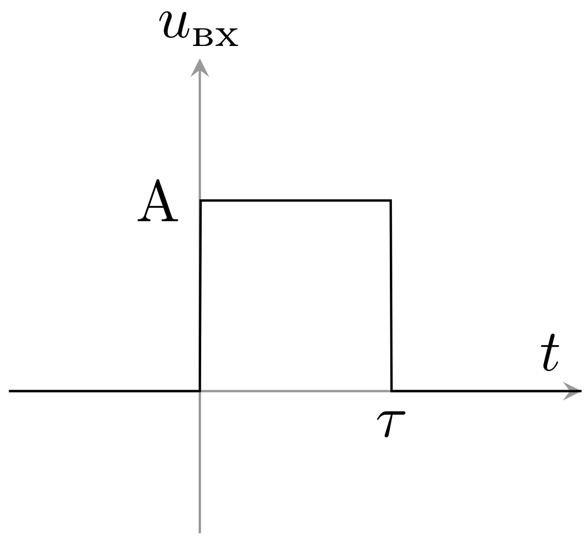

Рис. 3: Входное напряжение

Дано. Определить отклик выхода RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ. Нарисовать график $u_{\text{вых}}(t)$. При выполнении какого условия будет осуществляться приближенное интегрирование входной цепи?

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = A \cdot \mathbb{1}(t) - A \cdot \mathbb{1}(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{A}{p} - \frac{A}{p}e^{-p\tau} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

По второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжения на всех элементах цепи равна ЭДС. В нашем случае возможное начальное напряжение на катушке мы относим к ЭДС, а сумму падений напряжения записываем как ток в контуре на суммарный импеданс контура:

$$\mathscr{E} = Z(p) \cdot I(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) + i_L(0)L = (pL + R)I(p)$$

Отсюда выражаем ток в контуре:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}(1 - e^{-p\tau})}{pL + R} + \frac{i_L(0)L}{pL + R}$$

Теперь мы можем найти и выходное напряжение – напряжение на резисторе:

$$u_{\text{вых}}(p) \equiv u_R(p) = I(p)R = \frac{AR(1-e^{-p\tau})}{p(pL+R)} + \frac{i_L(0)RL}{pL+R} = \frac{\frac{AR}{L}(1-e^{-p\tau})}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)} + \frac{i_L(0)R}{p+\frac{R}{L}} =$$
$$= A\frac{\frac{R}{L}}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)} - A\frac{\frac{R}{L}}{p\big(p+\frac{R}{L}\big)}e^{-p\tau} + i_L(0)R\frac{1}{p+\frac{R}{L}}$$

Используя свойства преобразования Лапласа

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1-e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Из выражения $u_{\text{вых}}(p)$ элементарно получаем оригинал $u_{\text{вых}}(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = A\Big(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\Big)\cdot\mathbb{1}(t) - A\Big(1-e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\Big)\cdot\mathbb{1}(t-\tau) + i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)$$

График построен при $i_L(0)R = \frac{A}{2}$.

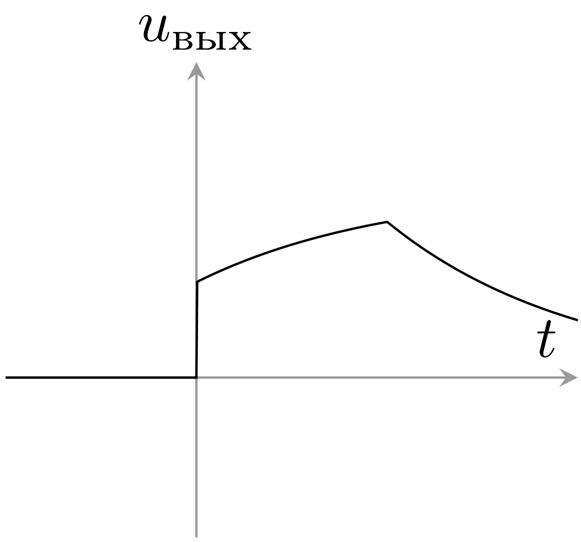

Рис. 4: $u_{\text{вых}}(t)$

Условие интегрирования. Рассмотрим очевидное равенство $u_{\text{вх}} = u_L + u_{\text{вых}}$. Перепишем это выражение:

$$u_{\text{вх}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{R}\underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}} + R\int I\,\mathrm{d}t$$

Если будет выполнено условие

$$\left|R\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll |LI| \quad\Rightarrow\quad \left|\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll \left|\frac{L}{R}I\right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}}\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство (2.6) можно переписать:

$$\left|I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\right| \ll \left|\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}\right| \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \quad\Rightarrow\quad T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот. □

2.3 Задача №3

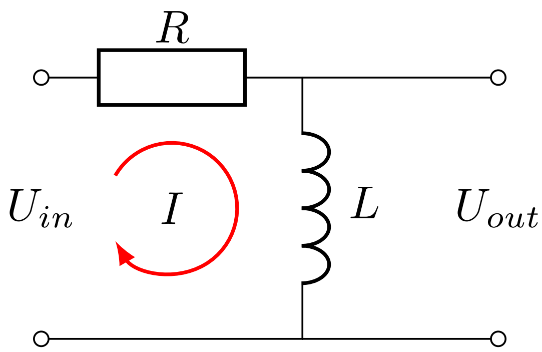

Рис. 5: RL–контур

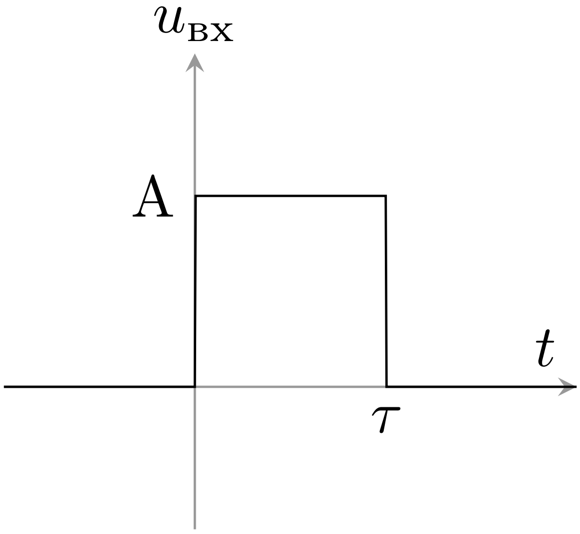

Рис. 6: Входное напряжение

Дано. Определите отклик $u_{\text{вых}}(t)$ RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью τ. Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = \frac{E}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - ток i_0. Тогда начальное напряжение на катушке $u_L(0) = i_0 \cdot pL$, а его образ $u_L(0) \risingdotseq \frac{i_0 pL}{p} = i_0 L$. Это напряжение можно трактовать как часть ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) + i_0 L = (R + pL)I(p)$$

Откуда выразим ток I:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}(1 - e^{-p\tau}) + i_0 L}{R + pL}$$

С другой стороны, $u_{\text{вх}} = u_C + u_R$, а $u_C \equiv u_{\text{вых}}$, тогда

$$u_{\text{вых}}(p) = u_{\text{вх}}(p) - u_R(p) = u_{\text{вх}}(p) - I(p)R =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E(1-e^{-p\tau})R}{p(R+pL)} + \frac{i_0 LR}{R+pL} = u_{\text{вх}}(p) - \frac{ER}{p(R+pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R+pL)} - \frac{i_0LR}{R+pL} =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E\frac{R}{L}}{p(p+\frac{R}{L})} + \frac{E\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p(p+\frac{R}{L})} - \frac{i_0R}{p+\frac{R}{L}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1-e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Учтя, что $u_{\text{вх}}(p) \risingdotseq u_{\text{вх}}(t)$, произведем преобразование:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - E(1-e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t-\tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$
$$= \cancel{E\cdot\mathbb{1}(t)} - \cancel{E\cdot\mathbb{1}(t-\tau)} - E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t-\tau) - i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$

$$= (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{вх}}(t)$ амплитуды E и длительностью τ, на выходе получаем

$$u_{\text{вых}}(t) = (E - i_0R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Условие дифференцирования. Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}}_{\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}} + \frac{R}{L}\underbrace{L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}_{u_L\equiv u_{\text{вых}}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left|\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\right| \ll \left|\frac{R}{L}u_L\right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = \tau_{\text{цепи}} \frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t}$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство можно переписать (учтем, что $u_L = I \cdot j\omega L = I_0 j\omega L e^{j\omega t}$):

$$\left| I_0 \cdot j\omega L \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \right| \ll \left| \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 \cdot j\omega L \cdot e^{j\omega t} \right| \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \quad \Rightarrow \quad T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот. □

2.4 Задача №4

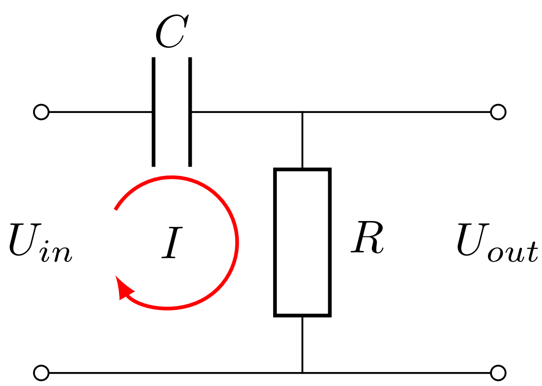

Рис. 7: RC–контур

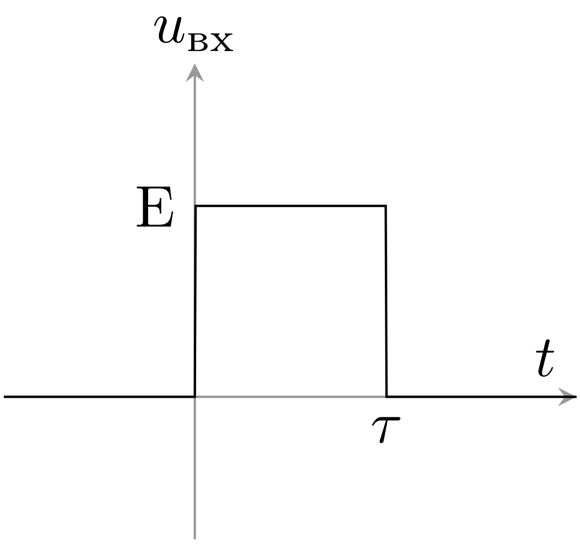

Рис. 8: Входное напряжение

Дано. Определить отклик $u_{\text{вых}}(t)$ RC-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ. Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = \frac{E}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - напряжение на конденсаторе $u_C(0) = u_0$. Его образ $u_C(0) \risingdotseq \frac{u_0}{p}$

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) = (R + \frac{1}{pC})I(p) + \frac{u_0}{p}$$

Откуда выразим ток I:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right) + u_0/p}{R + \frac{1}{pC}}$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{R}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{E}{R}e^{-p\tau}}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{u_0}{R}}{p + \frac{1}{RC}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$

$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$

$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Произведем преобразование:

$$I(t) = (E - u_0)\frac{\mathbb{1}(t)}{R}\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - \frac{E}{R}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Воспользуемся соотношением uвых $= I(t)R$ и окончательно получилим ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{вх}}(t)$ амплитуды E и длительностью τ, на выходе получаем

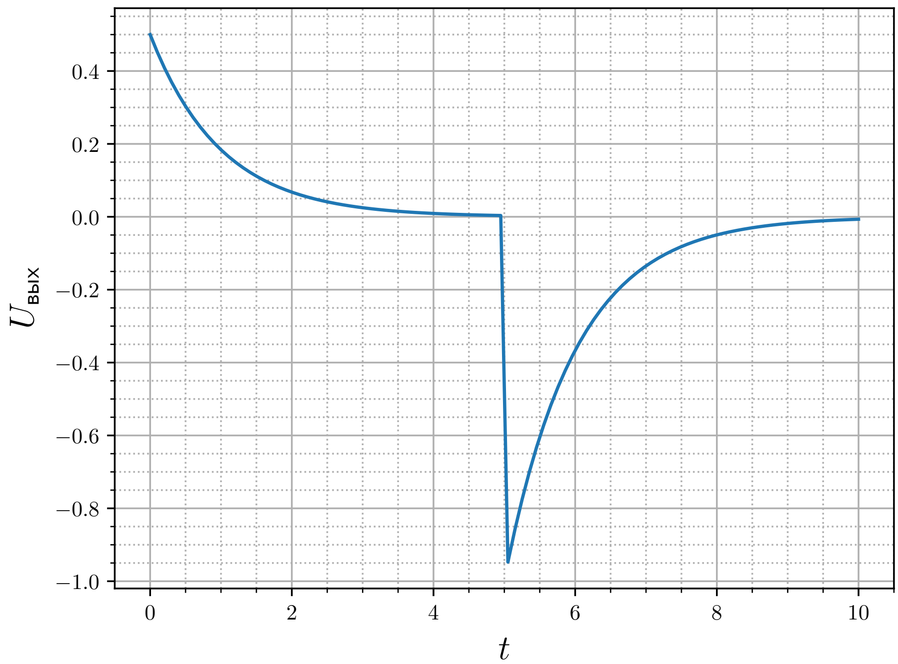

Рис. 9: Решение при $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$

$$u(t) = (E - u_0)\mathbb{1}(t)\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} - E\exp\left\{-\frac{t-\tau}{RC}\right\}\mathbb{1}(t-\tau)$$

График решения при $E = 1, u_0 = 0.5, \tau = 5$ изображен на рис. 9

Условие дифференцирования. Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_R = \frac{q}{C} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\underbrace{IR}_{u_R \equiv u_{\text{вых}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}R}_{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left|\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}\right| \ll \left|\frac{1}{RC}u_R\right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = RC\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} = \tau_{\text{цепи}}\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t}$$

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{i\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{i\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{\frac{1}{i\omega C}+R}$, и неравенство можно переписать (учтем, что $u_C = \frac{I}{i\omega C} = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{i\omega C}$):

$$\left|I_0 R \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t}\right| \ll \left|\frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} I_0 R \cdot e^{i\omega t}\right| \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \quad \Rightarrow \quad T \gg \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много больше постоянной времени цепи. Отсюда следует «вилка выбора» дифференцирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» дифференцирования уменьшением постоянной времени, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.

□

2.5 Задача №5

Дано. Найти спектр прямоугольного сигнала $S(t) = A(-\mathbb{1}(t) + \mathbb{1}(t - t_1))$. Нарисовать график $|S(\omega)|$.

Решение. Продифференцируем $S(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A(-\delta(t) + \delta(t - t_1))$$

По свойству дифференцирования преобразования Фурье:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) \quad \Longrightarrow \quad S(\omega) = \frac{S'(\omega)}{i\omega}$$

$$S'(\omega) = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t - t_1) - \delta(t))e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = A(-1 + e^{-i\omega t}) = A(e^{-i\omega t} - 1)$$

Получаем:

$$S(\omega) = \frac{A}{i\omega}(e^{-i\omega t_1} - 1)$$

Вынесем за скобки $e^{-\frac{i\omega t_1}{2}}$:

$$-\frac{A}{i\omega}e^{-\frac{i\omega t_1}{2}}\underbrace{(e^{\frac{i\omega t_1}{2}} - e^{-\frac{i\omega t_1}{2}})}_{2i\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)} = \frac{-2A}{\omega}e^{-\frac{i\omega t_1}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) = At_1 e^{-i\left(\frac{i\omega t_1}{2} - \pi\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)}$$

И окончательный ответ:

$$|S(\omega)| = At_1\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{(\omega t_1/2)}\right|,$$

где t_1 – длительность прямоугольного импульса.

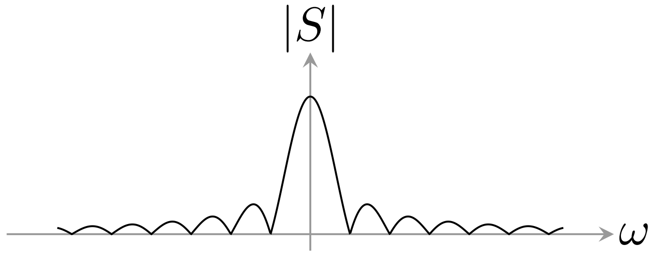

Рис. 10: Спектр прямоугольного импульса

$\square$

2.6 Задача №12

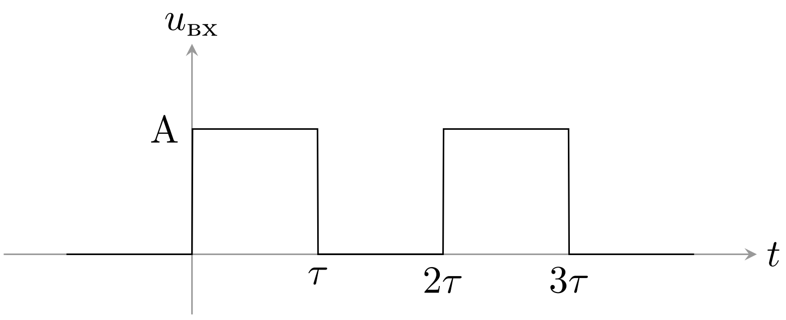

Рис. 11: Входное напряжение

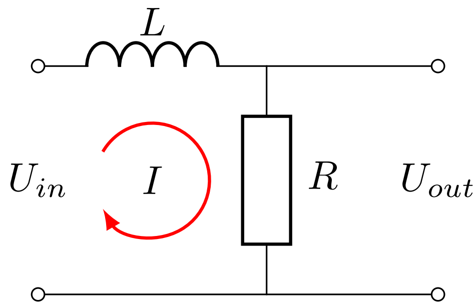

Рис. 12: RL–контур

Дано. Определить отклик $u_{вых}(t)$ RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие двух прямоугольных импульсов длительностью τ. Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое интегрирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{вх}(t) = A[\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-\tau)] + A[\mathbb{1}(t-2\tau) - \mathbb{1}(t-3\tau)]$$

$$u_{вх}(t) \risingdotseq \frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau}\right)$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - напряжение на индуктивности $u_L(0) = u_0$. Его образ $u_L(0) \risingdotseq \frac{u_0}{p} = \frac{i_0 \cdot pL}{p} = i_0 L$. Это напряжение можно учесть как ещё одну стороннюю ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$u_{вх} + Li_0 = (pL + R)i_0$$

Откуда выразим ток I:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{p}\left(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau}\right) + Li_0}{pL + R}$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$I(p) = \frac{\frac{A}{L}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{\frac{A}{L}e^{-p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{\frac{A}{L}e^{-2p\tau}}{p + \frac{R}{L}} - \frac{\frac{A}{L}e^{-3p\tau}}{p + \frac{R}{L}} + \frac{i_0}{p + \frac{R}{L}}$$

Отсюда можем получить напряжение на выходе:

$$<<<<<<< Updatedupstreamu_{\text{вых}}(p) = I(p)\cdot R ======== u_{\text{вых}}(p) =>>>>>>> Stash$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \risingdotseq (1-e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p+\alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t-\tau)\mathbb{1}(t-\tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Произведем преобразование:

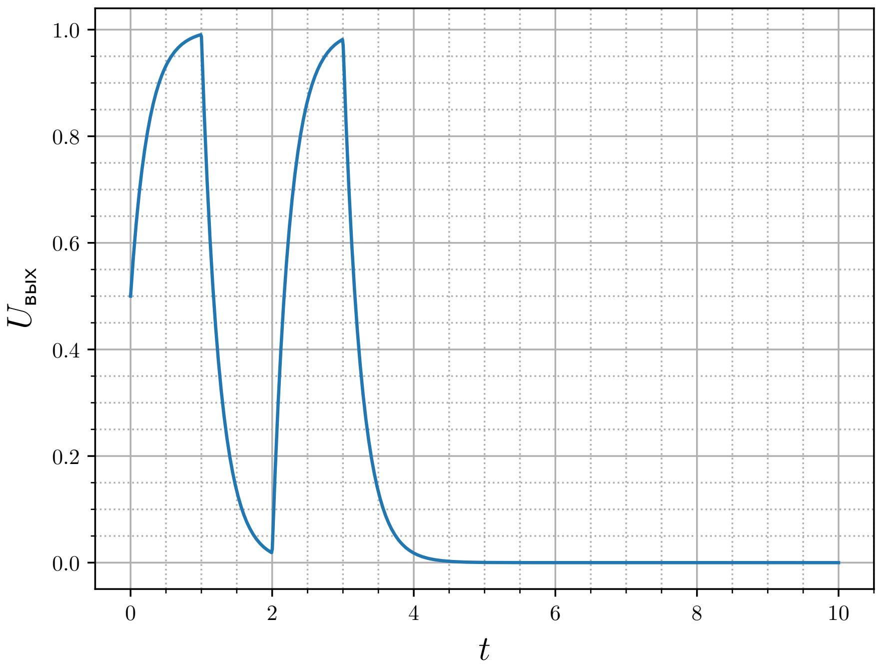

Рис. 13: Решение при $A = 1, i_0R = 0.5, \tau = 5, R/L = 4, \tau = 1$

$$<<<<<<< Updatedupstreamu_{\text{вых}}(t) = A\Bigg\{\Big(1-e^{-\frac{R}{L}t}\Big)\mathbb{1}(t) - \Big(1-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\Big)\mathbb{1}(t-\tau) + \Big(1-$$

$$-\Big(1-e^{-\frac{R}{L}(t-3\tau)}\Big)\mathbb{1}(t-3\tau)\Bigg\} + i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) ======= u(t) = A[(1-e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) - (1-e^{-\frac{R}{L}(t}$$

$$(1-e^{-\frac{R}{L}(t-3\tau)})\mathbb{1}(t-3\tau)] + i_0Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) >>>>>>> Stashedchanges$$

$$u(t) = (E - u_0)\mathbb{1}(t)\exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\} - E\exp\left\{-\frac{t-\tau}{CR}\right\}\mathbb{1}(t-\tau)$$

График решения при при $A = 1, i_0 R = 0.5, \tau = 5, R/L = 4, \tau = 1$ изображен на рис. 13

Условие интегрирования. Рассмотрим очевидное равенство $u_{\text{вх}} = u_L + u_{\text{вых}}$. Перепишем это выражение:

$$u_{\text{вх}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}}$$

Проинтегрируем его по времени:

$$\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{R}\underbrace{IR}_{u_{\text{вых}}} + R\int I\,\mathrm{d}t$$

Если будет выполнено условие

$$\left|R\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll |LI| \quad \Rightarrow \quad \left|\int I\,\mathrm{d}t\right| \ll \left|\frac{L}{R}I\right|$$

То выходное напряжение с точностью до множителя интегрирует входное:

$$u_{\text{вых}} = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}}\int u_{\text{вх}}\,\mathrm{d}t$$

где $\tau_{\text{цепи}} = \frac{L}{R}$.

Выясним смысл неравенства модулей на примере гармонических сигналов. Пусть входное напряжение гармоническое $u_{\text{вх}} = u_0 e^{j\omega t}$. Тогда ток в контуре: $I = I_0 e^{j\omega t}$, где $I_0 = \frac{u_0}{j\omega L + R}$, и неравенство (2.6) можно переписать:

$$\left|I_0\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\right| \ll \left|\tau_{\text{цепи}} I_0 e^{j\omega t}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \ll \tau_{\text{цепи}} \quad \Rightarrow \quad T \ll \tau_{\text{цепи}}$$

Таким образом, интегрирование сигнала «чистое» для таких частот, период которых много меньше постоянной цепи. Отсюда следует «вилка выбора» интегрирующей цепочки: если мы будем расширять частотный диапазон «чистого» интегрирования, то амплитуда на выходе цепочки будет падать, и наоборот.

□

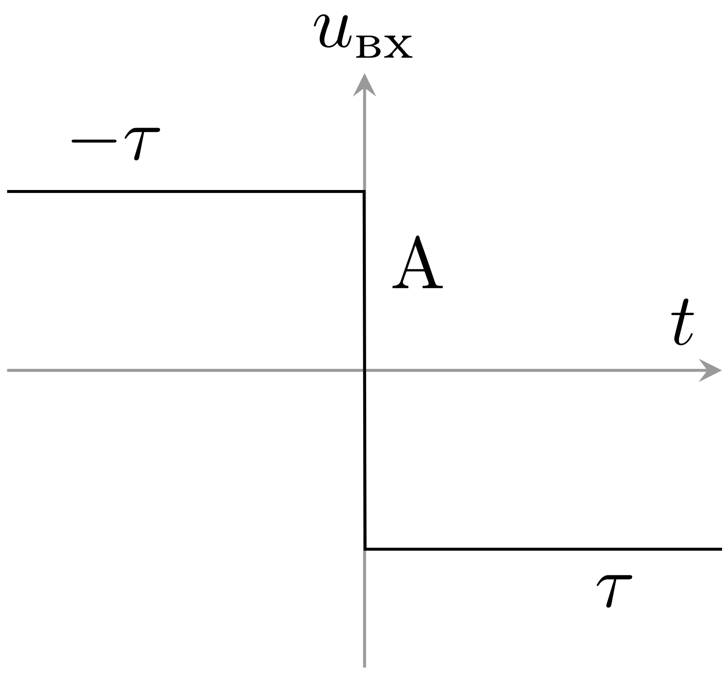

Рис. 14: Входное напряжение

2.7 Задача №15

Дано. Найти спектр сигнала, изображенного на рисунке. Нарисовать график $|S(\omega)|$

Решение. Зададим функцию с рисунка, а затем продифференцируем её:

$$S(t) = A[\mathbb{1}(t+\tau) - \mathbb{1}(t)] + A[\mathbb{1}(t-\tau) - \mathbb{1}(t)]$$

$$S'(t) = A[\delta(t+\tau) - \delta(t)] + A[\delta(t-\tau) - \delta(t)]$$

По свойствам преобразования Фурье:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) \Longrightarrow S(\omega) = \frac{S'(w)}{i\omega}$$

Запишем преобразование Фурье:

$$S'(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S'(t)\cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+\tau)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t +$$

$$A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -2\delta(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = A\big(e^{+i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau} - 2\big)$$

Тогда:

$$S(\omega) = \frac{A}{i\omega}\left(e^{+i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau} - 2\right) = \frac{2A}{i\omega}(\cos\omega\tau - 1) = \frac{2iA}{\omega}(1 - \cos\omega\tau)$$

$$|S(\omega)| = 2A\left|\frac{1-\cos(\omega\tau)}{\omega}\right|$$

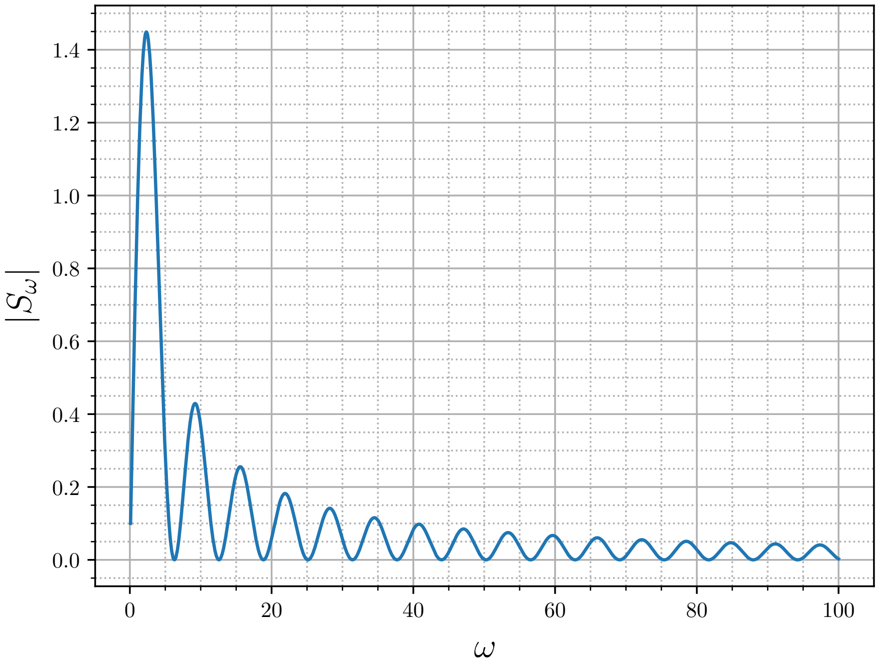

Рис. 15: Решение при $A = 1, \tau = 1$

$\square$