1 Типовые задачи по радиоэлектронике

1.1 Задача №1

Дано. Найти спектр сигнала $S(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$. Нарисовать график $|S(\omega)|$. Что будет при разных τ?

Решение. $\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{-i\omega t} dt = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t\right)} dt$

Выделим полный квадрат в степени экспоненты:

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2\tau^2}{4}} dt$$

Сделаем замену переменных: $\frac{t}{\tau} + \frac{i\omega\tau}{2} = x$, $t = \tau x - \frac{i\omega\tau}{2}\tau$, $dt = \tau dx$

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A\tau e^{\frac{-\omega^2\tau^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Это интеграл Пуассона, тогда:

$$\hat{\mathrm{S}}(\omega) = A\tau e^{\frac{-\omega^2\tau^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Чем медленнее изменяется U(t) (т.е. чем больше τ), тем быстрее изменяется $|S(\omega)|$ (т.е. тем уже спектр сигнала), и наоборот. Похоже ли это на интеграл Пуассона? Наверное, не должно быть деления на 2 □

1.2 Задача №2

Дано. Определить отклик выхода RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие прямоугольного импульса длительностью τ_0. Нарисовать график $u_{\text{вых}}(t)$. При выполнении какого условия будет осуществляться приближенное интегрирование входной цепи?

Решение. Эквивалентная схема (картиночка)

$$u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{A}{p} - \frac{A}{p} \cdot e^{-p\tau} = \frac{A}{p}(1 - e^{-p\tau})$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})+i_L(0)L=(pL+R)I(p)$$

$$I(p)=\frac{\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})}{pL+R}+\frac{i_L(0)L}{pL+R}$$

С другой стороны,

$$\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})=I(p)R+u_L(p)\Rightarrow$$

$$u_L(p)=\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})-I(p)R=\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})-\frac{\frac{AR}{p}(1-e^{-p\tau}}{pL+R}-\frac{i_L(0)LR}{pL+R}=$$
$$=\frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})-\frac{A\frac{R}{L}}{p(p+\frac{R}{L})}+\frac{A\frac{R}{L}}{p(p+\frac{R}{L})}e^{-p\tau}-\frac{i_L(0)R}{p+\frac{R}{L}}\risingdotseq$$
$$\risingdotseq \cancel{A\mathbb{1}(t)}-\cancel{A\mathbb{1}(t-\tau)}-A(\cancel{1}-e^{-\frac{Rt}{L}})\mathbb{1}(t)+A(\cancel{1}-e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t-\tau)-i_L(0)Re^{\frac{-R}{L}t}\mathbb{1}(t)=$$
$$=Ae^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)-Ae^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\cdot\mathbb{1}(t-\tau)-i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)$$

Итак,

$$u_L(t)=(A-i_L(0)R)e^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)-Ae^{-\frac{R(t-\tau)}{L}}\cdot\mathbb{1}(t-\tau)$$

Нам надо

$$u_R(p)=I(p)R=\frac{AR(1-e^{-p\tau})}{p(pL+R)}+\frac{i_L(0)RL}{pL+R}=\frac{\frac{AR}{L}(1-e^{-p\tau})}{p(p+\frac{R}{L}}+\frac{i_L(0)R}{p+\frac{R}{L}}\risingdotseq$$
$$\risingdotseq A(1-e^{-\frac{Rt}{L}})\cdot\mathbb{1}(t)-A(1-e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}})\cdot\mathbb{1}(t-\tau)+i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)$$

Условие интегрирования.

$$u_{\text{вых}}(t)=A(1-e^{-\frac{Rt}{L}})\cdot\mathbb{1}(t)-A(1-e^{-\frac{R(t-\tau)}{L}})\cdot\mathbb{1}(t-\tau)+i_L(0)Re^{-\frac{Rt}{L}}\cdot\mathbb{1}(t)$$
$$\tau?>>\tau|\frac{L}{R}>>\tau|$$

□

1.3 Задача №3

Дано. Определите отклик $u_{\text{вых}}(t)$ RL-цепи, изображенной на рисунке, на воздействие единичного импульса длительностью τ. Нарисуйте график отклика. Какова переходная характеристика цепи? При выполнении какого условия будет осуществляться приближённое дифференцирование входной цепи? Решить задачу с ненулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем образ входного импульса преобразованием Лапласа:

$$u_{\text{вх}}(t) = E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad u_{\text{вх}}(t) \risingdotseq \frac{E}{p} - \frac{E}{p}e^{-p\tau} = \frac{E}{p}\big(1 - e^{-p\tau}\big)$$

Надо учесть, что в контуре могут быть заданы начальные условия - ток i_0. Тогда начальное напряжение на катушке $u_L(0) = i_0 \cdot pL$, а его образ $u_L(0) \risingdotseq \frac{i_0 pL}{p} = i_0 L$. Это напряжение можно трактовать как часть ЭДС.

Обозначим суммарный ток в контуре за $I(p)$. Тогда, так как сумма падений напряжения на каждом элементе равна нулю, получим следующее выражение:

$$\frac{E}{p}\big(1 - e^{-p\tau}\big) + i_0 L = (R + pL)I(p)$$

Откуда выразим ток I:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}(1 - e^{-p\tau}) + i_0 L}{R + pL}$$

С другой стороны, $u_{\text{вх}} = u_C + u_R$, а $u_C \equiv u_{\text{вых}}$, тогда

$$u_{\text{вых}}(p) = u_{\text{вх}}(p) - u_R(p) = u_{\text{вх}}(p) - I(p)R =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E(1 - e^{-p\tau})R}{p(R + pL)} + \frac{i_0 LR}{R + pL} = u_{\text{вх}}(p) - \frac{ER}{p(R + pL)} + \frac{ERe^{-p\tau}}{p(R + pL)} - \frac{i_0 LR}{R + pL} =$$
$$= u_{\text{вх}}(p) - \frac{E\frac{R}{L}}{p(p + \frac{R}{L})} + \frac{E\frac{R}{L}e^{-p\tau}}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{i_0 R}{p + \frac{R}{L}}$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \risingdotseq (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}(t)$$
$$\frac{1}{(p + \alpha)} \risingdotseq e^{-\alpha t}\mathbb{1}(t)$$
$$e^{-p\tau}F(p) \risingdotseq f(t - \tau)\mathbb{1}(t - \tau), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t)$$

Учтя, что $u_{\text{вх}}(p) \risingdotseq u_{\text{вх}}(t)$, произведем преобразование:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0 Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$
$$= \cancel{E \cdot \mathbb{1}(t) - E \cdot \mathbb{1}(t - \tau)} - E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}t})\mathbb{1}(t) + E(\cancel{1} - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)})\mathbb{1}(t - \tau) - i_0 Re^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) =$$

$$= (E - i_0 R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t - \tau)$$

Окончательно получили ответ: при воздействии прямоугольным импульсом $u_{\text{вх}}(t)$ амплитуды E и длительностью τ, на выходе получаем

$$u_{\text{вых}}(t) = (E - i_0 R)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbb{1}(t) - Ee^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathbb{1}(t-\tau)$$

Условие дифференцирования. Как нетрудно догадаться,

$$u_{\text{вх}} = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}}_{L\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}} + \frac{R}{L}\underbrace{L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}_{u_L \equiv u_{\text{вых}}}$$

Если будет выполнено условие

$$\left|L\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\right| \ll \left|\frac{R}{L}u_L\right|$$

Тогда будет видно, что цепочка осуществляет дифференцирование:

$$u_{\text{вых}} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_{\text{вх}}}{\mathrm{d}t}$$

□