

Отчет по лабораторной работе №3

# Исследование матриц рассеяния волноводных узлов

Работу выполнили студенты  
430 группы радиофизического факультета  
**Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В.**

Нижний Новгород, 25 февраля 2019 г.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1. Теоретические сведения</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1. Матрица рассеяния шестиполюсника . . . . .	2
1.2. Свойства матрицы рассеяния . . . . .	3
<b>2. Эксперимент</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1. Используемое оборудование . . . . .	5
2.1.1. Определение коэффициента отражения от нагрузки с помощью измерительной линии . . . . .	5
2.2. Фиксация условного конца линии. Длина волны в волноводе . . . . .	6
2.3. Проверка согласованных нагрузок . . . . .	6
2.4. Измерение параметров шестиполюсников и расчет $S_{km}$ . . . . .	6
2.4.1. Процедура измерения диагональных элементов . . . . .	7
2.4.2. Процедура измерения недиагональных элементов . . . . .	7
2.4.3. Результаты измерений и расчётов . . . . .	8
2.4.4. Полученные матрицы рассеяния . . . . .	9
<b>3. Результаты</b> . . . . .	<b>11</b>

## Введение

В данной работе изучаются с помощью матричного анализа волноводные узлы – шестиполосники. У них с помощью измерительной линии измеряются величины, позволяющие рассчитать коэффициенты матрицы рассеяния шестиполосников  $S_{km}$ .

На основе рассчитанной матрицы рассеяния  $S$  конкретного шестиполосников можно попытаться решить обратную задачу: сделать на основе полученных данных предположение о возможных конструктивных вариантах волноводных узлов, находящихся внутри шестиполосников.

## 1. Теоретические сведения

### 1.1. Матрица рассеяния шестиполосника

Рассмотрим трехплечий волноводный узел (шестиполосник), изображенный на рис. 1. В каждом плече выберем **плоскость отсчета** (сечение), в котором будем находить отношения амплитуд полей отраженной и падающей волн.

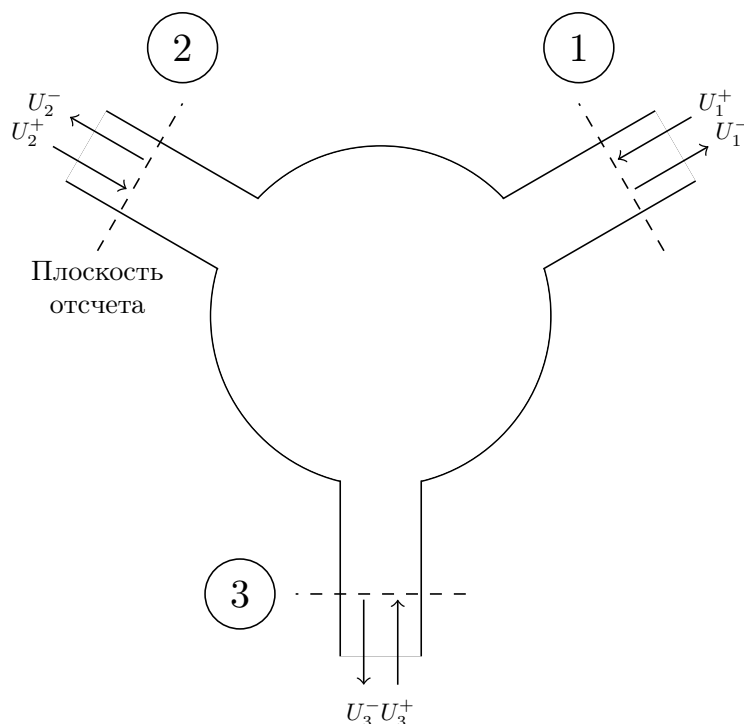


Рис. 1. Схема трехплечего узла (шестиполосника)

Обозначим комплексные амплитуды полей входящих (падающих) в узел волн через  $U_m^+$ , а амплитуды выходящих (отраженных) волн через  $U_k^-$ . Величины  $U_k^-$  зависят от амплитуд и фаз полей волн, входящих во все плечи узла, причем эти зависимости являются

линейными в силу линейности уравнений Максвелла (предполагается, что нелинейных элементов в узле нет). Связь между амплитудами полей в плечах узла записывается в виде:

$$\begin{aligned} U_1^- &= S_{11}U_1^+ + S_{12}U_2^+ + S_{13}U_3^+ \\ U_2^- &= S_{21}U_1^+ + S_{22}U_2^+ + S_{23}U_3^+ \\ U_3^- &= S_{31}U_1^+ + S_{32}U_2^+ + S_{33}U_3^+ \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_{km}$  — комплексные коэффициенты, характеризующие волноводный узел.

Систему уравнений (1) удобно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ U_3^- \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_3^+ \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

Матрица  $\hat{\mathbf{S}}$  называется матрицей рассеяния, или  $S$ -матрицей (от англ. scattering – рассеяние).

Из определения элементов матрицы рассеяния следует, что для пассивных узлов, не обладающих свойством усиления мощности, модули коэффициентов передачи и отражения не могут превышать единицы.

## 1.2. Свойства матрицы рассеяния

**Взаимный узел.** Волноводные узлы, в которых отсутствуют элементы с гиротропными свойствами (например, намагниченный феррит), являются взаимными устройствами. Их матрицы рассеяния симметричны относительно главной диагонали

$$S_{mk} = S_{km}$$

Верно и обратное утверждение: если волноводное устройство описывается симметричной матрицей рассеяния, то оно является взаимным.

Отметим, что для взаимных узлов свойства матриц, доказанные для строк, выполняются и для столбцов, и наоборот.

**Волноводное устройство без потерь.** Матрица рассеяния волноводного устройства без потерь является унитарной, т.е.

$$\hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{S}}^* = \hat{\mathbf{I}}$$

Можно показать [1], что для унитарной матрицы выполняются следующие свойства:

$$\sum_{m=1}^N S_{mk} S_{mk}^* = \sum_{m=1}^N |S_{mk}|^2 = 1$$

т.е. сумма квадратов модулей всех матричных элементов любого столбца матрицы рассеяния узла без потерь равна единице.

Второе свойство — для любой пары столбцов сумма (по строкам) произведений каждого матричного элемента из одного столбца на комплексно сопряженный элемент из той же строки другого столбца равна нулю:

$$\sum_{m=1}^N S_{ml} S_{mk}^* = 0, \quad k \neq l$$

**Смещение плоскости отсчета.** Предположим, что известна матрица рассеяния при некотором положении плоскости отсчета  $z = 0$  в  $m$ -ом плече узла. При смещении этого сечения на расстояние  $l_m$  в направлении распространения падающей волны (по направлению к узлу) новая матрица рассеяния может быть построена по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S'_{mk} &= S_{mk} e^{i(h_m l_m + h_k l_k)} \\ S'_{mm} &= S_{mm} e^{i2h_m l_m} \end{aligned}$$

где  $h_m$  — постоянная распространения волны в  $m$ -ом плече.

Таким образом, изменение плоскости отсчета приводит лишь к изменению фазы коэффициентов матрицы рассеяния, не меняя их абсолютного значения.

## 2. Эксперимент

### 2.1. Используемое оборудование

- 1) СВЧ-генератор Г4-225, в режиме работы на частоте 8.5 ГГц с установленным значением затухания  $-4$  дБ
- 2) Три шестиполосника, пластина для закорачивания волновода и две согласованные нагрузки
- 3) Измерительная волноводная линия ЗЗ-И с кристаллическим детектором, в цепи которого включен амперметр

#### 2.1.1. Определение коэффициента отражения от нагрузки с помощью измерительной линии

Измерение элементов матрицы  $\hat{\mathbf{S}}$  производится с помощью измерительной линии передачи. Линия передачи позволяет измерить фазу и модуль коэффициента отражения  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left( \frac{U_{\text{пад}}}{U_{\text{отр}}} \right)_H = |\Gamma| e^{i\varphi_H}$$

Модуль коэффициента отражения определялся через коэффициент стоячей волны  $K$ :

$$|\Gamma| = \frac{K - 1}{K + 1}$$

Измерение  $K$  производилось путем перемещения вдоль измерительной линии (ИЛ) зонда, показания которого связаны с высокочастотным напряжением в данном сечении линии.

Для детектирования СВЧ сигнала зонда в ИЛ стоит кристаллический детектор. При этом зависимость между током детектора  $I$  и приложенным высокочастотным напряжением  $|U|$  является нелинейной, и при малых значениях переменного напряжения детектор имеет характеристику  $I = f(|U|)$ , близкую к квадратичной. В этом случае ток детектора

$$I = \alpha |U|^2,$$

где  $\alpha$  — параметр, зависящий от свойств детектора.

В максимуме и в минимуме распределения поля в линии имеем

$$I_{\max} = \alpha |U|_{\min x}^2, \quad I_{\min} = \alpha |U|_{\min}^2$$

откуда

$$K = \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{\min}}}$$

Величина фазы коэффициента отражения в сечении  $z$  ( $z < 0$ ) —  $\psi = \phi_H + 2hz$  определялась следующим образом: определялось положение минимума напряжения в ИЛ относительно плоскости присоединения нагрузки. Для этого был сначала определен т.н. **условный конец линии** — сечение волновода, соответствующее минимуму напряжения при коротком замыкании линии ( $z_{min}^0$ ). Обозначив расстояние от условного конца линии  $z_{min}^0$  до ближайшего минимума напряжения  $z_{min}$  **со стороны генератора** при включенной нагрузке через

$$\Delta z_{min} \equiv z_{min}^0 - z_{min} = |z_{min} - z_{min}^0| = -(z_{min} - z_{min}^0)$$

И тогда фаза коэффициента отражения (с учетом выражения  $h = 2\pi/\lambda_B$ ) определяется формулой

$$\varphi_H = 4\pi \frac{\Delta z_{min}}{\lambda_B} - \pi$$

## 2.2. Фиксация условного конца линии. Длина волны в волноводе

Закоротив с помощью короткозамыкателя измерительную линию, зонд измерительной линии установили в ближайший к концу линии узел стоячей волны.

При этом координата этого узла взята за условный конец линии:

$$z_{min}^0 = 5.145 \text{ см}$$

Измерить длину волны в волноводе  $\lambda_B$ .

Продвигая зонд в сторону генератора до ближайшего узла, нашли значение длины волны в волноводе:

$$\frac{\lambda_B}{2} = 5.145 - 2.41 = 2.735 \text{ см} \Rightarrow \lambda_B = 5.47 \text{ см}$$

При этом расчетная длина волны 5.49 см, что неплохо согласуется с экспериментом.

## 2.3. Проверка согласованных нагрузок

Присоединив к скрутке волновода на конце измерительной линии каждую из двух используемых при выполнении работы согласованных нагрузок, определили для них коэффициенты отражения  $\Gamma_{H1,2}$ . Для точного расчета по приведенным в теории формулам нужно, чтобы они были равны нулю, соответственно для приближенного расчета достаточно близости к нулю.

Измеренные значения  $\Gamma_{H1} = 0.0825$ ,  $\Gamma_{H2} = 0.095$ , достаточно малы для применения расчетных формул.

## 2.4. Измерение параметров шестиполюсников и расчет $S_{km}$

Для каждого из трех шестиполюсников было осуществлено 6 экспериментов, для измерения диагональных и недиагональных элементов.

### 2.4.1. Процедура измерения диагональных элементов

Пронумеровав условно плечи шестиполюсника как 1,2,3 и зафиксировав их расположение, к плечу 1 подключили генератор ( $\Gamma$ ), а плечи 2 и 3 нагрузили согласованными нагрузками ( $H$ ).

При этом матричное уравнение упрощается, и можно показать, что

$$\Gamma_{11} = S_{11} = |\Gamma_{11}| e^{i\varphi_{11}}$$

Присоединяя генератор поочередно к плечам 2 и 3, определили элементы  $S_{22}$  и  $S_{33}$ .

### 2.4.2. Процедура измерения недиагональных элементов

Для измерения недиагональных элементов, 2 плечо замыкается накоротко, 3 плечо подключается к согласованной нагрузке, и тогда

$$\Gamma_{12} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}}$$

Тогда для произведения недиагональных элементов матрицы рассеяния имеем

$$S_{12}S_{21} = (1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12}), \quad \text{1-генератор 2-замыкание 3-нагрузка}$$

Поскольку диагональные элементы  $S_{mm}$  известны (из предыдущих экспериментов), а коэффициент отражения  $\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{i\phi_{12}}$  можно найти с помощью измерительной линии, то этот эксперимент дает возможность определить произведение  $S_{12}S_{21}$ . При такой методике измерения невозможно определить отдельно элементы  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , однако, если шестиполюсник не содержит невзаимных элементов, то  $S_{12} = S_{21}$ , и тогда

Расчетные формулы:

$$S_{12}^2 = (1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12}), \quad \text{1-генератор 2-замыкание 3-нагрузка}$$

$$S_{13}^2 = (1 + S_{33})(S_{11} - \Gamma_{13}), \quad \text{1-генератор 2-нагрузка 3-замыкание}$$

$$S_{23}^2 = (1 + S_{33})(S_{22} - \Gamma_{23}), \quad \text{1-нагрузка 2-генератор 3-замыкание}$$

Для расчета корней из комплексных чисел для оптимизации временных затрат использовалась система **Wolfram Mathematica**.



## 2.4.3. Результаты измерений и расчётов

Таблица 1. Измерения характеристик шестиполюсника №1

№	$S_{km}$	1	2	3	$I_{\max}$	$I_{\min}$	$z_{\min}$ , см	$ \Gamma $	$\varphi_H$	$S_{km}$
1	$S_{11}$	Г	Н	Н	52	8	4.83	0.44	-2.42	$0.44 \cdot e^{-2.24i}$
2	$S_{12}$	Г	КЗ	Н	83	1	4.8	0.8	-2.35	$0.49 \cdot e^{-3.007i}$
3	$S_{13}$	Г	Н	КЗ	94	0.5	4.79	0.86	-2.33	$0.56 \cdot e^{-3.00i}$
4	$S_{22}$	Н	Г	Н	50	7	4.89	0.46	-2.56	$0.46 \cdot e^{-2.56i}$
5	$S_{23}$	Н	Г	КЗ	80	0.5	4.88	0.85	-2.53	$0.54 \cdot e^{-3.043i}$
6	$S_{33}$	Н	Н	Г	52	7	4.8	0.46	-2.35	$0.46 \cdot e^{-2.35i}$

Таблица 2. Измерения характеристик шестиполюсника №2

№	$S_{km}$	1	2	3	$I_{\max}$	$I_{\min}$	$z_{\min}$ , см	$ \Gamma $	$\varphi_H$	$S_{km}$
1	$S_{11}$	Г	Н	Н	94	1	4.51	0.81	-1.68	$0.81 \cdot e^{-1.68i}$
2	$S_{12}$	Г	КЗ	Н	95	0.5	4.56	0.86	-1.8	$0.34 \cdot e^{-2.94i}$
3	$S_{13}$	Г	Н	КЗ	90	0.5	4.58	0.86	-1.83	$0.37 \cdot e^{-3.03i}$
4	$S_{22}$	Н	Г	Н	17	11	3.25	0.11	1.21	$0.11 \cdot e^{+1.21i}$
5	$S_{23}$	Н	Г	КЗ	32	1	2.5	0.7	2.93	$0.86 \cdot e^{+3.12i}$
6	$S_{33}$	Н	Н	Г	16	14	3.38	0.03	0.92	$0.03 \cdot e^{+0.92i}$

Таблица 3. Измерения характеристик шестиполюсника №3

№	$S_{km}$	1	2	3	$I_{\max}$	$I_{\min}$	$z_{\min}$ , см	$ \Gamma $	$\varphi_H$	$S_{km}$
1	$S_{11}$	Г	Н	Н	21	13	4.4	0.12	-1.43	$0.12 \cdot e^{-1.43i}$
2	$S_{12}$	Г	КЗ	Н	21	12	4.41	0.14	-1.45	$0.14 \cdot e^{-2.35i}$
3	$S_{13}$	Г	Н	КЗ	20	13	4.4	0.11	-1.43	$0.11 \cdot e^{-2.05i}$
4	$S_{22}$	Н	Г	Н	16	12	5.15	0.07	-3.14	$0.07 \cdot e^{-3.14i}$
5	$S_{23}$	Н	Г	КЗ	16	12	5.15	0.07	-3.14	$0.00 \cdot e^{-0.00i}$
6	$S_{33}$	Н	Н	Г	100	1	4.53	0.82	-1.72	$0.82 \cdot e^{-1.72i}$

#### 2.4.4. Полученные матрицы рассеяния

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} 0.44 \cdot e^{-2.24i} & 0.49 \cdot e^{-3.007i} & 0.56 \cdot e^{-3.00i} \\ 0.49 \cdot e^{-3.007i} & 0.46 \cdot e^{-2.56i} & 0.54 \cdot e^{-3.043i} \\ 0.56 \cdot e^{-3.00i} & 0.54 \cdot e^{-3.043i} & 0.46 \cdot e^{-2.35i} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} 0.81 \cdot e^{-1.68i} & 0.34 \cdot e^{-2.94i} & 0.37 \cdot e^{-3.03i} \\ 0.34 \cdot e^{-2.94i} & 0.11 \cdot e^{+1.21i} & 0.86 \cdot e^{+3.12i} \\ 0.37 \cdot e^{-3.03i} & 0.86 \cdot e^{+3.12i} & 0.03 \cdot e^{+0.92i} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_3 = \begin{pmatrix} 0.12 \cdot e^{-1.43i} & 0.14 \cdot e^{-2.35i} & 0.11 \cdot e^{-2.05i} \\ 0.14 \cdot e^{-2.35i} & 0.07 \cdot e^{-3.14i} & 0.00 \cdot e^{-0.00i} \\ 0.11 \cdot e^{-2.05i} & 0.00 \cdot e^{-0.00i} & 0.82 \cdot e^{-1.72i} \end{pmatrix}$$

Полученные матрицы позволяют сказать о наличии потерь, причем первые две матрицы с некоторым приближением можно считать унитарными (сумма квадратов в строках  $\sum_m |S_{mk}|^2 = 0.75 \div 0.9$ ), а третья матрица уже не вписывается в такие приближения ( $\sum_m |S_{mk}|^2 = 0.02 \div 0.68$ )



### 3. Результаты

Проведя ряд экспериментов, мы определили длину волны в волноводе

$$\lambda_B = 5.47 \text{ см},$$

при теоретической длине волны 5.49 см. Для всех шестиполосников провели по шесть экспериментов, определяя коэффициент отражения в измерительной линии, затем на основании полученных данных рассчитали матрицы рассеяния шестиполосников:

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} 0.44 \cdot e^{-2.24i} & 0.49 \cdot e^{-3.007i} & 0.56 \cdot e^{-3.00i} \\ 0.49 \cdot e^{-3.007i} & 0.46 \cdot e^{-2.56i} & 0.54 \cdot e^{-3.043i} \\ 0.56 \cdot e^{-3.00i} & 0.54 \cdot e^{-3.043i} & 0.46 \cdot e^{-2.35i} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} 0.81 \cdot e^{-1.68i} & 0.34 \cdot e^{-2.94i} & 0.37 \cdot e^{-3.03i} \\ 0.34 \cdot e^{-2.94i} & 0.11 \cdot e^{+1.21i} & 0.86 \cdot e^{+3.12i} \\ 0.37 \cdot e^{-3.03i} & 0.86 \cdot e^{+3.12i} & 0.03 \cdot e^{+0.92i} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_3 = \begin{pmatrix} 0.12 \cdot e^{-1.43i} & 0.14 \cdot e^{-2.35i} & 0.11 \cdot e^{-2.05i} \\ 0.14 \cdot e^{-2.35i} & 0.07 \cdot e^{-3.14i} & 0.00 \cdot e^{-0.00i} \\ 0.11 \cdot e^{-2.05i} & 0.00 \cdot e^{-0.00i} & 0.82 \cdot e^{-1.72i} \end{pmatrix}$$

### Список литературы

- [1] А.С. Зайцева, А.В. Кудрин, Л.Л. Попова. Практикум: Исследование матриц рассеяния волновых узлов. — Н. Новгород: ННГУ, 2014. — 22 с.