Уравнение теплопроводности.
(15 баллов)

Дан металлический стержень длины L, теплоизолированный по всей длине за исключением двух концов. Стержень изначально имеет температуру u_0, допустим, 100°C, а концы погружены в холодную среду, например, воду температуры 0°C. Необходимо найти распределение температуры в стержне с течением времени.

Данная задача сводится к решению одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}, \tag{1}$$

где $a^2 = K/C\rho$, K — коэффициент теплопроводности, C — теплоёмкость, ρ — плотность материала. Это уравнение в частных производных параболического типа, и подразумевает как граничные, так и начальные условия, в нашем случае:

$$u(x, t=0) = 100°\text{C}, \quad u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0°\text{C}. \tag{2}$$

Уравнение с такими граничными условиями можно решить аналитически методом разделения переменных. Однако предлагается решить это уравнение численно с помощью конечно-разностной схемы.

Явная схема FTCS (прямая схема Эйлера)

Как обычно, конечно-разностная схема основывается на аппроксимации производных в уравнении на сетке с конечным шагом. Пространство и время дискретизуется с шагами Δx и Δt, и ищется приближённое решение в узлах сетки (см. Рис. **??**). Производные можно аппроксимировать не единственным способом, что приводит к разным вариантам схем. Самый простой (но не самый лучший) вариант — *явная схема.* Так как значения температуры на сетке при $t = 0$ известны, производную по времени можно выразить как *правую одностороннюю производную*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Так как известно значение температуры на краях стержня, для второй производной по времени можно использовать аппроксимацию

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}. \tag{4}$$

После подстановки аппроксимаций в уравнение (1) можно переписать его в виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha \left[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n \right], \quad \alpha = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \tag{5}$$

где $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$, $j = \overline{0,J}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Такая схема называется *явной*, потому что она позволяет выразить решение через известные значения температуры. Начиная с нулевого слоя по n (см. лекции), можно вычислить, как меняется распределение температуры в стержне со временем, как, например, показано на Рис. 1.

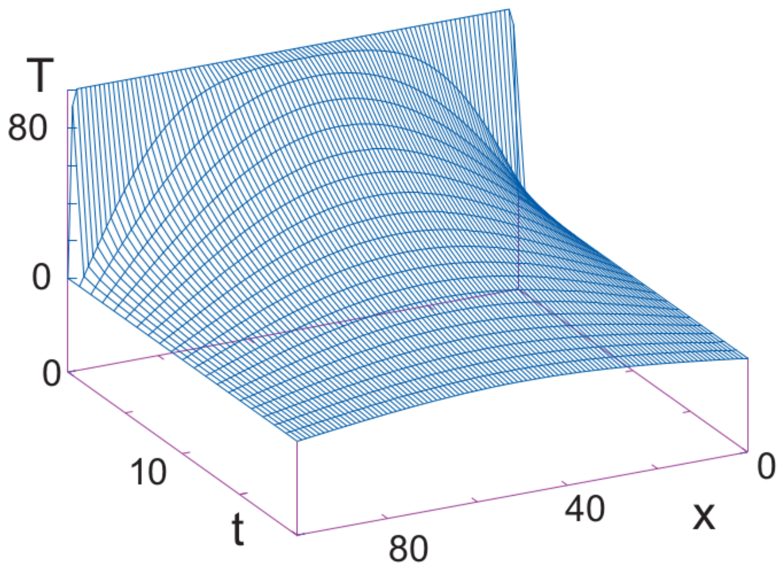

Рис. 1: Эволюция распределения температуры в стержне.

Анализ устойчивости

Во время решения уравнения в частных производных с помощью разностных методов нужно помнить о *сходимости схемы* к точному решению. Один из способов оценки устойчивости выбранного способа аппроксимации — это анализ по фон Нейману. Он основан на предположении, что решение аппрокимации можно представить в виде суперпозиции по собственным модам:

$$u_j^n = (\xi(k))^n e^{ikj\Delta x}, \tag{6}$$

где i — мнимая единица, $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$, k — волновой вектор, $\xi(k)$ — неизвестная комплексная функция. С каждым шагом по времени n амплитуда приобретает дополнительный множитель $\xi(k)$. Для устойчивости решения необходимо, чтобы амплитуда колебаний не возрастала со временем для всех значений k, что выполено в случае

$$|\xi(k)| \leq 1. \tag{7}$$

Если найти $\xi(k)$, отсюда можно получить явное условие на размеры шагов сетки Δx и Δt, при которых численная схема устойчива. Таким образом, необходимо подставить (6) в разностную схему, получить алгебраическое уравнение на функцию $\xi(k)$, решить его, после чего использовать условие (7).

Явная схема уравнения теплопроводности сходится, если выполнено условие

$$\alpha = \frac{a^2\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Из этого условия вытекает, что выбор сеток по времени и пространству не произволен. С уменьшением шага по времени Δt сходимость всегда улучшается, но если по каким-то причинам нужно найти более детальное решение по пространству, то есть уменьшить Δx, необходимо одновременно уменьшить Δt причём пропорционально Δx^2. Подобная связь шагов сетки по времени и пространству является одним из главных недостатков явных схем решений уравнений в частных производных в целом. Отсутствие сходимости к решению (например, при нарушении условия (8) в случае уравнения теплопроводности) может проявляться как бесконечный рост численного решения со временем или через быстрый рост высокочастотных гармоник, которые никак не связаны с физической природой изучаемого процесса.

Неявная схема Кранка-Николсона

Метод Кранка-Николсона позволяет находить решение уравнения теплопроводности (1) со значительно большей точностью. Суть метода заключается в альтернативном способе аппроксимации производных в уравнении. Вместо правой односторонней производной по времени будем использовать *центральную производную*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} + O(\Delta t^2), \tag{9}$$

а вторую производную по координате в момент $t+\frac{\Delta t}{2}$ выразим как

$$\begin{aligned} 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) \approx {} & [u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t)] \\ & + [u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)] + O(\Delta x^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда уравнение теплопроводности аппроксимируется схемой

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{\alpha}{2}\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right). \tag{11}$$

Видно, что теперь в уравнении перепутаны «новые» $(n+1)$ значения температуры в узлах $j-1$, j, $j+1$, поэтому невозможно явно выразить «новые» значения температуры через «старые», и получить решение, последовательно обходя сетку. Мы получили СЛАУ, которую необходимо решать целиком, то есть *неявно* найти u_j^{n+1} для всех $j=\overline{0,J}$ сразу. Для этого уравнение переписывают в виде

$$-u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} = u_{j-1}^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_j^n + u_{j+1}^n. \tag{12}$$

С учётом граничных условий, вся система приобретает трёх-диагональный вид:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) & -1 & & & & \\ -1 & \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) & -1 & & & \\ & -1 & \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) & -1 \\ & & & & -1 & \left(\frac{2}{\alpha}+2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} + u_0^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_1^n + u_2^n \\ u_1^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_2^n + u_3^n \\ u_2^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_3^n + u_4^n \\ \vdots \\ u_{N-3}^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_{N-2}^n + u_{N-1}^n \\ u_{N-2}^n + \left(\frac{2}{\alpha}-2\right) u_{N-1}^n + u_N^n + u_N^{n+1} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{13}$$

Стартуя с начальных условий u_j^0, можно последовательно находить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени, решая систему (13) на каждом шаге по j. Так как матрица является трёх-диагональной, уравнение можно эффективно решить, например, **методом прогонки** (`https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8`).

Метод Кранка-Николсона устойчив для любых значений Δt и Δx, и поэтому позволяет находить более точное решение по координатам, не слишком уменьшая при этом шаг по времени.

Задание

Задание 1.

- Найдите аналитическое решение задачи о температуре в стержне, поставленной в самом начале. Постройте решение в виде температурной карты или поверхности в пространстве (x, t).
- Выведите условие сходимости (8) для явной схемы.
- Докажите, что неявная схема Кранка-Николсона сходится всегда.

Задание 2. Напишите программу, реализующую явную схему решения уравнения теплопроводности и решите поставленную задачу со стержнем (размер сетки по пространству порядка 100, по времени — 500).

- Постройте решение $u(x)$ на одном графике в различные моменты времени.
- Постройте решение $u(t)$ на одном графике для различных значений координат.
- Сравните с точным решением.
- Постройте изотермы (линии постоянной температуры).
- Изучите сходимость схемы, посмотрите, что будет, если нарушить условие (8).
- Пусть теперь начальное условие задаётся законом $u(x, 0) = \sin(\pi x/L)$. Найдите решение.

Задание 3. Реализуйте метод Кранка-Николсона (неявная схема). Для этого изучите, как решать матричные уравнения методом прогонки и реализуйте его. Решите первоначальную задачу со стержнем (размер сетки по пространству порядка 100, по времени — 100).

- Постройте графики для $u(x)$, $u(t)$, сравните их с полученными в задании 2.
- Сравните явную и неявную схемы с точки зрения точности и скорости работы.

Задание 4. Сравните явную схему и схему Кранка-Николсона с точки зрения точности и скорости сходимости к равновесному решению. Рассмотрим постановку задачи из пунктов 1-3. Вам известно точное решение $u(t, x)$ (которое вы аппроксимируете суммой ряда с заданной точностью), поэтому в некоторый фиксированный момент времени t вы можете оценить ошибку приближённого решения $u_a(t, x)$, полученного с помощью конечно-разностной схемы. Ошибку E можно вычислить, например, по невязке

$$E = \max |(u_a(t, x) - u(t, x))/u(t, x)|, \tag{14}$$

где максимум берётся по всем узлам сетки $x = x_j$ (момент времени $t = t_n$ фиксирован). Эта ошибка в первую очередь контролируется шагами сетки по коодинатам Δx и времени Δt.

С другой стороны, решение задачи, точное или приближённое, релаксирует к стационарному распределению температуры. Оценить степень близости решения к стационарному можно, вычитая решение на шаге n по времени из решения на шаге $n - 1$:

$$S = \max |(u(t_n, x) - u(t_{n-1}, x))/u(t_n, x)|. \tag{15}$$

Эта ошибка контролируется как Δt, так и числом шагов по времени. В результате, необходимо получить стационарное решение с точностью S, которое при этом не отклонялось бы от точного решения больше, чем на E.

Степень "стационарности" решения можно найти по точному решению $u(t, x)$: вы можете явно определить момент времени t_f при заданном шаге сетки Δt, при котором достигается выполнение условия $S < S_0$, где S_0 — заданная величина. Допустим, мы определили t_f (с помощью численного кода) и зафиксировали. Теперь можно решать уравнение с помощью разностной схемы до момента t_f, варьируя Δt, чтобы достичь заданной точности E.

Вопрос: каковы максимальные значения шага сетки Δt в явной схеме и схеме Кранка-Николсона, необходимые для достижения наперёд заданной точности E к моменту t_f? Как они зависят от шага сетки по координате Δt? Проведите серию расчётов, чтобы это выяснить. Результаты представьте в удобном для вас формате.

Задание 5. Решите 2 следующие задачи:

- Пусть есть 2 стержня, соприкасающиеся торцами, и изначально температура одного из них равна 50°C, а второго 100°C. Свободные концы стержней имеют фиксированную температуру 0°C. Постройте распределение температуры в пространстве (x, t).

- **Охлаждение Ньютона**. Предположим, что стержень помещён не в теплоизолирующий материал, а в среду с температурой u_e. Закон охлаждения Ньютона гласит:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = -h(u - u_e),$$

  где h — неотрицательная константа. Это приводит к изменению уравнения теплопроводности:

  $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} - h(u - u_e).$$

  Измените одну из описанных схем и решите задачи с одним и двумя соприкасающимися стержнями.