$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{при n чётном,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при n нечётном.} \end{cases} \tag{26.7}$$

Из формулы (26.7) легко получается *формула Валлиса*[1], которая понадобится в дальнейшем:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2. \tag{26.8}$$

Докажем её. Интегрируя неравенство

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

по отрезку $[0, \pi/2]$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

Согласно (26.7),

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

откуда

$$x_n \overset{def}{=} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \overset{def}{=} y_n. \tag{26.9}$$

В силу этого неравенства, при $n \to \infty$

$$x_n - y_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т.е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих $\frac{\pi}{2}$, стремятся к нулю и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$. Первое из этих равенств, согласно определению x_n (см. (26.9)), и означает справедливость формулы Валлиса.

[1] Дж. Валлис (1616 — 1703) — английский математик.

26.3* Вторая теорема о среднем значении для определённого интеграла

Лемма 1. *Пусть f — непрерывная, а g — возрастающая неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \tag{26.10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) \overset{def}{=} g(b)\int_x^b f(t)\,dt,\ a \leqslant x \leqslant b \tag{26.11}$$

Функция F, являясь интегралом с переменным нижним пределом интегрирования от интегрируемой (даже непрерывной) функции f, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому достигает на нём своего наибольшего и наименьшего значения. Если

$$m = \min_{[a,b]} F(x),\ M = \max_{[a,b]} F(x), \tag{26.12}$$

то, очевидно,

$$m \leqslant F(x) \leqslant M,\ x \in [a, b]. \tag{26.13}$$

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dF(x) = -g(x)F(x)\Big|_a^b + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx, \tag{26.14}$$

так как, в силу (26.11), $F(b) = 0$.

Функция g возрастающая, поэтому имеем $g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Применив это неравенство, неравенство (26.13) и заметив, что из неотрицательности g на $[a, b]$ следует, в частности, что $g(a) \geqslant 0$, получим оценки

$$g(a)F(a) + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int\limits_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

Таким образом (см. (26.14)), имеем

$$mg(b) \leqslant \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Если $g(b) = 0$, то из неотрицательности и возрастания функции g следует, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В этом случае формула (26.10) справедлива при любом выборе $\xi \in [a, b]$.

Если же $g(x) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant M.$$

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F принимает на этом отрезке любое значение, лежащее между её минимальным значением m и максимальным M (см. (26.12)), поэтому существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

В силу определения (26.11), это и есть формула (26.10). □