Лабораторная работа 7

Математическое моделирование

Федотов Дмитрий Константинович

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель седьмой лабораторной работы - рассмотреть модель

эффективности рекламы.

2 Задание

1. Построить график распространения рекламы о салоне красоты в разных случаях.
2. Сравнить эффективность рекламной кампании в разных случаях.
3. Определить в какой момент времени эффективность рекламы будет иметь максимально быстрый рост.
4. Построить решение, если учитывать вклад только платной рекламы.
5. Построить решение, если предположить, что информация о товаре распространятся только путем сарафанного радио, сравнить оба решения.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическое введение

Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар станет бесполезным.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь n покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих.

Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что $\frac{\partial n}{\partial t}$ — скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить, t — время, прошедшее с начала рекламной кампании, n(t) — число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем.

Это описывается следующим образом:

$$\alpha_1(t)(N - n(t))$$

N — общее число потенциальных платежеспособных покупателей

$\alpha_1(t) > 0$ — характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени).

Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной

$$\alpha_2(t)n(t)(N - n(t))$$

эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре.

Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)n(t))(N - n(t))$$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. 3.1):

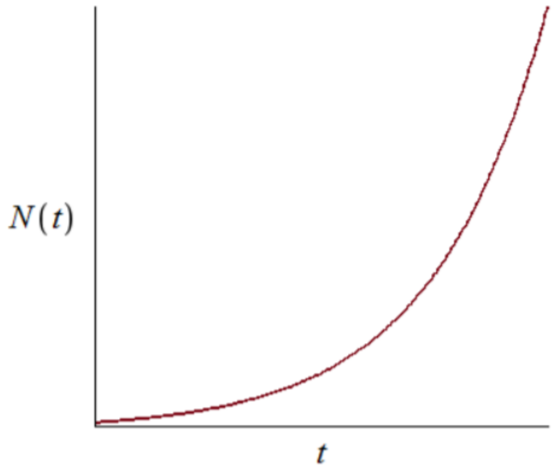

Figure 3.1: График решения уравнения модели Мальтуса

В обратном случае, при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ получаем уравнение логистической кривой (рис. 3.2):

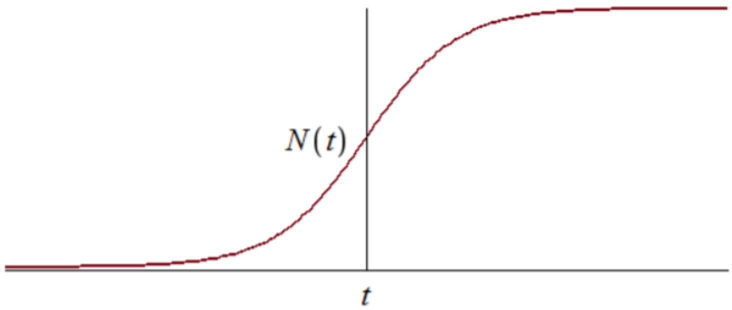

Figure 3.2: График логистической кривой

3.2 Вариант выполненой работы

Постройте график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.605 + 0.000015 n(t))(N - n(t))$

- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.000025 + 0.205n(t))(N - n(t))$
- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.05sin(t) + 0.31cos(t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории $N = 1515$, в начальный момент о товаре знает 12 человек.

Для случая 2 определите в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

3.3 Выполнение работы на языке Python

1. Зададим начальные условия (рис. 3.3).

```
x0 = 12 # количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени
```

```
N = 1515 # максимальное количество людей, которых может заинтересовать товар
```

```
t = np.arange(0, 10, 0.01) # временной промежуток (длительность рекламной компании)
```

Figure 3.3: Начальные условия

2. Составим функции, отвечающие за платную рекламу и сарафанное радио для пяти случаев (рис. 3.4).

```
# функция, отвечающая за платную рекламу. первый случай
def k1(t):
    g = 0.605
    return g
# функция, описывающая сарафанное радио. первый случай
def p1(t):
    v = 0.000015
    return v
# функция, отвечающая за платную рекламу. второй случай
def k2(t):
    g = 0.000025
    return g
# функция, описывающая сарафанное радио. второй случай
def p2(t):
    v = 0.205
    return v
# функция, отвечающая за платную рекламу. третий случай
def k3(t):
    g = 0.05*np.sin(t)
    return g
# функция, описывающая сарафанное радио. третий случай
def p3(t):
    v = 0.31*np.cos(t)
    return v
# функция, отвечающая за платную рекламу. четвертый случай
def k4(t):
    g = 0.055
    return g
 # функция, описывающая сарафанное радио. пятый случай
def p5(t):
    v = 0.0018
    return v
```

Figure 3.4: Функции, отвечающие за платную рекламу и сарафанное радио

3. Составим уравнения,описывающие распростронение рекламы для пяти случаев (рис. 3.5).

```
# уравнение, описывающее распространение рекламы

# первый
def f1(x, t):
    xd1 = ( k1(t) + p1(t)*x )*( N - x )
    return xd1
#второй
def f2(x, t):
    xd2 = ( k2(t) + p2(t)*x )*( N - x )
    return xd2
# третий
def f3(x, t):
    xd3 = ( k3(t) + p3(t)*x )*( N - x )
    return xd3
#четвертый
def f4(x, t):
    xd4 = ( p5(t)*x )*( N - x )
    return xd4
# пятый
def f5(x, t):
    xd5 = k4(t) *( N - x )
    return xd5
```

Figure 3.5: Уравнения описывающие распространение рекламы

4. Составим решение ОДУ для пяти случаев (рис. 3.6).

```
# решение ОДУ для всех случаев

x1 = odeint(f1, x0, t)
x2 = odeint(f2, x0, t)
x3 = odeint(f3, x0, t)
x4 = odeint(f4, x0, t)
x5 = odeint(f5, x0, t)
```

Figure 3.6: Решение ОДУ

5. Построим график распространения рекламы для $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.605 + 0.000015n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.7).

```
plt.plot(t, x1) # график первый случай
```

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x78ac398610>]
```

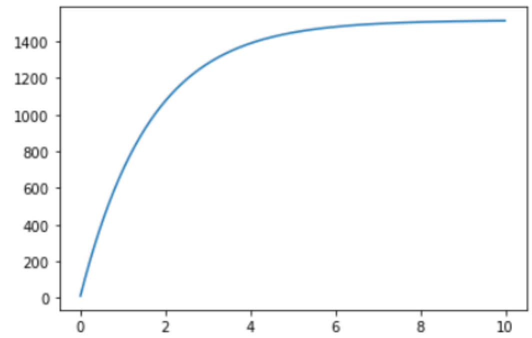

Figure 3.7: Первый случай

6. Построим график распространения рекламы для $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.000025 + 0.205 n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.8).

```
plt.plot(t, x2) # график второй случай
```

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x78ac3ed790>]
```

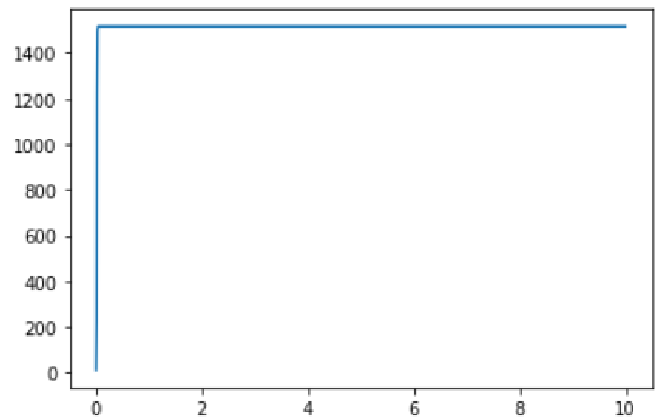

Figure 3.8: Второй случай

7. Найдем в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение (рис. 3.9).

```
# Момент времени с максимальной скоростью
t[np.argmax(x2[1:].reshape(1,999)/t[1:]) + 1]
```

```
0.02
```

Figure 3.9: Момент времени с максимальной скоростью

8. Построим график распространения рекламы для $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.05sin(t) + 0.31cos(t)n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.10).

```
: plt.plot(t, x3) # График третий случай
```

```
: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x78ac441af0>]
```

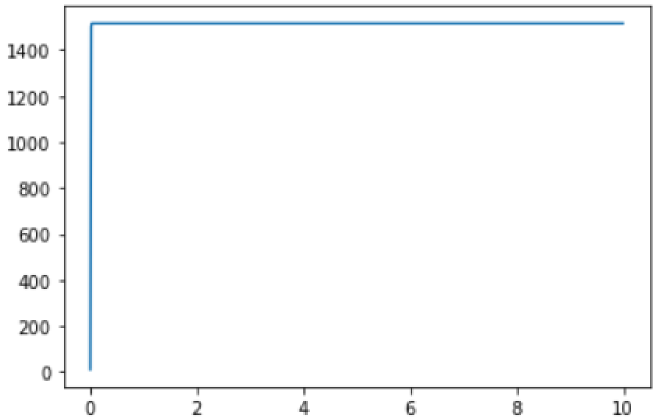

Figure 3.10: Третий случай

9. Построим график распространения рекламы для трех случаев (рис. 3.11).

```
plt.plot(t, x1, label='${dn}/{dt} = (0.605 + 0.000015n(t))(N - n(t))$')
plt.plot(t, x2, label='${dn}/{dt} = (0.000025 + 0.205n(t))(N - n(t))$')
plt.plot(t, x3, label='${dn}/{dt} = (0.05sin(t) + 0.31cos(t)n(t))(N - n(t))$')
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x78ac6b7100>
```

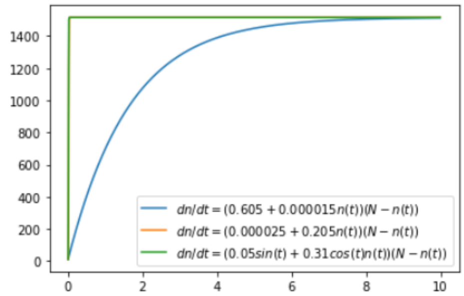

Figure 3.11: Три случая

10. Построим графики распространения рекламы для случаев, когда есть только сарафанное радио и только платная реклама (рис. 3.12).

```
# только сарафанное радио
plt.plot(t, x4, label='Сарафанное радио')
# Только платная реклама
plt.plot(t, x5, label='Платная реклама')
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x78ac77fb50>
```

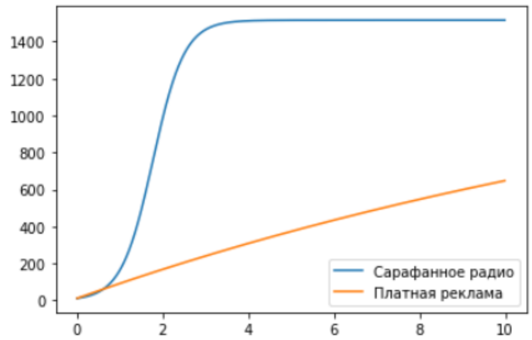

Figure 3.12: Только сарафанное радио и только платная реклама

3.4 Ответы на вопросы

1. Записать модель Мальтуса (дать пояснение, где используется данная модель)

$\frac{\partial N}{\partial t} = rN$

- N-исходная численность населения
- r-коэффициент прироста чиcлености населения
- t-время.
- Используется в популяционной экологии как первый принцип популяционной динамики

2. Записать уравнение логистической кривой (дать пояснение, что описывает данное уравнение)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

- P-численность популяции
- t-время
- r-скорость размножения
- K-поддерживающая ёмкость среды

Исходя из названия коэффициентов, в экологии часто различают две стратегии поведения видов: r-стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей,K-стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.

3. На что влияет коэффициент $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в модели распространения рекламы.

$\alpha_1(t)$ — интенсивность рекламной кампании, зависящая от затрат, $\alpha_2(t)$ — интенсивность рекламной кампании, зависящая от сарафанного радио.

4. Как ведет себя рассматриваемая модель при $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. 3.13):

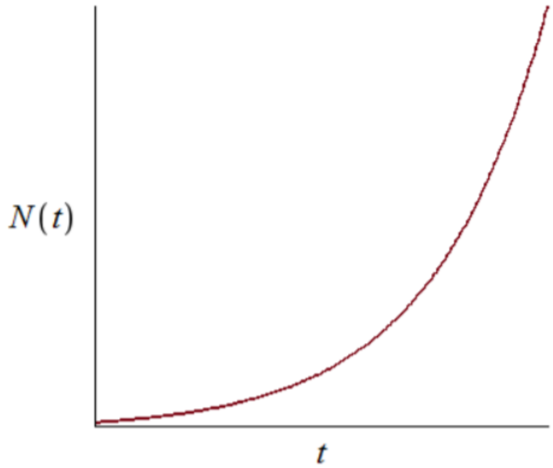

Figure 3.13: График решения уравнения модели Мальтуса

5. Как ведет себя рассматриваемая модель при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$

При $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ получаем уравнение логистической кривой (рис. 3.14):

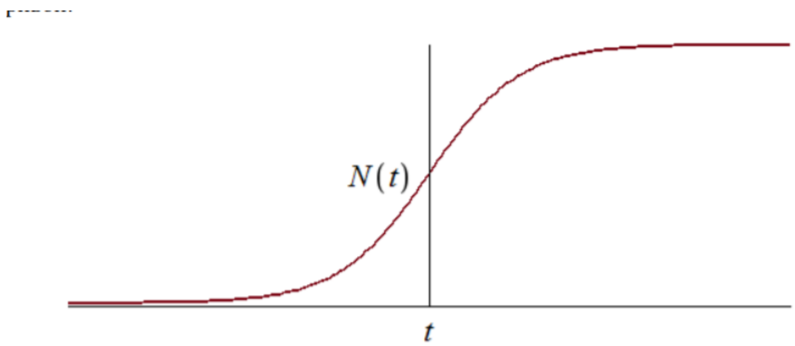

Figure 3.14: График логистической кривой

3.5 Выводы

1. Построил график распространения рекламы о салоне красоты.

2. Сравнил эффективность рекламной кампании при $\alpha_1(t) > \alpha_2(t)$ и $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$.

3. Определил в какой момент времени эффективность рекламы будет иметь максимально быстрый рост.

4. Построил решение, если учитывать вклад только платной рекламы.

5. Построил решение, если предположить, что информация о товаре распространятся только путем «сарафанного радио», сравнить оба решения.