Лабораторная работа 7

Математическое моделирование

Федотов Дмитрий Константинович

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

- Цель восьмой лабораторной работы - рассмотреть модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.00064) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическое введение

##Модель конкуренции.

###Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы,производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$1Q = q - k\frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}}),$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при p = pcr (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина pcr = Sq/k. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$2\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$3\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$4 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$5p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$6\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\partial M/\partial t = 0$:

$$7\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$8a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$9\tilde{M}_{+} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_{-} = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\tilde{M}_{+}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_{-}$ неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_{-}$ оборотные средства падают ($\partial M/\partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу $\tilde{M}\_$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: δ = 1, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

###Конкуренция двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$10\begin{cases}\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1-\frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1\\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1-\frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2\end{cases}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда

$$11 \begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$12 \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases}$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$13 \frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$14 p = p_{cr}(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}))$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$15 \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases}$$

где

$$16 a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1 \theta$. Получим следующую систему:

$$17 \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Чтобы решить систему, необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения M_0^1, M_0^2 и известные параметры: $p_{cr}, \tau_1, \tau_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, N, q$

3.2 Вариант выполненой работы

$M_0^1 = 6.1$ — оборотные средства фирмы 1

$M_0^2 = 4.5$ — оборотные средства фирмы 2

$p_{cr} = 31$ — критическая стоимость продукта

$N = 30$ — число потребителей производимого продукта

$q = 1$ — максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\tau_1 = 15$ — длительность производственного цикла фирмы 1

$\tau_2 = 17$ — длительность производственного цикла фирмы 2

$\tilde{p}_1 = 9.7$ — себестоимость продукта у фирмы 1

$\tilde{p}_2 = 8.4$ — себестоимость продукта у фирмы 2

3.3 Выполнение работы на языке Python

1. Зададим начальные условия (рис. 3.1).

```
p_cr = 31 # критическая стоимость продукта

tau1 = 15 # длительность производственного цикла фирмы 1

p1 = 9.7 # себестоимость продукта у фирмы 1

tau2 = 17 # длительность производственного цикла фирмы 2

p2 = 8.4 # себестоимость продукта у фирмы 2

N = 30 # число потребителей производимого продукта

q = 1 # максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
```

Figure 3.1: Начальные условия

2. Посчитаем коэфиценты для уровнений (рис. 3.2).

```
a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)

a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)

b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)

c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)

c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)
```

Figure 3.2: Начальные условия

3. Посчитаем стационарные точки (рис. 3.3).

```
m1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)

m2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)
```

Figure 3.3: Начальные условия

4. Составим функции для первого случая (рис. 3.4).

```
# Случай 1

def syst(x, t):
    dx1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    return dx1, dx2
```

Figure 3.4: Функции, случай 1

5. Составим функции для второго случая (рис. 3.5).

```
# Случай 2

def syst2(x, t):
    dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00064)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]
    return dx1, dx2
```

Figure 3.5: Функции, случай 2

6. Зададим интервал и шаг для решения задачи (рис. 3.6).

```
t = np.arange(0, 30, 0.01)
```

Figure 3.6: Функции, случай 2

7. Зададим начальное значение объема оборотных средств x1 и x2 (рис. 3.7).

```
# Начальное значение объема оборотных средств x1 и x2

x0=[6.1, 4.5]
```

Figure 3.7: Начальное значение объема оборотных средств x1 и x2

8. Построим массивы решений для двух случаев (рис. 3.8).

```
y = odeint(syst, x0, t)
y2 = odeint(syst2, x0, t)
```

Figure 3.8: Массивы решений

9. Построим график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2. Случай 1 (рис. 3.9).

```
#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2. Случай 1

plt.plot(t, y[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y[:,1], label='Фирма 2')
plt.hlines(m1, 0, 30, colors="green", label='m1')
plt.hlines(m2, 0, 30, colors="red", label='m2')
plt.legend(loc=4)
plt.grid()
```

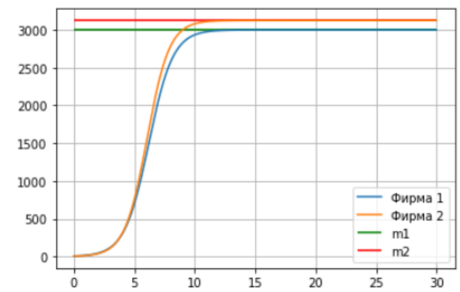

Figure 3.9: Случай 1

10. Построим график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2. Случай 1 (рис. 3.10).

```
#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2.Случай 2

plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')
plt.legend()
plt.grid()
```

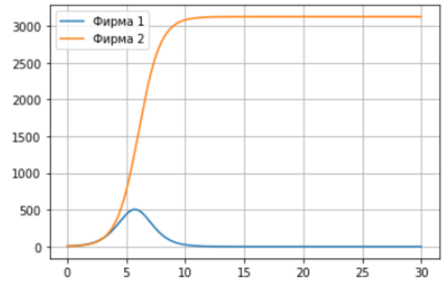

Figure 3.10: Случай 1

3.4 Выводы

1. Рассмотрел модель конкуренции двух фирм в разных случаях.
2. Построил графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой.