Разбор КР по Квадратичным формам.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Разбор Кр прошлых лет

1.1 Задание 1.

Как сказала ЕА, в данном задании нужно будет воспользоваться одним из трех приведений к канонич. виду. Оба они есть в основном конспекте. Здесь будет разобран вот такой пример:

$$f(x) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$$

Нужно привести ортогональным преобразованием к каноническому виду и показать его.

Решение:

Напишем матрицу оператора, соответствующую кв. форме:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем собственные числа и вектора нашей матрицы:

$$\det(A - t\varepsilon) = t^4 - 27t^3 + 243t^2 - 729t = t(t-9)^3$$

Откуда получаем, что собственные числа нашей матрицы это 0 и 9.

Найдем собственные вектора, решим соответсв. СЛОУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9-9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-9 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 5-9 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 8-9 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 9-0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 5-0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 8-0 & 0 \end{array}\right)$$

Решив их, получим, что $V_9 = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}), V_0 = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

Теперь сделаем наши вектора ортогональными и нормированы (так как нам надо, чтобы матрица перехода, то есть Q была ортогональной).

Ортогонализуем и получим: $V_9 = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}), V_0 = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

Теперь отнормируем и получим матрицу $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$B = Q^T A Q = \Lambda$, что и требовалось найти. $rgf = 3, \sigma(f) = (3, 0, 1), f \geq 0$

1.2 Задание 2.

Найти преобразование переводящее из f в g:

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

$$g(y) = y_1^2 - 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2y_3$$

Решение:

Чтобы это сделать, воспользуюсь методом Лагранжа и приведу обе форму к каноническому виду.

Сначала приведем форму f.

1. У нас нет квадратов, а значит их надо выделить:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases} : f(y) = y_3y_1 + y_4y_1 - y_3y_2 + y_4y_2 + y_3y_4 + y_1^2 - y_2^2$$

2. Теперь не забудем, что мы сделали такое преобразование и продолжим по Лагранжу преобразовывать нашу форму:

$$f(y) = (y_1^2 + y_3y_1 + y_4y_1) - y_2^2 - y_3y_2 + y_4y_2 + y_3y_4 =$$

$$= \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 - \frac{1}{2}y_3y_4 - y_2^2 - y_3y_2 + y_4y_2 + y_3y_4 =$$

$$= z_1^2 + (-1)(y_2^2 + y_3y_2 - y_4y_2) - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \frac{1}{2}y_3y_4 =$$

$$= z_1^2 + (-1)\left(y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4\right)^2 + \frac{1}{4}y_3^2 + \frac{1}{4}y_4^2 - \frac{1}{2}y_3y_4 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \frac{1}{2}y_3y_4 = z_1^2 - z_2^2 + 0z_3 + 0z_4$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_3 - \frac{1}{2}z_4 \\ y_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

Откуда $x = Q_1y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$, а $y = Q_2z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$

Получаю, что мое преобразование это Q_1Q_2.

Теперь приведем форму g к каноническому:

1. $$g(y) = y_1^2 - 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2y_3 = (y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_1y_3) - 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_2y_3 =$$

$$= (y_1 + 2y_2 + y_3)^2 - 4y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3 - 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_2y_3 =$$

$$= z_1^2 - 9y_2^2 = z_1^2 - 1(3y_2)^2 + 0z_3 + 0z_4$$

Откуда:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ z_2 = 3y_2 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 - \frac{2}{3}z_2 \\ y_2 = \frac{1}{3}z_2 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

Получаю, что $y = Q_3 z = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

У нас совпали σ.

Откуда мое нужное преобразование из f в g это $Q_1 Q_2 Q_3^{-1}$

1.3 Задание 3.

Найти линейное невырожденное преобразование, которое переводит одновременно f, g в канонический вид.

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3$$

$$g(x) = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$$

Решение:

Напишем матрицы обеих кв. форм: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 & 0 \\ 8 & -28 & 16 & 0 \\ 7 & 16 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Заметим, что f у нас ≥ 0 по критерию Сильвестра

Приведем кв форму f к каноническому виду методом Лагранжа:

1.

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 = (x_1^2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_3)^2 + (2x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3 \\ z_2 = 2x_2 \\ z_3 = x_3 \\ z_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - z_3 \\ x_2 = \frac{z_2}{2} \\ x_3 = z_3 \\ x_4 = z_4 \end{cases}$$

$x = Qz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Теперь найдем куда перейдет g при нашем преобразовании:

$$B = Q_1^T A_2 Q_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем ортогональное преобразование для нашего нового вида g.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$. Возьмем собственные вектора:

$$V_0 = span(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}), V_9 = span(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), V_{-9} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

А дальше аналогично первому номеру 1 и получаем Q_2. Ответом будет матрица Q_1Q_2

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Данный разбор сделан не в коммерческих целях, я не хочу никого обидеть, я просто пишу конспекты для себя плак плак плак