

# Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейные отображения.</b>	<b>3</b>
1.1	Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений . . . .	3
1.2	Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	5
1.3	Инварианты линейного отображения. . . . .	8
1.4	Собственные числа и собственные векторы лин. оператора . . . . .	12
1.5	Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы. . . . .	15
1.6	Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора . . . . .	22
1.7	Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона . . .	24
1.8	Операторное разложение единицы. Корневое подпространство. . . . .	28
1.9	Нильпотентный оператор. Разложение Жордана . . . . .	34
1.10	Жорданова форма матрицы. Формула Фробениуса. . . . .	39
1.11	Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме. . . . .	45
<b>2</b>	<b>Тензоры.</b>	<b>48</b>
2.1	Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контр-вариантный и ковариантный законы преобразования координат. . . . .	48
2.2	Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров. . . . .	54
2.3	Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свертка тензоров. . . . .	56
2.4	Транспонирование тензора. Симметричные, кососимметричные тензоры. . . . .	60
2.5	Операции симметрирования и альтернирования тензора. . . . .	65
2.6	$p$ -формы. Внешнее произведение $p$ форм. . . . .	67
<b>3</b>	<b>Евклидовы и унитарные пространства.</b>	<b>73</b>
3.1	Основные определения. . . . .	73
3.2	Процесс ортогонализация Грама-Шмидта. Орто-нормированный базис. Ортогональное дополнение. . . . .	75
3.3	Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы. . . . .	78
3.4	Теорема Пифагора. Расстояние до линейного подпространства. Задача о перпендикуляре(наилучшем приближении). Объем $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном пространстве . . . . .	81

**4 Информация о курсе****85**

# 1 Линейные отображения.

## 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейных отображений

**def:**  $U, V$  - линейные пространства над одним полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$  называется линейным гомоморфизмом, если:

$$\forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

**Замечание 1:** Мы будем писать  $\mathcal{A}u$ , вместо  $\mathcal{A}(u)$ .

**Замечание 2:**  $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$  это какие-то числа, поэтому мы можем складывать их и умножать на скаляр.

**Замечание 3:**  $\mathcal{A}\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_V$ , частный случай  $\lambda = 0$

**Примеры:**

1.  $\mathcal{O}$ : это нулевое отображения  $\forall u \in U : \mathcal{O}u = 0$
2.  $P_n$  - пространство многочленов степени  $\leq n$ .  $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$  — дифференцирование.
3.  $\varepsilon$  — тождественное отображение.  $\varepsilon : U \rightarrow U : \forall u \in U : \varepsilon u = u$ .

**Введем операции:**

1.  $\lambda \in K : \mathcal{A}$  — линейное отображение. Введем операцию умножения:

$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

2.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — линейные отображение. Введем операцию сложения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

3.  $\mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{A} \in L(W, V)$ . Введем операцию произведения:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V : v = \mathcal{A}u | \forall u \in U\}$  — образ линейного отображения.

**Замечание:**  $\text{Im } \mathcal{A}$  — линейное подпространство.

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U | \mathcal{A}u = \mathcal{O}\}$  — ядро линейного отображения.

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A}$  — ранг отображения

$\text{def } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$  — дефект отображения.

**Виды отображений:**

- сюръекция, если  $\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V$ .
- инъекция, если  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$ .
- биекция или изоморфизм  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$
- *эндоморфизмом* или линейным оператором, когда  $U = V$ .

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) = \text{End}_K(V)$$

- *автоморфизм* это биекция + эндоморфизм.

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) = \text{Aut}_K(V)$$

**Примеры:**

1.  $P_n$  — пространство многочленов степени не больше  $n$ .  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$ . не инъекция, не сюръекция, не изоморфизм, эндоморфизм и не автоморфизм
2.  $U = K^n, V = K^m, A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K, \forall u \in U : \mathcal{A}u = A \cdot u$ .

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ y \in K^m \mid \begin{matrix} y = \mathcal{A}x \\ \forall x \in K^n \end{matrix} \right\} = \text{span}(A_1, \dots, A_n) — \text{образ матрицы.}$$

$$y = A \cdot x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i$$

Давайте более подробно рассмотрим *отображения*:

1. сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V = m$ .

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in K^n : Ax = 0\}$  — общее решение СЛЮУ, *ядро матрицы*.

$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim$  общего решения  $= n - \text{rg } A$ .

$\text{def } \mathcal{A} = n - \text{rg } A$  — *дефект матрицы*.

2. инъекция  $\Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow n - \text{rg } A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = n$ .

3. биекция  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } A = n \\ \text{rg } A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$ .

4. эндоморфизм  $\Leftrightarrow n = m \Leftrightarrow A_{n \times n}$ .

5. автоморфизм  $\Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = n, A_{n \times n} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ .

**Свойства произведения:**

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — изоморф.  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  — изоморфно.
2.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ .
3.  $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ .
4.  $\mathcal{C} \in L(\Omega, U) : \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Ассоциативная унитарная алгебра.

**Замечание 1.** Если  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  — изоморфно  $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$  — взаимно обр. отображение.

**Замечание 2.** Если  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , а также изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \text{End}(V)$  — обратный лин. оператор к  $\mathcal{A}$ .

**def:**  $U_0 \subset U$  - линейное подпространство.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$  сужение лин. отобра. на лин подпространство.

$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$ .

Если  $\mathcal{A}$  — изоморфизм, то тогда его сужение на  $U_0$  будет линейным отображением между  $U_0$  и  $\text{Im } \mathcal{A}_0$ . И это будет тоже изоморфизм.

**Теорема (о ранге и дефекте линейного отображения)**

$\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$ . Доказать  $\dim U = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$ .

**Доказательство:**

Пусть  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A} \subset U$ . Пусть  $U_1 \subset U$ , такое, что  $U_0 \oplus U_1 = U$  — прямое дополнение. Возьму  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \text{Im } \mathcal{A}_1)$ .

$\forall u \in U : \exists! u = u_0 + u_1$ , где  $u_0 \in U_0$ ,  $u_1 \in U_1$ , по т. об определении прямой суммы. Тогда получаем, что:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

Откуда  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{A}_1$ ,  $\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}_1$ .

$\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset U_1$ , а также  $\text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$  — инъективна  $\Rightarrow \mathcal{A}_1$  изоморфно. Откуда получаем:

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_0 = \text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A}$$

Q.E.D.

**Следствие.** (характеристика автоморфизма)

Если  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$  — условие обратимости линейного оператора.

## 1.2 Матрица лин. отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  — линейное отображение.

Пусть есть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  базис  $U$ , а также  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  базис  $V$ .

$$u \in U \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n; v \in V \xleftrightarrow{\text{изоморфизм}} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\forall u \in U, v = \mathcal{A}u, : v = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A} \xi_i$$

То есть  $\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$ .

Теперь заметим, что  $\mathcal{A}\xi_i \in V$ , откуда:

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow{\text{коорд. изоморфизм}} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

Назовем  $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$  — матрицей линейного отображения  $\mathcal{A}$  на базисах  $\xi, \eta$ .

**Замечание.** Т.к. здесь координатный изоморфизм, то:

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A.$$

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \mathcal{A} : V \rightarrow V$  — лин. оператор.

Зафиксируем здесь один базис  $e = e_1, \dots, e_n$ . Получу:

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\mathcal{A}$$

Тогда  $A_{n \times n}$  — матрица линейного оператора.

Заметим, что теперь мы умеем:

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A \in M_{m \times n}$$

**Утв.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$  координатный изоморфизм линейных отображений

**Доказательство:**

У нас есть взаимно однозначное соответствие. Проверим линейность:

$$\forall \lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \xleftrightarrow{\text{проверить}} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}.$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \cdot \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \cdot \eta_j$$

А откуда уже видно нужное нам соответствие.

Q.E.D.

**Утв.**  $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W), \mathcal{AB} \in L(U, V)$ . Пусть  $w$  - базис  $W$ ,  $\eta$  - базис  $V$ ,  $\xi$  - базис  $U$ . Тогда  $\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$  в базисах  $(\xi, \eta)$

**Доказательство:**

$$\mathcal{AB}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^p b_{ki}w_k\right) = \sum_{k=1}^p b_{ki}\mathcal{A}(w_k) = \sum_{k=1}^p b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk}\eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki}\right)\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m (AB)_{ji} \cdot \eta_j$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  - изоморфизм,  $A$  - матр в  $\xi, \eta \Rightarrow A^{-1}$  - матр в  $(\eta, \xi)$ .

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \varepsilon_V, & A^{-1} \cdot A &= \varepsilon_U \\ AX &= E_\eta, & XA &= E_\xi \end{aligned}$$

В силу того, что  $\mathcal{A}$  — изоморфизм:

$$\begin{aligned} \dim U = \dim V = n, & \quad \text{rg} A = n \Leftrightarrow \exists A^{-1} \\ X &= A^{-1} \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Утверждение:** Пусть  $\mathcal{A} \in L(U_\varepsilon, V_\eta), v = \mathcal{A}u$ . Тогда  $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  — координатные столбцы  $v$  и  $u$  соответственно.

**Доказательство:** С одной стороны,  $v$  можно разложить по базису  $V$ :

$$v = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j \eta_j$$

С другой стороны,  $v$  представим как результат отображения:

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i \right) \eta_j \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_i$$

. Откуда получаем искомое:  $v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u}$ . Последнее равенство называется *координатной формой записи действия линейного отображения*.

Q.E.D.

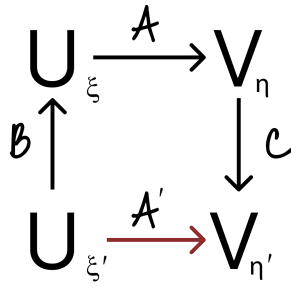
### Теорема (формула замены матрицы лин. отобр. при замене базиса)

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  — линейное отображение.

$\xi, \xi'$  базисы  $U$ , а  $\eta, \eta'$  базисы  $V$ . Хотим поменять базисы на штрихованные и получить новую матрицу. Тогда ее можно получить так:

$$A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Доказательство:**



Воспользуемся данным рисунком, чтобы понять происходящее. Мы хотим найти матрицу  $A'$ . Для этого, заметим, что преобразование  $A'$ , это преобразование  $B$ , потом примененное к нему преобразование  $A$ , а после этого примененное к нему преобразование  $C$ . То есть:

$$A' = CAB$$

Заметим, что матрица  $B$ , это матрица перехода из  $\xi$  в  $\xi'$ . Это так потому что у нас просто меняется базис (про саму матрицу перехода см. одноименный раздел). Матрица  $C$ , это  $T_{\eta' \rightarrow \eta}$ . Откуда, исходя из двух утверждений сверху:

$$A' = T_{\eta' \rightarrow \eta} A T_{\xi \rightarrow \xi'} \Rightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $A \in \text{End}(V)$ .  $e, e'$  базисы  $V$ .  $A' = T^{-1}AT$ , где  $T = T_{e \rightarrow e'}$ .

**def:** квадратные матрицы  $A$  и  $B$  называются подобными, если  $\exists$  невырожденная матрица  $C$ , такая, что:  $B = C^{-1}AC$ .

**Замечание:** матрицы линейного оператора в разных базисах подобны (см. следствие выше).

### 1.3 Инварианты линейного отображения.

**Инвариантность** называется некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$A$  - линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть  $A \in \text{End}(V)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис  $v$ .

Как мы знаем,  $\exists!$   $D$   $n$ -форма, такая что  $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Тогда **определитель линейного оператора:**

$$\det A := \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

**Замечание:**  $\det A = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$  — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

**Теорема:**

$$\forall A \in \text{End}(V), \det A = \det A.$$

**Доказательство:**



Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xleftrightarrow{\text{вз. однозначно}} A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \det \mathcal{A} &= D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_{i_n}\right) = \\ &\xleftrightarrow{\text{тк } D - n \text{ форма}} \det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Замечание:**  $A$  и  $B$  подобные матрицы, то  $\det A = \det B$ .

**Замечание:**  $\det \mathcal{A}$  инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

**Следствие 1:**  $\forall n$  - форма  $f$  на  $V$ ,  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

**Доказательство:**

Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$ .  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$ . Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \stackrel{\text{из доказательства теоремы}}{=} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле  $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$ , поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что  $g$  - полилинейное, тк  $f$  полилин. и  $\mathcal{A}$  - лин. отобр. Также  $g$  - антисим, тк  $f$  - антисим. Откуда  $g$  -  $n$ -форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

Откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Q.E.D.

**Замечание:** Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть  $\mathcal{A} = A_{n \times n}$  — линейный оператор умножения.  $f = D$ ,  $B_j \in K^n$ . Тогда:

$$\det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2:**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

**Доказательство:**

Пусть  $e$  - базис  $V$ . Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xleftrightarrow{e} B$ . Также  $\mathcal{AB} \xleftrightarrow{e} AB$  по свойству. Откуда:

$$\det \mathcal{AB} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

**Следствие 3:**  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Причем  $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \text{Aut}(V) &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ \text{rg } A = n \end{cases} \end{aligned}$$

Мы знаем, что существует  $\mathcal{A}^{-1}$ . А также  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$ . Откуда по свойству 3 получаем, что  $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Q.E.D.

**Следствие 4:**  $\det(\mathcal{AA}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  - *след матрицы*.

### Теорема (о tr подобных матриц)

Если  $A$  и  $B$  подобны, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

**Доказательство:**

$A$  и  $B$  подобны  $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$ . Пусть  $C^{-1} = S = (s_{ij})$ . Откуда:

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n c_{ki} s_{ij}$$

Заметим, что  $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$ , где  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{cases}$ . Так что получаем, что

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\forall A \in \text{End}(V) \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr } A'$ , где  $A$  и  $A'$  матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $e$  и  $e'$  соответственно.

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V), \text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A$  — след оператора.

**Замечание:** след оператора инвариантен из следствия выше.

**def:** Линейное подпространство  $L \subset V$  называется инвариантным относительно линейного оператора  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$ .

### Теорема 1:

$L \subset V$  - линейное подпространство.  $L$  - инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда  $\exists$  базис пр-ва  $V$  матрица, такой что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность  $A^1 = k \times k$ ,  $k = \dim L$ .

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$$

### Доказательство:

$L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$  - базис  $L$ .

Дополним базис  $L$  до базиса  $V$ :  $V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ .

Запишем матрицу  $A$  по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}e_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Откуда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

### Теорема 2:

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны отн.  $\mathcal{A}$ .  $\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , такое что м-ца оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

### Доказательство:

Пусть базис  $V$  по эквив. условию  $\oplus$  объединение базисов  $L_i$ .

$$L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого  $L_i$  из доказательства прошлой теоремы, все кроме соотв. строчек для  $L_i$  будет зануленно.

Q.E.D.

**Замечание:**  $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \text{End}(L_i)$ .

### Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны отн  $\mathcal{A} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , где  $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

**Доказательство:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \xLeftrightarrow{\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \text{Im } \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}v_i \in \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из  $\text{Im } \mathcal{A}$  существует лишь одно разложение через  $\text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы лин. оператора

$\lambda \in K$  называется собственным числом  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \in V, v \neq 0. \mathcal{A}v = \lambda v$ . Такой  $v$  называют собственным вектором собственного числа  $\lambda$ .

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \text{Ker}(A - \lambda E) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v$  собственный вектор собственного числа  $\lambda$ .

$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E)$  — собственное подпространство  $\mathcal{A}$  соответств. с.ч.  $\lambda$ . Это мн-во всех с.в.  $V$ , отвечающим с.ч.  $\lambda$  и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$  — геометрическая кратность.

**Свойства:**

1.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $(\mathcal{A} - \lambda E)$ .
2.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .
3.  $\gamma(\lambda)$  инвариант относительно базиса.

**Условие существования с.ч.:**

$\lambda \in K_{\mathcal{A}}$  - с.ч.,  $v$  - с.в.  $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda E)$  нетривиально  $\Leftrightarrow \text{def}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$

Тк определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

**def:**  $\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$  - характеристический многочлен оператора  $\mathcal{A}$ .

Т.к.  $\det$  оператора инвариантен  $\chi(t) = \det(A - tE)$ , где  $A$  - матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1} (tr A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета:  $\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = tr A \\ t_1 \cdot \dots \cdot t_n = \det A \end{cases}$  Заметим, что  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

**Замечание.** Если все корни хар. мн.  $\in K \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

**def:** Спектр оператора  $\mathcal{A}$  называется множество  $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$ ,  $\alpha(\lambda)$  - кратность  $\lambda$  лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

**def:** Простой спектр — все кратности - единички.

**Теорема 1:**

$\forall \mathcal{A} \in End(V). \forall \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

**Доказательство:**

$\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = V_\lambda$  не тривиально  $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$ .

Пусть  $\dim V_\lambda = \gamma$ ,  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow$  по т-ме 1 об инв. подпр. существует  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = span(e_1, \dots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n)$$

При построении матрицы оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda - \text{ на } i\text{-ой строчке. Немного распишем:}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma \times \gamma} & * \\ 0 & A^2 - tE_{(n-\gamma) \times (n-\gamma)} \end{vmatrix} \stackrel{\text{по 6-ому св-ву опр}}{=}$$

$= |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lambda$  корень  $\chi(t)$ , причем кратность  $\geq \gamma$ , т.к  $\lambda$  может оказаться корнем  $\chi_{A^2}$

Q.E.D.

**Теорема 2:**

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различные с.ч  $\mathcal{A}$ ,  $v_1, \dots, v_n$  соответ. с.в.

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  — лин. независимы.

**Доказательство:**

Докажем по индукции:

**База**  $m = 1$  :  $\lambda_1, v_1 \Rightarrow$  лин. незав.

**ИП:** Пусть верно для  $m$ , докажем для  $m + 1$ :

От противного: Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$  попарно различные собственные числа.

$v_1, \dots, v_m$  — линейно независимы по ИП.  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$  — линейно зависимы. Откуда:  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ . С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_{m+1} &= \mathcal{A} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_{m+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = 0 \end{aligned}$$

Но мы знаем, что  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что  $\exists \alpha_i \neq 0$ , для которого  $v_i$  не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то  $\lambda_{m+1} - \lambda_i \neq 0$ . Откуда комбинация нетривиальна.

Противоречие.

Q.E.D.

**Следствие:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ , т.е  $V_{\lambda_i}$  дизъюнкты.

**Доказательство:**

$$0 = v_1 + \dots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов ненулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. Откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнкты.

Q.E.D.

**Теорема 3:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i \text{ инвариантно относительно } \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t).$$

**Доказательство:**

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица  $A$  - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi(t) = \det(A - tE) \stackrel{\text{по 6-ому свойству опр.}}{=} \prod_{i=1}^m \det(A^i - tE) = \prod_{i=1}^m \chi_{A_{L_i}}(t)$$

Q.E.D.

## 1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется **оператором простой структуры** (о.п.с), если  $\exists$  базис пространства  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе имеет диаг. вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  будут  $\lambda_i$ , а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характ. многочлена  $\chi \in K \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$ .

**Теорема:**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$ , то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч.} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

**Доказательство:**

$$\sum_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K, \text{ откуда } \mathcal{A} \text{ - о.п.с.}$$

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \exists$  базис  $V$  такой, что матрица диагональна  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ - с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ - с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

**Следствие.** Если все корни характ. многочлена  $\in K$ , а также все  $\alpha(\lambda) = 1$  (спектр простой), то  $\mathcal{A}$  - о.п.с.

**def:**  $A_{n \times n}$  называется диагонализируемой, если она подобна диагональной.

### Теорема (критерий диагональности матрицы $A$ )

это перенимается

$A$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow$  матрица о.п.с  $\mathcal{A}$  в нек. базисе

#### **Доказательство:**

•  $\Rightarrow$

Пусть  $A$  - диагонализируемая  $\Leftrightarrow$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow \exists$  невырожд  $T$ :  $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $V$  - линейное пространство над полем  $K$ .  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ .

Пусть  $A$  - матрица в базисе  $e$ . Тогда  $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i \cdot v = (v_1, \dots, v_n)$  - базис.

Откуда  $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e \rightarrow v} \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

•  $\Leftarrow$   $\mathcal{A}$  о.п.с,  $A$  - матрица в некотором базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Возьму  $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$ , где  $v_i$  - собственный вектор  $\mathcal{A}$ . Заметим, что так как  $\mathcal{A}$  о.п.с, то такой базис существует

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из  $T_{e \rightarrow v}$ . Тогда  $\mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$  подобна диагональной

Q.E.D.

### **Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной:**

1. найти спектр: если все корни  $\chi \in K$ , переходим к п2.
2. найти все  $\gamma(\lambda)$ , если  $\forall \lambda$  с.ч  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то перейти к п3.
3.  $T_{\text{кан.} \rightarrow v} = (v_1, \dots, v_n) T^{-1}AT = \Lambda$

**def:**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ . По теореме об равносильных условиях прямой суммы:

$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i$ , где  $v_i \in L_i$ . Возьму  $P_i \in \text{End}(V)$ , такие, что  $P_i \cdot v = v_i \in L_i$ .

Тогда такие  $P_i$  назовем операторами проектирования на подпр-во  $L_i$ .

#### **Свойства операторов проектирования:**

1.  $\text{Im } P_i = L_i, \text{ Ker } P_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$
2.  $P_i P_j = \mathbb{O}$
3.  $\sum_{i=1}^m P_i = \varepsilon$
4.  $P_i^2 = P_i, (P_j^k = P_j, \text{ где } k \in \mathbb{N})$  - идемпотентность

Они все тривиальны



**Утверждение.** Возьму множество операторов:  $\{P_i\}_{i=1}^m$ ,  $P_i \in \text{End}(V)$ .

Пусть они удовлетворяют свойствам 2,3  $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i$ .  $P_i$  это проектор на  $L_i$ .

**Доказательство:**

Мы знаем, что  $P_i P_j = 0$ , для  $i \neq j$ , а также  $\sum_{j=1}^m P_j = \varepsilon$ . Откуда получаем, что:

$$P_i = P_i \varepsilon = P_i \sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m P_j P_i = P_i^2$$

А это значит, что  $\forall v \in V : v = \varepsilon v = \sum_{i=1}^m P_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } P_i$ .

Осталось показать единственность разложения нуля:

$$0 = \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m P_i w_i, \text{ где } w_i \in V$$

$$P_j 0 = 0 = P_j \sum_{i=1}^n P_i w_i = \sum_{i=1}^n P_i P_j w_i = P_j w_j = v_j$$

$\Rightarrow v_j = 0, \forall j = 1 \dots m \Rightarrow \text{дизъюнк.} \Rightarrow \bigoplus \text{Im } P_i$

Q.E.D.

**Замечание:** Из определения проекторов следует, что они существуют и определены однозначно для данной прямой суммы.

### Теорема (спектральное разложение о.п.с)

Дан  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда выполнено:

1)  $\mathcal{A}$  — о.п.с.  $\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$ ,  $P_\lambda$  — проектор на  $V_\lambda \forall \text{ с.ч. } \lambda$ .

Такое разложение называется спектральным.

2)  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $P_i$  проекторы на  $L_i$ .  $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^m \lambda_i P_i \Rightarrow \mathcal{A}$  о.п.с,  $\lambda_i$  с.ч.

$\text{Im } P_i = L_i = V_\lambda$  (соответ. подпр-во)

**Доказательство:**

1)  $\mathcal{A}$  о.п.с  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$ . Возьму  $P_\lambda$  проекторы на  $V_\lambda$  (исходя из определения -они существуют)

Тогда давайте воспользуемся определением:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} v_\lambda, \text{ где } v_\lambda \in V_\lambda : \mathcal{A}v = \mathcal{A}\left(\sum_{\lambda} v_\lambda\right) = \sum_{\lambda} \mathcal{A}v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda v$$

Откуда уже крайне очевидно получаем, что  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda$ .

2)  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ . Откуда по определению:  $\forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \text{Im } P_i, v_i \neq 0$ . Тогда

$$\mathcal{A}v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)v_i = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j\right)P_i v = v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i$$

Теперь вспомним свойство, что при умножении двух различных операторов мы получаем 0. Поэтому на самом деле наша сумма равна:

$$v \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j P_i = v \lambda_i P_i P_i = v \lambda_i P_i = \lambda_i v_i$$

Хорошо, теперь вспомним, что изначально это было равно  $\mathcal{A}v_i$ . поэтому  $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$ , откуда получаем, что  $v_i$  с.в.  $\mathcal{A}$  отвечающий с.ч.  $\lambda_i$ .

Откуда получаем, что наше подмножество  $V_{\lambda_i} \supseteq \text{Im } P_i$  (потому что любой  $v \in \text{Im } P_i$  — собственный вектор).

Вспомним, что:  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ , а как мы знаем  $\bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \subseteq V$ . Откуда, я получаю, что:

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Im } P_i = \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i} \xrightarrow{\text{так как } P_i \subseteq V_{\lambda_i}} \text{Im } P_i = V_{\lambda_i}$$

Q.E.D.

### Следствие (спектральное разложение диагоналируемой матрицы)

$A$  диагоналируема  $\Leftrightarrow \exists \{P_i\}_{i=1}^m$ , такое, что  $P_i \cdot P_j = 0, i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^m P_i = E, A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$

#### **Доказательство:**

Очевидно следует из теоремы:

$A$  диагоналируема  $\Leftrightarrow$  матрица  $\mathcal{A}$  о.п.с. Либо можно считать  $A = \mathcal{A}$  о.п.с.  $\in \text{End}(K^n)$

Q.E.D.

**Замечание.** Матрица  $A$  подобна диагональной, то у нее есть диагональное представление:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), A = T\Lambda T^{-1}$$

А также у такой матрицы есть спектральное разложение:

$$A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda P_\lambda$$

Просьба не путать эти две формулы!

### **СЕЙЧАС НАЧНЕТСЯ ЧТО-ТО СТРАШНОЕ**

**def:**  $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$  - последовательность матриц  $n \times n$ .

Обозначают так:  $(A_k)_{k=1}^\infty$  — последовательность матриц.

Раз это последовательность, то давайте введем на ней вот такой предел:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \forall i, j : a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

Для лучшего понимания этого мира смотрите на приведенный ниже пример:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (1 + \frac{2}{k})^k & \frac{\sqrt{k}}{\frac{1}{k}} \\ \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} & \frac{1 - \cos \frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

**def:**  $a_n \in R : \sum_{m=1}^\infty a_m = S \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k a_m = S$ , где  $S_k = \sum_{m=1}^k a_m$  — частичная сумма ряда.

А саму такую конструкцию понятно называют рядом. Теперь давайте немного притронемся к матану:

$\sum_{m=0}^\infty c_m x^m$  — ряды Тейлора - Маклорена.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — их область определения,  $|x| < R$  (или еще обозначается  $r$ ) — радиус сходимости,  $c_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Причем эти  $c$ -шки на самом деле производные. (если интересно см. конспект по мат. анализу первый семестр)

**Рассмотрим пример:** Давайте разложим  $e^x$ , нам это позже понадобится:

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n, |x| < +\infty$$

В таком случае  $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ .

Пусть  $f(x) = \sum_{m=0}^\infty c_m x^m$ . А давайте расширим на матрицы :)

**def:**  $A_{n \times n} : f(A) = \sum_{m=0}^\infty c_m A^m$ . Причем мы так же считаем частичные суммы и ищем их предел, но теперь просто ищем предел в матрицах.

Можно добавить параметр:  $f(At) = \sum_{m=0}^\infty c_m A^m t^m$ .

**Теорема 1 (функция от диагонализированной матрицы 1)**

Пусть  $A$  — подобна диагональной. А также нам дана  $f(x) = \sum_{m=0}^\infty c_m x^m, |x| < r$ .

Тогда, если  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r \Rightarrow \exists f(A)$  и  $f(A) = T f(\Lambda) T^{-1}$ , где  $f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

**Доказательство:**

Упросту  $\sum_{m=0}^k c_m A^m$ . Мы знаем, что  $A$  - подобна диагональной  $\Rightarrow A = T \Lambda T^{-1}$ . Тогда:

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m = T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} = T \Lambda^m T^{-1}$$

Теперь давайте подставим это в нашу сумму:

$$\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left( \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1}$$

Теперь вспомним, что  $\Lambda^n$  диагональна, поэтому занесем сумму внутрь матрицы и получим:

$$T \left( \sum_{m=0}^k c_m \Lambda^m \right) T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} =$$

Теперь вспомним, что  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r$ , поэтому для них мы можем применить формулу, откуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k c_m A^m = \lim_{k \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^k c_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^k c_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Q.E.D.

## Теорема 2 (функция от диагонализированной матрицы, 2-я формула)

Пусть  $A$  — подобна диагональной.

Тогда  $A$  имеет спектральное разложение  $\sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \lambda P_\lambda$ , где  $P_\lambda$  — проекторы. А также нам дана

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad |x| < r.$$

Тогда, если  $\forall$  с.ч.  $|\lambda| < r$ , то  $\exists f(A)$ , а так же  $f(A) = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} f(\lambda) P_\lambda$ .

**Доказательство:**

$$A^m = \left( \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \right)^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi$$

А теперь вспомним свойства проекторов. Когда я умножаю два разных проектора, я получаю ноль, откуда:

$$A^m = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \sum_{\mu} \mu P_\mu \dots \sum_{\xi} \xi P_\xi = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$$

Значит:  $\sum_{m=0}^k c_m A^m = \sum_{m=0}^k c_m \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda = \sum_{\lambda} P_\lambda \sum_{m=0}^k \lambda^m c_m$ . Теперь если я возьму предел, то я получу то, что мне нужно, потому что каждая лямбда  $< r$ , и поэтому я могу вместо них подставить  $f(\lambda)$ .

Q.E.D.

**Экспонента:**

А теперь давайте возьмем все  $c = 1$ , а также вспомним, что мы можем протаскивать с собой параметр. Поэтому у нас получается новая формула:

$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$ , а теперь вспомним наше разложение  $e$ -шки. А это именно оно и есть!

Поэтому получаю:

$$e^{At} = f(At) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k t^m A^m$$

Или:

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} e^{\lambda t} P_\lambda$$

**Свойства:**

1.  $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$ .
2.  $e^{(A_1 + A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$
3.  $e^{0t} = E$

**Обратная:**

$$A - \text{подобна диагональной } \forall \text{ с.ч. } \lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

**Свойства:**

1.  $A^{-1} = \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda} P(\lambda)$
2.  $AA^{-1} = T \Lambda T^{-1} T \Lambda^{-1} T^{-1} = E$
3.  $AA^{-1} = (\sum \mu P_\mu) (\sum \frac{1}{\lambda} P_\lambda) = \sum_\lambda \lambda \frac{1}{\lambda} P_\lambda = E$

**Корень:**

Если  $A$  подобна диагональной и  $\forall$  с.ч.  $\lambda \geq 0$ , то взяв  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  мы можем ввести:

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}, \text{ полагая } \sqrt[m]{\lambda} \geq 0$$

**Спектральное представление:**  $\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{ с. ч.}} \sqrt[m]{\lambda} P_{\lambda}.$

## 1.6 Комплексификация вещ. лин. пр-ва. Продолжение вещественного линейного оператора

Давайте посмотрим какие линейные операторы мы уже изучили:

Пусть  $A \in \text{End}(V) \xrightarrow{e} A$ ,  $\chi(t)$  — корни характеристического многочлена. Он может быть:

1. Все корни  $\in K$ .  $\sum_{\lambda \text{ с. ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

- $\exists$  базис  $V$  из  $v_{\lambda} : \forall \lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \iff$  диагонализируема.
- $\nexists$  базис  $V$  из  $v_{\lambda} : \exists \text{ с. ч. } \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda) \iff A$  жорданова форма.

2. Не все корни  $\in K$ . В таком случае вещ.  $V$  комплексифицируют.

**def:**  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (вещ. лин. пр-во)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad V_{\mathbb{C}} = \{z = x + yi \mid \forall x, y \in V\}$$

Назовем  $V_{\mathbb{C}}$  комплексификацией  $V$ .

Покажем некоторые **свойства**:

1.  $0 \in V \leftrightarrow 0 + i0 = 0 \in V_{\mathbb{C}}$  - существование нуля
2.  $x \in V \leftrightarrow x + i0 = x \in V_{\mathbb{C}}$ ,  $V \subset V_{\mathbb{C}}$  — говорим, что  $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$
3.  $\forall z = x + iy$  существует обратное:  $-x + i(-y)$

Заметим, что в таком случае  $V_{\mathbb{C}}$  — линейное пространство над полем комплексных чисел.

**Утв.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$ . Докажем что  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V_{\mathbb{C}}$ .

**Доказательство:**

Возьмем любой  $z$  и докажем, что его можно породить с помощью базиса:

$$z = x + iy = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$$

Откуда  $e$  - порождающий базис для  $V_{\mathbb{C}}$ . Докажем линейную независимость:

Для этого нам надо показать, что любая нулевая комбинация тривиальна:

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j = \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n \beta_j e_j = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall j : \alpha_j = 0 \\ \forall j : \beta_j = 0 \end{cases}$$

Откуда получили линейную независимость.

Q.E.D.

**Замечание.** Мы знаем, что  $V \subset V_{\mathbb{C}}$ .  $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$ , откуда наши пространства должны быть равны? Нет! Это было бы так, если бы не одно НО.  $V$  - линейное пространство над  $\mathbb{R}$ , а  $V_{\mathbb{C}}$  - линейное пространство над  $\mathbb{C}$ , поэтому это не правда.

Благодаря верхней теореме мы можем сделать некоторые замечания:

$$x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = x + iy \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

**def:**  $z \in V_{\mathbb{C}}, \bar{z} = x - iy$  — сопряженный вектор,  $z = x + iy, \quad x, y \in V$

**Свойства:**

1.  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2.  $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$
3.  $v_1, \dots, v_m$  — лин. (не)зависимы  $\Leftrightarrow \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$  лин. (не)зависимы.
4.  $rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$

**def:** Возьму оператор  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ .  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Назову данную конструкцию продолжением вещ. лин. оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  вещественного пространства  $V$ .

Очевидно, что в таком случае  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ , т.к.  $\mathcal{A}$  — линейный оператор.

**Утверждение:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$  ( $\Rightarrow$  базис  $V_{\mathbb{C}}$  из теоремы сверху).

Тогда, если  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A$ , то  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A$

**Доказательство:**

По определению матричного оператора:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cdot e_j = \mathcal{A} \cdot e_j + i\mathcal{A}0 = \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} e_k \iff A_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

**Свойства  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ :**

1.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$  — так как матрицы совпадают.

**Замечание:**

1) если  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$  - корень  $\chi(t) \Rightarrow \lambda$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ , но не с.ч.  $\mathcal{A}$ .

2) если  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  корень  $\chi \Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  - тоже корень, причём той же кратности.

2.  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} : \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$ .

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z}$$

3.  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ ,  $z$  - с. в., отвечающий  $\lambda \Rightarrow \bar{\lambda}$  с.ч.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ ,  $\bar{z}$  с.в., отвечающий  $\bar{\lambda}$

$$\mathcal{A}\bar{z} = \overline{\mathcal{A}z} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z}.$$

4.  $\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$ ,  $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$

Вернемся к тому старому разделению на случаи. Заметим, что если в таком случае мы возьмем наш третий случай и комплексифицируем, то для полученного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  мы получим, что он относится либо к первому варианту, либо ко второму.

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли - Гамильтона

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  - нормализованный многочлен  $\psi(t)$  называется аннулятором элемента  $x \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ .

А теперь на более понятном. Пусть у нас есть  $\psi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k+1} t^0$ . Подставляя в него оператор получу:  $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + a_1 \mathcal{A}^{k-1} + \dots + a_{k+1} \varepsilon$ . И такой оператор будет аннулятором  $x$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ .

**Замечание.**  $\psi(t) \neq 0$ , потому что это нормализованный многочлен, его старший коэффициент равен 1.

$\psi(t) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - так как это многочлен. Здесь  $m(\lambda)$  — кратность корня  $\lambda$ . Перепишем на место  $t$  оператор:

$$\psi(\mathcal{A}) = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$$

**def:** Аннулятор элемента  $x \in V$  наименьшей степени называется минимальным аннулятором элемента  $x$ .

### Теорема: (о существовании и единственности минимального аннулятора)

1.  $\forall x \in V \exists! \psi(t)$  минимальный аннулятор  $x$ .
2.  $\forall$  другой аннулятор  $x$  : на минимальный аннулятор  $x$ .

**Доказательство:**

1. (a) Пусть  $x = 0$ ,  $\psi(t) = 1$ ,  $\psi(\mathcal{A}) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon x = \varepsilon 0 = 0$
- (b) Пусть  $x \neq 0$ . Посмотрю на  $x, \mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x, \dots, \mathcal{A}^m x$

Причем  $m$  такое, что  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$  - линейно независимы, а  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^m x$  - зависимы. Такой набор собрать удастся, при этом  $m \leq n$ .

$$\Rightarrow \exists! c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in k, \text{ такие, что } \mathcal{A}^m x = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j x$$

Откуда получаем, что  $(\mathcal{A}^m - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{A}^j)x = 0$ . Получил какой-то оператор, который при умножении на  $x$  дает 0. А это значит, аннулятор существует, причём аннулятор выше минимальный по построению.



**Замечание:** мы смотрим на многочлен с коэффициентами  $1, c_{n-1}, \dots, c_0$  — этот многочлен и есть наш минимальный аннулятор..

2. Пусть мой минимальный аннулятор это  $\psi(t)$ , а  $\psi_1(t)$  другой аннулятор  $x$ .

Посмотрим на результат деления:

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t) \text{ (остаток), } \deg r < \deg \psi$$

Это значит, что подставляя в него  $\mathcal{A}$  и умножая на  $x$  должно быть верно:

$$\psi_1(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A})x + r(\mathcal{A})x$$

Но  $\psi_1(\mathcal{A})x = 0$ ,  $\psi(\mathcal{A})x = 0$ , поэтому  $r(\mathcal{A})x = 0$ , но что это значит?

Как мы знаем  $\psi(t)$  - минимальный аннулятор. Так как  $r(\mathcal{A})x = 0$ , то если  $r(t) \neq 0$ , получаем, что это аннулятор, а тогда мы выбрали не минимальный аннулятор, т.к.  $\deg \psi > \deg r$ . Противоречие!

Откуда получаю, что  $r \equiv 0 \Rightarrow \psi_1$  делится на минимальный оператор  $\psi$ .

Q.E.D.

**def:** Нормализованный многочлен  $\varphi(t)$  называется аннулятором оператора  $\mathcal{A}$ , если:

$$\varphi(\mathcal{A}) \equiv 0, \text{ (т.е. } \forall v \in V, \varphi(\mathcal{A})v = 0 \text{)}$$

**def:** минимальным многочленом оператора  $\mathcal{A}$  называется аннулятор  $\mathcal{A}$  наименьшей степени.

**Теорема: (о существовании и единственности миним. многочлена оператора)**

1.  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) : \exists!$  - минимальный многочлен.
2.  $\forall$  аннул. оператора  $\mathcal{A}$  делится на миним. мн-н  $\mathcal{A}$

**Доказательство:**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ . Построим  $\psi_j(t)$  - минимальный аннулятор  $e_j$

Возьму  $\varphi(t) = \text{Н.О.К. } \{\psi_j\}_{j=1}^n$ , где  $j = 1, \dots, n$ . Покажем, что  $\varphi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ :

Как мы знаем  $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ . Поэтому:

$$\varphi(\mathcal{A})v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot \varphi(\mathcal{A}) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\psi_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{A}))e_j = 0 \iff \varphi(\mathcal{A}) \equiv 0$$

То есть такой многочлен существует. Теперь докажем единственность:

Пусть  $\varphi_a(t)$  другой аннулятор  $\mathcal{A}$ : Тогда  $\forall j = 1, \dots, n : \varphi_a(\mathcal{A})e_j = 0$ .

Тогда  $\varphi_a$  аннулятор элемента  $e_j$  для любого  $j$ .

По теореме о линейном операторе мы знаем, что  $\varphi_a$  делится на  $\psi_j$  для любого  $j$ , то есть  $\varphi_a \vdots \varphi$ .

Откуда я получаю, что  $\varphi_a$  степени хотя бы такой же, что  $\varphi$ . То есть  $\varphi_a$  хотя бы Н.О.К.

Если мы предполагаем, что это многочлен минимальной степени, то он такой же степени, как и  $\varphi$ . При этом они оба делятся на Н.О.К., а  $\varphi = \text{Н.О.К.}$ . Так же их старшие коэффициенты равны. Поэтому:  $\varphi_1 = \varphi$ . Исходя из этого получаем, что такой многочлен единственный. Делимость получаем из того, что любой другой аннулятор оператора является аннулятором базисных векторов, откуда делится на каждый из них  $\Rightarrow$  делится на их НОК = минимальному.

Q.E.D.

### Теорема (Кэли - Гамильтона)

$\forall A \in \text{End}(V)$  выполнено, что:

$\chi(t) = \det(A - tE)$  - аннулятор оператора  $A$ .

**Замечание**  $\det(A - A \cdot \varepsilon)$ ,  $t \in K$ . Сюда не предполагается подставлять матрицу.

### Доказательство:

Пусть есть базис  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда  $A \xleftrightarrow{e} A$ .

Пусть есть  $\mu \in K$  - не корень  $\chi(t)$ , где  $t \in K$ . Посмотрим на  $\chi(t) = \det(A - tE)$ . Как мы знаем:  $\chi(\mu) \neq 0$ , поэтому  $\det(A - \mu E) \neq 0$ . Откуда существует обратная матрица (по теореме об обратной матрице), тк  $A$  - не вырожденная:

$$\exists!(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B = \frac{1}{\chi(\mu)} B$$

где  $B$  - матрица из алгебраических дополнений.

Наша матрица  $B$  выглядит примерно так:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} c_{11i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{1ni} \mu^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_{n1i} \mu^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} c_{nni} \mu^i \end{pmatrix}$$

Давайте разложим нашу матрицу в сумму матриц так, что матрица  $B_k$  будет состоять из всех коэффициентов на  $k$ -ой позиции этих  $k$  функций:

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Тогда вернемся к тому, что было:

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\chi(\mu)} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Или домножим на  $(A - \mu E)$  и получим:

$$E \cdot \chi(\mu) = (A - \mu E) \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mu^k$$

Пусть  $\chi(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_0 t^0$ . Давайте раскроем скобки, мы получим:

$$\begin{aligned}
\mu^0 : & \quad E\alpha_0 = AB_0 \\
\mu^1 : & \quad E\alpha_1 = AB_1 - B_0 \\
\mu^2 : & \quad E\alpha_2 = AB_2 - B_1 \\
& \dots\dots\dots \\
\mu^{n-1} : & \quad E\alpha_{n-1} = AB_{n-1} - B_{n-2} \\
\mu^n : & \quad E\alpha_n = -B_{n-1}
\end{aligned}$$

Теперь умножим каждый  $E\alpha_i$  на  $A^i$  и сложим. Получится:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0$$

$\chi(A) = 0 \Rightarrow \chi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , т.к.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$ . Q.E.D.

**Замечание:** Очевидно,  $\forall$  матрицы  $A_{n \times n}$  ее характеристический многочлен это аннулятор  $\mathcal{A}$ .

**Следствие 1.**  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $\varphi$  - минимальный многочлен, тогда  $\chi : \varphi$  (из теоремы о минимальном мн-не.)

**Следствие 1.5.**  $\deg \varphi \leq n$ , т.к.  $\deg \chi = n$  и  $\chi : \varphi$ .

**Следствие 2.**  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Если  $\deg \varphi = n = \deg \chi \Leftrightarrow \varphi \equiv \chi \cdot (-1)^n$

**Теорема (о множестве корней характеристического многочлена)**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  множество корней  $\chi$  совпадает с множеством корней  $\varphi$  (без учета кратности)

**Доказательство:**

1.  $\lambda$  корень  $\varphi \Rightarrow \lambda$  - корень  $\chi$ . Очевидно.
2. Пусть  $\lambda$  корень  $\chi$ . Мы должны показать, что и у  $\varphi$  есть такой корень. Тогда есть 2 варианта:

(a)  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$  - с.ч.  $\Rightarrow \exists u$  - собственный вектор  $\neq 0$

Так как  $u$  - собственный вектор, то  $(\mathcal{A} - \lambda E)u = 0$

$(t - \lambda)$  - минимальный аннулятор элемента  $u$ ,  $\varphi$  - минимальный многочлен  $\Rightarrow$  аннулятор  $u$ , откуда  $\varphi : (t - \lambda) \Rightarrow \lambda$  корень  $\varphi$  - победили

(b)  $\lambda \notin K \equiv \mathbb{R}$ , т.е.  $\lambda$  - не собственное число. Прибегаем к комплексификации:

Для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   $\lambda$  - корень. Как мы знаем  $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \chi_{\mathcal{A}} = \chi$ .

Тогда по пункту а это корень минимального многочлена в  $\varphi_{\mathbb{C}}$ .

Построим минимальный многочлен:

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис.  $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A$ .  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{e} A$ . Начнем строить по определению минимальный многочлен. Для этого мы должны найти  $\psi_i(t)$  - аннулятор  $e_i$ .

Выпишу:  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$ . Причем  $k$  такое, что  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1} e_i$  - линейно независимы, а  $e_i, \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_i, \dots, \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_i$  - зависимы. Заметим, что  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A} e_j$ .

Поэтому по алгоритму построения мин. многочлена  $\varphi_j = \varphi_j_{\mathbb{C}}$ . А уже откуда  $\lambda$  корень  $\varphi$  - победили!

Q.E.D.

**Замечание:**  $\chi(t) = \prod (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$  и  $\varphi(t) = \prod (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ , верно, что:  $1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство.

Пусть у нас есть  $\varphi(t)$  - многочлен над полем  $K$  (все его коэффициенты в  $K$ ).

Пусть все его корни  $\varphi \in K$ . Тогда давайте разложим его в произведение корней:

$$\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

давайте теперь вынесем один из корней за скобки. Получим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

Переобозначим  $\varphi_{\lambda}(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$  и подставим:

$$\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(t)$$

Возьмем  $P_{m-1}$  - множество всех многочленов над полем  $K$  степени  $\leq m - 1$ .

Зафиксируем  $\varphi$  и  $\lambda$  и назовем главным идеалом, порожденным многочленом  $\varphi_{\lambda}$ :

$$I_{\lambda} = \{p \in P_{m-1} | p : \varphi_{\lambda}\}$$

Очевидно  $I_{\lambda}$  линейное подпространство. Заметим, что  $p : \varphi_{\lambda} \Leftrightarrow p(t) = a_{\lambda}(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$

Поэтому на самом деле:  $I_{\lambda} \cong \{a_{\lambda}\} = P_{m(\lambda)-1}$

Откуда  $\dim I_{\lambda} = m(\lambda)$ .

### Теорема:

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda - \text{корень } \varphi} I_{\lambda}.$$

### Доказательство:

1. Проверим дизъюнктность:

$$0 = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} p_{\lambda} \in I_{\lambda} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \varphi_{\lambda}(t)$$

Зафиксируем какую-то  $\lambda$  и вынесем ее за скобки:

$$a_{\lambda} \varphi_{\lambda}(t) + \sum_{\mu \neq \lambda} a_{\mu}(t) \cdot \varphi_{\mu}(t)$$

Как мы знаем, для всех  $\mu \neq \lambda : \varphi_{\mu} : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

А так же мы знаем, что  $\varphi_{\lambda}(t)$  не делится на  $(t - \lambda)^{m(\mu)}$

Откуда получаем, что  $a_{\lambda} : (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ . А это значит, что  $a_{\lambda} \equiv 0$

Откуда дизъюнктно.

2. Проверим размерность  $\dim(\bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = \dim P_{m-1}$ , откуда прямая сумма.

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $\forall p \in P_{m-1} : \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ , где  $p_{\lambda}(t) = \alpha_{\lambda}(t) \cdot \varphi_{\lambda}(t)$ ,  $\deg \alpha_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$ .

В частности,  $1 = \sum_{\lambda \text{ корень}} p_{\lambda}$  - полиномиальное разложение единицы

**Замечание:**

1. Пусть  $\lambda \neq \mu$  - корни  $\varphi$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}, p_{\mu} \in I_{\mu}, p_{\lambda} p_{\mu} \div \varphi$$

$$p_{\lambda}(t) = \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}(t), p_{\mu}(t) = \alpha_{\mu} \varphi_{\mu}(t)$$

$$p_{\lambda}(t) p_{\mu}(t) = \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}(t) \alpha_{\mu} \varphi_{\mu}(t) \div \varphi$$

2. Пусть  $\forall \lambda, m(\lambda) = 1$ , тогда  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ .

$I_{\lambda} \ni p_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}$ , тогда  $\alpha_{\lambda} = \text{const}$ . Это можно понять так же из  $0 \leq \deg \alpha_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1 = 0$

**Теорема (Лагранж)**

Пусть  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , то есть  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ . Тогда:

$$\forall p \in P_{m-1} : p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \cdot \varphi_{\lambda}(t)$$

**Доказательство:**

Возьму многочлен  $p$  и посмотрю значение в  $\lambda$ .

$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu}$  - я могу так разложить из следствия 1 (см. выше). Также заметим, что  $a_{\mu}$  - константы. Тогда получается вот такая формула:

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} p_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\mu} \varphi_{\mu}(\lambda)$$

Заметим, что при  $\mu \neq \lambda$  у нас зануляется сумма, так что  $p(\lambda) = a_{\lambda} \varphi_{\lambda}(\lambda)$ .

Откуда получаю, что  $\alpha_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\varphi_{\lambda}(\lambda)}$ .

Теперь про производную:  $\varphi'(t) = ((t - \lambda) \cdot \varphi_{\lambda}(t))' = \varphi_{\lambda}(t) + (t - \lambda) \varphi'_{\lambda}(t)$

Зафиксируем  $\lambda$ . Получу, что в таком случае  $\varphi'(\lambda) = \varphi_{\lambda}(\lambda)$ . Откуда, если присмотреться, мы получаем формулу из теоремы.

Q.E.D.

**Замечание.** Эта теорема позволяет нам быстро искать  $\alpha_{\lambda}(t)$ , в случае всех  $m$  единиц, потому что в таком случае  $\alpha_{\lambda}(t)$  - константа.

**Следствие:**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ : Пусть  $1 = \sum_{\lambda} \frac{1}{\varphi'(\lambda)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) \Rightarrow t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$

**Доказательство:**  $t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\varphi'(t)} \varphi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

Q.E.D.

Вернемся к операторам. Возьмем  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ :

$\varphi(t)$  минимальный многочлен, все корни  $\varphi \in K (\Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K)$ , то есть являются собственными числами.

$\exists! 1 = \sum_{\lambda - \text{ корни } \varphi} p_{\lambda}(t)$  — полиномиальное разложение единицы.

$\varepsilon = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(\mathcal{A})$ ,  $\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$  — оператор разложения единицы.

Позамечаем некоторые интересные факты:

1.  $P_{\lambda} \in \text{End}(V)$
2. Возьму  $\lambda \neq \mu$ . Замечу, что  $p_{\lambda} \cdot p_{\mu} \equiv 0$ . Тогда  $p_{\lambda}(t)p_{\mu}(t) = 0$ , откуда:  
 $\forall v \in V : P_{\lambda}P_{\mu}v = a(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{A})v = 0$ , из-за того, что  $\varphi$  - минимальный многочлен.  
 Откуда  $P_{\lambda}P_{\mu}$  - аннулятор  $\mathcal{A}$  или  $P_{\lambda}P_{\mu} = 0$
3.  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \\ P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_{\lambda} - \text{ по теореме это проекторы на } \text{Im } P_{\lambda}, V = \bigoplus \text{Im } P_{\lambda}$

Такие проекторы называются спектральными. Это не те самые проекторы на  $V_{\lambda}$ . Пока что это проекторы на их собственные подпространства. Они обладают теми свойствами проекторов, что мы вывели до этого.

**ЕСЛИ**  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , тогда по следствию из теоремы Лагранжа, мы знаем:

$\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$ ,  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \cdot \lambda \Rightarrow \mathcal{A}$  о.п.с.,  $\lambda$  - с.ч.  $\mathcal{A}$ .

Откуда это будут проекторы на собственные подпространства.

**Следствие:** Т.е.  $\mathcal{A}$  о.п.с. достаточно удовлетворить:  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$  в минимальном многочлене.

**def:**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda$  - с.ч.  $\mathcal{A}$ .  $K_{\lambda}$  - корневое подпространство, если:

$K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$ , где  $m(\lambda)$  кратность  $\lambda$  в мин. многочлене  $\varphi$ .  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$

Очевидно  $V_{\lambda} \subseteq K_{\lambda}$ .

**Теорема (о корневом подпространстве)**

1.  $K_{\lambda}$  - инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .
2.  $\text{Im } P_{\lambda} = K_{\lambda}$ , где  $\varepsilon = \sum_{\lambda} P_{\lambda}$  - оператор разложение единицы.

Называются образами спектров проекторов.

$\Rightarrow \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V$

3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен для  $B = \mathcal{A}|_{K_{\lambda}} \in \text{End}(K_{\lambda})$

**Доказательство:**

1. Возьмем  $v \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$

Заметим, что  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$  - многочлен от  $\mathcal{A}$ . Тогда:

$$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}$$

Умножим и левую и правую часть на  $v$ . Получим:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{0}$$

Откуда  $\mathcal{A}v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda \Rightarrow K_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

2. Вспомним, что:  $\varepsilon = \sum_\lambda P_\lambda$ ,  $P_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A})$ ,  $p_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$

Пусть  $v \in V$ . Тогда посмотрим на:

$$(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot P_\mu v =$$

Заменяем  $P_\lambda$  по формуле:

$$= ((\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v =$$

Так как это все многочлены от  $\mathcal{A}$ , то они перестановочны:

$$= (\alpha_\lambda(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} \cdot \varphi_\lambda(\mathcal{A}))v = (\alpha_\lambda(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A}))v = \mathbf{0}$$

Так как  $\varphi(\mathcal{A})v = \mathbf{0}$  (минимальный многочлен).

Откуда  $P_\lambda v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$ . Следовательно  $\text{Im } P_\lambda \subseteq K_\lambda$ .

Теперь докажем, что они совпадают:

Возьму  $\mu \neq \lambda$ , а также  $v \in K_\lambda$ . Посмотрим на  $P_\lambda v$ :

$$P_\mu v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v =$$

Мы знаем, что в  $\varphi_\mu(\mathcal{A})$  содержится множитель  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ . Давайте его вынесем за скобки, получим:

$$\alpha_\mu(\mathcal{A})\varphi_\mu(\mathcal{A})v = \alpha_\mu(\mathcal{A})\beta_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v$$

Так как  $v \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ , то  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}v = \mathbf{0}$ , откуда  $P_\mu v = \mathbf{0}$ .

Откуда получаю, что  $\forall v \in K_\lambda$ ,  $v = \varepsilon v = \sum_\mu P_\mu v = P_\lambda v$ . Следовательно  $K_\lambda \subseteq \text{Im } P_\lambda$ , но мы уже сказали, что  $\text{Im } P_\lambda \subseteq K_\lambda$ , поэтому  $K_\lambda = \text{Im } P_\lambda$ .

Частный случай: если нет  $\mu \neq \lambda$ , т.е.  $\lambda$  — единственное с.ч.  $\mathcal{A}$ , то  $\varphi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \varphi_\lambda(t) \equiv 1 \Rightarrow a_\lambda(t) \equiv 1 \Rightarrow P_\lambda = \varepsilon \Rightarrow \text{Im } P_\lambda = V$ .

С другой стороны,  $K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$ , но  $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)}$  это буквально  $\varphi(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$ , так что  $K_\lambda = V = \text{Im } P_\lambda$ .

$$3. B = \mathcal{A}|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

$\forall v \in K_\lambda : (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)} v = 0$ , откуда получаем, что  $\psi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - аннулятор  $\mathcal{B}$ .

Хотим понять: минимальный ли это многочлен?

Предположим, что он не минимальный, тогда есть  $\psi_i(t)$  - минимальный многочлен  $\mathcal{B}$ :  $\deg \psi_i < \deg \psi$ . Заметим, что любой аннулятор  $\mathcal{B}$  делится на минимальный многочлен, поэтому  $\psi_i(t) = (t - \lambda)^k$ , причем  $k \leq m(\lambda) - 1$ . Тогда заметим, что  $\psi_1(t) = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)-1}$  - тоже аннулятор  $\mathcal{B}$ .

Если мы покажем, что  $\varphi_1(t) = \psi_1(t) \cdot \varphi_\lambda(t)$  - минимальный многочлен  $\mathcal{A}$ , тогда наш искомым минимальный многочлен не был минимальным. Как мы знаем:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\mu} v_{\mu}, \text{ где } v_{\mu} \in \text{Im } P_{\mu} = K_{\mu}$$

Покажем, что  $\varphi_1(t)$  - минимальный многочлен:

$$\varphi_1(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v = \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A}) \sum_{\mu} v_{\mu} = \varphi_\lambda(\mathcal{A})\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} \psi_1(\mathcal{A})\varphi_\lambda(\mathcal{A})v_{\mu}$$

Как мы сказали выше:  $\psi_1(t)$  - аннулятор  $B$ , откуда  $\psi_1(\mathcal{A})v_{\lambda} = 0$  (тк  $v_{\lambda} \in K_{\lambda}$ ). Также как мы знаем в  $\varphi_\lambda(\mathcal{A})$  содержится  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{m(\mu)}$ . А  $v_{\mu} \in K_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{m(\mu)}$ . То есть наш многочлен и вправду минимальный. То есть мы пришли к противоречию.

Откуда  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен для  $\mathcal{B}$ .

Q.E.D.

**Следствие 1:** Очевидно, что тогда  $1 \leq m(\lambda) \leq \dim(K_{\lambda})$ .

**Следствие 2:**  $\mathcal{A}$  - о.п.с  $\Leftrightarrow \varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ , т.е  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$ , (все корни  $\varphi \in K$ )

**Доказательство:**

$\Rightarrow$  Пусть  $\mathcal{A}$  - о.п.с.. Тогда мы знаем, что:

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч}} V_{\lambda}, \lambda - \text{корень } \varphi$$

$(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)v = 0 \Rightarrow (t - \lambda)$  - минимальный аннулятор  $v$ , где  $v$  - собственный вектор. Мы знаем, что:

$$\forall v \in V : \exists! v = \sum_{\lambda} v_{\lambda}$$

Докажем, что  $\varphi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$  - минимальный многочлен:

$$\varphi(\mathcal{A}) \cdot v = \left( \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \right) \sum_{\mu} v_{\mu} = 0$$

Это верно, потому что в это произведение входят аннуляторы собственных подпространств  $(t - \lambda)$ , которые будут аннулировать каждое из слагаемых. Откуда это аннулятор  $\mathcal{A}$ . А так как корни характеристического и минимального совпадают по теореме о множестве корней характеристического многочлена, а так же потому что  $\lambda$  - собственные числа - получаем, что данный многочлен - минимальный.



$\Leftarrow$  Уже доказывали, смотрите **ЕСЛИ** над теоремой о корневом подпространстве.

Q.E.D.

## 1.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

!!! Не путать разложение жордана с жордановой формой матрицы !!!

**def:**  $B \in \text{End}(V)$  называется нильпотентным, если его минимальный многочлен  $= t^\nu$ , (т.е.  $B^\nu = 0$ ), где  $\nu$  - индекс нильпотентности.

### Теорема (Разложение Жордана)

$\forall A \in \text{End}(V)$ , все корни  $\chi, \varphi \in K$ . Надо доказать, что:

$A = D + B$ , где  $D$  - о.п.с,  $B$  - нильпотентный, причем  $DB = BD$ .

**Доказательство:**

Возьмем оператор  $A$ . У него есть  $\varphi = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  - минимальный многочлен.

Разложим на операторы разложения единицы:

$$\varepsilon = \sum_{\lambda - \text{корень } \varphi} P_{\lambda}$$

Позже мы этим воспользуемся.

Возьму  $D := \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$  — очевидно,  $D$  - о.п.с. (смотрите теоремы о.п.с).

Возьму  $B := A - D$ . Все, что осталось проверить - нильпотентность  $B$ .

Пусть  $\nu = \max(m_{\lambda})$ , где  $\lambda$  - корень  $\varphi$ . Тогда:

$$B^{\nu} = \left( A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left( A \sum_{\lambda} P_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right)^{\nu} = \left( \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu}$$

Как мы помним  $\forall \mu \neq \lambda : P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = 0$ , а также  $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda}$ . Поэтому:

$$\left( \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon) P_{\lambda} \right)^{\nu} = \sum_{\lambda} (A - \lambda \varepsilon)^{\nu} P_{\lambda}$$

А как мы помним из определения  $P_{\lambda} = a_{\lambda}(A) \varphi_{\lambda}(A)$ . А также, так как  $\nu = \max(m_{\lambda})$ , то внутри каждой скобки есть множитель  $(A - \lambda \varepsilon)^{m(\lambda)}$ . Откуда  $B$  и вправду нильпотентно.

Теперь докажем перестановочность.  $BD = \left( A - \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \right) \sum_{\mu} \mu P_{\mu}$

А так как это многочлены от  $A$ , то они перестановочны. Поэтому и получается наша перестановочность

Q.E.D.

**Замечание:**  $AD = DA, AB = BA$

### Теорема (единственность разложения Жордана):

$\forall A \in \text{End}(V)$ . Доказать, что разложение Жордана единственно, то есть  $\exists! D, B$ .

**Доказательство:**

Пусть у нас есть еще одно разложение Жордана:  $\mathcal{A} = \mathcal{D}' + C$ ,  $\mathcal{D}'C = C\mathcal{D}'$ , где  $\mathcal{D}'$  - о.п.с, а  $C$  - нильпотентный оператор.

$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_{\mu}$ , где  $Q_{\mu}$  - проекторы.

Давайте разметим план доказательства:

1. Множество  $\lambda$  совпадает с множеством  $\mu$ .
  - 1.1 Докажем, что  $CQ_{\mu} = Q_{\mu}C$ .
  - 1.2 Докажем, что  $(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^k Q_{\mu} = C^k Q_{\mu}$ .
  - 1.3 Покажем для каждого  $\mu$  аннуляторы  $\text{Im } Q_{\mu}$ .  $\psi_{\mu} = (t - \mu)^{k(\mu)}$
  - 1.4 Покажем, что произведение  $\psi_{\mu}$  - аннулятор  $\mathcal{A}$ .
  - 1.5 Покажем, что на самом деле это минимальный многочлен, откуда множество корней совпадет.
2. Докажем совпадение  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$ .

Начнем доказательство:

- 1.1 Возьмем  $\mu$ . Докажем, что  $CQ_{\mu} = Q_{\mu}C$

Посмотрим на  $\mathcal{D}'Q_{\mu}$ . Используя свойства проекторов, оно равно:

$$\mathcal{D}'Q_{\mu} = \left( \sum_{\xi} \xi Q_{\xi} \right) Q_{\mu} = \mu Q_{\mu}$$

Посмотрим на  $Q_{\mu}\mathcal{D}'$ . Используя свойства проекторов, оно равно:

$$Q_{\mu}\mathcal{D}' = Q_{\mu} \left( \sum_{\xi} \xi Q_{\xi} \right) = \mu Q_{\mu}$$

Откуда  $\mathcal{D}'$  и  $Q_{\lambda}$  - перестановочны.

Возьмем  $\xi, \mu$ . Для них выполнено:

$$(\xi - \mu)Q_{\xi}CQ_{\mu} = \xi Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mu Q_{\mu}$$

Как мы только что доказали:  $\mu Q_{\mu} = \mathcal{D}'Q_{\mu}$ . Поэтому:

$$\xi Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mu Q_{\mu} = \mathcal{D}'Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu}$$

А так же мы только что доказали, что  $\mathcal{D}'$  и  $Q_{\mu}$  перестановочны для любого  $\mu$ . Откуда:

$$\mathcal{D}'Q_{\xi}CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu} = Q_{\xi}\mathcal{D}'CQ_{\mu} - Q_{\xi}C\mathcal{D}'Q_{\mu} = Q_{\xi}(\mathcal{D}'C - C\mathcal{D}')Q_{\mu}$$

А как мы знаем из определения жорданового разложения  $C$  и  $D'$  перестановочны. Это значит, что  $D'C - CD' = \mathbf{O}$ . Откуда:

$$(\xi - \mu)Q_{\xi}CQ_{\mu} = \mathbf{O} = (\mu - \xi)Q_{\mu}CQ_{\xi}$$

То есть для  $\xi \neq \mu : Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi = 0$  Теперь вернемся к тому, что мы изначально хотели - перестановочность  $C, Q_\mu$ :

$$C Q_\mu = \varepsilon C Q_\mu = \left( \sum_{\xi} Q_\xi \right) C Q_\mu$$

Хочу использовать только что доказанный факт:  $Q_\xi C Q_\mu = Q_\mu C Q_\xi$ :

$$\left( \sum_{\xi} Q_\xi \right) C Q_\mu = \sum_{\xi} Q_\mu C Q_\xi = Q_\mu C \left( \sum_{\xi} Q_\xi \right) = Q_\mu C$$

Откуда  $Q_\mu C = C Q_\mu$  — перестановочны.

1.2 Докажем, что  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$ . Сначала посмотрим на случай  $k = 1$ :

$$(\mathcal{A} - \mu \varepsilon) Q_\mu = (\mathcal{D}' + C - \mu \varepsilon) Q_\mu = \left( \sum_{\xi} \xi Q_\xi + C - \mu \right) Q_\mu$$

Воспользуемся свойствами проекторов и получим, что:

$$\left( \sum_{\xi} \xi Q_\xi + C - \mu \right) Q_\mu = \mu Q_\mu + C Q_\mu - \mu Q_\mu = C Q_\mu$$

Воспользуемся индукцией:

**База:**  $k = 1$  доказана сверху.

**Индукционный переход:** Пусть выполнено  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$ , тогда выполнено:  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k+1} Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$ . Докажем:

$$(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k+1} Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^1 (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = (\mathcal{A} - \mu \varepsilon) C^k Q_\mu = C^k (\mathcal{A} - \mu \varepsilon) Q_\mu = C^{k+1} Q_\mu$$

1.3 Посмотрим на  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu$ . Как мы доказали в пункте 1.2  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = C^k Q_\mu$ . Как мы помним,  $C$  - нильпотентная, откуда есть  $k$  начиная с которого  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^k Q_\mu = 0$ . Давайте для каждого  $\mu$  введем свое  $k(\mu)$  - минимальная степень, чтобы получился ноль. Из перестановочности  $C^j Q, Q C^j$  получаю, что  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} Q = Q (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)}$

То есть  $Q_\mu (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} Q_\mu = C^{k(\mu)} Q_\mu = 0$ . Это значит, что любой вектор из  $\text{Im } Q_\mu$  применяя к нему  $(\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)}$  будет получаться ноль. То есть многочлен  $(t - \mu)^{k(\mu)}$  - минимальный аннулятор векторов из  $\text{Im } Q_\mu$ .

**Замечание:** именно здесь применяется пункт 1.1.

1.4 Возьму  $\psi = \prod_{\mu} (t - \mu)^{k(\mu)}$ . Покажу, что это аннулятор  $\mathcal{A}$ .

$\forall x : \exists ! x = \sum_{\mu} x_\mu$ , где  $x_\mu \in \text{Im } Q_\mu$  - по определению проекторов.

Подействуем на  $x$  нашим минимальным многочленом:

$$\psi(\mathcal{A})x = \left( \prod_{\mu} (\mathcal{A} - \mu \varepsilon)^{k(\mu)} \right) \sum_{\xi} x_\xi = \sum_{\xi} (q_\xi \cdot (\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)} \cdot x_\xi) = 0$$

Это ноль потому что каждое слагаемое в сумме ноль, а каждое слагаемое ноль, потому что в  $\psi(\mathcal{A})$  входит множитель  $(\mathcal{A} - \xi)^{k(\xi)}$  - аннулятор векторов из  $\text{Im } Q_\mu$ .

Откуда  $\psi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ .

1.5 Как мы знаем минимальный многочлен делится на минимальные аннуляторы векторов, откуда  $\varphi$  делится на каждое  $\psi_\lambda$ , откуда делится на НОК  $= \psi$ . Также мы только что доказали, что  $\psi$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , откуда  $\psi$  делится на  $\varphi$ . А раз  $\psi$  делится на  $\varphi$  и  $\varphi$  делится на  $\psi$ , то  $\psi \equiv \varphi$  - минимальный аннулятор. Из этого следует, что множество  $\lambda$  и множество  $\mu$  совпадает.

**Замечание:** совпадение  $\lambda$  и  $\mu$  еще не говорит нам о том, что  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ .

2.  $k(\lambda) = m(\lambda)$  из того, что совпали  $\psi, \varphi$ .

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = Q_\lambda (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{m(\lambda)} = \mathcal{O}$$

Откуда векторы из  $\text{Im } Q_m \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$ . Но мы помним, что  $\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$  и

$\bigoplus_\lambda \text{Im } Q_\lambda = V$ , откуда они совпадают. Откуда  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ .

Q.E.D.

### Теорема:

Разложение Жордана  $\mathcal{A} = D + B$ . Тогда  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$

### Доказательство:

По теореме о о.п.с у  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{D}$  совпадает множество корней.

Но нам надо теперь понять что-то про степени.  $\nu = \max(m(\lambda)); \mathcal{B}^\nu = \mathcal{O}$ . Тогда:

$$(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu - \mathcal{B}^\nu t^\nu = (\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t)((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \dots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Так как  $\mathcal{B}$  - многочлен от  $\mathcal{A}$ , то мы можем так разложить

Возьмем  $\mu$  не корень. Посчитаем определители. С одной стороны это:  $\det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = (\chi_{\mathcal{A}})^\nu$  - не зависит от  $t$ . С другой стороны это:

$$\det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\varepsilon - \mathcal{B}t) \det((\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\varepsilon)^{\nu-2}\mathcal{B}t + \dots + (\mathcal{B}t)^{\nu-1})$$

Тут два многочлена зависящих от  $t$  (оба не нули, иначе  $\mu$  - корень).

Заметим, что слева многочлен нулевой степени  $t$ . Когда произведение двух многочленов от  $t$  дает в произведении многочлен нулевой степени? Когда это многочлены нулевой степени. Откуда это константы

Давайте посчитаем эти константы. Подставим в первый многочлен  $t = 1$ , а во второй подставим  $t = 0$ . Получим:

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}$$

Откуда  $\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$ . Получили, что в любой точке - не корне, у нас совпадение многочленов. В корнях они оба аннуляются, откуда  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$ .

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{D} \Rightarrow \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$

**Следствие 2:**  $\forall \mathcal{A} : \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

### Доказательство:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  - разложение Жордана.  $\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$  из теоремы.

$D = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$ ,  $\mathcal{D}$  - о.п.с.  $\forall$  с.ч  $\lambda : \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ , а теперь вспомним, что проекторы это с одной стороны проекторы на  $K_{\lambda}$ , а с другой стороны на собственные подпространства  $\mathcal{D} V_{\lambda}$ .

Q.E.D.

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Формула Фробениуса.

Возьмем какое-то  $\lambda$  и рассмотрим сужение. Введем некоторые локальные обозначения:

$$K = K_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda)^{m(\lambda)}, B = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)|_K, m = m(\lambda), \alpha = \alpha(\lambda), \gamma = \gamma(\lambda).$$

Возьмем  $K_r = \text{Ker}(B^r) = \text{Ker}((\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)^r)$ ,  $r = 1, \dots, m$  :  $K_\lambda = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$ . Заметим, что  $m$  - минимальная степень, когда он зануляется. Докажем, что там строгое включение:

**Доказательство:**

Пусть существует:  $K_r \equiv K_{r+1}$ .  $\text{Ker} B^r = \text{Ker} B^{r+1}$ . Тогда по теореме о ранге и дефекте:

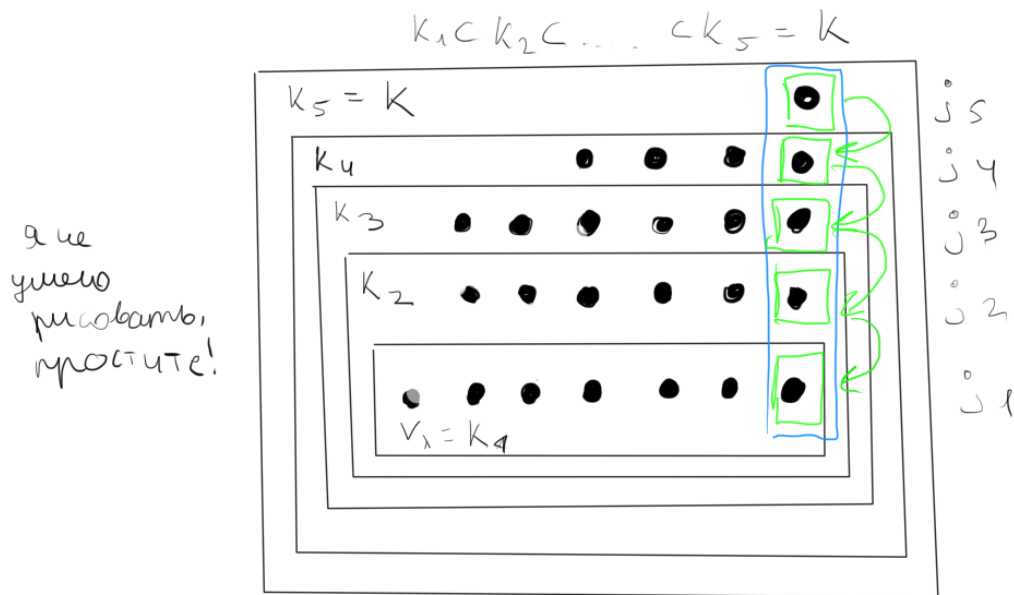
$$\text{rg} B^r = \text{rg} B^{r+1}, \text{Im } B^{r+1} \subseteq \text{Im } B^r \Rightarrow \text{Im } B^{r+1} = \text{Im } B^r$$

Что это значит? Пусть  $X = \text{Im } B^r$ . Тогда  $BX = X$ ,  $B^2X = X$ ,  $\dots$ ,  $B^mX = X$ .

Вспомним, что  $B^m = 0$ , откуда  $X = 0$ , но в таком случае (так как  $r$  от 1 до  $m - 1$ , то мы нашли число  $r < m$ , что  $B^r = 0$ . Но такого не может быть, так как  $m$  - минимальная степень, чтобы оператор занулился. Противоречие. Откуда все  $K_i$  различны.

Q.E.D.

Доказали, что включения строгие. А теперь объясним все на рисунке, а позже введем более формальную терминологию:



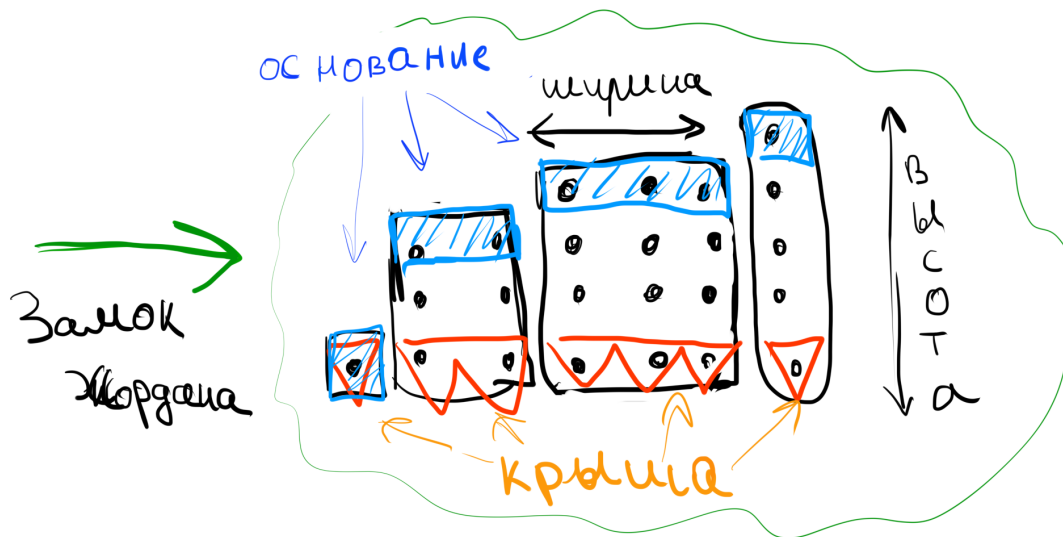
Рассмотрим такое  $K$ , что его ранг 24. И давайте сопоставим точкам на рисунке базисные вектора. Тогда у  $K_1$  будет 6 базисных векторов, у  $K_2$  будет 11 и так далее. Тогда давайте введем новое определение:  $\bar{K}_5$ , такое подпространство, что  $(KB + K_4) \oplus \bar{K}_5 = K$ . Возьму оттуда первый базисный вектор. Назову его  $j_5$ . На картинке вы можете это отчетливо видеть. Тогда возьму  $j_4 = Bj_5$ ,  $j_3 = Bj_4$ ,  $j_2 = Bj_3$ ,  $j_1 = Bj_2$ . Причем заметим, что в таком случае  $j_i \in K_i$ .

Такие  $j_5, j_4, j_3, j_2, j_1$  мы будем называть циклическим базисом длины 5, а  $j_4, j_3, j_2, j_1$  будут называться присоединенными.

Пока упустим, почему эти векторы линейно независимы, это потом докажется. Давайте сузим наш оператор до  $S = \text{span}(j_1, \dots, j_5)$  и попытаемся понять: какая будет матрица оператора. Заметим, что  $K_1 = V_\lambda$ , откуда мы знаем, что  $j_1$  - собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda$ , то есть  $Aj_1 = \lambda j_1$ .  $j_1 = Bj_2$ , то есть  $Aj_2 = j_1 + \lambda j_2$ . Таким образом получая, что моя матрица будет:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется **жордановой клеткой**, порожденной циклическим базисом размерности 5. Обозначается  $J_5(\lambda) = \lambda E + I_5$ , где  $I_5$  - матричка из единиц на диагонали, расположенной выше главной. По-другому еще называется блок нижнего уровня.



Давайте теперь возьмем все такие циклические базисы (столбики) одной высоты и объединим их. Получатся **башни**. Или более формально башня - подпространство, порожденное циклическими базисами одной длины. У башни есть опорные подпространства (основание башни), а так же у каждой башни есть крыша. Они подписаны на рисунках сверху. Башни мы будем обозначать  $\tau_h$ , где  $h$  высота башни. То есть на данном рисунке присутствуют башни  $\tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ , но не присутствует башня  $\tau_2$ .

Замок Жордана, возвышающийся над живописными холмами Прованса, хранит немало тайн. Говорят, что в 15 веке в нем жил загадочный алхимик по имени Пьер. Местные жители часто видели странное зеленоватое свечение в окнах замка по ночам...

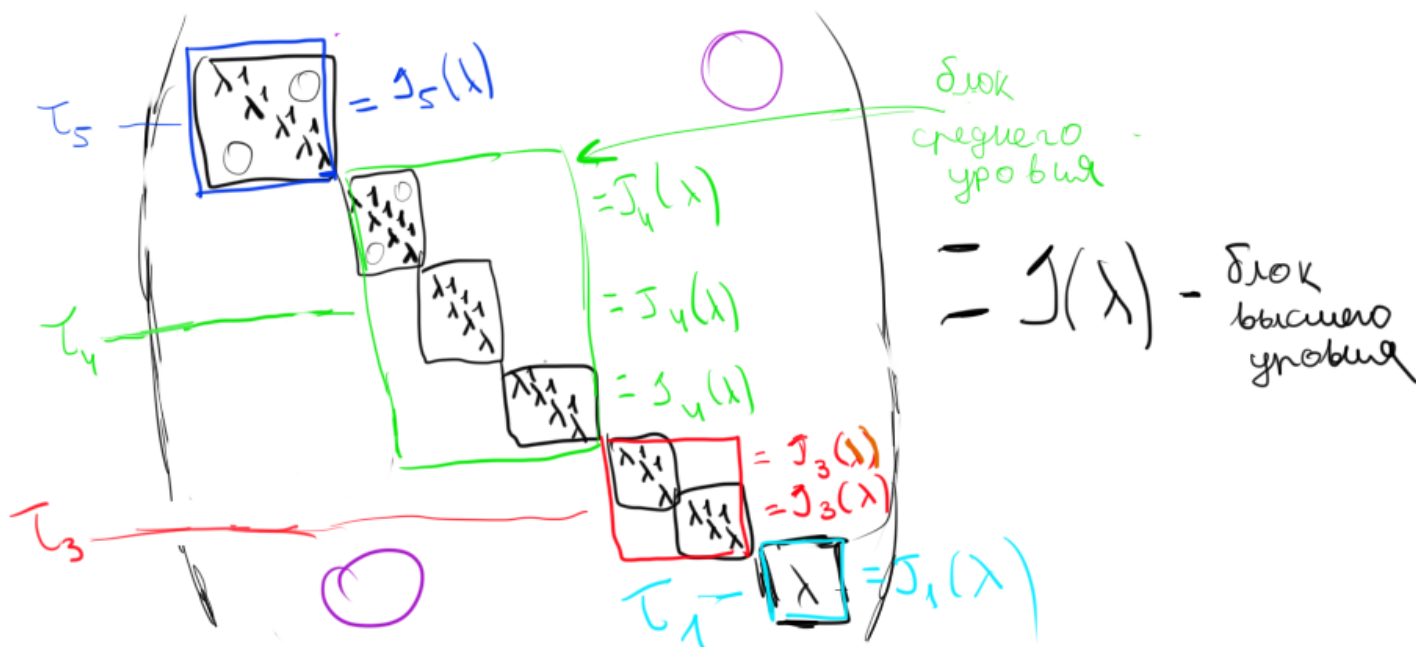
Так о чем это я? Вся эта конструкция величается ЗАМКОМ ЖОРДАНА. А если у нас  $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ , то наш замок будет просто полоской, поэтому мы его будем называть деревней Жордана.

Так вот матрица, соответствующая этой  $K_\lambda$ , выраженной через циклические базисы:



$$\begin{pmatrix} J_5(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = J(\lambda)$$

Называется блоком верхнего уровня, причем  $m$  - размер самой большой клетки. При этом, если раскрыть все  $J$ , то получится:



Теперь мы приходим к матрице в форме Жордана, она состоит блоков верхнего уровня, соответствующих собственным числам

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & & & \\ & J(\mu) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\xi) \end{pmatrix}$$

$T = T_{\text{кан}} \rightarrow \text{жорд. базис} = \text{объединение всех циклических базисов.}$

И если  $A$  - матрица  $\mathcal{A}$ , то:  $T^{-1}AT = J$ .

**А ТЕПЕРЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ:**

$B = (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \Big|_K$ . Введу  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r \subset \dots \subset K_m = K$ , где  $K_r = \text{Ker} B^r$ .

Введем временное обозначение:

$$\begin{aligned} z_0 &= BK = \text{Im } B \\ z_1 &= BK + K_1 \\ &\vdots \\ z_r &= BK + K_r \\ &\vdots \\ z_m &= BK + K_m = K \end{aligned}$$

Заметим, что в таком случае:  $z_0 \subseteq z_1 \subseteq \dots \subseteq z_m$ , а также  $z_{r+1} = z_r \oplus \overline{K}_{r+1}$ , где  $\overline{K}_r$  - **опорное подпространство**. Тогда заметим вот такую формулу:

$$K = z_m = BK + K_m = z_{m-1} \oplus \overline{K}_m = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m$$

Прямую сумму  $K_\lambda$  называют **прямой суммой опорных подпространств**.

**Теорема:**

$\forall r : 1 \leq r \leq m-1$  будет выполнено:  $B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m$

**Доказательство:**

Пусть  $x_* \in K$ . Тогда существует и единственно представление в прямой сумме опорных подпространств и  $BK$ :

$$x_* = Bx + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ где } x_j \in \overline{K}_j$$

Теперь умножим правую и левую часть на  $B^r$ :

$$B^r x_* = B^{r+1} x + B^r x_1 + \dots + B^r x_r + \dots + B^r x_m$$

Заметим, что в таком случае все  $x_j$ , где  $j \leq r$  уйдут, потому что  $x_j \in \overline{K}_j$ , то есть  $B^j x_j = 0$ .

$$B^r K = B^{r+1} K + B^r \overline{K}_{r+1} + B^r \overline{K}_{r+2} + \dots + B^r \overline{K}_m$$

Осталось проверить дизъюнктность, то есть проверить тривиальность разложения нуля:

$$0 = B^{r+1} x + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m = B^r (Bx + x_{r+1} + \dots + x_m)$$

Заметим, что то, что находится внутри скобок находится в  $\text{Ker} B^r \subset z_r = BK \oplus \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r$ . Откуда существует единственное разложение через эту прямую сумму:

$$Bx + x_{r+1} \dots + x_m = By + x_1 + \dots + x_r$$

Но, как мы помним  $BK$  и  $\overline{K}_j$  - дизъюнкты из прямой суммы опорных пространств и  $\text{Im } B = BK$ . То есть  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ . Откуда получаем, что  $Bx$  тоже ноль, откуда разложение нуля - тривиально.

Q.E.D.

**Следствие:**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m \oplus B^2\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B^{m-1}\overline{K}_m$$

**Доказательство:**

$$K = BK \oplus \bar{K}_1 \dots \oplus \bar{K}_m$$

$$BK = B^2K \oplus B\bar{K}_2 \dots \oplus B\bar{K}_m$$

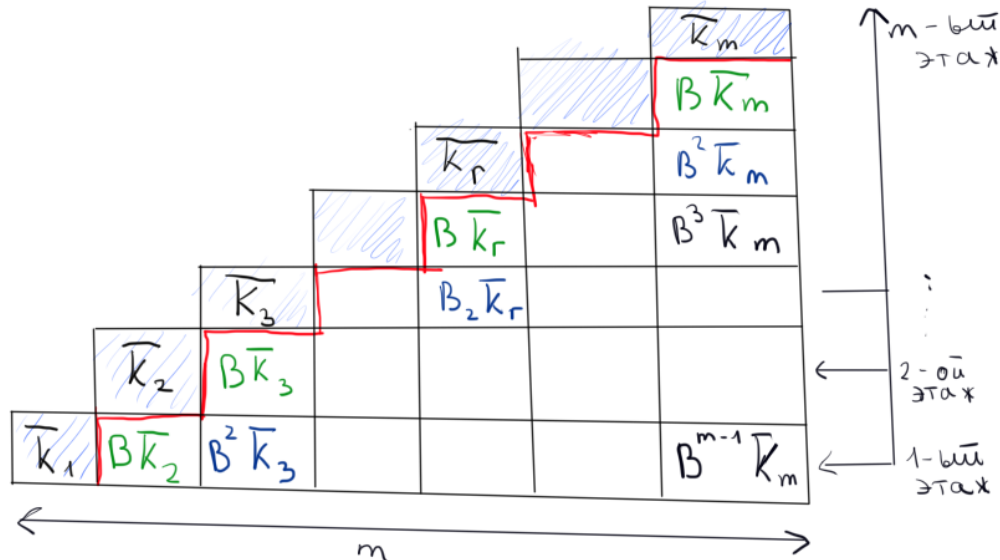
$$\vdots$$

$$B^{m-1}K = B^mK \oplus B^{m-1}\bar{K}_m = B^{m-1}\bar{K}_m$$

Подставьте рекурсивно и получите все, что нам надо.

Q.E.D.

Тогда из этого следствия наше корневое подпространство  $K$  можно представить вот так:



**def:** Если  $\bar{K}_r \neq \{0\}$ , то тогда:  $\bar{K}_r \oplus B\bar{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\bar{K}_r = \tau_r$  - называется **башней** высоты  $r$ .

Заметим, что  $l$ -ый этаж башни -  $B^{r-l}\bar{K}_r$ .

Если  $\bar{K}_r = \{0\} \Rightarrow$  башни высоты  $r$  нет.

Покажем, что каждый этаж башни имеет одну и ту же размерность, которая называется **шириной башни**.

**Теорема (о размерности башни)**

Все этажи башни высоты  $r$  имеют одну и ту же  $\dim$  (называем ее шириной  $d_r$ )

$$\dim \bar{K}_r = \dim B\bar{K}_r = \dots = \dim B^{r-1}\bar{K}_r = d_r.$$

**Доказательство:**

$\forall j = 1, \dots, r-1 : B^j : \bar{K}_r \rightarrow B^j\bar{K}_r$ . Покажем, что  $\bar{K}_r$  и  $B^j\bar{K}_r$  — изоморфные пространства. (Тогда у нас сразу совпадут  $\dim$  и не надо будет ничего доказывать).

Заметим, что у нашего отображения уже есть сюръективность (потому что мы буквально сужаем, то куда переводит наше отображение). Значит, чтобы доказать изоморфность нам нужна инъективность. А что такое инъективность? Это то, что  $\exists x_1, x_2 \in \bar{K}_r$ , что  $B^j x_1 = B^j x_2 \Leftrightarrow$

$B^j(x_1 - x_2) = 0$ . То есть если мы покажем тривиальность ядра  $B^j$ , то тогда наша функция будет инъективной:

Пусть  $x \in \text{Ker } B^j$  и  $x \in \overline{K}_r$ , тогда  $x \in \text{Ker } B^j \cap \overline{K}_r = K_j \cap \overline{K}_r$ . А как мы знаем  $K_j \cap \overline{K}_r = \{0\}$ . Если бы был  $x$  в их пересечении, то тогда  $x \in \text{Ker } B^j = K_j$  и  $x \in \overline{K}_r$ . Но как мы знаем  $x$  находится именно в  $\overline{K}_r$ , поэтому  $B^{r-1}x \neq 0$ , но как я сказал ранее:  $x \in \text{Ker } B^j$ . Противоречие.

То есть это значит, что  $x \in \{0\} \Leftrightarrow x = 0$ , откуда ядро тривиально, наша функция инъективна, а из этого уже следует изоморфность, то есть биекция.

Q.E.D.

**Следствие 1.**  $\sum_{r=1}^n d_r = \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ .

**Следствие 1.5.**  $\sum_{r=1}^m r \cdot d_r = \alpha(\lambda) = \dim K_\lambda$

**Следствие 2. (Теорема Фробениуса.)**

$$d_r = rgB^{r-1} - 2rgB^r + rgB^{r+1}$$

**Доказательство:**

$$B^r K = B^{r+1} K \oplus B^r \overline{K}_{r+1} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m$$

Введем обозначение  $p_r := \dim \text{Im } B^r = \dim B^r K = rgB^r$ . Тогда:

$$p_r - p_{r+1} = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m$$

Давайте напишем разности:

$$p_0 - p_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_m$$

$$p_1 - p_2 = d_2 + \dots + d_m$$

$\vdots$

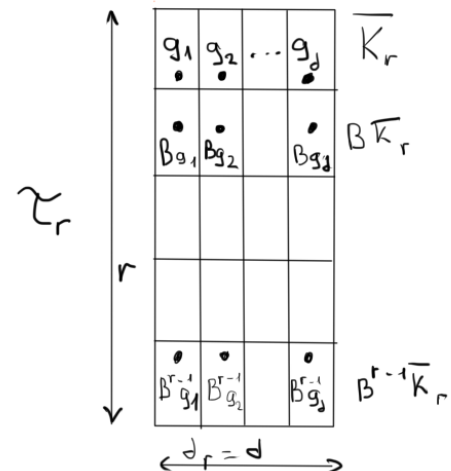
$$p_{m-1} - p_m = d_m$$

А теперь получаем, что  $d_1 = p_0 - 2p_1 + p_2$ ,  $d_2 = p_1 - 2p_2 + p_3$ , а откуда если заметить, то мы получаем нужную мне формулу!

**Замечание:** Такое равенство в теореме не очень удобно, потому что  $B$  - суженное изображение. todo: дописать формулу с практики

Пусть  $\overline{K}_r = \text{span}(g_1, g_2, \dots, g_d)$  - на рисунке это показано точками. Давайте к этим векторам будем применять наше отображение. Сначала получим  $Bg_1, \dots, Bg_d$ , а в теореме о размерности башни мы доказали, что у нас изоморфны  $\overline{K}_r$  и  $B\overline{K}_r$ , то есть мы получили еще один базис, только теперь  $B\overline{K}_r$ . Будем так проделывать и получим, что у нас базис  $B^i \overline{K}_r$  это  $B^i g_1, \dots, B^i g_d$ .

**def: Циклическим базисом**, порожденным вектором длины  $r$  называются  $g_p, Bg_p, \dots, B^{r-1}g_p$ . В таком случае  $Bg_p, \dots, B^{r-1}g_p$  называют присоединенными.



$$S = \text{span}(B^{r-1}g_p = j_1, B^{r-2}g_p = j_2, \dots, g_p = j_p).$$

Как мы помним из рассуждений наверху в самом начале этого параграфа:

$$A|_S \xleftrightarrow{j} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\tau_r = \bigoplus_{p=1}^{d_r} S_p, \quad K_\lambda = \bigoplus_{r=1}^{m(\lambda)} \tau_r(\lambda)$$

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} K_\lambda = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} \bigoplus_r \bigoplus_p^{m(\lambda)} S_{p,\lambda,r} - \text{объединение всех базисов называется } \underline{\text{Жордановым базисом}}.$$

### 1.11 Функция оператора матрицы, приводимой к Жордановой форме.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, |x| < r$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m, |\lambda| < r - \text{все случайные числа.}$$

Как мы знаем, матрицу можно привести к жордановой форме:  $A = TJT^{-1}$ .

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & J(\mu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\xi) \end{pmatrix}$$

Давайте посчитаем функцию от матрицы  $A$ :

$$f(A) = f(TJT^{-1}) = T \begin{pmatrix} f(J(\lambda)) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(J(\mu)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(J(\xi)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Посмотрим на блок высшего уровня. Он состоит из клеток:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & K_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & K_k \end{pmatrix}, \text{ где } K_i - \text{жорданова клетка.}$$

Тогда  $f(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(K_1) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & f(K_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & f(K_{ind}) \end{pmatrix}$

Посмотрим ситуацию для одной клетки.  $J_k = \lambda E + I_k$ .

$$(\lambda E + I_k)^m = \sum_{j=0}^m C_m^j \lambda^{m-j} (I_k)^j$$

Теперь мы можем показать соответствующую матрицу (туда была добавлена  $t$ ):

$$J_k^m t^m = \begin{pmatrix} \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2}t^m & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3}t^m & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}\lambda^{m-k+1}t^m \\ & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \lambda^m t^m & \ddots & & & & 0 \\ & & \lambda^m t^m & \ddots & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & & & & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda^m t^m & m\lambda^{m-1}t^m & \lambda^m t^m & \\ & & & & & & \lambda^m t^m & & \end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим  $f(J_k t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_k^m t^m =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \lambda^m & t \sum_{m=1}^{\infty} c_m m (\lambda t)^{m-1} & \frac{t^2}{2!} \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1) (\lambda t)^{m-2} & \frac{t^3}{3!} \sum_{m=3}^{\infty} c_m m(m-1)(m-2) (\lambda t)^{m-3} & \dots \\ & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \end{pmatrix}$$

У ряда мы можем брать производную сколько угодно раз (факт из математического анализа) (от функции в которую подставлен  $\lambda t$ )

Откуда наша страшная формула равна  $f(\lambda t) = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & \frac{t}{1!}f'(\lambda t) & \frac{t^2}{2!}f^{(2)}(\lambda t) & \dots & \dots \\ 0 & f(\lambda t) & \frac{t}{1!}f'(\lambda t) & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}$

**Пример:**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f'(J_k t) = -\sin \lambda t$$

$$\cos(J_4 t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) & \frac{t^3}{3!}(\sin \lambda t) \\ \vdots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) & \frac{t^2}{2!}(-\cos \lambda t) \\ \vdots & \ddots & \cos \lambda t & \frac{t}{1!}(-\sin \lambda t) \\ 0 & \dots & \dots & \cos \lambda t \end{pmatrix}$$

## 2 Тензоры.

### 2.1 Линейные формы (функционалы). Сопряженное (дуальное) пространство. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования координат.

**def:**  $V$  - линейное пространство над полем  $K$ ,  $f : V \rightarrow K$  - линейная:

$$\forall \lambda \in K : \forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$$

Такое  $f$  называется линейной формой или функционалом.

**Примеры:**

1.  $\bar{b} = const : \forall \bar{a} : \in V_3 : f(\bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b})$  - очевидно линейная форма
2.  $A_{n \times n} : f(A) = tr(A)$  - очевидно линейная.
3.  $p \in P, t_0 \in k$  фикс.  $f(p) = \frac{p^{(m)}t_0}{m!}$  - линейная форма.
4.  $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$  - бесконечномерное линейное пр-во.  $\delta(f) = f(0)$  — дельта-функция Дирака.

$f_1, f_2$  - линейные формы. Введем операции:

1. **Сложение:**  $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$
2. **Умножение на скаляр:**  $(\lambda f_1)(v) = \lambda f_1(v)$

Очевидно существует ноль и противоположные. Откуда выполнены аксиомы 1-8, откуда линейное пространство.

$V^* = \{f : V \rightarrow K \text{ - линейная форма}\}$  - называется сопряженным пр-во к  $V$  или дуальное.

Возьмем  $V$ , зафиксируем  $e_1, \dots, e_n$  - базис.

$\forall X \in V : X \in \sum_{i=1}^n x_i e_i = x^i e_i$  - вспоминаем правило Эйнштейна из первого семестра. Тогда:

$$X \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x$$

$f(X) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i a_i$ , где  $f(e_i) = a_i \in K$ .  $f(X) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ .

$f \leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n)$  строка.  $V^* = (K^n)^T$ .

Откуда  $\dim V^* = n$ . Это взаимнооднозначное соответствие, оно очевидно линейно, откуда это изоморфизм.

То есть теперь на самом деле функции описываются строками — значениями на базисных векторах.

**Пример:**

Возьмем и посмотрим на скалярное произведение в  $V_3$ ,  $\bar{b} = const$ .  $\forall X \in V_3, f(\bar{X}) = (\bar{X}, \bar{b})$ .



$$f(\bar{i}) = (\bar{i}, \bar{b}) = b_1, f(\bar{j}) = (\bar{j}, \bar{b}) = b_2, f(\bar{k}) = (\bar{k}, \bar{b}) = b_3$$

$$\bar{X} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

$$f(\bar{X}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \text{ у нас строка } f \leftrightarrow (b_1, b_2, b_3)$$

**def:**  $V$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис.

$\forall x \in V : w^i(x) = x^i$  —  $i$ -ая координата вектора  $x$  относительно базиса  $e$ .

$w^i$  называется координатной функцией.

Не трудно заметить, что  $w^i$  — линейная форма  $\in V^*$ .

### Теорема 1: (о базисе $V^*$ )

Доказать  $w^1, \dots, w^n$  — базис  $V^*$ .

**Доказательство:**

Докажем порождаемость:

$\forall f \in V^* : \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i$ , где  $a_i \in K$  — порождаемое

Докажем линейную независимость, показав единственность разложения нуля:

$0 = \alpha_i w^i$ , где  $\alpha_i \in K$ . Посмотрим на  $\forall x \in V : \alpha_i w^i(x) = 0$ .

Пусть  $x = e_j$  для  $j = 1, \dots, n$ . Как мы знаем, для  $i \neq j : w^i(e_j) = 0$ . Тогда  $\alpha_i w^i(e_j) = \alpha_j = 0$ ,  $\forall j \Rightarrow$  лин. независим.

Q.E.D.

**Следствие:**  $w^i$  координатные формы относительно базиса  $e \Rightarrow \forall f \in V^* : f = a_i w^i$ , т.е  $a = (a_1, \dots, a_n)$  координаты  $f$  в базисе  $w = (w^1, \dots, w^n)$  пространства  $V^*$ .

**Доказательство:**

$$\forall f \in V^*, \forall x \in V : f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i = (a_i w^i)(x) \Leftrightarrow f = a_i w^i.$$

Q.E.D.

**def:**  $w^1, \dots, w^n$  называется сопряженным (дуальным) к базису  $e$  пространства  $V$ .

Очевидно  $w^j(e_i) = \delta_j^i$ .

### Теорема 2:

$\forall$  базиса  $w^1, \dots, w^n$  пространства  $V^*$ .

$\exists$  базис  $e'_1, \dots, e'_n$  пространства  $V$  такой, что  $w'$  базис, сопряженный к  $e'$ . То есть  $w'^i$  координаты формы относительно  $e'$ .

**Доказательство:**

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис  $V$ . Тогда, как мы говорили ранее:  $w^1, \dots, w^n$  координатные функции относительно  $e$ , базис  $V^*$  сопряженный к  $e$ .

Возьмем  $w'$ . Так как он базис и  $w$  базис, то:

$$w' = wT_{w \rightarrow w'}$$

$(T_{w \rightarrow w'})^T = S = (S_j^i)_{n \times n}$ . Заметим, что  $S$  невырожденная, т.к.  $T$  матрица перехода. Строки матрицы  $S$  — это координаты элементов нового базиса  $w'$  в старом базисе  $(w)$ .

$$(w'^1, \dots, w'^n) = (w^1, \dots, w^n)T_{w \rightarrow w'}$$

Давайте все транспонируем:

$$\begin{pmatrix} w'^1 \\ \vdots \\ w'^n \end{pmatrix} = (T_{w \rightarrow w'})^T \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

Пусть  $S^{-1} =: T = (t_j^i)_{n \times n}$  — невырожденная, то если думать о ней как о  $T_{e \rightarrow e'}$ , получим, что  $e' = eT$  базис в пр-ве  $V$ .

Осталось показать, что  $w'$  будет сопряженным к  $e'$ , т.е. показать  $w'^i(x) = x'^i$ ,  $x = x'^i e'_i$ , для всех  $x \in V$ . Тк  $w'^i$  — линейная форма, то:

$$w'^i(x'^i e'_j) = x'^j w'^i(e'_j)$$

Теперь, давайте заметим, что  $w'^i = S_k^i w^k$ ,  $e'_j = t_j^m e_m$ . Откуда

$$w'^i(e'_j) = S_k^i w^k(t_j^m e_m) = S_k^j t_j^m w^k(e_m) = S_m^i t_j^m = (ST)_j^i =$$

Q.E.D.

**Следствие.**  $e, e'$  базисы  $V$ ,  $w, w'$  соответствующие сопряженные базисы к  $e, e'$  в  $V^*$ .

$$T = T_{e \rightarrow e'}, S = T^{-1}$$

$\Rightarrow \forall x \in V : \forall f \in V^* : x' = Sx, a' = aT$ , где  $a$  — разложение  $f$  в базисе.

**Доказательство:**

$$T = T_{e \rightarrow e'} \text{ и мы уже знаем, что } x' = T_{e' \rightarrow e}x = Sx$$

$(T_{w \rightarrow w'})^T = S$ . Как мы знаем из матрицы перехода:

$$a^T = T_{w \rightarrow w'}(a')^T$$

Откуда:

$$a = a'(T_{w \rightarrow w'})^T = a'S$$

А уже отсюда получаем, что  $a' = aS^{-1} = aT$ .

Q.E.D.

**Замечание от Славы.** Очень удобно менять базис, когда у нас один из базисов канонический. А также, зная матрицу перехода  $T_{w \rightarrow w'}$  мы уже знаем матрицу перехода из  $T_{e \rightarrow e'} = ((T_{w \rightarrow w'})^T)^{-1}$

Преобразование координат, согласованных по тому же закону, что и базис:  $a' = aT$

Преобразование координат, согласованных по противоположному закону:  $x' = Sx$

**def:** Преобразование координат векторов пространства  $V$  происходит по закону, противоположному преобразованию базисов — называется контрвариантным, а координаты векторов пространства  $V$  называются контрвариантами (индексы координат пишутся сверху).

**def:** Преобразование координат векторов пространства  $V$  происходит по тому же закону, что преобразование базисов в пространстве  $V$  (т.е. согласованно) называется ковариантным преобразованием. Координаты векторов пространства  $V^*$  называется ковариантным (индексы пишутся внизу).

Позамечаем интересные факты:

$\forall f \in V^* \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n), a_j = f(e_j)$  - каждой функции, как и говорилось ранее, на заданном базисе, я могу сопоставить  $a$ . Поэтому возьму  $n$  функций и векторов, и захочу посчитать значение каждой функции в каждой точке :

$$\forall f^1, \dots, f^n \in V^* : f^j \xleftrightarrow{w} a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in V : x_i \xleftrightarrow{e} x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$$

Хочу посчитать вот такую вот страшную матрицу (значение каждой функции в каждой точке):

$$\begin{aligned} (f^j(x_i))_{n \times n} &= \begin{pmatrix} f^1(x_1) & f^1(x_2) & \dots & f^1(x_n) \\ f^2(x_1) & f^2(x_2) & \dots & f^2(x_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f^n(x_1) & f^n(x_2) & \dots & f^n(x_n) \end{pmatrix} = f^j(x_i) = a^j x_i = \\ &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ddots & \ddots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & \ddots & \ddots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \cdot (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) - \text{лаконичная запись!} \end{aligned}$$

Интересный факт, который идет из такого произведения:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \cdot (e_1 e_2 \dots e_n) = E$$

**def:**  $V^{**} = (V^*)^*$  дважды сопряженное пространство.

$\forall f \in V^*$ . Пусть  $x \in V$ :

" $x$ "( $f$ ) =  $f(x)$ . " $x$ " :  $V^* \rightarrow K$ .

$\forall \lambda \in K : \forall f^1, f^2 \in V^*$

$${}''x''(\lambda f^1 + f^2) = (\lambda f^1 + f^2)(x) = \lambda f^1(x) + f^2(x) = \lambda_1 {}''x''(f^1) + {}''x''(f^2)$$

$\Rightarrow {}''x''$  линейное отображение  $\Rightarrow {}''x'' \in (V^*)^*$

Дальше у  ${}''x''$  будут упускаться :))

### Теорема 3 (О естественном изоморфизме)

Естественный - не зависит от введения базиса.

$$V \cong V^{**}$$

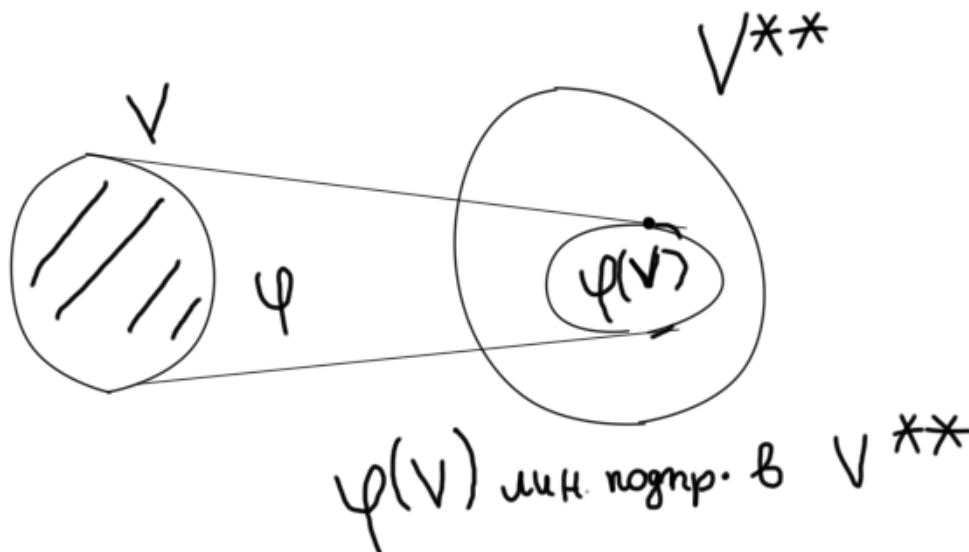
**Доказательство:**

$\forall x \in V \rightarrow {}''x'' \in V^{**}$ . Назовем это отображение  $\varphi$ .

Покажем, что наше взаимоднозначное сопоставление линейно.

$$x_1 + \lambda x_2 \in V : x_1 \rightarrow {}''x_1'', x_2 \rightarrow {}''x_2''$$

$\forall f \in V^* : {}''x_1 + \lambda x_2''(f) = f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = {}''x_1''(f) + \lambda {}''x_2''(f)$ . Откуда  $\varphi$  линейно.



Покажем, что  $\varphi$ , это изоморфизм.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  базис  $V$ . Им соответствуют  ${}''e_1'', \dots, {}''e_n''$ . Покажем, что это базис в  $V^{**}$ :

Мы знаем, что  $\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V = n$ . Откуда достаточно показать, что  ${}''e_1'', \dots, {}''e_n''$  - линейно независимы. Для этого покажем единственность разложения нуля.

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i {}''e_i''(w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w^j(e_j) = \alpha_j \Rightarrow \text{линейно независимы, откуда базис.}$$

Откуда отображение  $\varphi$  это изоморфизм.

Q.E.D.

Как мы только что поняли:  $x \in V \leftrightarrow {}''x'' \in V^{**}$  - изоморфизм.  $f \in V^*, x \in V$ .

$$x(f) = f(x) = x^i a_i = w^i(x) a_i = x(w^i) a_i = x^i a_i = x^i f(e_i) = x^i e_i(f)$$

$e$  и  $w$  взаимно сопряж.

$$x = x^i e_i, w^i(x) = x^i, \text{ где } x \in V$$

$$e_j(f) = f(e_j) = a_j(f \in V^*), e_j \in V^{**} - \text{коорд. формы относительно базиса } w^i.$$

Я категорически не помню для чего Кучерук это написала, напомните мне пж.

**Пример:**

$\mathcal{A}$  - о.п.с,  $A$  - диагонализируема.

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

$w^1, \dots, w^n$  сопряж. базис к  $v$

$$\Rightarrow \forall x \in V : w^j(x) = x^i : x^i v_j = x$$

## 2.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица тензоров.

**def:** Есть  $V, V^*$  и  $p, q \in N$ .

**Тензором** типа  $(p, q)$  ( $p$ -раз ковариантным,  $q$ -раз контрвариантным) называется полилинейная функция  $f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$ .  $p, q$  называются **валентностями** тензора,  $r = (p + q)$  ранг тензора.

Если  $r = 0, f = const$ . Если тензор  $(p, 0)$  - **ковариантный** тензор валентности  $p$ . Если тензор  $(0, q)$  - **контрвариантный** тензор валентности  $q$ . Если  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$  - тензор смешанного типа.

$$\xi_j \in V, \eta^i \in V^*$$

$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)$  - линейно по каждому аргументу (или полилинейная)

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ ,  $w = (w^1, \dots, w^n)$  - базис  $V^*$ . Тогда сделаем похожую вещь, как когда мы считали определитель. По линейности вынесем, то есть:

$$\xi_j = \xi_j^{jk} e_{jk}; \eta^i = \eta_{im}^i w^{im}$$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q \cdot f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q})$$

То есть на самом деле наша функция задается матрицей значений на базисных векторах. Обозначим  $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, w^{i_1}, \dots, w^{i_q}) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

**def:**  $M$  - **многомерная матрица** тензора  $r = (p + q)$  мерная размерности  $n$ .

**Замечание:** Если говорить программистским языком, то наша матрица это просто:

```
for (i1 = 1 ... n):
    for(i2 = 1 ... n):
        ...
        for(iq = 1 ... n):
            for(j1 = 1 ... n):
                ...
                for(jp = 1 ... n):
                    m[i1][i2]...[iq][j1]...[jp] = f(соответственных значений)
```

### Соглашение о записи элементов многомерной матрицы

$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \in M_{p+q}$  - многомерная матрица порядка  $n$ .  $i_k \in (1, \dots, n); j_m \in (1, \dots, m)$

Мы читаем сначала верхние индексы, потом нижние в записи

**Пример:**

$$1. r = 2 : (\alpha_j^i), (\alpha^{ij}), (\alpha_{ij})$$

1-ый индекс номер строки

2-ой индекс номер столбца

Например при  $n = 3$ :

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \text{ или } (a^{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{pmatrix}$$

$$2. r = 3 : (\alpha^{ijk}), (\alpha_k^{ij}), (\alpha_{jk}^i), (\alpha_{ijk})$$

1-ый индекс всегда строка

2-ой индекс всегда столбец

3-ий индекс всегда слой

Например при  $n = 3$ :

$$(a_{jk}^i) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11}^1 & \alpha_{21}^1 & \alpha_{31}^1 & \alpha_{12}^1 & \alpha_{22}^1 & \alpha_{32}^1 \\ \alpha_{11}^2 & \alpha_{21}^2 & \alpha_{31}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{32}^2 \\ \alpha_{11}^3 & \alpha_{21}^3 & \alpha_{31}^3 & \alpha_{12}^3 & \alpha_{22}^3 & \alpha_{32}^3 \end{array} \right)$$

$$3. r = 4 : (\alpha^{ijkm}), (\alpha_m^{ijk}), (\alpha_{km}^{ij}), (\alpha_{jkm}^i), (\alpha_{ijkm})$$

1-ый индекс всегда строка

2-ой индекс всегда столбец

3-ий индекс всегда слой

4-ый индекс всегда сечение

Например при  $n = 2$  мы имеем:

$$(a_{km}^{ij}) = \left( \begin{array}{cc|cc} \alpha_{11}^{11} & \alpha_{21}^{12} & \alpha_{12}^{11} & \alpha_{22}^{12} \\ \alpha_{11}^{21} & \alpha_{21}^{22} & \alpha_{12}^{21} & \alpha_{22}^{22} \\ \alpha_{11}^{12} & \alpha_{21}^{11} & \alpha_{12}^{12} & \alpha_{22}^{11} \\ \alpha_{11}^{22} & \alpha_{21}^{21} & \alpha_{12}^{22} & \alpha_{22}^{21} \end{array} \right)$$

$$4. r = 1 : (\alpha^i), (a_i)$$

При первой записи мы считаем, что она в столбик, а при второй считаем, что она строчка.

### Пример:

$$f : V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \bar{a}, \bar{b} : f(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi$$

$f \in T(2, 0)$ . Зафиксируем базис  $e_1, e_2, e_3$ :

$$f(a^i e_i, b^j e_j) = a^i b^j f(e_i, e_j)$$

Пусть  $e_1, e_2, e_3$  вектора, между которыми 2 угла по 60 градусов и 1 120 и  $|e_i| = 1$ .

$$\text{Тогда } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

### Вернемся в реальность.

Пусть  $f \in T(p, q) \xleftrightarrow{e, w} (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q})$ , где  $e$  - базис,  $w$  - дуально сопряженный

$$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$$

Возьмем  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  и дуальный к нему  $w' = (w'_1, \dots, w'_m)$

$$T = T_{(e \rightarrow e')}, S = T^{-1} = (T_{w \rightarrow w'}^T)$$

Замечу, что  $\xi = \xi^i e_i : \xi = T\xi' \leftrightarrow \xi^i = t_k^i \xi'^k$  и  $\eta = \eta_j w^j; \eta = \eta' S \leftrightarrow \eta_j = s_j^k \eta'_k$

Возьму  $\xi_1, \dots, \xi_p \in V$  и  $\eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$ :

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) &= \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \cdot t_{k_1}^{j_1} \xi_1^{k_1} \dots t_{k_p}^{j_p} \xi_p^{k_p} \cdot s_{i_1}^{m_1} \eta_{m_1}^1 \dots s_{i_q}^{m_q} \eta_{m_q}^1 \\ &= \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \cdot t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} \cdot s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q} \cdot \xi_1^{k_1} \dots \xi_p^{k_p} \cdot \eta_{m_1}^1 \dots \eta_{m_q}^1 \end{aligned}$$

Откуда подставив новые базисные вектора в эту формулу:

$$\alpha_{k_1, \dots, k_p}^{m_1, \dots, m_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q}$$

$j_1, \dots, j_p$  ковариантные индексы матрицы,  $i_1, \dots, i_q$  контрвариантные, откуда название тензора  $f \in T(p, q)$   $p$ -раз ковариантный,  $q$  раз контрвариантный.

**Замечание:** это формула перехода (смены базиса), потом будет очень много везде использоваться.

**2-ое определение тензора:**  $\alpha - r = p + q$  мерная матрица  $n$  - геометрический объект над пространством  $V$  ( $\dim V = n$ ), такой, что при смене базиса пространства  $V$  элементы матрицы пересчитываются по формуле:

$$\alpha_{k_1, \dots, k_p}^{m_1, \dots, m_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q}$$

(геометрический объект - независимый от выбора базиса, но согласованный с заменой базиса, т.е. после замены базиса остается тем же объектом с теми же свойствами)

Если матрицы одного порядка, то мы умеем складывать их и умножать на скаляр, есть нулевая и противоположная, откуда это линейное пространство.

Осталось показать, что эти операции не ломают второе определение (формулу перехода):

$$\begin{aligned} (\alpha + \lambda\beta)_{k_1, \dots, k_p}^{m_1, \dots, m_q} &= \alpha_{k_1, \dots, k_p}^{m_1, \dots, m_q} + \lambda\beta_{k_1, \dots, k_p}^{m_1, \dots, m_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q} + \lambda\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q} \\ &= (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} + \lambda\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}) t_{k_1}^{j_1} \dots t_{k_p}^{j_p} s_{i_1}^{m_1} \dots s_{i_q}^{m_q} \end{aligned}$$

Откуда корректно.

**Замечание:** в дальнейшем мы будем называть формулу перехода - свойством линейного пространства.

То есть теперь наше линейное пространство сохраняет заданное свойство.

Заметим, что мы получили равносильность первого и второго определения.

## 2.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свертка тензоров.

**def:**  $\alpha \in T(p_1, q_1), \beta \in T(p_2, q_2)$ . Тогда произведением тензоров называется тензор  $\gamma \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$  :

$$\gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, k_1, \dots, k_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, m_1, \dots, m_{q_2}} := \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \beta_{k_1, \dots, k_{p_2}}^{m_1, \dots, m_{q_2}}$$



Проверим корректность, то есть то что выполняется свойство тензора:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{p_1}, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{q_2}} &= \alpha_{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \cdot \beta_{\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{p_2}}^{\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{q_2}} = \\
 &= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} t_{\tilde{j}_1}^{j_1} \dots t_{\tilde{j}_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{\tilde{i}_1} \dots s_{i_{q_1}}^{\tilde{i}_{q_1}} \cdot \beta_{k_1, \dots, k_{p_2}}^{m_1, \dots, m_{q_2}} t_{\tilde{k}_1}^{k_1} \dots t_{\tilde{k}_{p_2}}^{k_{p_2}} s_{\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_1} \dots s_{\tilde{m}_{q_2}}^{\tilde{m}_{q_2}} = \\
 &= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, k_1, \dots, k_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, m_1, \dots, m_{q_2}} \cdot t_{\tilde{j}_1}^{j_1} \dots t_{\tilde{j}_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{\tilde{i}_1} \dots s_{i_{q_1}}^{\tilde{i}_{q_1}} \cdot t_{\tilde{k}_1}^{k_1} \dots t_{\tilde{k}_{p_2}}^{k_{p_2}} s_{\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_1} \dots s_{\tilde{m}_{q_2}}^{\tilde{m}_{q_2}}
 \end{aligned}$$

Откуда получаем, что верно, это тензор!!! ~~я устал это писать~~

Обозначается  $\gamma = \alpha \otimes \beta$ .

Произведение ассоциативно, дистрибутивно, не коммутативно

**Пример:**

Пусть  $\alpha \in T(1, 0), \beta \in T(0, 1)$ . Тогда  $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(1, 1)$ .

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ . Тогда

$$\gamma_j^i = \alpha^i \beta_j \leftrightarrow \gamma = \begin{pmatrix} \alpha^1 \beta_1 & \alpha^1 \beta_2 & \alpha^1 \beta_3 \\ \alpha^2 \beta_1 & \alpha^2 \beta_2 & \alpha^2 \beta_3 \\ \alpha^3 \beta_1 & \alpha^3 \beta_2 & \alpha^3 \beta_3 \end{pmatrix}$$

Возьмем  $\alpha \in T(p_1, q_1) \leftrightarrow f : V^{p_1} \times (V^{q_1})^* \rightarrow K$ .

Возьмем  $\beta \in T(p_2, q_2) \leftrightarrow g : V^{p_2} \times (V^{q_2})^* \rightarrow K$ .

$\xi_1, \dots, \xi_{p_1} \in V; \eta^1, \dots, \eta^{q_1} \in V^*; \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V; \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$

$\gamma = \alpha \otimes \beta \in T(p_1 + p_2, q_1 + q_2) \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow K$

$$\begin{aligned}
 t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) &= \\
 &= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, k_1, \dots, k_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, m_1, \dots, m_{q_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \cdot \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_{p_2}^{k_{p_2}} \cdot \eta_1^{i_1} \dots \eta_{q_1}^{i_{q_1}} \cdot \theta_{m_1}^1 \dots \theta_{m_{q_2}}^{q_2} = \\
 &= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) \cdot g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})
 \end{aligned}$$

Вывели формулу, по которой мы можем легко находить значения функций. Воспользуемся нашей формулой и выведем еще одну:

$f^1, \dots, f^p \in V^* = T(1, 0) - f^j : V \rightarrow K$  - линейная форма

$g_1, \dots, g_q \in V^{**} = T(0, 1) - g_i : V^* \rightarrow K$

$\gamma = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q \leftrightarrow a_{j_1}^1 \dots a_{j_p}^p b_1^{i_1} \dots b_q^{i_q} = \gamma_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}, \gamma \in T(p, q)$ .

Воспользуемся только что доказанной формулой и получим:

$$\gamma(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\xi_1) \dots f^p(\xi_p) \cdot g_1(\eta^1) \dots g_q(\eta^q)$$

Продолжим играть с этой формулой:

Пусть  $f^j = w^j$ , а  $g_i = e_i$  (сопряженные базисы), и подставим это в нашу формулу:

$$w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \in T(p, q)$$

Как мы вывели ранее:

$$\begin{aligned} w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) &= w^{j_1}(\xi_1) \dots w^{j_p}(\xi_p) \cdot e_{i_1}(\eta^1) \dots e_{i_q}(\eta^q) = \\ &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q \end{aligned}$$

Получили вот такую относительно простую формулу для базисных векторов

### Теорема (о базисе пространства тензоров типа $(p, q)$ )

Набор тензоров  $w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ , где  $j_k \in (1, \dots, n), i_m \in (1, \dots, n)$  — базис пространства  $T(p, q)$ .

#### **Доказательство:**

1. Докажем, что порождающее. Пусть  $f \in T(p, q) : \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* :$

Давайте найдем значение функции в этой точке:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \cdot \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q =$$

Выразим координаты через базис и дуальный к нему:

$$= \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} w^{j_1}(\xi_1) \dots w^{j_p}(\xi_p) e_{i_1}(\eta^1) \dots e_{i_q}(\eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} w^{j_1} \otimes \dots \otimes p_{i_q}(\xi_1, \dots, \eta^q)$$

Что мы получили? Разложение в нашем базисе с коэффициентами:  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

Откуда порождаемо.

2. Докажем, что линейно независимо. Для этого, как обычно, покажем единственность разложения нуля:

$$\gamma = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} = \mathbf{0}$$

Давайте подставим какие-то базисные векторы:

$$\begin{aligned} \gamma(e_{\tilde{j}_1}, \dots, e_{\tilde{j}_p}, w^{\tilde{i}_1}, \dots, w^{\tilde{i}_q}) &= \\ \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} w^{j_1}(e_{\tilde{j}_1}) \dots w^{j_p}(e_{\tilde{j}_p}) \cdot e_{i_1}(w^{\tilde{i}_1}) \dots e_{i_q}(w^{\tilde{i}_q}) \end{aligned}$$

Заметим, что каждая из  $w^{j_k}(e_{\tilde{j}_k}) = \delta_{j_k}^{\tilde{j}_k}$  и  $e_{i_k}(w^{\tilde{i}_k}) = \delta_{i_k}^{\tilde{i}_k}$ , поэтому получим, что:

$$= \alpha_{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_p}^{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_q}$$

Но с другой стороны это ноль (тк мы смотрим на разложение тензора, выдающего всегда ноль (нуля)). Тогда получаем, что все  $\alpha = 0$ , откуда единственно

Q.E.D.

**Следствие:** элементы матрицы тензора это его координаты в базисе пространства  $T(p, q) : w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

С одной стороны элементы матрицы - значения на базисном наборе, а с другой стороны коэффициент при базисном элементе.

**Замечание.** Канонический базис состоит из тензоров, в матрицах которых есть ровно одна единица, а все остальные значения нули.

**def:** Пусть  $\alpha \in T(p, q) : p, q \geq 1$ , тогда тензор  $\beta$  называется сверткой тензора  $\alpha$ , если

$$\beta_{j_1, \dots, \widehat{j_m}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_{m-1}, \mathfrak{e}, j_{m+1}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{k-1}, \mathfrak{e}, i_{k+1}, \dots, i_q}$$

Причем  $\widehat{i_k}$  - нет индекса на этой позиции.

**Замечание:** Этого не говорили на лекции, но  $k, m$  фиксированы. Отсюда я бы хотел написать похожее определение, которое может быть более понятным:

$$\beta_{j_1, \dots, j_{m-1}, j_{m+1}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_{m-1}, \mathfrak{e}, j_{m+1}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{k-1}, \mathfrak{e}, i_{k+1}, \dots, i_q}$$

(Причем тут скрыта сумма в правой части)

Получили, что  $\beta \in T(p-1, q-1)$ , но нам осталось проверить свойство:

$$\begin{aligned} \beta_{\widetilde{j}_1, \dots, \widetilde{j_m}, \dots, \widetilde{j_p}}^{\widetilde{i}_1, \dots, \widetilde{i_k}, \dots, \widetilde{i_q}} &= \alpha_{\widetilde{j}_1, \dots, \mathfrak{e}, \dots, \widetilde{j_p}}^{\widetilde{i}_1, \dots, \mathfrak{e}, \dots, \widetilde{i_q}} = \\ &= \alpha_{j_1, \dots, j_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_k, \dots, i_q} \cdot t_{\widetilde{j}_1}^{j_1} \dots t_{\mathfrak{e}}^{j_m} \dots t_{\widetilde{j_p}}^{j_p} \cdot s_{i_1}^{i_1} \dots s_{i_k}^{\mathfrak{e}} \dots s_{i_q}^{\widetilde{i_q}} = \end{aligned}$$

Что у нас происходит с  $\mathfrak{e}$ ? Мы умножаем  $j_m$  строчку  $T$  на  $i_k$  строчку  $S$ , откуда  $t_{\mathfrak{e}}^{j_m} \cdot s_{i_k}^{\mathfrak{e}} = (TS)_{i_k}^{j_m} = \delta_{i_k}^{j_m}$ . Тогда в нашей сумме сохранится только суммы, когда  $i_k = j_m = \mathfrak{e}$ :

$$= \alpha_{j_1, \dots, \mathfrak{e}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \mathfrak{e}, \dots, i_q} t_{\widetilde{j}_1}^{j_1} \dots \widehat{t_{\mathfrak{e}}^{j_m}} \dots t_{\widetilde{j_p}}^{j_p} \cdot s_{i_1}^{i_1} \dots \widehat{s_{i_k}^{\mathfrak{e}}} \dots s_{i_q}^{\widetilde{i_q}}$$

(переменные с крышками как бы пропали)

Откуда получили то, что нужно.

**Замечание:** Свертка может происходить по нескольким парам символов.

**Замечание:** Если в результате свертки получалась константа, то такая свертка называется полной.

## 2.4 Транспонирование тензора. Симметричные, кососимметричные тензоры.

Пусть  $\alpha \in T(2, 0)$ ,  $\alpha = (\alpha_{ij})$ , мы умеем ее транспонировать —  $\alpha^T = (a_{ij})^T = \beta = (\beta_{ij})$ , причем  $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ . Это называется транспонированием 2-мерной матрицы. Казалось бы, можно транспонировать многомерную матрицу, но нет так нельзя

Для тензоров транспонирование происходит только по одному типу индексов либо по нижним, либо по верхним.

Пусть  $\beta = \alpha^T$ .  $\beta_{j_1 j_2} = \alpha_{j_2 j_1}$ . На самом деле случилась перестановка. Теперь для тензора произвольного типа

**def:**  $\alpha \in T(p, q)$ ,  $p \geq 2$ . Пусть  $\sigma$  это перестановка из  $p$  чисел  $(1, 2, 3, \dots, p)$ .  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

$\beta = \sigma(\alpha)$ .  $\beta$  получен транспонированием (перестановкой  $\sigma$ ) по нижним индексам из тензора  $\alpha$  по перестановке  $\sigma$ , если

$$\beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q}$$

**Замечание.** Аналогично определяется транспонирование по верхним индексам.

**Замечание.** При транспонировании по нижним индексам верхние индексы никак не задействованы.

**Замечание.** В дальнейшем мы будем рассматривать транспонирования по нижним индексам. Все, что будет доказано для транспонирования и по нижним индексам будет выполнено и для транспонирования по верхним индексам.

Как и было раньше нам надо проверить корректность определение тензора (то самое свойство).

$\forall \sigma =$  конечное число транспозиций двух элементов (доказывали в прошлом семестре). То есть достаточно проверить корректность определения для транспонирования при котором переставляются только 2 индекса.

$\beta_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = \alpha_{j_1 \dots \Delta \dots * \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$ , где  $*$  и  $\Delta$  - наша перестановка.

$$\beta_{m_1 \dots m_* \dots m_{\Delta} \dots m_p}^{l_{k_1 \dots k_q}} = \alpha'_{m_1 \dots m_{\Delta} \dots m_* \dots m_p}^{l_{k_1 \dots k_q}} = \alpha_{j_1 \dots \Delta \dots * \dots j_p}^{i_1 \dots i_1} t_{m_1}^{j_1} \dots t_{m_{\Delta}}^{j_{\Delta}} \dots t_{m_*}^{j_*} \dots t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_q}^{k_q}$$

Заметим, что  $\alpha_{j_1 \dots \Delta \dots * \dots j_p} = \beta_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$ , переставим множители  $t_{m_{\Delta}}^{j_{\Delta}}$ ,  $t_{m_*}^{j_*}$  и получим наше определение.

**Теперь посмотрим на это с функциональной стороны:**

$$\alpha \in T(p, q) \leftrightarrow f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K, \beta = \sigma(\alpha) \leftrightarrow g : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K$$

$$\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* :$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$$

Немного переставим внутри и получим:

$$= \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}}^{i_1 \dots i_q} \xi_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1}} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_{\sigma_p}} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = f(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

То есть:

$$g = \sigma(f) \leftrightarrow g(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

**Пример:**

Пусть  $\alpha \in T(3, 0)$ ,  $\alpha = f^1 \otimes f^2 \otimes f^3$ ,  $f^j \in V^* = T(1, 0)$ ,  $\sigma = (312)$ ,  $\beta = \sigma(\alpha)$ .

$\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in V$

$$\beta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \alpha(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = f^1 \otimes f^2 \otimes f^3(\xi_3, \xi_1, \xi_2) = f^1(\xi_3) \cdot f^2(\xi_1) \cdot f^3(\xi_2)$$

И из этого примера следует формула:

Если  $\alpha \in T(p, q) : \alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \gamma$ ,  $\beta = \sigma(\alpha)$ ,  $p \geq 2$ ,  $\gamma \in T(0, q)$

$$\beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \gamma = \sigma^{-1}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p) \otimes \gamma$$

На практике транспонирование многомерной матрицы тензора осуществляется:

### МЕТОДОМ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ СЛОЯМИ:

Для этого разобьем нашу  $\sigma$  на транспозиции и будем транспонировать по ним по очереди:

Для этого фиксируется набор верхних индексов, и набор нижних индексов, за исключением двух нижних. Таким образом из многомерной матрицы тензора извлекается двумерная матрица, которая называется **слой**.

$$\alpha_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$$

Здесь я фиксирую все  $i$ -шки, а  $j$  все фиксированными кроме  $*$  и  $\Delta$ . Получили двумерную матрицу порядка  $n$  - **слой**.

$$(\alpha_{j_1 \dots * \dots \Delta \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})^T = \bar{\alpha}$$

(просто обычная транспозиция квадратной двумерной матрицы).

И после транспонирования слой  $\bar{\alpha}$  размещается обратно в исходную матрицу на те же позиции. Таким образом, в тензоре будут произведена перестановка (транспозиция) двух индексов. Назовем такую операцию  $\tau$ .

Тогда наша последовательность действий выглядит так:

$$\sigma \xrightarrow{\tau_1} \bar{\sigma} \xrightarrow{\tau_2} \dots \rightarrow (1, 2, \dots, n)$$

**Пример:**

$$n = 4, \alpha \in T(3, 0), \sigma = (312) \rightarrow \bar{\sigma} = (132) \rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = (123)$$

1) Проведем первую операцию. Так как у нас зафиксирована 3-я координата, то на самом деле нам надо лишь транспонировать 3 матрицы слоев. На рисунке снизу изображены все 4-и слоя и матрицы  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Поэтому для операции транспонирования я должен взять каждую из матриц  $A_i$  и транспонировать ее

$$\alpha = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \right)$$

2) Проведем вторую операцию. В этот раз у нас зафиксирована 1-ая координата(строка). Зафиксируем  $i = 1$  и выпишем соответствующий ей слой:

$$\widetilde{\alpha} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \text{Фикс. } i=1 & & & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \\ k=4 \end{array} \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Транспон.}} \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \end{array} \right)$$

А теперь возвращаем наш слой обратно. На рисунке показано, как мы это делаем:

$$\widetilde{\alpha} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \end{array} \right)$$

Продельываем то же самое с остальными 3-емя слоями и получаем протранспонированную матрицу тензора.

**Замечание:** Если в матрице тензора много нулей, то проще пересчитать элементы по формуле.

**Замечание:**  $\beta = \sigma(\alpha), \sigma = (kij)$ .  $\alpha_{ikj} = \beta_{kij}$  — неверно!!! Это ошибка!!!

Операция транспонирования - линейная операция, очевидно из определения.

$\sigma = \tau_k \cdot \dots \tau_1$  произведение перестановок ассоциативно и не коммутативно, откуда операция транспозиции тензора аналогично ассоциативна и не коммутативна.

**def:**  $\alpha \in T(p, q)$  называется симметричным тензором по нижним индексам, если  $\forall \sigma$  перестановки  $\sigma(\alpha) = \alpha$

**def:**  $\alpha \in T(p, q)$  называется кососимметричным тензором по нижним индексам, если  $\forall \sigma : \sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha$ , где  $\varepsilon$  знак перестановки. (смотрите конспект первого семестра, раздел 6)

Поговорим, про равносильные определения:

$$\alpha \text{ симметричный} \Leftrightarrow \sigma : \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q} \Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha_{\dots j_k \dots j_m \dots}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{\dots j_m \dots j_k \dots}^{i_1, \dots, i_q}$$

$$\alpha \text{ кососимметричный} \Leftrightarrow \sigma : \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q} \Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha_{\dots j_k \dots j_m \dots}^{i_1, \dots, i_q} = -\alpha_{\dots j_m \dots j_k \dots}^{i_1, \dots, i_q}$$

Теперь про функциональные:

$$\alpha - \text{симметричный} \Leftrightarrow \forall \sigma : \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* :$$

$$\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = \alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots)$$

$$\alpha - \text{кососимметричный} \Leftrightarrow \forall \sigma : \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V; \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* :$$

$$\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha(\dots, \xi_m, \dots, \xi_k, \dots) = -\alpha(\dots, \xi_k, \dots, \xi_m, \dots)$$

**Утверждение.**  $\alpha$  кососимметричный  $\Leftrightarrow \forall (k, m) : \forall \xi : \alpha(\dots, \xi, \dots, \xi, \dots) = 0$

**Замечание:**  $\alpha \in T(p, q)$  — кососимметричная. Тогда

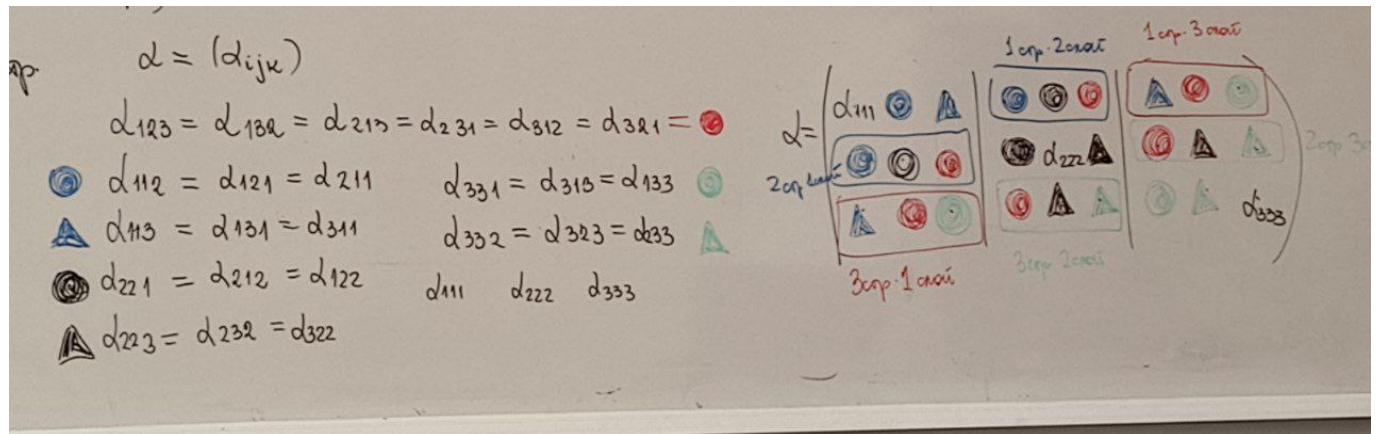
1. Если  $p > n \Rightarrow \alpha \equiv 0$ , тк обязательно в наборе  $j_1, \dots, j_p$  будут одни индексы, а из этого следует, что все компоненты будут нулями
2. Если  $p = n \Rightarrow$  ненулевые элементы матрицы  $\alpha$  будут только те, у которых набор нижних индексов  $j_1, \dots, j_n =$  перестановка от 1 до  $n$ . Все остальные будут нулями, тк совпадают индексы:

$$\alpha_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{1 \dots n}^{i_1^* \dots i_q}$$

**Примеры:**

1.  $V_3, \alpha(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}) \in T(2, 0)$  — скалярное произведение — симметрично.
2.  $V_3, \alpha(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \in T(3, 0)$  — смешанное произведение — кососимметрично.

3.  $n = 3, \alpha \in T(3, 0)$ ,  $\alpha$  - симметрично  $\alpha = (\alpha_{ijk})$ . Тогда  $\alpha_{123} = \alpha_{132} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{321}$ ,  $\alpha_{112} = \alpha_{121} = \alpha_{211}, \dots$  См рисунок



он перерисовывается, когда у славы руки дойдут



## 2.5 Операции симметрирования и альтернирования тензора.

кососимметричный = антисимметричный = альтернированный.

**def:**  $\alpha \in T(p, q), p \geq 2$ .  $\text{Sim } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$ , где  $S_p$  - множество всех перестановок  $(1, \dots, p)$ .

Такая операция называется симметрированием тензора по нижним индексам.

**def:**  $\text{Alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(\alpha)$  - операция альтернирования тензора по нижним индексам.

**Замечание:** по верхним аналогичным.

Позамечаем некоторые интересные факты

1.  $\text{Sim } \alpha \in T(p, q), \text{Alt } \alpha \in T(p, q)$
2.  $\text{Sim}, \text{Alt}$  — линейные операции, так как  $\sigma$  - линейные операторы.
3. если  $\alpha$  симметричный  $\Rightarrow \text{Sim } \alpha = \alpha$
4. если  $\alpha$  кососимметричный  $\Rightarrow \text{Alt } \alpha = \alpha$
5.  $\text{Sim}$  и  $\text{Alt}$  можно проводить не по всему набору (нижних) индексов. В этом случае, тот набор по которому происходит симметрирование (альтернирование) заключается в круглые (квадратные) скобки. Индексы, не участвующие в операндах выделяются вертикальными чертами. При этом квадратные и круглые скобки должны быть только одни.

### Теорема.

$\alpha \in T(p, q), p \geq 2$ .

$\forall \sigma : \text{Sim } \sigma(\alpha) = \sigma(\text{Sim } \alpha) = \text{Sim } \alpha, \text{Alt } (\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{Alt } \alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \text{Alt } \alpha$

### Доказательство:

Будем доказывать для  $\text{Alt}$  для  $(\text{Sim}$  упр).

$$\text{Alt } (\sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \tau(\sigma(\alpha))$$

Пусть  $r\sigma = \rho$ . Заметим, что  $\rho$  пробегает все  $P$ . Тогда заменим и получим:

$$= \frac{(-1)^{\varepsilon(\sigma)}}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\rho)} \rho(\alpha)$$

Теперь вторая часть:

$$\sigma(\text{Alt } \alpha) = \sigma \left( \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \tau(\alpha) \right)$$

Как мы знаем транспонирование это линейная операция. Сделаем замену на  $\rho$ , как в прошлой части и получим:

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \sigma(\tau(\alpha)) = \frac{(-1)^{\varepsilon(\sigma)}}{p!} \sum_{\rho \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \rho(\alpha)$$

Получили то, что хотели.

Q.E.D.

**Следствие 1.**  $\forall \alpha \in T(p, q)$ ,  $\text{Alt } \alpha$  - кососимметричный тензор,  $\text{Sim } \alpha$  - симметричный тензор. Очевидно по определению.

**Следствие 2.**  $\alpha$  кососимметричный  $\Leftrightarrow \text{Alt } \alpha = \alpha$  и  $\alpha$  симметричный  $\Leftrightarrow \text{Sim } \alpha = \alpha$

**Доказательство:**

В правую сторону очевидно по определению. Докажем в левую сторону.

Пусть  $\alpha = \text{Alt } \alpha$ . Тогда  $\sigma(\text{Alt } \alpha) = \sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \text{Alt } \alpha = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha$ . Откуда  $\sigma(\alpha) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha$ . Откуда кососимметрично по определению.

Q.E.D.

**Следствие 3.**  $\text{Alt } (\text{Alt } \alpha) = \text{Alt } \alpha$ ,  $\text{Sim } (\text{Sim } \alpha) = \text{Sim } \alpha$ ,  $\text{Alt } (\text{Sim } \alpha) = 0$ ,  $\text{Sim } (\text{Alt } \alpha) = \text{Sim } \alpha$

Очевидно по определению.

**Замечание.** Теорема и следствия верны для неполного набора индексов.

**Замечание.**  $T(p, q)^{\text{кососим}}$  и  $T(p, q)^{\text{сим}}$  - линейные пространства в  $T(p, q)$ .

**Замечание.**  $T(p, q)^{\text{кососим}} \oplus T(p, q)^{\text{сим}} = T(p, q)$

## 2.6 $p$ -формы. Внешнее произведение $p$ форм.

**def:**  $f \in T(p, 0)$  — ковариантный тензор валентности  $p$  — полилинейная форма.

$f \in T(p, 0)$  и полилинейная антисимметричная форма = ковар. тензор валентности  $p$  и ко-сосимметричный. В таком случае  $f$  называется  $p$ -формой, или внешней формой, или внешней формой порядка  $p$ .

$\Lambda^p V^* = \{f \in T(p, 0) : \text{Alt } f = f\}$  — линейное подпространство тензоров — линейное пространство  $p$ -форм.

$$p = 1 : \Lambda^1 V^* \equiv V^*.$$

**def:**  $g \in T(0, q)$  — контрвариантный тензор валентности  $q$  или поливектор.

$g \in T(0, q)$  — антисимметричный поливектор —  $q$ -вектор

$V^q V = \{g \in T(0, q) : \text{Alt } g = g\}$  — линейное пространство  $q$ -векторов.

**Замечание:** все, что мы выведем для  $p$ -форм, будет верно и для  $q$ -форм

**def:**  $f^1 \in \Lambda^{p_1} V^*, f^2 \in \Lambda^{p_2} V^*$   $p_1$  и  $p_2$  формы. Введем новую операцию, такую:

$$f^1 \wedge f^2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt } (f^1 \otimes f^2)$$

Такая операция называется внешним произведением  $p$ -форм.

**Свойства внешнего произведения:**

$$1. f^1 \wedge f^2 = (-1)^{p_1 \cdot p_2} \cdot f^2 \wedge f^1$$

**Доказательство:**

$$f^1 \wedge f^2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} (\text{Alt } f^1 \otimes f^2)$$

Заметим, что тогда должно быть выполнено:

$$\text{Alt } (f^1 \otimes f^2) = (-1)^{p_1 \cdot p_2} \text{Alt } (f^2 \otimes f^1)$$

Введем больше формальности в доказательства. Разложим  $f^1, f^2$  по базису пространства тензоров. Получим:

$$f^1 \leftrightarrow (a_{i_1, \dots, i_{p_1}}), f^2 \leftrightarrow (b_{j_1, \dots, j_{p_2}})$$

Тогда давайте выпишем:

$$f^1 \otimes f^2 \leftrightarrow \gamma_{i_1 \dots i_{p_1} j_1 \dots j_{p_2}} = \alpha_{i_1 \dots i_{p_1}} \beta_{j_1 \dots j_{p_2}}$$

$$f^2 \otimes f^1 \leftrightarrow \theta_{j_1 \dots j_{p_2} i_1 \dots i_{p_1}} = \beta_{j_1 \dots j_{p_2}} \alpha_{i_1 \dots i_{p_1}}$$

Тогда

$$\text{Alt } (\gamma) = \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1 + p_2}} \sigma(\gamma) (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \quad \text{Alt } (\theta) = \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\tau \in S_{p_1 + p_2}} \tau(\theta) (-1)^{\varepsilon(\tau)}$$

Не трудно присмотреться, что в альтернировании второго, мы дополнительно перестановку из  $(i_1, \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p_2})$  в  $(j_1, \dots, j_{p_2}, i_1, \dots, i_{p_1})$ , обозначим ее  $ab$  (Заметим, что мы тратим

$p_1 \cdot p_2$  транспозиций). То есть на самом деле я применяю к исходному  $\alpha$  перестановку, а это значит, что

$$\text{Alt } \gamma = \text{Alt } (ab(\theta)) = (-1)^{\varepsilon(ab)} \text{Alt } \theta = (-1)^{p_1 p_2} \text{Alt } \theta$$

Q.E.D.

В частности,  $f^1 \in V^*$ ,  $f^2 \in V^*$ , то  $f^1 \wedge f^2 = -f^2 \wedge f^1$ . Так же  $f \wedge f = \mathbf{0}$ .

Отсюда выводится свойство, что  $w^i \wedge w^j = -w^j \wedge w^i$  и  $w^i \wedge w^i = \mathbf{0}$ .

2.  $(f^1 + f^2) \wedge f^3 = f^1 \wedge f^3 + f^2 \wedge f^3$  и  $f^1 \wedge (f^2 + f^3) = f^1 \wedge f^2 + f^1 \wedge f^3$
3.  $\forall \lambda \in K : (\lambda f^1) \wedge f^2 = \lambda(f^1 \wedge f^2) = f^1 \wedge (\lambda f^2)$
4.  $\mathbf{O}_{\Lambda^{p_1} V^*} \wedge f^2 = f^1 \wedge \mathbf{O}_{\Lambda^{p_2} V^*} = \mathbf{O}_{\Lambda^{p_1+p_2} V^*}$
5.  $(f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 = f^1 \wedge (f^2 \wedge f^3) = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$

**Доказательство:**

Распишем первое:

$$\begin{aligned} (f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 &= \left( \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt } (f^1 \otimes f^2) \right) \wedge f^3 = \\ &= \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{(p_1 + p_2)! (p_3)!} \text{Alt } \left( \left( \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{Alt } (f^1 \otimes f^2) \right) \otimes f^3 \right) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt } (\text{Alt } (f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) \end{aligned}$$

Распишем второе:

$$(f^1 \wedge f^2) \wedge f^3 = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt } (f^1 \otimes \text{Alt } (f^2 \otimes f^3))$$

Нам надо лишь доказать, что  $\text{Alt } (\text{Alt } (f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) = \text{Alt } (f^1 \otimes \text{Alt } (f^2 \otimes f^3))$

Ну, давайте докажем:

$$\begin{aligned} \text{Alt } (\text{Alt } (f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) &= \text{Alt } \left( \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} ((-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) \right) \\ f^1 \otimes f^2 &\leftrightarrow \alpha_{i_1 \dots i_{p_1}} \beta_{j_1 \dots j_{p_2}} \quad f^3 \leftrightarrow \gamma_{\theta_1 \dots \theta_{p_3}} \end{aligned}$$

Заметим, что  $\sigma$  это перестановка, которая переставляет  $p_1 + p_2$  индексов.

Возьму  $\tau$  такую перестановку, что она переставляет  $(p_1 + p_2 + p_3)$  индексов  $i_1, \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p_2}, \theta_1, \dots, \theta_{p_3}$ , но при этом последние  $p$  индексов будут стоять на месте (Расширим нашу перестановку  $\sigma$ ).

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \text{Alt } \left( \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \tau(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3) \right) = \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \text{Alt } (\tau(f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)) = \\ &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \text{Alt } (f^1 \otimes f^2 \otimes f^3) \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} 1 = \text{Alt } (f^1 \otimes f^2 \otimes f^3) \end{aligned}$$

Аналогичным образом раскрываем и получаем, для другой то же самое. Откуда они равны.

Q.E.D

**Следствие:**  $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{Alt} (f^1 \otimes f^2 \otimes f^3)$

**Следствие:** По индукции верно  $f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \frac{(p_1 + \dots + p_n)}{p_1! \dots p_n!} \text{Alt} (f^1 \otimes \dots \otimes f^n)$

**Следствие:**  $\forall j = 1 \dots p : f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = p! \cdot \text{Alt} (f^1 \otimes \dots \otimes f^n)$$

Это следует из нашего свойства и поэтому у нас именно такое обозначение  $p$ -форм (у нас как бы значок  $\wedge$ )

6.  $\forall j = 1 \dots p : f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$ .

Тогда

$$\sigma(f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sigma^{-1}(f^1 \wedge \dots \wedge f^n) = f^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge f^{\sigma_p}$$

**Доказательство:**

Докажем только последний переход, все остальные очевидны из определения:

$$\sigma^{-1}(f^1 \wedge \dots \wedge f^p) = p! \sigma^{-1} \text{Alt} (f^1 \otimes \dots \otimes f^p) = p! \text{Alt} (\sigma^{-1}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p))$$

**Следствие:** Если  $f^j$  — 1 формы, тогда:

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^k \wedge \dots \wedge f^m \wedge \dots \wedge f^p = -f^1 \wedge \dots \wedge f^m \wedge \dots \wedge f^k \wedge \dots \wedge f^p$$

$$\dots \wedge f \wedge \dots \wedge f \wedge \dots = \mathbb{O}$$

### Теорема (о базисе пространства $p$ - форм)

Пусть  $j_1 < \dots < j_p$  — упорядоченный набор  $j_l \in (1, \dots, n)$

$\{w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}\}$  совокупность по всем упорядоченным наборам  $(j_1, \dots, j_p)$  — базис  $\Lambda^p V^*$ .

**Доказательство:**

Докажем порождаемость:

$\forall f \in \Lambda^p V^*$ .  $f \in T(p, 0)$  и  $f = \text{Alt } f$  - кососимметричный. Разложим по координатам тензора

$$f = \alpha_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}$$

С другой стороны  $\text{Alt } f = \text{Alt} (\alpha_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}) = \alpha_{i_1 \dots i_p} \text{Alt} (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p})$ . Из следствия 2 свойства 5  $\text{Alt} (w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p}) = \frac{1}{p!} w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p}$ .

Если среди  $(i_1 \dots i_p)$  есть одинаковые индексы, то  $w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_p} = \mathbb{O}$ . Если все индексы различные, то это просто перестановка  $(j_1, \dots, j_p) : j_1 < \dots < j_p$ . Тогда заменим на равное:

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} w^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge w^{j_{\sigma_p}} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

Вынесем за скобки и получим:

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \right) w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

Откуда порождаемый.

**Замечание:** коэффициент перед омегами равен  $\beta_{j_1 \dots j_p}$  и называется существенной координатой  $p$ -формы  $f$ . Она равна  $\alpha_{[j_1 \dots j_p]} = \alpha_{j_1 \dots j_p}$ .

Докажем линейно-независимость:

Для этого составим комбинацию.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1 \dots j_p} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1 \dots j_p} \sum_{\sigma \in S_p} w^{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes w^{j_{\sigma_p}} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} = \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_p} w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_p} \end{aligned}$$

где если хотя бы 2 индекса совпадают, то  $\alpha_{i_1 \dots i_p} = 0$ . Получили, что базис из тензоров = нулю, откуда и искомые.

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

**Следствие 2:**  $\forall f \in \Lambda^p V^* :$

$$f = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1 \dots j_p} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

где  $\beta_{j_1 \dots j_p} = \alpha_{j_1 \dots j_p}$  — существенные координаты.

Существенные координаты принято записывать в строку (перестановки в лексикографическом порядке)

**Пример:**

$$n = 4, p = 3 : f \in \Lambda^p V^* \leftrightarrow \beta = (\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{134}, \beta_{234})$$

Теорема 1

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V : w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det(\xi_k^{j_m})_{p \times p} = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) &= p! \text{Alt} (w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p})(\xi_1, \dots, \xi_p) = \\ &= \frac{p!}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma(w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p})(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} w^{j_1} \otimes \dots \otimes w^{j_p}(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \xi_{\sigma_1}^{j_1} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_p} = \det(\xi_k^{j_m}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\forall f \in \Lambda^p V^*$ :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1 \dots j_p} \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

**Теорема 2.** $\forall j = 1 \dots p. f^j \in V^* = \Lambda^1 V^*$  - 1 форма. $f = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p$  -  $p$  - форма. $f^j \leftrightarrow a^j = (a_1^j \dots a_n^j)$  — координатная строка в базисе  $w^j$ .  $f^j = a_i^j w^i$ . Тогда

$$\beta_{j_1 \dots j_p} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} = \det(a_{j_k}^m)$$

А также:

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p}$$

**Доказательство:**

$$\beta_{j_1 \dots j_p} = f^1 \wedge \dots \wedge f^p(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) =$$

Теперь смотрите доказательство первой теоремы, но в качестве  $w^j$  возьмите  $f^j$ , а в качестве  $\xi_i \rightarrow e_{j_i}$ :

$$= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1(e_{j_{\sigma_1}}) \dots f^p(e_{j_{\sigma_p}}) = \det(a_{j_k}^m) = \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}$$

Q.E.D

**Следствие:**  $\forall j = 1 \dots m : f^j$  - 1-форма.  $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$ . Тогда

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

**Теорема 3.** $\forall j = 1 \dots p, f^j$  - 1-формы.  $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$  выполнено:

$$f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} = \det(f^j(\xi_i))$$

**Доказательство:**

Смотрите доказательство теоремы 2. Записать  $e_{j_k} \rightarrow \xi_k$ .

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1 \dots \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f^1(\xi_{\sigma_1}) \dots f^p(\xi_{\sigma_p}) = \det(f^j(\xi_k))$$

Q.E.D.

**Следствие:** 
$$\begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

**Пример: частный случай.**

$p = n, \dim \Lambda^n V^* = 1$ . Тогда в таком случае:

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det(A\xi) = \det A \cdot \det \xi$$

$$f = \det A \cdot w^1 \wedge \dots \wedge w^n$$

**Замечание.** Все вышесказанное верно и для  $q$ -векторов. Есть лишь пару отличий:

$$g_1 \vee g_2 = \frac{(q_1 + q_2)!}{q_1! q_2!} \text{Alt} (g_1 \otimes g_2) - \text{внешнее произведение } q\text{-векторов.}$$

Все свойства и теоремы выполнены, но базис  $\{e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_q}\}$ , для  $i_1 < \dots < i_q$ .

Как мы помним  $f(\xi) = \xi(f)$ . Так что давайте применим это.

Пусть  $p = q$ . Тогда  $\xi_j \in V \cong V^{**}$ ,  $f^j \in V^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 \vee \dots \vee \xi_p(f^1, \dots, f^p) &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} = f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \\ &= \det(f^j(\xi_i)) = \det(\xi_i(f^j)) \end{aligned}$$



### 3 Евклидовы и унитарные пространства.

#### 3.1 Основные определения.

Начнем с определений.

**def:**  $V$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ .

$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется скалярное произведение, если она удовлетворяет 4-ем аксиомам.

$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $(x, y) = (y, x)$  — симметричность
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4.  $\forall x \neq 0 : (x, x) > 0$

**def:**  $(V, (\cdot, \cdot))$   $\dim V = n < \infty$  называется евклидовым пространством или вещественным линейным пространством со скалярным произведением.

**Замечание:** Если  $V$  бесконечномерно, то это называется гильбертовым пространством

**def:**  $V$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{C}$ .

$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  функция называется псевдоскалярным пространством.

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$  — симметричность
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4.  $\forall x \neq 0 : (x, x) > 0$

Такая функция называется полуторалинейной.

**def:**  $\dim V = n < \infty$ ,  $(V, (\cdot, \cdot))$  называется унитарным пространством или эрмитовый или псевдоевклидовой или комплексным линейным пространством с псевдоскаляром.

**Замечание:** Если вы не напишите слово вещественные или комплексные в работе или на экзамене, то вам инста бан.

**def:** Введем норму:  $\forall x \in V : \|x\| = \sqrt{(x, x)}$  — евклидова норма.

Давайте проверим выполняемость свойств нормы.

1.  $\forall x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$  (невыврожденность) — выполнена.
2.  $\forall \lambda \in K \Rightarrow \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$  (однородность) — выполнено.
3.  $\forall x, y \in V$  неравенство треугольника.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Мы будем пользоваться в доказательстве неравенством КБШ. Его доказательство вы можете найти в конспекте первого семестра по матанализу.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

**def:**  $\forall x \in V : \|x\|$  - длина вектора.  $\varphi$  называем углом между  $x$  и  $y$ , таким, что  $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$

**Пример:**

1. Возьмем  $\mathbb{R}^n$ .  $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ .  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ . Заметим что выполнены все 4 аксиомы скалярного произведения

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i}}$$

Неравенство КБШ в данном случае будет вот таким:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

А неравенство треугольника у нас будет вот таким:

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

По-другому неравенство треугольника в данном случае будет называться неравенством Минковского.

2. Так же мы будем пользоваться вот таким примером. Пусть у нас выбран промежуток  $[a, b]$

и  $\int_a^b |f|^2 dt < \infty$ . Тогда введем скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_a^b f \overline{g} dt$$

### 3.2 Процесс ортогонализация Грама-Шмидта. Орто-нормированный базис. Ортогональное дополнение.

**def:** Система ненулевых векторов  $v_1, \dots, v_m$  называется ортогональным, если  $\forall (i, j), i \neq j : (v_i, v_j) = 0$ .

**def:** Система ненулевых векторов называется ортонормированной, если  $v_1, \dots, v_m : \forall (i, j) : (v_i, v_j) = \delta_{ij} \cdot \|v_i\| = 1$

**Утверждение:**  $v_1, \dots, v_m$  ортогональная  $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.

**Доказательство:**

$v_1, \dots, v_m$  ортогональны. Хотим показать тривиальность разложения нуля (в принципе ничего нового).

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \mathbb{O}$$

Давайте применим операцию скалярного произведения с  $v_j$  к обеим частям. Таким образом получим:

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i, v_j) = \alpha_j (v_j, v_j) \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Таким образом получаю, что каждая  $\alpha_j = 0$ , то есть вектора линейно независимы.

Q.E.D.

#### Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)

$\forall a_1, \dots, a_n \rightarrow \exists b_1, \dots, b_k \in V$ . Причем  $b_i$  попарно-ортогонально и  $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$ .  
При этом  $k = \text{rg}(a_1, \dots, a_m)$

**Доказательство:**

Пусть  $a_1, \dots, a_m$  линейно независимы, то есть  $m = k$

Будем доказывать по индукции.

**База:**

Рассмотрим  $k = 2$ , пусть  $b_1 = a_1$ . Мы хотим, чтобы  $b_2$  и  $b_1$  были ортогональны, то есть  $(b_1, b_2) = 0$ . Пусть  $b_2 = a_2 - c_1 b_1$ . Тогда, нам надо, чтобы было выполнено:

$$0 = (b_2, b_1) = (a_1, b_1) - c_1 (b_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

Заметим, что сейчас мы нашли такое  $b_2$ , что оно ортогонально и тк мы сделали линейное преобразование, то  $\text{span}(b_1, b_2) = \text{span}(a_1, a_2)$

**Индукционный переход:**

Пусть верно для  $m$ . Докажем для  $m + 1$ .

Возьму первые  $m$ . Для них по предположению индукцию построю ортогональные.

Возьму  $b_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{j=1}^m c_j b_j$

Хотим, понять существуют ли такие  $c$ . Давайте переберем  $r = 1 \dots m$  и возьмем скалярное произведение с  $b_r$ . Тогда:

$$0 = (b_{m+1}, b_r) = (a_{m+1}, b_r) - \sum_{j=1}^m c_j (b_j, b_r) = (a_{m+1}, b_r) - c_r (b_r, b_r)$$

$$c_r = \frac{(a_{m+1}, b_r)}{\|b_r\|^2}$$

Заметим, что  $b_{m+1} \neq 0$ , тк иначе  $a_{m+1} \in \text{span}(b_1, \dots, b_n)$ , откуда линейно-независимый. Откуда получили  $m + 1$  ортогональный.

Q.E.D.

**Следствие 1:** Для любого пространства  $V$  евклидова, унитарного всегда существует ортонормированный базис.

**Следствие 2:** Любую ортогональную систему в  $V$  можно дополнить до о.н.б.

**def:**  $L \subset V$   $L^\perp = \{y \in V | (x, y) = 0, \forall x \in L\}$  — ортогональное дополнение  $L$ .

**Свойства:**

1.  $L^\perp$  — линейное подпространство.

$$\forall y_1, y_2 \in L^\perp, \forall \lambda \in K : (x, \lambda y_1 + y_2) = \bar{\lambda}(x, y_1) + (x, y_2) = 0$$

Откуда  $\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$

2.  $V = L \oplus L^\perp$ .

**Доказательство:**

$L$  и  $L^\perp$  очевидно дизъюнкты. Хотим понять  $L \oplus L^\perp$ . Пусть  $L = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$  - ортогональный базис  $L$ . Дополним до базиса  $V$ .

$$V = \text{span}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Тогда очевидно, что  $L^\perp = \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$ , тк  $y = \sum_{j=1}^{n-k} c_j a_{k+j}$  и  $\forall x \in L : (x, y) =$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \bar{c}_j (x, a_{k+j}) = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{m=1}^k \bar{c}_j \alpha_m (a_m, a_{k+j}) = 0$$

Откуда по эквивалентному условию прямой суммы верно.

Q.E.D.

**Замечание:**  $\forall L : \exists L'$  - прямое дополнение и  $\exists L^\perp$  со свойством, что его элементы  $\perp L$ .

3.  $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$  и  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$

**Доказательство:**

$$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp.$$

Докажем сначала вложенность в левую сторону:

$\forall y \in L_1^\perp \& y \in L_2^\perp \Leftrightarrow y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$ . Как мы знаем:

$$\forall x_1 \in L_1 : (x_1, y) = 0$$

$$\forall x_1 \in L_1 : (x_2, y) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in L_1 + L_2; (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$$

Откуда  $y \in (L_1 + L_2)^\perp$ .

Докажем вложенность в правую сторону:

Пусть  $y \in (L_1 + L_2)^\perp \Rightarrow \forall x_1 + x_2 \in L_1 + L_2, x \in L_1, x_2 \in L_2: (x_1 + x_2, y) = 0$ . Пусть  $x_2 = 0$ . Тогда  $\forall x_1 \in L_1 : (x_1 + y) = 0$ . Откуда  $y \in L_1^\perp$ , аналогично  $y \in L_2^\perp$ . А это то что нам надо

Теперь докажем второе равенство:

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

Применим первое свойство к  $L_1^\perp$

$$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp$$

А еще:

$$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$$

Поэтому приравняем правые части равенств и получим то, что нам надо

Q.E.D.

4.  $V^\perp = \mathbb{O}$

### 3.3 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы.

Дано  $(V, (\cdot, \cdot))$  - евклидово или унитарное,  $e$  - базис  $V$ .  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

$$\forall x, y \in V : (x, y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$$

**def:**  $\Gamma = ((e_i, e_j))_{n \times n} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$  — матрицей Грама (базиса пространства  $V$ )

Очевидно, что  $\overline{\Gamma^T} = \Gamma$  из свойств скалярного произведения.

**def:**  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $a_{ij} \in K$ .  $A^* = \overline{A^T}$  называется матрицей, сопряженной к  $A$ .

**Замечание:** все *def* пишем для  $\mathbb{C}$ , для  $\mathbb{R}$  надо убрать операцию сопряжения.

**def:**  $A^* = A$  называется самосопряженной.

$\mathbb{R} \ A^T = A$  — симметричная.

$\mathbb{C} \ \overline{A^T} = A$  — эрмитова матрица.

$$(x, y) = x^T \cdot \Gamma \cdot \overline{y}$$

**Частный случай.**  $e$  - ортонормированный базис  $\Gamma = E$ .

**Частный случай.**  $e$  - ортогональный базис  $\Gamma = \text{diag}(\|e_1\|^2, \dots, \|e_n\|^2)$

**def:** Пусть есть  $a_1, \dots, a_k \in V$ . Назовем  $G = (a_1, \dots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$  — матрицей Грама системы векторов.

Очевидно, что  $G^* = G$  - самосопряженная.

Очевидно, что  $\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$  - матрица Грама частный случай.

**def:**  $g(a_1, \dots, a_k) = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

Теорема (об определителе матрицы Грама)

$a_1, \dots, a_k$  по Граму-Шмидту переводится в попарно-ортогональные  $b_1, \dots, b_k$  (но возможно есть нули).

Тогда  $g(a_1, \dots, a_k) = \|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2 = g(b_1, \dots, b_k)$

**Доказательство:**

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, a_3) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_n) \\ (a_3, a_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & (a_3, a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & (a_n, a_3) & \dots & (a_n, a_n) \end{vmatrix}$$

По процессу ортогонализации я заменяю  $a_1$  на  $b_1$  получу:

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, a_2) & (a_2, a_3) & \dots & (a_2, a_n) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & (a_3, a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, b_1) & (a_n, a_2) & (a_n, a_3) & \dots & (a_n, a_n) \end{vmatrix}$$

Выполним второй шаг.  $b_2 = a_2 - c_1$ , где  $c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{\|b_1\|^2}$ .

Из второй строки вычту 1 строку умноженную на  $c_1$  получу:

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, a_2) & (b_1, a_3) & \dots & (b_1, a_n) \\ (b_2, b_1) & (b_2, a_2) & (b_2, a_3) & \dots & (b_2, a_n) \\ (a_3, b_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) & \dots & (a_3, a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, b_1) & (a_n, a_2) & (a_n, a_3) & \dots & (a_n, a_n) \end{vmatrix}$$

А теперь из второго столбика вычту первый умноженный на  $\bar{c}_1$ . Аналогично дальше. Откуда получили то, что нам надо.

Q.E.D.

**Следствие 1:**  $a_1, \dots, a_k$  - линейно-независимо  $\Leftrightarrow$  определитель матрицы Грама  $> 0$ .

**Следствие 2:**  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно независимы, есть  $a_k$ . Тогда:  $\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$ .

**def:**  $A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

**Угловым минором k-ого порядка** называется  $\Delta_k = \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$

**Свойства  $\Gamma$ :**

$$1. \Gamma > 0 \text{ положительно-определенная.} \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma = \Gamma^* \\ \forall x \in K^n, x^T \Gamma \bar{x} > 0 \end{cases}$$

Верно из свойств скалярного произведения.

2. Для матрицы  $\Gamma$  все угловые миноры  $\Delta_k > 0$ . Откуда матрица  $\Gamma$  — невырожденная.

3.  $e, e'$  базисы  $V$ .  $\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$ ,  $\Gamma' = G(e'_1, \dots, e'_n)$ .  $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$

**Доказательство:**

$$\forall x, y \in V : (x, y) = x^T \Gamma \bar{y}.$$

$$\text{Сделаем замену } x^T \Gamma \cdot \bar{y} = (x')^T T^T \Gamma \bar{T} \cdot \overline{(y')} = (x')^T \Gamma' \bar{y}'$$

Пусть  $x' = E_i, y' = E_j$ , тогда подставляя мы получаем поэлементное равенство матриц, откуда доказали

$$4. e, e' \text{ о.н.б. } V \Rightarrow T^T \bar{T} = E$$

**def:**  $Q_{n \times n}$  невырожденная.  $Q$  называется унитарной, ортогональной, если  $Q^* = Q^{-1}$

### Свойства ортогональной/унитарной матрицы

1. строки и столбцы попарно-ортогональны и нормированны. (со стандартный ск. п.)

**Доказательство:**

$$Q^* Q = E = Q Q^*$$

$$(\overline{Q^T} Q) = E = (Q \overline{Q^T})$$

А это получается, что  $(Q_i, Q_j) = \sigma_{ij}$ , аналогично  $(Q_i^T, Q_j^T) = \sigma_{ij}$

Q.E.D.

2.  $Q$  ортог/унитар  $\Rightarrow Q^{-1}$  ортог/унитар.
3.  $Q, R$  ортог/унитар  $\Rightarrow QR$  ортог/унитар.
4.  $|\det Q| = 1 : (\mathbb{R} : \det Q = \pm 1)$
5.  $e, e' \text{ о.н.б.} \Leftrightarrow T_{e \rightarrow e'}$  ортогонально унитарно

**Доказательство:**

$e' - \text{о.н.б.} \Leftarrow e - \text{орто нормированный базис}$  и  $T_{e \rightarrow e'}$  - ортог/унитар. - 4-ое свойство матрицы Грама.

Q.E.D.

Я не совсем понял, что тут исправляла ЕА, так что скажите.



### 3.4 Теорема Пифагора. Расстояние до линейного подпространства. Задача о перпендикуляре(наилучшем приближении). Объем k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве

#### Теорема (Пифагора)

$$\forall y, z \in V : (y, z) = 0 \Rightarrow \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

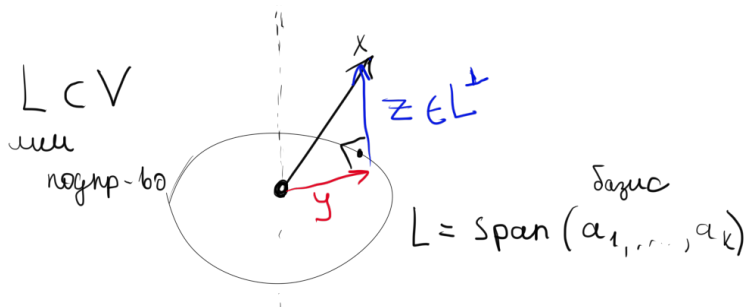
Доказательство:

$$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (y, z) + (z, y) + (z, z)$$

Q.E.D.

**Следствие:**  $\forall x_1, \dots, x_k \in V$  попарно-ортогональными:  $\|\sum_{j=1}^k x_j\|^2 = \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2$

def:



$V = L \oplus L^\perp$ .  $\forall x \in V : x = y + z$  представляется единственным образом, где  $y \in L, z \in L^\perp$ . В таком случае  $y$  называется **ортогональной проекцией**  $x$  на линейное подпространство  $L$ .  $z$  - **ортогональная составляющая**  $x$  относительно линейного подпространства  $L$  или **перпендикуляром**, опущенным из  $x$  на  $L$ .

#### Теорема (о наилучшем приближении)

$L \subset V : \forall l \in L : \|x - l\| \geq \|x - y\|$ , причем  $=$  при  $l = y$

Доказательство:

$$\|x - l\|^2 = \|x - y + y - l\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - l\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

Q.E.D.

**def:**  $L \subset V, x \in V$ .  $\text{dist}(x, L) := (\|z\|)$ , где  $z$  ортогон. сост. (перпендикулярен  $x$  относительно  $L$ ).

**Замечание:** исходя из того, что мы доказали выше  $\text{dist}(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\|$

#### Задача о перпендикуляре(о наилучшем приближении)

Возьму  $L = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$ ,  $y = \sum_{j=1}^m c_j a_j$ .  $(x, a_k) = (y, a_k) + (z, a_k) = (y, a_k)$ . Хочу найти  $c_j$ .

$$k = 1 \dots m : \left( \sum_{j=1}^m c_j a_j, a_k \right) = (x, a_k)$$

$$\sum_{j=1}^m c_j (a_j, a_k) = (x, a_k). \text{ Что же получаем? Да это же СЛОУ!}$$

$$G^T C = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_m) \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что  $a_1, \dots, a_m$  линейно независимы, откуда определитель матрицы Грама  $> 0$ , откуда матрица невырожденная, а из этого следует, что существует единственное решение. То есть:

$$C = (G^T)^{-1} \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_m) \end{pmatrix}$$

**Замечание:** аналогично можно искать  $z$ , раскладывая по базису  $L^\perp$  (имеет смысл, если известен базис  $L^\perp$ )

### Теорема(о расстоянии до линейного пространства)

$L \subset V$  - линейное подпространство.  $L = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$  и  $a_1, \dots, a_n$  - базис.

$$\forall x \in V \Rightarrow \text{dist}^2(x, L) = \frac{g(a_1, \dots, a_m, x)}{g(a_1, \dots, a_m)} = \|z\|^2, \text{ где } x = y + z, y \in L, z \in L^\perp.$$

### Доказательство:

Переводим  $a_1, \dots, a_m, x$  по Граму-Шмидту. Получаем  $b_1, \dots, b_{m+1}$ , причем первые  $m$   $b$ -шек точно не нули.

$\text{span}(a_1, \dots, a_m) = \text{span}(b_1, \dots, b_m)$ .  $b_{m+1} = x - \sum_{j=1}^m c_j b_j$ . Немного перекинем и получим, что

$$x = \sum_{j=1}^m c_j b_j + b_{m+1}$$

При этом  $b_{m+1} \in L^\perp$ , а сумма  $\in L$ . Откуда по единственности разложения  $x = y + z$ , получаю, что  $b_{m+1} = z$ . А отсюда уже следует:

$$\text{dist}^2(x, L) = \|z\|^2 = \|b_{m+1}\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_m, x)}{g(a_1, \dots, a_m)}$$

Q.E.D

**Следствие 1:**  $\text{dist}(x, P) = \min \|x - u\| = \|z\|$ , где  $z + y = x - x_0$ , а  $P$ - линейное многообразие  $x_0 + L$ .

**Доказательство:**  $\text{dist}(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| = \min_{l \in L} \|x - x_0 + l\|$ , где  $l \in L$

$$\min_{l \in L} \|x - x_0 + l\| = \min_{l \in L} \|y + z + l\| = \min_{l \in L} \|z + l\|, \text{ так как } y \in L, l \in L$$

$$\min_{l \in L} \|z + l\| = \min_{l \in L} \sqrt{\|z\|^2 + \|l\|^2} = \|z\|$$

Q.E.D

**Следствие 2:**  $\text{dist}(P_1, P_2) = \min_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_2 - u_1\| = \|z\|$ , где  $z$  ортогональная составляющая  $x_1 - x_2$  относительно  $L = L_1 + L_2$ .  $P_j = x_j + L_j, j = 1, 2$  и  $x_1 - x_2 = y + z$ , где  $y \in L_1 + L_2$ ,  $z \in (L_1 + L_2)^\perp$

**Доказательство:**

$$\min \|u_2 - u_1\| = \min_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_2 - x_1 + l_1 + l_2\| = \min_{l \in L_1 + L_2} \|y + z + l\| = \min_{l \in L} \|z + l\| = \|z\|$$

Q.E.D.

**def:**  $(V, (\cdot, \cdot))$  - евклидово пространство. Введем параллелепипед, натянутый на  $a_1, \dots, a_k$  - линейно-независимые.

$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \forall \alpha_i \in [0, 1]\}$$

Приложен к точке  $M_0$ .

$v(\Pi(a_1, \dots, a_k)) := (g(a_1, \dots, a_k))^{\frac{1}{2}} = (g(b_1, \dots, b_k))^{\frac{1}{2}} = (g(a_1, \dots, a_{k-1})) \|b_k\| = v(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1})) \|b_k\|$ , где  $b_k$  высота. Получаем, что объем не зависит от точки приложения векторов.

**Примеры:**

1.  $k = 1$ .  $\Pi(a_1) = \{\alpha_1 a_1 : \forall \alpha_1 \in [0, 1]\}$  - отрезок.  $v(\Pi(a_1)) = \|a_1\|$ .
2.  $k = 2$ .  $\Pi(a_1, a_2)$  - параллелограмм.  $v(\Pi(a_1, a_2)) = v(\Pi(a_1)) \|b_2\|$  - длина основания на высоту, то есть наша привычная площадь параллелограмма.
3.  $k = 3$ .  $\Pi(a_1, a_2, a_3)$  - параллелепипед.  $v(\Pi(a_1, a_2, a_3)) = v(\Pi(a_1, a_2)) \cdot \|b_3\|$ . то есть наш привычный объем параллелепипеда.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  о.н.б., то есть  $(x, y) = x^T y$ .  $\Pi(a_1, \dots, a_k)$ .  $a_j \leftrightarrow A_j \in \mathbb{R}^n$  — координатный столбец. Тогда:

$$v(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = (g(a_1, \dots, a_k))^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{pmatrix} A_1^T A_1 & \dots & A_1^T A_k \\ \vdots & & \vdots \\ A_k^T A_1 & \dots & A_k^T A_k \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} = |A^T \cdot A|$$

В частности, если  $k = n$ , то ответ просто будет  $= |\det A|$ . Так же есть ориентированный объем  $v^\pm = \det A$ .

Как меняется объем при линейны преобразованиях?

Пусть  $B \in \text{End}(V)$  изоморфное и не вырожденное.

$$B(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \{Bx = \sum_{i=1}^k \alpha_i B a_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i | \forall \alpha_i \in [0, 1]\} = \Pi(w_1, \dots, w_k)$$

При этом из изоморфности изображения мы опять получили линейно-независимую систему векторов.

$$v(\prod(w_1, \dots, w_k)) = v(\prod(Ba_1, \dots, Ba_k)) = (g(Ba_1, \dots, Ba_k))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(BA)^T BA} = \sqrt{A^T B^T BA}$$

## 4 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Не сдавайтесь, изучая лин. ал. Это реально!

Upd: 13.02 слава устал

Upd: 06.03 что за пипяу происходит

