Конспект по Матлогу.

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Начало начал 2
1.1 Задача 1. 3
1.2 Задача 2. 8
1.3 Задача 3. 13
1.4 Задача 4. 30

2 Информация о курсе 31

1 Начало начал

Во всех задачах буду пользоваться данной таблицей:

(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$
(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$
(5) $\alpha \& \beta \to \beta$
(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$
(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$
(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg \beta) \to \neg \alpha$
(10) $\neg \neg \alpha \to \alpha$

1.1 Задача 1.

$$\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B) \tag{a}$$

Доказательство:

$$\begin{array}{lll}
(1) & (A \to A) \to (A \to A \to B) \to (A \to B) & \text{(A9)} \\
(2) & & \\
\vdots & \text{copy-paste from lection} & \\
(8) & A \to A & \\
(9) & (A \to A \to B) \to (A \to B) & \text{(MP (8,1))}
\end{array}$$

Q.E.D.

$$\vdash \neg(A\&\neg A) \tag{b}$$

Доказательство:

(1) $((A\&\neg A) \to A) \to ((A\&\neg A) \to \neg A) \to \neg(A\&\neg A)$
Аксиома 9 $[\alpha := (A\&\neg A), \beta = A]$

(2) $(A\&\neg A) \to A$
Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta = \neg A]$

(3) $(A\&\neg A) \to \neg A$
Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta = \neg A]$

(4) $((A\&\neg A) \to \neg A) \to \neg(A\&\neg A)$
Moduse Ponens 2, 1

(5) $\neg(A\&\neg A)$
Moduse Ponens 3, 4

$$\vdash (A\&B) \to (B\&A) \tag{c}$$

Для доказательство этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$(A\&B) \vdash (B\&A)$$

Доказательство:

(1) $A\&B \to A$ Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B]$

(2) $A\&B \to B$ Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := B]$

(3) $(A\&B)$ Гипотеза

(4) A Moduse Ponuns 3, 1

(5) B Moduse Ponuns 3, 2

(6) $B \to A \to B\&A$ Аксиома 3 $[\alpha :=\text{B}, \beta :=\text{A}]$

(7) $A \to B\&A$ Moduse Ponuns 5, 6

(8) $B\&A$ Moduse Ponuns 4, 7

Q.E.D.

$$\vdash (A \vee B) \to (B \vee A) \tag{d}$$

Доказательство:

(1)	$(A \to A \vee B) \to (B \to A \vee B) \to (A \vee B \to A \vee B)$	Аксиома 8 $[\alpha := \text{A}, \beta := \text{B}, \gamma := A \vee B]$
(2)	$A \to A \vee B$	Аксиома 6 $[\alpha := \text{A}, \beta := \text{B}]$
(3)	$B \to A \vee B$	Аксиома 7 $[\alpha := \text{B}, \beta := \text{A}]$
(4)	$(B \to A \vee B) \to ((A \vee B) \to (B \vee A))$	Moduse Ponuns 2, 1
(5)	$(A \vee B) \to (B \vee A)$	Moduse Ponuns 3, 4

Q.E.D.

$$A\&\neg A \vdash B \tag{e}$$

Доказательство:

(1)	$A\&\neg A \to A$	Аксиома 4 [$\alpha :=A, \beta :=\neg A$]
(2)	$A\&\neg A \to \neg A$	Аксиома 5 [$\alpha :=A, \beta :=\neg A$]
(3)	$A\&\neg A$	Гипотеза
(4)	A	Moduse Ponuns 3, 1
(5)	$\neg A$	Moduse Ponuns 3, 2
(6)	$(B \to A) \to (B \to \neg A) \to \neg B$	Аксиома 9 [$\alpha :=$B, $\beta :=$A]
(7)	$A \to B \to A$	Аксиома 1 [$\alpha :=$A, $\beta :=$B]
(8)	$\neg A \to B \to \neg A$	Аксиома 1 [$\alpha :=\neg A, \beta :=$B]
(9)	$A \to \neg B \to A$	Аксиома 1 [$\alpha :=$A, $\beta :=\neg B$]
(10)	$\neg A \to \neg B \to \neg A$	Аксиома 1 [$\alpha :=\neg A, \beta :=\neg B$]
(11)	$B \to A$	Moduse Ponuns 4, 7
(12)	$B \to \neg A$	Moduse Ponuns 5, 8
(13)	$\neg B \to A$	Moduse Ponuns 4, 9
(14)	$\neg B \to \neg A$	Moduse Ponuns 5, 10
(15)	$(B \to \neg A) \to \neg B$	Moduse Ponuns 11, 6
(16)	$\neg B$	Moduse Ponuns 12, 15
(17)	$(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Аксиома 9 [$\alpha :=\neg B, \beta :=$A]
(18)	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Moduse Ponuns 13, 17
(19)	$\neg\neg B$	Moduse Ponuns 14, 18
(20)	$\neg\neg B \to B$	Аксиома 10 [$\alpha :=$B]
(21)	B	Moduse Ponuns 19, 20

1.2 Задача 2.

а) Докажем, что $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$. Для этого воспользуемся Теоремой о дедукции и докажем:

$$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

Доказательство:

(1) $\alpha \to \neg\alpha \to \alpha$
Аксиома 1 $[\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha]$

(2) α
Гипотеза

(3) $\neg\alpha \to \alpha$
Moduse Ponens 2, 1

(4) $(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$
Аксиома 9 $[\alpha := \neg\alpha, \beta := \alpha]$

(5)
$\vdots$ copy-paste from lection
(12) $\neg\alpha \to \neg\alpha$

(13) $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$
Moduse Ponens 3, 4

(14) $\neg\neg\alpha$
Moduse Ponens 12, 13

Q.E.D.

$$\neg A, B \vdash \neg(A\&B) \tag{b}$$

Доказательство:

(1)	$((A\&B) \to A) \to ((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$	Аксиома 9 $[\alpha :=(A\&B), \beta :=A]$
(2)	$A\&B \to A$	Аксиома 4 $[\alpha :=A, \beta :=B]$
(3)	$\neg A$	Гипотеза
(4)	B	Гипотеза
(5)	$\neg A \to (A\&B) \to \neg A$	Аксиома 1 $[\alpha :=\neg A, \beta :=(A\&B)]$
(6)	$(A\&B) \to \neg A$	Moduse Ponuns 3, 5
(7)	$((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$	Moduse Ponuns 2, 1
(8)	$\neg(A\&B)$	Moduse Ponuns 6, 7

$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) \tag{c}$$

Доказательство:

Докажем, что $\neg A \vdash A \to \neg(A \vee B)$. Для этого по теореме о дедукции, надо доказать $\neg A, A \to \neg(A \vee B)$. Для этого воспользуемся доказательством 1e. Откуда есть доказательство вышесказанного. Аналогично есть доказательство $\neg B \vdash B \to \neg(A \vee B)$. Назовем эти доказательства Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Вернемся к исходному доказательству:

(1) $\neg A$
Гипотеза
(2) $\neg B$
Гипотеза
(3) $((A \vee B) \to A) \to ((A \vee B) \to \neg A) \to \neg(A \vee B)$
Аксиома 9 $[\alpha :=(A \vee B), \beta :=A]$
(4) $(A \to \neg(A \vee B)) \to (B \to \neg(A \vee B)) \to (A \vee B \to \neg(A \vee B))$
Аксиома 8 $[\alpha :=A, \beta :=B, \gamma :=\neg(A \vee B)]$
(5) $\neg A \to \neg A \to \neg A$

Теперь воспользуемся нашими предположениями:

(6)
$\vdots$ copy-paste from lemma 1
(5+n) $A \to \neg(A \vee B)$
(6+n)
$\vdots$ copy-paste from lemma 2
$(5+n+m)$ $B \to \neg(A \vee B)$
$(6+n+m)$ $(B \to \neg(A \vee B)) \to (A \vee B \to \neg(A \vee B))$
Moduse Ponuns $(5+n)$, 4
$(7+n+m)$ $A \vee B \to \neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $(5+n+m)$, $(6+n+m)$
$(8+n+m)$
$\vdots$ copy-paste from lection
$(15+n+m)$ $A \vee B \to A \vee B$
$(16+n+m)$ $((A \vee B) \to (A \vee B)) \to ((A \vee B) \to \neg(A \vee B)) \to \neg(A \vee B)$
Аксиома 9 $[\alpha :=A \vee B, \beta :=A \vee B]$
$(17+n+m)$ $((A \vee B) \to \neg(A \vee B)) \to \neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $(15+n+m)$, $(16+n+m)$
$(18+n+m)$ $\neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $(7+n+m)$, $(17+n+m)$

Q.E.D

$$A, \neg B \vdash \neg(A \to B) \tag{d}$$

(1)	A	Гипотеза
(2)	$\neg B$	Гипотеза
(3)	$\neg B \to (A \to B) \to \neg B$	Аксиома 1 [$\alpha :=\neg B, \beta :=(A \to B)$]
(4)	$(A \to B) \to \neg B$	Moduse Ponuns 2, 3
(5)	$A \to (A \to B) \to A$	Аксиома 1 [$\alpha :=A, \beta :=(A \to B)$]
(6)	$(A \to B) \to A$	Moduse Ponuns 1, 5
(7)		
$\vdots$	copy-paste from lection	
(15)	$(A \to B) \to (A \to B)$	
(16)	$((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to A \to B) \to ((A \to B) \to B)$	Аксиома 2 [$\alpha :=A \to B, \beta :=A, \gamma :=$B]
(17)	$((A \to B) \to A \to B) \to ((A \to B) \to A)$	Moduse Ponuns 6, 16
(18)	$(A \to B) \to B$	Moduse Ponuns 15, 17
(19)	$((A \to B) \to B) \to ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$	Аксиома 9 [$\alpha :=A \to B, \beta :=$B]
(20)	$((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$	Moduse Ponuns 18, 19
(21)	$\neg(A \to B)$	Moduse Ponuns 4, 20

$$\neg A, B \vdash A \to B \tag{e}$$

Доказательство:

(1)	$\neg A$	Гипотеза
(2)	B	Гипотеза
(3)	$B \to A \to B$	Аксиома 1 [α :=B, β :=A]
(4)	$A \to B$	Moduse Ponuns 2, 3

1.3 Задача 3.

$$\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C) \tag{a}$$

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$$

Доказательство:

(1)	$(A \to B)$	Гипотеза
(2)	$(B \to C)$	Гипотеза
(3)	$(A \to B) \to (A \to B \to C) \to (A \to C)$	Аксиома 2 [α :=A, β :=B, γ :=C]
(4)	$(B \to C) \to A \to (B \to C)$	Аксиома 1 [$\alpha := B \to C, \beta$:=A]
(5)	$A \to B \to C$	Moduse Ponuns 2, 4
(6)	$(A \to B \to C) \to (A \to C)$	Moduse Ponuns 1, 3
(7)	$A \to C$	Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \tag{b}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$$

(1)	$(A \to B)$	Гипотеза
(2)	$\neg B$	Гипотеза
(3)	$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$	Аксиома 9 [$\alpha :=$A$, \beta :=$B]
(4)	$\neg B \to A \to \neg B$	Аксиома 1 [$\alpha := \neg B, \beta :=$A]
(5)	$A \to \neg B$	Moduse Ponuns 2, 4
(6)	$(A \to \neg B) \to \neg A$	Moduse Ponuns 1, 3
(7)	$\neg A$	Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D

$$\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \to (A \vee B) \tag{c}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции и будем доказывать:

$$\neg(\neg A \& \neg B) \vdash (A \vee B)$$

(1) $\neg(\neg A \& \neg B)$ Гипотеза
(2) $\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B$ Аксиома 3 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
(3) $A \to A \vee B$ Аксиома 6 $[\alpha :=$A$, \beta :=$B$]$
$\vdots$ copy-paste from 3b
(3 + n) $(A \to A \vee B) \to (\neg(A \vee B) \to \neg A)$
(4 + n) $\neg(A \vee B) \to \neg A$ Moduse Ponuns 3, 3+n
(5 + n) $B \to A \vee B$ Аксиома 7 $[\alpha :=$B$, \beta :=$A$]$
$\vdots$ copy-paste from 3b
$(5 + 2n)$ $(B \to A \vee B) \to (\neg(A \vee B) \to \neg B)$
$(6 + 2n)$ $\neg(A \vee B) \to \neg B$ Moduse Ponuns $5 + n$, $5 + 2n$

Хотим получить: $\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)$
$(7 + 2n)$ $((\neg(A \vee B)) \to \neg B) \to ((\neg(A \vee B)) \to \neg B \to (\neg A \& \neg B)) \to ((\neg(A \vee B)) \to (\neg A \& \neg B))$
Аксиома 2 $[\alpha := (\neg(A \vee B)), \beta := \neg B, \gamma := (\neg A \& \neg B)]$
$(8 + 2n)$ $(\neg(A \vee B) \to \neg A) \to (\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))) \to (\neg(A \vee B) \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B$
помогите, оно не влезает
Аксиома 2 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A, \gamma := (\neg B \to (\neg A \& \neg B))]$
$(9 + 2n)$ $(\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))) \to (\neg(A \vee B) \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B)))$
Moduse Ponuns $(4 + n)$, $(8 + 2n)$
$(10 + 2n)$ $(\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B) \to \neg(A \vee B) \to (\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B)$
Аксиома 1 $[\alpha := (\neg A \to \neg B \to \neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$
$(11 + 2n)$ $\neg(A \vee B) \to \neg A \to (\neg B \to (\neg A \& \neg B))$
Moduse Ponuns 2, $10 + 2n$
$(12 + 2n)$ $\neg(A \vee B) \to \neg B \to (\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $(11 + 2n)$, $(9 + 2n)$
$(13 + 2n)$ Пропущу 13-ый + 2n шаг в угоду сохранения моей психики
Moduse Ponuns $6 + 2n$, $7 + 2n$
$(14 + 2n)$ $\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $12 + 2n$, $13 + 2n$
$(15 + 2n)$ $(\neg(A \vee B) \to (\neg A \& \neg B)) \to (\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to \neg\neg(A \vee B)$
Аксиома 9 $[\alpha := \neg(A \vee B), \beta := \neg A \& \neg B]$
$(16 + 2n)$ $\neg(\neg A \& \neg B) \to \neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Аксиома 1 $[\alpha := \neg(\neg A \& \neg B), \beta := \neg(A \vee B)]$
$(17 + 2n)$ $\neg\neg(A \vee B) \to (A \vee B)$
Аксиома 10 $[\alpha := (A \vee B)]$

$(18 + 2n)$ $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& B)$
Moduse Ponuns 1, $16 + 2n$

$(19 + 2n)$ $(\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $14 + 2n$, $15 + 2n$

$(20 + 2n)$ $\neg\neg(A \vee B)$
Moduse Ponuns $18 + 2n$, $19 + 2n$

$(21 + 2n)$ $(A \vee B)$
Moduse Ponuns $20 + 2n$, $17 + 2n$

Q.E.D.

Моя психика травмирована

$$\vdash A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B) \tag{d}$$

Доказательство:

Сперва докажем, что:

$$\vdash A \to \neg(\neg A \& \neg B))$$

Буду пользоваться теоремой о дедукции и докажу:

$$A \vdash \neg(\neg A \& \neg B))$$

(1) A
Гипотеза
(2) $((\neg A \& \neg B) \to A) \to ((\neg A \& \neg B) \to \neg A) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Аксиома 9 $[\alpha := (\neg A \& \neg B), \beta := A]$
(3) $A \to (\neg A \& \neg B) \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := (\neg A \& \neg B)]$
(4) $\neg A \& \neg B \to \neg A$
Аксиома 4 $[\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
(5) $(\neg A \& \neg B) \to A$
Moduse Ponuns 1, 3
(6) $((\neg A \& \neg B) \to \neg A) \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns 5, 2
(7) $\neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns 4, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем

$$\vdash B \to \neg(\neg A \& B))$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно. Докажем искомое:

(1) $A \vee B$
Гипотеза
(2) $(A \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (B \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B))$
Аксиома 8 $[\alpha := \text{A}, \beta := \text{B}, \gamma := \neg(\neg A \& \neg B)]$
$\vdots$
$(2+n)$ $B \to \neg(\neg A \& B))$
copy-paste from lemma 2
$\vdots$
$(2+2n)$ $A \to \neg(\neg A \& B))$
copy-paste from lemma 1
$(3+2n)$ $(B \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B))$
Moduse Ponuns $(2+2n$, 2
$(4+2n)$ $A \vee B \to \neg(\neg A \& \neg B)$
Moduse Ponuns $(2+n$, $3+2n$

Q.E.D

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B) \tag{e}$$

Сперва докажем, что:

$$\vdash \neg A \to \neg(A\&B)$$

Для этого по теореме о дедукции докажем, что:

$$\neg A \vdash \neg(A\&B)$$

(1) $\neg A$
Гипотеза
(2) $A\&B \to A$
Аксиома 4 $[\alpha :=A, \beta :=B]$
(3) $((A\&B) \to A) \to ((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$
Аксиома 9 $[\alpha :=(A\&B), \beta :=A]$
(4) $\neg A \to (A\&B) \to \neg A$
Аксиома 1 $[\alpha :=\neg A, \beta :=(A\&B)]$
(5) $A\&B \to \neg A$
Moduse Ponuns 1, 4
(6) $(A\&B \to \neg A) \to \neg(A\&B)$
Moduse Ponuns 2, 3
(7) $\neg(A\&B)$
Moduse Ponuns 5, 6

Q.E.D.

Аналогично докажем, что

$$\vdash \neg B \to \neg(A\&B)$$

Назовем это Леммой 1 и Леммой 2 соответственно.

Теперь докажем искомое:

(1) $(\neg A \to \neg(A\&B)) \to (\neg B \to \neg(A\&B)) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg(A\&B))$
Аксиома 8 $[\alpha :=\neg A\ , \beta :=\neg B, \gamma :=\neg(A\&B)]$

$\vdots$

$(1+n)$ $\neg A \to \neg(A\&B)$
copy-paste from lemma 1

$\vdots$

$(1+2n)$ $\neg B \to \neg(A\&B)$
copy-paste from lemma 2
$(2+2n)$ $(\neg B \to \neg(A\&B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B))$
Moduse Ponuns $1+n$, 1
$(3+2n)$ $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B)$
Moduse Ponuns $1+2n$, $2+2n$

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg A \lor B) \tag{f}$$

Соглашение: В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$(A \to B) \vdash (\neg A \lor B)$$

(1) $A \to B$
Гипотеза
(2) $B \to \neg A \lor B$
Аксиома 7 [$\alpha :=$B$, \beta := \neg A$]
(3) $(A \to B) \to (A \to B \to \neg A \lor B) \to (A \to \neg A \lor B)$
Аксиома 2 [$\alpha :=$A$, \beta :=$B$, \gamma := \neg A \lor B$]
(4) $(A \to B \to \neg A \lor B) \to (A \to \neg A \lor B)$
Moduse Ponuns 1, 3
(5) $(B \to \neg A \lor B) \to A \to (B \to \neg A \lor B)$
Аксиома 1 [$\alpha := (B \to \neg A \lor B), \beta := A$]
(6) $A \to B \to \neg A \lor B$
Moduse Ponuns 2, 5
(7) $A \to \neg A \lor B$
Moduse Ponuns 6, 4
(8) $\neg A \to \neg A \lor B$
Аксиома 6 [$\alpha := \neg A, \beta :=$B]
(9) $(A \to (A \lor \neg A)) \to (\neg A \to (A \lor \neg A)) \to (A \lor \neg A \to (A \lor \neg A))$
Аксиома 9 [$\alpha :=$A$, \beta := \neg A, \gamma := (A \lor \neg A)$]
(10) $(\neg A \to \neg A \lor B) \to (A \lor \neg A \to \neg A \lor B)$
Moduse Ponuns 7, 9
(11) $A \lor \neg A \to \neg A \lor B$
Moduse Ponuns 8, 10
(12) $A \lor \neg A$
$\alpha \lor \neg \alpha$ по 3i
(13) $\neg A \lor B$
Moduse Ponuns 12, 11

Q.E.D.

$$\vdash A \& B \to A \lor B \tag{g}$$

Доказательство:

Используем теорему о дедукции и будем доказывать

$$A \& B \vdash A \lor B$$

(1) $A \& B$
Гипотеза
(2) $A \& B \to A$
Аксиома 4 [α :=A, β :=B]
(3) $A \to A \lor B$
Аксиома 6 [α :=A, β :=B]
(4) A
Moduse Ponuns 1, 2
(5) $A \lor B$
Moduse Ponuns 4, 3

Q.E.D.

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A \tag{h}$$

Доказательство:

Соглашение: В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

Используем теорему о дедукции и будем доказывать:

$$(A \to B) \to A \vdash A$$

(1) $(A \to B) \to A$
Гипотеза

(2) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$
Аксиома 9 $[\alpha := \neg A, \beta := A]$

(3) $(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \to B), \gamma := A]$

(4) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(5) $((A \to B) \to A) \to \neg B \to ((A \to B) \to A)$
Аксиома 1 $[\alpha := ((A \to B) \to A), \beta := \neg B]$

(6) $\neg A \to (A \to B) \to A$
Moduse Ponuns 1, 5

(7) $(\neg A \to (A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$
Moduse Ponuns 4, 3

(8) $\neg A \to A$
Moduse Ponuns 6, 7

(9) $\neg A \to \neg A$
$\alpha \to \alpha$, доказано на лекции

(10) $(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$
Moduse Ponuns 8, 2

(11) $\neg\neg A$
Moduse Ponuns 9, 10

(12) $\neg\neg A \to A$
Аксиома 10 $[\alpha := A]$

(13) A
Moduse Ponuns 11, 12

$$\vdash A \vee \neg A \tag{i}$$

<u>Соглашение:</u> В дальнейшем доказательстве буду пользоваться раннее доказанными фактами, они будут как бы вставляться в доказательство, а снизу будет подписано, чем я пользовался (иначе это займет бесконечность времени)

<u>Доказательство:</u>

(1) $A \to A \vee \neg A$
Аксиома 6 $[\alpha :=$A$, \beta :=\neg A]$

(2) $\neg\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$
Аксиома 10 $[\alpha := A \vee \neg A]$

(3) $(\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$
Аксиома 9 $[\alpha :=\neg(A \vee \neg A), \beta := A \vee \neg A]$

(4) $\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)$
$\alpha \to \alpha$, доказано на лекции

(5) $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A \to (A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A))$
Аксиома 2 $[\alpha :=\neg(A \vee \neg A), \beta :=\neg A, \gamma := A \vee \neg A]$

(6) $\neg A \to A \vee \neg A$
Аксиома 7 $[\alpha :=\neg A, \beta := A]$

(7) $(\neg A \to A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)$
Аксиома 1 $[\alpha :=\neg A \to A \vee \neg A, \beta :=\neg(A \vee \neg A)]$

(8) $\neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 6, 7

(9) $(A \to A \vee \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A)$
$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$, доказано в $3b$

(10) $\neg(A \vee \neg A) \to \neg A$
Moduse Ponuns 1, 9

(11) $(\neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \to A \vee \neg A)) \to (\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A))$
Moduse Ponuns 10, 5

(12) $\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 8, 11

(13) $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \vee \neg A)) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 12, 3

(14) $\neg\neg(A \vee \neg A)$
Moduse Ponuns 4, 13

(15) $A \vee \neg A$
Moduse Ponuns 14, 2

Q.E.D.

$$\vdash (A\&B \to C) \to (A \to B \to C) \tag{j}$$

Доказательство:

Если я докажу:

$$(A\&B \to C), A, B \vdash C$$

То воспользуясь теоремой о дедукции получу искомое.

Докажем:

(1) $(A\&B) \to C$
Гипотеза

(2) A
Гипотеза

(3) B
Гипотеза

(4) $A \to B \to A\&B$
Аксиома 3 [α :=A, β :=B]

(5) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 2, 4

(6) $A\&B$
Moduse Ponuns 3, 5

(7) C
Moduse Ponuns 6, 1

Q.E.D.

$$\vdash A\&(B \vee C) \to (A\&B) \vee (A\&C) \tag{k}$$

Доказательство:

Воспользуемся теоремой о дедукции, надо доказать:

$$A\&(B \vee C) \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$$

(1) $A\&(B \vee C)$
Гипотеза
(2) $A\&(B \vee C) \to A$
Аксиома 4 $[\alpha := A, \beta := B \vee C]$
(3) $A\&(B \vee C) \to (B \vee C)$
Аксиома 5 $[\alpha := A, \beta := B \vee C]$
(4) A
Moduse Ponuns 1, 2
(5) $B \vee C$
Moduse Ponuns 1, 3
(6) $A \to B \to A\&B$
Аксиома 3 $[\alpha := A, \beta := B]$
(7) $A \to C \to A\&C$
Аксиома 3 $[\alpha := A, \beta := C]$
(8) $(B \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (B \vee C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 8 $[\alpha := B, \beta := C, \gamma := (A\&B) \vee (A\&C)]$
(9) $(B \to A\&B) \to (B \to A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (B \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 2 $[\alpha := B, \beta := A\&B, \gamma := (A\&B) \vee (A\&C)]$
(10) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 4, 6
(11) $(B \to A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (B \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 10, 9
(12) $(A\&B) \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A\&B), \beta := (A\&C)]$
(13) $(A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to B \to (A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 1 $[\alpha := A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C), \beta := B]$
(14) $(B \to A\&B \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 12, 13
(15) $B \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 14, 11

(16) $(C \to A\&C) \to (C \to A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 2 $[\alpha := C, \beta := A\&C, \gamma := (A\&B) \vee (A\&C)]$
(17) $B \to A\&B$
Moduse Ponuns 4, 7
(18) $(C \to A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 17, 16
(19) $(A\&C) \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Аксиома 7 $[\alpha := (A\&C), \beta := (A\&B)]$
(20) $(A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to C \to (A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Аксиома 1 $[\alpha := A\&C \to (A\&B) \vee (A\&C), \beta := C]$
(21) $(C \to A\& \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 19, 20
(22) $C \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 21, 18
(23) $(C \to (A\&B) \vee (A\&C)) \to (B \vee C \to (A\&B) \vee (A\&C))$
Moduse Ponuns 15, 8
(24) $B \vee C \to (A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 22, 23
(25) $(A\&B) \vee (A\&C)$
Moduse Ponuns 5, 24

$$\vdash (A \to B \to C) \to (A\&B \to C) \tag{1}$$

Доказательство:

По теореме о дедукции:

$$(A \to B \to C), A\&B \vdash C$$

(1) $A \to B \to C$
Гипотеза

(2) $A\&B$
Гипотеза

(3) $A\&B \to A$
Аксиома 4 [α :=A, β :=B]

(4) $A\&B \to B$
Аксиома 5 [α :=A, β :=B]

(5) A
Moduse Ponuns 2, 3

(6) B
Moduse Ponuns 2, 4

(7) $B \to C$
Moduse Ponuns 5, 1

(8) C
Moduse Ponuns 6, 7

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \lor (B \to A) \tag{m}$$

Доказательство:

(1) $(A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 7 $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(2) $(A \to (B \to A)) \to (A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := A, \beta := B \to A, \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(3) $A \to B \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := B]$

(4) $(A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 3, 2

(5) $(B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := (B \to A), \beta := (A \to B)]$

(6) $((B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to A \to ((B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A), \beta := A]$

(7) $A \to (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 5, 6

(8) $A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 7, 4

(9) $(\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 8, 1

(10) $(\neg A \to A \to B) \to (\neg A \to A \to B \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \to B), \gamma := (A \to B) \lor (B \to A)]$

(11) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(12) $(\neg A \to (A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to (\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Moduse Ponuns 11, 10

(13) $(A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A \to B), \beta := (B \to A)]$

(14) $((A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)) \to A \to ((A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (B \to A) \to (A \to B) \lor (B \to A), \beta := \neg A]$

(15) $\neg A \to (A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 13, 14

(16) $\neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 15, 12

(17) $A \lor \neg A \to (A \to B) \lor (B \to A)$
Moduse Ponuns 16, 9

(18) $(A \to B) \lor (B \to A)$
по 3i

(19) $A \lor \neg A$
Moduse Ponuns 18, 17

Q.E.D.

$$\vdash (A \to B) \lor (B \to C) \lor (C \to A) \tag{n}$$

Временно обозначу за $F := (A \to B) \lor (B \to C)$

(1) $(A \to F \lor (C \to A)) \to (\neg A \to F \lor (C \to A)) \to (A \lor \neg A \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 8 $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := F \lor (C \to A)]$

(2) $(A \to (C \to A)) \to (A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to (A \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := A, \beta := C \to A, \gamma := F \lor (C \to A)]$

(3) $A \to C \to A$
Аксиома 1 $[\alpha := A, \beta := C]$

(4) $(A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to (A \to F \lor (C \to A))$
Moduse Ponuns 3, 2

(5) $(C \to A) \to F \lor (C \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := (C \to A), \beta := F]$

(6) $((C \to A) \to F \lor (C \to A)) \to A \to ((C \to A) \to F \lor (C \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := ((C \to A) \to F \lor (C \to A)), \beta := A]$

(7) $A \to (C \to A) \to F \lor (C \to A)$
Moduse Ponuns 5, 6

(8) $A \to F \lor (C \to A)$
Moduse Ponuns 7, 4

(9) $(\neg A \to F \lor (C \to A)) \to (A \lor \neg A \to F \lor (C \to A))$
Moduse Ponuns 8, 1

(10) $\neg A \to A \to B$
$A, \neg A \vdash B$ по заданию 1e

(11) $(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B) \to F) \to (\neg A \to F)$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := (A \to B), \gamma := F]$

(12) $(\neg A \to (A \to B) \to F) \to (\neg A \to F)$
Moduse Ponuns 10, 11

(13) $(A \to B) \to (A \to B) \lor (B \to C)$
Аксиома 6 $[\alpha := (A \to B), \beta := (B \to C)]$

(14) $((A \to B) \to F) \to \neg A \to ((A \to B) \to F)$
Аксиома 1 $[\alpha := (A \to B) \to F, \beta := \neg A]$

(15) $(\neg A \to (A \to B) \to F)$
Moduse Ponuns 13, 14

(16) $\neg A \to F$
Moduse Ponuns 15, 12

(17) $(\neg A \to F) \to (\neg A \to F \to F \vee (C \to A)) \to (\neg A \to F \vee (C \to A))$
Аксиома 2 $[\alpha := \neg A, \beta := F, \gamma := F \vee (C \to A)]$

(18) $(\neg A \to F \to F \vee (C \to A)) \to (\neg A \to F \vee (C \to A))$
Moduse Ponuns 16, 17

(19) $F \to F \vee (C \to A)$
Аксиома 7 $[\alpha := F, \beta := (C \to A)]$

(20) $(F \to F \vee (C \to A)) \to \neg A \to (F \to F \vee (C \to A))$
Аксиома 1 $[\alpha := (F \to F \vee (C \to A)), \beta := \neg A]$

(21) $\neg A \to F \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 19, 20

(22) $\neg A \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 21, 18

(23) $A \vee \neg A \to F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 22, 9

(24) $A \vee \neg A$
По пукнту 3i

(25) $F \vee (C \to A)$
Moduse Ponuns 24, 23

Q.E.D.

1.4 Задача 4.

Будем пользоваться фактом из $3i :\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

По теореме о дедукции $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta$.

По теореме о дедукции $\neg\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \neg\alpha \to \beta$

Докажем, что $\vdash \beta$:

Доказательство

$\vdots$

(n) $\alpha \to \beta$
по вышесказанному

$\vdots$

$(n+m)$ $\neg\alpha \to \beta$
по вышесказанному

$(n+m+1)$ $(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Аксиома 8 $[\alpha := \alpha, \beta := \neg\alpha, \gamma := \beta]$

$(n+m+2)$ $(\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Moduse Ponuns n, $(n+m+1)$

$(n+m+3)$ $(\alpha \vee \neg\alpha \to \beta)$
Moduse Ponuns $(n+m)$, $(n+m+2)$

$\vdots$

$(n+m+k+3)$ $\alpha \vee \neg\alpha$
По 3i

$(n+m+k+4)$ β
Moduse Ponuns $(n+m+k+3)$, $(n+m+3)$

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3132-M3139.
Преподаватель — Штукенберг Дмитрий Григорьевич.