

Математический анализ. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Творческий кризис Кохася	3
1.1. Системы Штейнера	3
1.1.1. Мудрецы и шляпы	3
1.1.2. Идея	3
1.1.3. Система Штейнера	3
1.1.4. Решаем мудрецов $n = 4, k = 9$	3
1.1.5. Еще решения мудрецов	4
2. Теория Меры	5
2.1. Системы множеств	5
2.2. Объем	7
2.3. Мера	9
2.4. Продолжение меры.	12
2.5. Мера Лебега.	13
3. Информация о курсе	15

1. Творческий кризис Кохася

1.1. Системы Штейнера

1.1.1. Мудрецы и шляпы

У нас есть n мудрецов и k шляп $k \geq n$. Мудрецы стоят в ряд. Каждому мудрецу на голову надевают одну из k шляп, выбранную случайным образом. Мудрец не видит шляпу на своей собственной голове, но видит шляпы всех впереди стоящих мудрецов (тот, кто стоит последним в ряду, видит всех, кроме себя, а тот, кто стоит первым, не видит никого).

Мудрецы не могут общаться друг с другом, жестики, поворачиваться и т.д. Однако, начиная с затылка ряда (с того, кто видит больше всех), каждого мудреца по очереди спрашивают: «Какого цвета твоя шляпа?». Мудрец должен ответить одним из k возможных цветов. При этом нельзя повторять цвета. Его цель — **назвать правильный цвет**. Мудрецы могут заранее договориться об общей стратегии, чтобы максимизировать число гарантированно угаданных шляп. В этом и состоит наша задача.

Есть разные интересные простые частные решения. Для расширения кругозора [тык](#) (там с самого начала). Нас интересует нечто другое.

1.1.2. Идея

Что вот по-хорошему должны сделать мудрецы?

- Первый мудрец почти всегда проиграет, он не может угадать, что у него на голове
- Первый должен передать какой-то «ключ» своим коллегам перед ним и коллеги имея ключ должны угадать свой номер. То есть по факту каждый человек видит ключ(key) знает тех, кто был до него и видит тех, кто был после него:

$$key \quad 1 \quad \dots \quad 3 \quad ? \quad 5 \quad \dots \quad 4$$

Мы хотим такой список, что зная $n - 1$ число, мы можем понять n -ое.

1.1.3. Система Штейнера

Определение. Система Штейнера $S(t, n, \nu)$

КПК вообще сделал лирическое отступление про «Конструктор Ромашку». Пример странный, так что формальное объяснение:

Система Штейнера это набор из n —элементных подмножеств множества X из ν элементов таких, что любое t —элементное подмножество множества X содержалось ровно в одном из выбранных подмножеств.

В литературе чаще используют $S(t, k, \nu)$

По факту наша задача про мудрецов свелась к $S(n - 1, n, k)$.

Бывает $S(4, 5, 11)$, не бывает $S(3, 4, 7)$

1.1.4. Решаем мудрецов $n = 4, k = 9$

Они берут конечное поле из 8 элементов: F_8 . Мы знаем, что конечные поля существуют в F_{p^l} .

Есть \mathbb{R} и \mathbb{R}^3 , мы умеем думать об \mathbb{R}^3 как о коэффициентах перед i, j, k . Возьмем идею.

Возьмем $1, \xi, \xi^2$ - 3 линейно независимых векторов в \mathbb{R}^3 . Пусть у нас выполнено:

$$\xi^3 + \xi + 1 = 0$$

У нас получается нечто из 8 точек(будем ставить 0 или 1 перед $1, \xi, \xi^2$). Почему-то они удовлетворяют аксиомам поля (можете проверить).

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ - гипербола, если $ad - bc \neq 0$.

Будем считать, что $f : (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ - **проективная прямая**

Оно представляет все точки, кроме асимптоты. Поэтому будем считать, что $\infty \rightarrow \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \rightarrow \infty$. То есть у нас биективная функция.

Теорема.

$\forall \underbrace{a, b, c}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \forall \underbrace{A, B, C}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \exists! f$ - дробно-линейная, такая что:

$$f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C$$

Доказательство:

Вот она:

$$\frac{y-A}{y-B} : \frac{C-A}{C-B} = \frac{x-a}{x-b} : \frac{c-a}{c-b}$$

КПК: Единственность покажете сами

Q.E.D.

А теперь склеиваем все воедино.

- Первый мудрец видит перед собой номера шляп: b, c, d . По вышесказанной теореме существует функция, которая отображает $f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$. Так как она единственная Первый мудрец говорит $f(1)$
- Второй мудрец имея 3 числа из 4 восстанавливает дробно-линейную функцию, а так как она единственная то получает ту же самую. Он восстанавливает свой номер и называет его
- Остальные аналогично восстанавливают свой номер

1.1.5. Еще решения мудрецов

X - множество, $|X| = k > 23$

Линия - это подмножество X

- Любые две пересекаются по ≤ 1 точке
- $\forall a, b \in X : \exists!$ линия $l : a, b \in l$
- $|l| = 4, 5, 6$

В угоду моей психике это будет сделано позже

2. Теория Меры

2.1. Системы множеств

Определение. Полукольцо множеств \mathcal{P}

X - множество. $\mathcal{P} \subset 2^X$ - полукольцо, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}, \exists \underbrace{B_1, \dots, B_n}_{\text{диз.}} \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n B_k$

Пример. Полукольцо ячеек в \mathbb{R}^m

$$a, b \in \mathbb{R}^m : [a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall x = 1 \dots m : a_k \leq x_k < b_k\}$$

То есть множество таких параллелепипедов. Очевидно оно удовлетворяет всем трем аксиомам полукольца.

Еще пример

$X = \{1, \dots, 6\}^m$. Покажем, что \mathcal{P} - полукольцо для этого множества

1. Очевидно принадлежит.
2. $A_{c_1 c_2} \cap A_{c_5} = A_{c_1 c_2 c_5} \in \mathcal{P}$ - работает
3. TODO

Пример. Полукольцо рациональных чисел

$[a, b)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$

Антисвойство

\mathcal{P} - полукольцо: $A, B \in \mathcal{P}$. Тогда вообще говоря $A \cup B, A \setminus B, X \setminus A, A \triangle B$ не лежат в \mathcal{P}

Свойство:

$$\forall A, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{P} : \exists \underbrace{D_1, \dots, D_n}_{\text{диз.}} - \text{кон. количество} : A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = \bigcup_{j=1}^n D_j$$

Это доказывается по индукции

Определение. Алгебра подмножеств пространства X

$\mathcal{a} \subset 2^X$ - такой объект называется **алгеброй**, если выполнены свойства:

1. $X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{a}$

Свойства

1. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{a}$
3. $A^c = X \setminus A \in \mathcal{a}$
4. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{a}$
5. Всякая алгебра есть полукольцо

Пример. Тривиальный - 2^X

Пример. Хитрый, но простой

$X = \mathbb{R}^2$. \mathcal{a} состоит ограниченных множеств и из дополнений ограниченных множеств.

- $\emptyset, X \in \mathcal{a}$
- Выполняется вторая аксиома:
 1. A - огр.

2. A^c - огр. +. B - огр. $\Rightarrow (A \setminus B)^c$ - огр. +. B^c - огр. $\Rightarrow A \setminus B \subset B^c \Rightarrow$ огр.

Пример. На счётность

X = бесконечное множество: $\mathcal{a} = \{A \subset X : A \text{ НБЧС или } X \setminus A \text{ НБЧС}\}$

Определение. σ -алгебра \mathcal{a} подмножества X

$\mathcal{a} \subset 2^X$ и выполняется:

1. \mathcal{a} - алгебра
2. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{a} : \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$

Свойство:

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{a} : \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$$

2.2. Объем

Определение. Конечно аддитивная функция

X, \mathcal{P} - полукольцо подмножеств X , $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. φ - **конечно аддитивная функция**, если:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$
2. $A, A_1, \dots, A_m, A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$ - дизъюнктное объединение, выполнено:

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^m \varphi(A_i)$$

Определение. Объем

X, \mathcal{P} - полукольцо подмножеств X , $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. φ - **объем**, если:

1. $\varphi \geq 0$
2. φ - конечно-аддитивно

Пример.

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает и непрерывно. Давайте зададим $\mu_g[a, b) = g(b) - g(a)$ - тоже пример объема.

Теорема. Свойства

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, где \mathcal{P} - полукольцо. Тогда выполнено:

0. $B \subset A \Rightarrow \mu B \leq \mu A$ — монотонность объема.
1. **Усиленная монотонность**: $\forall A_1, \dots, A_n, A \in \mathcal{P} : \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A$:

$$\mu A \geq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

2. **Конечная полуаддитивность**: $\forall A_1, \dots, A_n : A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} : \mu(B) < +\infty$. Тогда:

$$\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$$

Доказательство:

1. $A \setminus (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ - по модиф. условию кольца. Тогда по вышесказанному:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup \bigsqcup_{j=1}^m B_j$$

По определению объема:

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_j$$

Что и требовалось показать.

2. $B_i := A \cap A_i \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$.

Теперь давайте действовать так: Обозначим за C_i - то какие части множества добавляет та или иная B_i

$$C_i = B_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \right)$$

Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$. НО. Мы не можем сразу сделать вывод об объеме, так как не факт что C_i лежат у нас в полукольцо. НО каждое C_i мы можем составить из конечного числа множеств по аксиомам полукольца. Воспользуемся усиленной монотонностью и докажем требуемое.

3. Он очевиден из прошлых пунктов.

КПК: Это проверка на вашу внимательность

Q.E.D.

2.3. Мера

Определение. Мера.

X, \mathcal{P} - полукольцо: $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если:

1. μ - объем
2. μ - счетно-аддитивно

Замечание: Счетная аддитивность: $\forall A_1, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup A_i : \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Замечание: Объем \nRightarrow выполняется счетная аддитивность.

Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности.

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е μ — счетно-аддитивна
2. μ — счетно-полуаддитивна (нет дизъюнктивности): $\forall A, A_1 \dots \in \mathcal{P}, A \subset \bigcup A_i :$

$$\mu A \leq \sum_i \mu A_i$$

Доказательство:

1 \Rightarrow 2. Берем второй пункт теоремы о свойствах объема, но вместо конечного объединения по k берем счетное объединение (так как у нас теперь мера, то все хорошо) и тадам, все получается.

2 \Rightarrow 1. Надо проверить, что:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Воспользуемся усиленной монотонностью, тогда для любого n будет верно:

$$\sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

По определению счетной полуаддитивности:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Итого :

$$\sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

И если перейти к пределу при $n \rightarrow +\infty$ мы сразу получим то, что требуется.

Q.E.D.

Следствие: $A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P}, \mu A_n = 0, \mu$ - объем. Пусть $A \subset \bigcup A_n$. Тогда $\mu A = 0$

Теорема о непрерывности меры снизу.

\mathcal{A} - алгебра. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - объем. Тогда:

1. μ — мера
2. μ — непрерывны снизу:

$$\forall A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Следует:

$$\mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

Теорема о непрерывности меры сверху.

\mathcal{a} — алгебра, $\mu : \mathcal{a} \rightarrow \mathbb{R}$ — конечный объем. Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е. счетно-аддитивна
2. μ — непрерывна сверху, т.е.:

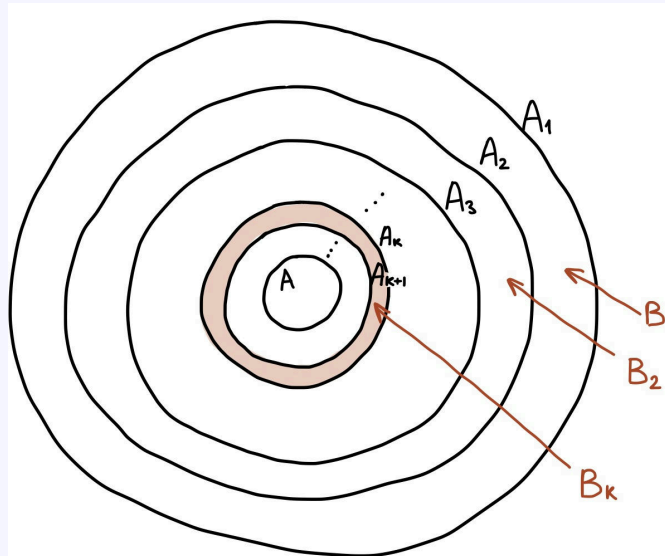
$$\forall A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Следует:

$$\mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

Доказательство:

Нарисуем упрощающий рисунок:



$1 \Rightarrow 2$

Пусть $B_k := A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда такие B_k дизъюнктивны. Отсюда получаем, что

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \sqcup A$$

Так как μ мера, то получаем, что:

$$\mu A_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i}_{\text{сходится}} + \mu A$$

Теперь посмотрим на «хвост» этого ряда, и аналогично первому утверждению доказательства напомним:

$$\mu A_i = \sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k + \mu A$$

Т.к. ряд из $\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i$ сходится, то при $i \rightarrow +\infty$, «хвост» $\rightarrow 0$: $\sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ Делаем предельный переход в равенстве выше, и получаем:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i = 0 + \mu A = \mu A$$

2 \Rightarrow 1. Эта часть доказательства будет потом переписана, автор пока копирует то, что говорит Кохась. Если что это примерно 10 минут после перерыва.

В доказательстве этого пункта мы будем пользоваться только следствием пункта 2, а именно:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \quad A = \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i = 0$$

Мы хотим проверить счетную аддитивность, т.е.

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$$

Для этого введем множества A_k следующим образом:

$$A_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^k C_i \right)$$

Так как это конечное объединение, то $\bigsqcup_{i=1}^k C_i \in \mathcal{a}$, а значит и правая часть $\in \mathcal{a} \Rightarrow A_k \in \mathcal{a}$

Заметим также, что $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \emptyset$, т.к. все C_i дизъюнкты, то любая точка из C содержится ровно в одном C_i , а значит в $A_{k>i}$ она уже содержаться не будет (по определению A_k), и в пересечении всех A_k её тоже не будет

Отсюда следует, что мы можем применять следствие 2 пункта из начала доказательства.

Осталось только заметить, что:

$$C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k$$

Т.к. μ — объем:

$$\mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k$$

Делаем предельный переход при $k \rightarrow +\infty$

$$\mu C = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i + 0$$

Q.E.D.

2.4. Продолжение меры.

Определение. Пространство с мерой

Обозначается тройкой $\left(\underbrace{X}_{\text{мн-во}}, \underbrace{\mathcal{a}}_{\sigma\text{-алг.}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера}} \right)$

Определение. Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера (или объём)

μ — σ -конечная мера (или объём), если

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \quad \mu(A_i) < +\infty$$

Замечание. Множество измеримо, если оно лежит в области определения меры

Теорема о лебеговском продолжении меры.

$\mathcal{P}_0 \subset 2^X$ — полукольцо: $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — σ -конечная мера.

Тогда $\exists \sigma$ -алгебра $\mathcal{a} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{a}$ и $\exists \mu$ — мера на \mathcal{a} такие, что:

1. $\mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, т.е. μ — продолжение μ_0 на \mathcal{a}
2. μ — полная мера
3. Если \mathcal{a}_1 — σ -алгебра, μ_1 -мера, полная, $\mathcal{P} \in \mathcal{a}_1, \mu_1|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то $\mathcal{a} \subset \mathcal{a}_1, \mu_1|_{\mathcal{a}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{a} : \mu_2|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то тогда $\mu|_{\mathcal{P}_2} = \mu_2$
5. $A \in \mathcal{a}, \mu A < +\infty$ — кон, то

$$\mu A = \inf \left(\sum \mu P_k, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, \text{ где } P_k \in \mathcal{P} \right)$$

К счастью, без доказательства

Определение. μ -измеримое множество

$A \subset X$ — μ -измеримо, если $\forall E \subset X$:

$$\mu E = \mu(A \cap E) + \mu(A^C \cap E)$$

2.5. Мера Лебега.

Автор ничего не понимает и еще в будущем будет стдеть и перепечатывать доказательство. Пока так.

Лемма. Счетная аддитивность классического объема

Счетная аддитивность классического объема \mathcal{P}^m — множество всех ячеек на \mathbb{R}^m .

μ — классический объем. Тогда μ — σ -конечная мера.

Доказательство:

1. σ -конечность очевидна: можно либо разлиновать пространство на клеточки как в тетради, либо просто взять увеличивающийся параллелепипед
2. Надо доказать счетную аддитивность. Давайте по теореме об эквив. счетной аддитивности и полуаддитивности, докажем полуаддитивность:

$$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n) : P \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu P \leq \sum \mu P_n$$

Далее под фразой «чуть уменьшим» вектор из \mathbb{R}^m будем подразумевать небольшое уменьшение каждой из его координат. Возьмем $\varepsilon > 0$:

1. Чуть уменьшим b и получим b' :

$$[a, b'] \subset [a, b) : \mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$$

2. Теперь для каждого P_n немного уменьшим a_n и получим a'_n :

$$(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n) : \mu([a'_n, b_n) \setminus P_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

3. Получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a'_n, b_n)$

Т.к. это компакт, а справа стоит открытое покрытие, то по определению существует конечное подпокрытие:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n)$$

Теперь в правую часть включения добавим часть точек, а слева уберем. Очевидно включение от этого не сломается:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n)$$

По конечной аддитивности:

$$\mu[a, b) - \varepsilon \stackrel{(1)}{\leq} \mu[a, b') \stackrel{(3)}{\leq} \sum_{n=1}^N \mu[a'_n, b_n) \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^N \left(\mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

$$\mu[a, b) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N \mu[a_n, b_n) \leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n)$$

Делаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получаем ровно то, что и хотели.

Q.E.D.

Определение. Мера Лебега

Мера Лебега в \mathbb{R}^m — это результат применения теоремы о продолжении лебеговском продолжении меры к класс. объему.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{P}, \mu_0) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda)$, где μ_0 — классический объем, λ, λ_m — мера Лебега (иногда хотим указывать размерность пространства)

Свойство:

1. Объединение, пересечение (в том числе счетные) множеств, измеримые по Лебегу тоже
2. Полнота. $\lambda A = 0, B \subset A \Rightarrow \lambda B = 0$
3. Содержит все открытые и замкнутые множества в \mathbb{R}^m (доказательство см ниже)

Лемма. О смысле жизни открытых и замкнутых множеств

$O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $\exists Q_i : O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i$, где Q_i — кубические ячейки:

- можно считать, что у них рациональные координаты.
- можно даже считать, что с двоично-рациональными
- они «закопаны» внутрь области O . $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$

Доказательство:

$\forall x \in O$: Возьмем $Q(x)$ — любую кубическую ячейку с нужными нам из условия свойствами

$$O = \bigcup_{x \in O} Q(x) \stackrel{\text{шаманим}}{=} \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i)$$

Шаманство: O — континуальное множество. Казалось бы, как такое посчитать. Заметим, что ячеек с двоично-рациональными координатами счетно. Так что мы просто пройдемся по ним и будем нумеровать, так что шаманство работает!

Q.E.D.

3. Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3238-М3239.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Уже по традиции здесь будут мои пописульки:

09.01.25 — Старт Кохася. Пока не убивает

09.08.25 — Еще не убивает

