Линейная алгебра

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Линейные формы. **2**
1.1 Практика 1. 2
1.1.1 Задача 1. 2
1.1.2 Задача 2. 2
1.1.3 Задача 3. 2
1.1.4 Задача 4. 3
1.2 Дз 1. 4
1.2.1 Задача 1. 4

2 Тензоры. **5**
2.1 Практика 1. 5
2.1.1 Задание 1. 5
2.1.2 Задание 2. 5
2.1.3 Задание 3. 6
2.1.4 Задание 4. 6
2.1.5 Задание 5. 6
2.1.6 Задание 6. 7
2.1.7 Задание 7. 7
2.2 Домашнее задание 2. 8
2.2.1 Задание 1. 8
2.2.2 Задание 2. 8
2.2.3 Задание 3. 9
2.2.4 Задание 4. 10

3 Информация о курсе **11**

1 Линейные формы.

1.1 Практика 1.

1.1.1 Задача 1.

V_3 — пространство геометрических векторов. Отображение $f : V_3 \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall \overline{x} \in V_3, f(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{a})$, где $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

1. Доказать, что $f \in V_3^*$
2. найти коэффициенты f относительно стандартного базиса пространства V_3.

Решение:

Ну давайте, докажем, что это линейная форма.

$$\forall x_1, x_2 \in V_3, \lambda \in R : f(x_1 + \lambda x_2) = (x_1 + \lambda x_2, a) = (x_1, a) + \lambda(x_2, a) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Откуда линейная форма.

Теперь найдем коэффициенты f относительного стандартного базиса. Для этого мы должны применить функцию. К базисным векторам:

$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = -3$, то есть $a_f = (1, 2, -3)$ — в стандартном базисе

1.1.2 Задача 2.

P_n - пространство многочленов степени не выше n. Отображение $f : P_n \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall p \in P_n : f(p) = p(t_0)$, где t_0 - фиксированное константа из $\mathbb{R}$.

1. Доказать, что $f \in P_n^*$
2. Найти коэффициенты f относительно канонического базиса пространства P_n
3. Найти коэффициенты f относительно базиса $1, (t - t_0)$ и так далее.

Решение:

Показать, что это линейная форма крайне тривиально. Подставляя канонический базис мы получим $a_f = (1, t_0, \dots, t^n)$, подставляя сдвинутый базис получим $a_f = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

1.1.3 Задача 3.

e_1, e_2, e_3 - базис линейного пространства V. $\forall x = x^i e_i \in V : f(x) = x^1 + 2x^2 + 3x^3$. Найти выражение для f в базисе $e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_2 + e_3, e'_3 = e_3 + e_1$.

Решение:

Тут можно поступать разными образами. Можно просто подставить в функцию новые базисы и найти их значения. Можно найти обратную матрицу перехода и по ней получить новые значения. В общем тривиально, думать не хочу.

1.1.4 Задача 4.

P_2 - пространство многочленов степени не выше 2.

1. линейная форма δ сопоставляет каждому многочлену его свободный член. Разложить δ в комбинацию линейных форм f^1, f^2, f^3, где f^j определены равенством $\forall p \in P_2, f^j(p) = p(j)$
2. Для базиса f^1, f^2, f^3 построить сопряженный к нему и с помощью найти координаты δ в базисе f^1, f^2, f^3.

Решение:

Найдем каждую f в базисе e_1, e_2, e_3. Для этого мы должны подставить в f-ки наши базисные вектора. Получим:

$a_{f^1} = (1, 1, 1); a_{f^2} = (1, 2, 4); a_{f^3} = (1, 3, 9)$. Получили вот такую штучку. Теперь надо с помощью них собрать $a_\delta = (1, 0, 0)$. Для этого можно решить уравнение но я бы перешел дальше.

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Тогда найдем $T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$. Теперь, чтобы найти координаты в базисе f мы должны:

$$a' = aT = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = (3, -3, 1)$$

Все верно!!!

1.2 Дз 1.

1.2.1 Задача 1.

На пространстве P_2 — многочленов степени не выше второй заданы две системы линейных форм f^i и g^j:

$$\forall p \in P_2 : f^i(p) = p(i), i = 1, 2, 3$$
$$\forall p \in P_2 : g^j = p^{(j-1)}(2), j = 1, 2, 3$$

1. Проверить, что каждая из систем является базисом в пространстве $(P_2)^*$
2. Построить сопряженные базисы к каждой из систем
3. Найти матрицы S и T
4. Написать ковариантный и контрвариантный законы преобразования координат

Решение:

Сперва распишем все в сопряженным к базису e_1, e_2, e_3. Для этого подставим в f^i, g^j e_1, e_2, e_3.

$a_{f^1} = (1, 1, 1), a_{f^2} = (1, 2, 4), a_{f^3} = (1, 3, 9)$

$a_{g^1} = (1, 2, 4), a_{g^2} = (0, 1, 4), a_{g^3} = (0, 0, 2)$

В принципе видно, что ранги системы векторов равны 3 в обоих случаях, откуда базисы в $(P_2)^*$

Теперь напишем $S_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, S_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_f = S_f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}, T_g = S_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$

Теперь напишем ковариантный и контрвариантный законы координат:

$x' = Sx$ - контрвариатное. $a' = aT$ - ковариантное.

2 Тензоры.

2.1 Практика 1.

2.1.1 Задание 1.

1. Отображение $f\colon \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, $\forall\, y \in (\mathbb{R}^3)^*$
   1) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 - 4x^3y_1 - 2x^3y_2$;
   2) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 - 4x^3(y_1)^2 - 2x^3y_2$;
   3) $f(x,y) = 3x^1y_2 - x^2y_2 + 2x^2y_3 + 3 - 4x^3y_1 - 2x^3y_2$.
   Является ли отображение f тензором? Если да, то какого типа и какова матрица тензора?
   4) Фиксируем $e_1, \cdots, e_n$ базис пространства V.
   $\forall f \in V^*\ \forall\, x = \mathrm{x}^i e_i \in V\ \ f(x) = \mathrm{x}^i a_i$.
   Отображение $g\colon V^* \to \mathbb{R}$ определено равенством $\forall\, f \in V^*\ g(f) = a_1 + a_2 + \cdots a_n$.
   Является ли отображение g тензором? Если да, то какого типа и какова матрица тензора?

(Мне стало лень перепечатывать)

Решение:

Так ну давайте быстренько

1. Да. $f \in T(3,3)$. Матрица тензора находится подстановкой базисных векторов, сами посчитаете, дорогие читатели.
2. Нет, тк есть $(y_1)^2$ и ломается линейность.
3. Нет, тк есть 3 и ломается линейность.
4. Нет, тк мы изначально фиксируем базис для работы этой функции!!!

2.1.2 Задание 2.

$\dim V = 3, D$ - 3-форма на пространстве V такая, что $D(e_1, e_2, e_3) = 1$, где e_1, e_2, e_3 - базис пространства V.

1. Определить тип тензора D и составить его матрицу
2. Записать матрицу любой другой три формы на пространстве V
3. выписать формулу для значения D на наборе векторов a, b, c пространства V

Решение:

$D \in T(3,0)$. Ну начнем с того, что у нас D - форма антисимметрична, то есть значения при совпадающих индексах i, j, k будут нулями. Зная это составим матрицу и получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Если мы хотим получить любую такую матрицу, то нам надо будет лишь подставить α - значение на базисных векторах:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выписать формулу тривиально, тк это будет просто определитель матрицы.

2.1.3 Задание 3.

Записать формулу замены координат для тензора ранга 2 в матричном виде.

Решение:

У нас есть три случая:

1. $\alpha^{ij} \in T(0,2)$.
$$\alpha'^{kl} = \alpha^{ij} s_i^k s_j^l = (S\alpha S^T)_l^k$$

2. $\alpha_j^i \in T(1,1)$.
$$a_l'^k = \alpha_j^i t_l^j s_i^k = (\alpha_j^i t_l^j) s_i^k = (\alpha T)_l^i s_i^k = (S\alpha T)_l^k$$

3. $\alpha_{ij} \in T(2,0)$.
$$\alpha'_{kl} = \alpha_{ij} t_k^i t_l^j = (T^T \alpha T)_l^k$$

2.1.4 Задание 4.

Тензор $\alpha \in T(2,1)$ задан матрицей своих координат

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислить элемент матрицы тензора α'^2_{13} в новом базисе $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3, e'_3 = e_2$.

Решение:

Ну тут все легко, ведь просто поменяли местами 2 вектора. То есть на самом деле $\alpha'^2_{13} = \alpha^3_{12} = 6$

2.1.5 Задание 5.

Найти тип и матрицу тензора $\gamma = \alpha \otimes \beta$ и $\overline{\gamma} = \beta \otimes \alpha$, где α и β заданы соответственно своими матрицами.

1. $\alpha \in T(0,1), \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in T(2,0), \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\alpha \in T(0,1), \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in T(1,1), \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Решение:

Решим сначала первый случай. Заметим, что в данном случае $\gamma = \overline{\gamma}$. И будем делать все по формуле:

$$\gamma^i_{jk} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь второй пункт:

$$\gamma^{ij}_k = \alpha^i \cdot \beta^j_k = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{\gamma}^{ij}_k = \beta^i_k \cdot \alpha^j = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 5 & -5 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 7 & -7 & 0 & 8 & -8 & 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

2.1.6 Задание 6.

6. $\dim V = 3$. Найти значение тензора $\gamma = \alpha \otimes \beta$ на наборе векторов $\xi_1 = 2e_1 - e_2$, $\xi_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\xi_3 = e_2 + e_3$ и $\eta^1 = 3\omega^1 - 2\omega^2 + \omega^3$, $\eta^2 = \omega^2 + 2\omega^3$, если $\alpha = 2\omega^2 \otimes e_2 + (\omega^1 + 3\omega^2) \otimes (e_1 - 2e_2 + 3e_3)$, а все координаты тензора β в стандартном базисе пространства $\mathrm{T}_{(2,1)}$ равны 2.

Решение:

Для этого, я должен раскидать ξ, η между a, b. $a \in T(1,1)$, $b \in T(2,1)$. Жестко раскидываем векторочки по функциональному свойству и выиграли.

2.1.7 Задание 7.

$\alpha \in T(1,1), x \in T(0,1), \gamma = \alpha \otimes x$

Написать две возможные свертки.

Решение:

просто в тупую

2.2 Домашнее задание 2.

2.2.1 Задание 1.

1. $\alpha = (e_1 - e_2 - e_3)\otimes(-2e_2 + e_3)\otimes 2e_2 - e_3\otimes(-e_1 + e_2 + 2e_3)\otimes e_1$
а) найти матрицу тензора β, полученного из тензора α транспонированием по правилу $\beta^{ijk} = \alpha^{kji}$,
б) найти $\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$, если $\eta^1 = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3$, $\eta^2 = 2\omega^1 - \omega^2 - \omega^3$, $\eta^3 = 3\omega^1 - \omega^2 + \omega^3$; решить задачу двумя способами, используя перестановку аргументов тензора α и перестановку функций в сумме тензорных произведений, определяющих тензор α.

Решение:

а) Давайте найдем нашу σ. Она равна (321). То есть, у нас такое транспонирование. Давайте тогда сначала надйем матрицу $\alpha \in T(0,3)$. Если я не дурачок и умею считать, то получается

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь транспонируем, у нас зафиксирован столбец:

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Все верно!

b) Найдем $\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = \beta(w^1 + w^2 + w^3, 2w^1 - w^2 - w^3, 3w^1 - w^2 + w^3)$ Раскладываем эту штуку по линейности и получаем ответ. Но мне куда более нравится:

$$\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = \alpha(\eta^3, \eta^2, \eta^1)$$

Дальше мы просто подставляем в искомую и получаем $3 \cdot 1 \cdot 2 - (1 \cdot -5 \cdot 1) = 11$

2.2.2 Задание 2.

2.Тензор $\alpha \in T_{(0,3)}$ задан матрицей. Выяснить, является ли тензор симметричным (антисимметричным), и если да, то по каким индексам:

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ответ: тензор кососимметричен по 1 и 3-му индексам.

Я не знаю как это нормально делать, на глаз?

2.2.3 Задание 3.

3.Тензор $\alpha \in \mathrm{T}_{(2,2)}$ задан матрицей.

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Найти матрицы тензоров $\alpha^{(ij)}_{kl}$, $\alpha^{(ij)}_{(kl)}$, $\alpha^{ij}_{(kl)}$, $\alpha^{[ij]}_{kl}$, $\alpha^{ij}_{[kl]}$, $\alpha^{[ij]}_{[kl]}$, $\alpha^{(ij)}_{[kl]}$, $\alpha^{[ij]}_{(kl)}$.

Решение:

Симметрирование - круглые скобки. Альтернирование - квадратные

1) $\alpha^{(ij)}_{kl} = \begin{pmatrix} 3 & 15/2 & 5 & 3/2 \\ 15/2 & 2 & 3/2 & 4 \\ 1 & 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

В данном случае слой и сечение зафиксированы, так что чилл море песок, нам всего лишь надо просимметрировать квадратные матрички.

2) В данном случае порядок симметрирования не имеет значения.

$\alpha^{(ij)}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 3 & 15/2 & 3 & 1 \\ 15/2 & 2 & 1 & 5/2 \\ 3 & 1 & 2 & 7/2 \\ 1 & 5/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\alpha^{ij}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3/2 \\ 9 & 2 & 1/2 & 5/2 \\ 3 & 3/2 & 2 & 3 \\ 1/2 & 5/2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\alpha^{[ij]}_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

В данном примере у нас происходит альтернирование в каждой части

5) $\alpha^{ij}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\alpha^{[ij]}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$7)\alpha^{(ij)}_{[kl]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8)\ \alpha^{[ij]}_{(kl)} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Задание 4.

4*. Тензор $\alpha \in \mathrm{T}_{(1,1)}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить α^i_i, $\alpha^i_{[i}\alpha^j_{j]}$, $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]}$.

Замечание: $\beta = \alpha \otimes \alpha$; $\beta^{ij}_{km} = \alpha^i_k \alpha^j_m$; $\alpha^i_{[k}\alpha^j_{m]} = \beta^{ij}_{[km]}$; аналогично $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]}$.

Ответ: $\alpha^i_i = \mathrm{tr}A = 5$; $\alpha^i_{[i}\alpha^j_{j]} = M^{12}_{12} + M^{13}_{13} + M^{23}_{23} = 5$; $\alpha^i_{[i}\alpha^j_j\alpha^k_{k]} = \det A = 6$.

Решение.

Ну в первом случае это просто след матрицы.

$\beta^{ij}_{kl} = \alpha^i_k \otimes \alpha^j_k$

Заметим, что альтернируя по нижним индексам, мы получим, что на совпадающих i, j стоят нули, откуда нам надо сложить только челиков, на несовпадающих. При этом не забыв про альтернировать. Откуда уже вроде получается нужное

3 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадьевна.

Это мои конспектики с практик. Может кому полезно будет :)