Линейная алгебра

Леонид Альжанов, Вячеслав Чепелин и другие

Оглавление

Глава 1

Аналитическая геометрия

1.1 Элементы векторной алгебры

1.1.1 Основные определения

V — пространство геометрических векторов.

Геометрический (свободный) вектор $\vec{a}$ — направленный отрезок в пространстве.

Длина (модуль) вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$ — длина отрезка, на котором строится вектор.

Нулевой вектор $\vec{0}$ — имеет длину ноль, начало совпадает с концом.

Вектор независим от точки приложения (его начала)

$\vec{a} \parallel \vec{b} \overset{def}{\iff}$ они лежат на одной или параллельных прямых

$\forall \vec{a} : \vec{0} \parallel \vec{a}$

$\upuparrows$ и $\updownarrows$ — обозначение сонаправленности и разнонаправленности векторов.

$\vec{a} = \vec{b} \ \overset{def}{\iff} \begin{cases} \vec{a} \upuparrows \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны $\overset{def}{\iff}$ лежат или параллельны одной плоскости.

$\vec{a}_0$ — орт вектор вектора $\vec{a} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \vec{a}_0 \upuparrows \vec{a} \\ |\vec{a}_0| = 1 \end{cases}$

Вектора можно складывать: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Строится по правилу треугольника или параллелограмма.

Вектора можно умножать на скаляр: $\vec{c} = \vec{a} \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\lambda|$

$\lambda > 0 : \vec{a} \upuparrows \vec{c}$

$\lambda < 0 : \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$

$\lambda = 0 : \vec{c} = \vec{0}$

Вектора можно вычитать: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

У $(V, \text{“}+\text{”}, \text{“}\cdot\lambda\text{”})$ есть свойства:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\exists \vec{0} : \forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\forall \vec{a} : \exists(-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall \vec{a}, \vec{b} : \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall \vec{a} : (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall \vec{a} : (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$
8. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Всё это доказывается из школьной геометрии. Эти свойства (аксиомы) линейного пространства $\Rightarrow (V, \text{“}+\text{”}, \text{“}\cdot\lambda\text{”})$ — линейное пространство.

$\left.\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right\} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}$ — линейная комбинация векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, или $\vec{v}$ разложен по векторам $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ — нулевая линейная комбинация.

Линейная комбинация — тривиальная $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = 0$

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно независимая $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ все её нулевые линейные комбинации — тривиальные. То есть система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно независимая $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = 0$. Пример: $\forall a, b : a \nparallel b$

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависимая $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ существует её нулевая нетривиальная линейная комбинация. То есть система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависимая $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda_i \neq 0 : \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Пример: $\forall a, b : a \parallel b$

Свойства линейной зависимости:

1. $\vec{0} \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависимая система.

   Пусть $\vec{v}_k = \vec{0}$. Возьмём $\lambda_k = 1$, а $\forall i \neq k : \lambda_i = 0$. Значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 1\vec{v}_k + \dots + 0\vec{v}_n = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad Q.E.D$

2. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависимая система $\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}, \vec{v}_{n+2}, \dots \vec{v}_{n+m}$ — линейно зависимая система.

Возьмём $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, создающие нулевую нетривиальную линейную комбинацию, а $\forall i \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ возьмём $\lambda_i = 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n+m} \lambda_i \vec{v}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = 0\vec{v}_{n+1} + 0\vec{v}_{n+2} + \dots + 0\vec{v}_{n+m} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ $\quad Q.E.D$

3. В линейно зависимой системе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ есть вектор, который можно выразить линейной комбинацией других, то есть $\exists \vec{v}_k : v_k = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \mu_i \vec{v}_i$.

   Возьмём $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, создающие нулевую нетривиальную линейную комбинацию $\Rightarrow \exists \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \lambda_k \vec{v}_k = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \Rightarrow$ возьмём $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \Rightarrow v_k = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \mu_i \vec{v}_i \quad Q.E.D$

Базис прямой — любой ненулевой вектор на этой прямой.

Базис плоскости — любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в данной плоскости. Базис пространства — любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в этом пространстве.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства.

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{3} \vec{e}_i x_i, x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ — координаты $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Аналогично для плоскости и прямой.

1. $\forall \vec{x} \parallel L \ \exists! x_1 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1$, где $\vec{e}_1$ — базис L.

   Пусть $O \in L$. Приложим к O начала векторов $\vec{x}$ и $\vec{e}_1$. $\vec{x} \parallel \vec{e}_1 \Leftrightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1$ $Q.E.D.$

   $\vec{e}_1 \upuparrows \vec{x} : x_1 > 0$

   $\vec{e}_1 \updownarrows \vec{x} : x_1 < 0$

   $\vec{x} = \vec{0} : x_1 = 0$

2. $\forall \vec{x} \parallel \alpha \ \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — базис α.

   Аналогично, пусть $O \in \alpha$. Приложим к O начала векторов $\vec{x}, \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. $\vec{x} = \vec{0} : \vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$.

   $\vec{x} \neq \vec{0}$: пусть B — конец $\vec{x}$. Проведём $L_2 \parallel \vec{e}_2, B \in L_2$.

   Проведём $L_1 \parallel \vec{e}_1, O \in L_1$. $A = L_1 \cap L_2$. $\vec{x} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

   $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow (\text{по пункту } 1) \Rightarrow \exists! x_1 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OA} = x_1 \vec{e}_1 \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow (\text{по пункту } 1) \Rightarrow \exists! x_2 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = x_2 \vec{e}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \ Q.E.D.$$

3. $\forall \vec{x} \in V \ \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис V.

   Пусть $O \in V$. Приложим к O начала векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. $\alpha(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. $\vec{x} = \vec{0} : \vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$. $\vec{x} \neq \vec{0}$: пусть B — конец $\vec{x}$. Проведём $L \parallel \vec{e}_3, B \in L$. $A = L \cap \alpha$. $\vec{x} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

   $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \parallel \vec{\alpha} \Rightarrow (\text{по пункту } 2) \Rightarrow \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OA} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow (\text{по пункту } 1) \Rightarrow \exists! x_3 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = x_3 \vec{e}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \ Q.E.D.$$

То есть, любой вектор может быть разложен по базису, и единственным образом.

Следствия:

1. $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i, \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i : \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : a_i = b_i$

2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \sum\limits_{i=1}^{3} c_i\vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : c_i = a_i + b_i$

   $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i + \sum\limits_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{3}(a_i + b_i)\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{3} c_i\vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : c_i = a_i + b_i \ Q.E.D.$

3. $\lambda\vec{a} = \vec{c} = \sum\limits_{i=1}^{3} c_i\vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : c_i = \lambda a_i$

   $\vec{c} = \lambda\vec{a} = \lambda\sum\limits_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{3}(\lambda a_i)\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{3} c_i\vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : c_i = \lambda a_i \ Q.E.D.$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \lambda\vec{b} \\ \vec{b} = \lambda\vec{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : \left[\begin{array}{l} a_i = \lambda b_i \\ b_i = \lambda a_i \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$ — коэффициент пропорциональности.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ — коллинеарны $\Rightarrow$ они линейно зависимы в пространстве. Если они коллинеарны, то очевидно. Если $\exists \vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2 \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, то мы можем выразить остальные вектора в $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — они линейно зависимы в пространстве $Q.E.D.$

1.1.2 Система координат на плоскости и в пространстве

Говорят, что в пространстве введена декартова система координат (ДСК), если зафиксирована $(\cdot)O$(начало координат) и базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Осями координат называются прямые, содержащие базисные вектора.

Ox - абсцисс, Oy - ординат, Oz - аппликат

Координатами точки M в ДСК $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ называются координаты вектора $\vec{OM}$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Даны 2 точки: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Задача: Даны 2 точки: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ и точка $M = (m_1, m_2, m_3)$, делящая отрезок AB с $\frac{AM}{MB} = \lambda > 0$. Найти координаты точки M через A, B, λ.

$AM = \lambda MB \Leftrightarrow |\vec{AM}| = \lambda|\vec{MB}| \Rightarrow \vec{AM} = \lambda\vec{MB}$

$m_i - a_i = \lambda(b_i - m_i) \Leftrightarrow m_i = \frac{\lambda b_i + a_i}{1+\lambda}$

В дальнейшем будем работать с ортогональной д.к.с., где $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ попарно ортоганальны и нормированны $(|e_i| = 1)$.

Длина вектора в ортонормированной декартовой системе координат равна квадратному корню суммы квадратов координат.

В трёхмерном пространстве сумма квадратов косинусов углов между радиус-вектором точки и осями координат равна единице.

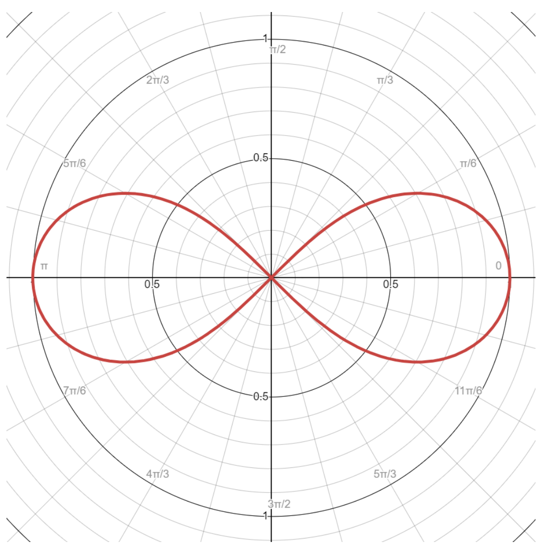
Пусть точка имеет координаты (x, y, z) и располагается на расстоянии R от центра координат. Тогда $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, что значит, что $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{R}\right)^2 = 1$. Заметим, что $\frac{x}{R}$ — это косинус между радиус-вектором точки и осью Ox.

Полярная система координат — это точка и луч, исходящий из неё, на плоскости. При этом координатами являются расстояние от точки и угол против часовой стрелке от полярного луча до радиус-вектора точки. У точки ноль нет полярных координат, считают, что у нее $r = 0$.

Связь между декартовыми и полярными координатами. Обычно ДСК связывают с ПСК так: центр общий, а полярный луч — положительное направление Ox. Тогда $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Обратно: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi k$ (неоднозначно какой именно точке, надо смотреть в какой четверти точка)

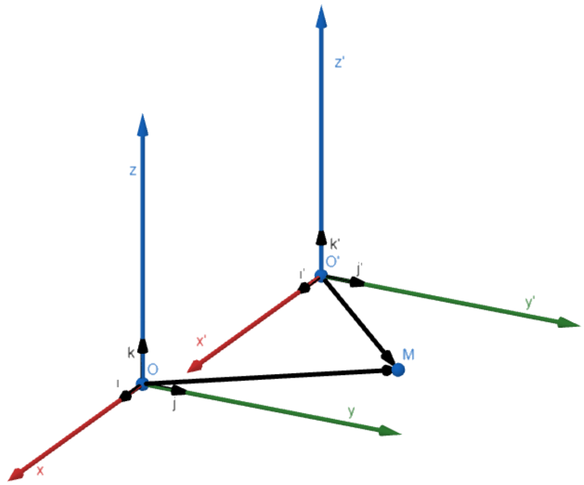
Лемниската Бернулли

$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Но приведя в п.с.к: $r^4 = r^2(\cos^2 x - \sin^2 x) \leftrightarrow r = \sqrt{\cos(2x)}$. В такой форме можно нарисовать эскиз графика:



1.1.3 Преобразования в ДСК

а) Параллельный перенос

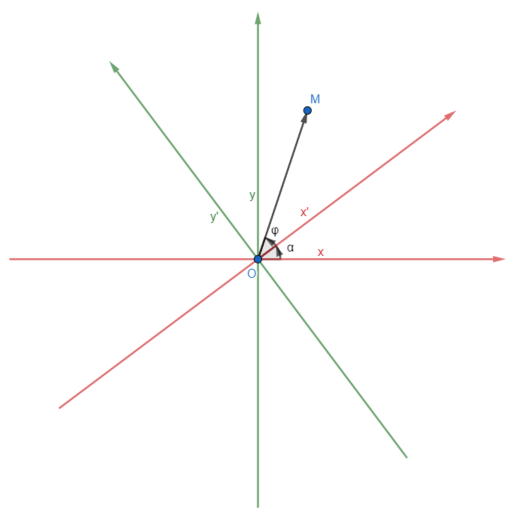


Создадим новую ДСК с центром в $O' = (x_0, y_0, z_0)$.

$M = (x, y, z)$(в старой) $= (x', y', z')$(в новой) $= (x_0 + x', y_0 + y', z_0 + z')$(в старой)

b) Поворот

- На плоскости:



Создадим новую ДСК, повёрнутую на α.

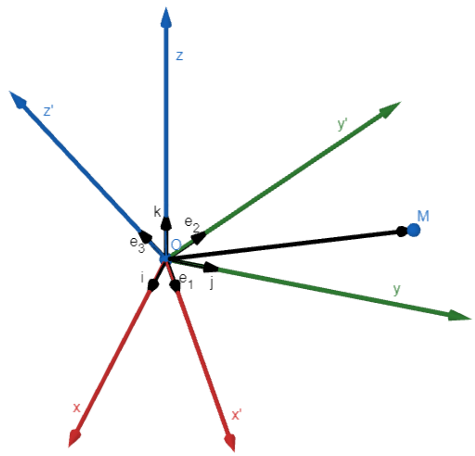
$M = (x, y) = (r\cos(\varphi + \alpha), r\sin(\varphi + \alpha)) = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ — Матрица поворота.

- В пространстве:



Создадим новую ДСК, повёрнутую в пространстве. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \to \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Оси $x, y, z \to x', y', z'$. Оба базиса попарно ортогональны и нормированы.

$m = 1, 2, 3 : \vec{e}_m = (\cos\alpha_m, \cos\beta_m, \cos\gamma_m)$ - направляющие косинусы.

$$\begin{aligned}
&M = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \\
&= x'(\cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j} + \cos\gamma_1\vec{k}) + \\
&+ y'(\cos\alpha_2\vec{i} + \cos\beta_2\vec{j} + \cos\gamma_2\vec{k}) + \\
&+ z'(\cos\alpha_3\vec{i} + \cos\beta_3\vec{j} + \cos\gamma_3\vec{k}) = \\
&= \vec{i}(x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3) + \\
&+ \vec{j}(x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3) + \\
&+ \vec{k}(x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)
\end{aligned}$$

Т.к. координаты точки задаются единственным способом, то:

$$\begin{cases}
x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\
y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\
z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3
\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

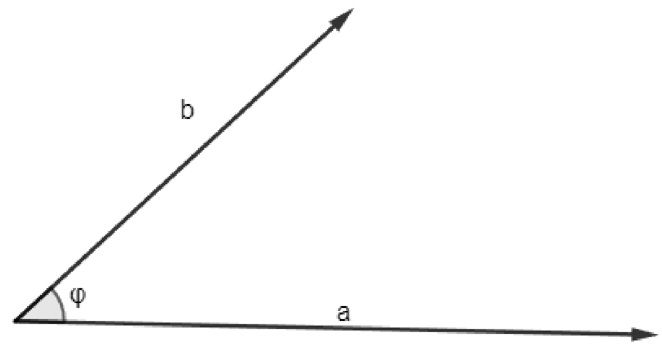
Столбцы в этой матрице - координаты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

1.1.4 Скалярное произведение векторов

$`` \cdot " : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$

$\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \to (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi;\ \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$



Свойства: $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3)$

1. Симметричность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

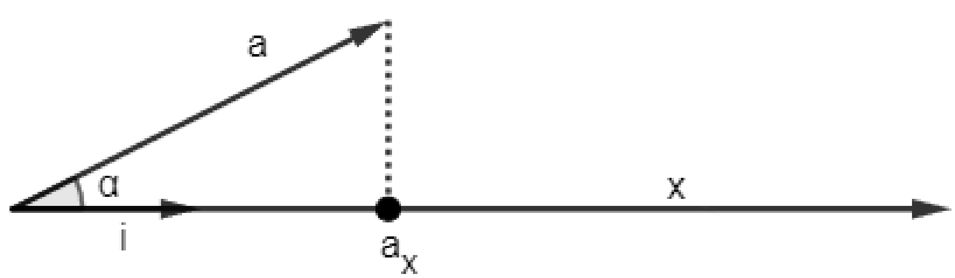
   Очевидно

2. Аддитивность по 1-му аргументу: $\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V_3 : (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$

   $\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ — Проекция $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$.

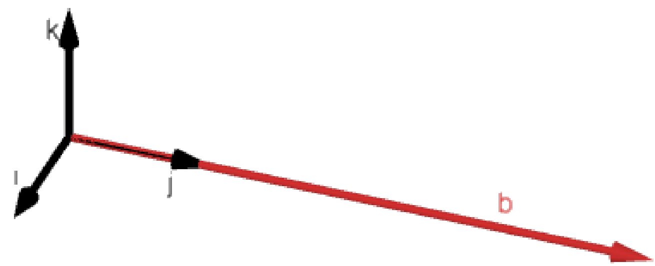
   $\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a} \ = |\vec{a}| \cos \varphi; \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

   $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \ \alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$



   $a_x = \operatorname{proj}_{\vec{i}} \vec{a} = \vec{i} \cdot \vec{a}$, $a_y = \operatorname{proj}_{\vec{j}} \vec{a} = \vec{j} \cdot \vec{a}$, $a_z = \operatorname{proj}_{\vec{k}} \vec{a} = \vec{k} \cdot \vec{a}$

   Выберем ДСК таким образом, что $\vec{i} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ — орт вектора $\vec{b}$



$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

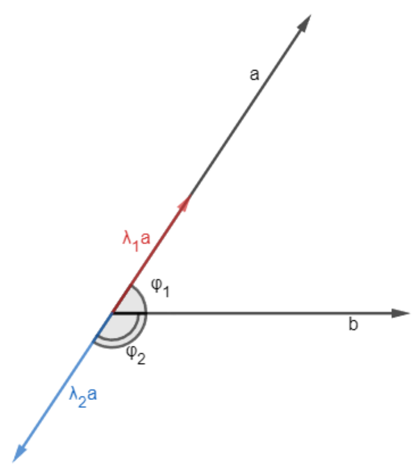
$(\vec{a})_x = \text{proj}_{\vec{i}}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{i} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{b}|}((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b})$

$m = 1, 2 : (\vec{a}_m)_x = \text{proj}_{\vec{i}}\vec{a}_m = \vec{a}_m \cdot i = \vec{a}_m \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}_m \cdot \vec{b})$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}) \\ \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{b}|}((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}) = \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \quad Q.E.D$

3. Однородность по 1-му аргументу: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$



$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

$\lambda > 0 : (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi_1 = \lambda(|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi_1) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$\lambda < 0 : (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi_2 = -\lambda(|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi_2) = \lambda(|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi - \varphi_2)) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$\lambda = 0 : (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0 = 0(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Q.E.D.

4. $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$. $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

   Очевидно

$$\left.\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Скалярное произведение линейно по 1-му аргументу.}$$

$\left.\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Скалярное произведение линейно по 2-му аргументу. $\Rightarrow$ Скалярное произведение линейно по всем своим аргументам.

Координатное представление:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

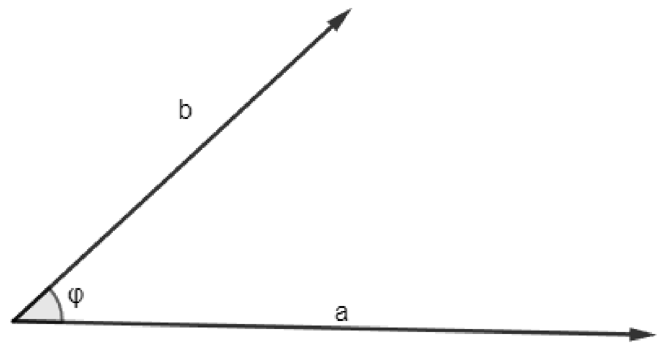
$$\begin{aligned}
&\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = (\text{пользуясь 1. – 4.}) = \\
&= a_1b_1(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\cdot\vec{k}) + \\
&+ a_2b_1(\vec{j}\cdot\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\cdot\vec{k}) + \\
&+ a_3b_1(\vec{k}\cdot\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\cdot\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\cdot\vec{k}) = \\
&= (\text{все слагаемые кроме диагональных — нули}) = \\
&= a_1b_1(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\cdot\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

1.1.5 Векторное произведение векторов

$\text{“}\times\text{”} : V_3 \times V_3 \to V_3$

$\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \to \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a}\times\vec{b} \in V_3$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \text{ (плоскости, в которой лежат } \vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка (определяется по правилу правой руки)} \\ |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;\ \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$$



$\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Свойства: $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3)$

1. Антисимметричность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

   Очевидно

2. Аддитивность по 1-му аргументу: $\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V_3 : (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$

   Доказательство см. в 1.6

3. Однородность по 1-му аргументу: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

   Очевидно

4. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S($параллелограмм, построенный на $\vec{a}, \vec{b})$

   Очевидно

$\left.\begin{matrix} 2. \\ 3. \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Векторное произведение линейно по 1-му аргументу.

Координатное представление:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = (\text{пользуясь 1. – 4.}) = \\
&= a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&+ a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&+ a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
&= (\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \\
&\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}; \\
&\vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}; \\
&\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}) =
\end{aligned}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}A_{11} + \vec{j}A_{12} + \vec{k}A_{13} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

1.1.6 Смешанное произведение векторов

$V_3 \times V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$

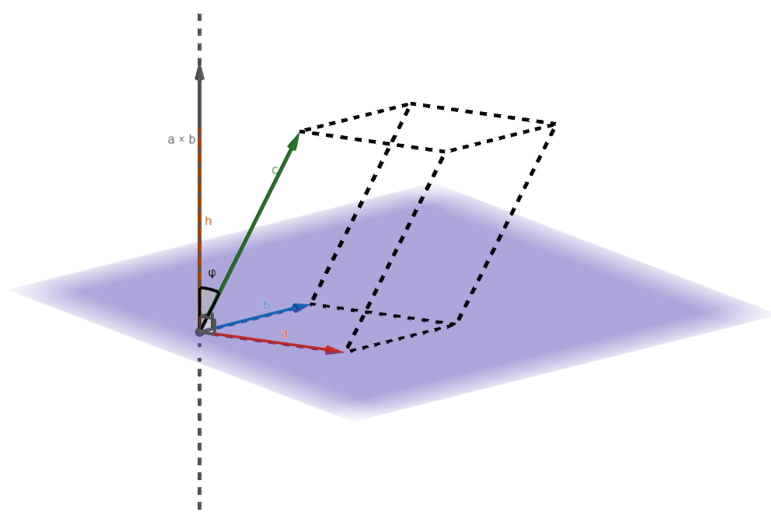
Обозначения нет, вектора ставятся друг к другу без дополнительных знаков.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3 \to \vec{a}\vec{b}\vec{c} \in \mathbb{R}$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} \overset{\text{def}}{=\!=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Свойства:

1. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V$(параллелепипед, построенный на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), причём $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка.



$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ (Если какой-либо вектор — нулевой, то и произведение, и объём — тоже нулевые)

Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ (Иначе и произведение, и объём равны нулю)

Построим $\vec{a} \times \vec{b}$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка $\Leftrightarrow \varphi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < 90^\circ \Leftrightarrow \cos\varphi > 0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка $\Leftrightarrow \varphi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 90^\circ \Leftrightarrow \cos\varphi < 0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$

$V := V$(параллелепипед, построенный на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) =
$= S$(параллелограмм, построенный на $\vec{a}, \vec{b}$) $\cdot\, h$, где h - высота параллелограмма.

$h = |\operatorname{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = ||\vec{c}| \cos\varphi|$

S(параллелограмм, построенный на $\vec{a}, \vec{b}$) $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot ||\vec{c}| \cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ $Q.E.D.$

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$

   $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V$(параллелепипед, построенный на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), а объём не зависит от того, какой вектор выбрать первым, значит:

   $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$

   То же самое, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка, но со знаком минус.

3. Аддитивность по первому (с 2., по любому) аргументу: $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$

   $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = (\text{по } 2.) = \vec{b}\vec{c}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}_1 + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}_2 = \vec{b}\vec{c}\vec{a}_2 + \vec{b}\vec{c}\vec{a}_1 = (\text{по } 2.) = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$ $Q.E.D.$

4. Однородность по первому (с 2., по любому) аргументу: $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

   $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\text{по } 2.) = \vec{b}\vec{c}(\lambda\vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\lambda\vec{a}) = \lambda((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) = \lambda(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\text{по } 2.) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ $Q.E.D.$

Координатное представление:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство аддитивности векторного произведения:

$\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b} \in V_3$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$

Пусть $\vec{c} = \vec{i}$. Тогда: $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}) \cdot \vec{i} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x$

$m = 1, 2:\ (\vec{a}_m \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}_m \times \vec{b}) \cdot \vec{i} = (\vec{a}_m \times \vec{b})_x$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c} \Leftrightarrow ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x = (\vec{a}_1 \times \vec{b})_x + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_x$

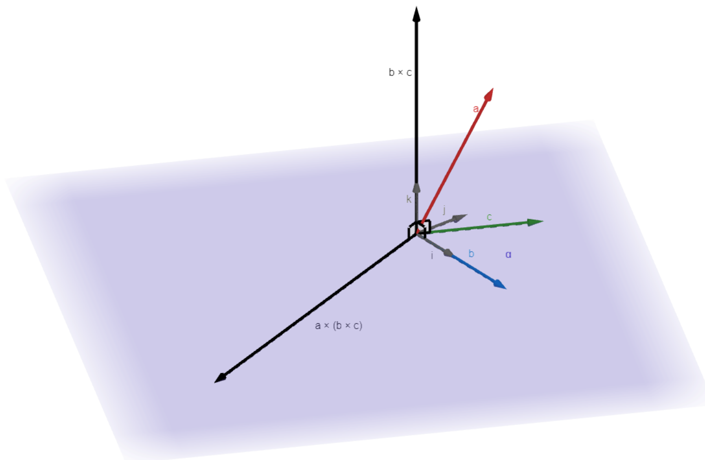
Повторим то же самое, но с $\vec{c} = \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{k}$.

$$\left.\begin{array}{l} ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x = (\vec{a}_1 \times \vec{b})_x + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_x \\ ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_y = (\vec{a}_1 \times \vec{b})_y + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_y \\ ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_z = (\vec{a}_1 \times \vec{b})_z + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_z \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = (\vec{a}_1 \times \vec{b}) + (\vec{a}_2 \times \vec{b})\ Q.E.D.$$

Двойное векторное произведение

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

- $\vec{b} \nparallel \vec{c}$:



Проведём плоскость $\alpha(\vec{b},\vec{c}) \Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}\perp\alpha$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\perp\vec{b}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\in\alpha$

Введём ДСК, где $\vec{i}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{j}\in\alpha$, $\vec{k}\perp\alpha$. Тогда:

$\vec{b}=(b_1,0,0);\ \vec{c}=(c_1,c_2,0);\ \vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{b}\times\vec{c}=(b_1,0,0)\times(c_1,c_2,0)=(0,0,b_1c_2)$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(a_1,a_2,a_3)\times(0,0,b_1c_2)=(a_2b_1c_2,-a_1b_1c_2,0)$

$\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{b}a_1c_1+\vec{b}a_2c_2-\vec{c}a_1b_1=(b_1(a_1c_1+a_2c_2)-c_1a_1b_1,-c_2a_1b_1,0)=(a_2b_1c_2,-a_1b_1c_2,0)=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ $Q.E.D.$

- $\vec{b}\parallel\vec{c}$:

  $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$

  $\exists\lambda\in\mathbb{R}:\vec{b}=\lambda\vec{c}$

  $$\left.\begin{aligned}&\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})=\lambda c(\vec{a}\cdot\vec{c})\\&\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{c}(\vec{a}\cdot\lambda\vec{c})=\lambda\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{c})\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{0}=\vec{b}\times\vec{c}\ Q.E.D.$$

1.2 Прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве

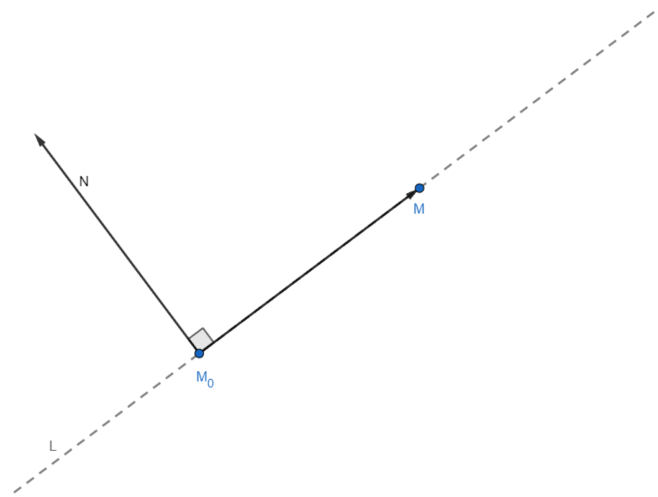
1.2.1 Линейное уравнение

На плоскости (в пространстве) в ДСК Oxy ($Oxyz$) уравнение $Ax+By+C=0,\ A^2+B^2\neq0$ ($Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq0$) — алгебраическое уравнение первого порядка или линейное уравнение.

Любое линейное уравнение на плоскости (в пространстве) определяет прямую (плоскость), и наоборот, любая прямая (плоскость) на плоскости (в пространстве) может быть описана линейным уравнением.

Доказывать будем для прямой в плоскости. Доказательство для прямой в пространстве полностью аналогично.

1. Уравнение $\to$ прямая:



$Ax+By+C=0$, $A^2+B^2 \neq 0$ Не умаляя общности, пусть $B \neq 0$. Тогда $M_0(x_0, y_0) = (0, \frac{-C}{B})$ - удовлетворяет уравнению.

Пусть $M(x, y) \neq M$ - тоже удовлетворяет уравнению. Тогда $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$

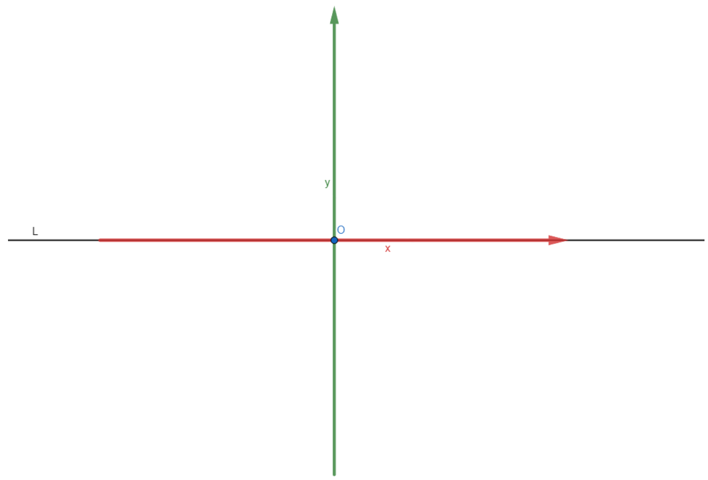
$\vec{N} := (A, B) \neq 0$

$M_0(x_0, y_0) = (0, \frac{-C}{B}) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall M(x, y)$, удовлетворяющих $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 : M \in L \perp \vec{N}, M_0 \in L$

И наоборот, если $M \in L$, то $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow M$ удовлетворяет $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$Ax+By+C=0$ Определяет прямую L и никакую другую, т.к. Если $M \notin L$, то $\overrightarrow{M_0M} \not\perp \vec{N} \Rightarrow M$ не удовлетворяет $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ $Q.E.D.$

2. Прямая $\to$ уравнение:

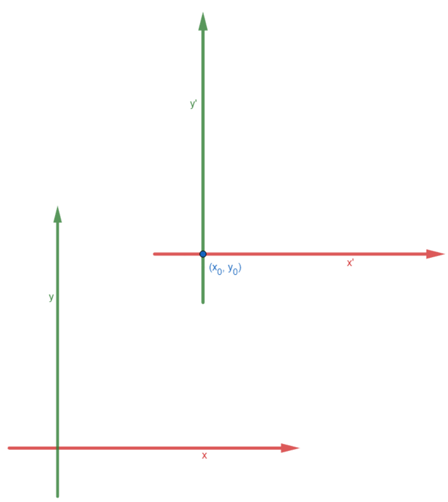


Пусть L — прямая на плоскости.

Введём ДСК так, чтобы L совпадала с Ox. Тогда очевидно, что линейное уравнение $y = 0$ содержит все точки L.

Если есть ДСК, в которой L задаётся линейным уравнением, то в любой другой ДСК L будет задаваться линейным уравнением. Любые две ДСК связаны поворотом и сдвигом, значит нужно доказать, что при повороте и сдвиге линейное уравнение остаётся линейным уравнением.

- Сдвиг:



  $x = x' + x_0$

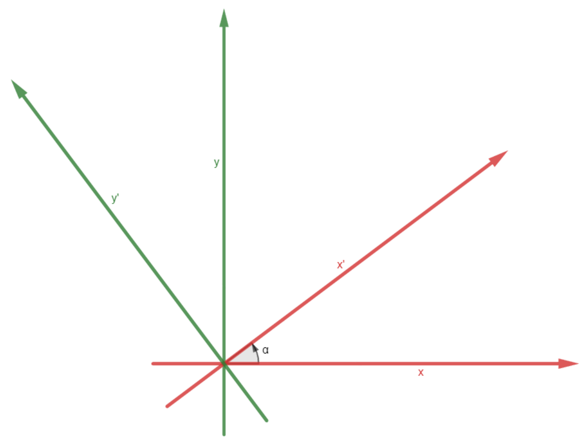
  $y = y' + y_0$

  $A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0 \Rightarrow Ax' + By' + (Ax_0 + By_0 + C) = 0$

  $C' := (Ax_0 + By_0 + C)$

  $Ax + By + C' = 0$ - тоже линейное уравнение.

- Поворот:



$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + B(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + C = 0 \Rightarrow (A\cos\alpha + B\sin\alpha)x' + (B\cos\alpha - A\sin\alpha)y' + C = 0$

$A' := A\cos\alpha + B\sin\alpha$

$B' := B\cos\alpha - A\sin\alpha$

$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 \neq 0$, значит $A'x + B'y + C = 0$ - тоже линейное уравнение.

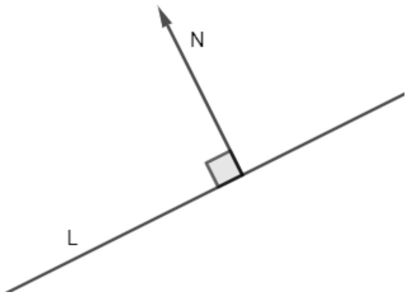
Значит если прямая задаётся линейным уравнением в ДСК, то в любой другой ДСК эта прямая будет задаваться линейным уравнением $Q.E.D.$

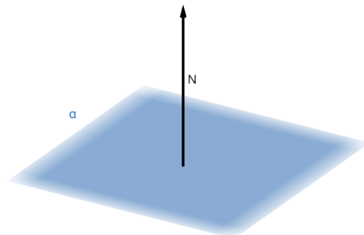
$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$ — Общее уравнение прямой на плоскости, $\vec{N} = (A, B)$ — Вектор нормали.

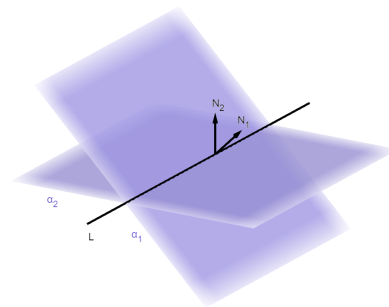
$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ — Общее уравнение плоскости в пространстве, $\vec{N} = (A, B, C)$ — Вектор нормали.

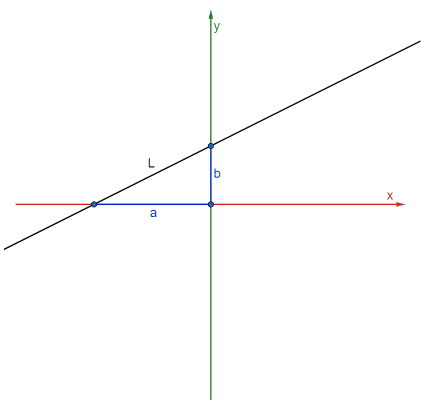
1.2.2 Способы задания

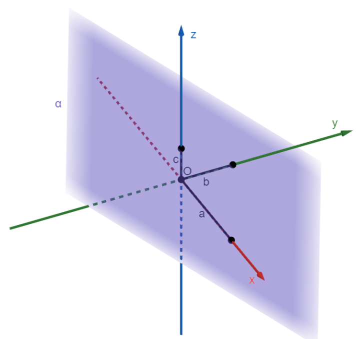
Прямая в плоскости	Плоскость в пространстве	Прямая в пространстве

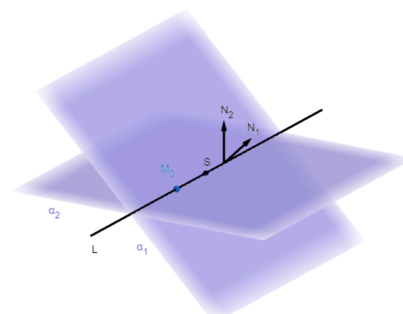
<table>
<tr>
<td>Общее уравнение:


$\boxed{Ax + By + C = 0}$
$A^2 + B^2 \neq 0$
$\vec{N} = (A, B)$ — нормаль. $\vec{N} \perp L$.
$C = 0 \Rightarrow L \cap (0, 0)$</td>
<td>Общее уравнение:


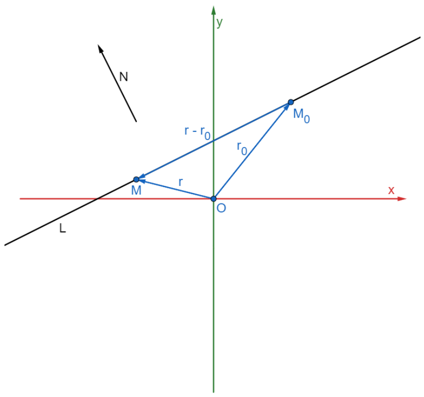
$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$
$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
$\vec{N} = (A, B, C)$ — нормаль. $\vec{N} \perp \alpha$.
$C = 0 \Rightarrow \alpha \cap (0, 0, 0)$</td>
<td>Пересечение плоскостей:


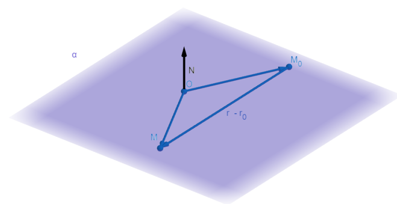
$L = \alpha_1 \cap \alpha_2$
$\boxed{L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$
$A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$
$\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Уравнение в отрезках:


$(0, 0) \notin L$
$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$
$a^2 + b^2 \neq 0$</td>
<td>Уравнение в отрезках:


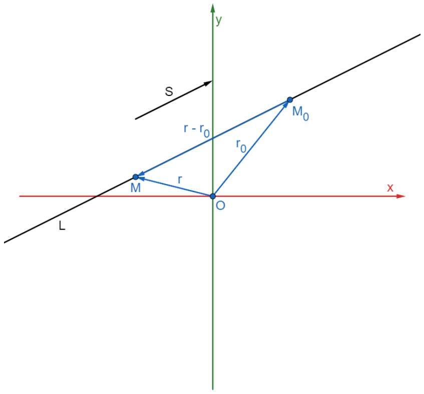
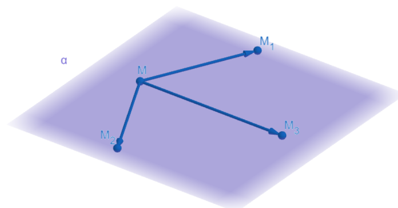
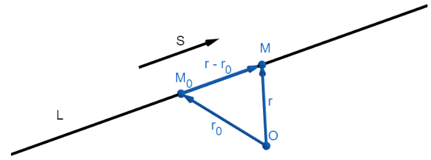
$(0, 0, 0) \notin \alpha$
$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$
$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$</td>
<td>Пересечение плоскостей $\to$ каноническое уравнение:


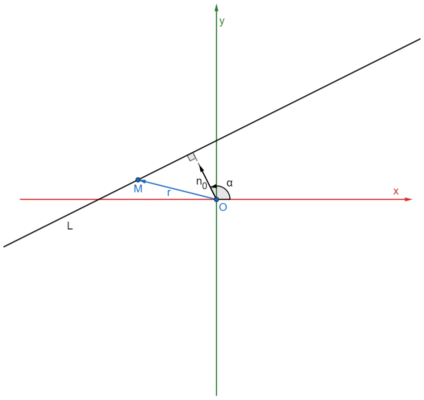
$\vec{S} \perp \vec{N}_1, \vec{S} \perp \vec{N}_2$
$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$
Пусть $M_0 = (x_0, y_0, 0) = L \cap Oz$
Тогда решим систему:
$\boxed{L : \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \end{cases}}$
Если не получилось, то $M_0 = (x_0, 0, z_0) = L \cap Oy$
Снова не получилось: $M_0 = (0, y_0, z_0) = L \cap Ox$</td>
</tr>
</table>

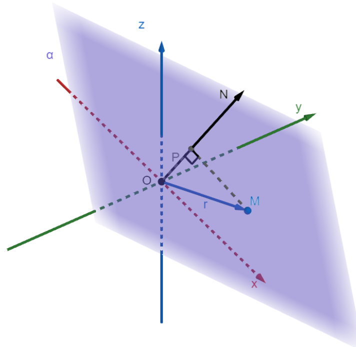
<table>
<tr>
<td>Уравнение через нормаль и точку:


$M_0(x_0, y_0) \in L$
$\vec{N}(A, B) \perp L$
$M(x, y) \in L$
$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$
$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$
$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$</td>
<td>Уравнение через нормаль и точку:


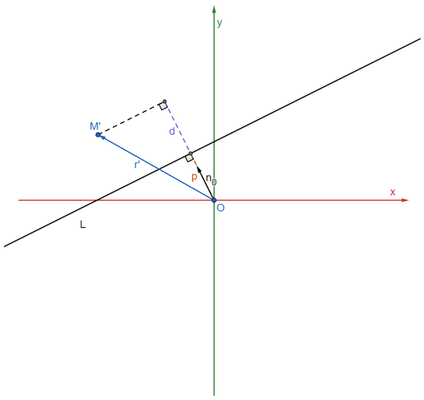
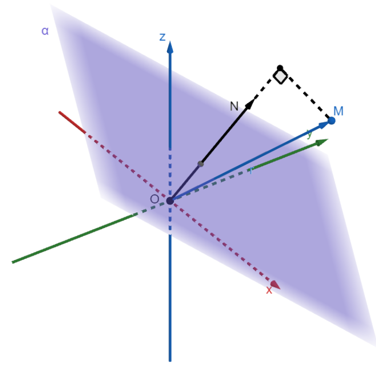
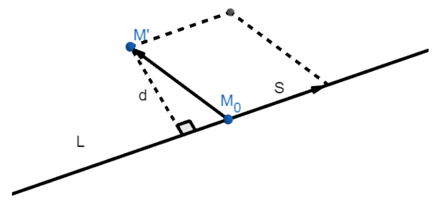
$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$
$\vec{N}(A, B, C) \perp \alpha$
$M(x, y, z) \in \alpha$
$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$
$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$</td>
<td>Каноническое уравнение $\rightarrow$ пересечение плоскостей:
$L : \begin{cases} l(x - x_0) + m(y - y_0) = 0 \\ l(x - x_0) + n(z - z_0) = 0 \end{cases}$
Где $(l, m, n) = \vec{S}$ - направляющий вектор прямой L, $(x_0, y_0, z_0) = M_0 \in L$</td>
</tr>
</table>

Каноническое / параметрическое уравнение:  $M_0(x_0, y_0) \in L$ $\vec{S}(l, m) \parallel L$ $M(x, y) \in L$ $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$ $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$ $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{S} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = t}$ $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}}$ $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}}$	Условие принадлежности четырёх точек плоскости:  $M, M_1, M_2, M_3 \in \alpha$: $\boxed{\overrightarrow{MM_1}\overrightarrow{MM_2}\overrightarrow{MM_3} = 0}$	Каноническое / параметрическое уравнение:  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ $\vec{S}(l, m, n) \parallel L$ $M(x, y, z) \in L$ $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$ $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{S} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t}$ $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}}$ $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}}$

<table>
<tr>
<td>
Нормальное уравнение:


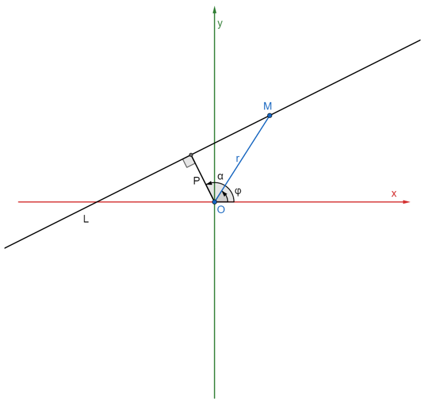
$O(0,0) \notin L$
$P = |O, L| > 0$
$\vec{n}_0 \perp L$, $|\vec{n}_0| = 1$
$\vec{n}_0$ направлен в сторону L если его приложить к O
$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
$M(x, y) \in L$
$P = \operatorname{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - P = 0}$
$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - P = 0}$
$L: Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$
$\vec{N} = (A, B) \perp L \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{n}_0 = \dfrac{\pm\vec{N}}{|\vec{N}|} =$
$= \pm\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$
$C > 0:$ “ $+$ ”
$C < 0:$ “ $-$ ”
$\cos\alpha = \dfrac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2}}$
$\sin\alpha = \dfrac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2}}$
$P = \dfrac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2}}$
</td>
<td>
Нормальное уравнение:


$O(0,0,0) \notin L$
$P = |O, \alpha| > 0$
$\vec{n}_0 \perp \alpha$, $|\vec{n}_0| = 1$
$\vec{n}_0$ направлен в сторону α если его приложить к O
$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
$M(x, y, z) \in \alpha$
$P = \operatorname{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - P = 0}$
$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0}$
$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
$\vec{N} = (A, B, C) \perp L \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{n}_0 = \dfrac{\pm\vec{N}}{|\vec{N}|}$
$C > 0:$ “ $+$ ”
$C < 0:$ “ $-$ ”
$\cos\alpha = \dfrac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$\cos\beta = \dfrac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$\cos\gamma = \dfrac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$P = \dfrac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Расстояние от точки до прямой:  $M(x',y')$ $\vec{r'} = \overrightarrow{OM'} = (x',y')$ L задана нормальным уравнением $\mathrm{proj}_{\vec{n}_0}\vec{r'} - P = \delta$ — отклонение $\delta > 0$, если M' и O лежат по разные стороны от L $\delta < 0$, если M' и O лежат по одну сторону от L $d = \|M',L\| = \|\delta\| =$ $= \boxed{\|\vec{r'}\cdot\vec{n}_0 - P\|} =$ $= \boxed{\|x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - P\|} =$ $L : Ax+By+C=0$ $\boxed{d = \frac{\|Ax'+By'+C\|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ Работает даже если $O \in L$	Расстояние от точки до плоскости:  $M(x',y',z')$ $\vec{r'} = \overrightarrow{OM'} = (x',y',z')$ α задана нормальным уравнением $\mathrm{proj}_{\vec{n}_0}\vec{r'} - P = \delta$ — отклонение $\delta > 0$, если M' и O лежат по разные стороны от α $\delta < 0$, если M' и O лежат по одну сторону от α $d = \|M',\alpha\| = \|\delta\| =$ $= \boxed{\|\vec{r'}\cdot\vec{n}_0 - P\|} =$ $= \boxed{\|x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - P\|} =$ $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ $\boxed{d = \frac{\|Ax'+By'+Cz'+D\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$ Работает даже если $O \in \alpha$	Расстояние от точки до прямой:  $d = \|M',L\| =$ $= h$(параллелограмма, построенного на $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M'}$) $=$ $= \boxed{\frac{\|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M'}\|}{\|\vec{S}\|}}$

<table>
<tr>
<td>

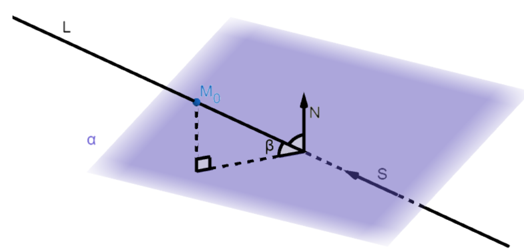
Полярное уравнение:



$O(0,0) \notin L$
(Если $O \in L$, то L распадается на 2 луча и точку O)
$M(x,y) \in L$
$(x,y) \leftrightarrow (\varphi, r)$:
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$
L задана нормальным уравнением:
$x\cos\alpha + y\sin\alpha - P = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha - P = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r\cos(\varphi - \alpha) - P = 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{r = \dfrac{P}{\cos(\varphi - \alpha)}}$
$r > 0$
$P > 0$
$\cos(\varphi - \alpha) > 0$

</td>
<td>

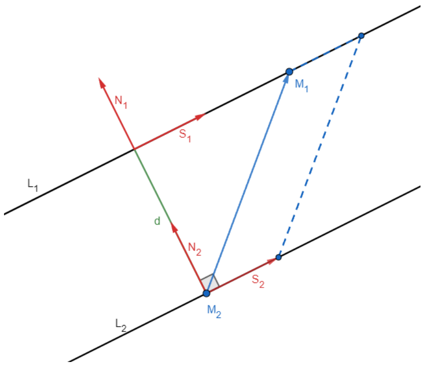
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве:
$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
$L : \vec{S} = (l, m, n), M(x_0, y_0, z_0)$
$\bullet \left[\begin{array}{l} L \parallel \alpha \\ L \subset \alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{S} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{S} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$
$\bullet L \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{S} \cdot \vec{N} = 0 \\ M_0 \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$
$\bullet \begin{cases} L \parallel \alpha \\ L \not\subset \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$
$\bullet L \cap \alpha = Q$:



$Q(x_Q, y_Q, z_Q) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = x_0 + lt_Q \\ y_Q = y_0 + mt_Q \\ z_Q = z_0 + nt_Q \end{cases}$
$Q \in \alpha \Leftrightarrow A(x_0 + lt_Q) + B(y_0 + mt_Q) + C(z_0 + nt_Q) + D = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{t_Q = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}}$
$\sin\angle(L, \alpha) = \cos(90^\circ - \angle(L, \alpha)) = \cos\angle(\vec{N}, \vec{S}) =$
$= \boxed{\dfrac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}}$

</td>
</tr>
</table>

Взаимное расположение прямых на плоскости: $\bullet L_1 \parallel L_2$:

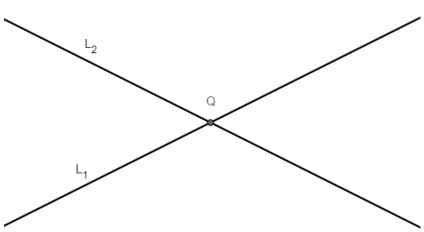


$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$

$d = |L_1, L_2|$(парам. ур.)$=$
$= h$(параллелограмма, построенного на $\vec{S}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_1}$) $=$
$= \boxed{\frac{|\vec{S}_2 \times \overrightarrow{M_2M_1}|}{|\vec{S}_2|}} =$
$= |M_1, L_2|$

$\bullet L_1 = L_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

$\bullet L_1 \cap L_2 = Q$:



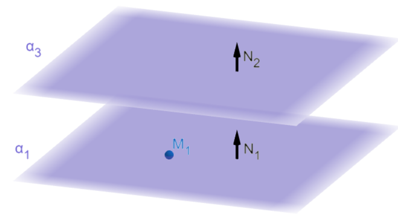
$L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

$Q : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$
$= A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists!\ Q$

Взаимное расположение плоскостей в пространстве:

$\bullet \alpha_1 \parallel \alpha_2$:



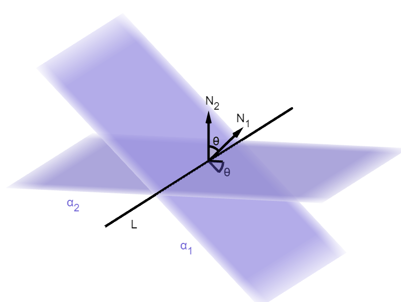
$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

$d = |\alpha_1, \alpha_2|$
$M_1 \in \alpha_1 \Rightarrow d = |M_1, \alpha_2|$
α_1, α_2 заданы нормальным уравнением:

$d = \begin{cases} |P_1 - P_2|, \vec{n}_{0_1} = \vec{n}_{0_2} \\ P_1 + P_2, \vec{n}_{0_1} = -\vec{n}_{0_2} \end{cases}$

$\bullet \alpha_1 = \alpha_2$:
$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$

$\bullet \alpha_1 \cap \alpha_2 = L$:



$L :$
$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \\ \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{array} \right.$

$\theta = \angle(\alpha_1, \alpha_2)$

$|\cos\theta| = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$

Взаимное расположение прямых в пространстве:

$\bullet \left[\begin{array}{l} L_1 \parallel L_2 \\ L_1 = L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$

$\bullet L_1 = L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \\ M_1 \in L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow$
$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{l_1}{x_1 - x_2} = \frac{m_1}{y_1 - y_2} = \frac{n_1}{z_1 - z_2} \end{cases}}$

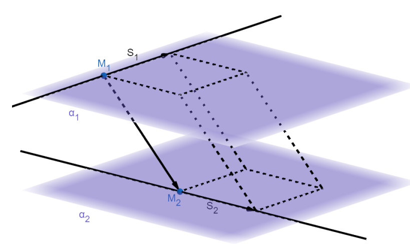
$\bullet \begin{cases} L_1 \parallel L_2 \\ L_1 \neq L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \\ M_1 \notin L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \\ \vec{S}_1 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$

$d = |L_1, L_2| = |M_1, L_2| =$
$= \frac{|\vec{S} \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{S}|}$

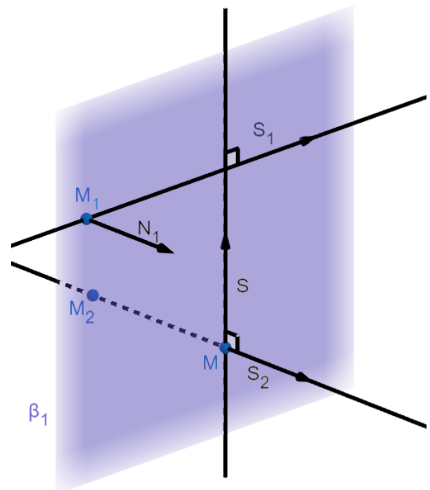
$\bullet L_1 \cap L_2 = Q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{S}_1 \nparallel \vec{S}_2 \\ \vec{S}_1\vec{S}_2\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}}$

$\cos\angle(L_1, L_2) = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|}$

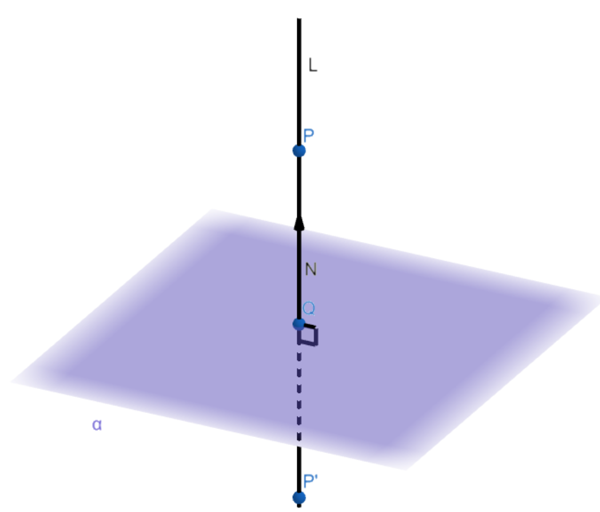
$\bullet L_1 \dot{-} L_2$:



$\vec{S}_1\vec{S}_2\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 : \begin{cases} \alpha_1 \parallel \alpha_2 \\ L_1 \subset \alpha_1 \\ L_2 \subset \alpha_2 \end{cases}$

		$\lvert L_1, L_2\rvert = \lvert\alpha_1, \alpha_2\rvert = h$(параллелепипед, построенный на $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$) $=$ $= \boxed{\dfrac{\lvert\vec{S}_1\vec{S}_2\overrightarrow{M_1M_2}\rvert}{\lvert\vec{S}_1 \times \vec{S}_2\rvert}}$  $L(M, \vec{S}) : \begin{cases} L \perp L_1 \\ L \perp L_2 \end{cases}$ $\vec{S} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2$ $\beta_1(\vec{S}_1, \vec{S}, M_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{M = L_2 \cap \beta_1}$ $\vec{N}_1 = \vec{S}_1 \times \vec{S} =$ $= \vec{S}_1 \times (\vec{S}_1 \times \vec{S}_2)$

1.2.3 Проекция точки на плоскость и прямую



$PQ \perp \alpha$, $Q \in \alpha$

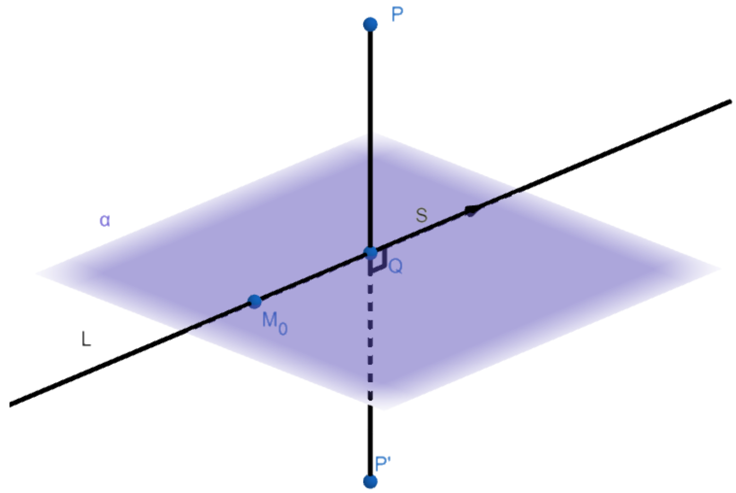
$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{N} = (A, B, C)$

$P(P_1, P_2, P_3)$

$$L(P, \vec{N}) : \begin{cases} x = P_1 + tA \\ y = P_2 + tB \\ z = P_3 + tC \end{cases} \Rightarrow Q = L \cap \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(P_1 + t_Q A) + B(P_2 + t_Q B) + C(P_3 + t_Q C) + D = 0 \Rightarrow \boxed{t_Q = -\frac{AP_1 + BP_2 + CP_3 + D}{A^2 + B^2 + C^2}}$$

P' — отражение P относительно $\alpha \Rightarrow P' = 2Q - P$



$PQ \perp L(M_0, \vec{S} = (l, m, n)),\ Q \in L$

$P = (P_1, P_2, P_3)$

$$\alpha(P, \vec{S}) : l(x - P_1) + m(y - P_2) + n(z - P_3) = 0 \ L : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

$Q = \alpha \cap L \Rightarrow l((x_0 + t_Q l) - P_1) + m((y_0 + t_Q m) - P_2) + n((z_0 + t_Q n) - P_3) = 0$

Находим из этого t_Q и подставляем в уравнение L.

P' — отражение P относительно $L \Rightarrow P' = 2Q - P$

1.3 Кривые второго порядка (КВП)

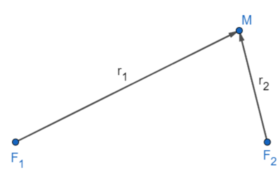
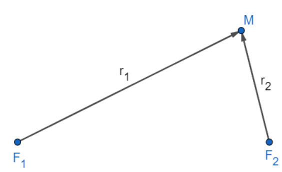
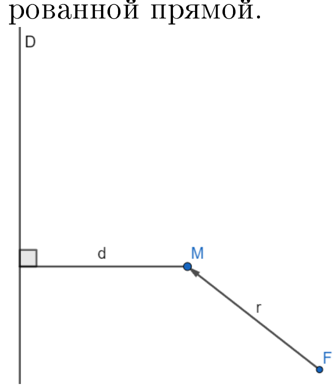
1.3.1 Канонические уравнения КВП

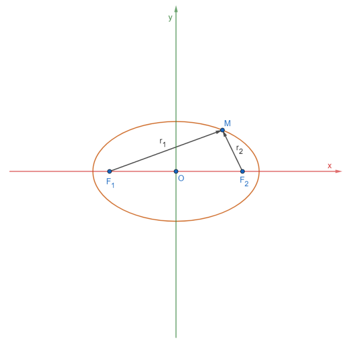
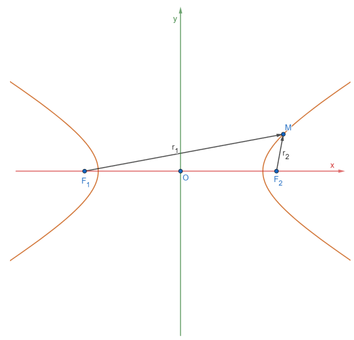
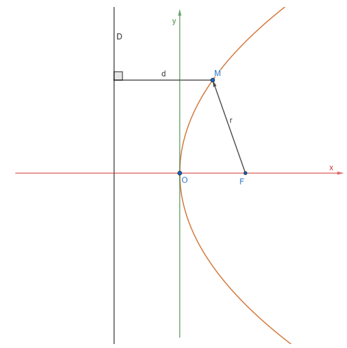
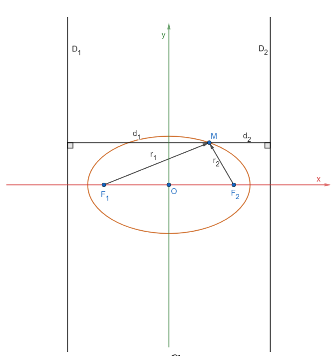
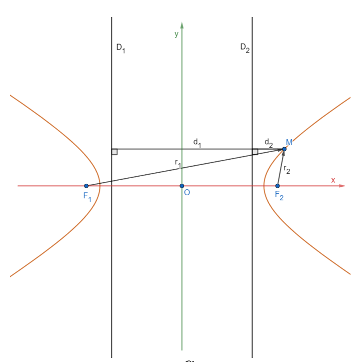
Кривая второго порядка — множество точек на плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяет алгебраическому уравнению 2-го порядка:

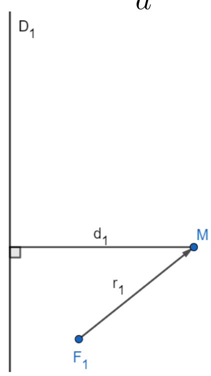
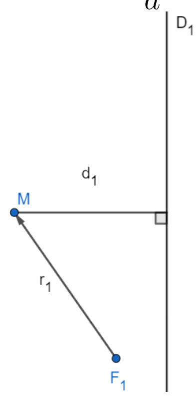
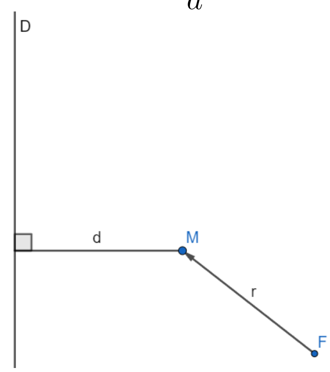
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,\ (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$

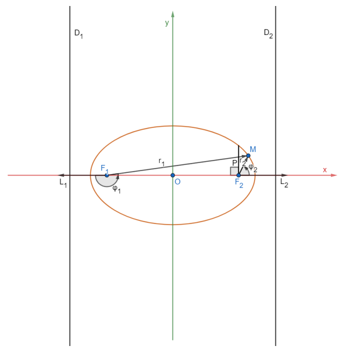
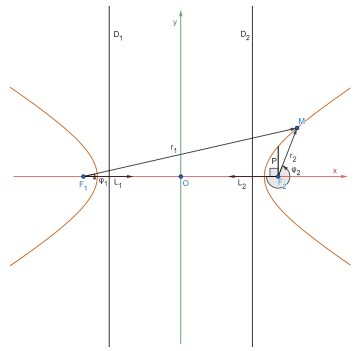
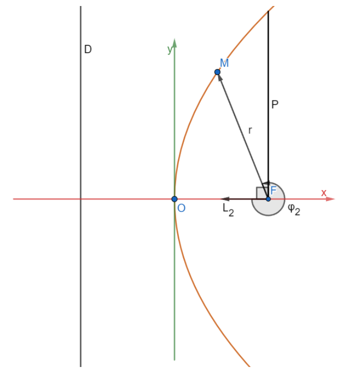
КВП делятся на 2 вида:

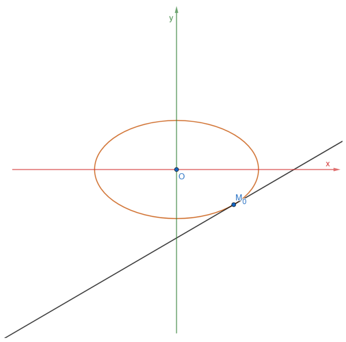
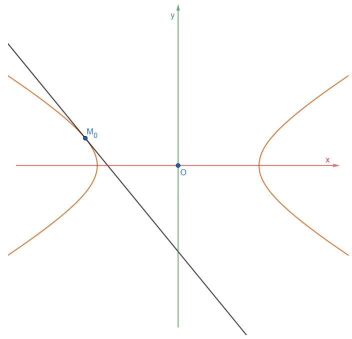
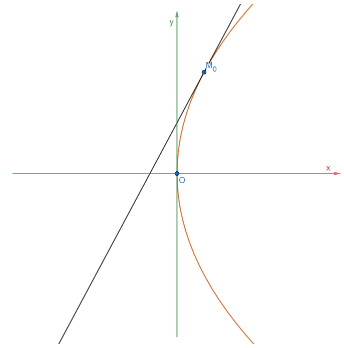
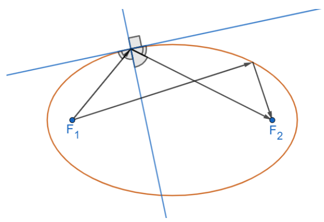
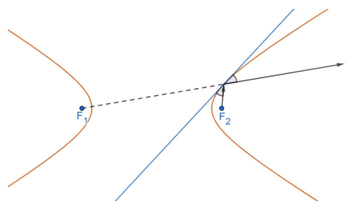
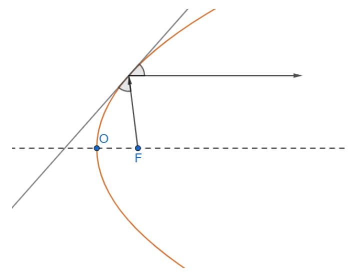
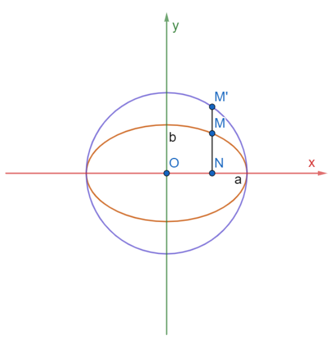
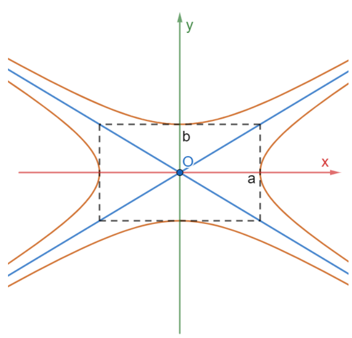
1. Невырожденные:
   - Эллипс
   - Парабола
   - Гипербола
2. Вырожденные:
   - Пара пересекающихся прямых
   - Пара параллельных прямых
   - Пара совпадающих прямых
   - Точка
   - Пустое множество

	Эллипс	Гипербола	Парабола
Опр. 1	ГМТ на плоскости, таких, что сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости — величина постоянная и равная $2a$.  $r_1 + r_2 = 2a = \mathbf{const}$	ГМТ на плоскости, таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости — величина постоянная и равная $2a$.  $\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a = \mathbf{const}$	ГМТ на плоскости, таких, что расстояние до фиксированной точки плоскости равно расстоянию до фиксированной прямой.  $r = d$

Уравнение в ДСК	 $F_{1,2}$ — фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ $a^2 = b^2 + c^2$, $a > c$ r_1, r_2 — фокальные радиусы a — большая полуось b — малая полуось	 $F_{1,2}$ — фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ $c^2 = a^2 + b^2$, $a < c$ r_1, r_2 — фокальные радиусы a — действительная полуось b — мнимая полуось Имеет асимптоты — $y = \pm\dfrac{b}{a}x$	 F — фокус, D — директриса $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, $D : x = -\dfrac{p}{2}$ $\boxed{y^2 = 2px}$ $p = \lvert F, D\rvert$ p — фокальный параметр
ε — Эксцентриситет	$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = 1$
$r_{1,2}$ — фокальные радиусы	$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ $M(x, y) \in$ эллипсу	Правая ветвь: $r_{1,2} = \varepsilon x \pm a$ Левая ветвь: $r_{1,2} = -\varepsilon x \mp a$ $M(x, y) \in$ гиперболе	$r = x + \dfrac{p}{2}$
Директрисы	 $D_{1,2} : x = \mp\dfrac{a}{\varepsilon}$ $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon = \dfrac{r}{d}$	 $D_{1,2} : x = \mp\dfrac{a}{\varepsilon}$ $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon = \dfrac{r}{d}$	$\dfrac{r}{d} = 1 = \varepsilon$

Опр. 2	ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и меньшая единицы. $\varepsilon = \mathbf{const} = \dfrac{r}{d} < 1$ 	ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и большая единицы. $\varepsilon = \mathbf{const} = \dfrac{r}{d} > 1$ 	ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и равная единице. $\varepsilon = \mathbf{const} = \dfrac{r}{d} = 1$ 

Полярное уравнение	 Начало ПСК в одном из фокусов, ось направлена в сторону соответствующей директрисы. $r = \dfrac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ P — фокальный параметр. $P = \varepsilon \cdot q = \dfrac{b^2}{a}$ $q = \lvert F, D\rvert = \dfrac{a}{\varepsilon} - c$ P — Длина перпендикуляра от F до эллипса Директрисы: $r = \dfrac{\pm\dfrac{a}{\varepsilon} - c}{\cos\varphi}$ Если ось направлена в противоположную сторону, то меняем знак косинуса.	 Начало ПСК в одном из фокусов, ось направлена в сторону соответствующей директрисы. $r = \dfrac{\pm P}{1\pm\varepsilon\cos\varphi}$ Ветвь, более близкая к фокусу: “ + ” Ветвь, более далёкая от фокуса: “ − ” P — фокальный параметр. $P = \varepsilon \cdot q = \dfrac{b^2}{a}$ $q = \lvert F, D\rvert = c - \dfrac{a}{\varepsilon}$ P — Длина перпендикуляра от F до гиперболы. Директрисы: $r = \dfrac{\pm\dfrac{a}{\varepsilon} + c}{\cos\varphi}$ Если ось направлена в противоположную сторону, то меняем знак косинуса.	 Начало ПСК в фокусе, ось направлена в сторону директрисы. $r = \dfrac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi} =$ $= \dfrac{P}{1+\cos\varphi}$ P — Длина перпендикуляра от F до параболы Если ось направлена в противоположную сторону, то меняем знак косинуса.

Касательные	 $M(x_0, y_0) \in$ эллипсу $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	 $M(x_0, y_0) \in$ гиперболе $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	 $M(x_0, y_0) \in$ параболе $yy_0 = P(x + x_0)$
Оптические свойства	 Любой луч, вышедший из одного фокуса, отразившись, пройдёт через другой фокус.	 Любой луч, вышедший из одного фокуса, отразившись, пройдёт по прямой, проходящей через другой фокус.	 Любой луч, вышедший из фокуса, отразившись, пройдёт по прямой, параллельной оси параболы.
Другие свойства	 $\dfrac{MN}{M'N} = \dfrac{b}{a}$ Любой эллипс — сжатая по какой-то оси окружность.	 $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ — сопряжённая гипербола. Имеет те же асимптоты.	

Доказательство свойств (на примере гиперболы, эллипс доказывается полностью аналогично):

- Каноническое уравнение

  По определению: $|r_1 - r_2| = 2a$

$F_1(-c,0),\ F_2(c,0),\ c > a$

$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Пусть $r_1 > r_2$ (правая ветвь) $\Rightarrow r_1 = 2a + r_2 \Rightarrow r_1^2 = 4a^2 + 4ar_2 + r_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4ar_2 + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow xc = a^2 + ar_2 \Rightarrow r_2 = \dfrac{xc}{a} - a$

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \boxed{r_2 = x\varepsilon - a}$ — зависимость фокального радиуса от x

$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = \dfrac{x^2c^2}{a^2} - 2xc + a^2 \Rightarrow x^2\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2(a^2-c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ $Q.E.D.$

Из $r_1 = 2a + r_2$ получаем $r_1 = x\varepsilon + a$. Значит $\boxed{r_{1,2} = x\varepsilon \pm a}$

Если $r_1 < r_2$ (левая ветвь): $\boxed{r_{1,2} = -x\varepsilon \mp a}$

- Директрисы:

  $D_2 : x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon},\ d_2 = dist(M, D_2) = \left|x - \dfrac{a}{\varepsilon}\right|$

  Правая ветвь: $r_2 = x\varepsilon - a \Rightarrow \dfrac{r_2}{d_2} = \dfrac{x\varepsilon - a}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon\dfrac{x - \dfrac{a}{\varepsilon}}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$

  Левая ветвь: $r_2 = -x\varepsilon + a \Rightarrow \dfrac{r_2}{d_2} = \dfrac{-x\varepsilon + a}{-x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon\dfrac{-x + \dfrac{a}{\varepsilon}}{-x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$

  $\dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon \Rightarrow D_2$ — директриса $Q.E.D.$

  Для r_1 и D_1 заменить x на $-x$

- Определение 2:

  Пусть известно $q = dist(F, D)$ и $\varepsilon = \dfrac{r}{d} > 1$

  Проведём ДСК, в которой $D \parallel Oy$. Давайте найдём параметры канонического уравнения, считая, что $D : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, а $F = (c, 0)$.

  $$\left.\begin{aligned} c - \frac{a}{\varepsilon} &= Q \\ \frac{c}{a} &= \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = Q + \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow a\varepsilon = Q + \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow a\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) = Q \Rightarrow \boxed{a = \frac{\varepsilon Q}{\varepsilon^2 - 1}} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \boxed{c = \frac{\varepsilon^2 Q}{\varepsilon^2 - 1}}$$

Мы узнали чему равны a и c из известных нам ε и Q, значит точки, удовлетворяющие 2-му определению, удовлетворяют $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а D — очевидно директриса гиперболы. $Q.E.D.$

- Асимптоты:

Найдём $y(x)$ для I координатной четверти: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$

Найдём угловой коэффициент асимптоты $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{b}{a}$$

Найдём ординату пересечения асимптоты и оси ординат $m = \lim\limits_{x\to+\infty}(y(x) - kx)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x\right) = b\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a}\right) =$$

$$= b\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}}\right) = b\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}}\right) = 0$$

Значит асимптота: $y = \frac{b}{a}x$ — в первой координатной четверти

По симметрии получаем $y = \pm\frac{b}{a}x$ $Q.E.D.$

- Полярное уравнение:

Зададим ПСК(r, φ), у которой полюс $O' = F_2 = (c, 0)$, а ось направлена в сторону, противоположную направлению оси Ox.

$x = c - r\cos\varphi$

Правая ветвь: $r = r_2 = x\varepsilon - a$

$r = \varepsilon(c - r\cos\varphi) - a = \varepsilon c - \varepsilon r\cos\varphi - a \Rightarrow r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon c - a = \varepsilon\left(c - \frac{a}{\varepsilon}\right) = \varepsilon q = p \Rightarrow$
$r = \frac{P}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$

Левая ветвь: $r = r_2 = -x\varepsilon + a$

$r = -\varepsilon(c - r\cos\varphi) + a = -\varepsilon c + \varepsilon r\cos\varphi + a \Rightarrow r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - c\right) = \varepsilon(-q) =$
$-p \Rightarrow r = \frac{-P}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$

Если ось направлена в противоположную сторону, то $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, и $\cos\varphi$ в формулы записывается со знаком минус.

Аналогично, если у ПСК полюс в F_1.

- Касательные

  Формула касательной к функции в точке $M_0(x_0, y_0)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

  $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{f(x)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ (Возьмём производную обеих сторон) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2f(x)f'(x)}{b^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2f(x)f'(x)}{b^2} = \dfrac{2x}{a^2}$

  Подставим x_0: $\dfrac{2f(x_0)f'(x_0)}{b^2} = \dfrac{2x_0}{a^2} \Rightarrow \dfrac{y_0 f'(x_0)}{b^2} = \dfrac{x_0}{a^2} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$

  Подставим в формулу для касательной: $y = \dfrac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0) + y_0 =$

  $= \dfrac{x_0 b^2 (x - x_0) + y_0^2 a^2}{y_0 a^2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow y y_0 a^2 = x x_0 b^2 - x_0^2 b^2 + y_0^2 a^2 \Rightarrow \dfrac{x x_0}{a^2} - \dfrac{y y_0}{b^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ $Q.E.D.$

- Оптические свойства

  Пусть $M_0(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе. Тогда:

  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1 M_0} = (x_0 + c, y_0)$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2 M_0} = (x_0 - c, y_0)$

  Проверим, что вектор биссектрисы угла между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ параллелен касательной в точке M_0, то есть перпендикулярен нормали касательной $\vec{N} = \left(\dfrac{x_0}{a^2}, -\dfrac{y_0}{b^2}\right)$.

  Вектор биссектрисы угла между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$: $|\vec{r}_1|\vec{r}_2 + |\vec{r}_2|\vec{r}_1 = (\varepsilon x_0 + a)\vec{r}_2 + (\varepsilon x_0 - a)\vec{r}_1 =$

  $= ((x_0 - c)(\varepsilon x_0 + a) + (\varepsilon x_0 - a)(x_0 + c), y_0(\varepsilon x_0 + a) + y_0(\varepsilon x_0 - a)) =$

  $= (2\varepsilon x_0^2 - 2ac, 2\varepsilon x_0 y_0) \sim \left(x_0^2 - \dfrac{ac}{\varepsilon}, x_0 y_0\right)$

  Скалярно перемножим с $\vec{N}$: $\left(x_0^2 - \dfrac{ac}{\varepsilon}\right)\dfrac{x_0}{a^2} - x_0 y_0 \dfrac{y_0}{b^2} = \dfrac{x_0^3}{a^2} - \dfrac{x_0 c}{\varepsilon a} - \dfrac{x_0 y_0^2}{b^2} =$

  $= x_0\left(\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2}\right) - x_0 = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow N \perp$ биссектрисе $Q.E.D.$

1.3.2 Приведение КВП к каноническому виду

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$

Очевидно, что уравнение КВП не меняет своего типа при повороте и сдвиге.

1. Если $a_{12} \neq 0$, подберём такой угол поворота α, чтобы в новом уравнении $a'_{12} = 0$.

   Выразим старые координаты через новые:

   $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$

   Выразим a'_{12} через старые коэффициенты, $\sin\alpha = S_\alpha$ и $\cos\alpha = C_\alpha$ и приравняем к 0:

$a'_{12} = -2a_{11}C_\alpha S_\alpha + 2a_{12}(C_\alpha^2 - S_\alpha^2) + 2a_{22}C_\alpha S_\alpha = 0$

$(a_{22} - a_{11})\tan\alpha + a_{12}(1 - \tan^2\alpha) = 0$

$\tan^2\alpha + \dfrac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\tan\alpha - 1 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\tan\alpha$

Дискриминант $D = \left(\dfrac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\right)^2 + 4 > 0$ — 2 решения

По теореме Виета $\tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\alpha_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$

$$\alpha_{1,2} = \arctan\left(\frac{\dfrac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\right)^2 + 4}}{2}\right)$$

Начало координат $O' = O$

2. $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$ Есть два случая:

   (a) $\begin{cases} a'_{11} \neq 0 \\ a'_{22} \neq 0 \end{cases}$

   $a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' = a'_{11}\left(x'^2 + 2\dfrac{a'_1}{a'_{11}}x'\right) = a'_{11}\left(x' + \dfrac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 - \dfrac{a'^2_1}{a'_{11}} = a'_{11}x''^2 - \dfrac{a'^2_1}{a'_{11}}$

   Сделаем сдвиг ДСК:

   $x'' = x' + \dfrac{a'_1}{a'_{11}}$

   $y'' = y' + \dfrac{a'_2}{a'_{22}}$

   Начало координат $O''\left(-\dfrac{a'_1}{a'_{11}}, -\dfrac{a'_2}{a'_{22}}\right)$

   Получим $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_0 = 0 \Leftrightarrow a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 = -a'_0$

   Есть два случая:

   i. $a'_0 \neq 0$

      $\alpha = \dfrac{a'_{11}}{-a'_0}$, $\beta = \dfrac{a'_{22}}{-a'_0}$

      $\alpha x''^2 + \beta y''^2 = 1$

      Есть три случая:

      A. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — Эллипс

      B. $\alpha < 0$, $\beta < 0$ — Пустое множество

      C. $\alpha\beta < 0$ — Гипербола

ii. $a_0' = 0$

$\alpha x''^2 = y''^2$, $\alpha \neq 0$

Есть два случая:

A. $\alpha > 0 \Rightarrow y'' = \pm\sqrt{\alpha}x''$ — Пара пересекающихся прямых

B. $\alpha < 0 \Rightarrow y'' = x'' = 0$ — Точка

(b) Не умаляя общности $a_{22}' = 0$

$a_{11}'x'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0 = 0$

Есть два случая:

i. $a_2' \neq 0$

Сделаем сдвиг ДСК:

$$x'' = x' + \frac{a_1'}{a_{11}'}$$

$$y'' = y' + \frac{a_0 - \frac{{a_1'}^2}{a_{11}'}}{2a_2'}$$

Начало координат $O''\left(-\frac{a_1'}{a_{11}'}, -\frac{a_0 - \frac{{a_1'}^2}{a_{11}'}}{2a_2'}\right)$

Получим $a_{11}'x''^2 + 2a_2'y''^2 = 0 \Leftrightarrow x''^2 = \alpha y''$, $\alpha \neq 0$ — Парабола

ii. $a_2' = 0$

$$x'' = x' + \frac{a_1'}{a_{11}'}$$

$a_{11}'x''^2 + a_0' = 0 \Rightarrow x''^2 = \alpha$

Есть три случая:

A. $\alpha > 0 \Rightarrow x'' = \pm\sqrt{\alpha}$ — Пара параллельных прямых

B. $\alpha = 0 \Rightarrow x''^2 = 0 \Leftrightarrow x'' = 0$ — Прямая

C. $\alpha < 0$ — Пустое множество

Глава 2

Линейная алгебра

2.1 Основные алгебраические структуры

2.1.1 Операции, группа, кольцо, поле

Законы композиции.

$f : A \times B \to C$ - функция, отображение.

$\forall (a, b) : a \in A, b \in B : \exists! c \in C$ — **закон внешней композиции.**

$f : A \times A \to A$ — **закон внутренней композиции** или алгебраическая операция, бинарная операция.

Ассоциативность, коммутативность алгебраических операций.

Возьмем операцию $* : A \times A \to A$:

$a * b = b * a$ — **коммутативность**.

$a * (b * c) = (a * b) * c$ — **ассоциативность**.

Алгебраическая структура, группа, кольцо, поле. Свойства.

Алгебраическая структура — множество с набором Ω — операция и отношений на ней, с некоторой системой аксиом. Обозначают (A, Ω)

Группа (A, {*}):

* — групповая операция, чаще всего обозначается как "·" — умножение, или как "+" — сложение. "·" — мультипликативная запись, где e — единица, а $-a$ — обратный. "+" — аддитивная запись, где e заменяется на 0 — нулевой, а $-a$ — противоположный.

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$ — ассоциативность.
2. $\exists e : \forall a : a * e = e * a = a$ — существование нейтрального элемента e.
3. $\forall a : \exists (-a) : a + (-a) = e$ — существование обратного элемента $-a$.

Если группа обладает еще и коммутативностью, то такая группа — **абелева**:

4. $a * b = b * a$

Кольцо (A, $\{+, \cdot\}$):

1–4. Абелева грyппа по сложению.

5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ — левая дистрибутивность.

6. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ — правая дистрибутивность.

Поле (A, $\{+, \cdot\}$):

1–5. Абелева группа по сложению.

6–9. Абелева группа по умножению для ненулевых элементов.

Поле — это ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то есть для $\forall$ ненулевого элемента $\exists$ обратный, а вот у нуля обратного нет и это нормально.

Свойства кольца:

1. $0 \cdot a = 0$
2. $a + x = a + y \to x = y$
3. $a + x = b$ имеет единственное решение $x = -a + b$
4. 0 — единственен.
5. 1 — единственна в кольце с единицей.

2.1.2 Линейное пространство, алгебра, свойства.

$K-$ поле, V - множество. $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$. Если все, что сказано ниже выполнено $\forall \phi, \lambda \in K, a, b \in V$.

1–4. Абелева группа по сложению.

5. $\phi(\lambda(a)) = \lambda(\phi(a))$.
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.
7. $a(\phi + \lambda) = a\phi + a\lambda$.
8. $\exists 1 : a \cdot 1 = a$.

То тогда такую систему называют **линейным пространством** над полем K.

Если добавить еще одну операцию $\times : V \times V \to V$.

9. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

   $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$
10. $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$

То такую структуру называют **алгеброй**.

11. добавим коммутативность $\times$ — коммутативная алгебра.
12. добавим ассоциативность $\times$ — ассоциативная алгебра.
13. добавим единицу — унитальная алгебра.
14. добавим обратное (для ненулевых элементов) — алгебра с делением.

2.1.3 Нормированные линейные пространства и алгебры.

Нормированное пространство — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ с нормой.

Норма $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворящее:

1. $\forall x, y \in V : ||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$.
2. $\forall x \in V : ||x|| \geq 0$, причем $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\forall x \in V \; \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$.

Алгебра называется **нормированной**, если существует норма согласованная с умножением: $||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

2.1.4 Отношение эквивалентности, фактор-структуры.

Бинарное отношение $\sim$ на множестве X — **отношение эквивалентности**, если оно

- Рефлексивно: $\forall x \in X \; x \sim x$.
- Симметрично: $\forall x, y \in X \; x \sim y \leftrightarrow y \sim x$.
- Транзитивно: $\forall x, y, z \in X \; x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z$.

Если $\sim$ — бинарное отношение на X, то множества $M_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$ называются классами эквивалентности , а множество $X/\sim = \{M_a \mid a \in X\}$ — **фактормножеством** (или факторпространством) X по $\sim$.

Свойства классов эквивалентности.

1. $\forall a \in X \; M_a \neq \varnothing$.
2. $\forall a, b \in X$ выполнено либо $M_a = M_b$, либо $M_a \cap M_b = \varnothing$.
3. $\bigcup\limits_{a \in X} M_a = X$.

Если у нас есть множество X, а M — какое-то множество, состоящее из непустых взаимно непересекающихся подмножеств X, в объединении дающих X. Тогда M называется **разбиением** X.

Любое разбиение X является факторпространством X по некоторому отношению эквивалентности. Доказательство этого тривиально, если вы представите отношения как ребра в графе, а классы эквивалентности - компоненты

2.2 Линейное пространство комплексных чисел

2.2.1 Основные определения

Множество комплексных чисел - линейное пространство $\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой.(мы его так вводим). Получаем первый вариант записи комплексных чисел - Декартову форму записи:

$$(x; y) = z \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$$

Евклидову норму $|z| = ||(x; y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем комплексного числа.

Представив комплексные числа таким образом, мы видим их геометрическую интерпретацию, как радиус-векторов на плоскости (модуль числа - длина радиус-вектора). В качестве базиса будем использовать вектора $(1;0)$ - вещественную единицу и $(0;1)$ - мнимую единицу, обозначаемую i.

Алгебраическая форма записи - ещё один вариант записи комплексных чисел:

$$z = (x;y) = x + iy$$

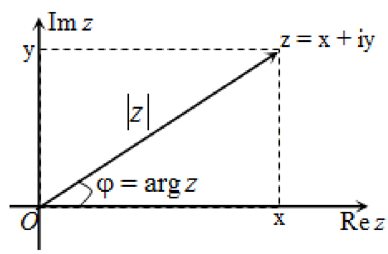
При этом $x = Re\, z$ - вещественная часть числа, а $y = Im\, z$ч - мнимая часть.

При $x = 0$ число становится чисто мнимым.

При $y = 0$ число можно отождествлять с вещественным числом x.

Теперь можем ввести полярную систему координат с центром, совпадающим с центром декартовой системы координат и осью вдоль оси $Re\, z$. Тогда для каждого ненулевого комплексного числа получим r и φ. Для $z = x + iy \neq 0$ модуль числа $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а φ - аргумент - такой угол, что $\tan\varphi = y/x$

Функция аргумента — $\varphi = Arg(x + iy)$ — многозначная, то есть её результат — множество всех подходящих значений, а формат $\arg_k$ означает использование k-ого значения. Нулевой аргумент (результат $\arg_0$ или просто $\arg$) называется главным аргументом и лежит в $[-\pi;\pi)$ или в $[0;2\pi)$, в зависимости от выбранного диапазона.



Заметим, что тогда $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$. Тогда получим третий вариант записи комплексного числа - Тригонометрическую форму записи:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

2.2.2 Комплексные = алгебра с нормой.

То, что это линейное пространство и так понятно (очевидно, что все 8 аксиом выполнены, тк мы до этого доказывали, что R^2 — линейное пространство). Давайте докажем, что комплексные числа - это **нормированная алгебра**.

Значит, мы хотим создать такую операцию умножения, что она будет согласованно с нормой. Посмотрим, тогда чему должно быть равно $i \cdot i = i^2$.

Тогда давайте предположим, что сейчас $i \cdot i = \lambda + \phi i$.

Посмотрим, чему у нас будет равна вот такая норма:

$$\forall x \in \mathbb{R} : ||i^2 + ix|| = ||i(i+x)|| \leq ||i||||i+x|| = \sqrt{1+x^2}$$

Должно выполняться последнее, если мы хотим, чтобы норма была согласованна с умножением. Но мы знаем что $i \cdot i = \lambda + \phi i$! Подставим:

$$||i^2 + ix|| = ||\lambda + \phi i + ix|| = \sqrt{\lambda^2 + (\phi + x)^2} \leq \sqrt{1 + x^2}$$

$$\lambda^2 + \phi^2 + 2\phi x + x^2 \leq 1 + x^2$$

$$\lambda^2 + \phi^2 + 2\phi x \leq 1$$

Заметим, что, если $\phi \neq 0$, тогда слева многочлен от x — прямая, с углом наклона не 0. Откуда в какой-то момент она пересечет 1 и будет принимать значения больше 1.

Откуда получаем, что $\phi = 0$. Откуда $i^2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Посмотрим на $2 \leq \sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4} = ||\lambda + 2i + 1|| = ||(i + 1)^2|| \leq \sqrt{2}^2 = 2$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 = 4$, откуда $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda = -1$.

Мы только что доказали, что $i^2 = -1$!!!

Теперь тогда покажем, как будет происходить умножение ниже:

2.2.3 Основные действия с комплексными числами

Немного действий, определённых для $\mathbb{C}$:

1. **Сложение/вычитание** – аналогично сложению/вычитанию векторов

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

2. **Умножение** – например, как умножение алгебраических форм записи

$$(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Оно так задается из-за того, что мы хотим диструбтивность для того, чтобы комплексные числа были алгеброй с нормой.Распишем в тригонометрической форме перемножение двух комплексных чисел:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) * r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Видим, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули перемножаются.

3. **Сопряжение** – для всех комплексных чисел $z = x + iy$ существует комплексно сопряжённое ему $\overline{z} = x - iy$. Несколько весьма простых, но полезных фактов с сопряжёнными числами:

   - $\overline{\overline{z}} = z$

- $z = \overline{z} \Leftrightarrow (x+iy) = (x-iy) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) = |z|^2$
- $z + \overline{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x = 2 \cdot Re\, z$
- $z - \overline{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy = 2i \cdot Im\, z$

4. **Обратное** – зная свойства сопряжения можно получить формулу для числа обратного комплексному z это будет $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Несложно убедиться, что $z * z^{-1} = 1$, что и требовалось от обратного элемента.
5. ***Деление** – имея обратное число деление построить несложно:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Такое деление будет весьма неудобным, хоть и рабочим, упростит его экспоненциальная форма записи комплексных чисел.

2.2.4 Экспоненциальная форма и её свойства. Формулы Эйлера и Муавра

Сделаем заявление, в которое поверим и в дальнейшем будем активно использовать:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \varphi \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. $e^{i*2\pi k} = 1; k \in \mathbb{Z}$
2. $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}; k \in \mathbb{Z}$
3. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$
4. $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}}$
5. $|e^{i\varphi}| = 1$
6. $e^{i\varphi \cdot n} = (e^{i\varphi})^n; n \in \mathbb{Z}$
7. **Формулы Эйлера:**

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$$
$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$$

Введём ещё одну новую форму записи комплексного числа - Экспоненциальную:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi \cdot n}; n \in \mathbb{N}$$
$$|z^n| = |z|^n = r^n$$
$$arg\, z^n = n \cdot arg\, z$$

Раз мы научились возводить комплексное число в целую степень, то хочется научиться находить и корень целой степени. Пусть $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z = re^{i\varphi}$

$$w \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w = |w|e^{i \cdot arg\, w}$$

$$w^n = |w|^n e^{in \cdot arg\, w} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{r} \\ arg\, w = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Получили, что $arg\, w = \frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ а значит, что корень целой степени n даёт n различных решений, которые лежат на плоскости на одной окружности, через равные углы $\frac{2\pi}{n}$, и никаких других, так как алгебраическое уравнение $w^n = r$ имеет ровно n корней.

2.2.5 Некоторые функции комплексной переменной

Комплексная экспонента

$$\exp z = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y);\ z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. $e^{z+2\pi ki} = e^z$ – $2\pi i$ периодичность
2. $|e^z| = e^x = e^{Re\, z}$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
5. Аналогично формулам Эйлера введём sin и cos комплексной переменной:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Аналогично вещественным тригонометрическим можем ввести $tg\, z, ctg\, z$, обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Например:

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Пусть $Re\, z \in [a_1; a_2]$, а $Im\, z \in [b_1; b_2]$, то есть z лежит внутри некого прямоугольника на комплексной плоскости. В какой области будет лежать $\exp z$? Заметим, что модули итоговых чисел ограничены $[e_1; e_2]$, а аргументы $[b_1; b_2]$. Получается, что $\exp z$ лежит в неком угловом секторе.

Логарифм комплексного числа

Пусть $\ln z = w = x + iy$, тогда

$$z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)} = re^{i\varphi}$$

$$z = e^{w} = e^{x}e^{iy}$$

Получим, что $|z| = e^{x} \in \mathbb{R}$, то есть $x = \ln|z|$. А $y = \arg z + 2\pi k$.

Видим, что в формуле присутствует $2\pi k$, что говорит нам о многозначности логарифма комплексного числа. Приведём общую формулу:

$$\ln_k z = w = \ln|z| + i(\arg_0 z + 2\pi k) = \ln|z| + i \cdot \arg_k z;\ k \in \mathbb{Z}$$

Из этой формулы можем получить несколько небольших формул:

$$\ln_0 z = \ln|z| + i \cdot \arg_0 z$$

$$\ln_k z = \ln_0 z + 2\pi k i$$

$\ln_0 z$ – главное значение логарифма

Из-за многозначности логарифма есть большая опасность неправильно воспользоваться им, например может быть, что $\ln z_1 z_2 \neq \ln z_1 + \ln z_2$ или $\ln z^k \neq k \ln z$. Приведём пример подобной ошибки: Пусть $\arg z \in [0; 2\pi)$, $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $k = 0$

$\ln_0 z_1 = \ln|-1| + i\arg_0(-1) = \ln 1 + \pi i$ (тут функция $\ln 1$ — вещественная $\Rightarrow$ равна нулю)

$\ln_0 z_2 = \ln|-i| + i\arg_0(-i) = \ln 1 + \frac{3\pi}{2}i$

В сумме получилось $\frac{5\pi}{2}i$

$\ln_0 z_1 z_2 = \ln_0 i = \ln|i| + i\arg_0 i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i$

Комплексное число в натуральной степени

Пусть $w = z^n = r^n e^{in\varphi}$, где $n \in \mathbb{N}$ Рассмотрим, во что перейдёт z, лежащий в угловом секторе при возведении в степень. Модуль числа будет возведён в степень n, а аргумент умножится на n. Если изначальный сектор был ограничен окружностями с радиусами a_1 и a_2, а так же лучами с полярными углами b_1 и b_2, то он перейдёт в другой угловой сектор, ограниченный окружностями с радиусами a_1^n и a_2^n, а так же лучами с полярными углами nb_1 и nb_2.

Комплексное число в комплексной степени

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{C}$ – константа

$w = z^b = e^{b \ln_k z}$ – обобщённая степенная функция

$w = b^z = e^{z \ln_k b}$ – обобщённая показательная функция

Заметим, что стандартные свойства натурального логарифма **не выполняются**. Например $b^{z_1 + z_2} \neq b^{z_1} b^{z_2}$.

2.3 Линейные пространства.

2.3.1 Основные определения.

В этом разделе мы будем рассматривать линейные пространства над $\mathbb{C}$ и иногда $\mathbb{R}$. Обозначать над чем мы будем K.

Линейная оболочка, линейная независимость векторов.

Говорят, что вектор u является **линейной комбинацией** векторов $(v_1, \ldots, v_n)$, если $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$.

Если все $\lambda_k = 0$, то линейная комбинация называется **тривиальной**

Система векторов $v_1, \ldots, v_m \in V$ называется **линейной независимой**, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_k = 0$

В противном случае, система векторов называется **линейно зависимой**, т.е. $\exists$ набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не все нули таких, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0$.

$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ — **линейная оболочка** векторов — это множество всех возможных линейных комбинаций $v_1, \ldots, v_m$.

Теорема о линейно независимых системах векторов

Теорема

1. $v_1, \ldots, v_m$ -линейно зависима $\Leftrightarrow$ по крайней мере один из векторов — это линейная комбинация остальных
2. Если некоторая подсистема системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ - линейно зависима, то система векторов $v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима
3. $\left.\begin{matrix} v_1, \ldots, v_m - \text{линейно независима} \\ v_1, \ldots, v_{m+1} - \text{линейно зависима} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_{m+1}$ — линейная комбинация $v_1, \ldots, v_m$

Доказательство

1. $\boxed{\Rightarrow}$ $v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима, т.е. $\exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0$

   н.у.о. пусть $\lambda_m \neq 0$, тогда $\lambda_m v_m = -\sum\limits_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k$

   $$v_m = \sum_{k=1}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right) v_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda'_k v_k \overset{def}{\Longleftrightarrow} v_m \text{ — линейная комбинация } v_1, \ldots, v_m$$

   $\boxed{\Leftarrow}$ н.у.о. пусть $v_m = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k - v_m = 0$

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m \neq 0$ такой, что $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0 \overset{def}{\iff} v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима Q.E.D.

2. н.у.о. пусть $v_1, \ldots, v_{m'}$ — линейно зависима $m' < m$, тогда

   $\exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'} : \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k v_k = 0$

   При $\lambda_{m'+1} = 0, \ldots, \lambda_m = 0$: набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — нетривиален

   $\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0 \overset{def}{\iff} v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима Q.E.D.

3. $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ — линейно зависима $\Rightarrow \exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} : \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k + \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0$

   Если $\lambda_{m+1} = 0$, тогда набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — нетривиален и $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k = 0 \overset{def}{\iff} v_1, \ldots, v_m$ — линейно зависима. Противоречие.

   Иначе $v_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{m+1}}\right) v_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k v_k \overset{def}{\iff} v_{m+1}$ — линейная комбинация $v_1, \ldots, v_m$ Q.E.D.

Следствия:

1. Если система линейно независима, то любая подсистема линейно независима.
2. Если система содержит 0 вектор, либо пару пропорциональных векторов, то система линейно зависима.

Теорема о прополке.

Любую систему векторов $v_1, \ldots, v_m$, в которой хотя бы один из векторов ненулевой, можно заменить на линейно независимую систему векторов $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ с сохранением линейной оболочки. $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \operatorname{span}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$

Доказательство:
Пусть $s_0 = 0, s_1 = \operatorname{span}(v_1), \ldots, s_m = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$

Тогда $s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset V$.

Идём от $j = m$ до $j = 2$.

Если $s_{j-1} = s_j$, то v_j удаляем. При этом $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$ сохраняется.

Если $s_{j-1} \subset s_j$, то $v_j \notin s_{j-1}$, т.е. v_j — не является линейной комбинацией $v_1, \ldots, v_{j-1}$.

Продолжая так делать, получим, что никакой вектор из полученных не является линейной комбинацией других, то есть итоговое подмножество линейно независимо. В результате получается цепочка строго вложенных подмножеств $s_0 \subset s_{j_1} \subset \ldots \subset s_{j_k} \subset s_m \subset V$

$\Rightarrow s_m = \operatorname{span}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ Q.E.D.

2.3.2 Порождающая (полная) система векторов. Базис и размерность линейного пространства

Система векторов $v_1, \dots, v_m \in V$ называется порождающей (полной), если любой вектор линейного пространства V раскладывается по этим векторам, т.е. является линейной комбинацией $v_1, \dots, v_m$. $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$

Если число $v_1, \dots, v_m$ конечно, то линейное пространство называется конечномерным.

Теорема

Следующие утверждения равносильны:

1. $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая и порождающаяся система
2. $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая система и максимальная по числу элементов
3. $v_1, \dots, v_n \in V$ — порождающая система и минимальная по числу элементов

Доказательство

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $v_1, \dots, v_n$ — линейно независимая и порождающая система

Пусть $u_1, \dots, u_m$ — линейно независима

Тогда $\forall u \in V : v_1, \dots v_n, u$ — линейно зависима, т.к. $v_1, \dots, v_n$ — порождающая система, то u — линейная комбинация $v_1, \dots, v_n$, или $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n, u) = V$

$$\underbrace{u_m, v_1, \dots, v_n}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ n+1}} \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \operatorname{span}(u_m, v_1, \dots) = V \\ \le n}}$$

$$\underbrace{u_{m-1}, u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ \le n}} \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{u_{m-1}, u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \operatorname{span}(u_{m-1}, u_m, v_1, \dots) = V \\ \le n}}$$

и т.д.

$$\underbrace{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots}_{\le n} - \text{линейно независима}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ $v_1, \dots, v_m$ — линейно независимая система и максимальная по числу элементов

$$\forall v \in V : \left.\begin{matrix} v_1, \dots, v_n - \text{линейно независима} \\ v_1, \dots, v_n, v - \text{линейно зависима} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \Rightarrow v_1, \dots, v_n - \text{порождающая}$$

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая и порождающаяся система

Пусть $u_1, \dots, u_m$ – порождающая система $m \ge n$

$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m) = V$

$\forall v \in V : u_1, \dots, u_m, v$ — линейно зависима

$$\underbrace{v_n, u_1, \ldots, u_m}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ m+1}} \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{v_n, u_1, \ldots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \operatorname{span}(v_n, u_1, \ldots) = V \\ \leq m}}$$

$$\underbrace{v_{n-1}, v_n, u_1, \ldots}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ \leq m+1}} \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{v_{n-1}, v_n, u_1, \ldots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \operatorname{span}(v_{n-1}, v_n, u_1, \ldots) = V \\ \leq m}}$$

и т.д.

$$\underbrace{v_1, \ldots, v_n, u, \ldots}_{n \leq m} - \text{линейно независима}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$

$v_1, \ldots, v_n$ — порождающая система и минимальная по числу элементов

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — линейно независима

Тогда $\exists v_k$ — линейная комбинация остальных $\Rightarrow$ можно сделать прополку

$v_1, \ldots, v_n \xrightarrow{\text{прополка}} v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ — порождающую систему с минимальным числом элементов (при прополке хотя бы один вектор уйдёт)

Но это противоречит тому, что $v_1, \ldots, v_n$ — минимальная по числу элементов $\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — линейно независимая

Q.E.D.

Если система $v_1, \ldots, v_n \in V$ удовлетворяет условиям теоремы, то она называется **базисом** пространства V.

Количество векторов $n = \dim V =$ **размерность линейного пространства** $=$ max возможное число линейно независимых векторов $=$ min число в порождающей системе векторов

Теорема

1. $\forall$ линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса пространства V
2. из любой порождающей системы пространства V можно выделить базис пространства V

Доказательство

1. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — линейно независимая система

   Если $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = V$, то $v_1, \ldots, v_m$ — базис

   Если $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) \subset V$, то $\exists\ v_{m+1} \neq 0 \in V$ и $v_{m+1} \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$

   $\Rightarrow v_{m+1}$ — не линейная комбинация остальных векторов

   $\Rightarrow v_1, \ldots, v_{m+1}$ — линейно независимая система

   Повторяем рассуждения для $v_1, \ldots, v_{m+1}$

   В итоге получаем $v_1, \ldots, v_n$ — линейно независимая система максимальная по числу элементов $\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ — базис

2. $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_m) = V$, где $v_1, \dots, v_m$ — порождающая система

   Если $v_1, \dots, v_m$ — линейно независимая система $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ — базис

   Если $v_1, \dots, v_m$ — линейно зависимая система, то

$$v_1, \dots, v_m \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}}_{\substack{\text{линейно независимая система} \\ \text{порождающая система} \\ n \le m \\ \mathrm{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) = V}}$$

   $\Rightarrow v_{j_1}, \dots, v_{j_n}$ – базис

Q.E.D.

2.3.3 Координаты вектора. Изоморфизм линейного пространства

V — линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $\dim V = n$

$\forall x \in V : x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i l_i$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$ — базис в V (порождающей системы)

$x_i \in K$ — координаты вектора x относительно базиса l

$x \in V \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, где $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — координатный столбец

Утверждение

$\forall x \in V$ координаты относительно базиса e определяется единственным образом

Доказательство

$e_1, \dots, e_n \Rightarrow$ порождающая система, т.е. x раскладывается на координаты

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum x'_i e_i$

$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x'_i) e_i = 0$ — нулевая линейная комбинация линейно независимых векторов $\Leftrightarrow \forall i = 1 \dots n :$ $x_i - x'_i = 0$

Q.E.D.

$$x \in V \overset{e}{\longleftrightarrow} x \in K^n$$

взаимно однозначное соответствие (биекция)

V_1, V_2 — линейные пространства называются изоморфными ($V_1 \cong V_2$), если между V_1 и V_2 существует биекция и сохраняется линейность, т.е.

$$x \in V_1 \longleftrightarrow x' \in V_2$$
$$y \in V_1 \longleftrightarrow y' \in V_2$$
$$\forall \lambda \in K : x + \lambda y \in V_1 \longleftrightarrow x' + \lambda y' \in V_2$$

Свойства изоморфизма

1. $0 \in V \longrightarrow 0' \in V'$

   Доказательство:

   $\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$

   Пусть $\lambda = 0$, тогда $0 = 0 \cdot x \longleftrightarrow 0 \cdot x' = 0'$ Q.E.D.

2. $\forall x \in V \longleftrightarrow x' \in V'$

   $-x \in V$ — противоположный элемент к x

   $-x' \in V$ — противоположный элемент к x'

   $\Rightarrow -x \longleftrightarrow -x'$

   Доказательство:

   $\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$

   Пусть $\lambda = -1$, тогда $-x = -1 \cdot x \longleftrightarrow -1 \cdot x' = -x'$ Q.E.D.

3. $x_1, \ldots, x_m \in V; x'_1 \ldots x'_m \in V'$

   $\forall k = 1 \ldots m : x_k \longleftrightarrow x'_k$

   $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \in V \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k \in V'$

   Доказательство:

   По методу математической индукции Q.E.D.

4. $\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x'_1, \ldots, x'_m}_{\text{линейно независимы}} \in V'$

   Доказательство:

   $\alpha_k \in K$

   $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k = 0 \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k = 0'$

   т.к. $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$ (3 свойство) и $0 \in V \longleftrightarrow 0' \in V'$ (1 свойство)

   $\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \Leftrightarrow \forall k = 1 \ldots m : \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x'_1, \ldots, x'_m}_{\text{линейно независимы}} \in V'$ Q.E.D.

5. $\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{порождающая система}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x'_1, \ldots, x'_m}_{\text{порождающая система}} \in V'$

   $x_1, \ldots, x_m \in V$ — порождающая система $\Leftrightarrow \forall x \in V : x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$

   $\forall x \in V : x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \forall x' \in V' : x' = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$

   т.к. $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k$ (3 свойство) и $x \longleftrightarrow x'$

$\forall x' \in V' : x' = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x'_k \Leftrightarrow x'_1, \ldots, x'_m$ — порождающая система Q.E.D.

6. $\underbrace{e_1, \ldots, e_n}_{\text{базис } V} \longleftrightarrow \underbrace{e'_1, \ldots, e'_n}_{\text{базис } V'}$

Доказательство:

Из свойств 4 и 5 мы знаем, что если система векторов линейно независима и порождающая, то есть это базис. Q.E.D.

Теорема

V_1, V_2 — линейные пространства над полем K

$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Доказательство

$\boxed{\Leftarrow}$ $\dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow e_1, \ldots, e_n$ — базис в V_1 и $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис в V_2

Построим изоморфизм из V_1 в V_2

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \in V_1 \longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \longleftrightarrow x' = \sum_{k=1}^{n} x_i e'_i \in V_2$$

$$x \in V_1 \xleftrightarrow[\text{изоморфизм}]{\text{координатный}} x \in K^n \xleftrightarrow[\text{изоморфизм}]{\text{координатный}} x' \in V_2$$

Проверим линейность $\forall \lambda \in K$

$$x + \lambda y \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i e_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i e_i = e_i(\sum_{k=1}^{n} x_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i e'_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i e'_i = e'_i(\sum_{k=1}^{n} x_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_i) \longleftrightarrow x' + \lambda y'$$

$$x + \lambda y \longleftrightarrow x' + \lambda y'$$

Биекция сохраняет свойство линейности $\Rightarrow$ изоморфизм

$\boxed{\Rightarrow}$ Если $V_1 \cong V_2$, то из 6 свойства изоморфизма мы знаем, что существует биекция между базисами этих систем $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Q.E.D.

Следствие

Изоморфизм конечномерных пространств — отношение эквивалентности на множестве линейных конечномерных пространств

$V_1 \sim V_2 \Leftrightarrow V_1 \cong V_2$

Доказательство

1. рефлексивность

   $V_1 \sim V_1$, т.к. id_{V_1} — изоморфизм

2. симметричность

   $V_1 \sim V_2 \Rightarrow V_2 \sim V_1$, т.к. $\dim V_1 = \dim V_2$ по теореме выше

3. транзитивность

   $\left.\begin{matrix} V_1 \sim V_2 \\ V_2 \sim V_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_1 \sim V_3$

   по теореме выше

   $\left.\begin{matrix} \dim V_1 = \dim V_2 \\ \dim V_2 = \dim V_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim V_1 = \dim V_3$

Q.E.D.

2.3.4 Линейное подпространство. Ранг системы векторов

$L \subset V$ (подмножество), если L удовлетворяет $1-8$ аксиомам линейного пространства над полем K относительно $+, \cdot$, то L называется линейным подпространством пространства V

Теорема (критерий линейного подпространства)

L — линейное подпространство $V \Leftrightarrow \forall x, y \in L \subset V\ \forall \lambda \in K : x + \lambda y \in L$

(L замкнуто относительно $+, \cdot$)

Доказательство

$\boxed{\Rightarrow}$ т.к. $L \subset V$ и выполняются 1-8 аксиомы

$\boxed{\Leftarrow}$ т.к. $L \subset V$ выполнены все аксиомы кроме 3 и 4

Пусть $x \in L \subset V$, тогда $x + (-1) \cdot x \in L \Rightarrow o \in L \Rightarrow \exists$ нейтральный элемент в L

Пусть $x = 0 \in L, y \in L \Rightarrow 0 + (-1) \cdot y = -y \in L \Rightarrow \exists$ противоположный элемент

$\Rightarrow$ для L выполнены 1-8 аксиомы линейного пространства

Q.E.D.

Замечания

1. $L \subset V \Rightarrow 0 \in L$
2. $\dim L \leq \dim V$

Ранг системы векторов $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \dim(\text{span}(v_1, \dots, v_m)) = r = \text{rg}(v_1, \dots, v_m)$

r — число max линейно независимых векторов в $L = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$

по теореме о «прополке»: $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ — линейно независимы

$v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ базис $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$ — база системы векторов $v_1, \dots, v_m$

Элементарные преобразования системы векторов:

1. удаление/добавление нулевого вектора
2. изменение порядка векторов
3. замена любого векторов на него де, умноженный на скаляр ($\lambda \in K, \lambda \neq 0 : v_j \to \lambda v_j$)
4. замена любого из векторов на его сумму с любым другим вектором системы ($v_j \to v_j + v_k$)

Теорема

$\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_m)$ не меняется при элементарных преобразованиях

Доказательство:

1. Заметим, что добавление/удаление нулевого вектора никак не влияет на span, а то есть на ранг.
2. Заметим, что при перестановке у нас просто меняется порядок в разложении через эти вектора.
3. Возьмем и умножим соответственное a_i на λ.
4. Аналогично прошлому пункту, немного поменяются коэффиценты.

Q.E.D.

2.3.5 $L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$, формула Грассмана, $L_1 \oplus L_2$ (прямая сумма)

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \in V : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$

$L_1 \cap L_2 = \{x \in V : x \in L_1, x \in L_2\}$

Лемма.

Докажем, что сумма и пересечение тоже линейные подпространства.

Теорема (формула Грассмана)

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$

Доказательство:

1. $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$

   $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. А что это значит? Что мы должны доказать немного другую формулу: $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$

   Возьму $v_1, \dots, v_n$ — базис L_1.

   Возьму $f_1, \dots, f_m$ — базис L_2.

   Докажу, что $v_1, \dots, v_n, f_1, \dots, f_m$ — базис для $L_1 + L_2$.

- Докажем линейную независимость. От противного. Пусть лин. зависимо, тогда напишем нетривиальную линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i+n} f_i = 0$$

  Заметим, что ненулевые элементы есть в обоих суммах, а что это значит? Перенесем в другую сторону и получим, что с одной стороны у нас есть ненулевой v из L_1, с другой стороны он у нас из L_2. Откуда пересечение не пусто — противоречие. Откуда линейно независима.

- Докажем порождаемость. Любой элемент суммы раскладывается (по определению) на элемент из L_1 и элемент из L_2. Откуда получили то, что нам надо.

Формула доказана!

2. $\dim(L_1 \cap L_2) \neq 0$ Откуда возьму базис пересечения: $e_1, \dots e_k$.

   По теореме о дополнения до базиса, тк $e_1, \dots e_k$ лежит в L_1 и линейно независимо, то я могу дополнить до базиса L_1, получу: $e_1, \dots e_k, v_1, \dots v_{n-k}$ — базис L_1.

   Аналогично сделаю со вторым пространством и получу:$e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_{m-k}$ — базис L_2.

   Теперь докажем, что $e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_{n-k}, f_1, \dots, f_{m-k}$ — базис суммы.

   - Докажем линейную независимость. От противного. Пусть лин. зависимо, тогда напишем нетривиальную линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n-k+i} e_i + \sum_{i=1}^{m-k} \alpha_{n+i} f_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n-k+i} e_i = -\sum_{i=1}^{m-k} \alpha_{n+i} f_i$$

     Перенесем в другую сторону и получим, что с одной стороны у нас есть ненулевой v из L_1, с другой стороны он у нас из L_2. Откуда левая сумма раскладывается по векторам из e_1(так как он лежит в пересечении).

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n-k+i} e_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i$$

     Перенесу налево, должна получиться линейная комбинация равная нулю, а такая из-за линейной независимости может быть только тривиальной, откуда альфы при v равны 0, аналогично альфы при f равны 0. Остались только e, ну а они тоже равны нулю. Откуда лин. независима

   - Докажем порождаемость. Любой элемент суммы раскладывается (по определению) на элемент из L_1 и элемент из L_2. Откуда разложим на базисы L_1, L_2 (которые указаны выше). Сложим их и получили, что данный элемент это линейная комбинация. Откуда порождаема.

Q.E.D.

$L_1, \dots, L_m \subset V$ называются дизъюнктными, если $x_1 + \dots + x_n = 0$, где $x_i \in L_i, i = 1 \dots m \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots m : x_i = 0$

$L_1 + \dots + L_m$ называется прямой суммой, если $L_1, \dots, L_m$ — дизъюнктны

$L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$ — прямая сумма линейного подпространства

Теорема

$$L = L_1 + \dots + L_m = \sum_{k=1}^{m} L_k, L_k \subset V$$

$$L = \bigoplus_{k=1}^{m} L_k \Leftrightarrow \text{выполнению любого из 3-х утверждений}$$

1. $\forall j = 1 \dots m : L_j \cap \sum\limits_{k \neq j} L_k = \{0\}$
2. базис $L =$ объединение базисов L_k
3. $\forall x \in L : \exists! x_k \in L_k : x = \sum x_k$ (единственность представления суммы)

   Доказательство:
   Давайте сначала докажем из определения дизъюнктности первый пункт.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Мы знаем, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0$ возможно только если каждый из векторов — 0. Рассмотрим $v \in L_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$. Он, как несложно заметить, лежит в L_i, поэтому может быть записан как v_i. То есть $v \in \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$, что значит, что его можно записать как сумму $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j$. А это значит, что $-v_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j = 0$. По причине дизъюнктности, все слагаемые тут — 0. А значит $-v_i = 0 \Rightarrow v = 0$. То есть любой $v \in L_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$ является 0, что и требовалось доказать.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Мы знаем, что $\forall i \in [1 : m]$ $L_1 \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j = \{0\}$. Хочется доказать, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1 : m]$ $v_i = 0$. Заметим, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j = -x_i$. Правая часть лежит в $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} L_j$, а левая — в L_i. Это значит, что обе части лежат в их пересечении, а там лежит только 0. Значит $v_i = 0$. То же самое можно провести для любого i, получив, что все v_i — нули. Что и требовалось доказать.

   Теперь давайте докажем из определения дизъюнктности второй пункт.

   Мы знаем, что $v_1, \dots, v_m = 0$ возможно только если каждый из векторов — 0. Рассмотрим базисы L_i. Возьмем все эти базисы. Очевидно они будут порождать нашу сумму. Теперь докажем линейную независимость.

От противного. Пусть они линейно зависимы, тогда есть линейная комбинация этих базисов — $\sum \beta_i e_i + \ldots + \sum \beta_f + e_j = 0$ Но, что это значит? Это значит, что есть сумма $v_1, \ldots, v_m = 0$ при этом где есть элементы не равные нулю (что следует из линейной независимости элемментов искомых матриц). Заметим, что мы этим доказали и сразу в обратную сторону.

Теперь давайте докажем равносильность второго и третьего. Из второго третье — расписать по базису каждый вектор и получить, что они совпали. Из третьего второе — аналогично.

Q.E.D.

Следствие

$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m \Leftrightarrow \dim L = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim L_i$

Доказательство

по Грассману и мат. индукции Q.E.D.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall x \in V : \exists! x_i \in L_i : x = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

x_i — проекция элемента x на подпространство L_i параллельно $\sum\limits_{j \neq i} L_j$

L_i — прямое дополнение

Линейным (аффинным) многообразием называется множество точек пространства $V : D = \{x \in V : x = x_0 + l, l \in L\}$, где $L \subset V, x_0 \in V$ (сдвинутое линейное подпространство)

Размерность линейного многообразия $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \dim D = \dim L$

Теорема

$P_1 = x_1 + L_1; P_2 = x_2 + L_2$, где $L_1, L_2 \subset V$ — линейные подпространства, $x_1, x_2 \in V$

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 = L \\ x_1 - x_2 \in L \end{cases}$$

Доказательство:
$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall p_1 \in P_1 = x_1 + l_1 = x_1 - x_2 + l_1 + x_2 \in P_2$

Так как $x_1 - x_2 \in L = L_2, l_1 \in L = L_2$. Откуда $P_1 \subset P_2$. Аналогично $P_2 \subset P_1$, откуда получили искомое $\boxed{\Rightarrow}$ Посмотрим на $x_1 + 0$. Он лежит в P_1, откуда есть ему эквивалентный $x_2 + l_2$из P_2, исходя из того, что $P_1 = P_2$. Тогда $x_1 - x_2$ лежит в L_2.

Посмотрим на $x_2 + 0$. Он лежит в P_2, откуда есть ему эквивалентный $x_1 + l_1$из P_1, исходя из того, что $P_1 = P_2$. Тогда $x_1 - x_2$ лежит в L_1. Откуда он лежит в пересечении.

Теперь рассмотрим любое $l_2 \in L_2$. Ему соответсвует элемент, как $x_2 + l_2$, с другой стороны это $x_1 + l_1$. Тогда $x_1 - x_2 + l_1 = l_2$. Откуда любой l_2 содержится в l_1. То есть $L_2 \subset L_1$. Аналогично, $L_1 \subset L_2$, откуда получили то, что нам надо.

Q.E.D.

Следствие

$P = X_0 + L$

$\forall x \in P \Rightarrow P_x = x + L = P$

Доказательство

1. $L = L$

2. $x - x_0 \in L$

Q.E.D

2.3.6 Фактор пространство лин. пространства

Пусть у нас есть линейное подпространство L. Тогда отношение $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$ является отношением эквивалентности, для любых векторов из V.

Факторпространство пространства V по модулю линейного подпространства L $V\Big|_L$ — это фактормножество V по отношению эквивалентности $\sim$ из предыдущего утверждения.

Теорема $V\Big|_L$ состоит из линейных многообразий на L.

Доказательство:
Если $x-y \in L$, то линейные многообразия $x+L$ и $y+L$ по одной из теорем ранее совпадают. То есть эквивалентные элементы порождают одинаковые многообразия.

Теорема

$\dim V\Big|_L = \dim V - \dim L.$

Доказательство:
Пусть $\{e_1; e_2; \ldots; e_m\}$ — базис L. Дополним его до базиса V векторами $\{f_1; f_2; \ldots; f_{n-m}\}$. Хочется доказать, что $\{f_1 + L; f_2 + L; \cdots; f_{n-m} + L\}$ — базис $V\Big|_L$.
Докажем, что эта система порождающая. Нужно породить $v + L$. v раскладывается по базису $\{e_1; e_2; \ldots; e_m; f_1; f_2; \ldots; f_{n-m}\}$ как $v = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i$. Первая сумма лежит в L, то есть её можно выкинуть, многообразие останется таким же. А значит $v+L$ можно представить как $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$, ведь по определению суммы многообразий это $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i\right) + L$.
Теперь докажем линейную независимость. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$. Она, как мы уже знаем, равна $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i\right) + L$. Это должно быть равно нейтральному элементу (то есть L). Когда эти линейные многообразия равны? Когда $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i \in L$. То есть $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = 0$. Но это же линейная комбинация векторов подсистемы $\{e_1; e_2; \ldots; e_m; f_1; f_2; \ldots; f_{n-m}\}$, а значит она линейно независима. А значит $\forall i \in [1 : n - m]$ $\beta_i = 0$, что значит, что линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$ тривиальна.

2.4 Матрицы

2.4.1 Основные понятия

def: Матрица — множество некоторых объектов (элементов), записанных в виде таблицы (не обязательно числа).

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m — число строк n — число столбцов "Матрица размерности m на n"

Матрица, где $\forall i, j\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — числовая (вещественная/комплексная).

$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \end{pmatrix}$ — столбцовый вид записи. A_j — столбец матрицы. $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$

$A = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$ — строчный вид записи. S_i — строка матрицы. $S_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n(\mathbb{C}_n)$

$span(A_1, \dots, A_n) \subset \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ — пространство столбцов матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & a_{mn} \end{pmatrix}$ — главная диагональ.

$A = \begin{pmatrix} * & * & a_{1n} \\ * & \iddots & * \\ a_{m1} & * & * \end{pmatrix}$ — побочная диагональ.

$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = diag(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ — диагональная матрица.

$E = diag(\alpha_1, \dots \alpha_n), \forall i\ \alpha_i = 1$ — единичная матрица.

$\forall A_{n\times n} \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ — след матрицы (от англ. trace?)

$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ — верхнетреугольная матрица.

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & a_{nn} \end{pmatrix}$ — нижнетреугольная матрица.

2.4.2 Основные операции с матрицами

$a_{ij} \in \mathbb{K}$
$A_{m\times n}, B_{m\times n}$
def: $C = A + B = (c_{ij}) \quad \forall i, j \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
'+' — сложение матриц (одной размерности)
$\mathbb{0}$ — нейтральный элемент относительно сложения

$\lambda \in \mathbb{K}$
$C = \lambda A = (\lambda a_{ij})$
$\lambda\times$ — умножение на скаляр.
$-1A$ — противоположная A матрица (не путать с обратной)

Свойства:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\exists \; \mathbb{0}$
4. $\exists \; -A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
8. $1A = A$

=> Линейное пространство (8 аксиом выполнены) $M_{m\times n}$

$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \iddots & 0 \\ 0 & \dots & a_{ij} = 1 & \dots & 0 \\ 0 & \iddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — канонический базис пространства $M_{m\times n}$ $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} =$
$(\alpha_{ij})_{m\times n} = \mathbb{0}_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \; \forall i, j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})^{mn} \quad \Rightarrow \quad A \cong \mathbb{K}^{mn} \quad \Rightarrow \quad dim(M_{m\times n}) = mn$$

def: Матрицы A и B согласованы, если число столбцов A совпадает с числом столбцов B.

Если A и B согласованы, то $A_{m\times k}, B_{k\times n}$

$C = A \times B = AB = (C_{ij})_{m\times n} \quad C_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}$ — умножение

def: Матрицы A и B перестановочны, если $AB = BA$ (очевидно, должны быть квадратными)

A, B, C — квадратные матрицы $n \times n$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

9. $A(B+C) = AB + AC$
   $(A+B)C = AC + BC$

=> кольцо

10. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

=> алгебра ($M_{n\times n}$)

11. $A(BC) = (AB)C$

=> ассоциативная алгебра

13. $\exists E \quad EA = AE = A$

=> унитальная алгебра

(Обратный элемент может не существовать, так что без 12)

Доказательства: упражнение на дом :) Но вообще там несложно, просто глина

2.4.3 Операция транспонирования

def: Операция транспонирования заменяет матрицу $A_{m\times n}$ на $A^T_{n\times m}$, где строки новой матрицы - столбцы исходной (проще говоря, отражение относительно главной диагонали)

$B = A^T = (b_{ij}) = (a_{ji})$

Свойства:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$
3. A и B согласованы $(AB)^T = B^T A^T$ (!!! не путать, я так вторую попытку кр по матрицам слил)

def: $A_{m\times n}$ называется симметрической, если $A = A^T$

def: $A_{m\times n}$ называется кососимметрической, если $A = -A^T$

2.4.4 Обратная матрица

def: $A_{n\times n}$
Матрица A^{-1} называется обратной к A, а A называется обратимой, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пока мы не знаем условий существования (в лекциях позже)

Свойства:

1. A^{-1} — единственная (док-во очевидное через ассоциативность)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$ (из определения)
3. $\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. $E^{-1} = E$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $\exists B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.4.5 Ранг матрицы

def: $rg_{line}(A) = rg(S_1, \dots S_n)$ — строчный ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \leq rg_{line}(A) \leq n$ $(A \neq \mathbb{0})$

def: $rg_{col}(A) = rg(A_1, \dots A_m)$ — столбцовый ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \leq rg_{col}(A) \leq m$ $(A \neq \mathbb{0})$

$A_j \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$

$\widetilde{A}_j = \begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j} \\ \vdots \\ a_{i_k j} \end{pmatrix}$ — отрезок длины k столбца A_j

$S_i \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$

$\widetilde{S}_i = \begin{pmatrix} a_{ij_1} & a_{ij_2} & \ldots & a_{ij_k} \end{pmatrix}$ — отрезок длины k строки S_i

Утверждение 1: $A_1, A_2, \dots A_n$ линейно зависимы => любые отрезки длины k $\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n$ линейно зависимы.

Доказательство:
От противного: предполагаем, что независимы, но у нас уже есть нетривиальная линейная комбинация столбцов $A_1, A_2, \dots A_n$, равная нулю, и если мы удалим часть строк, линейная комбинация всё так же будет давать 0.

То есть я беру коэффиценты из линейности верхней, подставляю их же в нижнюю и получаю, что она линейно независима.

Следствие: Отрезки длины k $\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n$ линейно независимы => $A_1, A_2, \dots A_n$ линейно независимы.

Утверждение 2: $rg_{line}(A) = k \quad S_{i_1} \dots S_{i_k}$ — база строк. Тогда, если $\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_{i_1} \dots S_{i_k}$, линейно зависимы, то и $A_1, A_2, \dots A_n$ линейно зависимы.

Доказательство:
н.у.о. $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, k$. Значит все оставшиеся - линейно комбинация. Значит я любую строчку могу записать, как линейную комбинацию наших строк:

$s_{k+l} = \sum\limits_{r=1}^{k} \alpha_{rl} s_r.\ a_{k+l_j} = \sum\limits_{r=1}^{k} \alpha_{rl} a_{r_j}$:

$\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_{i_1} \dots S_{i_k}$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists \beta_j \in K$ не все нули.

$\sum_{j=1}^{n} b_j \widetilde{A}_j = 0$. Докажем, что с этими же β

$\sum_{j=1}^{n} b_j A_j = 0$. Первые k - нули. Докажем, что и оставшиеся нули.

Посмотим на $k+1$ координату: $\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{k+1_j} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{r=1}^{k} \alpha_{r1} a_{r_j} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{r_1} \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{r_j} = 0$

Далее буду смотреть на следующие строчки и дальшнейшее доказательство будет аналогично.

Теорема (о ранге матрицы)

$rg_{line}(A) = rg_{col}(A) = rg(A)$

Доказательство:
$\operatorname{rg} A = k : 1 \leq k \leq n, m$

н.у.о. Пускай первые k строк линейно независимы.

Рассмотрим отрезки столбиков, соответствующие этим элементам.

$$r = \operatorname{rg}(\widetilde{A}_1 \dots \widetilde{A}_n) \leq k$$

Теперь посмотрим на подматрицу, состоящую из базы столбцов внутренней матрицы (состоящей из базы строк и всех столбцов) и всех строк. Замечу, что у меня отрезки линейно независимые (которые соответствуют базе строк), откуда получил линейно независимую размера r. Откуда $rg_{col} \geq r$.

Теперь посмотрю на все сочетания столбцов в внутренней матрицы, хотя бы из $k+1$ вектора. Замечу, что такие отрезки будут линейно зависимы (иначе наш ранг не r). А откуда соответствующие отрезки в столбцах искомой матрицы будут линейно зависимы по 2-ому утверждению. Откуда $rg_{col} \leq r$.

Откуда получаю, что ранг столбцов меньше ранга строк. Заметим, что то же самое я могу повторить и для ранга строк. Откуда я получаю искомое.

Свойства ранга:

1. $rg(A^T) = rg(A)$
2. $rg(\lambda A) = rg(A)$
3. $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$ (лайт версия т. Грассмана)
4. A и B согласованы, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Доказательство:

1. Заметим, что у транспонированной столбцы и строки просто местами поменяются.
2. тут даже говорить нечего...
3. $rg(A+B) \leq \dim(L_1 + L_2) \leq \dim(L_1) + \dim(L_2)$
4. Зафиксируйте А. Тогда столбики, полученные умножением на В будут лин. комбинацией, откуда $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$. Транспонируйте произведение и повторите, получите $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(B)^T \leq \operatorname{rg}(B)$

def: Элементарными преобразованиями над строками(столбцами) матрицы A называются элементарные преобразования 1-4, которые производятся с ними (на записи звук пропал, но подозреваю, что как с векторами)

Свойства ранга:

5. rg(A) не меняется при элементарных преобразованиях над её строками/столбцами

Теорема: $A_{m\times n}$
$rg(A) = k$
$1 \le k \le min(n, m)$
$\forall A$ может быть элементарными преобразованиями строк и перестановкой столбцов приведена к трапециевидной форме. Причем, число строк в трапециевидной форме равно k (соответственно, если число столбцов равно k, можно привести к треугольной форме)

Матрица трапециевидной формы (н.у.о. n <= m:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{nn} & * & * \end{pmatrix}$$

2.5 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.5.1 Основные определения и понятия, теорема Кронекера-Капелли.

Обычно система записывается так: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Матричная форма записи — $Ax = b$, где

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = b$, где $A = (A_1, \dots, A_n)$ - столбики — матричная запись.

$Ax = b$ — **система однородных линейных уравнений (СЛОУ) (однородная система)**, если $b = \mathbb{0}$.

$Ax = b$ — **система неоднородных линейных уравнений (СЛНУ) (неоднородная система)**, если $b \neq \mathbb{0}$.

Система $Ax = b$ — **совместная (разрешенная)**, если $\exists x$, то есть существует решение.

Система $Ax = b$ — **несовместная (неразрешенная)**, если $\nexists x$, то есть решения не существует.

Замечание: СЛОУ всегда совместна, т.к. $x = \mathbb{0}$ всегда является решением.

Система $Ax = b$ — **определенная**, если есть единственное решение.

Система $Ax = b$ — **неопределенная**, если есть более одного решения.

Система $Ax = \mathbb{0}$ — **тривиальная**, если она определённая, то есть единственное решение $x = \mathbb{0}$.

Общее решение системы $Ax = b$ — $\{\forall x | Ax = b\}$, то есть множество всех его решений.

Частное решением системы $Ax = b$ — какое-то конкретное решение x, рассматриваемое в данном контексте.

Расширенная матрица системы — $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Теорема Кронекера-Капелли: $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$

Доказательство:

$Ax = b \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i = b$ — линейная комбинация столбцов $\Leftrightarrow b \in \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{span}(A_1, \dots A_n, b)$

$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n)) = \dim(\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n, b)) = \operatorname{rg}(A|b)$ $Q.E.D.$

2.5.2 Структура общего решения СЛОУ и СЛНУ. ФСР. Альтернатива Фредгольма.

Теорема: $Ax = \mathbb{0}$, $u, v \in K^n$ — решения СЛОУ $\Rightarrow \forall \lambda \in K : \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ.

u, v — решения $\Rightarrow Au = \mathbb{0}, Av = \mathbb{0}$

$A(\lambda u + v) = \lambda Au + Av = \lambda \mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0} \Rightarrow \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ $Q.E.D.$

Следствие: общее решение СЛОУ — линейное подпространство $L \subseteq K^n$

Смотри критерии линейного подпространства.

Теорема (размерность общего решения СЛОУ): $Ax = \mathbb{0}$, $\operatorname{rg}(A) = k$, L — общее решение СЛОУ $\Rightarrow \dim(L) = n - k = n - \operatorname{rg}(A)$, где n — число неизвестных.

- $k = 0$:

  $A = \mathbb{0}$ $\forall x \in K^n : Ax = \mathbb{0} \Rightarrow \dim(L) = \dim(K^n) = n - 0 = n - k$

- $1 \leq k < n$:

  Тогда $\operatorname{rg}(A) = k = \operatorname{rg}_{col}(A) = \operatorname{rg}(A_1, \dots, A_n)$ — база столбцов из k элементов. Не умаляя общности переставим столбцы чтобы базисом были столбцы $A_1, \dots, A_k$, а все остальные столбцы будут их линейными комбинациями.

  $A_{k+j} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^j A_j$, где $\alpha_i^j \in K$. (j — тоже индекс, просто для удобства записанный сверху)

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j A_i - A_{k+j} = \mathbb{0} \Leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_k^1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_k^2 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, u_{n-k} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-k} \\ \alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$u_1, \ldots, u_{n-k}$ — решения $Ax = \mathbb{0}$, причём линейно независимые из-за нулевых координат в нижней части векторов.

Покажем, что $u_1, \ldots, u_{n-k}$ — порождающая система. Пусть u — решение $Ax = \mathbb{0}$.

$$u = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = u + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_{k+j} u_j =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \beta_{k+2} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+1}\alpha_1^1 \\ \beta_{k+1}\alpha_2^1 \\ \vdots \\ \beta_{k+1}\alpha_k^1 \\ -\beta_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+2}\alpha_1^2 \\ \beta_{k+2}\alpha_2^2 \\ \vdots \\ \beta_{k+2}\alpha_k^2 \\ 0 \\ -\beta_{k+2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \beta_n\alpha_1^{n-k} \\ \beta_n\alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \beta_n\alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

v — тоже решение $Ax = \mathbb{0}$, так как является суммой других решений $Ax = \mathbb{0}$, домноженных на некоторые коэффициенты.

$Av = \gamma_1 A_1 + \cdots + \gamma_k A_k = \mathbb{0}$ — нулевая линейная комбинация линейно независимых векторов $\Rightarrow \forall \gamma_j = 0 \Rightarrow u + \sum\limits_{i=1}^{n-k} \beta_{k+j} u_j = \mathbb{0} \Rightarrow u = \sum\limits_{i=1}^{n-k} (-\beta_{k+j}) u_j \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1, \ldots, u_{n-k}$ — порождающая система $\Rightarrow u_1, \ldots, u_{n-k}$ — базис $L \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim L = n - k$

- $k = n$:

  $A_1, \ldots, A_n$ — линейно независимы

  $Ax = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : x_i = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$ — единственное решение $\Leftrightarrow \dim L = 0$

Следствие: $Ax = 0$, n — число переменных.

- $0 \leq \text{rg}(A) < n \Rightarrow$ система неопределенная, имеет бесконечно много решений, образующие линейное подпространство.
- $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$ система определенная, имеет единственный корень равный нулю, то есть система тривиальная.

Фундаментальная система решения — базис линейного подпространства решений СЛОУ.

Теорема (о структуре решения СЛНУ): Пусть Ax = b совместна, x_0 — частное решение СЛНУ: x — решение СЛНУ $\Leftrightarrow x = x_0 + u$, где u — некоторое решение $Ax = \mathbb{0}$

- $\Rightarrow$:

  $Ax = b$, $Ax_0 = b \Rightarrow A(x - x_0) = \mathbb{0} \Rightarrow u = x - x_0$ — решение $Ax = \mathbb{0}$

- $\Leftarrow$:

  $x = x_0 + u$, $Au = \mathbb{0}$, $Ax_0 = b \Rightarrow Ax = A(x_0 + u) = b + \mathbb{0} = b \Rightarrow x$ — решение $Ax = b$

Следствия:

1. Общее решение $Ax = b$ — линейное многообразие $P = L + x_0$, где x_0 — частное решение СЛНУ, $L = \text{span}(u_1, \dots, u_{n-k})$ — общее решение $Ax = \mathbb{0}$

   $\dim(P) = \dim(L)$ — размерность общего решения СЛНУ.

2. - $0 \leq \text{rg}(A) < n \Rightarrow Ax = b$ имеет бесконечно много решений, $\dim(P) = n - \text{rg}(A)$
   - $\text{rg}(A) = n \Rightarrow Ax = b$ имеет единственное решение, $\dim(P) = 0$

Теорема (Альтернатива Фредгольма): Пусть $A_{m\times n} \neq \mathbb{0}$, $x \in K^n$, $y \in K^m$: Либо $\forall b \in K^m$: $Ax = b$ имеет решение, либо $A^T y = \mathbb{0}$ нетривиальна.

То есть, $\forall b \in K^m$, существует решение $Ax = b \Leftrightarrow A^T y = \mathbb{0}$ тривиальна.

- $\Rightarrow$

  $\forall b \in K^m Ax = b$ совместно $\Leftrightarrow b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i \Rightarrow b \in span(A_1, \dots, A_n)$

  Пусть $b = E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, где $a_j = 1$ - элемент j-ой строки

  $E_j \in \text{span}(A_1, \dots, A_n)$

  Заметим, что $K^m \subset span(A_1, \dots A_m) \subset K^m$, потому что любой базисный вектор содержится в нашей оболочке. Откуда:

  $span(A_1, \dots A_n) = K^m \Rightarrow rgA = m = rgA^T \Rightarrow A^T y = 0$ будем иметь одно решение, по ранее сказанной теореме.

- $\Leftarrow$: Заметим, что все переходы сверху работают в обе стороны.

2.5.3 Метод Гаусса решения СЛНУ

$Ax = b.$

Элементарным преобразованием системы будем называть:

1. добавление / удаление уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.
2. изменение нумераций уравнений.
3. умножение $\forall$ уравнения на $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0$.
4. замена $\forall$ уравнения на его сумму с другим уравнением.
5. изменение нумерации переменных.

Замечание:

1. все элементарные преобразования приводят к эквивалентной системе.
2. все элементарные преобразования эквиваленты элементарным преобразованиям $A|b$ и перестановкой в ней столбцов (пункт 5).

Теорема (прямой ход метода Гаусса)

$\forall Ax = b$

Элементарными преобразованиями системы исходная система может быть замена на эквивалентную систему, матрица которой будет иметь трапециевидную форму.

- Находим в необработанной части матрицы самую левую верхнюю ненулевую ячейку. Переставляем её в самый левый верхний угол необработанной части матрицы.
- Отнимаем от всех строчек, ниже первой необработанной, первую необработанную, домноженную на нужный коэффициент, чтобы первый столбец необработанной части оказался заполненным нулями, кроме первой ячейки.
- Отмечаем верхнюю необработанную строчку и левый необработанный столбец, как обработанные.

Метод Гаусса решения СЛАУ:

1. Прямой ход

   См. теорему о приведении матрицы к трапециевидной форме. Проводить её мы будем с расширенной матрицей системы. Один лишь нюанс в том, что переставлять столбец B ни с чем нельзя, то есть на нём мы заканчиваем алгоритм.

2. Обратный ход

   (a) Вид матрицы треугольный

   Обнулим последний столбец при помощи последней строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & b_1 - b_n\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & b_2 - b_n\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Повторим для предпоследней строки и столбца и так далее. В конце концов придём к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n' \end{array}\right)$$

Значит $\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$ — решение СЛАУ.

(b) Вид матрицы не треугольный

Возьму из матрицы треугольник, а остальные переменные временно занулим. Так найдем одно решение.

2.5.4 Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

$|A_{n\times n}|$. Найти $A^{-1}_{n\times n}$, такую, что $A \times A^{-1} = E$

A^{-1} - n неизвестных столбцов. $A^{-1} = (X_1, \ldots, X_n) = X \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

Заметим, что A^{-1} - решение уравнения $AX = E \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = E_1 \\ AX_2 = E_2 \\ \vdots \\ AX_n = E_n \end{cases}$

В процессе нахождения неизвестных столбцов мы делаем с левой частью матрицы одни и те же преобразования. Давайте решать n систем одновременно:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{array}\right)$$

Теорема. (о существовании обратной матрицы)

Дано: матрица $A_{n\times n}$

$\exists A^{-1}$ (A обратима) $\Leftrightarrow rgA = n$

Причем A^{-1} может быть найден методом Гаусса.

Доказательство:
Такая A^{-1} если есть решения $AX_i = E_i$, это значит, что $\operatorname{rg}(A|E_i) = \operatorname{rg} A$, откуда каждый E_i в спане. Откуда, $rgA = n$.

Следствие. Дано $A_{n\times n}, Ax = b$. A обратимо $\Leftrightarrow$ существует единственное решение СЛНУ. Причем, $x = A^{-1}b$

A обратима $\Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow$ существует единственное решение СЛНУ $\Leftrightarrow A^{-1}$.

$Ax = b \Leftrightarrow A(A^{-1}b) = b \Leftrightarrow b = b$ Q.E.D

Теорема (о ранге произведения матрицы и обратимой матрицы)

$A_{n\times n}$, A - обратима, $B_{m\times n} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B \\ \operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg} B \end{cases}$

Доказательство:
$\operatorname{rg}(AB) \le (\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B) \le \operatorname{rg} B$.

$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} EB = \operatorname{rg}(A^{-1}AB) \le rg(AB) \le \operatorname{rg} B$

2.5.5 Геометрическая интерпретация СЛАУ

$V, \dim V = n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис

Множество точек пр-ва V, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению 1-ой степени(линейному) наз-ся **гиперплоскостью** в пр-ве V.

$\forall x \in V \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ — координатный изоморфизм

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - гиперплоскости

Что будет в пересечении $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_m$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b'_k \end{array}\right)$$

1.

2.

3. $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A|B$, это значит, что есть 3 линейно независимые строки, а остальные - их лин. комбинация.

   То есть существуют 3 некомпланарные нормали $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$.

   Прямые лежащие в попарном пересечении плоскостей с этими нормалями будут не параллельными, то есть т.к. система совместна, то существует точка, принадлежащая каждой из прямых, т.е. все 3 прямые пересекаются в 1-ой точке.

2.5.6 Матрица перехода от старого базиса к новому. Связь координат вектора в разных базисах.

$V, e_1, e_2, \dots, e_n$ - старый базис - E.

$e'_1, e'_2, \dots e'_n$ - новый базис - E'.

$$x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$ - координаты в базисе E.

$$x \in V \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in K^n$$ - координаты в базисе E'.

$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.

Давайте представим e'_j через старый базис: $T_j = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$ - координаты в базисе e.

$T = T_{e \to e'} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) T_{e \to e'}$

Свойства T:

1. $\operatorname{rg} T = n$ (T обратима)
2. T^{-1} - матрица перехода из e'_1 вe_1.

   Пусть B - матрица перехода от e' к e.

   $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)B = ((e_1, \dots, e_n)T)B = (e_1, \dots, e_n)(BT)$, откуда $BT = 1$, откуда $B = T^{-1}$
3. связь координат вектора в разных базисах:

   $x \leftrightarrow X$ в старом базисе

   $x \leftrightarrow X'$ в новом базисе

   $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} = x'_j e'_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} e_i)$

   т.е координаты определяются единственный образом

   $\forall i = 1 \dots n : x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j = (TX')_i$

   $X' = T^{-1} X$

2.6 Определители.

2.6.1 Антисимметричные полилинейные формы. Определитель системы векторов произвольного лин. пр-ва.

$\dim V = n$ - лин. пространство над полем K

$f : V \times V \times \ldots \times V \to K$ (p штук) - называется **полилинейной** формой (функцией), если выполнено:

$f(\xi_1, \ldots, \xi_p) =$ число в K.

$\forall \lambda \in K, \forall \psi, \mu \in V : f(\ldots, \psi + \lambda\mu, \ldots) = f(\ldots, \psi, \ldots) + \lambda f(\ldots, \mu, \ldots)$

Правило/Соглашение Эйнштейна: $x^i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x e_i$ - меняем обозначение

~~решил выделить это в лемму~~

Лемма:

$\xi_1, \ldots, \xi_p \in V$.

$\xi_j = \xi_j^i e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix} \in K^n$

Тогда: $f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}, \ldots, \xi i_{p_p} e_{i_p}) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$

Доказательство:
Разложите каждую скобочку по линейности. Ой, получили, что надо :0

$f : V^p \to K$ - полилинейная форма. если f=0 при любых двух равных элементах, то f наз-ся **антисимметричной.**

Утв. f антисимметрична $\Leftrightarrow \forall (i, j) : f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) = -f(\ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots)$.

Доказательство:

$f(\ldots, \xi_i + \xi_j, \ldots, \xi_i + \xi_j, \ldots) = 0$

Разложим через линейность:

$f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) + f(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots) = 0$. Откуда уже следует искомое.

В обратную сторону $f(\ldots, \xi, \ldots, \xi_i, \ldots) = -f(\ldots, \xi, \ldots, \xi_i, \ldots)$, откуда уже следует искомое.
Q.E.D

Антисимметричные полилинейные формы будем называть **p - формами**.

Следствие: f - p-форма $\Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha_{i_1 \ldots i_k \ldots i_m, \ldots, i_p} = -\alpha_{i_1 \ldots i_m \ldots i_k, \ldots, i_p} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha_{i_1 \ldots i_k \ldots i_m, \ldots, i_p} = 0$, если $i_k = i_m$.

Откуда можно из суммы убрать все не перестановки (они занулятся) и формула получится такой:

$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, где $i_1, \dots, i_n$ это текущая перестановка индексов

Подстановки и перестановки

$\varphi : (1, \dots, n) \to (1, \dots, n)$ подстановка. Удобнее всего показывать стрелочками. Перестановка - образ.

φ, ψ - 2 подстановки. Произведением перестановок назовем образ композиции отображений.

Произведение ассоциативно, но не коммутативно.

Если φ - подстановка, то φ^{-1} - взаимно однозначная и взаимообратная.

Транспозиция элементов перестановки σ называется подстановка меняющая местами 2 элемента перестановки:

$(i_1, \dots, i_a, \dots, i_b, \dots, i_n)$ перейдет в $(i_1, \dots, i_b, \dots, i_a, \dots, i_n)$

Любую перестановку можно привести к тривиальной транспозициями, так как можно найти единицу, поменять местами с первым элементом, затем найти двойку, поменять местами со вторым, и так далее.

Перестановка называется **четной** или **нечетной**, если она приводится к тривиальной за четное или соответственно нечетное количество транспозиций (именно тем алгоритмом который сверху)

$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma - \text{четная} \\ 1, \sigma - \text{нечетная} \end{cases}$

Заметим, что сумму из формы теперь можно привести к другой, если применить транспозиции показанные выше к $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$:

$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} f(e_1, \dots, e_n) \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} =$

$= \text{const} \cdot \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, где $\text{const} = f(e_1, \dots, e_n)$.

n-форму, у которой значение на упорядоченном наборе базиса векторов $e_1, \dots, e_n$. равно 1 назовем D.

D - n-форма, т.к $D(e_1, \dots, e_n) = 1 : \forall \xi_1 \dots \xi_n : D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} = \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — **определитель системы векторов**.

Замечания:

1. $\forall f$ - n-форма $f = \alpha D$, где $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$.
2. Форма D существует единственная.
3. Определение D-формы зависит от базиса, т.к. чтобы её определить, должен быть зафиксирован базис.

2.6.2 Определитель матрицы. Две формулы

Есть матрица $A_{n \times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$A = (A_1, \dots, A_n),\ A_j, \in K_n$

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ E_{jj} = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — канонический базис}$$

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ — координаты в базисе } E_1, \dots, E_n$$

D - n-форма $D(E_1, \dots, E_n) = 1$

$\forall A_1, \dots A_n \in K^n$

$$D(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A$$

Замечания:

1. $D(E_1, \dots, E_n) = 1 = \det E$
2. f — n-форма на K^n

   $f(A_1, \dots, A_n) = \alpha D(A_1, \dots, A_n)$

   $\alpha = f(E_1, \dots, E_n)$

Инверсией называется пара элементов (i_α, i_β) перестановки σ такие, что $i_\alpha > i_\beta$ и $\alpha < \beta$.

$\mathrm{inv}(\sigma) =$ число инверсий в перестановке

Теорема:

1. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$
2. Любая транспозиция элементов может быть получена за нечётное число транспозиций соседних элементов
3. транспозиция любых двух соседних элементов меняет число инверсий на 1
4. $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$

Доказательство:

1. Применим алгоритм из определения ε одновременно для σ и σ^{-1}. На каждом шаге алгоритма перестановкми, полученные из σ и σ^{-1} остаются обратными друг-другу, значит добираются до тривиальной за одинаковое количество транспозиций. Значит, их чётности равны.
2. Поменяем местами i_α и i_β. приблизим i_β к i_α k транспозициями соседних элементов. Поменяем i_α и i_β местами. Отодвинем i_α от i_β k транспозициями. Всего $2k + 1$ транспозиций.

3. Пусть перестановка имеет вид A, i_α, i_β, B, где A и B — части перестановки. i_α образует m инверсий с A, i_β образует k инверсий с B. Транспозиция i_α и i_β или создаст или уничтожит их инверсию и не изменит m или k.

4. Пусть σ четная $\Rightarrow$ четное число транспозиций приводят к тривиальной $\Rightarrow$ четное число соседних транспозиций приводят к тривиальной перестановке, т.е. число инверсий изменилось на четное число. Число инверсий в конце — 0, чётное число, а значит изначально $\operatorname{inv}\sigma$ — четное число. Пусть σ нечетная $\Rightarrow$ нечетное число транспозиций приводят к тривиальной $\Rightarrow$ нечетное число соседних транспозиций приводят к тривиальной перестановке, т.е. число инверсий изменилось на нечетное число. Число инверсий в конце — 0, чётное число, а значит изначально $\operatorname{inv}\sigma$ — нечетное число.

Вторая формула для определителя:

$\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} a_{i_1 1}, \ldots, a_{i_n n}$, где $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$

2.6.3 Свойства определителя

1. $\det A^T = \det A$

   $A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix}$

   $\det A^T = \sum \sigma \in S_n (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1}, \ldots, a_{i_n n}$, $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) = (\varphi(1), \ldots, \varphi(n)) = \varphi(1, \ldots, n) \Leftrightarrow$ $(\det A^T = \sum\limits_{\sigma \in S_N} (-1)^{\varepsilon(\sigma) a_{j+1}}$

   Следствие: $detA = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma) a_{1 i_1} \ldots a_{n i_n}}$, для $\sigma = (i_1 \ldots i_n)$

   Замечание: все свойства, сформулированные для столбцов, верны и для строк.

2. $\det(\ldots, \lambda A_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, A_i, \ldots)$, $\lambda \in K$

   $\det(\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_k, \ldots) = \det(\ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots) + \det(\ldots, A_j, \ldots, A_k, \ldots)$

   Доказательство:

   $\det A = D(A_1, \ldots, A_n)$ - полилинейная n - форма, откуда все и следует

3. $\det(\ldots \mathbb{0} \ldots) = 0$ - частный случай $\lambda = 0$.

4. $\det(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) = -\det(\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots)$

   $\det(\ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots) = 0$

   Доказательство: det — антисимметричная

5. $\det(\ldots A_i \ldots A_j \ldots) = \det(\ldots A_i + \lambda A_j \ldots A_j \ldots)$

   Доказательство:

   $\det(\ldots A_i + \lambda A_j \ldots A_j \ldots) = \det(\ldots A_i + \ldots A_j \ldots) + \det(\ldots \lambda A_j \ldots A_j \ldots) = \det(\ldots A_i + \ldots A_j \ldots) + \lambda \cdot 0$ Q.E.D

6. Определитель ступенчатой (блочно-диагональной) матрицы:

$$\det\begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{m} \det A^k$$

$A^k = (a^k_{i_j})$

Доказательство:

- База $m = 2$: $det\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$

  Решим простой случай $A_1 = 1, A_2 = 1$:

  $$\det\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ * & E_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \det E = 1$$

  Усложним. Пусть у нас теперь только одна из двух матриц единичная(E_{k_2} - единичная матрица размера $k \times k$):

  $$\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_{k_2} \end{pmatrix} = f(B_1, \dots, B_{k_1}) = f(E_1, \dots, E_{k_1}) \det B = \det B$$

  f — k_1-форма, значит полилинейная и антисимметричная. (f - функция, которая для заданной B находит определитель матрицы)

  $f = \alpha D$, $\alpha = f(e_1, \dots, e_{k_1})$

  $$f(E_1, \dots, E_{k_1}) = \det\begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} = 1$$

  Усложним ещё раз:

  $\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ * & C \end{pmatrix} = g(C_1, \dots, C_{k_2}) = g(E_1, \dots, E_{k_2}) \cdot \det C = \det B \det C$, что следует из того, что g - полилинейная форма и из прошлого

- Индукционный переход Пусть верно для $m - 1$, тогда докажем, что верно для m:

  $$\det\begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & A^m \end{pmatrix} = \det A^m \cdot \det A = \prod_{k=1}^{m} \det A^k,$$

  где $A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^{m-1} \end{pmatrix}$

Следствия:

(a) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ * & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

(b) $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$

Просто преобразуем A методом Гаусса и получим трапециевидную. $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow$ после преобразований она будет треугольной, значит на диагонали нет нулей, значит их произведение не 0.

Замечание: в силу свойства 1, всё сказанное верно и для верхнетреугольных матриц.

7. $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} =$, для какого-то столбца j.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - минор.

$A = \begin{pmatrix} I \ldots & a_{1j} & II \\ a_{1n} \ldots & a_{ij} & \ldots a_{in} \\ III & a_{mj} & IV \end{pmatrix}$, тогда $M_{ij} = \det \left(\begin{array}{c|c} I & II \\ \hline III & IV \end{array}\right)$

Докажем сначала для 1 столбца:

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \ldots & * \\ a_{12} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & * & \ldots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} M_{i1} a_{i1}$$

Докажем для произвольного j-ого столбца

$\det A = \det(\ldots A_j \ldots) = (-1)^{j-1} \det(A_j A_1 \ldots A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{j-1}(-1)^{i+1} a_{ij} M_{ij}$

8. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$ (j — фиксированный номер столбца, k — фиксированный номер другого столбца.) $= 0 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$ (i — фиксированный номер строки, k — фиксированный номер другой строки)

Доказательство:

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n)$

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det(A_1 \ldots A_k \ldots A_j \ldots A_n)$

9. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$AB = (AB_1, \ldots, AB_n)$, $B = (B_1, \ldots, B_n)$

$\det(A \cdot B) = f(B_1, \ldots, B_n)$ (полилинейная, антисимметричная n - форма, $f = \alpha D$) $= f(E_1, \ldots, E_n) \cdot \det B = \det(A \cdot E) \cdot \det B = \det a \cdot \det B$

2.6.4 Формула для обратной матрицы. Теорема Крамера.

Матрица $A_{n\times n}$ — **невырожденная**, если $\det A \neq 0$

Теорема: (об обратной матрице)

Дано $A_{n\times n}$. A обратима $\Leftrightarrow$ A невырожденна.

Причем, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Матрица в формуле называется союзной, взаимной, или присоединяемой.

Доказательство:

- $\Rightarrow$

  A обратима $\Rightarrow \exists A^{-1}$. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$

  $\Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det E = \det A^{-1}\cdot \det A$, откуда уже следует искомое.

- $\Leftarrow$

  A - невырожденная. $\det A \neq 0$. Покажем, что матрица $B = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$

  $$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

  $$= \frac{1}{\det A}\cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix} =$$

  (Все не диагональные ячейки по 8 свойству — нули, а все диагональные по 7 свойству — $\det A) = E \Rightarrow B = A^{-1}$

Следствия:

1. A обратима $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow detA \neq 0$
2. $detA^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
3. Теорема Крамера

$Ax = b$, $A_{n\times n}$

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow A$ невырожденная.

Причём, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det(A_1, \ldots, b, \ldots, A_n)$ (b занимает i-й столбец)

Доказательство:

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$, то есть A - невырожденная

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i1}b_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i2}b_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i1}b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det(b, A_2 \ldots A_n) \\ \det(A_1, b \ldots A_n) \\ \vdots \\ \det(A_1, A_2 \ldots b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

2.6.5 Теорема Лапласа

$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$1 \leq k \leq n$: $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$

$i_s \in (1, \ldots, n)$, $j_t \in (1, \ldots, n)$

Составим из элементов матрицы A новую матрицу, состоящую из элементов, находящихся на пересечении k выбранных строк и k выбранных столбцов

Минор k-того порядка $M^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \ldots & a_{i_nj_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1j_n} & \ldots & a_{i_nj_n} \end{vmatrix}$

$\overline{M}^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k} = M^{t_1,\ldots,t_m}_{s_1,\ldots,s_m}$ — называется **дополнительным минором**, где $t_i \neq j_j$, $s_i \neq i_j$.

Алгебраическим дополнением называется дополнительный минор, домноженный на единицу в степени суммы номеров строк и столбцов.

Теорема Лапласа

$A_{n\times n}$, зафиксируем какие-то k строчек $i_1, \ldots, i_k$

$\det A = \sum\limits_{j_1<\ldots<j_k} \overline{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} A^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$

Доказательство:

Пускай k выбрано от 1 до n и фиксирован набор строк. Тогда хотим доказать:

$\sum\limits_{j_1<\ldots<j_k}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\ldots j_k}\overline{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}=\det A$

- **База индукции:**

  Свойство 7: $\sum\limits_j(-1)^{i+j}\overline{M}^i_jM^i_j=\det A$

- **Индукционное предположение:**

  Пусть формула верна для первых $k-1$ строчек $(i_1,\ldots,i_{k-1})$:

  $\det A=\sum\limits_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}}(-1)^{i_1+\cdots+i_{k-1}+j_1+\cdots+j_{k-1}}\overline{M}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}M^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}$

- **Индукционный переход:**

  Заметим, что в дополнительный минор входит i_k строчка:

  $$\overline{M}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}=M^{\ldots,i_k,\ldots}_{\ldots}$$

  Давайте разложим данный минор, по данной строчке. Получим:

  $$\sum_{j\in(1,\ldots,n)\setminus(j_1,\ldots,j_{k-1})}a_{i_kj}(-1)^{\#i_k+\#j}\overline{M}^{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}_{j_1,\ldots,j_{k-1},j}$$

  где $\#i_k$ и $\#j_k$ - номер строчки в матрице без этих $k-1$ столбцов и без этих $k-1$ строчек.

  Не трудно заметить, что $\#i_k=i_k-(k-1)$. Теперь давайте подставим в формулу наш получившийся минор.

  $$\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}}(-1)^{i_1+\cdots+i_{k-1}+j_1+\cdots+j_{k-1}}M^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}\sum_{j\in(1,\ldots,n)\setminus(j_1,\ldots,j_{k-1})}a_{i_kj}(-1)^{\#i_k+\#j}\overline{M}^{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}_{j_1,\ldots,j_{k-1},j}$$

  Получится вот такая крайне прелестная формула. Перепишем:

  $$\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-1}}\sum_{j\in(1,\ldots,n)\setminus(j_1,\ldots,j_{k-1})}a_{i_kj}(-1)^{\#i_k+\#j}\overline{M}^{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}_{j_1,\ldots,j_{k-1},j}(-1)^{i_1+\cdots+i_{k-1}+j_1+\cdots+j_{k-1}}M^{i_1,\ldots,i_{k-1}}_{j_1,\ldots,j_{k-1}}$$

  И что мы делаем в этой формуле, выбираем сначала $k-1$ столбик, а потом еще один. Давайте делать это по-другому. Выберем k столбиков и 1, который выкидываем. Получится вот такая формула:

  $$\sum_{j_1<\ldots<j_k}\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}}(-1)^{i_k-(k-1)+\#j_s}a_{i_kj_s}\overline{M}^{i_1,\ldots i_k}_{j_1,\ldots,j_k}M^{i_1,\ldots i_{k-1}}_{\{j_1,\ldots,j_{k-1},j_k\}\setminus\{j_s\}}\cdot(-1)^{i_1+\ldots+i_{k-1}+j_1+\cdots+j_k-j_s}$$

  Найдем $\#j_s=j_s-(s-1)$:

  $$\sum_{j_1<\ldots<j_k}\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}}(-1)^{i_k-(k-1)+j_s-(s-1)}a_{i_kj_s}\overline{M}^{i_1,\ldots i_k}_{j_1,\ldots,j_k}M^{i_1,\ldots i_{k-1}}_{\{j_1,\ldots,j_{k-1},j_k\}\setminus\{j_s\}}\cdot(-1)^{i_1+\ldots+i_{k-1}+j_1+\cdots+j_k-j_s}$$

В итоге:

$$\sum_{j_1<\ldots<j_k}(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\overline{M}^{i_1,\ldots i_k}_{j_1,\ldots,j_k}\sum_{s\in\{1,\ldots,k\}}(-1)^{-(k-1)+-(s-1)}a_{i_kj_s}M^{i_1,\ldots i_{k-1}}_{\{j_1,\ldots,j_{k-1},j_k\}\setminus\{j_s\}}$$

А это будет разложением по k -ой строчке, откуда получаем искомое. Q.E.D.

~~Кажется, вам тяжело! Единый общероссийский телефон доверия:~~

~~Позвонить 8-800-2000-122~~

2.6.6 Второе определение ранга матрицы.

$\operatorname{rg} A$ называется наибольший порядок минора отличного от нуля, то есть $\operatorname{rg} A = k$, если существует минор не равный нулю, а любой минор большего порядка равен 0. Такой минор является **базисным**, а строки и столбцы, входящие в этот минор — **базисными**.

Базисный минор не определён единственным образом.

Замечание. Если все миноры $k+1$ порядка 0, то все миноры порядка больше $k+1$ тоже 0.(очевидно из разложения по строчке или столбцу)

Теорема (об эквивалентности двух определений ранга)

$\operatorname{rg} A_{\text{def 1}} = \operatorname{rg} A_{\text{def 2}}$

Доказательство:
Давайте докажем, что $\operatorname{rg} A_{\text{def 1}} \leq \operatorname{rg} A_{\text{def 2}}$.

Возьму минор, состоящий из строк базы столбцов и базы строк, из их линейной независимости следует, что определитель данного минора не 0.

Давайте докажем, что $\operatorname{rg} A_{\text{def 1}} \geq \operatorname{rg} A_{\text{def 2}}$

Возьму минор $k+1$ порядка. Если бы столбцы были линейно независимы, то по первому утверждению (из раздела про ранг матрицы) получу, что столбики линейно независимы, откуда $\operatorname{rg} A > k$. А такого не может быть. Откуда столбцы линейно зависимы, а уже отсюда следует, что определитель получившегося минора равен нулю.

Метод окаймляющих миноров.

$A \neq \mathbb{0}$

Алгоритм:

Берем смотрим на минор k-ого порядка:

1. Если все его (окаймляющие прошлого этапа) миноры 0, то $\operatorname{rg} A = k$.
2. Если существует минор не равный 0, тогда k++ и повторить алгоритм

Окаймляющие миноры - миноры, в разложениях по строкам и столбцов которых присутствует данный минор

Пусть $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} \neq 0$, а все его окаймляющие его равны 0 $\operatorname{rg} A = k$

$$\forall i \forall j \notin (j_1, \dots, j_k) : \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & \dots & a_{i_2 j_k} & a_{i_2 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} & a_{i_k j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{i j_k} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

Если i совпадает с каким-либо индексом из $i_1, \dots, i_k$, то это определитель с равными строками, значит нулевой. Если i не совпадает ни с одним индексом из $i_1, \dots, i_k$, то тогда это окаймляющий минор $(k+1)$-го порядка, который нулевой по условию.

Распишем определитель по последней строке.

$$0 = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} A_{ij_s} + a_{ij} (-1)^{k+1+k+1} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$$

$$\forall i : a_{ij} = 0 \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} A_{i,j_s} = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_S} \lambda_s \Leftrightarrow A_j = \sum_{s=1}^{k} A_{j_s} \lambda s$$

мы показали, что для $\forall j \in \{j_1, \dots, j_k\}$ — линейная комбинация соответствующих столбцов.

2.6.7 Определитель n-ого порядка.

Приведение к треугольному виду.

$$\Delta_n \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_k - x) \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1 - x} & \dfrac{x}{a_2 - x} & \dfrac{x}{a_3 - x} & \dots & \dfrac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_k - x) \begin{vmatrix} \sum & \dfrac{x}{a_2 - x} & \dfrac{x}{a_3 - x} & \dots & \dfrac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Откуда уже можно легко посчитать определитель.

Метод выделения линейных множителей

$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i)$ Заметим, что когда $x_i = x_j$ определитель равен 0. Тогда получаем, что определитель должен делиться на каждый из корней(раскладывается в произведение корней)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i) = (x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)\cdot(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}-x_n)C$$

$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})c' = \Delta_{n-1}x_n^{n-1} + \dots$

$c' = \Delta_{n-1}$

$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)\dots(x_{n-1} - x_{n-2})\Delta_{n-2} =$

$= \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$

Метод рекуррентных соотношений

Возвратная последовательность. Пример. $x_2 = 2, x_1 = 4$. Рекуррентная последовательность задается выражением $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. И ее решая можно получить корень

Пример решения. $x_1 = 3, x_2 = 9, x_n = 3x_{n-1} - \dfrac{9}{4}x_{n-2}, n > 2.$

Подставим вместо $x_n = \lambda^n$ (не спрашивайте почему, там огромный кусок теорий и объяснений)

$\lambda^n = 3\lambda^{n-1} + \dfrac{9}{4}\lambda^{n-2}$. Переведем в квадратное, решим, найдем корни. Получим $\lambda_{1,2} = \dfrac{3}{2}$

Тк лямбды совпали, то второй корень умножаем на n:

$x_n = c_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + c_2 n\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

$x_1 = c_1\left(\dfrac{3}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $x_2 = c_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + c_2 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

Найдя c_1 и c_2, можно найти общую рекурренту и её решить.