

Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1	Практика 1.	
1.1	Неопределенный интеграл	
2	Практика 2.	
2.1	Продолжение неопределенных интегралов.	
3	Практика 3.	
3.1	Определенные интегралы	
4	Практика 4.	
4.1	Римановы суммы	
5	Практика 5.	
5.1	Разные идеи:	
6	Практика 6.	
6.1	Длина кривой	
7	Практика 8.	
7.1	Признак сравнения	
8	Информация о курсе	

1 Практика 1.

1.1 Неопределенный интеграл

$f(x)$ - непрерывна. $U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

def: первообразной функции f называется функция $F(x)$, такая что $F'(x) = f(x) : \forall x \in U$

def: неопределенный интеграл $\int f dx = \{F - \text{первообразные функции } f\}$

$$(F_1 - F_2)' = 0, \text{ откуда } F_1 - F_2 \equiv c$$

Таким образом две первообразные отличаются на константу. То есть теперь:

$$\int f dx = F + C, \text{ где } F - \text{любая первообразная, а } C - \text{константа.}$$

Свойства:

$$1. \int \text{линеен}$$

$$2. \int f g = \int f g' + \int f' g. \text{ Или } \int f dg = f g - \int g df$$

$$3. \text{Замена переменных: } \varphi - \text{дифф } \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

Замечание: $f'(x)dx = df(x)$

Задачи: Найти первообразную функции f проходящую через точку (x_0, y_0) :

$$1. f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x - \cos(x+1), (x_0, y_0) = (1, 1)$$

Можем искать интегралы отдельно из линейности:

$$\int f dx = \sqrt{x} - \cos x - \sin(x+1) + c$$

Теперь хотим, чтобы в единице была 1:

$$c + 1 - \cos 1 - \sin 2 = 1$$

Нашли c и выиграли

$$2. f(x) = |x|, (x_0, y_0) = (-2, 4)$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} ; F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x, & x < 0 \end{cases} = \frac{x|x|}{2} + c$$

Подставим точку и выиграем

3. $f = x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases} ; F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c, x \geq 0 \\ -\frac{x^3}{3} + c, x < 0 \end{cases} = \frac{|x|^3}{3} + c$$

4. $f = e^{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ e^{-x}, x \leq 0 \end{cases} ; F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, x \geq 0 \\ -e^{-x} + c_2, x \leq 0 \end{cases}$$

На выходе должна быть непрерывная функция, откуда в точке ноль они должны совпадать

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c, x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c, x < 0 \end{cases}$$

5. $f = \max(1, x^2)$

Тривиально.

6. $\int \sin(ax + b)dx, a \neq 0$

Хотим найти что-то такое $\int \sin(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$:

$$\int \sin(ax + b)dx = \int \sin t \frac{dt}{a} = -\frac{1}{a} \cos t + c = -\frac{\cos ax + b}{a} + c$$

7. $\int \frac{1}{3x^2 + 5}dx$

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{\frac{3}{5}x^2 + 1} = \frac{1}{5} \int \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + c$$

8. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ Воспользуемся разложением на простые дроби:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1) + c$$

9. $\int \sin^n x dx$

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx &= \int -\sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos^2 x (n-1) \cdot \sin^{n-2} x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx\end{aligned}$$

Откуда если взять эту формулу за I_n получится:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}$$

А это уже можно дорешать.

2 Практика 2.

2.1 Продолжение неопределенных интегралов.

1. $x^2 + px + q$ не имеет корней. Найти $\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{ax + b}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx =$$

Сделаем замену $y = x + \frac{p}{2}$, $\gamma^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ из-за того что корней нет

$$\begin{aligned} &= \int \frac{ay + b - a\frac{p}{2}}{y^2 + \gamma^2} = \frac{a}{2} \int \frac{2y + \frac{2b}{a} - p}{y^2 + \gamma^2} = \int \frac{2y dy}{y^2 + \gamma^2} + \frac{a}{2} \left(\frac{2b}{a} - p \right) \int \frac{dy}{y^2 + \gamma^2} = \\ &= \frac{a}{2} \ln(y^2 + \gamma^2) + \frac{ac}{2} + \frac{a}{2} \left(\frac{2b}{a} - p \right) \left(\arctg \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \end{aligned}$$

Пусть у нас есть функция от двух рациональных переменных $R(x, y)$:

Пример: $\frac{x^3 + 2xy + y^2}{7x + 4y^4}$.

И пусть хотим посчитать $\int R(\cos t, \sin t) dt$. Будем делать универсальную замену: $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$

Тогда $\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $\sin t = \frac{2x}{1 + x^2}$, $dt = 2 \frac{dx}{1 + x^2}$. То есть на самом деле:

$$\int R(\cos t, \sin t) dt = \int R\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \frac{2x}{1 + x^2}\right) \frac{2dx}{1 + x^2}$$

Проблема в том, что такой интеграл считать не вкусно.

Если $R(-x, -y) = R(x, y)$, поделим на x в максимальной степени. Пример

$$\frac{x^2 + 3xy}{y^4 + 4} = \frac{\frac{1}{x^2} + 3\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \frac{4}{x^4}}$$

Давайте в таком случае сделаем замену $z = \operatorname{tg} t$, $dt = \frac{dz}{1+z^2}$, $\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t = z$, $\cos^2 t = \frac{1}{1+z^2}$

Пример:

$$\int \frac{dt}{2 + \cos^2 t} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{2 + \frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{3 + 2z^2}$$

$$1. \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} dt = \int \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t} dt = \int \frac{1 - z}{1 + z} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{1}{1 + z} - \frac{z}{1 + z^2} dz = \ln(z+1) - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) + c$$

Не забыть сделать обратную замену!

$$2. \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{2 + \operatorname{tg} t + \operatorname{tg}^2 t} = \int \frac{dz}{2 + z + z^2} = \int \frac{dz}{(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{4}{7}} \operatorname{arctg}(y \cdot \sqrt{\frac{4}{7}}) + c$$

Не забыть сделать обратную замену!

$$3. \int \sin^2 t dt$$

$$\int \sin^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt$$

А дальше очевидно доделывается.

3 Практика 3.

3.1 Определенные интегралы

f - непрерывные на $[a, b]$. Хотим посчитать площадь подграфика. Более подробно нам говорили на лекции (смотрите конспект лекции).

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ где } F - \text{какая-то константа} - \underline{\text{формула Ньютона-Лейбница.}}$$

Задачи: кто больше?

$$1. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \text{ или } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Очевидно правая больше из площади подграфика.

$$2. \int_0^{-1} e^{-x} \sin x dx \text{ или } \int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$$

$e^{-x} < e^{-x^2}$ на этом интервале. Откуда больше правая

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ или } \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Функция слева меньше функции справа, откуда у правой подграфик больше (они положительные)

Доказать:

$$1. \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

Вспользуемся переходом в неравенствах и получим то, что надо

$$2. \frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx < \frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx + \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx =$$

Заметим, что правое выражение - интеграл нечетной функции на симметричном интервале откуда это 0. Перепишем:

$$= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx$$

Теперь оценим сверху и снизу эту функцию и получим победу.

$$3. \frac{\sqrt{2}}{3} < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2} < 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\cos x}{2+x^2} dx$$

Сверху очевидно оценивается $\cos x = 1$, $x^2 = 0$, снизу оценивается $x^2 = 1$

$$4. \frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{10}$$

$$\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9$$

Интегрируем неравенство и получаем выигрыш.

$$5. 1 - \frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n} dx < 1, n \in \mathbb{N}$$

$e^t = 1 + t + o(t)$, но мы не умеем в интегралы от $o(t)$, откуда $e^t \geq 1 + t$.

$$\int_0^1 e^{-x^n} dx \geq \int_0^1 (1 - x^n) dx = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

Сверху оценивается очевидно

4 Практика 4.

4.1 Римановы суммы

$\sum_{i=1}^n (\Delta x)_i f(x - \xi_i) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dx$. Об этом есть в конспекте лекций.

$$1. \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$

Возьму $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}, x_n = 1 = b, f(x) = \sqrt{x+1}$. В данном случае $\xi_i = x_i$

Откуда на самом деле это предел Римановой суммы:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3}$$

$$2. \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{n}$$

Откуда если $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}, x_n = 1 = b, f(x) = x, \xi_i = x_i$. Получили Риманову сумму, откуда:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

Тут что-то не видно ничего. Давайте вынесем $4n^2$:

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{2} \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{k}{2n})^2}}$$

А вот тут уже видно сумму Римана. $x_0 = a = 0, x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}, x_n = 1 = b, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}}, \xi_i = x_i$.

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} = \frac{\pi}{6}$$

$$4. \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \sqrt{(an+k)(an+k+1)}$$

$$\sum \frac{1}{n} \sqrt{\left(a + \frac{k}{n}\right)\left(a + \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)} = \sum \frac{1}{n} \sqrt{\left(a + \frac{k}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(a + \frac{k}{n}\right)} = \sum \frac{1}{n} \left(n + \frac{k}{n}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{n} \frac{1}{a + k/n}} =$$

$$= \sum \frac{1}{n} \left(a + \frac{k}{n}\right) + \sum \left(\frac{1}{n} \left(a + \frac{k}{n}\right) o(1)\right)$$

Штуку слева мы уже научились считать, осталась только справа. (о малая от единицы взялась как то, что мы оценили то, что под корнем). Теперь оценим то, что под скобками как $\frac{1}{an}$, то есть оно стремится к нулю при увеличении n .

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{\pi}{n}}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} + \sum_{k=1}^n \frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$$

Первое - Риманова сумма, ее считать умеем, а справа непонятно.

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| o\left(\frac{1}{n}\right) \right| \frac{\pi}{n} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = |o\left(\frac{1}{n}\right)| \frac{\pi}{n} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)} \rightarrow 0$$

Наше o не зависит от k , откуда можно вынести за скобки и получим, что оно стремится к нулю.

Посчитаем первое:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \cdot \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Тут появился несобственный интеграл, о нем читайте в конспекте

$$6. \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n + \frac{1}{k}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n + \frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{1 + \frac{1}{kn}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot 2^{k/n} \left(1 - \frac{1}{kn} + o\left(\frac{1}{kn}\right)\right) =$$

Обозначим то, что в скобках $o(1)_k$. Заметим, что мы можем его оценить $o(1)$, которое не зависит от k .

$$= \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n} o(1)_k$$

Слева Риманова сумма. Посчитать ее понятно как. Справа какая-то хрень, но мы можем вынести $o(1)$ за скобки по вышесказанному. Откуда останется 0 на ограниченная, получится ноль и победа

5 Практика 5.

5.1 Разные идеи:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$$

Заметим, что мы можем воспользоваться Лопиталем потому что обе штуки стремятся к нулю, откуда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \cdot dt}{\int_0^x \sqrt{\sin t} dt}$$

Тут тоже Лопиталь, откуда выведем общую формулу:

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = (F(h(x)) - F(g(x)))' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Пользуясь ею получаем, что наш предел равен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} \cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)} \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$3. \int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \text{ при } x \rightarrow \infty$$

Поделим и посмотрим на предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2}} = 1$$

$$4. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

Заменим n на t и воспользуемся Лопиталем.

6 Практика 6.

6.1 Длина кривой

$$l(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченного кривыми. Так как это крайне скучно, то я просто вставляю кусок теории. Для решения всех задач на эту тему вы должны знать все предыдущие практики и в том числе уметь интегрировать и брать производные.

Если x, y заняты параметрически (функциями от t), то формула такая:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)} dt$$

где a, b - границы t по которым вы хотите посчитать.

Если у вас есть $y = f(x)$ и такая функция гладкая, то формула такая:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)} dx$$

где a, b - границы вашего пути по x

Если у вас есть функция, заданная в полярных координатах $r = f(\varphi)$, то формула такая:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$$

7 Практика 8.

7.1 Признак сравнения

$|f| \leq g$ и $\int_a^b g dx$ - сходится. Тогда $\int_a^b f dx$ абсолютно сходится.

Задачи: Исследовать на сходимость:

$$1. \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится $\Leftrightarrow \int_0^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha} dx$. По определению: ($\alpha \neq 1$)

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_\sigma^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Есть предел при $1 - \alpha > 0$. Случай $\alpha = 1$ разбирается руками и ответа не существует

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

Для общей концепции обрабатывания плохи точек: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится $\Leftrightarrow \int_{E>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходит-

ся. $E \gg 0$ значит E очень большое.

$$\int_E^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_E^M \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-\alpha} - E^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Тогда этот интеграл сходится, когда $\alpha > 1$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

Всегда расходится из прошлых двух.

$$4. \int_0^8 \frac{dx}{x^2 + x^{2/3}}$$

$\frac{1}{x^2 + x^{2/3}} \leq \frac{1}{x^{2/3}}$. Откуда проинтегрируем неравенство и получим то, что нам надо.

$$5. \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx$$

сходится когда \int_0^ε сходится.

$$\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < \frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x} < \int_0^\varepsilon \frac{\sin x}{x^2}$. Интеграл слева расходится, откуда наш расходится.

6. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Мы ломаемся в $0, \pi, 2\pi$.

Посмотрим на окрестности 0: $\frac{1}{2}x < \sin x < \frac{3}{2}x$. Проинтегрируем неравенство - все работает

$\frac{1}{2}(x - 2\pi) < \sin x < \frac{3}{2}(x - 2\pi)$. Проинтегрируем неравенство - все работает.

Аналогично с последней точке (только нужно подойти с двух сторон к ней)

7. $\int_1^\pi \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8 Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Басков Игорь Сергеевич.

Я хочу чокопай

