ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа искусственного интеллекта

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине «Элементы теории вероятности и линейной алгебры»

Вариант №11

Выполнил
Студент 3540201/10301 группы Ф.М. Титов

Руководитель
доцент, к.т.н. А.В. Востров

Санкт-Петербург
2021 г.

Оглавление

Постановка задачи

По номеру варианта выбрать распределение (см. список вариантов) и смоделировать выборку псевдослучайных чисел объемом 100 единиц. Самостоятельно задать все необходимые параметры распределения (три различных варианта - можно брать параметры из примеров справочника Вадзинского); построить графики функции плотности вероятности, функции распределения, функции значений процентилей, вычислить числовые характеристики выборки и построить ее гистограмму. Получить точечные и интервальные оценки (b=0.95) математического ожидания и дисперсии. Распределения брать из справочника Вадзинский Р.Н. "Справочник по вероятностным распределениям".

Вариант: Гамма-распределение.

Теоретическая часть

Для реализации функции генерации псевдослучайных чисел были взяты алгоритмы из справочника Вадзинский Р.Н. "Справочник по вероятностным распределениям" (Рис.1-3).

Алгоритм 1 используется для случая, когда $0 < \alpha < 1$. Алгоритм 2, соответственно, для случая $\alpha \geq 1$. Псевдокоды для обоих алгоритмов представлены на рис. 2, 3.

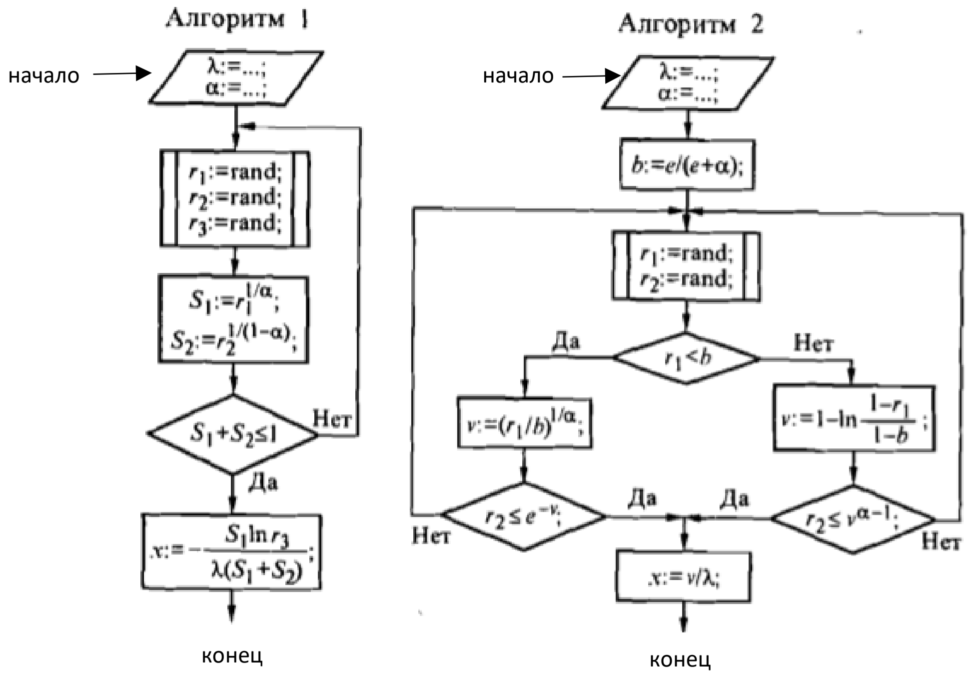

Рис. 1. Блок-схемы алгоритмов генерирования случайных чисел, имеющих гамма-распределение.

Алгоритм 1

1. $r_1 :=$ rand; $r_2 :=$ rand; $r_3 :=$ rand;
2. $S_1 := r_1^{1/\alpha}$; $S_2 := r_2^{1/(1-\alpha)}$;
3. Если $S_1 + S_2 \leq 1$, то на 4, иначе — на 1;
4. $x := -\dfrac{S_1 \ln r_3}{\lambda(S_1 + S_2)}$.

Рис. 2. Псевдокод Алгоритма 1.

Алгоритм 2

1. $b := e/(e + \alpha)$;
2. $r_1 :=$ rand; $r_2 :=$ rand;
3. Если $r_1 < b$, то на 4, иначе — на 6;
4. $v := (r_1/b)^{1/\alpha}$;
5. Если $r_2 \leq e^{-v}$, то на 8, иначе — на 2;
6. $v := 1 - \ln((1 - r_1)/(1 - b))$;
7. Если $r_2 \leq v^{\alpha-1}$, то на 8, иначе — на 2;
8. $x := v/\lambda$.

Рис. 3. Псевдокод Алгоритма 2.

Согласно заданию, необходимо построить графики функций плотности вероятности и распределения. Для этого из справочника были взяты необходимые формулы.

Плотность вероятности для гамма-распределения рассчитывается по следующей формуле, представленной на рис. 4.

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); α — параметр формы ($\alpha > 0$)

Рис. 4. Формула плотности вероятности для гамма-распределения.

Формула функции распределения для гамма-распределения представлена на рис. 5.

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda x} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = I(\lambda x; \alpha),$$

где $I(x;\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции

Рис. 5. Формула функции распределения для гамма-распределения.

Также, согласно заданию, необходимо построить график функции значения процентилей и гистограмму. Функция значения процентилей показывает процент значений меньше либо равной величине, заданной на оси x. Гистограмма – способ представления табличных данных в графическом виде — в виде столбчатой диаграммы. Количественные соотношения некоторого показателя представлены в виде прямоугольников, площади которых пропорциональны. Чаще всего для удобства восприятия ширину прямоугольников берут одинаковую, при этом их высота определяет соотношения отображаемого параметра.

Математическое ожидание – это среднее, взвешенное по вероятностям возможных значений, значение случайной величины. Для гамма-распределения матожидание вычисляется по формуле, представленной на рис. 6.

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Рис. 6. Формула матожидания для гамма-распределения.

Дисперсия случайной величины – мера разброса значений с.в. относительно ее матожидания. Для гамма-распределения дисперсия вычисляется по формуле, представленной на рис. 7.

$$\textbf{Дисперсия} \qquad D_x = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Рис. 7. Формула дисперсии для гамма-распределения.

Мода – это наиболее вероятное значение случайной величины, значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Для гамма-распределения мода вычисляется по формуле, представленной на рис. 8. Выборочное значение моды для непрерывной случайной величины считается по формуле, представленной на рис. 9.

$$\textbf{Мода} \qquad \hat{x} = \frac{\alpha - 1}{\lambda}, \alpha \geq 1$$

Рис. 8. Формула вычисления теоретического значения моды для гамма-распределения.

$$Mo(X) = \arg \max_{-\infty < x < \infty} f_X(x)$$

Рис. 9. Формула вычисления выборочного значения моды для непрерывной СВ.

Асимметрия – числовая характеристика с.в., отображающая степень отклонения графика распределения показателей от симметричного графика распределения. Для гамма-распределения значение асимметрии вычисляется по формуле, представленной на рис. 10.

$$\textbf{Асимметрия} \qquad Sk = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Рис. 10. Формула вычисления значения асимметрии для гамма-распределения.

Коэффициент эксцесса – мера остроты пика распределения с.в. Для гамма-распределения значение коэффициента эксцесса вычисляется по формуле, представленной на рис. 11.

$$\textbf{Эксцесс} \qquad Ex = \frac{6}{\alpha}$$

Рис. 11. Формула вычисления значения коэффициента эксцесса для гамма-распределения.

Выборочное среднее (рис. 12) – это приближение теоретического среднего распределения, основанное на выборке из него.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Рис. 12. Формула вычисления значения выборочного среднего.

Выборочная дисперсия (рис. 13) – это оценка теоретической дисперсии распределения, рассчитанная на основе данных выборки. Виды выборочных дисперсий:

- смещённая;
- несмещённая или исправленная

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Рис. 13. Формулы вычисления выборочной дисперсии (смещенной и несмещенной).

$$F(x) = 0.5,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\chi)\, d\chi.$$

Рис. 14. Формулы вычисления медианы для непрерывной СВ.

Медиана – числовая характеристика СВ, значение которой такое, что половина из элементов набора не меньше него, а другая половина не больше. В нашем случае распределение непрерывно, поэтому медиана рассчитывается по формулам, представленным на рис. 14.

Согласно заданию, необходимо вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии. Интервальные оценки показывают интервал, в которой с доверительной вероятностью попадет значение оценки. Такие оценки более точные, чем точечные. Доверительная вероятность b = 0.95, по условию задания.

Точный доверительный интервал для математического ожидания строится на основе распределения Стьюдента. Его значение можно получить с помощью таблицы. Он будет равен *t(0.95, 99)= 1.9842169515086827*. Формула вычисления доверительного интервала для математического ожидания изображена на рис. 15.

$$I_{\beta} = \left(m_X^* - t_{\beta}\sqrt{\hat{D}_X / n},\ m_X^* + t_{\beta}\sqrt{\hat{D}_X / n} \right)$$

Рис. 15. Формула вычисления доверительного интервала для математического ожидания.

Для расчета интервальной оценки дисперсии используется функция Хи квадрат. Хи квадрат от 0.025 и 99 степеней свободы = 73.36108, от 0.025 0.975 равно 128.422. Формула вычисления доверительного интервала для дисперсии изображена на рис. 16.

$$\frac{(n-1)\hat{D}_X}{\chi_2^2} < D_X < \frac{(n-1)\hat{D}_X}{\chi_1^2}$$

Рис. 16. Формула вычисления доверительного интервала для дисперсии.

Реализация

В ходе выполнения лабораторной работы была написана программа на языке программирования Python. Для построения графиков использовалась библиотека matplotlib.

На рис. 17 представлен код, реализующий генерацию псевдослучайных чисел по гамма-распределению. На вход функция принимает параметры α, λ, n – объем выборки.

```python
def generate_random_num(alpha, lam, n):
    if alpha <= 0:
        return None

    def algorithm_1():
        X = []
        for i in range(n):
            r1 = rand.random()
            r2 = rand.random()
            r3 = rand.random()
            S1 = math.pow(r1, 1 / alpha)
            S2 = math.pow(r2, 1 / (1 - alpha))
            while S1 + S2 > 1:
                r1 = rand.random()
                r2 = rand.random()
                r3 = rand.random()
                S1 = math.pow(r1, 1 / alpha)
                S2 = math.pow(r2, 1 / (1 - alpha))
            X.append(-(S1 * math.log(r3) / (lam * (S1 + S2))))
        X = list(set(X))
        X.sort()
        return X
```

```python
    def algorithm_2():
        X = []
        for i in range(n):
            b = math.exp(1) / (math.exp(1) + alpha)
            res = None
            while res is None:
                r1 = rand.random()
                r2 = rand.random()
                if r1 < b:
                    v = math.pow(r1 / b, 1 / alpha)
                    if r2 < math.exp(-v):
                        res = v / lam
                else:
                    v = 1 - math.log((1 - r1) / (1 - b))
                    if r2 < math.pow(v, alpha - 1):
                        res = v / lam
            X.append(res)
        X = list(set(X))
        X.sort()
        return X

    return algorithm_1() if 0 < alpha < 1 else algorithm_2()
```

Рис. 17. Код для генерации псевдослучайных чисел для гамма распределения.

Код на языке Python, с помощью которого находится плотность вероятности, представлен на рис. 18. Для удобства была реализована дополнительная функция get_fx внутри основной функции. На вход главная функция принимает массив сгенерированных псевдослучайных чисел, а также параметры α, λ. В качестве результата функция возвращает массив значений.

```
def get_probability_density(X, alpha, lam):
    def get_fx(x):
        return (math.pow(lam, alpha) / math.gamma(alpha)) * math.pow(x, alpha - 1) * math.exp(-x * lam)

    return [get_fx(i) for i in X]
```

Рис. 18. Код, реализующий нахождение плотности вероятности.

Аналогично функции нахождения плотности вероятности была реализована функция нахождения значений функции распределения. Код, реализующий нахождение функции распределения, представлен на рис. 19.

```
def get_probability_distribution(X, alpha, lam):
    def get_Fx(x):
        return (1 / math.gamma(alpha)) * integrate.quad(lambda t: math.pow(t, alpha - 1) * math.exp(-t), 0, lam * x)[0]

    return [get_Fx(i) for i in X]
```

Рис. 19. Код, реализующий нахождение функции распределения.

На рис. 20 представлен код функции, строящей график функции плотности вероятности. Аналогично ей была реализована функция, строящая график функции распределения (рис. 21).

```
def plot_probability_density(X_arr, params):
    fig, ax = plt.subplots()
    for i in range(len(X_arr)):
        x = X_arr[i]
        alpha = params[i]['alpha']
        lam = params[i]['lam']
        prob_density = get_probability_density(x, alpha, lam)
        ax.plot(x, prob_density, label='alpha={},lam={}'.format(alpha, lam))
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('f(x)')
    plt.ylim(0.0, 0.5)
    plt.xlim(0, 10)
    ax.grid()
    ax.legend()
    plt.show()
```

Рис. 20. Программный код, строящий график функции плотности вероятности.

```python
def plot_probability_distribution(X_arr, params):
    fig, ax = plt.subplots()
    for i in range(len(X_arr)):
        x = X_arr[i]
        alpha = params[i]['alpha']
        lam = params[i]['lam']
        prob_distr = get_probability_distribution(x, alpha, lam)
        ax.plot(x, prob_distr, label='alpha={},lam={}'.format(alpha, lam))
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('F(x)')
    plt.ylim(0.0, 1.0)
    plt.xlim(0, 10)
    ax.grid()
    ax.legend()
    plt.show()
```

Рис. 21. Программный код, строящий график функции распределения.

Листинг функции, строящей график функции значения процентилей, представлен на рис. 22. На вход функция принимает массив сгенерированных псевдослучайных чисел, а также параметры α, λ.

```python
def plot_percentiles(X, alpha, lam):
    percentile = np.arange(0, 101, 1)
    score = np.percentile(X, percentile)
    fig, ax = plt.subplots()
    plt.bar(percentile, score, label='alpha={},lam={}'.format(alpha, lam))
    ax.set_xlabel('Percent Rank')
    ax.set_ylabel('Percentile values')
    ax.grid()
    ax.legend()
    plt.show()
```

Рис. 22. Листинг функции построения графика функции значения процентилей.

Код для построения гистограммы представлен на рис. 23.

```python
def plot_histogram(X):
    fig, ax = plt.subplots()
    plt.hist(X, density=True, alpha=0.5, facecolor='blue', edgecolor='black', linewidth=1.2)
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('Frequency')
    plt.show()
```

Рис. 23. Программный код для построения гистограммы выборки.

Для вычисления необходимых характеристик распределения были реализованы вспомогательные функции (рис.24-26). В результате для каждого набора параметров были все получены необходимые характеристики.

```python
# MX
def get_expected_value(alpha, lam):
    return alpha / lam


# Mode
def get_mode(alpha, lam):
    return (alpha - 1) / lam if alpha >= 1 else None


# DX
def get_variance(alpha, lam):
    return alpha / lam ** 2


# Asymmetry
def get_skewness(alpha):
    return 2 / math.sqrt(alpha)


# Excess
def get_kurtosis(alpha):
    return 6 / alpha
```

Рис. 24. Вспомогательные функции для вычисления числовых характеристик.

```python
# Mode statistical
def get_mode_statistical(X, alpha, lam):
    fx_arr = get_probability_density(X, alpha, lam)
    index_of_max = np.argmax(fx_arr)
    return X[index_of_max]


def get_median(X):
    return np.median(X)


def get_range(X):
    return max(X) - min(X)


# выборочная несмещенная дисперсия
def get_s2(arr, mean):
    sum = 0
    for x in arr:
        sum += (x - mean) ** 2
    return sum / (len(arr) - 1), sum / len(arr)
```

Рис. 25. Вспомогательные функции для вычисления числовых характеристик.

```python
print('СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:')
mean = np.mean(rand_nums)
s2, s_default = get_s2(rand_nums, mean)
print('Выборочное среднее: {}'.format(mean))
print('Выборочная дисперсия: {}'.format(s_default))
print('Выборочное стандартное отклонение: {}'.format(math.sqrt(s_default)))
print('Несмещенная выборочная дисперсия: {}'.format(s2))
print('Несмещенное выборочное стандартное отклонение: {}'.format(math.sqrt(s2)))
print('Размах вариации: {}'.format(get_range(rand_nums)))
```

Рис. 26. Вспомогательные функции для вычисления числовых характеристик.

Значения коэффициента Стьюдента и Хи квадрат вычисляются автоматически с помощью модуля Python *stats*. Вспомогательные функции вычисления интервальных оценок для математического ожидания и дисперсии представлены на рис. 27.

```python
# точная интервальная оценка
def get_interval_expected_value(mean, b, n, s2):
    t_val = stats.t.interval(b, n - 1)[1]
    return mean - t_val * math.sqrt(s2 / n), mean + t_val * math.sqrt(s2 / n)


def get_interval_variance(b, n, s2):
    chi2 = stats.chi2.interval(b, n - 1)
    return (n - 1) * s2 / chi2[1], (n - 1) * s2 / chi2[0]
```

Рис. 27. Программный код для расчета интервальных оценок.

Результаты

По заданию необходимо было построить необходимые графики для трех различных наборов параметров. Значение параметров α, λ были взяты из справочника. Параметр α принимает значения 0.5, 2.0, 4.0. Значение параметра λ – 1.0. Объем выборки по условию равен 100.

На рис. 28 представлено сравнение полученных графиков функции распределения, построенных с помощью программы, и взятых из справочника.

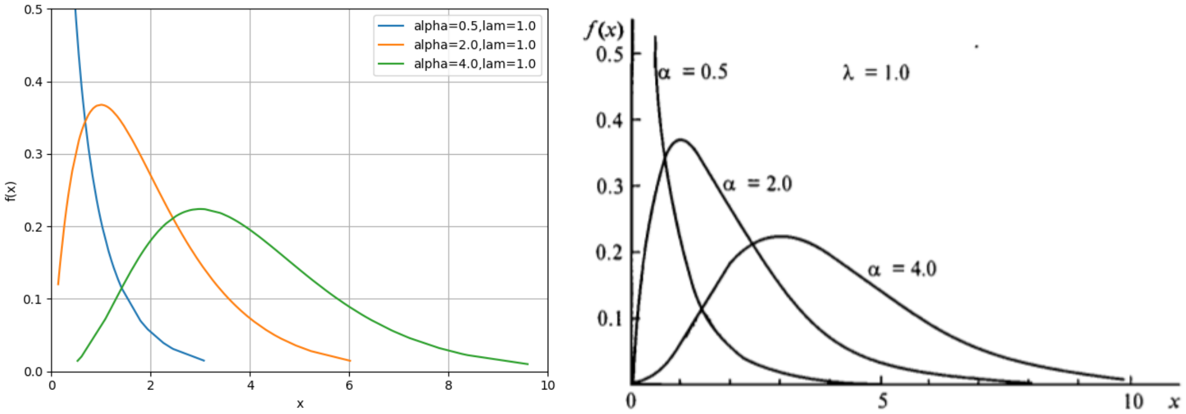

Рис. 28. Сравнение графиков функции распределения для разных значений параметров α.

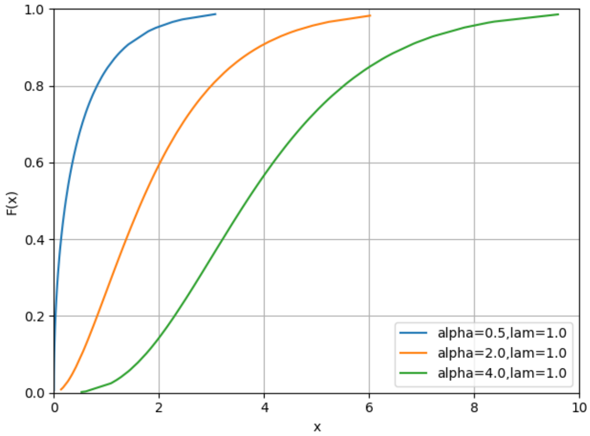

Рис. 29. График функции распределения для различных значений параметров α.

На рис. 29 представлен график функции распределения для тех же наборов параметров α и λ.

На рис. 30-32 представлены полученные графики функции значения процентилей для указанных наборов параметров.

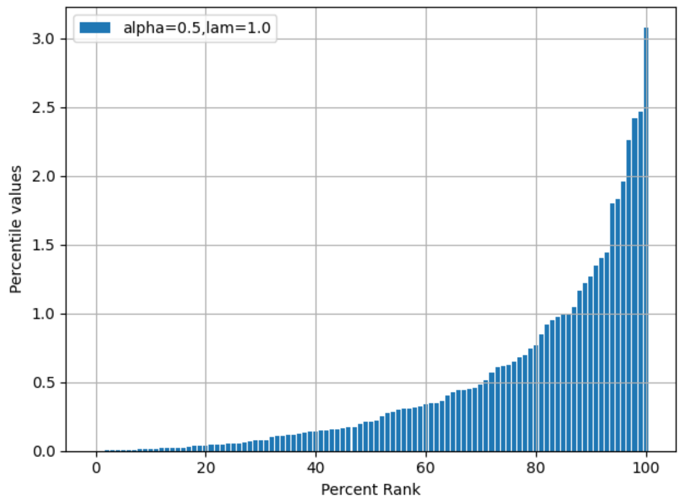

Рис. 30. График функции значений процентилей при α=0.5, λ=1.0.

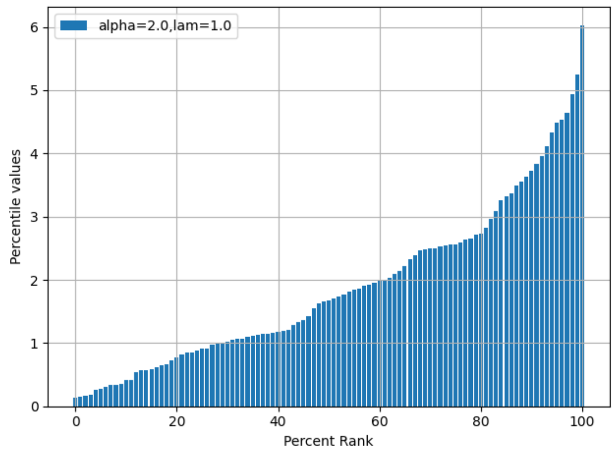

Рис. 31. График функции значений процентилей при α=2.0, λ=1.0.

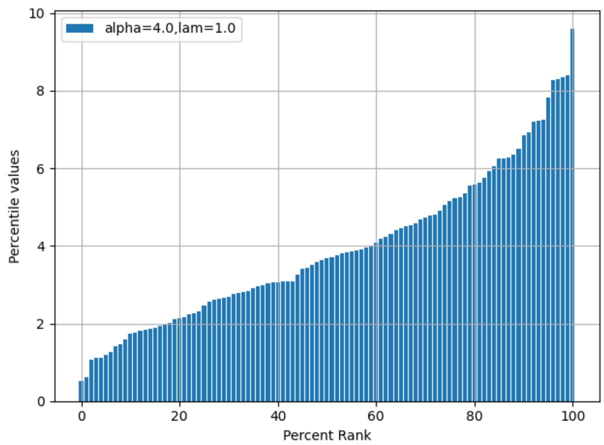

Рис. 32. График функции значений процентилей при α=4.0, λ=1.0.

В результате работы программы были построены 3 гистограммы для каждого набора параметров соответственно (рис. 33-35).

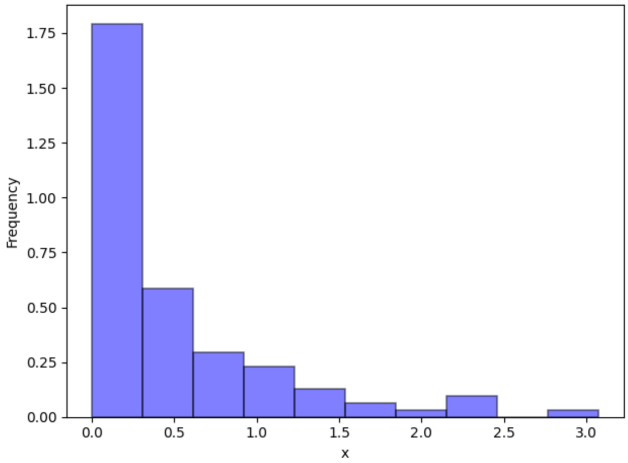

Рис. 33. Гистограмма выборки при α=0.5, λ=1.0.

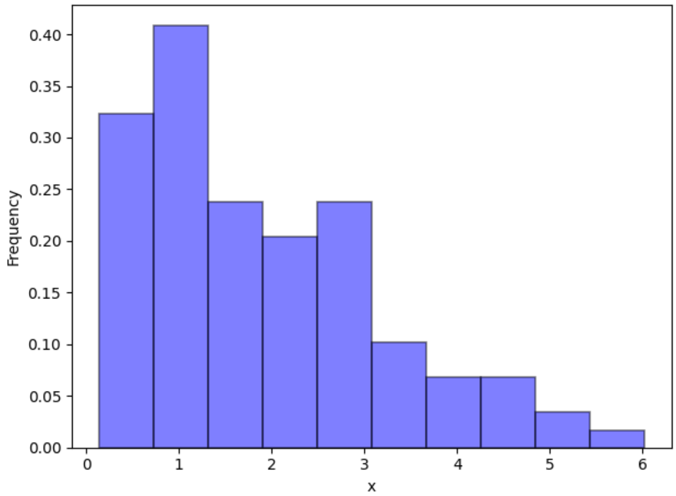

Рис. 34. Гистограмма выборки при α=2.0, λ=1.0.

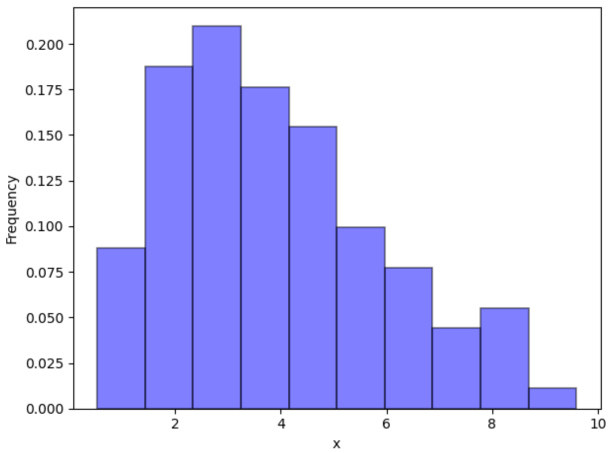

Рис. 35. Гистограмма выборки при α=4.0, λ=1.0.

Далее было необходимо вычислить числовые характеристики выборки. Для гамма-распределения были рассчитаны следующие числовые характеристики: математическое ожидание, мода, дисперсия, асимметрия, эксцесс. Также были рассчитаны точечные и интервальные оценки матожидания и дисперсии при n=100 и n=1000 для каждого набора данных (рис. 36-41).

```
----------------------------------------------------------------------
Набор данных #1: alpha=0.5, lambda=1.0
----------------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 0.5
Дисперсия: 0.5
Стандартное отклонение: 0.7071067811865476
Асимметрия: 2.82842712474619
Эксцесс: 12.0
----------------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 0.47248733716851
Выборочная дисперсия: 0.38071765206754454
Выборочное стандартное отклонение: 0.6170232184185167
Несмещенная выборочная дисперсия: 0.38456328491671166
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 0.6201316674035536
Размах вариации: 3.072962152538605
Медиана: 0.2141976938437508
----------------------------------------------------------------------
----------------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
0.34943976050556247 <= MX <= 0.5955349138314575
Интервальная оценка дисперсии:
0.2964583060019492 <= DX <= 0.518964076148894
----------------------------------------------------------------------
```

Рис. 36. Числовые характеристики распределения при α=0.5, λ=1.0, n=100.

```
----------------------------------------------------------------------
Набор данных #1: alpha=0.5, lambda=1.0
----------------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 0.5
Дисперсия: 0.5
Стандартное отклонение: 0.7071067811865476
Асимметрия: 2.82842712474619
Эксцесс: 12.0
----------------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 0.516363102156425
Выборочная дисперсия: 0.5517107569125747
Выборочное стандартное отклонение: 0.7427723452798809
Несмещенная выборочная дисперсия: 0.5522630199325071
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 0.7431440102447
Размах вариации: 7.897585468410994
Медиана: 0.2367276396816254
----------------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
0.47024753421547427 <= MX <= 0.5624786700973757
Интервальная оценка дисперсии:
0.5068601853627968 <= DX <= 0.6040842591196564
```

Рис. 37. Числовые характеристики распределения при α=0.5, λ=1.0, n=1000.

```
------------------------------------------------------------
Набор данных #2: alpha=2.0, lambda=1.0
------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 2.0
Дисперсия: 2.0
Стандартное отклонение: 1.4142135623730951
Мода: 1.0
Асимметрия: 1.414213562373095
Эксцесс: 3.0
------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 1.8837705279033545
Выборочная дисперсия: 1.6774632433524437
Выборочное стандартное отклонение: 1.295169194874725
Несмещенная выборочная дисперсия: 1.6944073165176199
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 1.3016940180079264
Размах вариации: 5.881070541238172
Мода: 1.0030919585756923
Медиана: 1.6801896712396882
------------------------------------------------------------
------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
1.625486194282477 <= MX <= 2.1420548615242323
Интервальная оценка дисперсии:
1.3062118575383876 <= DX <= 2.2865847108283854
------------------------------------------------------------
```

Рис. 38. Числовые характеристики распределения при α=2.0, λ=1.0, n=100.

```
Набор данных #2: alpha=2.0, lambda=1.0
------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 2.0
Дисперсия: 2.0
Стандартное отклонение: 1.4142135623730951
Мода: 1.0
Асимметрия: 1.414213562373095
Эксцесс: 3.0
------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 1.978661205573265
Выборочная дисперсия: 2.101319362261297
Выборочное стандартное отклонение: 1.4495928263692868
Несмещенная выборочная дисперсия: 2.1034227850463436
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 1.4503181668331757
Размах вариации: 12.749142510635268
Мода: 1.0022680430418491
Медиана: 1.6940629624888008
------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
1.888662167650066 <= MX <= 2.0686602434964643
Интервальная оценка дисперсии:
1.930495478142307 <= DX <= 2.3007960860305507
```

Рис. 39. Числовые характеристики распределения при α=2.0, λ=1.0, n=1000.

```
--------------------------------------------------------------------
Набор данных #3: alpha=4.0, lambda=1.0
--------------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 4.0
Дисперсия: 4.0
Стандартное отклонение: 2.0
Мода: 3.0
Асимметрия: 1.0
Эксцесс: 1.5
--------------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 3.924429582475335
Выборочная дисперсия: 3.933703782555728
Выборочное стандартное отклонение: 1.9833566957447992
Несмещенная выборочная дисперсия: 3.973438164197705
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 1.9933484803710828
Размах вариации: 9.06674285876344
Мода: 3.0056029510671394
Медиана: 3.6879490901604743
--------------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
3.5289059979736974 <= MX <= 4.319953166976973
Интервальная оценка дисперсии:
3.063107668785042 <= DX <= 5.362112679228389
--------------------------------------------------------------------
```

Рис. 40. Числовые характеристики распределения при α=4.0, λ=1.0, n=100.

```
Набор данных #3: alpha=4.0, lambda=1.0
--------------------------------------------------------------------
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Математическое ожидание: 4.0
Дисперсия: 4.0
Стандартное отклонение: 2.0
Мода: 3.0
Асимметрия: 1.0
Эксцесс: 1.5
--------------------------------------------------------------------
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:
Выборочное среднее: 3.9340829950186342
Выборочная дисперсия: 4.051392308330284
Выборочное стандартное отклонение: 2.012807071810481
Несмещенная выборочная дисперсия: 4.0554477560863695
Несмещенное выборочное стандартное отклонение: 2.0138142307785913
Размах вариации: 13.659833665071893
Мода: 3.0005033986175187
Медиана: 3.6018868977242686
--------------------------------------------------------------------
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:
Интервальная оценка мат. ожидания:
3.809116385986998 <= MX <= 4.05904960405027
Интервальная оценка дисперсии:
3.722039910675689 <= DX <= 4.435988043221334
```

Рис. 41. Числовые характеристики распределения при α=4.0, λ=1.0, n=1000.

Заключение

В ходе работы был реализован алгоритм для моделирования псевдослучайных чисел для гамма-распределения. Были смоделированы выборки псевдослучайных чисел для трех наборов параметров α, λ размером 100. Для каждой выборки были построены графики функции плотности вероятности, функции распределения и функции значений процентилей. Были рассчитаны необходимые числовые характеристики случайной величины, а также интервальные оценки математического ожидания и дисперсии.

Из приведенных результатов видно, что чем больше значение параметра α, тем шире размах выборки. Значение моды статистическое (выборочное) равняется теоретическому с точностью до второго знака после запятой. Полученные точечные оценки дисперсии и матожидания схожи с теоретическими значениями для гамма-распределения. Значения точечных оценок дисперсии и математического ожидания попадают в построенные интервальные оценки. По мере увеличения объема выборки n значения точечных оценок все более приближаются к теоретическим, при этом доверительные интервалы все более «сужаются», тем самым интервальные оценки становятся точнее (для гамма-распределения).

Полученные графики функций плотности вероятности схожи с теми, что приведены в справочнике для тех же наборов параметров α, λ. По мере увеличения параметра α значения эксцесса и асимметрии уменьшаются, пик функции плотности вероятности, наблюдаемый для значений $\alpha \geq 1$, становится более плавным. Значения асимметрии и эксцесса приближаются к значениям соответствующих параметров для нормального распределения (асимметрия – 0, эксцесс – 0).