Вычислительные методы алгебры

Лабораторная работа №1

Решение систем линейных алгебраических уравнений

1. Написать программу, которая с учетом структуры эффективно вычисляет обратную к матрицам вида

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{pmatrix}$$

и применить ее к следующим ниже матрицам. В качестве отправной точки использовать метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ -3 & -4 & -5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 4 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 2 & 4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -5 & 3 & 1 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Проведите экспериментальное исследование скорости работы вашей программы в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Вычислите асимптотическую сложность реализованного вами алгоритма. Матрицу какой размерности ваша программа на вашем компьютере может обратить за одну минуту?

2. Написать программу, которая строит LU-разложение матрицы A с выбором главного элемента по столбцу и решает СЛАУ $Ax = b$. Кроме вектора x программа должна выводить матрицы L и U (возможно, совмещенные в одну), а также вектор перестановок. Применить программу к следующим ниже входным данным.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -3 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ -6 & 8 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & -5 \\ -12 & 16 & 2 & -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ -24 & 32 & 4 & -6 & 3 & -3 & -1 & -2 \\ -48 & 64 & 8 & -12 & 6 & -4 & 3 & -3 \\ -96 & 128 & 16 & -24 & 12 & -8 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & -5 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 79 \\ -51 \\ -29 \\ 33 \\ 2 \\ 59 \\ 149 \\ -59 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 & 1679616 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 511 \\ 9841 \\ 87381 \\ 488281 \\ 2015539 \\ 6725601 \\ 19173961 \\ 48427561 \end{pmatrix}.$$

Число обусловленности в матричной максимум-норме матрицы A из второго примера равно $6.3 \cdot 10^{10}$. Что это означает на практике? Путем решения нескольких СЛАУ с этой матрицей и возмущенным вектором b подтвердите свой ответ.

3. Написать программу, которая строит LU- и LDL^T-разложения и решает СЛАУ $Ax = b$ с симметричной матрицей A методами Гаусса и квадратного корня. Провести эксперимент по сравнению эффективности этих методов: решить тестовые системы (со случайными симметричными матрицами) размерности $100, 200, \dots, 2000$ и изобразить совмещенные графики зависимости времени работы каждого метода от размерности системы. Объяснить полученный результат.

4. На основе метода прогонки построить алгоритм решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей с выбором главного элемента. Использование дополнительной памяти должно быть сведено к минимуму. Подробное описание алгоритма занести в отчет. Реализовать построенный алгоритм, применить его к следующим ниже входным данным и вывести результат.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 3\end{pmatrix},\ \ b=\begin{pmatrix}0\\ 10\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & & & & & & & & \\ 4 & -6 & 4 & & & & & & & \\ & 2 & 4 & -4 & & & & & & \\ & & -2 & 3 & -1 & & & & & \\ & & & 5 & -2 & 4 & & & & \\ & & & & -5 & 1 & -4 & & & \\ & & & & & -3 & -6 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 2 & 4 & \\ & & & & & & & 0 & 3 & 2\\ & & & & & & & & 5 & -4\end{pmatrix},\ \ b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 0\\ 7\\ -8\\ -9\\ 6\\ 5\\ 1\end{pmatrix}.$$

5. Написать программу, которая решает СЛАУ $Ax=b$ типа

$$A=\begin{pmatrix}n & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1\\ 1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & n & & 0 & 0 & 1\\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & & n & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 1\\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & n\end{pmatrix},\ \ b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

методом релаксации. При реализации следует учитывать структуру матрицы, то есть запрещается хранить в памяти ее избыточные нулевые элементы. В отчет включить обоснование сходимости метода для данных матриц. Получить решения системы для матриц размерности $500, 1000, 2000, 4000$ (привести лишь первые и последние 10 компонент решения). Провести исследование влияния параметра ω на скорость сходимости и указать количество сделанных итераций для каждого значения параметра. Критерий остановки итераций: $\|Ax^k - f\| < 10^{-10}$.