



COMPTE-RENDU

Travaux Pratiques Modélisation

Etude et comparaison de schémas
numériques pour la résolution de
l'équation de transport linéaire

Tuan Kiet PHAM, Van Nghia Vo
ÉTUDIANTE DE 3MIC-A, INSA TOULOUSE

1. Présentation du problème

L'objet du TP est l'étude des trois schémas numériques pour la résolution de l'équation de transport linéaire monodimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in]-1; 1[, \quad a \in R^+ \quad (1)$$

Dans cette étude, on complète l'équation (1) par la condition aux limites de périodicité :

$$\forall t \geq 0, \quad u(t, -1) = u(t, 1) \quad (2)$$

et par la condition initiale :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad u(0; x) = u_0(x) \quad (3)$$

où \mathbf{u}_0 est une fonction qui sera définie dans la suite, telle que $\mathbf{u}_0(\mathbf{1}) = \mathbf{u}_0(-\mathbf{1})$.

On note Δx le pas de discrétisation spatiale et Δt le pas de discrétisation temporelle. On pose : $\Delta x = \frac{1}{J}$ où, par définition, $J = 2I + 1$ désigne le nombre de points de discrétisation spatiale sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note u_i^n la valeur de la solution discrète au nœud i à l'instant $t^n = n \Delta t$.

Puis, on considère les trois schémas aux différences finies suivants :

$$\forall i \in [0, J], \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4)$$

$$\forall i \in \forall i \in [0, J], \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\alpha}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (5)$$

$$\forall i \in \forall i \in [0, J], \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(u_{i+1}^n - u_i^n - u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \quad (6)$$

où $\alpha = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$ le nombre de Courant-Friedrichs-Lévy (CFL).

Pour les nœuds 0, 1 et $J - 1$ on conserve les mêmes schémas mais on tient compte de la condition aux limites de périodicité en posant les points fantômes :

$$u_{-1}^n = u_{J-2}^n, \quad u_{-2}^n = u_{J-3}^n, \quad u_J^n = u_1^n \quad (7)$$

On pourra facilement vérifier par récurrence que si $\mathbf{u}_0(\mathbf{1}) = \mathbf{u}_0(-\mathbf{1})$, on a bien que :

$$\forall n > 0, \quad u_0^n = u_{J-1}^n$$

2. Etude théorique des propriétés dispersives et dissipatives des schémas

On sait que la solution exacte de (1) a pour expression : $\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}_0(x - at)$. Si on considère comme solution initiale la fonction $x \mapsto \mathbf{u}_0(x) = A_0 e^{ikx}$, où A_0 est un complexe et k un réel quelconque (de la forme $k = s\pi$), la solution exacte a donc pour expression :

$$u(t, x) = A(t)e^{ikx}, \quad A(t) = A_0 e^{-iakx}$$

C'est clair que l'amplitude de l'onde $A(t)$ reste constante en module. En particulier, entre deux instants voisins, on a :

$$A(t^{n+1}) = e^{-iak\Delta t} A(t^n) \quad (8)$$

Considérons maintenant un schéma explicite à un pas de la forme :

$$u_j^{n+1} = \sum_{p=-P}^{p=P} a_p u_{j+p}^n \quad (9)$$

On suppose en plus que pour tout j on a $u_j^{n+1} = A_n e^{ik(j\Delta x)}$, où A_n est un constant complexe quelconque, on obtient :

$$u_j^{n+1} = A_{n+1} e^{ikj\Delta x}, \text{ avec } A_{n+1} = F(k\Delta x) A_n \quad (10)$$

où F est la fonction de transfert du schéma :

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta x}\right], F(k\Delta x) = \sum_{p=-P}^{p=P} a_p e^{ikp\Delta x} \quad (11)$$

a. Les fonctions de transfert :

À partir de la fonction (11), on cherche à calculer les fonctions de transfert des 3 schémas (4), (5) et (6). Pour faciliter les calculs, on pose $\xi = k\Delta x$.

• Schéma de Courant (4) :

On a : $\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha(u_i^n - u_{i-1}^n) \\ u_{i-1}^n = u_i^n e^{-i\xi} \end{cases}$, donc :

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= 1 - \alpha + \alpha e^{-i\xi} \\ &= 1 - \alpha + \alpha(\cos(-\xi) + i \sin(-\xi)) \\ &= 1 - \alpha + \alpha(\cos(\xi) - i \sin(\xi)) \\ &= 1 - \alpha(1 - \cos(\xi)) - i\alpha \sin(\xi) \end{aligned}$$

- **Schéma de Lax Wendroff (5) :**

$$\text{On a : } \begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\alpha}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ u_{i-1}^n = u_i^n e^{-i\xi} \\ u_{i+1}^n = u_i^n e^{i\xi} \end{cases}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) e^{-i\xi} + (1 - \alpha^2) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\xi} \\ &= 1 - \alpha^2 - \alpha^2(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) - \frac{\alpha}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \\ &= 1 - \alpha^2 - i \sin(\xi) + \alpha^2 \cos(\xi) \\ &= 1 - \alpha^2(1 - \cos(\xi)) - i\alpha \sin(\xi) \end{aligned}$$

- **Schéma décentré du 2^{ème} ordre (6)**

$$\text{On a : } \begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(u_{i+1}^n - u_i^n - u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \\ u_{i-1}^n = u_i^n e^{-i\xi} \\ u_{i+1}^n = u_i^n e^{i\xi} \\ u_{i-2}^n = u_i^n e^{-2i\xi} \end{cases}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} F_3(\xi) &= 1 - \alpha(1 - e^{-i\xi}) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(e^{i\xi} - 1 - e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) \\ &= 1 - \alpha(1 - \cos(\xi) + i\sin(\xi)) \\ &\quad - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(\cos(\xi) + i\sin(\xi) - 1 - \cos(\xi) + i\sin(\xi) \\ &\quad + (\cos(\xi) - i\sin(\xi))(\cos(\xi) - i\sin(\xi))) \\ &= 1 - \alpha(1 - \cos(\xi)) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(-1 + (1 - 2\sin^2(\xi))) \\ &\quad + i\left(-\alpha \sin(\xi) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}(2 \sin(\xi) - 2 \cos(\xi) \sin(\xi))\right) \\ &= 1 - \alpha(1 - \cos(\xi)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\sin^2(\xi) \\ &\quad - i(\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\sin(\xi)(1 - \cos(\xi))) \end{aligned}$$

La relation entre le nombre $\xi = k\Delta x$ et le rapport $\frac{\Delta x}{\lambda}$: Si ξ est trop grand, on a Δx est aussi grand. En pratique, pour obtenir l'onde, il faut que Δx est assez faible (inferieure à λ). Donc, pour compléter le schéma, les erreurs qui compte réellement en

pratique sont celles commises pour les faibles valeurs de ξ . Si ξ est trop grand (proche à sa valeur maximale), les erreurs ne sont pas significatives.

b. Erreur d'amplitude :

• **Schéma de Courant (4)**

$$\begin{aligned} E_{A,1}(\xi) &= 1 - |F_1(\xi)| = 1 - \sqrt{(1 - \alpha + \alpha \cos(\xi))^2 + \alpha^2 \sin^2(\xi)} \\ &= 1 - \sqrt{1 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(\xi)} \\ &= 1 - \sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(\xi))} \end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$, on a : $2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(\xi)) \geq 0 \Leftrightarrow E_{A,1}(\xi) \geq 0$

Donc le schéma 1 est stable $\forall \alpha \in]0, 1[$

• **Schéma de Lax Wendroff (5)**

$$\begin{aligned} E_{A,2}(\xi) &= 1 - |F_2(\xi)| = 1 - \sqrt{(1 + \alpha^2(\cos(\xi) - 1))^2 + (\alpha \sin(\xi))^2} \\ &= 1 - \sqrt{1 + \alpha^4 \cos^2(\xi) - 2\alpha^4 \cos(\xi) + \alpha^4 + \alpha^2 \sin^2(\xi)} \\ &= 1 - \sqrt{1 - \alpha^2(1 - \alpha^2)(1 - \cos(\xi))^2} \end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$, on a : $\alpha^2(1 - \alpha^2)(1 - \cos(\xi))^2 \geq 0 \Leftrightarrow E_{A,2}(\xi) \geq 0$

Donc le schéma 2 est stable $\forall \alpha \in]0, 1[$

• **Schéma décentré du 2^{ème} ordre (6)**

En posant $\theta = \frac{\xi}{2}$:

$$\begin{aligned} E_{A,3}(\xi) &= 1 - |F_3(\xi)| \\ &= 1 - \sqrt{\left(1 - \alpha(1 - \cos(\xi)) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} \sin^2(\xi)\right)^2 + \left(\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} \sin(\xi)(1 - \cos(\xi))\right)^2} \\ &= 1 - \sqrt{(1 - 2\alpha \sin^2(\theta) + 2\alpha(1 - \alpha) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))^2 + \alpha^2(2 \cos(\theta) \sin(\theta))^2(1 + (1 - \alpha) \sin^2(\theta))^2} \\ &= 1 - \sqrt{(1 - 2\alpha \sin^2(\theta)(1 - (1 - \alpha) \cos^2(\theta)))^2 + 4\alpha^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)(1 + (1 - \alpha) \sin^2(\theta))^2} \end{aligned}$$

Analyse :

On dit d'un schéma qu'il est dissipatif si le module de sa fonction de transfert est strictement inférieur à 1, car dans ce cas, le schéma fera diminuer l'amplitude de la fonction à transporter à chaque pas de temps (bien que cette amplitude doive rester constante).

Ceci vient du fait que, en notant A_n l'amplitude complexe de la fonction à transporter à l'instant t^n (pour $u_j^n = A_n e^{i\xi j}$), on a $A_{n+1} = F(\xi)A_n$, avec $\xi = k\Delta x$. On voit donc également que plus le temps de résolution augmente, plus l'atténuation de l'amplitude (et "l'élargissement" du graphe) est importante.

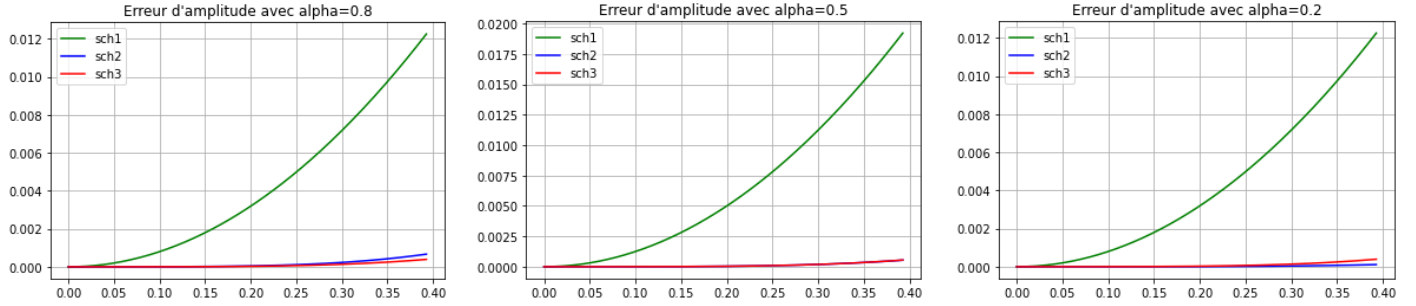


Figure 1 – Erreurs d’amplitude pour les valeurs de α suivant les 3 schémas en fonction de $\xi \in [0, \frac{\pi}{8}]$

Sur la figure :

- Avec 3 valeurs de α , le schéma 1 a toujours l’erreur d’amplitude le plus haut. pour ces 3 valeurs l’erreur maximale commise pour ce schéma est de l’ordre de 0.02, ce qui correspond à écart par rapport à la solution initiale. Ceci est bien en accord avec le fait que le schéma est dissipatif.
- L’erreur d’amplitude d’autres schémas est très faible ($\leq 10^{-3}$). La décroissance vers 0 est nettement plus rapide que pour le schéma 1.

c. Erreur de phase :

On utilise le fait que $\arccos(x)$ est une bijection de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

$$\text{Si } z = a + ib : \begin{cases} \arg(z) = \arccos\left(\frac{a}{|z|}\right) \text{ si } b > 0 \\ \arg(z) = -\arccos\left(\frac{a}{|z|}\right) \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

• **Schéma de Courant (4)**

On a : $\text{Im}(F_1(\xi)) = \alpha \sin(-\xi) < 0$ car $\xi \in [0, \frac{\pi}{8}]$

$$\text{Donc : } \text{Agr}(F_1(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1-\alpha+\alpha \cos(-\xi)}{|F_1(\xi)|}\right)$$

$$\text{Or : } F_1(\xi) = 1 - E_{A,1}(\xi)$$

Alors :

$$E_{\phi,1}(\xi) = \text{Arg}(F_1(\xi)) + \alpha\xi = \alpha\xi - \arccos\left(\left(\frac{1 - \alpha(1 - \cos(\xi))}{\sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(\xi))}}\right)\right)$$

• **Schéma de Lax Wendroff (5)**

On a : $\text{Im}(F_2(\xi)) = -\alpha \sin(\xi) < 0$

$$\text{Donc : } Agr(F_2(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1-\alpha^2(1-\cos(\xi))}{|F_2(\xi)|}\right)$$

Alors :

$$E_{\phi,2}(\xi) = Arg(F_2(\xi)) + \alpha\xi = \alpha\xi - \arccos\left(\frac{1-\alpha^2(1-\cos(\xi))}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\alpha^2)(1-\cos(\xi))^2}}\right)$$

• **Schéma décentré du 2^{ème} ordre (6)**

$$\text{On a : } Im(F_3(\xi)) = -\left(\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin(\xi) (1 - \cos(\xi))\right) < 0$$

$$\text{Donc : } Agr(F_3(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1-\alpha(1-\cos(\xi)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin^2(\xi)}{|F_3(\xi)|}\right)$$

Alors, en posant $\theta = \frac{\xi}{2}$:

$$E_{\phi,3}(\xi) = \alpha\xi - \arccos\left(\frac{1 - 2\alpha \sin^2(\theta) + 2\alpha(1-\alpha) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{\sqrt{(1 - 2\alpha \sin^2(\theta)(1 - (1-\alpha) \cos^2(\theta)))^2 + 4\alpha^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) (1 + (1-\alpha) \sin^2(\theta))^2}}\right)$$

Analyse :

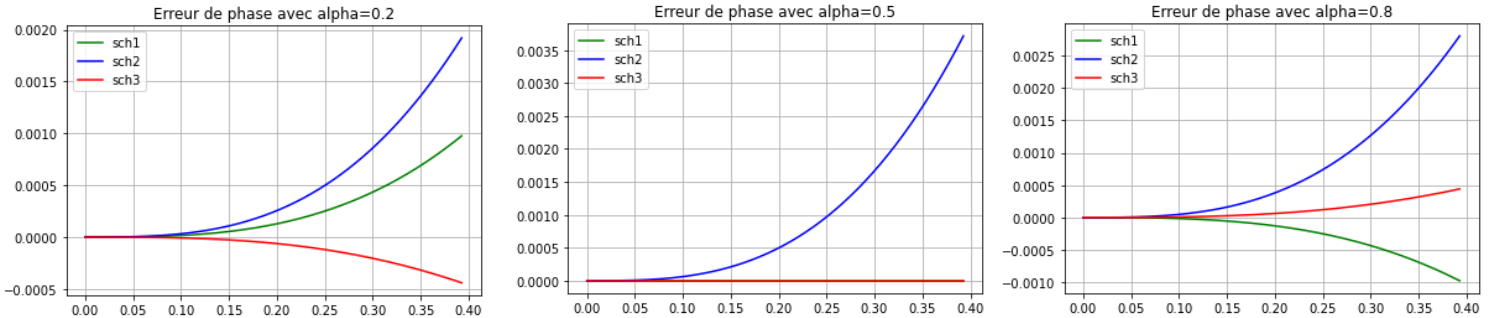


Figure 2 – Erreurs de phase pour les valeurs de α suivant les 3 schémas en fonction de $\xi \in [0, \frac{\pi}{8}]$

Sur la figure :

- Pour $\alpha = 0.5$, on peut voir qu'il n'y a pas d'erreur de phase (ou les erreurs sont très faible, quasiment nulles) pour les schémas 1 et 3.
- Le schéma 2 a toujours les erreurs de phase le plus haut. l'erreur de phase de ce schéma est plus importante que celles des schéma 1 et 3.
- L'erreur de phase de schéma 3 est la moindre parmi les trois considérés.

3. Mise en œuvre les schémas numériques

a. Premier test numérique :

Soit la condition initiale u_0 définie par : $u_0(x) = 256 \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \chi(x)$ avec $\chi(x)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. On fixe $J = 201, a = 2$.

Avec $\alpha = 0.8$:

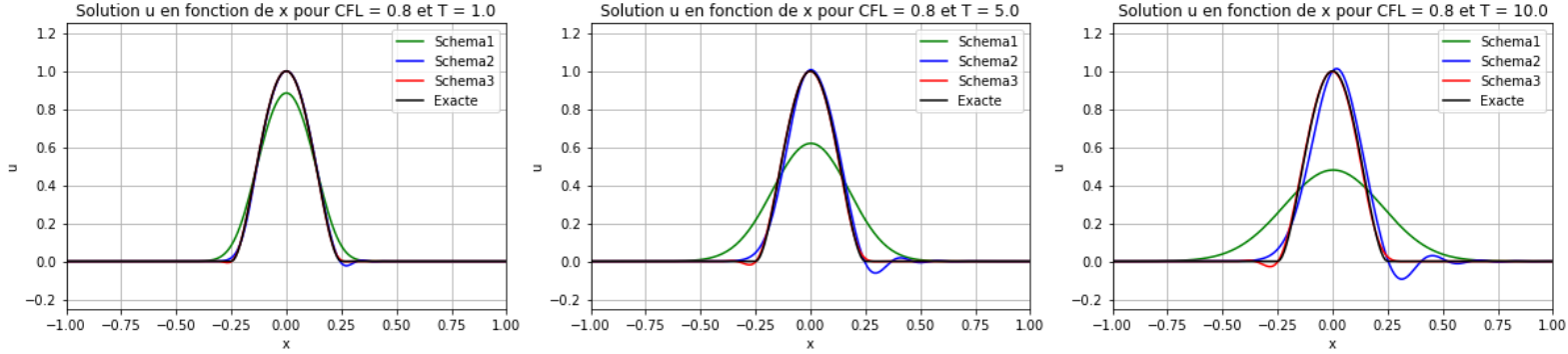


Figure 3 – Solution de u pour suivant les 3 schémas à 3 instants.

On voit assez clairement que le schéma de Courant est très dissipatif. En effet, la solution numérique obtenue par ce schéma est très éloignée de la solution exacte par rapport de temps. Au temps $T = 1$, les schémas (2) et (3) sont presque confondus et très proches de la solution exacte. On voit également apparaître un phénomène de retard de phase de schéma 2 par rapport de temps.

Avec $\alpha = 0.5$:

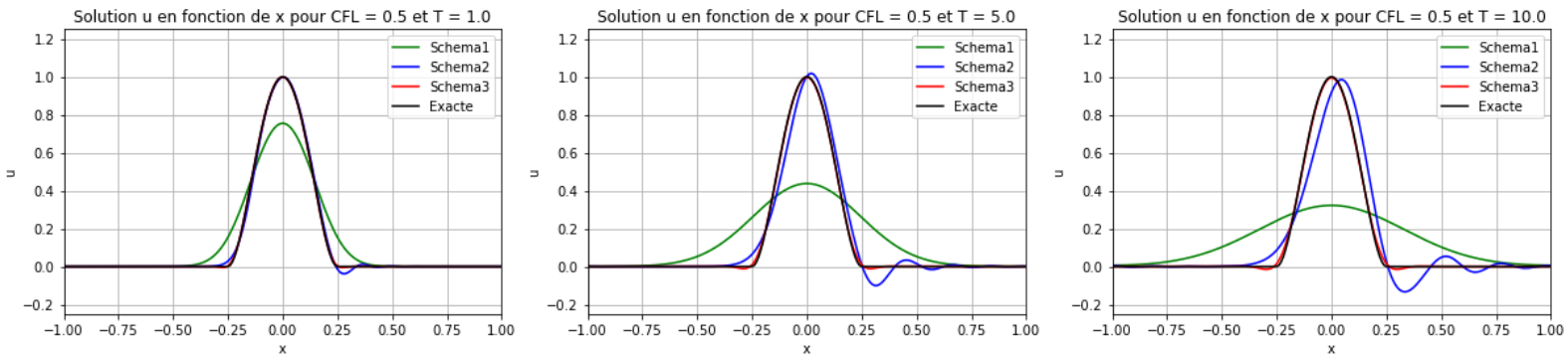


Figure 4 – Solution de u pour suivant les 3 schémas à 3 instants.

La relation entre les trois schémas ne change pas trop. On voit que pour le schéma 1, la différence entre la solution et la condition initial augmente. On voit plus clairement le phénomène de retard de phase de schéma 2 et une erreur inadmissible à l'instant $T = 10s$.

Avec $\alpha = 0.2$:

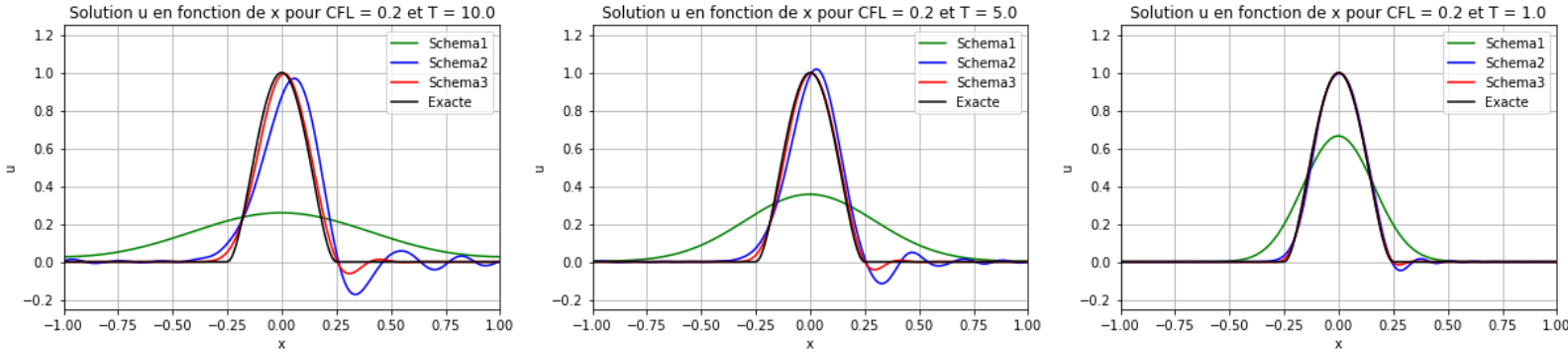


Figure 5 – Solution de u pour suivant les 3 schémas à 3 instants.

Avec la decrease de α , on peut observer un petit erreur pour le schéma 2 à l'instant $T = 1s$. Les schémas 2 et 3 ne sont plus confondus. Les erreur de phase et la difference entre le schéma 2 et la condition initial ne sont plus admissible par rapport de temps. On voit également apparaitre un phénomène de retard de phase de schéma 3 par rapport de temps.

Conclusion : Plus α diminue, plus l'erreur commise par les trois schémas. Il présente des propriétés dissipatives beaucoup trop importantes, en réduisant de manière inadmissible l'amplitude de la condition initiale. Pour le schéma 2, des oscillations aux liées à ses propriétés dispersives par rapport de temps. Le schéma 3 se montre ici comme le plus adapté à la résolution de l'équation (1) avec la condition initiale u_0 . Pour pouvoir ressentir les phénomènes d'erreur numériques importants, il faut lui imposer un temps de résolution long, avec un α assez faible.

b. Second test numérique :

Soit la condition initiale u_0 définie par : $u_0(x) = \chi(x)$ avec $\chi(x)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. On fixe $J = 201, a = 2, \alpha = 0.8$

Nous constatons que les trois schémas présentent des grandes erreurs près des points de discontinuité de la fonction u_0 . les schémas ont un comportement différent : le schéma 1, comme avant, se montre dissipatif, alors que les schémas 2 et 3 sont dispersifs. du fait du temps de résolution plus long, les erreurs sont, comme pour le cas du test numérique 1, très amplifiées.

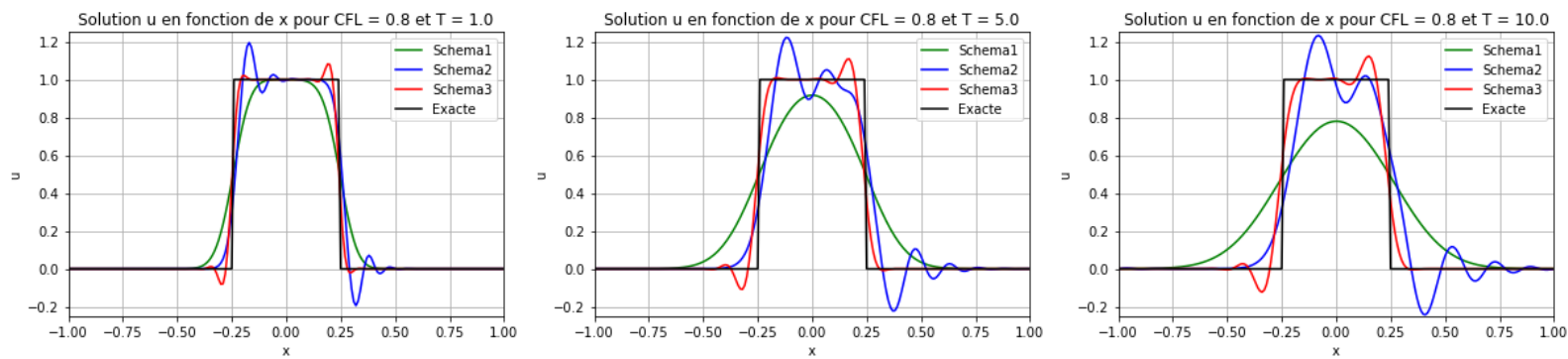


Figure 6 – Solution de u pour suivant les 3 schémas à 3 instants.

ANNEXE :

[Main](#) et [Bibliothèque](#)

[Calcul erreur d'amplitude](#)

[Calcul erreur de phase](#)

Vous pouvez trouver les codes sur [FeedAFish/CR-Model \(github.com\)](https://github.com/FeedAFish/CR-Model)