

COMPTE RENDU

**Méthodes de différences finies et méthodes de Monte-Carlo
pour l'équation de la chaleur**

Membres

PHAM Tuan Kiet

VO Van Nghia

8 juin 2021

Table des matières

1	Présentation du problème	2
2	Méthode des différences finies	2
3	Méthode de Monte-Carlo	5

1 Présentation du problème

L'objectif de ce TP est d'étudier la résolution de l'équation de la chaleur en comparant la méthode des différences finies et la méthode de Monte-Carlo. Soit $L = 1$, $\Omega =]0, L[\times]0, L[$ et T un réel strictement positif. Le problème à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - D \Delta u = f$$

sur $[0, T] \times \Omega$, avec la condition initiale :

$$u(0, x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} & \text{— en } x \in \{0, L\}, \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times [0, L], \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) = 0 \\ & \text{— en } y \in \{0, L\}, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \quad u(t, x, 0) = 0, \quad u(t, x, L) = 1 \end{aligned}$$

Le coefficient $D = 0.2$, strictement positif, correspond à la diffusivité thermique du fluide. $V = (V_1, V_2)$ le champ de vitesse du fluide avec :

$$V = (V_1(x, y), V_2(x, y)) = V_0(-\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\frac{\pi y}{L}), \sin(\frac{\pi y}{L})\cos(\frac{\pi x}{L}))$$

où $V_0 = 1$. La fonction f correspond à la source de chaleur avec l'expression :

$$\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega, \quad f(t, x, y) = 256(\frac{x}{L})^2(1 - \frac{x}{L})^2(\frac{y}{L})^2(1 - \frac{y}{L})^2$$

2 Méthode des différences finies

Dans cette première partie, on s'intéresse à la résolution par différences finies. Soit K un entier strictement positif. Les sommets de la grille sont par définition les $(K+1)^2$ points $X_{i,j}$ de coordonnées (ih, jh) avec $h = \frac{L}{K}$ et $(i, j) \in \{0, \dots, K\} \times \{0, \dots, K\}$. En notant : $V_{i,j}^1 = V_1(X_{i,j})$, $V_{i,j}^2 = V_2(X_{i,j})$ et $f_{i,j} = f(X_{i,j})$, on considère le schéma aux différences finies défini par les relations suivantes :

$$\text{— } \forall (i, j) \in 1, \dots, K-1^2 :$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - \Delta t V_{i,j}^1 \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} - \Delta t V_{i,j}^2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} + \\ & \Delta t D \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} + \Delta t f_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{— Soit } j \in \{0, K\} :$$

$$u_{i,0}^{n+1} = 0, \quad u_{i,K}^{n+1} = 1$$

— Soit $i = 0$ et $j \in \{1, \dots, K-1\}$:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t V_{i,j}^2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} + \Delta t D \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 3u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} + \Delta t f_{i,j}$$

— Soit $i = K$ et $j \in \{1, \dots, K-1\}$:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t V_{i,j}^2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} + \Delta t D \frac{u_{i,j+1}^n - 3u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} + \Delta t f_{i,j}$$

Question 1 :

On va montrer qu'il existe une matrice creuse $A \in M_{(K+1)^2}(R)$ et un vecteur S de dimension $(K+1)^2$ tel que $\forall n \in N$, le schéma s'écrit équivalent à :

$$U^{n+1} = AU^n + S$$

D'abord, soit $U_{i,j}^{n+1} = \alpha U_{i,j}^n + \beta U_{i,j+1}^n + \gamma U_{i,j-1}^n + \delta U_{i+1,j}^n + \omega U_{i-1,j}^n + s_{i,j}$

Équation 1 : Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, K-1\}^2$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{4\Delta t D}{h^2} \\ \beta &= \frac{\Delta t D}{h^2} - \frac{\Delta t V_{i,j}^1}{2h} \\ \gamma &= \frac{\Delta t D}{h^2} + \frac{\Delta t V_{i,j}^1}{2h} \\ \delta &= \frac{\Delta t D}{h^2} - \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h} \\ \omega &= \frac{\Delta t D}{h^2} + \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h} \\ s_{i,j} &= \Delta t f_{i,j} \end{aligned}$$

Équation 2 : $j = 0$ ou $j = K$

$$U_{i,0}^{n+1} = s_{i,0} = 0; \quad U_{i,K}^{n+1} = s_{i,K} = 1$$

Équation 3 : avec $i = 0$ et $j \in \{1, \dots, K-1\}$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{3\Delta t D}{h^2} \\ \beta &= \frac{\Delta t D}{h^2} - \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t D}{h^2} + \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h}$$

$$\delta = \frac{\Delta t D}{h^2}$$

$$\omega = 0$$

$$s_{i,j} = \Delta t f_{i,j}$$

Équation 4 : avec $i = K$ et $j \in \{1, \dots, K-1\}$:

$$\alpha = 1 - \frac{3\Delta t D}{h^2}$$

$$\beta = \frac{\Delta t D}{h^2} - \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t D}{h^2} + \frac{\Delta t V_{i,j}^2}{2h}$$

$$\delta = 0$$

$$\omega = \frac{\Delta t D}{h^2}$$

Donc, soit $k = i + (K+1)j$, $A \in M_{(K+1)^2}(R)$ une matrice creuse et S un vecteur de dimension $(K+1)^2$. On les définit :

- $S_k = s_{i,j}$
- Pour la matrice A avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ dépendent de (i, j) :

$$\begin{cases} A_{k,k} &= \alpha \\ A_{k,k+1} &= \delta \\ A_{k,k-1} &= \omega \\ A_{k,k+K} &= \beta \\ A_{k,k-K} &= \gamma \end{cases}$$

Question 2 :

Soit le schéma monotone, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ soient positifs sur chaque équation. Donc, on peut déduire :

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\beta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{D}{h} - \frac{V_{i,j}^2}{2} \geq 0$$

On a : $V_{i,j}^2 \leq V_0$, donc pour que β soit positif :

$$\frac{D}{h} - \frac{V_0}{2} \geq 0 \Leftrightarrow P_e \leq 2$$

Avec chaque valeur de pair (V_0, D) , on devrait choisir un maillage h assez petit tels que : $h \leq \frac{2D}{V_0}$. Si D est très petit et V_0 est grand, il va demander beaucoup de calculs.

Question 4 :

\Thêm ảnh bạn ơi

Globalement, on observe que la température des particules augmente de 0 à 1 quand y augmente. Cela est du au fait que la paroi inférieure et supérieure ont une température fixée respectivement à 0 et 1. Lorsque le fluide se déplace dans le sens indiqué sur la figure 1, le changement de concavité est plus important. On observe également qu'en diminuant le pas de maillage, la température diminue légèrement. Cela est du au fait qu'on effectue plus de calculs, il y aura donc plus de points, et les variations de températures entre deux points sont donc plus faibles.

Dans les trois cas, on constate un changement de concavité. Le changement de concavité est le plus marqué par rapport aux autres. À $x = 0.25L$ la température augmente moins vite vers la paroi inférieure et plus vite vers la paroi supérieure. Au contraire à $x = 0.25L$, en $x = 0.75L$ la température augmente moins vite vers la paroi supérieure. Plus t augmente, plus ce phénomène est visible. On peut penser qu'il se met en place progressivement dans le temps.

Plus h est petit, plus le pas de temps doit être petit aussi, il y aura donc plus de calculs à faire, ce qui va donc augmenter le temps de calculs.

3 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo consiste à considérer un ensemble de K particules fictives animées d'un mouvement aléatoire et dont la température θ varie le long de leur trajectoire en fonction des valeurs de la source de chaleur modélisée par la fonction f .

On note (x_k^n, y_k^n) le vecteur position à l'instant $t^n = n\Delta t$ de la particule k et θ_k^n sa température. D'après le cours, on a le schéma numérique suivant :

Étape prédicteur

$$\begin{cases} x_k^{n+1,*} &= x_k^n + \Delta t V_1(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2D\Delta t} \alpha_k^n \\ y_k^{n+1,*} &= y_k^n + \Delta t V_2(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2D\Delta t} \beta_k^n \\ \theta_k^{n+1,*} &= \theta_k^n + \Delta t f(x_k^n, y_k^n) \end{cases}$$

où les α_k^n et β_k^n sont des variables aléatoires normales centrées réduites identiquement indépendantes deux à deux.

Étape correcteur

$$\begin{cases} x_k^{n+1} &= \min(L, \max(x_k^{n+1,*}, 0)) \\ y_k^{n+1} &= \min(L, \max(y_k^{n+1,*}, 0)) \end{cases}$$

et

$$\theta_k^{n+1} = \begin{cases} \theta_k^{n+1,*} & \text{si } 0 < x_k^{n+1} < 1 \\ 0 & \text{si } x_k^{n+1} \leq 0 \\ 1 & \text{si } x_k^{n+1} \geq 1 \end{cases}$$

A l'instant initial, les coordonnées initiales sont tirées selon une loi uniforme sur $[0, L]$ et en posant :

$$\theta_k^0 = T_0(x_k^0, y_k^0) = 0$$

Pour calculer une approximation du champ de température $T(t, x, y)$, la méthode de Monte_Carlo consiste à diviser le domaine de $\Omega =]0, L[\times]0, L[$ en M^2 cellules identiques de dimension $\epsilon \times \epsilon$ avec $\epsilon = \frac{L}{M}$. La température discrète T_{ij}^n dans la cellule C_{ij} de centre $X_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}) = ((i-0.5\epsilon), (j-0.5\epsilon))$ et à l'instant $t^n = n\Delta t$, on a :

$$T_{ij}^n = \frac{1}{K_{ij}^n} \sum_{p_k \in C_{ij}} \theta_k^n$$

où K_{ij} désigne le nombre de particules situées à l'instant t^n dans la cellule C_{ij} .

Question 5 :

À N fixé, on observe deux situations extrêmes possible :

- Quand $\epsilon \rightarrow 0$: les cellules deviennent de plus en plus petites. C'est-à-dire il y aura de moins en moins de chance que des particules se trouvent à plusieurs dans une cellule particulière. Car le nombre des particules n'est pas assez grand pour remplir la plupart des carrés élémentaires, on obtient :

$$E(\theta_k^n \mid p_k \in C_{ij}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Dans cette méthode, il y aura donc des points dont la température est discontinue et est supérieure que celle des points autour d'eux. Il faut nécessairement avoir un N assez élevé pour que les cellules contiennent assez de particules, dans le but d'avoir une estimation correcte de la température.

- Quand $\epsilon \rightarrow +\infty$: dans ce cas, on a $\epsilon = L \Leftrightarrow M = 1$. La température obtenue sera la température moyenne de toute la grille et donc il n'y aura plus d'intérêt d'étudier ce problème.

Ainsi, N et ϵ sont deux grandeurs liées si l'on veut une modélisation performante. Si N et ϵ sont tous deux trop petits ou tout deux trop grands, l'estimation de la température dans les cellules sera très mal évaluée, et donc la simulation peu efficace voire inutile.

Question 7

En prenant $\Delta t = \frac{\epsilon^2}{4D}$, on obtient :

Les deux premières équation d'étape [Étape prédicteur] :

$$\begin{cases} x_k^{n+1,*} &= x_k^n + \Delta t V_1(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2D\Delta t} \alpha_k^n \\ y_k^{n+1,*} &= y_k^n + \Delta t V_2(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2D\Delta t} \beta_k^n \end{cases}$$

Pour un pas de temps donné, il faut que la particule ne sorte pas de la cellule destinataire après avoir rajouté le terme aléatoire dans la plupart des cas. On a donc :

$$\sqrt{2D\Delta t} \gamma_k^n \leq \epsilon$$

avec $\gamma_k^n \in \{\alpha_k^n, \beta_k^n\}$. L'inégalité devient :

$$\Delta t \leq \frac{\epsilon^2}{2D}$$

Donc, on a que : $\sqrt{2D\Delta t} \gamma_k^n$ suit une loi normale $(0, 2D\Delta t)$. Alors, son écart-type doit être inférieur à ϵ .

\Thêm hình bạn ơiiii

Commentaires

En général les allures des profils de température obtenues sont similaires à celles obtenues par [la méthode des différences finies]. On note qu'à $y = 0$ et $y = 1$, les coupes du profil de température n'atteignent pas exactement les valeurs attendues (respectivement 0 et 1). Cela est dû au fait que l'estimation de la température dans les cellules sur les deux bords du domaine est faite à partir de moyennes sur les particules présentes dans les cellules.

Pour les 3 couples de K et ϵ de $(10000, 0.1)$, $(10000, 0.05)$, $(100000, 0.05)$, on constate le phénomène décrit auparavant. On peut observer plus clairement avec les champs de température et les courbes de profil de température du couple $(100000, 0.05)$, le phénomène de discontinuité de la température en certains points. En revanche, le couple $(100000, 0.1)$ satisfait la condition évoquée précédemment et nous donne un champ de température très clair et peu de discontinuité.

Le fluide réagit de la même manière qu'observée en [Question 4] on retrouve bien les zones extrêmes

On remarque que plus Δt est petit, plus le schéma tend à se stabiliser facilement. Cela peut s'expliquer par le fait que si Δt est petit alors l'algorithme a le temps de faire beaucoup plus d'itérations jusqu'à t_f . Ainsi, le caractère aléatoire introduit par le mouvement brownien tend à se stabiliser. En effet on peut s'en rendre compte en notant le fait suivant : plus on effectue d'observations sur une variable aléatoire, plus son comportement sera proche de celui attendu. On aura un coût très important à cause de l'augmentation d'itérations.

Comparison

On remarque que les solutions trouvées par la méthode de Monte-Carlo présentent plus de bruit

que la solution réalisée par différences finies. Cette méthode ne peut pas encore rivaliser avec les différences finies dans ce travaux pratiques pour un cout égal en temps, mais il va bien marcher si on rencontre les problèmes de dimension supérieure. On préférera donc la méthode des différences finis en problème de dimension petite, et la méthode de Monte-Carlo en ceux de dimension assez grande.