COMPTE RENDU

Méthodes de différences finies et méthodes de Monte-Carlo pour l'équation de la chaleur

Membres

PHAM Tuan Kiet

VO Van Nghia

7 juin 2021

Table des matières

1 Présentation du problème

L'objectif de ce TP est d'étudier la résolution de l'équation de la chaleur en comparant la méthode des différences finies et la méthode de Monte-Carlo. Soit $L = 1$, $\Omega =]0, L[\times]0, L[$ et T un réel strictement positif. Le problème è résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - D\Delta u = f$$

sur $[0, T] \times \Omega$, avec la condition initiale :

$$u(0, x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

et les condition aux limites :

— en $x \in \{0, L\}$, $\quad \forall (t, y) \in [0, T] \times [0, L]$, $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) = 0$
— en $y \in \{0, L\}$, $\quad \forall (t, y) \in [0, T] \times [0, L]$, $\quad u(t, x, 0) = 0$, $\quad u(t, x, L) = 1$

Le coefficient $D = 0.2$, strictement positif, correspond à la diffusivité thermique du fluide. $V = (V_1, V_2)$ le champ de vitesse du fluide avec :

$$V = (V_1(x, y), V_2(x, y)) = V_0(-sin(\frac{\pi x}{L})cos(\frac{\pi y}{L}), sin(\frac{\pi y}{L})cos(\frac{\pi x}{L}))$$

où $V_0 = 1$. La fonction f correspond à la source de chaleur avec l'expression :

$$\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega, \quad f(t, x, y) = 256(\frac{x}{L})^2(1 - \frac{x}{L})^2(\frac{y}{L})^2(1 - \frac{y}{L})^2$$

2 Méthode des différences finies

Dans cette première partie, on s'intéresse à la résolution par différences finies. Soit K un entier strictement positif. Les sommets de la grille sont par définition les $(K+1)^2$ points $X_{i,j}$ de coordonnées (ih, jh) avec $h = \frac{L}{k}$ et $(i, j) \in \{0, \ldots, K\} \times \{0, \ldots, K\}$. On considère le schéma aux différences finies défini par les relations suivantes.

On note : $V^1_{i,j} = V_1(X_{i,j}), V^2_{i,j} = V_2(X_{i,j})$ et $f_{i,j} = f(X_{i,j})$.