

Table des matières

1	Rappels d'algèbre et d'analyse	3
1.1	Espaces vectoriels normés	3
1.2	Rappels d'analyse, Espaces L^p	5
2	Espaces de Hilbert	7
2.1	Introduction	7
2.2	Espaces de Hilbert	7
2.3	Approximation	13
3	Analyse de Fourier	15
3.1	Séries de Fourier de fonction périodiques définie sur $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$	15
3.2	Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$	19
3.2.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	19
3.2.2	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	20
3.3	Transformée de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$	21
3.4	Transformée de Fourier discrète de fonctions définies sur $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$	21
4	Echantillonnage d'un signal défini sur \mathbb{R}	23
4.1	Du continu au discret	23
4.2	Sous-échantillonnage d'un signal numérique	24
5	Transformée de Fourier à fenêtres (ou à court terme).	25
5.1	Vocoder de Phase	26
5.2	Séparation de sources à partir d'enregistrement stéréo	27
6	Compression de sons et d'images	28
6.1	La compression sans perte	28
6.2	Codage JPEG	29
7	Le codage MP3	30

Eléments théoriques pour le traitement du signal

1 Rappels d'algèbre et d'analyse

1.1 Espaces vectoriels normés

1. Espace vectoriel (réel et complexe).

Définition 1. Espace vectoriel

Soit \mathbb{K} un corps (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), on appelle espace vectoriel sur \mathbb{K} un ensemble E muni d'une opération interne noté $+$ définie de $E \times E$ dans E et d'une loi extérieure définie de $\mathbb{K} \times E$ dans E noté \cdot tels que

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad u + v &= v + u \\ \forall (u, v, w) \in E^3 \quad u + (v + w) &= (u + v) + w \\ \exists e \in E \text{ tel que } \forall u \in E, u + e &= u, \text{ appelé élément neutre et noté } e = 0. \\ \forall u \in E, \exists v \in E \text{ tel que } u + v &= 0. \\ \forall u \in E, 1 \cdot u &= u \\ \forall (\alpha, \beta, u) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot u) &= (\alpha\beta)u \\ \forall (\alpha, \beta, u) \quad (\alpha + \beta) \cdot u &= \alpha \cdot u + \beta \cdot u \\ \forall (\alpha, u, v) \quad \alpha \cdot (u + v) &= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v. \end{aligned}$$

les éléments de E sont appelés des vecteurs.

Exemples : Exemples classiques + espaces de fonctions variés, suites solutions d'équations de récurrence

2. Sous-espace vectoriel, espace vectoriel engendré.

Définition 2. Sous-espace vectoriel

Soit F un sous ensemble de E \mathbb{K} -espace vectoriel tel que

$$\forall (\alpha, \beta, u, v) \in \mathbb{K}^2 \times F^2, \quad \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F.$$

F est appelé sous-espace vectoriel de E . C' est un espace vectoriel.

Exemples.

Définition 3. Espace vectoriel engendré

Soit $(u_i)_{i \leq n}$ un ensemble fini d'éléments de E , on appelle espace vectoriel engendré par les $(u_i)_{i \leq n}$ l'ensemble suivant :

$$\text{Vect}((u_i)_{i \leq n}) = \left\{ v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exemples

3. Famille libre

Définition 4. Famille libre

Soit $(u_i)_{i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que la famille $(u_i)_{i \leq n}$ est libre si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \leq n \quad \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque : On dit qu'une famille infinie $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si toute sous famille finie de $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

Exemples.

4. Famille génératrice (dimension finie et infinie).

Définition 5. Famille génératrice

Soit F un espace vectoriel et $(u_i)_{i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de F . On dit que la famille $(u_i)_{i \leq n}$ engendre l'espace F ou est génératrice de F si tout élément de F est une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ ie

$$\forall v \in F, \exists (\lambda_i)_{i \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Remarque : Le caractère libre ou générateur dépend du corps que l'on considère (exemples). Si le cadre est bien posé, il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples.

5. Base d'un espace vectoriel.

Définition 6. Base (algébrique)

On dit qu'une famille finie $(u_i)_{i \leq n}$ est une base d'un espace vectoriel F si la famille $(u_i)_{i \leq n}$ est libre et engendre F .

Remarque : On dit qu'une famille infinie $(u_i)_{i \in I}$ est une base algébrique d'un espace vectoriel F si elle est libre (au sens où toute sous-famille finie est libre) et si tout vecteur de F peut s'exprimer comme combinaison linéaire finie des vecteurs $(u_i)_{i \in I}$.

Exemples et contre exemples variés (polynômes et séries entières sur $[0, 1]$)

6. Dimension d'un espace vectoriel.

Définition 7. Dimension

Soit F un espace vectoriel et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs formant une base de F . On appelle n la dimension de F .

Remarque : La définition ne dépend pas de la base choisie : toutes les bases d'un même espace vectoriel ont ainsi le même cardinal.

Remarque : Si n est la dimension de F , toute famille de F ayant strictement plus de n vecteurs est nécessairement liée. Réciproquement, toute famille ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice de F .

Remarque : Il peut exister une famille infinie et libre, dans ce cas on dit que l'espace F est de dimension infinie. Dans ce cas, il n'existe aucune base de cardinal fini.

Remarque : Nous verrons plus tard le concept de base hilbertienne qui ne sera pas une base au sens ci dessus.

Exemples.

7. Changements de bases.

Définition 8. Changement de bases

Soit F un espace vectoriel de dimension finie n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases de F . On appelle changement de bases l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{array}$$

Remarque : Un changement de base envoie chaque élément de la première base sur un élément de la seconde base.

Remarque : A tout changement de bases correspond un changement de bases inverse.

Exemple : Changements de bases simples sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , Transformée de Fourier discrète, DCT à la base de Jpeg

8. Norme.

Définition 9. Norme

On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application $\|\cdot\|$ définie de E dans \mathbb{R}^+ vérifiant

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\| \text{ inégalité triangulaire} \\ \forall (u, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \|\lambda \cdot u\| &= |\lambda| \|u\| \\ \|u\| = 0 &\implies u = 0. \end{aligned}$$

Exemples

Remarque On peut munir un espace vectoriel de plusieurs normes.

Remarque On appelle le couple $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Remarque A partir d'une norme on peut définir une distance par $d(u, v) = \|u - v\|$.

Une norme permet ainsi de mesurer la distance ou la proximité de deux éléments de E .

Remarque Une norme peut être issue d'un produit scalaire mais pas nécessairement.

Exemples : Mentionner \mathbb{R}^n muni des normes ℓ^p , avec $p = 1, 2, +\infty$, les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^p(\mathbb{Z})$ mais aussi $C^0([0, 1])$ muni de la norme du sup et les espaces L^p détaillés en dessous.

1.2 Rappels d'analyse, Espaces L^p

1. Définitions

Définition 10. Boules, Ouverts-Fermés

Soit E un espace vectoriel normé et A un sous ensemble de E .

- On appelle boule ouverte centrée en $x \in E$ de rayon r l'ensemble $\mathcal{B}(x, r)$ des éléments y de E tels que $\|x - y\| < r$.
- On dit que A est un ouvert de E si pour tout point x de A , il existe $r > 0$ telle que $\mathcal{B}(x, r) \subset A$.
- On dit que A est fermé si son complémentaire dans E est ouvert.

Exemple

Définition 11. Ensemble convexe

On dit qu'un ensemble A est convexe si $\forall (x, y) \in A$ et $\forall t \in (0, 1)$, $tx + (1 - t)y \in A$.

Exemples et contre-exemples.

Proposition 1. Ensembles fermés et projection

Soit E un espace vectoriel normé et A un fermé de E

- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge dans E alors elle converge dans A .
- Si x est un élément de E alors il existe au moins un élément de A qui réalise le minimum de $\inf_{u \in E} \|u - x\|$ c'est à dire qu'il existe $p \in A$ tel que $\inf_{u \in E} \|u - x\| = \|x - p\|$.

Remarque : Un minimiseur s'il existe peut ne pas être unique. S'il l'est on parle de projection de x sur A .

Exemples et contre-exemples : On ne peut pas projeter sur un ouvert ou sur un ensemble non convexe.

Remarque : On verra plus tard que si la norme est hilbertienne, la projection sur un convexe fermé est toujours définie.

Définition 12. Espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un intervalle de \mathbb{R} , (éventuellement \mathbb{R} tout entier), et p un réel supérieur ou égal à 1. On définit l'ensemble $L^p(\Omega)$ des fonctions définies de Ω dans \mathbb{K} telle que $\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$

Proposition 2. $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \left(\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$. Ainsi $L^p(\Omega)$ munie de sa norme naturelle est un espace vectoriel normé.

Exemples : différents choix de Ω et de p et différentes fonctions qui appartiennent aux différents $L^p(\Omega)$

Définition 13. Espaces $L^\infty(\Omega)$

Soit Ω un intervalle de \mathbb{R} , on définit $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions f telles que $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty$, pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$. De plus la fonction qui à f associe $\sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ est une norme sur $L^\infty(\Omega)$

2. Propriétés

Proposition 3. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont complets (toute suite de Cauchy converge).

3. Densité

Proposition 4. Pour tout intervalle Ω et pour tout $p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues sur Ω est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ il existe une fonction continue g telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Autrement dit, si $p < +\infty$, quelque soit Ω , toute fonction de $L^p(\Omega)$ peut être approchée d'aussi près qu'on le veut au sens de la norme $\|\cdot\|_p$ par une fonction continue.

Remarque : Les fonctions continues à support compact (nulle en dehors d'un intervalle $[-M, M]$) sont également denses dans $L^p(\Omega)$

2 Espaces de Hilbert

2.1 Introduction

Sur des exemples simples, un point et une droite dans l'espace, un point et un plan dans l'espace, un point et un convexe dans le plan, on voit que la notion de distance (euclidienne) d'un point à un ensemble est liée à une notion d'orthogonalité. La notion de produit scalaire et d'orthogonalité est en effet un concept assez palpable en dimension 2 et 3 que l'on peut formaliser et généraliser à des espaces beaucoup plus variés.

2.2 Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire (réel et complexe).

Définition 14. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle produit scalaire une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est à dire une application φ définie de $E \times E$ dans \mathbb{R} et vérifiant les conditions suivantes :

- (a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$. (Forme)
- (b) Pour tout $y \in E$, l'application φ_y^1 définie de E dans \mathbb{R} par $\varphi_y^1(x) = \varphi(x, y)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)
- (c) Pour tout $z \in E$, l'application φ_z^2 définie de E dans \mathbb{R} par $\varphi_z^2(x) = \varphi(z, x)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la deuxième variable)
- (d) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. (Symétrique)
- (e) Si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$. (Définie)
- (f) Pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$. (Positive)

Exemples :

- \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 munis du produit scalaire usuel.
- \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 munis d'un produit scalaire modifié par exemple sur \mathbb{R}^2 :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

- Sur l'ensemble des fonctions continues et définies $[0, 1]$ on peut définir

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

ou

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 t f(t)g(t)dt.$$

- Sur l'ensemble des polynômes :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

Remarque : On notera souvent $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$.

Dans le cas complexe, reprendre la même définition pose problème.

On peut proposer une définition similaire pour les espaces vectoriels complexes :

Définition 15. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On appelle produit scalaire une forme sesqui-linéaire hermitienne définie positive. C'est à dire une application φ définie de $E \times E$ dans \mathbb{C} et vérifiant les conditions suivantes :

- (a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}$. (Forme)
- (b) Pour tout $y \in E$, l'application φ_y^1 définie de E dans \mathbb{C} par $\varphi_y^1(x) = \varphi(x, y)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)
- (c) Pour tout $z \in E$, l'application φ_z^2 définie de E dans \mathbb{C} par $\varphi_z^2(x) = \varphi(z, x)$ est anti-linéaire. (Anti-linéaire par rapport à la deuxième variable)
C'est à dire que $\varphi_z^2(\lambda x) = \bar{\lambda} \varphi_z^2(x)$.
- (d) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$. (Symétrie hermitienne)
- (e) Si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$. (Définie)
- (f) Pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$. (Positive)

Exemples :

- (a) Produit scalaire usuel sur \mathbb{C}^2 et \mathbb{C}^3
- (b) Sur l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques :

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Remarque : Par rapport à un produit scalaire réel, on ajoute essentiellement une conjugaison sur les termes issues de la deuxième variable.

2. Norme issue d'un produit scalaire.

Définition 16. Norme hilbertienne, Espaces pré-hilbertiens et euclidiens

Soit E un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire défini sur E . L'application N définie par

$$N : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

définie une norme sur E . Cette norme est dite hilbertienne ou euclidienne si l'espace E est de dimension finie.

On appelle espace pré-hilbertien un espace muni d'une norme hilbertienne ou euclidien s'il est de dimension finie. Si de plus l'espace est complet, il est dit hilbertien ou espace de Hilbert.

Exemple On reprend les exemples précédents, en particulier le produit scalaire non usuel sur \mathbb{R}^2 , $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{T})$.

Remarque : toute norme ne provient pas d'un produit scalaire.

3. Propriétés d'une norme hilbertienne (CS, parallélogramme).

Proposition 5. Cauchy-Schwarz et égalité de parallélogramme.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace pré-hilbertien. La norme hilbertienne vérifie les deux relations suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{CS})$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\text{EP})$$

Cette égalité est appelée égalité du parallélogramme, cette dernière caractérise une norme hilbertienne.

Remarque : On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si les vecteurs sont colinéaires et égalité sans les valeurs absolues s'ils sont colinéaires et de même sens.

Exemple : Dans \mathbb{R}^2 , dans \mathbb{R}^3 , dans l'espace des fonctions 2π -périodiques.

Début du Cours 2

4. Orthogonalité.

Définition 17. Orthogonalité

On dit que deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$. On dit que deux sous espaces F et G sont orthogonaux si

$$\forall x \in F \text{ et } \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0.$$

On note dans ce cas $F \perp G$.

Exemples.

5. Base orthonormée.

Définition 18. Base Orthonormée Soit $(e_i)_{i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E euclidien.

On dit que $(e_i)_{i \leq n}$ forme une base orthonormée (ou BON) de E si

(a) Pour tout $i \leq n$, $\|e_i\| = 1$.

(b) Pour tout couple (i, j) , $j \neq i$, les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux ie $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

Remarque : Si une famille de vecteur ne vérifie que le second point on parle de système orthogonal, si c'est une base on parle de base orthogonale.

Remarque : le caractère orthonormé dépend du produit scalaire (exemples sur \mathbb{R}^2).

Exemples :

— Dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

— Dans $L^2(\mathbb{T})$,

— Cas de l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, 1]$ telles qu'il existe a et b réels tels que

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1)$$

pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. On proposera deux bases orthonormées.

— Cas des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire précédent. Déterminer une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

6. Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert :

Théorème 1. Soit E un espace de Hilbert et C un convexe fermé de E , il existe une unique application P_C appelée projection sur le convexe C qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $p \in C$ vérifiant

$$\|x - p\| = \inf_{u \in C} \|x - u\| \quad (2)$$

On peut également caractériser p la projection de x sur C comme l'unique élément de C tel que

$$\langle x - p, u - p \rangle \leq 0 \quad \forall u \in C \quad (3)$$

Dessin

Démonstration :

(a) On utilise le Théorème des fermés emboîtés et l'inégalité du parallélogramme, pour démontrer l'existence et l'unicité du vecteur défini par (2).

(b) Pour démontrer que la seconde caractérisation (3) est équivalente à la première on procède en deux temps :

i. On suppose que y est défini par (2), on considère $u \in C$, $\lambda \in]0, 1[$ et on écrit que $\|x - p\|^2 \leq \|x - (\lambda u + (1 - \lambda)p)\|^2$.

ii. On suppose que p est défini par (3) et on développe $\|x - p + p - u\|^2$.

Proposition 6. Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de E , alors pour tout $x \in X$, la projection p de x sur F est l'unique vecteur $p \in F$ tel que $x - p$ est orthogonal à F .

Démonstration :

— Si p est la projection de x sur F et v est un vecteur de F alors la fonction $\lambda \mapsto \langle x - p, \lambda v - p \rangle$ est affine et négative.

— Si $x - p$ est orthogonal à F alors pour tout $u \in F$, $\langle x - p, u - p \rangle = 0$.

7. Supplémentaire orthogonal

Définition 19. Supplémentaire orthogonal

Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert E . Il existe un unique sous-espace G de E tel que

$$F + G = E \text{ et } F \perp G \quad (4)$$

On dit que G est le supplémentaire orthogonal de F . Ainsi tout élément x de E s'écrit de manière unique de la forme $x = f + g$ avec $f \in F$, $g \in G$ et $\langle f, g \rangle = 0$.

On note $G = F^\perp$.

Démonstration :

On pose G l'orthogonal de F :

$$G := \{u \in E \text{ tels que } \forall x \in F, \langle x, u \rangle = 0\}$$

Par définition G est un espace vectoriel. On montre maintenant que tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Soit p la projection de x sur F , on a $x = p + (x - p)$ où $p \in F$ par définition et $x - p \in G = F^\perp$ d'après la Proposition 6.

On a ainsi démontré l'existence d'un sous-espace G vérifiant les deux conditions (4).

Pour démontrer l'unicité on suppose qu'il en existe deux G_1 et G_2 et on note $x = p_1 + (x - p_1)$ et $x = p_2 + (x - p_2)$ deux décompositions associées. On observe alors que $p_1 - p_2 \in F$ et $x - p_2 - (x - p_1) = p_1 - p_2$ est orthogonal à F donc $p_1 = p_2$ et donc $G_1 = G_2$. On en déduit également l'unicité de la décomposition de x en tant que somme d'un élément de F et d'un élément de F^\perp et le corollaire suivant :

Corollaire 1. Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de E , alors pour tout $x \in X$, la projection p de x sur F est l'unique vecteur $p \in F$ tel que $\langle x - p, p \rangle = 0$.

Remarque : En dimension finie, la dimension du supplémentaire de F dans E est égale à $n - k$ où n est la dimension de E et k la dimension de F .

Début du Cours 3

8. Base hilbertienne, Théorème de Pythagore.

Définition 20. Base hilbertienne

Soit E un espace de Hilbert, on appelle base hilbertienne une famille $(e_i)_{i \in I}$ orthonormée telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in E$ il existe une combinaison linéaire finie des $(e_i)_{i \in I}$ telle que

$$\left\| \sum_{i \leq n} \lambda_i e_i - x \right\| \leq \varepsilon.$$

Remarque : Dans la pratique I est soit un ensemble fini, soit \mathbb{N} soit \mathbb{Z} .

Remarque : On dit que l'espace engendré par les $(e_i)_{i \in I}$ est dense dans E .

Remarque : On peut ainsi approcher tout élément de E aussi précisément que l'on souhaite par une combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in I}$.

Remarque : Une base hilbertienne n'est pas nécessairement une base au sens algébrique.

Remarque : En dimension finie être une base hilbertienne est équivalent à être une base orthonormée.

Exemple

- Bases orthonormées en dimension finie.
- La base canonique dans $\ell_2(\mathbb{N})$.
- Les exponentielles complexes sur $L^2(\mathbb{T})$ ou sur les fonctions continues 2π -périodiques (voir la suite).

Théorème 2. Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace de dimension finie de E et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de F , la projection orthogonale $P_F(x)$ de $x \in E$ sur F s'écrit

$$P_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \quad (5)$$

Démonstration. On note $p = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ et on observe que $p \in F$ et pour tout $j \in I$,

$$\langle x - p, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = 0. \quad (6)$$

On en déduit que $x - p \perp F$ et on applique la proposition 6. □

Théorème 3. Théorème de Pythagore

Soit E un espace de Hilbert et $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de E alors pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 \quad (7)$$

Démonstration. Pour simplifier on fera l'hypothèse que $I = \mathbb{N}^*$ et on note F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et p_n la projection de x sur F_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x\|^2 = \|p_n\|^2 + \|x - p_n\|^2 \text{ et } \|p_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Ainsi

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x - p_n\|^2$$

Comme $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne le membre de droite tend vers 0 ce qui conclut la preuve. □

Exemple : $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et exemples à venir sur les fonctions périodiques et sur les fonctions définies par (1).

Théorème 4. Théorème de Riesz

Soit E un espace de Hilbert et Φ une forme linéaire continue définie sur E . Il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = \langle u, x \rangle$.

Démonstration. Si ϕ est l'application nulle alors on peut choisir $u = 0$.

On fait désormais l'hypothèse que Φ n'est pas l'application nulle.

Soit $x_0 \in E$ tel que $\Phi(x_0) \neq 0$. Tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)}x_0 + \left(x - \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)}x_0\right) \quad (8)$$

où $\frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)}x_0$ est un élément de $\text{Vect}(x_0)$ et où $\left(x - \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)}x_0\right)$ est un élément du noyau de Φ . On en déduit que le noyau $\text{Ker}(\Phi)$ de Φ est un hyperplan de E , c'est à dire un sous-espace de E admettant un supplémentaire de dimension 1.

Soit x_1 un vecteur engendrant le supplémentaire orthogonal de $\text{Ker}(\Phi)$ tel que $\Phi(x_1) = 1$ et $x_2 = \frac{x_1}{\|x_1\|^2}$.

Pour tout $x \in E$ on définit $\Psi(x) = \langle x_2, x \rangle$.

Pour tout $x \in \text{Ker}(\Phi)$, $\Phi(x) = \Psi(x) = 0$ et $\Phi(x_1) = 1 = \Psi(x_1)$, donc Φ et Ψ coïncident sur E et sont donc égales.

Pour démontrer l'unicité on observe que si pour deux vecteurs u et v de E on a pour tout $x \in E$, $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle$ alors $u - v$ est orthogonal à tout vecteur et est donc nul. \square

Début du Cours 4

2.3 Approximation

1. Approximation linéaire. Contrôle avec la décroissance des coefficients.

Définition 21. Approximation linéaire

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E , on appelle approximation linéaire à N termes dans la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on note $S_N^l(x)$ la projection de x sur l'espace vectoriel de dimension N engendré par les $(e_k)_{k \leq N}$:

$$S_N^l(x) = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

Si la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est indexée sur les entiers relatifs \mathbb{Z} on note $S_N^l(x)$ la projection sur l'espace vectoriel de dimension $2N+1$ par les $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$:

$$S_N^l(x) = \sum_{k=-N}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

On note ϵ_N^l l'erreur d'approximation linéaire associée :

$$\epsilon_N^l(x) = \|x - S_N^l(x)\|^2$$

Exemple : Dans \mathbb{R}^n , dans $\ell_2(\mathbb{N}^*)$ et $\ell_2(\mathbb{Z})$. Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire classique sur $[0, 1]$.

Remarque : Plus l'erreur ϵ_N^l est faible, meilleure est l'approximation linéaire.

Remarque : D'après Pythagore on déduit que

$$\epsilon_N^l(x) = \sum_{|k| > N} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Proposition 7. Décroissance de l'erreur d'approximation linéaire

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E , s'il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et C tel que pour tout $k \neq 0$ on ait $|\langle x, e_k \rangle| \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$ alors

$$\epsilon_N^l(x) = O(N^{1-2\alpha}) \quad (9)$$

Remarque : On appelle cette approximation une approximation linéaire car l'application qui à x associe $S_N^l(x)$ est une application linéaire.

Remarque : Plus les coefficients décroissent vite, plus l'erreur d'approximation linéaire décroît rapidement.

Remarque : Une BON assurant une décroissance rapide des coefficients pour la classe de vecteurs x que l'on étudie sera particulièrement adaptée pour approcher les vecteurs de cette classe.

Remarque : Aucune base ne peut être adaptée à tous les vecteurs.

Remarque : Performances de Jpeg.

Exemple : Nous verrons plus loin l'application de ces résultats sur les fonctions k fois dérivables dans les bases d'exponentielles complexes.

2. Approximation non linéaire.

Définition 22. Approximation non linéaire

Soit $(e_n)_{n \in I}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E . Pour $N \in \mathbb{N}$ on définit l'approximation non linéaire à N termes $S_N^n(x)$ de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$ par

$$S_N^n(x) = \sum_{k \in I_N}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

où I_N désigne l'ensemble des indices des N plus grandes valeurs de $|\langle x, e_k \rangle|$. On note ε_N^n l'erreur d'approximation non linéaire associée :

$$\varepsilon_N^n(x) = \|x - S_N^n(x)\|^2 = \sum_{k \notin I_N} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Remarque : On qualifie cette approximation de non linéaire car l'application qui à x associe $S_N^n(x)$ n'est pas linéaire.

Remarque : D'après le Théorème de Pythagore on déduit que cette approximation est la meilleure possible à N termes dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

Proposition 8. Décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E . Si on réordonne les coefficients $\langle x, e_k \rangle$ par ordre décroissant de valeur absolue et on note $c_k^*(x)$ la k -ième valeur de $|\langle x, e_k \rangle|$ dans cet ordre.

s'il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et C tel que pour tout $k \neq 0$ on ait $c_k^*(x) \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$ alors

$$\varepsilon_N^n(x) = O(N^{1-2\alpha}) \quad (10)$$

3 Analyse de Fourier

3.1 Séries de Fourier de fonction périodiques définie sur $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

1. Définitions.

Définition 23. Espace $L^2(\mathbb{T})$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} telles que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Cet espace muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt < +\infty$$

est un espace de Hilbert H . La norme associée est ainsi définie par

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

De plus la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ des exponentielles complexes définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par

$$e_k(x) = e^{ikx}$$

est une base hilbertienne de H .

On appelle coefficient de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ le produit scalaire

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Remarque : Le fait que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée est simple à démontrer. Pour démontrer que l'espace vectoriel engendré par les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ il faut montrer que toute fonction continue peut être approchée aussi près que l'on veut par un polynôme trigonométrique.

Remarque : Les fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux appartiennent bien entendu à cet espace.

Démonstration Par les sommes de Féjer en exercices.

Remarque : Dans la pratique on calcule très souvent $c_0(f)$ à part pour éviter les divisions par 0.

Exercice : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = 1$ et sur $[\pi, 2\pi[$ par $f(x) = 0$.

Exercice : Montrer que pour $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$

$$u_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x e^{-ikx} = \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{1}{2\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

et donner une expression de v_k défini par

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 x e^{-ikx} dx$$

en fonction de u_{-k} .

En déduire une expression des coefficients de Fourier c_k des deux fonctions 2π -périodiques suivantes :

$$f_1(x) = |x| \text{ sur } [-\pi, \pi[$$

$$f_2(x) = x \text{ sur } [-\pi, \pi[$$

On dessinera les graphes des deux fonctions sur $[-2\pi, 2\pi]$

Définition 24. Série de Fourier

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs complexes 2π -périodique appartenant à $L^2(\mathbb{T})$. On appelle somme partielle de Fourier $S_n(f)$ de f , le polynôme trigonométrique suivant :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

On appelle série de Fourier associée f la série de fonctions suivante $S(f)$:

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e_k$$

Remarque : Attention au sens que l'on donne à cette série de fonctions. La série peut ne pas être convergente pour certaines valeurs de x . Nous verrons dans la suite que cette série converge, sous certaines hypothèses et un en certain sens vers la fonction f .

2. Convolution circulaire.

Définition 25. Convolution circulaire

Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ on appelle convolution circulaire de f et g la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$$

la fonction h ainsi définie appartient à $L^2(\mathbb{T})$.

Exemple : Soit $D_N = \sum_{k=-N}^N e_k$ calculer la convolution d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec D_N .

Remarque : La convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ est toujours continue et donc bornée.

Début du Cours 6

3. Bessel et Parseval.

Proposition 9. Égalité de Parseval

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ et $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier et $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de Fourier. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\| = 0$$

de plus

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2 \quad (11)$$

Remarque : Le second point appelé **Égalité de Parseval** est un cas particulier du théorème de Pythagore dans $L^2(\mathbb{T})$. Il utilise le fait que les exponentielles complexes forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Remarque : Ainsi si une fonction f est dans $L^2(\mathbb{T})$ la suite de ses coefficients de Fourier appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$.

4. Lien entre $c(n)(f)$ et $c_n(f')$.

Proposition 10. Coefficients de Fourier et dérivée

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ dérivable par morceaux et continue sur \mathbb{R} .

Les coefficients de Fourier de f' s'expriment en fonctions de ceux de f de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = inc_n(f) \quad (12)$$

Remarque : La démonstration est une simple intégration par parties (A faire en exercice).

Remarque : L'hypothèse de continuité est indispensable.

5. Décroissance des coefficients et régularité.

Proposition 11. Régularité et décroissance des coefficients de Fourier

Soit k un entier strictement positif et soit f une fonction 2π -périodique, C^k par morceaux et C^{k-1} sur \mathbb{R} alors

$$\forall l < k, \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f^l) = (in)^l c_n(f)$$

De plus

$$|c_n(f)| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

6. Théorème de convergence de Dirichlet

Théorème 5. Théorème de convergence de Dirichlet

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$, continue et C^1 par morceaux. En tout point x de \mathbb{R} on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

Si f est C^1 par morceaux mais pas continue alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$$

où \tilde{f} coïncide avec f en tout point de continuité de f et où \tilde{f} est la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de f aux points de discontinuité :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y) + \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y) \right)$$

Remarque : Si f est continue alors la convergence est même uniforme.

Remarque : Si f n'est pas continue on observe un effet d'oscillation au niveau des discontinuités appelé effet de Gibbs (Exercices).

Début du Cours 7

3.2 Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

3.2.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. Définition de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 26. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ est absolument convergente. On peut ainsi définir la Transformée de Fourier (TF) de f , notée \hat{f} définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Exemple : Indicatrices, fonctions laplaciennes, gaussiennes (sans démonstration)

2. Convolution.

Définition 27. Convolution

Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ est absolument convergente. On appelle convoluée de f et g la fonction h définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

La fonction h ainsi obtenue appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et de plus

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (13)$$

Exemple : indicatrices et gaussiennes.

3. Propriétés de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 12. Propriétés de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ est continue et tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$.

Proposition 13. Translation et dilatation Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour $a > 0$, on note f_a la fonction dilatée de f du facteur a définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = f(ax)$.

On a alors $\widehat{f_a}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

On peut noter de même f^τ la fonction translatée de f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^\tau(x) = f(x-\tau)$.

On a alors $\widehat{f^\tau}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}$.

Ainsi si la transformée de Fourier de f_a^τ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_a^\tau(x) = f(ax-\tau)$ est

$$\widehat{f_a^\tau}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})e^{-i\omega\frac{\tau}{a}} \quad (14)$$

Exemple : Pour $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ et $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, on note $\Phi_{j,k}$ la fonction définie par

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}x - k) \quad (15)$$

Exprimer la transformée de Fourier de $\Phi_{j,k}$ en fonction de celle de Φ .

4. Formule d'inversion sur $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 6. Théorème d'inversion de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f peut s'exprimer à partir de \hat{f} de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (16)$$

Remarque : En fait cette égalité n'est vraie que *presque partout* et pas pour tout x . Dans la pratique les deux fonctions f et \hat{f} sont continues et la notion de presque partout ici n'est pas cruciale.

Exemple : Cauchy et Laplace.

5. Lien entre TF et dérivation.

Proposition 14. Transformée de Fourier et dérivation

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a la relation suivante entre les TF de f et f' :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) \quad (17)$$

Remarque : On peut bien entendu itérer ce résultat pour faire un lien entre la TF de f^k et celle de f si toutes les dérivées d'ordre $l \leq k$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut en déduire une vitesse de décroissance vers 0 de la TF des fonctions admettant des dérivées successives dans $L^1(\mathbb{R})$ de manière analogue que dans le cas continu.

On peut également établir une relation symétrique de la précédente :

Proposition 15. Transformée de Fourier et dérivation, deuxième partie

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = tf(t)$ est également un élément de $L^1(\mathbb{R})$, alors la Transformée de Fourier de f est dérivable et :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(\omega) = -i\hat{g}(\omega) \quad (18)$$

3.2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.6. Définition de la TF sur $L^2(\mathbb{R})$.**Définition 28. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$**

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ la fonction ϕ_ω définie par $\phi_\omega(A) = \int_{-A}^A f(t) e^{-i\omega t} dt$ admet une limite en $+\infty$.

On appelle Transformée de Fourier de f au point ω et on note $\hat{f}(\omega)$ cette limite.

7. Propriétés de la TF sur $L^2(\mathbb{R})$.**Proposition 16. Propriétés de la Transformée de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$.**

(a) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Plus précisément on a l'égalité de Plancherel :

$$\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2 \quad (19)$$

(c) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors on a la formule d'inversion suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t=-A}^A \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (20)$$

Exemple

Début du Cours 8

3.3 Transformée de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

1. Définitions

Définition 29. Transformée de Fourier de $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ c'est à dire telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 < +\infty$ on appelle Transformée de Fourier de $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la fonction \hat{h} , 2π -périodique définie par

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega} \quad (21)$$

Remarque : On appellera aussi *filtre* la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Remarque : Si la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ admet un nombre fini de coefficients non nuls alors \hat{h} est un polynôme trigonométrique (exemples).

Remarque : Sous certaines conditions de décroissance quand n tend vers $+\infty$, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de \hat{h} .

Exemple : Soit $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. On note Φ_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\Phi_n(x) = \Phi(x - n)$.

En admettant que la transformée de Fourier de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \Phi_n$ est bien définie, exprimer cette transformée de Fourier en fonction de celle de Φ et de celle de $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

2. Convolution discrète.

Définition 30. Convolution discrète

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux suites de $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. On définit la convolution de f et g comme la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\ell_2(\mathbb{Z})$ définie par

$$h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_{n-k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{n-l} g_l. \quad (22)$$

et noté $h = f \star g$.

On peut noter que $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée mais n'est pas nécessairement dans $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Si de plus $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ou $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, alors $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et comme pour les autres transformées et séries de Fourier on a la relation suivante :

$$h = f \star g \implies \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

3.4 Transformée de Fourier discrète de fonctions définies sur $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$

Dans tous les problèmes pratiques utilisant des données numériques finies, on manipule des données discrètes et on souhaite pouvoir calculer une transformée de Fourier elle même discrète.

Le moyen le plus simple de travailler dans un cadre discret et fini tant en espace (ou en temps) que dans le domaine de Fourier est de considérer le nombre fini d'échantillons qu'on souhaite traiter comme les valeurs d'une fonction définie de $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$ dans \mathbb{C} .

Autrement dit on identifie un vecteur de n nombres complexes à une fonction définie de $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$ dans \mathbb{C} .

Ainsi la première composante du vecteur est considérée comme l'image de 0 par f , la seconde valeur est considérée comme l'image de 1 etc ...

On peut munir l'espace vectoriel des fonctions de $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$ dans \mathbb{C} du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \overline{g(k)}$$

Pour ce produit scalaire la famille des exponentielles complexes discrètes $(e_l)_{0 \leq l \leq n-1}$ définie par

$$\forall (l, k) \in \llbracket 0 : n-1 \rrbracket^2, \quad e_l(k) = e^{\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}}$$

est une base orthogonale (presque orthonormée car les normes de ces fonctions sont toutes égales à N). La transformée de Fourier d'une fonction de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ dans \mathbb{C} est simplement la suite des coefficients de cette fonction dans la base des exponentielles complexes discrètes décrites ci dessus.

1. Définition.

Définition 31. Transformée de Fourier discrète

Soit f une fonction définie sur $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$ et à valeur dans \mathbb{C} que l'on peut identifier à un vecteur de n nombre complexe.

On appelle Transformée de Fourier discrète de f , le vecteur \hat{f} ayant n composantes et défini par :

$$\forall k \in \llbracket 0 : n-1 \rrbracket, \quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}} \quad (23)$$

Remarque : La DCT sur laquelle est basée le codage JPEG est une transformée similaire mais en 2D et réelle (on remplace les bases d'exponentielles complexes par des cosinus.)

Remarque : Si on identifie cet espace de fonctions à \mathbb{C}^n on observe que la TF n'est rien d'autre qu'un changement bases orthogonales sur \mathbb{C}^n . Ainsi il existe une formule simple d'inversion qui est presque la symétrique.

On oubliera cependant pas de diviser par N pour renormaliser tout correctement.

2. Formule d'inversion.

Proposition 17. Inversion de la Transformée de Fourier discrète

Soit f une suite de n valeurs, que l'on identifie à une fonction définie sur $\llbracket 0 : n-1 \rrbracket$ à valeurs dans \mathbb{C} et \hat{f} le vecteur obtenue par Transformée de Fourier discrète. On a la formule de reconstruction suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0 : n-1 \rrbracket, \quad f(k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{f}(l) e^{\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}}$$

Introduction

Un son et d'une manière général un signal 1D peut être vu comme une fonction f définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles. Cette fonction correspond à une variation de pression en fonction du temps. Le son est une onde acoustique. L'analyse de Fourier peut permettre de mieux comprendre, d'analyser et de procéder à une grande variété de traitements des signaux. La transformée de Fourier \hat{f} de f peut contenir des informations utiles mais dans la pratique, on n'accède au son qu'à partir d'une version échantillonnée c'est-à-dire à partir d'une suite finie de valeurs $(f(nT))_{n \in I}$. Et même dans ce cas, on traite rarement tous les échantillons d'un coup mais on préfère analyser le signal sur des fenêtres temporelles réduites, de l'ordre de 20 à 50 ms. L'outil de base est alors la transformée de Fourier discrète qui est souvent calculée par l'algorithme transformée de Fourier rapide (fft).

Il est en fait rarement utile de faire une analyse de Fourier sur le signal dans son ensemble. L'analyse de Fourier nous permet, pour faire simple, d'écrire une fonction, ou un vecteur comme une combinaison linéaire de sinusoides continues ou discrètes. Or cette représentation d'un son comme combinaison linéaire n'est pertinente que si le son est stationnaire. Or cette stationnarité n'est valide que sur des laps de temps assez courts.

Pour comprendre ce que l'on calcule, il est important de comprendre le lien entre tous les objets que l'on manipule, qu'ils soient continus ou discrets, dans le domaine temporel ou spectral (de Fourier), qu'ils soient périodiques ou non, finis ou non. Toute opération tel que l'échantillonnage ou le fait de ne considérer qu'une partie du signal ou des échantillons a un impact sur le contenu temporel et fréquentiel du signal. Dans la quatrième section, nous allons nous concentrer sur le lien entre le signal original continu et le signal échantillonné. Dans la partie suivante nous traiterons de la transformée de Fourier à court terme et des étapes classiques de traitement d'un signal sonore numérique. Les parties suivantes traiteront les problèmes plus spécifiques tels la compression de sons et d'images, de débruitage ou de traitement de la parole.

4 Échantillonnage d'un signal défini sur \mathbb{R}

4.1 Du continu au discret

Même si d'un point de vue technique l'échantillonnage présente quelques subtilités, d'un point de vue mathématique, l'échantillonnage d'une fonction f avec une périodicité T est simple. C'est l'opération qui associe à une fonction f définie sur \mathbb{R} , la suite $(f(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$. En revanche l'opération inverse qui consiste à reconstruire f à partir des échantillons est plus délicate. Sans hypothèses sur f elle est impossible car il existe une infinité de fonctions qui coïncident aux points $(nT)_{n \in \mathbb{Z}}$. Le théorème de Shannon ou Shannon-Nyquist-Whittaker donne une condition et une formule de reconstruction de f à partir de la suite des échantillons $(f(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$. Cette condition est sur le support de la transformée de Fourier. L'une des preuves de ce Théorème repose sur la formule sommatoire de Poisson dont nous donnons une version avec des hypothèses assez restrictives :

Théorème 7. Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tel que pour tout $t \neq 0$, $|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^\alpha}$ et $|f'(t)| \leq \frac{C}{1+t^\alpha}$. Alors on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikt} \quad (24)$$

Démonstration. On observe que la fonction F définie par $F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi n)$ est C^1 et 2π -périodique, on calcule ses coefficients de Fourier et on utilise la formule de reconstruction. \square

Le théorème de Shannon-Nyquist-Whittaker peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 8. Soit f une fonction telle que la transformée de Fourier est à support dans $[-F_{\max}, F_{\max}]$ alors f peut être reconstruite parfaitement à partir de la suite $(f(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$ si $F_{\max} < \frac{F_e}{2} := \frac{\pi}{T_e}$. Une formule de reconstruction est alors donnée par :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT_e) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T_e} (t - nT_e) \right) \quad (25)$$

Cette formule de reconstruction peut être vue comme une formule d'interpolation : $f(t)$ est une moyenne pondérée (avec des coefficients parfois négatifs) des valeurs $f(nT_e)$. Le fait que la décroissance de la fonction sinus cardinal soit lente est un problème : pour approcher la valeur de $f(t)$ il faut un grand nombre d'échantillons. Si on veut diminuer le nombre d'échantillons nécessaires à une bonne reconstruction il faut pouvoir utiliser une fonction φ différente. On peut observer que d'autres choix de fonctions φ sont possibles. Il faut juste que $\hat{\varphi}(\omega)$ soit égal à 1 sur $[-F_{\max}, F_{\max}]$ et que $\hat{\varphi}(\omega) = 0$ sur $[F_{\max}, F_e - F_{\max}]$. Si on choisit F_e un peu plus grand que $2F_{\max}$ un tel choix est possible tout en assurant autant de régularité que l'on souhaite à la fonction $\hat{\varphi}$ et donc autant de décroissance que l'on souhaite à la fonction φ . De tels choix permettent d'approcher pour chaque t la valeur de $f(t)$ par une combinaison linéaire restreinte des $f(nT_e)$.

Si on ne respecte pas le taux d'échantillonnage de Shannon, on s'expose à la possibilité d'un repliement spectral, c'est-à-dire qu'une fréquence soit *déplacée* par la périodisation du spectre induite par l'échantillonnage. C'est le cas d'une très haute fréquence f_1 qui peut être assimilée à une basse fréquence f_2 parce qu'elle appartient à la même classe qu'elle modulo F_e . On parle alors de repliement spectral, aliasing en anglais. Pour éviter cela on procède préalablement à un filtrage passe bas qui a pour but de supprimer les hautes fréquences et on effectue l'échantillonnage dans un second temps.

4.2 Sous-échantillonnage d'un signal numérique

Dans certaines situations on peut être amené à diminuer la résolution d'un signal numérique. C'est le cas par exemple où on veut maximiser la vitesse de calcul d'un algorithme, où qu'on veut afficher une version plus petite d'un signal ou d'une image. Une manière simple de le faire est de le sous-échantillonner. Un tel sous-échantillonnage induit une périodisation du spectre. On peut observer cette périodisation du spectre en affichant le module de la transformée de Fourier discrète d'un vecteur et le module du même signal où on a mis à 0, un coefficient sur deux. Cette périodisation du spectre peut induire un effet d'aliasing comme dans le cas du passage du continu au discret. Pour résoudre ce problème et éviter les problèmes pour afficher un signal à une plus faible résolution sans artefact, il faut appliquer un filtre passe bas (un lissage) avant de sous-échantillonner. Ce lissage est cette fois-ci une convolution par un filtre numérique.

5 Transformée de Fourier à fenêtres (ou à court terme).

Après échantillonnage d'un signal analogique, on ne dispose pas d'une suite infinie d'échantillons. On ne peut donc en particulier pas calculer exactement ce que serait la transformée de Fourier de la suite. Et quand bien même cela serait possible, ce ne serait pas utile. L'analyse de Fourier n'est pertinente et efficace que si le signal est *stationnaire* sur l'intervalle sur lequel on l'étudie. C'est dans ce régime que le considérer comme une superposition de sinusoides permet de l'analyser. C'est pourquoi on restreint souvent l'analyse des signaux à de petits intervalles de temps appelés *fenêtres*.

Effectuer un fenêtrage du son et en faire une analyse de Fourier par transformée de Fourier discrète via la *fft* consiste à multiplier le signal en temps par une fenêtre rectangulaire puis à périodiser le signal. Dans le domaine de Fourier, le fenêtrage se traduit ainsi par une convolution du spectre par la transformée de Fourier de la fenêtre puis par un échantillonnage du spectre. Si on effectue un fenêtrage brutal par une fenêtre rectangulaire, on convolue le spectre original par un sinus cardinal ce qui peut détériorer singulièrement le spectre. Plus la fenêtre est petite, plus le sinus cardinal est *étalé* et plus on altère le contenu fréquentiel du signal. Si le but du traitement est l'analyse et la détermination de fréquence, il faut être très vigilant à la fenêtre que l'on utilise.

Ainsi quand on *découpe* le signal en petites portions, on le multiplie par une fenêtre discrète avec de bonnes propriétés : la fenêtre de Hanning (qui est un cosinus carré), la fenêtre de Hamming qui est un cosinus carré légèrement décalé vers le haut, une fenêtre de Blackman etc... par bonnes propriétés on entend : qui ne dénature pas trop le signal dans le domaine spectral.

D'une manière générale, toutes les fenêtres sont nulles sur les bords, ce qui induit une continuité de la fenêtre périodisée et donc une bonne décroissance de la transformée de Fourier et donc une moins grande distorsion due au fenêtrage.

Un tel fenêtrage par une fenêtre de Hanning par exemple détériore le contenu temporel du signal. En particulier il atténue tout ce qui se passe sur le bord des fenêtres. C'est pourquoi quand on analyse un signal *par fenêtre*, on utilise des fenêtres qui se recouvrent partiellement. Il est courant d'utiliser un recouvrement de moitié, des trois quart ou des 7/8. On appelle transformée de Fourier à fenêtre, ou à court terme ou encore spectrogramme, le tableau formé des transformées de Fourier discrètes des fenêtres d'un signal. Un spectrogramme est ainsi défini par une taille de fenêtres, souvent entre 20 et 50 ms, le nombre de points dépendant alors de la fréquence d'échantillonnage, un type de fenêtre (Hanning, Hamming, Blackman ou autres) et un taux de recouvrement entre deux fenêtres consécutives. Un spectrogramme permet de mesurer l'évolution du spectre d'un signal dans le temps. On lit souvent le temps en abscisse et les fréquences en ordonnées.

Si on note N la taille d'une fenêtre et F_e la fréquence d'échantillonnage, on peut associer à chaque ligne du spectrogramme une fréquence. La première ligne correspond à la fréquence nulle et ensuite la i ème ligne correspond à une fréquence de $(i - 1)F_e/N$. Ainsi si on analyse un son musical, le spectrogramme peut permettre de savoir quelle note est jouée à chaque instant.

Reconstruction Pour reconstruire le signal original, on calcule la *fft* inverse de chacune des fenêtres et on les additionne en les décalant avec le taux de recouvrement utilisé pour l'analyse. Suivant le choix du type de fenêtre la reconstruction est plus ou moins facile car il faut que les fenêtres décalées somment à une valeur constante.

Question : Pourquoi choisit-on facilement des fenêtres de Hanning quand on veut pouvoir effectuer une reconstruction ?

Si on effectue un traitement sur le spectrogramme et qu'on modifie les *transformées de Fourier* des fenêtres, pour filtrer ou interpoler, il faut être vigilant.

1. Quel risque y a-t-il à utiliser les signaux obtenus en inversant la *transformée de Fourier* sur chaque colonne du spectrogramme si ces dernières ont été modifiées ?
2. Quelle opération peut-on proposer après l'inversion de Fourier pour régler ce problème ?
3. Quel nouveau problème cette solution crée-t-elle ?
4. Comment régler ce nouveau problème ?

5.1 Vocoder de Phase

Le vocoder de phase est un programme qui permet d'accélérer ou ralentir un son sans en modifier le contenu fréquentiel. Le vocoder de phase est un procédé qui utilise le spectrogramme pour réaliser une telle opération.

Le principe du vocoder est d'interpoler le spectrogramme en temps. On procède ainsi en 3 étapes :

1. On calcule le spectrogramme d'un signal sonore en utilisant un recouvrement d'au moins $3/4$ de fenêtre, c'est-à-dire qu'on se décale d'au plus $1/4$ de fenêtre entre deux fenêtres d'analyse. Un décalage de $1/8$ de fenêtre semble être un bon choix.
On utilise un fenêtrage de Hanning (cosinus carré) sur des fenêtres d'environ 25ms.
2. On interpole séparément le module et la phase du spectrogramme en temps. C'est-à-dire qu'on modifie le nombre de colonnes du spectrogrammes en laissant le nombre de lignes et donc la précision fréquentielle, inchangé.
3. On reconstruit le son en inversant la transformée de Fourier de chacune des colonnes du spectrogramme interpolé, en effectuant un nouveau fenêtrage de Hanning et en sommant les signaux en les décalant selon la règle de construction du spectrogramme original, c'est à dire $1/4$ ou $1/8$ de fenêtre suivant le choix qui a été fait pour l'analyse.

Le fait qu'on sépare l'interpolation du module et celle de la phase est crucial pour deux raisons :

1. Il est absolument inutile d'interpoler la transformée de Fourier de deux signaux : La transformée de Fourier est linéaire ! On obtient le même résultat en interpolant directement les deux signaux.
2. Par un phénomène d'interférence, on peut annuler une fréquence présente même assez fortement dans deux fenêtres voisines, c'est le cas si elles sont en opposition de phase. Ainsi si on veut interpoler deux fenêtres contenant chacune une même sinusoïde avec des phases différentes mais avec la même amplitude, on souhaite le faire par une sinusoïde de même fréquence et de même amplitude mais en faisant varier la phase.

L'interpolation du module du spectrogramme peut se faire de différentes manières. Par exemple de manière affine sur les colonnes. Ainsi si on veut doubler la taille du son, on crée entre chaque paire de colonnes du module du spectrogramme une nouvelle colonne obtenue en faisant la moyenne des deux fenêtres. Mais d'autres méthodes sont possibles, par zero padding par exemple.

Pour des raisons psycho-acoustiques on souhaite conserver la variation de la phase du signal original dans le signal reconstruit. Ainsi on ne va pas chercher à interpoler la phase au sens strict du terme mais à recopier la différence de phase du spectrogramme original dans le *nouveau spectrogramme*. Ainsi on va reconstruire la phase fenêtre par fenêtre à partir de la phase de la fenêtre précédente du spectrogramme reconstruit en ajoutant la différence de phases entre les deux fenêtres correspondantes du spectrogramme original. Si la correspondance n'est pas parfaite, ce qui arrive souvent, on effectue un choix arbitraire de deux fenêtres voisines et proches de la fenêtre temporelle que l'on est en train de traiter dans le spectrogramme original.

5.2 Séparation de sources à partir d'enregistrement stéréo

La séparation de sources est un problème qui consiste à reconstruire plusieurs sources sonores (2, 3 et parfois plus) à partir d'un nombre limité de voix. Nous expliquons ici comment on peut utiliser le spectrogramme et la manière dont il *sparsifie*, propose une représentation parcimonieuse du signal sonore en français pour effectuer une séparation de sources à partir de deux voix.

L'idée générale est simple, si on dispose de deux voix qui enregistrent simultanément plusieurs instruments et que chacun est caractérisé par un rapport d'amplitude différent sur chacune des voix, par exemple un instrument est présent avec la même intensité dans la voix 1 et dans la voix 2, qu'un autre est entendu deux fois plus forts dans la voix 1 que dans la voix 2 et qu'un troisième est entendu 2 fois plus forts dans la voix 2 que dans la voix 1, il est facile d'identifier les moments où seul un instrument joue. Il suffit de comparer l'intensité des deux voix. On fait ici l'hypothèse implicite qu'il n'y a pas de retard d'un instrument par rapport aux autres sur les différentes voix. On parle de mélange simultané.

En fixant des seuils raisonnables, on peut associer à chaque instant où fenêtre temporelle un instrument. On peut ensuite recopier chaque fenêtre temporelle ainsi labellisée sur les deux pistes associées à chacun des instruments. On reconstruit ainsi une signal stéréophonique pour chacun des instruments. Un tel procédé n'est possible que si on connaît le nombre d'instruments, le rapport d'intensité associé à chacun et surtout que si les instruments ne jouent jamais en même temps. Autant il est possible par des moyens divers d'estimer le nombre d'instruments et ces rapports d'intensité, autant l'hypothèse que les instruments ne jouent pas en même temps est la plupart du temps irréaliste. En revanche il est plus réaliste de considérer que les différents instruments ne jouent pas la même note au même instant.

Cette hypothèse est en fait valide sur un grand nombre de fenêtres temporelles quand le nombre d'instruments est faible.

Le spectrogramme dresse une carte temps-fréquence du signal sonore. Ainsi si sur une fenêtre temporelle deux instruments jouent des notes différentes on peut associer à chaque point du spectrogramme un instrument.

Ainsi si dans un premier temps on fait l'hypothèse que l'on connaît le nombre d'instruments et les rapport d'intensité entre les deux voix pour chacun d'entre eux, on peut associer à partir des modules des spectrogrammes des deux voix, chacun des points des spectrogrammes à chacun des instruments. On peut ainsi reconstruire le module du spectrogramme de chacune des voix de chacun des instruments, en allouant simplement chaque pair de points associés à une fréquence i et une fenêtre j à la paire de spectrogramme de chacun des instruments. On peut reconstruire les spectrogrammes entièrement en utilisant simplement les phases des voix originales.

Si on suppose simplement que l'on connaît le nombre d'instruments, on peut estimer les rapports d'intensité en construisant un histogramme des rapports d'intensité entre les deux modules des spectrogrammes des deux voix originales. Une manière de le faire est la suivante :

1. On sélectionne les paires (i, j) les plus importantes sur les spectrogrammes des deux voix. Une manière de le faire est de sommer les carrés des modules des spectrogrammes des voix 1 et 2 et de sélectionner les indices (i, j) dont l'intensité est la plus grande, par exemple les 10 premiers pour-cent.
2. On calcule les rapports d'intensité R_k associés que l'on met dans un vecteur.
3. On pourrait calculer les N maxima de l'histogramme des R_k , où N désigne le nombre d'instruments, mais il s'avère que cette méthode ne permet pas de voir correctement les maxima trop grands par rapport à 1. On propose alors de faire un changement de variable $U = \frac{R}{1+R}$ et de calculer les maxima de l'histogramme de R . Par changement de variable $R = \frac{U}{1-U}$ on retrouve les maxima de R qui correspondent à des estimations des rapports d'intensité.

6 Compression de sons et d'images

Il existe une grande variété d'algorithmes de compression du son et des images. Il n'est pas possible dans le cadre de ce cours de tous les présenter. Nous donnons ici quelques éléments clé de la compression et nous donnons les grandes lignes de deux algorithmes classiques de compression : le codage JPEG en image et le codage MP3 (Mpeg1-2 Layer 3) en compression du son.

6.1 La compression sans perte

Il est parfois possible de comprimer des données numériques sans perte. En effet il est possible de tirer bénéfice d'une certaine forme de redondance dans un fichier numérique pour le coder de manière plus efficace. Si on interprète une série de bits ou d'octets comme une suite de symboles aléatoire apparaissant selon une certaine loi de probabilité π , certains symboles pouvant apparaître nettement plus souvent que d'autres, il est possible *gagner de la place* en codant sur moins de bits les symboles les plus fréquents et sur plus de bits les symboles les moins fréquents. Par exemple si on doit transmettre une suite de symboles appartenant à l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ et que chaque symbole a une probabilité d'apparition donnée par :

$$P(a) = \frac{1}{2}, \quad P(b) = \frac{1}{4}, \quad P(c) = \frac{1}{8}, \quad P(d) = \frac{1}{8}$$

Il est possible de coder chaque symbole sur 2 bits mais en espérance il est préférable d'utiliser le codage suivant : On code 1 pour a, 01 pour b, 001 pour c et 000 pour d.

Exercice :

1. Donner le nombre moyen de bits par symbole utilisé par ce codage et le comparer au nombre de bits moyen utilisé par un codage plus naturel que vous préciserez.
2. Décoder la suite de bits suivante : 0101100100001011101000001

Si on fait l'hypothèse que les symboles à coder sont indépendants les uns des autres, la limite théorique du nombre de bits utilisé par symbole est donnée par l'entropie de la loi de probabilité π :

$$E(\pi) = - \sum_i \pi(\alpha_i) \log_2(\pi(\alpha_i)) \quad (26)$$

Plus les probabilités d'apparition des différents symboles sont déséquilibrées plus l'entropie est faible et plus le nombre moyen de bits pour coder un symbole est faible. De plus, il existe des codage permettant de s'approcher de cette limite comme le codage de Huffman ou le codage arithmétique.

Ainsi d'un point de vue du codage, une représentation d'un signal ou d'une image est optimale si un petit nombre de valeurs concentre l'essentielle des probabilités d'apparition. C'est pour cette raison qu'une première étape d'un algorithme de compression consiste souvent à exprimer le signal, son ou image dans une représentation *parcimonieuse*, c'est à dire où l'énergie est concentrée sur peu de composantes. Cette première transformation assure que la valeur 0 ait une probabilité très forte et permet donc un codage efficace.

Dans la pratique il est rare qu'un changement de bases permettent de mettre des coefficients exactement à 0, mais plutôt à une valeur proche de 0. On effectue alors une étape de quantification, qui crée une distorsion du signal mais qui fait singulièrement décroître l'entropie du signal. Plus les coefficients réordonnés décroissent rapidement, moins cette étape de quantification crée de distorsion.

Ainsi de nombreux algorithmes de compression de signaux utilisent le schéma suivant :

1. On transforme les données via une application linéaire inversible de manière à les rendre parcimonieuses. Cette transformation est souvent sans perte.
2. On quantifie les coefficients obtenus de manière à faire baisser drastiquement l'entropie des données. Cette étape crée une distorsion.

3. On utilise un codage entropique pour tirer profit du déséquilibre créé entre les symboles.

En jouant sur la quantification on peut jouer sur la distorsion et sur le poids final du fichier. Le choix de la transformée est critique et dépend du type de données qu'on traite. Des traitements supplémentaires ad hoc propres à chaque méthode de compression complètent le processus.

6.2 Codage JPEG

Le codage JPEG est un format de compression d'images qui s'appuie sur la Transformée en Cosinus Locale (DCT en anglais).

Ce codage s'appuie sur le fait que les images naturelles sont localement parcimonieuses dans des bases de DCT car elles sont localement régulières et stationnaires. La DCT est une version réelle de la transformée de Fourier.

L'algorithme est décrit ici pour un tableau de luminance d'une image. Si l'image est une image couleur alors on effectue le même algorithme sur chacun des canaux de couleurs ou de chrominance. Les tables peuvent alors différer suivant les canaux choisis mais la méthode générale est identique. On peut noter cependant que les créniaux de chrominance sont souvent sous-échantillonnés car l'oeil humain perçoit moins les distorsions sur la chrominance que sur la luminance.

Les différentes étapes du codage JPEG sont les suivantes :

1. On découpe l'image en carrés 8×8 ,
2. On calcule la transformée en dct 2D sur chacun des blocs 8×8 .
3. On quantifie les coefficients sur chacun des blocks avec un pas de quantification qui dépend de la position dans le bloc. Une table de quantification T a été établie en fonction de la perception humaine.

$$T = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

En effet chaque position dans le bloc correspond à une fréquence. L'oeil humain perçoit plus les distorsions dans les basses fréquences, on utilise donc des pas de quantification plus faibles pour les basses fréquences (en haut à gauche) que pour les hautes. La table de référence T correspond à un facteur de qualité Q moyen de compression égal à 50. Si on veut compresser plus ou moins il existe une règle pour modifier : Si $Q > 50$, on utilise la table T_Q suivante

$$T_Q = \text{round} \left(\frac{50T}{Q} \right).$$

et si $Q < 50$ on utilise la table T_Q

$$T_Q = \text{round} \left(\frac{T(100 - Q)}{50} \right)$$

Plus précisément on code la partie entière du quotient entre la valeur du coefficient de DCT et du pas de quantification, de manière à n'avoir à stocker que des valeurs aussi petites que possible. Au moment de la décompression, on peut recalculer la table à partir du facteur de qualité et ainsi reconstituer une valeur approchée du coefficient de DCT.

4. A partir de chacun des tableaux de 64 nombres entiers on construit un vecteur avec les 63 autres coefficients en les prenant dans un ordre bien particulier *en serpent* :

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

et on extrait le premier qui correspond à la moyenne de niveau de luminance du carré.

La plupart du temps, les derniers coefficients sont nuls, c'est pourquoi on remplace le premier 0 de ce dernier bloc de 0 par un symbole EOB *End of Block*.

5. On concatène alors d'un côté la liste des *premiers coefficients* et d'un autre la liste des autres coefficients.
6. On effectue enfin un codage entropique sur chacune de ces deux listes.

Le fichier final doit contenir le facteur de qualité Q utilisé, ainsi que les tables des symboles utilisés pour chacune des deux listes. Sur une image de taille raisonnable, ces éléments ont une taille négligeable par rapport au codage des coefficients eux même. Ainsi un calcul de l'entropie des deux listes peut donner une image assez précise de la taille finale du fichier .jpg.

7 Le codage MP3

Le codage MPEG1-2 Layer 3, plus connu sous le nom MP3 est un format de compression de fichiers sonores, à l'origine créé pour comprimer la bande sonore de films.

Ce codage repose sur un codage en frames de 1152 échantillons qui représentent environ 26ms pour des sons échantillonnés à 44100 Hz en 32 sous-bandes de fréquences qui sont quantifiées différemment pour tenir compte de la sensibilité de l'oreille humaine.

Plus précisément pour chaque trame T :

- On définit 32 filtres $(h_i)_{1 \leq i \leq 32}$ correspondant à 32 bandes de fréquences.
- Pour chaque filtre on calcule $T \star h_i$ et on sous-échantillonne le résultat d'un facteur 32. Les filtres sont construits de manière à ce que ce processus soit inversible, c'est-à-dire qu'à partir de ces 32 signaux filtrés et sous-échantillonnés (donc contenant chacun 36 échantillons) on puisse reconstruire parfaitement le signal original. Pour construire de tels filtres on peut s'inspirer de la décomposition en filtres miroir en quadrature étudiés en TD et qui sont à la base de la décomposition en ondelettes.
- On comprime ensuite ces signaux de 36 échantillons en les quantifiant selon des tables établies à partir de la sensibilité de l'oreille humaine qui n'est pas la même en fonction des fréquences.
- On exploite également le phénomène de masquage fréquentiel qui fait que l'oreille n'est pas capable d'entendre une fréquence si une autre fréquence très proche est plus présente au même instant. Des courbes de masquage sont établies à partir du signal et seule la partie audible est ensuite codée.

Une telle méthode de compression permet d'atteindre des débits de l'ordre de 128 kbit par seconde. Comme dans le codage Jpeg, on peut jouer sur la quantification pour compresser plus ou moins le signal.

Si on effectue le codage sur un signal stéréo, on code séparément la somme et la différence des deux voix. Ce qui permet un gain important quand les deux voix sont similaires.