2 семестр лекций по дискретной математике

И. Д. Сагаева

21 июня 2022 г.

Содержание

1 Комбинаторика

1.1 Основные понятия

Определение 1.1.1. *Комбинаторика* — это раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества по определённым правилам. Каждое правило определяет выборку, состоящую из элементов исходного множества.

Теорема 1.1.1 (основные правила комбинаторики)**.**

1. *Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, и независимо от A, объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно сделать $m+n$ способами.*

   Пример 1.

2. *Правило произведения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами и если после такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) можно осуществить $m \cdot n$ способами.*

   Пример 2. Пусть есть 5 видов шапок и 4 вида шарфов. Тогда всего способов выбрать комбинаций из 1-ого шарфа и 1-й шапки $= 20$ способов.

Определение 1.1.2. *Размещениями без повторений* из n различных элементов по k различным элементам называются все последовательности k различных элементов, выбранных из n исходных, отличающихся порядком следования или составом элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Заметим, что здесь $k < n$, при $k = n$ получаются перестановки.

Пример 3. Пусть есть символы a, b, c. Тогда все комбинации этих символов по 2 элемента, различающихся друг от друга составом или порядком следования это:

$$\left.\begin{matrix} ab \\ ba \\ ac \\ ca \\ bc \\ cb \end{matrix}\right] = 6 = A_2^3$$

Определение 1.1.3. *Размещениями с повторениями* из n типов по k элементов (k и n в любом соотношении) называются все k-элементные последовательности из n типов отличающиеся порядком следования или составом элементов.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Пример 4. Размещения с повторениями для символов a и b по k символов могут быть записаны следующим образом

$$\left.\begin{aligned} aaa\\ aab\\ aba\\ abb\\ baa\\ bab\\ bba\\ bbb \end{aligned}\right] = 8 = \overline{A_2^3} = 2^3$$

Определение 1.1.4. *Перестановками без повторений* из n различных элементов называют все возможные последовательности из этих n элементов, различающихся только порядков следования.

$$P_n = n!$$

Определение 1.1.5. Пусть имеется: n_1 элементов 1-ого типа, n_2 элементов 2-ого типа, ... , n_k элементов k-ого типа. Причем $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. *Перестановками с повторениями* n_1 элементов 1-ого типа, n_2 элементов 2-ого типа, ... и n_k элементов k-ого типа называют все возможные последовательности из n элементов, которые отличаются только порядком следования.

$$\overline{P}(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Доказательство. Пусть имеется последовательность, состоящая из n_1 символов a, n_2 символов b, ... , n_k символов x. Во всех типах можно делать перестановки элементов, причем порядок в общей цепи элементов не поменяется. В 1-м типе таких перестановок $n_1!$, во 2-ом — $n_2!$, и так далее, в k-ом типе — $n_k!$. Всего таких перестановок на общее множество типов — $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$. □

Пример 5. Пусть изначально есть последовательность «мама», символов типа «а» 2 шт., «м» 2 шт. Тогда все возможные неповторяющиеся перестановки этой последовательности:

$$\left.\begin{aligned} \text{мама}\\ \text{ммаа}\\ \text{маам}\\ \text{амма}\\ \text{амам}\\ \text{аамм} \end{aligned}\right] = 6 = \overline{P}(2, 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

Определение 1.1.6. *Сочетаниями без повторений* из n различных элементов по k различным элементам ($k \leq n$) называются все комбинации из k различных элементов выбранных из исходных n элементов, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k!)} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Доказательство. Выпишем все возможные комбинации из n по k элементов, отличающихся только составом элементов. После в каждой комбинации из k элементов сделаем все возможные перестановки (то есть $k!$ для каждой комбинации). Например, если есть элементы abc, при $n = 3$, все возможные комбинации, отличающиеся только составом элементов, будут составлены следующим образом

$$abc \to \left[\begin{array}{l} ab \\ ac \\ bc \end{array}\right.$$

После добавления к этим комбинациям всех возможных перестановок этих комбинаций получим:

$$\left[\begin{array}{l} ab, ba \text{ (всего цепочек 2!)} \\ ac, ca \text{ (всего цепочек 2!)} \\ bc, cb \text{ (всего цепочек 2!)} \end{array}\right.$$

Таким образом в общем виде получим формулу:

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k \implies C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Пример 6. Для $n = 3$ и a, b, c все сочетания:

$$\left.\begin{array}{c} ab \\ bc \\ ac \end{array}\right] = 3 = C_3^2$$

Пример 7. Пусть есть 52 карты. Нужно выбрать 10 так, чтобы среди них было 3 туза и 7 карт «не тузов» Общее количество возможностей выбрать нужную комбинацию равно $C_4^3 \cdot C_{48}^7$.

Определение 1.1.7. *Сочетаниями с повторениями* из элементов n типов по k элементам (k и n в любом соотношении) называют все такие комбинации из k элементов, принадлежащих исходным n типам, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-1)!} = \overline{P}(k, n-1)$$

Пример 8. Для $n = 2$ и a, b все сочетания с повторениями по 3 элемента:

$$\left.\begin{array}{c} bbb \\ bba \\ baa \\ aaa \end{array}\right] = 4 = \overline{C_2^3} = C_{2+3-1}^3$$

Доказательство. Сначала занумеруем все возможные типы элементов числами от 1 до n. Теперь можно каждую комбинацию зашифровать с помощью последовательности единиц и палочек: для каждого типа с 1-го до n-го по порядку написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга палочками.

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{||\ldots|}_{n-1}$$

В результате мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, т. е. k, а число палочек будет на 1 меньше, чем число типов предметов, т. е. $n-1$, ведь $n-1$ палочек достаточно, чтобы зашифровать с их помощью n типов предметов (крайние группы справа и слева также считаются). Таким образом, мы получим перестановки с повторениями из k единиц и $n-1$ палочек. Различным комбинациям при этом соответствуют различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация. Отсюда получаем количество таких перестановок:

$$\overline{P}(k, n-1) = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^{k}$$

□

Пример 9.

$$\left.\begin{matrix} bbb \\ bba \\ baa \\ aaa \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} \texttt{|111} \\ \texttt{1|11} \\ \texttt{11|1} \\ \texttt{111|} \end{matrix}\right.$$

Пример 10. Есть красные и желтые тюльпаны. Количество способов собрать букет из 5-ти тюльпанов:

$$\overline{C_2^5} = C_6^5 = 6$$

Теорема 1.1.2 (свойства биномиальных коэффициентов)**.**

1. $C_n^k = \overline{P}(k, n-k)$;
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ *(основное свойство)*;

   Доказательство.

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot k}{k\cdot(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-1-k)!\cdot(n-k)} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = C_n^k.$$

□

4. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$;

   Доказательство. Рассмотрим бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k b^{n-k}$. Пусть $a = b = 1 \implies (1+1)^n = 2^n = C_n^0 + \cdots + C_n^n$. □

5. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

   Доказательство. Аналогично (4), но пусть $a = 1 \wedge b = -1$ или $a = -1 \wedge b = 1$. □

1.2 Формула включения-исключения

Теорема 1.2.1 (формула включения-исключения). *Пусть A — конечное непустое множество. $A_1, \dots, A_n$ — система подмножеств множества A ($A_i \subseteq A \quad i = \overline{1, \dots n}$). Тогда*

$$|A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots + \\ + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент a, принадлежащий множеству A ($a \in A$). Рассмотрим 2 случая расположения этого элемента по подмножествам множества A:

1. Если $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, и при этом принадлежит ровно k подмножествам. В левую часть формулы a не входит (то есть входит 0 раз), так как была исключена из множества A вхождением в объединение подмножеств $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Подсчитаем количество вхождений элемента a в правую часть равенства. В $|A|$ элемент a входит ровно 1 раз. $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ является объединением всех подмножеств, и так как a принадлежит ровно k подмножествам, в этом объединении оно будет учтено ровно k раз или C_k^1. Далее в $\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ будет учитываться только в пересечениях пар выбранных подмножеств A_{i_1} и $A_{i_2} \quad \forall i_1, i_2 : 1 \le i_1 \le i_2 \le n$. Таким образом в этом объединении a будет учитываться ровно C_k^2. Аналогичное рассуждение проводится и для остальных частей правой части равенства. В итоге, получаем, что элемент a учитывается в правой части равенства: $1 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \ldots + (-1)^k \cdot C_k^k = 0$ (по 5-му свойству биномиальных коэффициентов).

2. Если $a \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то в левой части равенства a учитывается ровно 1 раз, так как не исключается объединением подмножеств $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. В правой части равенства a так же учитывается только 1 раз в $|A|$ (т.к. $a \notin A_i \quad \forall i = 1, \dots, n$).

□

Пример 11. Сколько имеется целых чисел от 0 до 999, не делящихся ни на 5, ни на 7? Запишем множества: $A_5 = \{x \in [0; 999] \mid x \vdots 5\}$, $A_7 = \{x \in [0; 999] \mid x \vdots 7\}$, $A = \{x \in [0; 999]\}$.

$$|A \backslash (A_5 \cup A_7)| = |A| - (|A_5| + |A_7|) + |A_5 \cap A_7| = 1000 - (200 + 143) + 29 = 686.$$

1.3 Комбинаторные схемы

Схема 1. Требуется разложить в 2 различных ящика n_1 предметов 1-ого типа, n_2 предметов 2-ого типа, … , n_k предметов k-ого типа. Сколько существует способов такого разложения?

$$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$$

Выбрали один из ящиков, в который будем раскладывать предметы каждого типа. В один из ящиков можно определить от 0 до n_i предметов i-ого типа, то есть всего вариантов $n_i + 1$. Таким образом, по правилу произведения получаем формулу выше.

Следствие. Если все предметы различны и $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, то их можно разложить 2^k способами.

Следствие. Если в каждый ящик требуется положить не менее r_i предметов i-ого типа, то есть:

1 ящик	2 ящик
r_1	r_1
r_2	r_2
$\ldots$	$\ldots$
r_k	r_k

то количество способов сделать такое разложение:

$$(n_1 - 2r_1 + 1) \cdot (n_2 - 2r_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k - 2r_k + 1).$$

Пример 12. 2 грибника собрали 4 белых гриба, 12 подберезовика, 7 лисичек. Сколькими способами можно разделить все грибы? Ответ: $3 \cdot 13 \cdot 8$.

Схема 2. Даны n различных предметов и k различных ящиков. Требуется положить в 1-й ящик n_1 предметов, …, в k-й — n_k предметов, где $n_1 + \ldots + n_k = n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если нас не интересует порядок распределения предметов в ящиках?

Разложим все n предметов в ряд. Определим первые n_1 предметов под 1-й ящик, следующие n_2 предметов под 2-й ящик и так далее до k-ого ящика.

$$\underbrace{1, 2 \ldots}_{n_1} \underbrace{\ldots l, l+1}_{n_2} \underbrace{\ldots n}_{n_k}$$

Таким образом разделим все предметы на непересекающиеся группы. Первые n_1 предметов можно переставить $n_1!$ способами, причем такие перестановки не поменяют распределение по ящикам. Аналогичное свойство перестановок выполняется и для следующих групп предметов $(n_2 \ldots n_k)$. Итого, всего перестановок, не меняющих распределение по ящикам равно $n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!$. Изначально, общую последовательность из n элементов можно переставить $n!$ способами. Количество различных способов выполнить распределение по ящикам, описанное в условии:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \overline{P}(n_1, n_2, \ldots n_k)$$

Пример 13. Есть 28 костей. Сколько способов распределить все кости между 4 игроками? Ответ: $\frac{28!}{(7!)^4}$.

Схема 3. Даны n различных предметов и k одинаковых ящиков. Требуется положить в каждый ящик по $\frac{n}{k}$ предметов. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если нас не интересует порядок предметов в ящиках?

Так как ящики не пронумерованы и все одинаковы, то нужно не учитывать перестановки этих ящиков. Число таких перестановок $k!$. Также, не нужно учитывать перестановки $\frac{n}{k}$ предметов внутри всех k ящиках, которые не меняют распределение предметов по ящикам в целом. Таких перестановок всего $(\dfrac{n}{k})! \cdot (\dfrac{n}{k})! \dots (\dfrac{n}{k})! = ((\dfrac{n}{k})!)^k$. Таким образом, количество способов выполнить описанное распределение:

$$\frac{n!}{k!\left(\left(\frac{n}{k}\right)!\right)^k}.$$

Пример 14. Количество способов разложить 18 книг в 6 бандеролей по 3 книги в каждую равно $\dfrac{18!}{6! \cdot (3!)^6}$.

Схема 4. Дано n одинаковых предметов и k различных ящиков. Требуется разложить все предметы по ящикам, причем ящики могут оставаться пустыми

Закодируем распределение предметов по ящикам с помощью единичек и палочек.

$$\underbrace{11\dots1}_{n}\ \underbrace{||\dots|}_{k-1}$$

Каждая палочка будет отвечать за один предмет. Таким образом количество способов выполнения нужного распределения будет высчитываться с помощью всех возможных перестановок с повторениями из n единичек и $k-1$ палочек:

$$\overline{P}(n, k-1) = \frac{(n-k-1)!}{n!(k-1)!} = C_{n+k-1}^{k-1}$$

Следствие. Если в каждый ящик требуется положить не менее r предметов, количество таких распределений:

$$\overline{P}(n - r \cdot k, k-1)$$

Следствие. Если в каждый ящик требуется положить хотя бы 1 предмет, количество таких распределений:

$$\overline{P}(n-k, k-1) = C_{n-1}^{k-1}$$

Схема 5. Требуется разложить n различных предметов в k различных ящика, нет никаких ограничений. Будем рассматривать каждый предмет по отдельности и количество способов его положить в k различных ящиков. Так каждый предмет можно разложить k способами:

$$\underbrace{1\dots1}_{k}\ \underbrace{2\dots2}_{k}\ \dots\ \underbrace{n\dots n}_{k}.$$

Таким образом, количество способов распределить предметы по описанному условию:

$$k^n = \overline{A}_k^n.$$

Пример 15. Сколько способов раздать 9 различных пирожных 6 детям. Ответ: 6^9.

Схема 6. Требуется разложить n различных предметов в k различных ящика, притом, что не должно быть пустых ящиков. Рассмотрим подобное распределение без всяких ограничений.

Количество способов: $|A| = n$ различных предметов в k различных ящика без ограничений $= k^n$.

Далее рассмотрим количество способов распределить все предметы по k ящикам, притом, что один выбранный ящик останется пустым: $|A_i| = i$-й ящик пустой $= (k-1)^n \quad \forall i : \ i = 1, \ldots, n$. И так далее для 2-х пустых ящиков, 3-х … n пустых ящиков. Воспользуемся формулой включений-исключений. Тогда количество способов выполнить нужное распределение:

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |A| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le k} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_{k-1} \le k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}}| + \ldots +$$

$$+ (-1)^k |A_1 \cap \ldots \cap A_k| = k^n - C_k^1 \cdot (k-1)^n + C_k^2 \cdot (k-2)^n + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n$$

Схема 7. Требуется разложить n_1 предметов 1-ого типа, n_2 предметов 2-ого типа, … n_s предметов типа s в k различных ящика, притом, что не должно быть пустых ящиков. Рассмотрим подобное распределение без всяких ограничений. Воспользуемся схемой №4 Количество способов разделить n_1 одинаковых предметов по k ящикам $= \overline{P}(n_1, k-1)$, n_2 одинаковых предметов по k ящикам $= \overline{P}(n_2, k-1)$ и т.д. Общее количество способов сделать такое распределение вычисляется по правилу произведения:

$$|A| = \overline{P}(n_1, k-1) \cdot \overline{P}(n_2, k-1) \cdot \ldots \cdot \overline{P}(n_s, k-1) = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \ldots \cdot C_{n_s+k-1}^{k-1}$$

Аналогично решению предыдущей схемы будем рассматривать распределения с 1-м исключенным ящиком, то есть один из ящиков останется пустым (количество таких распределений $\overline{P}(n_1, k-2) \cdot \ldots \cdot \overline{P}(n_s, k-2) = C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \ldots \cdot C_{n_s+k-2}^{k-2}$), и так далее вплоть до исключения всех ящиков. Получаем общее количество способов выполнить описанное распределение:

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \ldots \cdot C_{n_s+k-1}^{k-1} - C_k^1 \cdot C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \ldots \cdot C_{n_s+k-2}^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} - 1.$$

Схема 8. Требуется разложить n различных предметов в k различных ящика с учетом расположения предметов внутри ящиков, причем все n предметов используются и ящики могут быть пустыми.

Зашифруем все предметы с помощью чисел и палочек следующим образом:

$$\underbrace{123 \ldots n}_{n} \ \underbrace{|| \ldots |}_{k-1}$$

Здесь каждое число отвечает за конкретный уникальный предмет. Тогда количество способов выполнить распределение по описанным условиям:

$$\overline{P}(\underbrace{1,1,\dots 1}_{n}, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A^n_{n+k-1}.$$

Пример 16. Сколькими способами можно развесить 6 различных флажков на 3 различные мачты? Ответ: $\frac{8!}{2!}$

Следствие. Такие же условия, но не должно быть пустых ящиков: Разложим сначала по одному предмету в каждый ящик, чтобы не осталось пустых ящиков. Это можно сделать A^k_n способами. Оставшиеся $n-k$ предметов разложим по k ящикам с помощью шифрования палочками и числами (воспользуемся схемой №8). Количество способов такого распределения равно $\frac{(n-k+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = A^{n-k}_{n-k+k-1}$.

Всего способов распределить предметы по описанным условиям:

$$A^k_n \cdot A^{n-k}_{n-k+k-1} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! \cdot C^{k-1}_{n-1}.$$

Схема 9. Требуется разложить n различных предметов в k различных ящика с учетом расположения предметов внутри ящиков, причем могут быть использованы <u>не</u> все n предметов.

Определим класс S, задающий выбранное количество предметов для распределения по ящикам. То есть в зависимости от выбранного значения S ровно S предметов распределяются по ящикам, где $S = 0, 1, \dots n$. Из предыдущей задачи известно, что s предметов по k ящикам можно разложить A^s_{s+k-1} способами. Всего в s класс войдут $C^s_n \cdot A^s_{s+k-1}$ комбинаций. По правилу суммы получаем общее количество способов выполнить необходимое распределение:

$$\sum_{s=0}^{n} C^s_n \cdot A^s_{s+k-1}.$$

Следствие. Такие же условия, но не должно быть пустых ящиков: $S = \overline{k, k+1, \dots n}$, при $k \le n$ (ведь если $s < k$, то могут быть пустые ящики). По следствию из схемы №8 получаем общее количество способов:

$$\sum_{s=k}^{n} C^s_n \cdot s! \cdot C^{k-1}_{s-1}.$$

1.4 Полиномиальные формулы

Определение 1.4.1. *Полиномиальные формулы* — это формулы для вычисления полиномов:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

Теорема 1.4.1 (полиномиальная формула)**.**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \overline{P}(k_1, \dots, k_m) \cdot x_1^{k_1} \cdot \ldots x_m^{k_m},$$

где k_i ($1 \le i \le n$) — числа, в сумме дающие n.

Доказательство.

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_m) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_m)}_{n} = \underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n} + \underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n-1} x_2 + \ldots +$$
$$+ x_2 \underbrace{x_1 x_1 \ldots x_1}_{n-1} + \ldots = x_1^n x_2^0 x_3^0 \ldots x_m^0 + x_1^{n-1} x_2 x_3^0 \ldots x_m^0 + x_1^{n-1} x_2 x_3^0 \ldots x_m^0.$$

Таким образом, могут получаться слагаемые, различающиеся только порядком следования переменных. Причем слагаемое вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_m^{k_m}$ встречается в сумме ровно столько же раз, сколько существует перестановок с повторениями:

$$\overline{P}(k_1, k_2, \ldots, k_m) \implies \overline{P}(k_1, k_2, \ldots, k_m) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_m^{k_m}.$$

□

Теорема 1.4.2 (свойства полиномиальных коэффициентов)**.**

1. $\displaystyle\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \ldots k_m) = m^n$

2. $\overline{P}(k_1, \ldots, k_m) = \overline{P}(k_1 - 1, \ldots, k_m) + \overline{P}(k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m) + \dots + \overline{P}(k_1, \ldots, k_{m-1}, k_m - 1)$

Доказательство.

1.
$$\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \ldots k_m) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \overline{P}(k_1, \ldots k_m) \underbrace{1^{k_1} \cdot 1^{k_2} \cdot \ldots \cdot 1^{k_m}}_{m} \implies$$
$$\implies x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1 \implies (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^n =$$
$$= (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m})^n = m^n.$$

2.
$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^{n-1} = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n-1} \overline{P}(k_1, \ldots k_m) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_m^{k_m}.$$

Домножим обе части равенства на сумму $(x_1 + \ldots + x_m)$. Получаем:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^{n} = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n-1} \overline{P}(k_1, \ldots k_m) \cdot \underbrace{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_m^{k_m}}_{n-1} \cdot (x_1 + \ldots + x_m) \implies$$
$$\implies \overline{P_{k_1 + \ldots + k_m = n}}(k_1, \ldots k_m) = \overline{P}(k_1 - 1, k_2, \ldots k_m) + \overline{P}(k_1, k_2 - 1, \ldots k_m) +$$
$$+ \ldots + \overline{P}(k_1, k_2, \ldots k_m - 1).$$

□

Пример 17. Нужно найти в разложении полинома $(x + y + z)^4$ все коэффициенты при множителях $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$ таких, что $k_1 \geq k_2 \geq k_3$.

$$(x+y+z)^4 = x^4 + y^4 + z^4 +$$
$$+4x^3y + 4x^3z + 4y^3x + 4y^3z + 4z^3x4z^3y + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2.$$

$$\begin{array}{ccccccl}
k_1 & & k_2 & & k_3 & & \\
4 & + & 0 & + & 0 & \Longrightarrow & \overline{P}(4,0,0) = 1 \\
3 & + & 1 & + & 0 & \Longrightarrow & \overline{P}(3,1,0) = 4 \\
2 & + & 2 & + & 2 & \Longrightarrow & \overline{P}(2,2,0) = 6 \\
2 & + & 1 & + & 1 & \Longrightarrow & \overline{P}(2,1,1) = 12
\end{array}$$

Пример 18. В разложении полинома $(3 + x^2 - x^5)x^8$ нужно найти коэффициент при x^{12}.

Запишем уравнение вида $3^{k_1} \cdot (x^2)^{k_2} \cdot (-x^5)^{k_3} \implies x^{2k_2+5k_3} = x^12 \implies 2k_2 + 5k_3 = 12 \implies k_2 = \dfrac{12-5k_3}{2}$.

Получаем для $0 \leq k_i \leq 8$ и $k_1 + k_2 + k_3 = 8$:

$$\begin{array}{ccccccl}
k_1 & & k_2 & & k_3 & & \\
2 & + & 6 & + & 0 & \Longrightarrow & \overline{P}(2,6,0) \\
5 & + & 1 & + & 2 & \Longrightarrow & \overline{P}(5,1,2)
\end{array}$$

Тогда коэффициенты при x^{12} будет записан следующим образом:

$$3^2 \cdot \overline{P}(2,6,0) - 3^5 \cdot \overline{P}(5,1,2).$$

2 Рекуррентные соотношения

2.1 Рекуррентное соотношение k-ого порядка

Определение 2.1.1. *Рекуррентным соотношением k-го порядка* называется формула, позволяющая выразить член последовательности через k предыдущих членов последовательности.

Определение 2.1.2. *Решением рекуррентного соотношения k-ого порядка* называется числовая последовательность, обращающая данное рекуррентное соотношение в верное равенство (тождество) при подстановке в него общего члена последовательности.

Определение 2.1.3. *Начальными условиями рекуррентного соотношения k-ого порядка* называются первые k членов последовательности, являющейся решением данного рекуррентного соотношения.

Пример 19. $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n),\ f(n) = 2^n$
Слева: 2^{n+2}
Справа: $3 * 2^{n+1} - 2 * 2^n = 2 * 2^{n+1} = 2^{n+2}$
С начальными условиями — одно решение.
Без начальных условий — бесконечное множество решений:
$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
$2, 3, 5, 9, 17, 33, \dots$
$3, 2, 0, -4, -12, -28, \dots$
$-1, 0, 2, 6, 14, 30, \dots$

Определение 2.1.4. *Общим решением рекуррентного соотношения k-ого порядка* называется решение этого соотношения, которое зависит от k произвольных постоянных, путём подбора которых можно получить любое решение данного рекуррентного соотношения k-ого порядка.

Пример 20. $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$
Покажем, что общим решением является $f(n) = \alpha 2^n + \beta 3^n$
Слева: $\alpha 2^{n+2} + \beta 3^{n+2}$
Справа: $5\alpha 2^{n+1} + 5\beta 3^{n+1} - 6\alpha * 2^n - 6\beta 3^n = 5\alpha 2^{n+1} + 5\beta 3^{n+1} - 3\alpha * 2^{n+1} - 3\beta 3^{n+1} = 2\alpha 2^{n+1} + 3\beta 3^{n+1} = \alpha 2^{n+2} + \beta 3^{n+2}$
Начальные условия: $f(0) = a,\ f(1) = b$, найдём α и β:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ 2\alpha + 3\beta = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = b - 2a \\ \alpha = 3a - b \end{cases}$$

2.2 Линейные однородные рекуррентные соотношения k-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 2.2.1. *Линейным однородным рекуррентным соотношением k-го порядка с постоянными коэффициентами* называется соотношение вида:
$f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \ldots + c_k f(n)$, $c_i = const$

Определение 2.2.2. Характеристическим уравнением называется уравнение вида:
$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k$

Теорема 2.2.1 (Свойства решений линейных рекуррентных соотношений второго порядка)**.**

1. *$\{x_n\}$ — решение $\implies$ $\{\alpha x_n\}$, $\alpha = const$ — решение.*

   Доказательство. Решение: $x_{n+2} = c_1 x_{n+1} + c_2 x_n \mid \cdot\alpha \implies \alpha x_{n+2} = c_1 \alpha x_{n+1} + c_2 \alpha x_n$ — решение. □

2. *$\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — решение $\implies$ $\{x_n + y_n\}$ — решение.*

   Доказательство. $x_{n+2} = c_1 x_{n+1} + c_2 x_n$ — решение, $y_{n+2} = c_1 x_{n+1} + c_2 y_n$ — решение $\implies$ $x_{n+2} + y_{n+2} = c_1(x_{n+1} + y_{n+1}) + c_2(x_n + y_n)$ — решение. □

3. *r_1 — корень характеристического уравнения $\implies$ $\{r_1^n\}$ — решение.*

   Доказательство. Покажем, что верно $r_1^{n+2} = c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_1^n$:
   $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2 | \cdot r_1^n \implies r_1^{n+2} = c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_1^n$ □

Теорема 2.2.2 (Случай разных корней характеристического уравнения)**.** *$r_1 \neq r_2$ — корни характеристического уравнения. Покажем, что $f(n) = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ является общим решением.*

Доказательство.

1. r_1 — решение $\implies$ r_1^n — решение
   r_2 — решение $\implies$ r_2^n — решение

2. r_1^n — решение αr_1^n — решение
   r_2^n — решение βr_2^n — решение

3. αr_1^n — решение, βr_2^n — решение $\implies$ $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ — решение

□

Пусть теперь у нас есть начальные условия, тогда:

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a & | \cdot r_1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta(r_1 - r_2) = ar_1 - b \\ \alpha(r_2 - r_1) = ar_2 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \frac{ar_2 - b}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

Теорема 2.2.3 (Случай одного корня характеристического уравнения кратности 2)**.** *$r_1 = r_2$ — корень характеристического уравнения кратности 2. Покажем, что $f(n) = \alpha r_1^n + \beta n r_1^{n+1}$ является общим решением.*

Доказательство. $r^2 = c_1 r + c_2$
$r^2 - c_1 r - c_2 = 0 \implies$ по т.Виета :

$$\begin{cases} 2r_1 = c_1 \\ r_1^2 = -c_2 \end{cases}$$

r_1^n и nr_1^n - ?
Слева: $(n+2)r_1^{n+2}$
Справа: $2r_1(n+1)r_1^{n+1} - r_1^2 n r_1^n = (n+2)r_1^{n+2}$
$\implies f(n) = \alpha r_1^n + \beta n r_1^{n+1}$ — общее решение. □

Теорема 2.2.4 (Об общем решении линейно однородного рекуррентного соотношения k-го порядка с постоянным коэффициентом)**.** *Пусть $f(n+k) = c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \ldots + c_k f(n)$, $x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k$. Общее решение имеет вид: $f(n) = A_1 + A_2 + \ldots + A_p$, где A_i — соответствует действительному корню или паре комплексно-сопряжённых.*

1. *Если x — действительный корень кратности m, то ему соответствует A_i:*
   $A_i = x^n(D_{i,1} + D_{i,2}n + \ldots + D_{i,m}n^{m-1}), D_{i,j} = const$
2. *Если $r(\cos(\phi) \pm \sin(\phi))$ — комплексно-сопряжённая пара корней, где каждый имеет кратность 1, то ей соответствует A_i:*
   $A_i = r^n(\cos(\phi_n)D_i + \sin(\phi_n)E_i)$, $D_i, E_i = const.$
3. *Если $r(\cos(\phi) \pm i\sin(\phi))$ — комплексно-сопряжённая пара корней, где каждый корень имеет кратность m, то ей соответствует A_i:*
   $A_i = r^n[\cos(\phi_n)(D_{i,1} + D_{i,2}n + \ldots + D_{i,m}n^{m-1}) + \sin(\phi_n)(E_{i,1} + E_{i,2}n + \ldots + E_{i,m}n^{m-1})], D_{i,j}, E_{i,j} = const$

Определение 2.2.3 (Метод решения линейно однородного рекуррентного соотношения k-го порядка с постоянными коэффициентами)**.**

1. Записать характеристическое уравнение и найти его корни.

2. Записать общее решение, воспользовавшись теоремой об общем решении.

Пример 21. $f(n+5) = 4f(n+4) - 4f(n+3) - 2f(n+2) + 5f(n+1) - 2f(n)$
Характеристическое уравнение: $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$
$x_1 = x_2 = x_3 = 1$, то есть кратность 3,
$x_4 = -1$,
$x_5 = 2$.
$f(n) = 1^n(an^2 + bn + c) + (-1)^n\alpha + 2^n k$

Пример 22. $f(n+5) = -3f(n+4) - 5f(n+3) - f(n+2) + 6f(n+1) + 4f(n)$
$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$
$(x+1)^2(x-1)(x^2 + 2x + 4) = 0$
$x_1 = x_2 = -1$, то есть кратность 2,
$x_3 = 1$,
$x_{4,5} = \frac{-2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \implies r = 2,\ \cos(\phi) = \frac{-1}{2},\ \sin(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \phi = \frac{2\pi}{3}$
$x_{4,5} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) \pm i\sin(\frac{2\pi}{3})$
$f(n) = (-1)^n(an + b) + 1^n c + 2^n(\cos(\frac{2\pi n}{3})d + sin(\frac{2\pi n}{3})k)$

3 Производящие функции

Определение 3.0.1. *Производящей функцией* для последовательности $\{a_n\}$ называется $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$

Определение 3.0.2. *Суммой производящих функций* $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ называется производящая функция $C(t) = A(t) + B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, где $c_n = a_n + b_n$

Теорема 3.0.1 (Свойства суммы)**.**

1. $A(t) + B(t) = B(t) + A(t)$
2. $(A(t) + B(t)) + C(t) = A(t) + (B(t) + C(t))$
3. *Произведение производящих функций* $A(t)$ *и* $B(t) : C(t) = A(t)B(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots)$
   $c_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$

Определение 3.0.3. *Подстановкой в производящую функцию* $A(t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ производящей функции $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, $B(0) = b_0 = 0$ называется производящая функция $C(t) = A(B(t)) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$.
$c_0 = a_0$
$c(t) = a_0 + a_1(b_1 t + b_i t^2 + \ldots) + a_2(b_1 t + b_2 t^2 + \ldots)^2 + \ldots$
$c_1 = a_1 b_1$
$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$

Пример 23.

1. $B(t) = -t$, $A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t$
2. $B(t) = ct$, $A(ct) = a_0 + a_1 ct + a_2 c^2 t^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n a_n t^n$

Определение 3.0.4. Пусть $A(t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, $B(0) = b_0 \neq 0$ *частным* $A(t)$ *и* $B(t)$ называется $C(t) = \frac{A(t)}{B(t)} : A(t) = B(t)C(t)$.
$a_0 = b_0 c_0 \implies c_0 = \frac{a_0}{b_0}$
$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \implies c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}$
$a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} \implies c_n = \frac{a_n - b_1 c_{n-1} - b_2 c_{n-2} - \ldots - b_n c_0}{b_0}$

Пример 24. $A(t) = 1\ \{1, 0, 0, 0, \ldots\} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$
$B(t) = 1 - t\ \{1, -1, 0, 0, \ldots\} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$
$\frac{1}{1-t}$ — производящая функция в закрытой форме
$\frac{1}{1-t} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ — в открытой форме
$c_0 = \frac{a_0}{b_0} = 1$
$c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0} = \frac{0-(-1)1}{1} = 1$
$\ldots$
$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ — в открытой форме.

Теорема 3.0.2 (О разложении $\frac{1}{(1-ax)^m}$)**.**

$$\frac{1}{(1-ax)^m} = 1 + C_m^1 ax + C_{m+1}^2 a^2 x^2 + \ldots + C_{m+n-1}^n a^n x^n + \ldots$$

Доказательство. Докажем по индукции по m:

1. $m = 1 : \frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots \mid \cdot(1 - ax)$
   $1 = (1 - ax)(1 + ax + a^2x + \ldots) = (1 + ax + a^2x^2 + \ldots) - (ax + ax^2 + \ldots) = 1$

2. $m = k\ \frac{1}{(1-ax)^k} = 1 + C_k^1 ax + C_{k+1}^2 a^2x^2 + \ldots + C_{k+n-1}^n a^n x^n \ldots$

3. $m = k + 1\ \frac{1}{(1-ax)^{k+1}} = 1 + C_{k+1}^1 ax + C_{k+2}^2 a^2x^2 + \ldots + C_{k+n}^n a^n x^n \ldots$
   $\frac{1}{(1-ax)^k} = (1 - ax)\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}$ — верно. Оба выражения ПФ в закрытой форме.
   $(1 - ax)\frac{1}{(1-ax)^{k+1}} = (1 - ax)(1 + C_{k+1}^1 ax + C_{k+2}^2 a^2x^2 + \ldots + C_{k+n}^n a^n x^n) = (1 + C_{k+1}^1 ax + C_{k+2}^2 a^2x^2 + \ldots + C_{k+n}^n a^n x^n) - (ax + C_{k+1}^1 a^2x^2 + C_{k+2}^2 a^3x^3 + \ldots + C_{k+n}^n a^{n+1} x^{n+1}) = 1 + ax(C_{k+1}^1 - 1) + a^2x^2(C_{k+2}^2) + \ldots = 1 + C_k^1 ax + C_{k+1}^2 a^2x^2 + \ldots C_{n+k-1}^n a^n x^n = \frac{1}{(1-ax)^k}$

□

Теорема 3.0.3. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$*:* $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n$ *и* $a_0, a_1, \ldots, a_{n+k}$ *— заданы, тогда производящая функция для последовательности* $\{a_n\}$ *рациональна, причем* $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ *, причём степень* $P(t) \leq k - 1$*, а степень* $Q(t) = k$*.*

Доказательство. $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k$
$Q(t)A(t) = (1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{k-1} + a_n t^k + \ldots) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)t^2 + \ldots + p_{k-1} t^{k-1} + p_k t^k + \ldots \implies$
$p_0 = a_0$
$p_1 = a_1 - c_1 a_0$
$\ldots$
$p_{k-1} = a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - c_2 a_{k-3} - \ldots - c_{k-1} a_0$
$p_k = a_k - c_1 a_{k-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_0 = 0$ — из рекуррентного соотношения
$\ldots$
$p_{n+k} = a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - c_2 a_{n+k-2} - \ldots - c_k a_0 = 0$
$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ □

Теорема 3.0.4 (О рациональных производящих функциях)**.** *Если производящая функция $A(t)$ последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - рациональная, то есть $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, где $P(t)$ и $Q(t)$ — взаимно просты, то начиная с некоторого номера n последовательность $Q_0, Q_1, \dots$ задаётся линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами $Q_{n+k} = c_1 Q_{n+k-1} + c_2 Q_{n+k-2} + \dots + c_k Q_n$, где k - степень $Q(t)$, а $c_1, \dots, c_k$ - некоторые константы.*

4 Теория графов

4.1 Основные понятия

Определение 4.1.1. *Ориентированный граф* или *орграф* — это пара $\vec{G} = (V, \rho)$, где V — конечное непустое множество, элементы которого называют *вершинами*, а $\rho \subseteq V \times V$ — бинарное отношение на множестве V, которое называют *отношением смежности*, а соответствующую ему двоичную матрицу — *матрицей смежности*.

Определение 4.1.2. Пара $(u, v) \in \rho$ — это *дуга орграфа* с началом в вершине u и концом в вершине v.

Утверждение. Каждому орграфу можно сопоставить некоторое изображение, на котором вершины орграфа представляются точками, а его дуги — непрерывными кривыми, ориентированными стрелкой от начальной вершины к конечной.

Определение 4.1.3. *Неориентированный граф* или просто *граф* — это пара $G = (V, \rho)$, где ρ — это симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на множестве вершин V.

Определение 4.1.4. *Ребром* неориентированного графа называется соответствующая дуга этого графа. Ребро, образованное вершинами u и v обозначается как $\{u, v\}$. Вершины, являющиеся концами ребра называют *смежными*.

Утверждение. Из каждого орграфа можно получить неориентированный граф с помощью *симметризации* орграфа.

Определение 4.1.5. *Симметризацией* орграфа $\vec{G}$ формально называется граф $G = (V, (\rho \cup \rho^{-1}) - \Delta)$. Для того, чтобы построить изображение симметризации, необходимо в изображении орграфа $\vec{G}$ убрать стрелки на дугах и петли, а каждую пару встречных дуг (u, v) и (v, u) заменить одной линией.

Определение 4.1.6. Пусть $\vec{G} = (V, \rho)$ — некоторый орграф, $v \in V$ — некоторая вершина орграфа $\vec{G}$. *Степень исхода* вершины $d^+(v)$ — это число дуг орграфа, имеющих вершину v своим началом. *Степень захода* вершины $d^-(v)$ — это число дуг орграфа, имеющих вершину v своим концом.

Утверждение. Степени можно легко найти по матрице смежности орграфа $\vec{G}$ — степенью исхода является количество единиц в строке матрицы смежности, соответствующей вершине v, а степенью захода — количество единиц в столбце, соответствующей этой вершине.

Определение 4.1.7. В неориентированном графе *степень* $d(v) = d^-(v) = d^+(v)$ — это количество рёбер, связанных с v.

Определение 4.1.8. Пусть $\vec{G} = (V, \rho)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Спецификацией* орграфа $\vec{G}$ называется строка $(v_1^{d_1^+, d_1^-}), (v_2^{d_2^+, d_2^-}), \ldots, (v_n^{d_n^+, d_n^-})$.

Определение 4.1.9. *Степенное множество* графа G — это набор чисел, являющихся степенями вершин данного графа.

Определение 4.1.10. *Вектором степеней* графа G называется вектор, компонентами которого являются все степени всех вершин в убывающем порядке.

Определение 4.1.11. Вершина графа v называется *изолированной*, если её степень $d(v) = 0$.

Определение 4.1.12. Два графа $G_1 = (V_1, \rho_1)$ и $G_2 = (V_2, \rho_2)$ называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие $\varphi : G_1 \to G_2$ такое, что $\forall u, v \in V_1 : (u, v) \in \rho_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \rho_2$.

Определение 4.1.13. Граф $G = (V, \rho)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается K_n и каждая его вершина имеет степень $n - 1$.

Определение 4.1.14. *Дополнением* графа $G = (V, \rho)$ называется граф $\overline{G}$, который имеет то же множество вершин V и в котором две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они не соединены ребром в G.

Определение 4.1.15. *Объединением* графов $G_1 = (V_1, \rho_1)$ и $G_2 = (V_2, \rho_2)$ называется граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ \rho_1 \cup \rho_2)$.

Определение 4.1.16. *Соединением* графов $G_1 = (V_1, \rho_1)$ и $G_2 = (V_2, \rho_2)$ называется граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2,\ \rho_1 \cup \rho_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1)$. Соединение графов сохраняет все рёбра, имевшиеся в G_1 и в G_2, кроме того, каждая вершина в G_1 окажется смежной с каждой вершиной в G_2.

Теорема 4.1.1 (о степенном множестве)**.** *Для любого множества $A = \{d_1, \dots, d_k\}$, где $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, найдется граф G с $d_{k+1} + 1$ вершинами и для которого A является степенным множеством.*

Доказательство. Докажем используя метод математической индукции:

1. Пусть $k = 1$, то есть $A = \{d\}$. Для него графом будет K_{d+1}.
2. Пусть $k = 2$, то есть $A = \{d_1, d_2\}$, $d_1 < d_2 \implies G : K_{d_1} + \overline{K}_{d_2 - d_1 + 1}$
3. Пусть теорема справедлива для k. Докажем для $k+1$. $A = \{d_1, d_2, \dots, d_{k+1}\}$, где $d_1 < d_2 < \dots < d_{k+1}$. Найдётся граф, у которого число вершин будет равно $d_{k+1} + 1$, и у которого это множество будет степенным множеством. Рассмотрим множество натуральных чисел $\{d_2 - d_1, d_3 - d_1, \dots, d_k - d_1\}$. Число чисел $< k$, то есть найдётся граф G_0, у которого число вершин равно $d_k - d_1 + 1$, и это множество является степенным множеством G_0. Рассмотрим граф построенный построенный следующим образом: $G = K_{d_1} + (\overline{K}_{d_{k+1} - d_k} \cup G_0)$. Число вершин $G = d_1 + d_{k+1} - d_k + d_k - d_1 + 1 = d_k + 1$. Покажем, что это действительно степенное множество этого графа. □

Лемма 4.1.1 (о рукопожатии)**.** *Для любого графа $G = (V, \rho)$ справедливы следующие утверждения:*

1. $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2m$, *где m — число рёбер;*
2. *Количество нечётных вершин чётно;*

3. *Если в графе $n \geq 2$ вершин, то найдутся по крайней мере две вершины с одинаковой степенью.*

Доказательство.

1. Каждое ребро соединяет ровно две вершины и, значит, при сложении степеней вершин учитывается дважды.

2. Сумма степеней всех вершин чётна, согласно (1). Тогда сумма степеней всех нечётных вершин, равная разности суммы степеней всех вершин и суммы степеней всех чётных вершин, тоже чётна. Отсюда следует, нечётных вершин должно быть чётное число.

3. Если в графе G есть изолированная вершина u, т.е. $d(u) = 0$, то в нем нет вершины v такой, что $d(v) = n - 1$. Следовательно, среди возможных в принципе степеней вершин $0, 1, \ldots, n - 1$ две взаимно исключают друг друга, так что разных степеней в графе не более, чем $n - 1$, что означает, что всегда найдутся по крайней мере две вершины с одинаковой степенью. □

Теорема 4.1.2 (алгоритм построения графа по вектору степеней)**.** *Пусть нам даётся вектор $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, который вектором степеней некоторого графа. Для построения этого графа проделаем следующие шаги:*

1. *Изобразим n точек, и присвоим им метки $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Полагается $d = d_1$.*

2. *Начальная точка, имеющая метку d, соединяется ребром с d точками в порядке убывания их меток.*

3. *Начальная точка получает метку 0, метки всех точек, соединённых с начальной, уменьшаются на 1.*

4. *Если метки всех точек равны 0, то алгоритм завершается. Иначе, в качестве начальной точки необходимо выбрать точку с максимальной меткой (любую, если таких несколько). d присваивается значение, равное метке точки, выбранной начальной. Переходим к шагу (2).*

4.2 Связность графов

Определение 4.2.1. *Подграфом* графа $G = (V, \rho)$ называется граф G^*, который своими вершинами имеет некоторые вершины из G, а дугами некоторые из дуг G: $G^* = (V^*, \rho^*)$, где $V^* \subseteq V$, а $\rho^* = (V^* \times V^*) \cap \rho$.

Определение 4.2.2. *Частью* графа $G = (V, \rho)$ называется граф G^*, который своими вершинами имеет некоторые вершины из G, а дугами некоторые из дуг G: $G^* = (V^*, \rho^*)$, где $V^* \subseteq V$, а $\rho^* \subseteq (V^* \times V^*) \cap \rho$.

Определение 4.2.3. *Максимальным подграфом* называется подграф, полученный удалением одной вершины.

Определение 4.2.4. *Путём* в графе называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза. Путь можно задать просто перечислив рёбра или вершины этого пути в порядки их прохождения.

Определение 4.2.5. Путь называется *простым*, если каждая вершина пути принадлежит не более чем двум его ребрам, то есть вершины встречаются не более одного раза.

Определение 4.2.6. Путь называется *циклическим*, если его начальная и конечная вершины совпадают.

Определение 4.2.7. *Циклом* называется простой циклический путь.

Определение 4.2.8. *Цепью* называется простой нециклический путь.

Определение 4.2.9. *Длиной пути* в графе называется количество рёбер, входящих в состав этого пути.

Замечание. В n-вершинном графе наибольшая из длин цепей не превосходит $n-1$, а наибольшая из длин циклов не превышает n. Если граф имеет m ребер, то никакой его путь не может иметь длину, большую m.

Определение 4.2.10. Вершины u, v называют *связанными*, если существует путь, проходящий через них.

Замечание. По определению считают, что каждая вершина связана сама с собой, тогда отношение связности — это *отношение эквивалентности.*

Определение 4.2.11. *Расстоянием* между двумя вершинами u и v называется длина кратчайшего пути между этими вершинами. Если пути между вершинами нет, то расстояние между ними принято считать бесконечным.

Определение 4.2.12. Классы эквивалентности отношения связности называют *компонентами связности.*

Определение 4.2.13. Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены цепью.

Теорема 4.2.1. *Каждый граф является объединением своих компонент связности.*

Теорема 4.2.2 (достаточное условие связности нечётных вершин графа)**.** *Если вершины u, v — две единственные нечётные вершины в графе, то они связаны.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть они лежат в разных компонентах связности, тогда в каждом подграфе (компоненте связности) есть лишь одна нечётная вершина, что является противоречием по лемме о рукопожатии. Значит, предположение было неверно, то есть u и v обязательно связаны. □

Теорема 4.2.3 (достаточное условие связности графа)**.** *Если в n-вершинном графе число рёбер равно $m > C_{n-1}^2$, то граф является связным.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $m > C_{n-1}^2$ и граф не является связным. Рассмотрим граф $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 — произвольная компонента, а G_2 — все вершины из графа, не находящиеся в G_1. Пусть G_1 имеет k вершин. Возможны три случая:

1. $k = 1$. Тогда в G_2 $n-1$ вершин.
2. $k = n-1$. Тогда в G_2 1 вершина.
3. $2 \le k \le n-2$. Тогда в G_2 $n-k$ вершин.

Покажем, что во всех случаях есть противоречия.

1. Число рёбер с $n-1$ вершинами не превосходит числа рёбер в графе с тем же количеством вершин $m \le C_{n-1}^2$.
2. Аналогично с (1).
3. Оценим m:

$$m \le C_k^2 + C_{n-k}^2 = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k}{2} = \\ = \frac{2k^2 + n^{-}2nk - n}{2}.$$

Рассмотрим разность $C_{n-1}^2 - m$:

$$C_{n-1}^2 - m \ge C_{n-1}^2 - \frac{2k^2 + n^2 - 2nk - n}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{2k^2 + n^2 - 2nk - n}{2} = \\ = \frac{n^2 - 3n + 2 - 2k^2 - n^2 + 2nk + n}{2} = \frac{2nk - 2n + 2 - 2k^2}{2} = n(k-1) - (k^2 - 1) = \\ = (k-1)(n-(k+1)) > 0,\ k \ge 2,\ n \ge k+2 \implies C_{n-1}^2 - m > 0.$$

Получили противоречие. □

Определение 4.2.14. Вершина v называется *точкой сочленения*, если её удаление приводит к увеличению числа компонент.

Определение 4.2.15. Граф называется *неразделимым* или *двусвязным*, если в нём нет точек сочленения.

Теорема 4.2.4 (необходимое и достаточное условие неразделимости связного графа)**.** *Граф с числом вершин большим 3 неразделим $\iff$ любые его вершины принадлежат некоторому циклу.*

4.3 Планарные графы

Определение 4.3.1. *Плоское изображение графа* — изображение, в котором никакие 2 рёбра графа не пересекаются.

Определение 4.3.2. Граф называется *планарным*, если существует его плоское изображение.

Определение 4.3.3. *Деревом* называется связный граф без циклов.

Теорема 4.3.1 (необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф был деревом)**.** *Граф G — дерево $\iff$ выполняется одно из этих условий:*

1. *2 любые вершины соединены единственной цепью;*

2. *G — связный граф, и $n = m + 1$;*

3. *В G нет циклов, и $n = m + 1$.*

Доказательство. Необходимость. Мы знаем, что G — дерево, докажем 3 пункта.

1. Покажем, что любые 2 вершины соединены одной цепью. Пойдём от противного: пусть существуют 2 цепи, соединяющие 2 вершины графа $\implies$ существует цикл $\implies$ граф не является деревом. Получили противоречие.

2. Покажем, что $n = m + 1$, использую метод математической индукции:
   (a) Пусть $n = 1$. Тогда $m = 0 \implies n = m + 1$, G — связный. Аналогично выполняется для $n = 2$.
   (b) Пусть верно для всех деревьев с числом вершин $< n$. Докажем для графов с n вершинами. При удалении любого ребра, получим 2 компоненты связности с k и $n-k$ вершинами. Число рёбер в первой равно $m_1 = k-1$, а во второй $m_2 = n-k-1$. Тогда число рёбер в исходном графе будет равно $m = m_1+m_2+1 = (k-1)+(n-k-1)+1 = n - 1$, что означает, что $n = m + 1$.

3. Доказано в пункте (2).

Достаточность. Покажем, что из каждого из 3 условий следует, что граф является деревом.

1. Пойдём от противного: пусть G не является деревом $\implies$ существует хотя бы один цикл $\implies$ любые 2 вершины соединены более, чем одной цепью. Противоречие.

2. Тоже от противного: пусть G не является деревом $\implies$ существует хотя бы один цикл. Удалим все висячие вершины (вершины степени 1), тогда мы получим граф G' без висячих вершин, где $n' = m' + 1$. Посчитаем n: по лемме о рукопожатиях $2n' \leq \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m' \implies n' \leq m'$, что означает противоречие.

3. Опять от противного: пусть G не является деревом. По нашему условию G не содержит циклов. Тогда G — несвязный граф, и его можно представить как $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$, $k > 1$. $n = m + 1$ и $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k}(m_i + 1) = m + k > m + 1$, где k > 1, что означает противоречие. □

Определение 4.3.4. Для дерева $\sum d(v_i) = 2m = 2n - 2$, дерево с одной вершиной называется *тривиальным.*

Утверждение. В каждом нетривиальном дереве найдутся хотя бы 2 висячие вершины.

Доказательство. Если в нетривиальном дереве меньше двух висячих вершин, значит, их или нет, или есть одна. Рассмотрим оба этих варианта:

1. От противного. Пусть в дереве нет висячих вершин $\implies \sum_{i=1}^{n-1} d(v_i)+1 \geq 2(n-1)+1 = 2n-1$, что означает противоречие.

2. Тоже от противного. Пусть в дереве одна висячая вершина $\implies \sum_{i=1}^{n-1} d(v_i) + 1 \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1$, что также означает противоречие. □

Теорема 4.3.2 (алгоритм построения плоского изображения дерева)**.**

1. *Выбрать произвольную вершину v_0 в качестве корня дерева;*

2. *Посчитать расстояния от корня до всех вершин. Максимальное число обозначим за k.*

3. *Построим изображение: нарисуем $0..k$ горизонталей, где на i-ой горизонтали расположим вершины, расстояние от корня до которых равно i.*

Определение 4.3.5. Граф называется *плоским*, если он задаётся плоским изображением.

Определение 4.3.6. *Гранью* в плоском изображении графа называется область данного графа, ограниченная его рёбрами. У любого графа существует *внешняя* грань, которая является бесконечной. Дальше число граней будем обозначать r. Заметим, что у дерева существует только одна грань — внешняя.

Определение 4.3.7. Грань, ограниченная тремя рёбрами, называется *треугольником.* Если все грани плоского изображения графа треугольники, граф называется *триангулярным.*

Теорема 4.3.3 (Формула Эйлера)**.** *Для плоского изображения связного планарного графа справедлива формула*

$$n - m + r = 2,$$

где r — количество граней, n — число вершин, а m — число рёбер.

Доказательство. Пусть G — планарный граф с плоским изображением. Возможны 2 случая:

1. G является деревом, $n = m + 1$, $r = 1 \implies n - m + r = m + 1 - m + 1 = 2$.

2. G не является деревом $\implies$ в нём есть циклы. Удалим любое ребро цикла. Получим $m_1 = m - 1$, $r_1 = r - 1$, $n_1 = n$. Заметим, что $n_1 - m_1 + r_1 = n - m + 1 + r - 1 = n - m + r$. Продолжим процесс удаления рёбер из циклов, пока циклов не останется. Получим граф $G' : n' - m' + r' = n - m + r$. Так как в графе нет циклов, то он является деревом и подходит под условие первого случая. □

Следствие. Если в плоском графе каждая грань ограничена k рёбрами, то общее число рёбер будет равно

$$m = \frac{k(n-2)}{k-2}.$$

Доказательство. Каждая грань ограничена k рёбрами, а всего r граней, в произведении kr мы считаем каждое ребро дважды — в каждой из 2-ух граней, которые оно соединяет. Поэтому справедлива формула $kr = 2m$.

$$kr = 2m \implies r = \frac{2m}{k} \implies n - m + \frac{2m}{k} = 2 \implies n - 2 = \frac{mk - 2m}{k} \implies m = \frac{k(n-2)}{k-2}.$$

□

Следствие. В каждой триангуляции число рёбер $m = 3(n-2)$.

Доказательство. Возьмём $k = 3$ и подставим в формулу из предыдущего следствия. □

Определение 4.3.8. Плоский граф называется *максимально плоским*, если добавление в него любого ребра нарушает его плоскость. Максимально плоский граф является триангулярным.

Следствие (необходимое условие планарности)**.** В планарном графе с числом вершин $n \geq 3$, число рёбер $m \leq 3n - 6$.

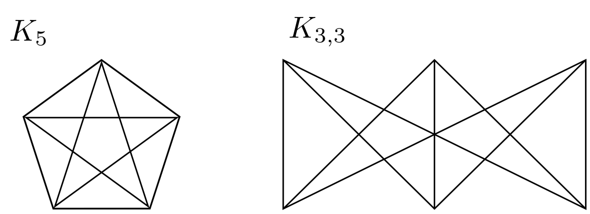
Доказательство. m не превосходит число рёбер в максимально плоском графе с n вершинами $\implies m \leq 3(n-2) = 3n - 6$. □

Следствие. В каждой триангуляции найдётся вершина, степень которой ≤ 5.

Доказательство. $k = 3$. Тогда $3r = 2m \implies r = \dfrac{2m}{3} \implies 2 = n - m + \dfrac{2m}{3} = n - \dfrac{1}{3}m$. По лемме о рукопожатии: $\sum\limits_i d(V_i) = 2m \implies \sum\limits_{i=1}^n 1 - \dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^n d(V_i) = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^n (6 - d(V_i)) = 2 \implies$ $\sum\limits_{i=1}^n (6 - d(V_i)) \geq 12 \implies 6 - d(V_i) > 0 \implies d(V_i) < 6$. □

Определение 4.3.9. Граф, получающийся из K_5 добавлением вершин на рёбрах, не в местах их пересечения, называется графом типа I.

Определение 4.3.10. Граф, получающийся из $K_{3,3}$ добавлением вершин на рёбрах, не в местах их пересечения, называется графом типа II.



Теорема 4.3.4 (критерий планарности графа Понтрягина—Куратовского)**.** *Граф планарен $\iff$ он не содержит частей, изоморфных графам типа I или II.*

Доказательство. В рамках курса доказывается только необходимость, по причине объёмности доказательства достаточности. *Необходимость.* Пойдём от противного: пусть граф содержит изоморфизм к графам типа I или II. Тогда K_5 и $K3,3$ — полные планарные графы.

- $K_5 : n = 5, m = 10$. По необходимому условию планарности $m \leq 3n - 6 = 9$, что означает противоречие.
- $K_{3,3} : n = 6, m = 9$. По формуле Эйлера: $2 = 6 - 9 + r \implies r = 5$. Оценим число рёбер. Любое ребро не принадлежит трёхэлементному циклу, но принадлежит четырёхэлементному: $4r \leq 2m \implies m \geq 10$, что означает противоречие, потому что $m = 9$. □

4.4 Эйлеров граф

Определение 4.4.1. *Эйлеровым путем* в графе называется путь, который проходит по каждому ребру, причём ровно один раз (то есть путь длины m).

Определение 4.4.2. *Эйлеров цикл* — это замкнутый эйлеров путь.

Определение 4.4.3. Граф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Теорема 4.4.1 (необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф был эйлеровым)**.** *Связный граф является эйлеровым $\iff$ все вершины чётные.*

Доказательство. Необходимость. Дан связный эйлеров граф, покажем, что все вершины чётные. Граф является эйлеровым $\implies$ в нём существует циклический эйлеров цикл. Допустим в графе существует вершина с нечетной степенью. Рассмотрим эйлеров обход графа. Заметим, что при попадании в вершину и при выходе из нее мы уменьшаем ее степень на два (помечаем уже пройденные ребра), если эта вершина не является стартовой (она же конечная для цикла). Для стартовой (конечной) вершины мы уменьшаем её степень на один в начале обхода эйлерова цикла, и на один при завершении. Следовательно вершин с нечетной степенью быть не может, то есть все вершины обязательно чётные.

Достаточность. Пусть все вершины чётные, покажем, что граф является эйлеровым. Выберем произвольную вершину v_0, двигаясь по рёбрам, окрашиваем их. Продолжим движение по неокрашенным рёбрам и в итоге вернёмся в v_0. Мы получили циклический путь, состоящий из окрашенных рёбер. Здесь возможны два случая:

1. Все рёбра окрашены $\implies$ пройден эйлеров цикл $\implies$ граф является эйлеровым.
2. Окрашены не все рёбра. Поскольку граф связный, существует ребро, один конец которого принадлежит окрашенному ребру. Продолжим движение по этому ребру пока не вернёмся в начало (конец). Если новый построенный путь охватил все рёбра, то заканчиваем процесс, иначе продолжаем до тех пор, пока не получим эйлеров путь. □

Следствие (необходимое и достаточное условие существования эйлерова пути)**.** В связном графе G существует эйлеров путь, связывающий вершины u и v $\iff$ u и v — единственные нечётные вершины в графе.

Доказательство. Необходимость. Если существует эйлеров путь, связывающий вершины u и v, то они единственные нечётные вершины. Очевидно: степень всех вершин кроме u и v будет чётной, но для первого исхода из u и последнего захода в v нет парных рёбер, то есть они окажутся единственными нечётными вершинами.

Достаточность. Пусть u и v — единственные нечётные вершины в графе G. Покажем, что существует эйлеров путь. Возможны 2 случая:

1. u и v — смежные. Удалим ребро между ними. Тут возможны 2 ситуации:
   (a) G всё ещё связный. Все вершины чётные $\implies$ по предыдущей теореме существует эйлеров путь. Добавим ребро назад и получим путь $uCuv$.
   (b) G распался на 2 компоненты связности. Степени всех вершин теперь чётные, а значит, в каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. uC_1u — в первой компоненте связности и vC_2v — во второй компоненте $\implies$ получаем эйлеров путь для изначального графа uC_1uvC_2v.
2. u и v — несмежные. Добавим между ними ребро. Тогда u и v станут чётными, а значит, все вершины чётные. По предыдущей теореме в этом графе существует эйлеров цикл $uvCu$. Тогда, если мы уберём это ребро, в графе останется путь vCu, который будет являться эйлеровым. □

Определение 4.4.4. *Эйлеров орграф* — орграф, в котором есть циклический эйлеров путь.

Определение 4.4.5. *Связный орграф* — орграф, симметризация которого является связной.

Теорема 4.4.2 (необходимое и достаточное условие для того, чтобы орграф был эйлеровым)**.** *Связный орграф является эйлеровым $\iff$ для любой вершины степень её исхода равна степени захода.*

Теорема 4.4.3 (необходимое и достаточное условие существования эйлерова пути в орграфе)**.** *В связном орграфе $\vec{G} = (V, \rho)$ существует эйлеров путь $\iff$ найдутся такие вершины u и v, что $d^+(u) = d^-(u) + 1$, $d^-(v) = d^+(v) + 1$, а степени исхода и захода остальных вершин совпадают.*

4.5 Гамильтонов граф

Определение 4.5.1. *Гамильтоновым путем* в графе называется путь, который проходит через все вершины, причём ровно один раз.

Определение 4.5.2. *Гамильтонов цикл* — это замкнутый гамильтонов путь.

Определение 4.5.3. Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

Теорема 4.5.1 (достаточные условия того, чтобы граф был гамильтоновым)**.**

1. *Если в связном графе число вершин $n \geq 3$, сумма степеней любых двух его смежных вершин u, v: $d(v) + d(u) \geq n \implies$ граф гамильтонов.*

   Доказательство. Рассмотрим самый большой простой путь (цепь) P. Пусть длина этой цепи равна k. Тогда в ней $k+1$ вершина. Назовём их $v_0, v_1, \ldots, v_k$. $d(v_0) = p$. Мы знаем, что $v_{i1}, \ldots v_{ip}$ смежные с v_0 вершины, потому что все они находятся в цепи P. То же самое верно и для v_k. Рассмотрим вершины со сдвигом на 1 влево: $v_{i1-1}, \ldots, v_{ip-1}$. Оставшиеся вершины цепи $k - p + 1$, v_k обязательно находится в этой группе. Все вершины могут быть смежны с v_k, кроме самой v_k, то есть $k - p$ вершин могут быть смежны с v_k. По условию $d(v_0) + d(v_k) \geq k \implies d(v_k) \geq n - d(v_0) = n - p \geq k - p + 1$. Значит существует хотя бы $k - p + 1$ вершин, смежных с v_k. Значит есть хотя бы одна вершина, которая не принадлежит этой группе вершин, она будет смежна с v_0. Получается, что существует гамильтонов цикл: из v_0 до v_{ij-1}, vk, назад до v_{ij}, смежному с v_0 и в v_0. $v_0 P v_{ij-1} v_k P v_{ij} v_0$. Но это изменённый граф, в оригинальном найдётся ребро v_t связанное с вершиной v^*, непринадлежащей нашей цепи. В нём цепь: $v^* v_t P v_0 v_{ij} P v_k v_{ij-1} P v_{t+1}$ длины $k - 2 + 3 = k + 1$. Значит изначальная цепь P была не самая длинная. Противоречие. □

2. *Если в графе $n \leq 3$ и $d(v_i) \geq \dfrac{n}{2}$ для всех i, граф является гамильтоновым.*

4.6 Покрывающее дерево

Определение 4.6.1. *Вес ребра* — значение, поставленное в соответствие ребру взвешенного графа.

Определение 4.6.2. *Сеть* — связный граф $G = (V, \rho)$, с положительными весами на рёбрах.

Определение 4.6.3. *Вес сети* — сумма весов всех рёбер.

Определение 4.6.4. *Покрывающее (остовное) дерево сети* — дерево $T = (V, \rho^*)$, где $\rho^* \subseteq \rho$, для сети $G = (V, \rho)$.

Определение 4.6.5. *Минимальное покрывающее дерево* — покрывающее дерево сети, имеющее наименьший вес сети среди всех остальных покрывающих деревьев.

Теорема 4.6.1 (алгоритм Краскала нахождения минимального покрывающего дерева сети)**.**

1. *Составить список ребер сети в порядке возрастания их весов;*
2. *Первое из списка ребро перекрашивается, оба его конца образуют компоненту;*
3. *Рассматриваем следующее ребро:*
   (a) *Если оба конца ребра принадлежат одной и той же компоненте, ребро не окрашивается и не добавляется в компоненту;*
   (b) *Если один конец лежит в некоторой компоненте, а второй не принадлежит ни одной из компонент, это ребро окрашивается, 2-й конец ребра помещается в компоненту, содержащую 1-й конец ребра;*
   (c) *Если один конец ребра принадлежит одной компоненте, а второй конец ребра принадлежит другой другой компоненте, то ребро окрашивается, компоненты, содержащие концы этого ребра, сливаются в одну;*
   (d) *Если оба конца не принадлежат никаким компонентам, ребро окрашивается и его концы образуют новую компоненту.*
4. *Если рассмотрены все рёбра, работа алгоритма завершена, дерево, составленное из окрашенных ребер и есть минимальное остовное дерево. Иначе, возвращаемся к шагу (3).*

4.7 Изоморфизм графов

Теорема 4.7.1 (об изоморфизме графов)**.** *Пусть даны орграфы $\vec{G} = (U, \alpha)$ и $\vec{H} = (V, \beta)$, A — матрица смежности G, B — матрица смежности H. Взаимно-однозначное соответствие $\varphi : U \to V$ является изоморфизмом графов $\iff$ $A\Phi = \Phi B$, где Φ — матрица φ.*

Доказательство. Докажем, что $\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \beta$. Это означает, что нужно доказать, что $\forall u \in U$ $(\varphi(\alpha(u))) = \beta(\varphi(u))$.

Необходимость. Возьмем произвольную вершину $\nu \in \varphi(\alpha(u)) \implies \varphi^{-1}(\nu) \in \alpha(u) \implies (u, \varphi^{-1}(\nu)) \in \alpha$. Используем тот факт, что φ — изоморфизм $\implies (\varphi(u), \nu) \in \beta \implies \nu \in \beta(\varphi(u))$. Получим $\varphi(\alpha(u)) \subseteq \beta(\varphi(u))$.

Возьмём произвольную вершину $\nu \in \beta(\varphi(u)) \implies (\varphi(u), \nu) \in \beta$. Так как φ - изоморфизм $\implies (u, \varphi^{-1}(\nu)) \in \alpha \implies \varphi^{-1}(\nu) \in \alpha(u) \implies \nu \in \varphi(\alpha(u))$. Получаем $\varphi(\alpha(u)) \subseteq \beta(\varphi(u))$. В итоге получаем $\varphi(\alpha(u)) = \beta(\varphi(u))$.

Достаточность. Пусть $\varphi(\alpha(u)) = \beta(\varphi(u))$. Докажем $(u_1, u_2) \in \alpha \iff (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$. Возьмём произвольную дугу первого орграфа $(u_1, u_2) \in \alpha \implies u_2 \in \alpha(u_1) \implies \varphi(u_2) \in \varphi(\alpha(u_1)) = \beta(\varphi(u_1)) \implies (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta$. Возьмём произвольную дугу второго орграфа $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in \beta \implies \varphi(u_2) \in \beta(\varphi(u_1)) = \varphi(\alpha(u_1)) \implies u_2 \in \alpha(u_1) \implies (u_1, u_2) \in \alpha$. □

Теорема 4.7.2 (проверка на изоморфизм двух графов по их матрицам смежности)**.**

1. *Выписываются спецификации двух орграфов. Выписывается матрица Φ предполагаемого изоморфизма φ как матрица с неопределёнными коэффициентами: $\Phi = (\varphi_{ij})$. Эта матрица заполняется следующим образом: если вершина u^{d^+, d^-} первого графа может перейти в вершину v^{d^+, d^-} второго графа (равные степени исхода и захода), то в матрице пишем 1 (если из вершины первого орграфа можно лишь единожды попасть в вершину второго орграфа, а если не единожды — пишем φ_{ij}, где i — номер столбца, j — номер строки), иначе — 0;*

2. *Составляется матричное уравнение $A\Phi = \Phi B$. Решаем систему, находим Φ;*

3. *Если в каждом столбце и строке ровно одна единица, то изоморфизм есть, иначе — нет.*

4.8 Отношение достижимости

Определение 4.8.1. *Маршрут* — это последовательность смежных дуг $(v_{k-1}, v_k) \in \rho$, то есть конец каждой дуги кроме последней является началом следующей. В маршруте дуги могут повторяться.

Определение 4.8.2. *Циклический маршрут* — это маршрут, в котором начальная вершина совпадает с конечной.

Определение 4.8.3. *Длина маршрута* — количество дуг, входящих в состав маршрута.

Определение 4.8.4. *Путь* — маршрут в котором каждая дуга встречается не более одного раза.

Определение 4.8.5. *Простой путь* — путь в котором каждая вершина принадлежит не более чем двум дугам.

Определение 4.8.6. *Контур* — простой циклический путь.

Определение 4.8.7. *Бесконтурный путь* — простой нециклический путь. Также бесконтурный путь называют *ориентированной цепью.*

Определение 4.8.8. Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u, если существует путь из u в v. Достижимость задаёт бинарное отношение достижимости.

Определение 4.8.9. Петля (контур длины 1) называется *тривиальным контуром.*

Определение 4.8.10. *Бесконтурный орграф* — это граф, не имеющий нетривиальных контуров. То есть у него могут быть петли, но не может быть контуров длины ≥ 2.

Теорема 4.8.1 (необходимое и достаточное условие, чтобы отношение достижимости являлось порядком)**.** *Отношение достижимости является порядком $\iff$ граф является бесконтурным.*

Определение 4.8.11. *Расстоянием* между 2-мя вершинами называют длину кратчайшего из путей, соединяющего эти вершины.

Определение 4.8.12. Определим *матрицу маршрута* как матрицу M такую, что:

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, (v_i, v_j) \in \rho \\ m_{ij} = 0, (v_i, v_j) \notin \rho \end{cases}$$

Теорема 4.8.2 (матричный критерий существования маршрута)**.** *Элемент $m_{ij}^{(k)}$ матрицы M^k равен 1 $\iff$ существует маршрут длины k из v_i в v_j.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции:

1. Проверим базис индукции: $k = 1 \implies m_{ij} = 1$.
2. Положим, что выполняется для некого k: $m_{ij}^{(k)} = 1$.
3. Покажем, что выполняется $k+1$. $m_{ij}^{(k+1)} = 1$ (из перемножения i-ой строки k-ой степени на j-столбец матрицы первой степени) $\iff \sum\limits_{s=1}^{n} m_{is}^{(k)} \cdot m_{si} = 1 \iff \exists s_o : m_{is_0}^{(k)} = 1 \wedge m_{s_0 j} = 1 \implies$ есть путь из v_i в v_j длины $k+1$. □

Следствие. $\forall i \neq j$: v_j достижима из v_i в n-вершинном орграфе $\iff$ в матрице $D = \sum\limits_{k=1}^{n-1} M^k + E$ элемент $d_{ij} = 1$. (Единичная матрица добавляется в сумму, чтобы охватить случай $i = j$).

Определение 4.8.13. Матрицу $D = \sum\limits_{k=1}^{n-1} M^k + E$ называют *матрицей отношения достижимости.*

Теорема 4.8.3 (рекурентная формула для построения матрицы достижимости)**.**

1. *$M_1 = M$;*
2. *$M_{k+1} = M_k \cdot M_1 + M_1$;*
3. *Если $M_k = M_{k+1}$ (дошли до конца), то $D = M_k + E$, иначе $k = k+1$ и переходим к шагу (2).*

Определение 4.8.14. Две вершины *взаимно достижимы*, если они достижимы друг из друга. Отношение взаимной достижимости обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, другими словами, это эквивалентность на множестве вершин графа.

Определение 4.8.15. *Сильно-связный орграф* — орграф, в котором любые две вершины взаимно достижимы. Отношение взаимной достижимости универсально на этом графе.

Определение 4.8.16. *Классы взаимной достижимости — сильно-связные компоненты орграфа*, которые называют *слоями*.

Теорема 4.8.4 (критерий существования ориентации, приводящий к сильно-связному графу)**.** *В связном неориентированном графе можно ввести ориентацию, приводящую к сильно-связному орграфу $\iff$ каждое ребро в неориентированном графе входит в некоторый цикл.*

Определение 4.8.17. Пусть орграф $\vec{G} = (V, \rho)$, $\varepsilon \subseteq V \times V$ — отношение взаимной достижимости. *Фактор-графом* орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $\vec{G}/\varepsilon$, вершинами которого являются классы эквивалентности ε. При этом $(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) \in \rho^*$, если существует $u' \in \varepsilon(u)$ и $v' \in \varepsilon(v)$, такие, что $(u', v') \in \rho$.

Определение 4.8.18. *Связным орграфом* называется орграф со связной симметризацией.

4.9 База графа

Определение 4.9.1. *Источником* в орграфе называется вершина, недостижимая из любой другой вершины.

Определение 4.9.2. *Стоком* в орграфе называется вершина, из которой не достижима любая другая вершина.

Определение 4.9.3. *Базой* орграфа называют подмножество вершин $V_0 \subseteq V$ такой, что любая вершина достижима из некоторой другой вершины из V_0, а любые две вершины из V_0 взаимно недостижимы.

Теорема 4.9.1 (о базе)**.** *Подмножество $V_0 \subseteq V$ является базой орграфа $\iff$ оно образовано вершинами, взятыми по одной из каждого источника фактор-графа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть V_0 — база орграфа. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V_0$. Получим два случая:

1. $v \in \varepsilon(v)$ — не источник в факторграфе $\implies$ так как это не источник, то v достижима из вершины $v_k \in \varepsilon(v_k)$.

2. $v \in \varepsilon(v)$ — и это источник. Тогда вершина $\varepsilon(v)$ в факторграфе недостижима из любой другой вершины $\implies v$ недостижима из любой другой вершины в $\vec{G}$. Но v принадлежит базе $\implies v \in V_0 \implies$ противоречие первому условию определения базы. То есть в V_0 находятся взятые по одной вершины из источника факторграфа $\vec{G}/\varepsilon$.

Достаточность. V_0 - множество образованное из вершин, взятых по одной из каждого источника факторграфа. Покажем, что V_0 — база. То есть покажем, что любая вершина орграфа достижима из некоторой вершины $\in V_0$ и любые две вершины в V_0 недостижимы.

Рассмотрим произвольную вершину в орграфе $\vec{G} : v \in V \implies v \in \varepsilon(v)$

1. Если $\varepsilon(v)$ — источник, то по условию представитель V_0.

2. Если $\varepsilon(v)$ — не источник, то $\varepsilon(v)$ достижима из $\varepsilon(v_1)$. Аналогично с вершинами $\varepsilon(v_2)$ и так далее. В факторграфе $\varepsilon(v)$ достижима из $\varepsilon(v_k)$. Пусть $u \in \varepsilon(v_k)$, тогда v достижимо из $u \implies v \in V_0$. □

Теорема 4.9.2 (матричный критерий взаимной достижимости двух вершин)**.** *Вершины v_i и v_j в $\vec{G}$ взаимно-достижимы $\iff$ в матрице достижимости D строки, соответствующие этим вершинам равны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть v_i, v_j взаимно-достижимы. Выберем произвольную вершину v — она будет либо взаимно достижима с v_i и v_j, либо нет:

$$D = \begin{array}{c} \\ v_i \\ \\ v_j \end{array} \begin{array}{c} v \\ \left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & & \\ & 0 & \end{array}\right) \end{array}$$

Заметим, что v — произвольное, что означает, что это возможно для всех строк и столбцов.

Достаточность. Пусть есть матрица:

$$D = \begin{array}{c} \\ v_i \\ \\ v_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_i & v_j \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & \\ 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$d_{ij} = d_{ji} = 1 \implies v_i$ и v_j — взаимно-достижимы. □

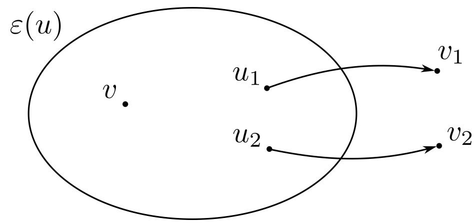
4.10 Обходы в орграфах

Определение 4.10.1. *Обходом орграфа* называется маршрут, содержащий все дуги орграфа.

Теорема 4.10.1 (необходимое и достаточное условие существования обхода)**.** *В связном орграфе существует обход $\iff$ для любого слоя существует не более одной дуги с началом (концом) в этом слое и концом (началом) вне этого слоя.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в графе существует обход. Нужно доказать, что для каждого слоя существует не более одной дуги с началом в этом слое и концом вне него. Докажем от противного. Существует слой и две дуги с началом в этой компоненте и концом вне него.

Пусть в графе есть обход, покажем, что для любого слоя существует не более одной дуги с началом в этом слое и концом в другом. Пойдём от противного: пусть существует следующий слой и две дуги:



Очевидно, что v_1 достижима из v, так как u_1 достижима из v, а v_1 достижима из u_1.

Пусть в обходе сначала проходится дуга (u_1, v_1), потом (u_2, v_2), тогда П: $\Pi = \Pi_1(u_1, v_1) \cdot \Pi_2(u_2, v_2) \cdot \Pi_3 \ldots$. Так как по свойству обхода нужно пройти все рёбра, а v_2 по построению достижима только из u_2, то существует путь, соединяющий v_1 и u_2. Тогда u_2 достижима из v_1, и, соответственно, v_2 достижима из v_1. Следовательно, v_1 достижима из v, u_2 достижима из v и из v_1. Это означает, что v_1 входит в эту же компоненту сильной связности. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть имеется связный орграф, в котором для каждого слоя существует не более одной дуги с началом в нём и концом вне его. То есть существует единственный слой в этом графе, в который не входит ни одна дуга и единственный слов, из которого не выходит ни одной дуги. Тогда обход графа можно представить следующим образом: $\Pi_1(v_1, v_2) \cdot \Pi_2(v_2', v_3) \cdot \cdots \cdot \Pi_{k-1}(v_{k-1}', v_k) \cdot \Pi_k$, где $v_i' = v_i \ \forall i \in [2, k-1]$. □

Определение 4.10.2. Путь длины равной количеству дуг называется *эйлеровым путём в орграфе.* Если существует циклический эйлеров путь, то орграф называется эйлеровым (проходит по всем дугам).

Теорема 4.10.2 (необходимое и достаточное условие эйлеровости графа)**.** *Связный орграф является эйлеровым* $\iff \forall v : d^+(v) = d^-(v)$.

Теорема 4.10.3 (необходимое и достаточное условие существования эйлерового пути)**.** *В связном орграфе существует эйлеров путь* $\iff \exists u, v : d^+(u) = d^-(u) + 1,\ d^-(v) = d^+(v) + 1$.

Определение 4.10.3. Пусть количество вершин в орграфе равно n. Бесконтурный путь длины n называется *гамильтоновым контуром.* Если в орграфе существует гамильтонов контур, то граф называется гамильтоновым. *Гамильтонова цепь* — путь, проходящий через все вершины, причём по одному разу.

Теорема 4.10.4 (стандартное упрощение маршрута)**.** *Пусть имеется маршрут* Π *из* u *в* v: $v_0 = u, v_1, \ldots, v_i = v_0, \ldots, v_k = v$.

Предположим, маршрут имеет циклические участки. Проходим маршрут с конца и ищем $v_i = v_0$. *При нахождении — удаляем всё от* v_1 *до* v_i. *Получаем новый маршрут* $\Pi_1 : v_i =$

$v_0, v_{i+1}, \ldots, v_j = v_{i+1}, \ldots, v_k = v$. *Снова проходим маршрут с конца и ищем первое* $v_j = v_{i+1}$. *При нахождении — удаляем всё от* v_{i+2} *до* v_j. *Повторяем алгоритм пока мы не удалим все циклы и не получим маршрут* $\Pi^* : v_0 = u, v_{i+1}, v_{j+1}, \ldots, v_k = v$, *такой, что* Π^* *— бесконтурный.*

Определение 4.10.4. Если конец маршрута Π_1 совпадает с началом маршрута Π_2, то $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ называется *композицией* маршрутов.

Утверждение. Для любых трёх маршрутов Π_1, Π_2, Π_3: $\quad \Pi_1 \cdot (\Pi_2 \cdot \Pi_3) = (\Pi_1 \cdot \Pi_2) \cdot \Pi_3$.

Определение 4.10.5. *Связкой* маршрутов называется множество маршрутов, имеющих одну и ту же начальную вершину и одну и ту же конечную вершину. Обозначим как $B(u, v)$, где u — начало маршрутов, v — конец маршрутов.

Определение 4.10.6. *Объединением* связок называется $B_i(u, v) \cup B_j(u, v)$, то есть может применяться только к связкам с одинаковым началом и концом.

Определение 4.10.7. *Композицией* связок называется $B_i(u, v)$ и $B_j(v, \omega)$ называется связка $B(u, \omega) = B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega) = \{\Pi_1 \cdot \Pi_2 \,|\, \Pi_1 \in B_i(u, v), \Pi_2 \in B_j(v, \omega)\}$.

Определение 4.10.8. *Пустой связкой* $\mathbf{O}$ называется множество, не содержащее ни одного маршрута и не относится ни к одной паре вершин. $B \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot B = \mathbf{O}$.

Лемма 4.10.1 (свойства операций над связками)**.** *Пусть* u, v, ω, t *— произвольные вершины орграфа. Для связок маршрутов в орграфе существуют следующие отношения:*

1. $B_i(u, v) \cup B_j(u, v) = B_j(u, v) \cup B_i(u, v)$;
2. $B_i(u, v) \cup (B_j(u, v) \cup B_k(u, v)) = (B_i(u, v) \cup B_j(u, v)) \cup B_k(u, v)$;
3. $B \cup \mathbf{O} = B$;
4. $B_i(u, v) \cdot (B_j(v, \omega) \cdot B_k(\omega, t)) = (B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega)) \cdot B_k(\omega, t)$;
5. $B_i(u, v) \cdot (B_j(v, \omega) \cup B_k(v, \omega)) = (B_i(u, v) \cdot B_j(v, \omega) \cup (B_i(u, v) \cdot B_k(v, \omega))$,
   $(B_i(u, v) \cup B_j(u, v)) \cdot B_k(v, \omega) = (B_i(u, v) \cdot B_k(v, \omega)) \cup (B_j(u, v) \cdot B_k(v, \omega))$.

Определение 4.10.9. Имеем $\vec{G}(V, \rho)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. *Матрицей соединений* орграфа $\vec{G}$ будем обозначать матрицу A:

$$A = (a_{ij}), \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} v_i \cdot v_j, & (v_i, v_j) \in \rho \\ 0, & (v_i, v_j) \notin \rho \end{cases}$$

$A^k = (a_{ij}^{(k)})$, где $a_{ij}^{(k)}$ — связка маршрутов длины k из v_i в v_j.

Теорема 4.10.5 (алгоритм поиска всех Гамильтоновых путей в графе)**.**

1. $A_1 = A$, $k = 1$, *где* A *— матрица соединений;*

2. *По матрице A_k строим $\overline{A}_k$, которая получается из A_k применением к ней процедуры стандартного упрощения всех маршрутов в A_k с последующим удалением всех цепей длины $< k$.*
   Если $\overline{A}_k = 0$ содержит только пустые связки, то гамильтоновых путей нет, конец алгоритма;
   Если $\overline{A_k} \neq 0$ и $k = n - 1$, то $\overline{a}_{ij}^{(k)}$ содержит все гамильтоновы цепи из v_i в v_j;

3. $A_{k+1} = \overline{A}_k \cdot \overline{A}_1$.

   - *Если $k = n - 1$, то конец алгоритма. Если хотя бы один элемент главной диагонали равен 0, то гамильтоновых контуров нет. Иначе любой элемент на главной диагонали содержит все гамильтоновы контуры орграфа.*
   - *Если $k \neq n - 1$, то $k = k + 1$ и переход к шагу (2).*

Определение 4.10.10. *Ориентированная сеть* или *орсеть* — это связный граф с положительными весами на дугах. Если существует вершина, из которой достижимы все остальные вершины, то такая вершина называется *корнем*, а сеть *корневой*.

Определение 4.10.11. *Вес сети* — это сумма всех дуг сети.

Определение 4.10.12. *Кратчайший путь* — путь, сумма весов дуг которого наименьшая из всех путей из корня до вершины.

Теорема 4.10.6 (алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути от одной вершины сети до всех остальных)**.** *Положим, что v_0 — это корень сети. Тогда:*

1. *Метка корня $\lambda(v_0) = 0$, другие $\lambda(v) = \infty \quad \forall v \neq v_0$. Множество окрашенных вершин $V(U) = \{v_0\}$;*

2. *Для вех неокрашенных вершин пересчитываются их метки: $\lambda(v) = \min(\lambda(v), \lambda(u) + \omega(u, v))$, где $u \in U$, ω — вес дуги. Далее выбирается вершина с наименьшей меткой, окрашивается, а также окрашивается одна из дуг, которая доставляет минимум для этой вершины и является инцидентной;*

3. *Если $U = V$, что означает, что все вершины окрашены, то алгоритм завершается. Получили $\lambda(v)$ — длина кратчайшего пути из v_0 в v, а система окрашенных дуг — это система кратчайших путей из корня в любую другую вершину.*

4.11 О бесконтурных графах

Определение 4.11.1. Говорят, что орграф *правильно занумерован*, если для любого ребра $(v_i, v_j) \in \rho$: $i \leq j$.

Теорема 4.11.1 (необходимое и достаточное условие существования правильной нумерации в орграфе)**.** *В орграфе $\vec{G}$ существует правильная нумерация $\iff$ орграф является бесконтурным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует правильная нумерация вершин, покажем, что граф является бесконтурным. Пойдём от противного: пусть $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_1}$ — есть контур. Если нумерация правильная, то: $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_1$ — противоречие.

Достаточность. Пусть $\vec{G}$ — бесконтурный орграф, покажем, что у него существует правильная нумерация. Пусть δ — порядок на множестве вершин $\vec{G}$, тогда мы можем построить его диаграмму. По этой диаграмме перенумеруем все вершины. С нижнего уровня к верхнему, нумеруя слева направо, и получим правильную нумерацию. □

Следствие. В каждом бесконтурном графе есть по крайней мере один источник и один сток.

Доказательство. Если граф бесконтурный, то существует правильная нумерация вершин: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Нет дуги, входящей в v_1, т.е. v_1 является источником. Нет дуги, исходящей из v_n, т.е. v_n — это сток. □

Следствие. В каждом бесконтурном графе существует единственная база.

Следствие. В каждом неориентированном графе можно ввести ориентацию рёбер так, что граф превращается в бесконтурный орграф.

Следствие. Пусть *направленный граф* — это орграф с антисимметричным отношением смежности, то есть в нём нет встречных дуг. Тогда в каждом направленном графе можно переориентировать дуги так, что граф превратится в бесконтурный.

Теорема 4.11.2 (критерий бесконтурности графа)**.** *Орграф $\vec{G}$ является бесконтурным $\iff$ при некоторой нумерации его вершин, матрица смежности оказывается верхней треугольной матрицей, т.е элементы ниже главной диагонали равны 0.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\vec{G}$ — бесконтурный орграф $\implies$ существует правильная нумерация вершин. Покажем, что все элементы, не равные 0, выше или на главной диагонали. $m_{ij} = 1 \implies (v_i, v_j) \in \rho \implies i \leq j$. А если $i \leq j$, то элемент матрицы лежит выше или на главной диагонали. Значит матрица — верхняя треугольная.

Достаточность. Пусть, при некоторой нумерации, матрица смежности орграфа — верхняя треугольная $\implies (v_i, v_j) \in \rho \iff i \leq j$, что означает, что мы имеем правильную нумерацию, а граф является бесконтурным. □

Определение 4.11.2. *Раскконтуривание* — любая совокупность дуг, удаление которой превращает граф в бесконтурный.

Определение 4.11.3. Раскконтуривание называется *минимальным*, если никакое его подмножество не является раскконтуриванием.

Определение 4.11.4. *Оптимальное раскконтуривание* — это раскконтуривание, содержащее минимальное число дуг.

Теорема 4.11.3 (о раскконтуривании)**.** *Минимальное раскконтуривание связного орграфа не нарушает его связности.*

Доказательство. Пойдём от противного, пусть минимальное расконтуривание $\rho^* \subset \rho$ нарушает связность и пусть дуга $(u, v) \in \rho^*$ — первая дуга, приводящая к нарушению связности. (u, v) не входит ни в один из оставшихся контуров $\implies$ (u, v) избыточна в ρ^*, что противоречит минимальности ρ. □

Определение 4.11.5. *Полный бесконтурный граф* — это рефлексивный бесконтурный граф, в котором добавление любой дуги приводит к образованию контура.

Теорема 4.11.4 (о единственности полного бесконтурного графа)**.** *Для любого натурального числа n существует единственный, с точностью до изоморфизма, полный бесконтурный граф с n вершинами.*

Доказательство. Пусть $\vec{G} = (V, \alpha)$ и $\vec{H} = (U, \beta)$ полные бесконтурные графы. Поскольку $\vec{G}$ является бесконтурным, $\forall i \leq j$ найдётся дуга $(v_i, v_j) \in \alpha$. Рассуждая аналогичным образом для $\vec{H}$, получим, что $\forall i \leq j$ найдется дуга $(u_i, u_j) \in \beta$. Рассмотрим биекцию $\varphi: \ v_i \to u_i$, то есть дуги одного орграфа отображаются в дуги второго орграфа. Возьмём произвольную дугу $(v_i, v_j) \in \alpha$ и, т. к. вершины правильно занумерованы, $i \leq j$. Тогда, если $\vec{H}$ — полный граф и $(u_i, u_j) \in \beta$, получим, что $(\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in \beta \implies$ биекция сохраняется относительно смежности, что означает, что графы изоморфны. □

Замечание. Матрица полного бесконтурного графа всегда будет иметь нули под главной диагональю, а все остальные элементы, находящиеся на главной диагонали и выше неё будут равны единице. Для такой матрицы $M^k = M \implies$ матрица достижимости $D = M$ и $\delta = \rho$, т.е. отношение достижимости является отношением смежности.