легко устанавливается из правил дифференцирования, но мы не будем специально следить за этим, чтобы не удлинять изложение.

Пример 1. Равномерное движение:

$$z(t)=z_0+vt.$$

Тогда $z'(t)=v$ — постоянная величина.

Пример 2. Равноускоренное движение:

$$z=z_0+v_0t+\frac{at^2}{2},$$

здесь v_0 — начальная скорость, a — ускорение. В этом случае $z'(t)=v_0+at$ по известным правилам дифференцирования. Напомним, что если даны две функции $f(t)$, $g(t)$ и постоянная a, то $(f+g)'=f'+g'$, $(af)'=af'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ (последняя формула верна в случае, когда $g(t)\neq 0$ в рассматриваемой точке t). Из предпоследней формулы следует, что $(t^2)'=2t$.

При любом целом n легко доказать (например, индукцией по n), что $(t^n)'=nt^{n-1}$. Можно доказать, что при $t>0$ эта формула верна и для нецелых n (об этом ещё будет идти речь ниже).

Укажем геометрический смысл производной: если нарисовать график функции $z=z(t)$, то $z'(t)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t (рис. 1).

Правило дифференцирования сложной функции: если даны две функции $F(z)$ и $z(t)$, то для функции $g(t)=F(z(t))$ производную можно найти по формуле

$$g'(t)=(F(z(t)))'=F'(z(t))\,z'(t),$$

вытекающей из того, что

$$g'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F(z(t))}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta F}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=F'(z(t))\,z'(t)$$

(здесь использовалось, что если $\Delta t\to 0$, то и $\Delta z\to 0$).

Правило дифференцирования обратной функции. Пусть функция $z=f(t)$ строго монотонна на отрезке $[t_1, t_2]$ и имеет производную в каждой точке этого отрезка. Строгая монотонность означает, что функция f либо возрастающая (если $t'<t''$, то $f(t')<f(t'')$), либо убывающая (если $t'<t''$, то $f(t')>f(t'')$). Будем для определённости считать функцию f возрастающей. Тогда множество значений функции f на отрезке $[t_1, t_2]$ представляет собой отрезок $[z_1, z_2]$, где $z_1=f(t_1)$, $z_2=f(t_2)$ (рис. 2). При этом каждому значению $z\in[z_1, z_2]$ отвеча-

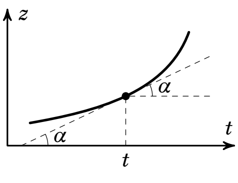

Рис. 1